

Práctica 3 MNEDP

Diego Rodríguez Atencia

November 2020

Índice

1. Introducción	2
2. planteamiento del método de elementos finitos en la forma débil	3
3. solución teórica de la ecuación	4
4. prueba de existencia y unicidad con el teorema de Lax-Milgram	5
5. Análisis de error en H^1	6
6. Lema de Céa	7
7. Cotas de error en términos de epsilon	7
8. Gráfico y justificación	8
9. Análisis de error a posteriori	10

1. Introducción

En la siguiente práctica, aplicaremos la teoría vista en clase para resolver el problema propuesto, que es el siguiente:

Estimación de error a posteriori

Se considera el problema de valores en la frontera:

$$-\epsilon u'' + u' = 1, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Se denota por u_h la aproximación obtenida utilizando elementos finitos lineales. Se desea estimar a posteriori el error $\|u - u_h\|_{L^2(0,1)}$.

- Escriba un programa en matlab que calcule la aproximación u_h perteneciente al espacio de elementos finitos lineales.
- Dibuje varias aproximaciones correspondientes a distintos valores de h y compárelas con la gráfica de la solución teórica. Observe que es posible obtener la expresión de la solución exacta en el problema planteado y por tanto es posible dibujar su gráfica. Estudie el comportamiento de las aproximaciones para distintos valores del parámetro ϵ .
- Calcule el estimador de error a posteriori estudiado en clase. Dibújelo frente a h para distintos valores de h . ¿Qué pendiente tiene la recta que obtiene?
- Compare los errores estimados con el estimador con los errores reales que se representan en la siguiente tabla correspondiente a $\epsilon = 0.1$.

$n = 1/h$	$\ u - u_h\ _{L^2(0,1)}$
10	0.0151
20	0.0039
40	9.7229e-4
80	2.4342e-4

Como primer paso, abordaremos el problema como un problema de métodos finitos. Expliquemos primero este método.

2. planteamiento del método de elementos finitos en la forma débil

Dado el producto escalar en L^2 entre dos funciones, en un dominio D

$$\langle f, g \rangle = \int_D fg dx$$

Podemos usarlo para crear una forma débil de la siguiente EDO.

$$-\epsilon u'' + u' = 1, \quad u(0) = u(1) = 0$$

(De ahora en adelante, cada vez que nos refiramos a Ω será a $[0, 1]$) Multiplicando a ambos lados por un elemento del espacio L^2 obtenemos:

$$\int -\epsilon u'' v dx + \int u' v dx = \int v dx, \quad u(0) = u(1) = 0$$

Que se trata de la forma débil de la ecuación. La solución de esta ecuación, u , tal que la cumple para todo $v \in L^2$, será una solución débil de la ecuación original.

Usando la regla de la cadena, se infiere que:

$$\int \epsilon u' v' dx + \int u' v dx = \int v dx, \quad u(0) = u(1) = 0$$

Como el espacio de las funciones L^2 es inmalipulable computacionalmente, vamos a restringir el espacio sobre el que está v al espacio lineal compuesto por las funciones base siguientes: Sea $V_n = \langle \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n \rangle$ el espacio generado por estas funciones:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}] \\ 0, & x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

De esta forma, gracias a que esta ecuación es lineal, podemos sustituir para todo miembro de esta base en u y v y conseguir una representación matricial del problema: supongamos que aproximamos u mediante u_h tal que:

$$u_h = \sum_{i=1}^n U_i \phi_i(x)$$

Donde los U_i son los nodos escogidos de la malla. Sustituyamos entonces u por u_h y v por $\phi_j(x)$

$$\int_{\Omega} \epsilon \sum_{i=1}^n U_i \phi_i(x)' \phi_j(x)' dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n U_i \phi_i(x)' \phi_j(x) dx = \int_{\Omega} \phi_j(x) dx$$

Dado que es una suma finita, podemos sacarla de la ecuación. La ecuación, tras unas pequeñas operaciones nos queda de la siguiente forma:

$$\epsilon \sum_{i=1}^n U_i \int_{\Omega} \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx + \sum_{i=1}^n U_i \int_{\Omega} \phi_i'(x) \phi_j(x) dx = \int_{\Omega} \phi_j(x) dx$$

Salta a la vista que resulta muy conveniente utilizar una notación matricial para abordar este problema:

$$AU = F$$

Donde:

$$A = (\epsilon \int_{\Omega} \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx + \int_{\Omega} \phi'_i(x) \phi_j(x) dx)_{i,j=1,\dots,n}$$

También cabe destacar que

$$A = \epsilon K + M$$

donde

$$K = \{ \int_{\Omega} \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx \}_{i,j=1,\dots,n}$$

$$M = \{ \int_{\Omega} \phi'_i(x) \phi_j(x) dx \}_{i,j=1,\dots,n}$$

3. solución teórica de la ecuación

La ecuación es una ecuación diferencial autónoma, por lo que es relativamente sencillo encontrar la solución teórica. Primero hallamos la solución general de la ecuación, es decir, el $u(x)$ tal que:

$$-\epsilon u'' + u' = 0$$

Podemos despejar de tal manera que nos llevemos todo lo que dependa de u a la izquierda, con lo que podríamos integrar la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{u''}{u'} &= \epsilon \\ \Rightarrow \int_0^x \frac{u''}{u'} dt &= \frac{x}{\epsilon} + C \Rightarrow \log u' = \frac{x}{\epsilon} + C \\ \Rightarrow u' &= e^{\frac{x}{\epsilon}} \Rightarrow u = \epsilon e^{\frac{x}{\epsilon}} \end{aligned}$$

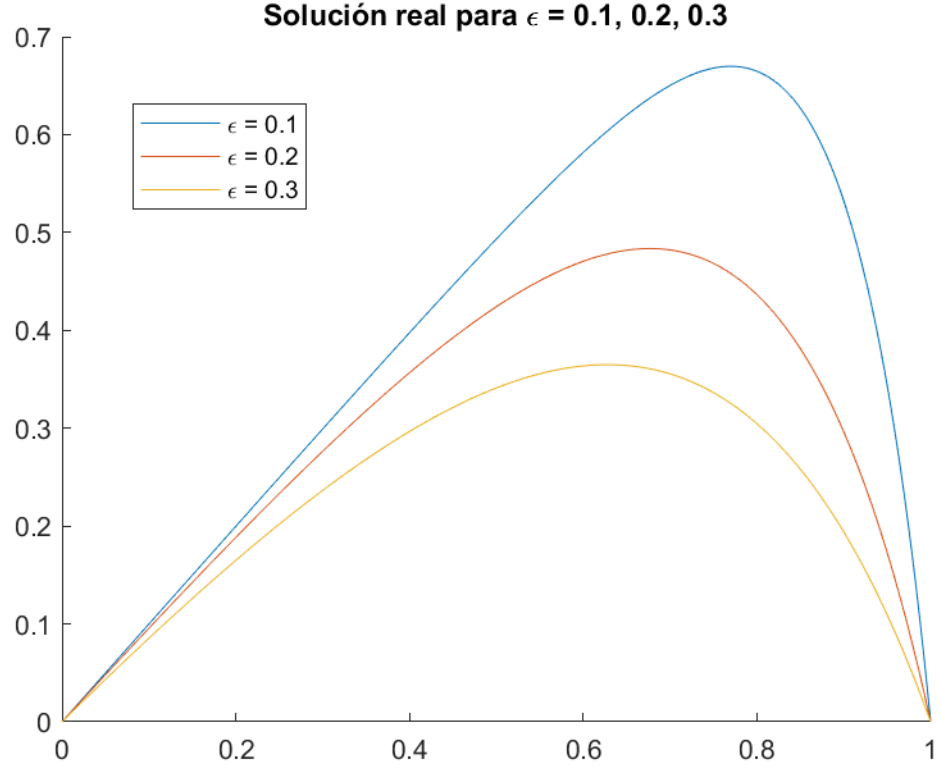
Para la solución particular, se puede comprobar que x es solución de la ecuación. Así, la solución general de la ecuación, después de añadir las consecuentes constantes de integración, es:

$$u(x) = -\epsilon A e^{\frac{x}{\epsilon}} + x + B$$

la solución para las condiciones iniciales $u(0) = u(1) = 0$ es entonces:

$$\frac{1}{1 - \exp(1/c)} \exp\left(\frac{x}{c}\right) - \frac{1}{1 - \exp(1/c)} + x;$$

En la siguiente imagen, podemos ver la solución real para algunos valores



4. prueba de existencia y unicidad con el teorema de Lax-Milgram

Veamos que existe una única solución débil para la expresión en forma débil de la EDO. Sean $a(u, v)$ bilineal y $l(v)$ del teorema las siguientes:

$$a(u, v) = \epsilon \int u'(x)v'(x)dx + \int u'(x)v(x)dx$$

$$l(v) = \int v dx$$

Necesitamos que se cumplan las siguientes 3 condiciones:

1. $\exists c_0$ tal que:

$$a(v, v) \geq c_0 \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

lo que implicaría que a es coerciva:

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \epsilon \int v'^2(x) dx + \int v'(x) v(x) dx \implies a(v, v) = \epsilon \int_{\Omega} v'^2(x) dx + \frac{1}{2} \int (v^2(x))' dx \\ &\implies a(v, v) \geq \epsilon \int_{\Omega} v'(x)^2 \implies a(v, v) = \epsilon \|v'(x)\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\epsilon}{1 + c^*} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Lo que implica que nuestra constante es

$$c_0 = \frac{\epsilon}{1 + c^*}$$

2. $\exists c_1$ tal que:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq c_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V \\ |a(u, v)| &\leq \epsilon \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v'\|_{L^2(\Omega)} + \|u'\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\epsilon^2 \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} (\|v'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\epsilon^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \|u'\|_{L^2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (\epsilon^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Por tanto

$$c_1 = (\epsilon^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$$

3. $\exists c_2 > 0$ tal que:

$$|l(v)| \leq c_2 \|v\|_V \quad \forall v \in V$$

Respecto a esto, podemos ver claramente lo siguiente usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|l(v)| = \left| \int_{\Omega} v dx \right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|1\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \|1\|_{L^2(\Omega)}$$

De modo que satisface la condición con $c_0 = \|1\|_{L^2(\Omega)}$.

Como se cumplen estas condiciones, podemos asegurar que existe una única solución $u_h \in V_h$ tal que cumple:

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V$$

5. Análisis de error en H^1

Ahora haremos el análisis de error en $H^1(\Omega)$. Aplicando el lema de Céa, llegamos a la siguiente expresión:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_1}{c_0} \min(u - v_h \forall v_h \in V_h)$$

Un análisis de error inicial se trata de hallar una estimación del error para el interpolante lineal, con el que queremos aproximar la función. Queremos acotar la siguiente cantidad:

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)}$$

Dado que esta se trata de la norma en H^1 , es equivalente a la siguiente:

$$\|u - I_h u\|_{H^1}^2 = \|u - I_h u\|_{L^2}^2 + \|u' - (I_h u)'\|_{L^2}^2$$

Para demostrar el orden de convergencia, usaremos el siguiente teorema, demostrado en clase:

1. $\|u - I_h u\|_{L^2} \leq (\frac{h}{\pi})^2 \|u''\|_{L^2}$
2. $\|u' - (I_h u)'\|_{L^2} \leq (\frac{h}{\pi}) \|u''\|_{L^2}$

Sustituyendo estas desigualdades en la ecuación, resulta una desigualdad así:

$$\begin{aligned} \|u - I_h u\|_{H^1} &\leq ((\frac{h}{\pi})^2 \|u''\|_{L^2})^2 + ((\frac{h}{\pi}) \|u''\|_{L^2})^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2h}{\pi} (1 + \frac{h^2}{\pi^2})^{\frac{1}{2}} \|u''\|_{L^2} \end{aligned}$$

Si asumimos que $u \in H^2$, $\|u''\|_{L^2}$ existe y está acotado, por lo que el error tenderá a 0 a medida que $h \rightarrow 0$. Hemos visto entonces que el orden de convergencia de este error a priori se trata de $O(h)$

6. Lema de Céa

El lema de Céa dice lo siguiente:

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c_1}{c_0} \min \{ \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)} \mid v_h \in V_h \}$$

En clase hemos podido demostrar que

$$\min (u - v_h \mid v_h \in V_h) \leq C(u) h^s$$

donde s es un parámetro que depende de la suavidad de u , que en este caso, es 1

7. Cotas de error en términos de epsilon

Las cotas de error a priori serán las siguiente entonces:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C(u) \frac{c_1}{c_0} h$$

Si sustituimos los valores que hemos hallado anteriormente de

$$c_1, c_0$$

, obtenemos la siguiente expresión:

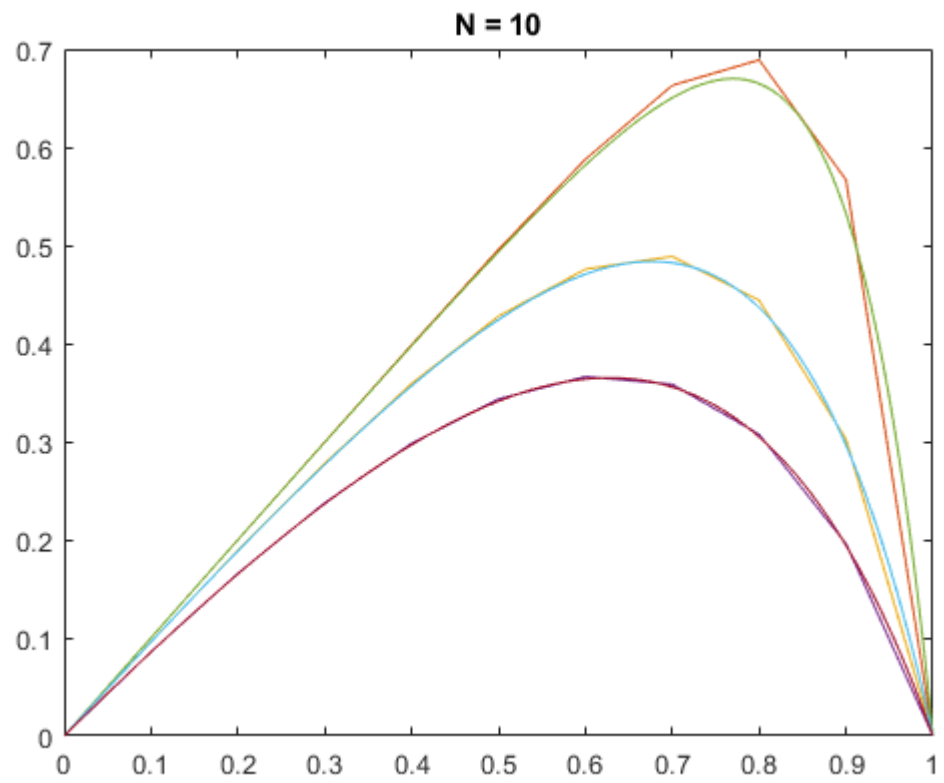
$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C(u) \frac{(1 + c^*)(\epsilon + 1)^{\frac{1}{2}}}{\epsilon} h$$

De donde podemos ver claramente que para un h fijo, el error tiende a infinito a medida que ϵ tiende a 0. Es por esta razón también que el error converge tan lento para ϵ pequeño.

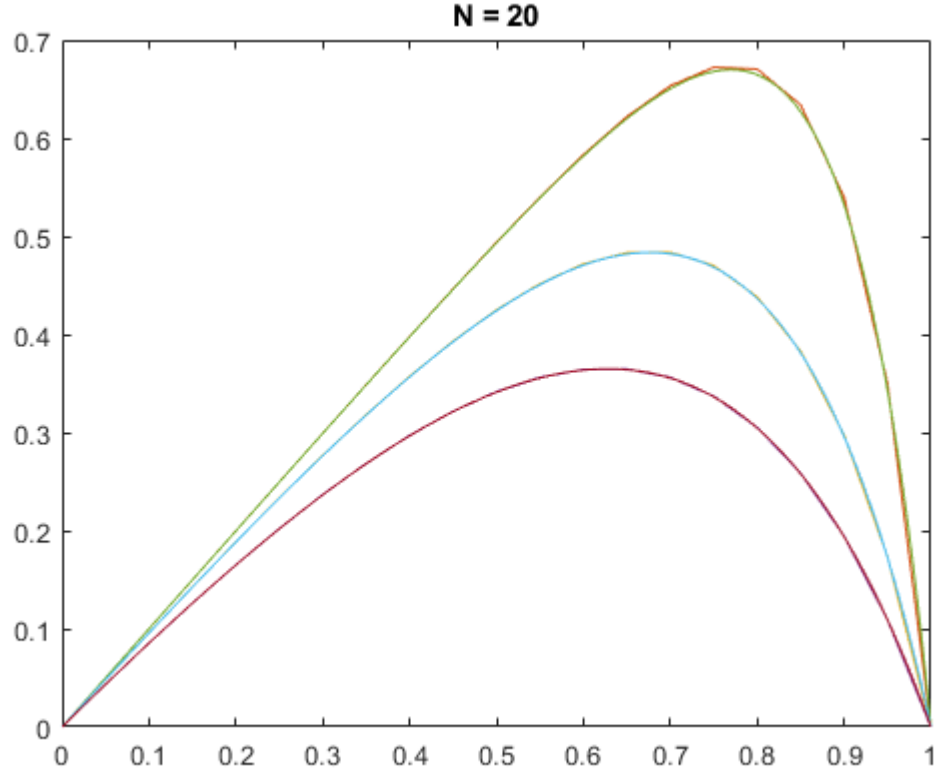
8. Gráfico y justificación

Las siguientes gráficas nos ayudarán a entender este comportamiento en $\epsilon = 0,1$. Entiendo que hay dos razones principales para este comportamiento.

1. El primero, y más claro, es que a medida que disminuimos ϵ , el error por el lema de Céa aumenta, por estar ϵ en el denominador.
2. El segundo, posiblemente el hecho de que la gráfica tenga una pronunciada curva puede sugerir que la segunda derivada es relativamente grande, y entonces el error a causa del interpolador es consecuentemente mayor, según la ecuación para el error antes propuesta.



Podemos ver que con 10 nodos la aproximación no es nada buena en el máximo para $\epsilon = 0,1$ a diferencia de los otros valores



Con 20 nodos la aproximación comienza a mejorar, pero sigue notándose una marcada dificultad en el máximo para $\epsilon = 0,1$. Por otra parte, en los menores valores de ϵ , la diferencia entre aproximación y solución real se vuelve difícil de ver a simple vista.

Con estos argumentos explicamos el comportamiento anómalo de $\epsilon = 0,1$

9. Análisis de error a posteriori

El error a posteriori se define como el error despues de calcular la solución. Podemos estimarlo gracias a la siguiente expresión:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \frac{K_0}{\pi^2} \sum_{i=1}^N (h_i^4 \|R(u_h)\|_{L^2_{x_{i-1}, x_i}}^2)^{\frac{1}{2}}$$

Donde, sustituyendo los valores que acompañan las derivadas:

$$K_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\| \frac{1}{\epsilon} \right\|_{L^\infty} \implies K_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}\epsilon}$$

$$R(u_h) = -\frac{u'_h}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon}$$

De esta forma, sustituyendo todos estos valores en la fórmula para el error a posteriori:

$$\|u - u\|_{L^2} = \frac{K_0}{\pi^2} h^2 \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\epsilon} (1 - u'_h) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Tras una serie de operaciones, podemos simplificar la integral en un producto de matrices:

$$\|u - u\|_{L^2} = \frac{K_0}{\pi^2} h^2 (1 + u^T K u)^{\frac{1}{2}}$$

Vemos que el error a posteriori es $O(h^2)$. Efectivamente, si calculamos los errores, y los pintamos en escala doblemente logarítmica, nos saldrá una recta con pendiente muy cercana a -2 :

