Memoria de la práctica 1

diego rodríguez atencia

October 13, 2020

1 Introducción

En la siguiente memoria, se responderá a las cuestiones planteadas para la primera práctica, con el fin de medir la eficiencia y la potencia de los métodos vistos en clase.

2 Órdenes de convergencia

En el siguiente apartado vamos a responder a las siguientes cuestiones:

- Realice un gráfico en escala doblemente logarítmica representando J frente al error en norma infinito en tiempo $T = 0.6$ con los 3 métodos para los valores:

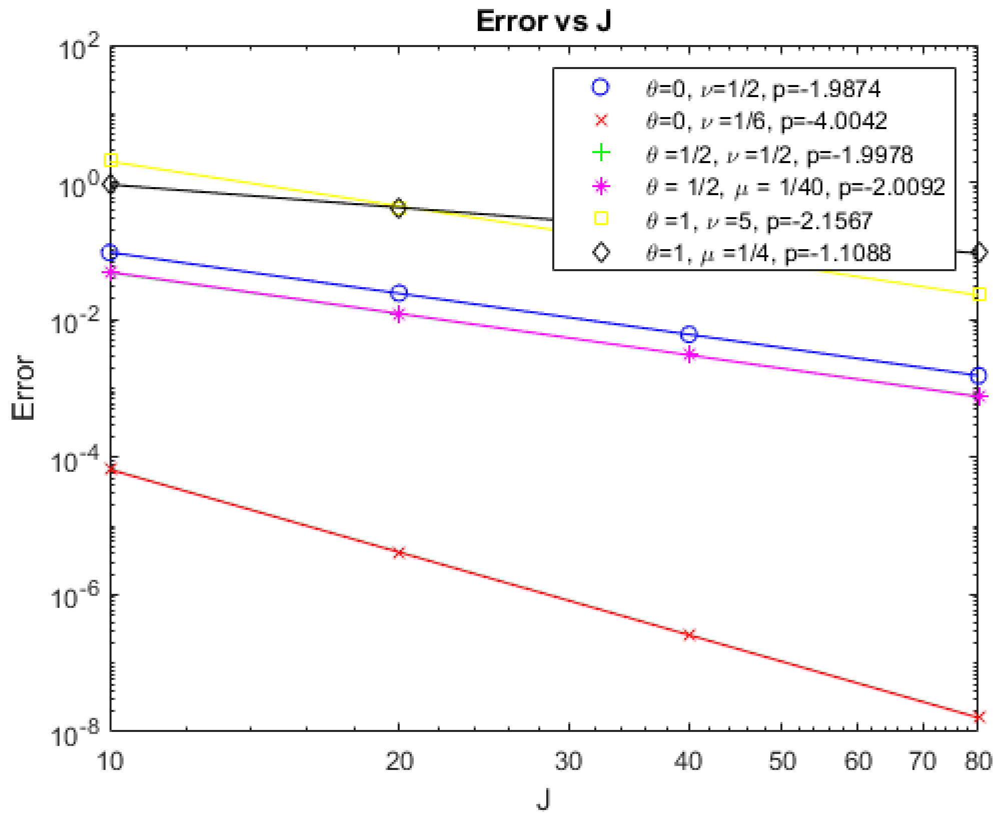
  $\theta = 0$, $\nu = 1/2$, $\nu = 1/6$,

  $\theta = 1/2$, $\nu = 1/2$, $\mu = 1/40$,

  $\theta = 1$, $\nu = 5$, $\mu = 1/4$.

  Explique el comportamiento de los diversos métodos indicando los órdenes de convergencia que se observan.

Observemos el gráfico obtenido mediante el código adjunto:



Vamos a realizar un análisis del orden de convergencia de nuestros seis modelos, para contrastarlos con los resultados del programa:
esquema 1: $\theta = 0, \nu = 1/2$.
El primer esquema se trata del método explícito, donde definimos

$$\nu = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 1/2 \tag{1}$$

Gracias al estudio realizado anteriormente, sabemos que el método en este caso converge, ya que ν es menor o igual que $1/2$. Según la ecuación para el error de truncación:

$$T(x,t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{6\nu})u_{xxxx}\Delta t + O((\Delta t)^2) \tag{2}$$

Es fácil comprobar que

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{6\nu}) \neq 0 \tag{3}$$

para $\nu = 1/2$, por lo que tenemos orden $O(\Delta t)$. Como hemos definido ν, se deduce que $O(\Delta t) = O((\Delta x)^2) = O(J^{-2})$, que en escala logarítmica viene representado por una recta de pendiente 2, tal y como dice nuestro programa.
esquema 2:

Para el error de truncación del método explícito, $\nu = \frac{1}{6}$ es un valor crítico, dado que

$$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{6\nu}) = 0 \tag{4}$$

Esto resulta en que el error de truncación es de orden $O((\Delta t)^2)$. Si recordamos las igualdades puestas anteriormente, se deduce entonces que $O((\Delta t)^2) = 0((\Delta x)^4) = 0(J^{-4})$, lo que resulta en una recta de pendiente -4 en escala logarítmica, concordando con los resultados en el gráfico.

esquema 3: $\theta = 1/2, \nu = 1/2$
En este caso, estamos ante el esquema Crank-Nicolson. Conviene introducir la fórmula para el error de truncación:

$$T_j^{n+1/2} = (\frac{1}{2} - \theta)\Delta t u_{xxt} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 u_{xxxx} + \frac{1}{24}(\Delta t)^2 u_{ttt} - \frac{1}{8}(\Delta t)^2 u_{xxxt} + \frac{1}{12}(\frac{1}{2} - \theta)\Delta t(\Delta x)^2 u_{xxxxt} + ... \tag{5}$$

Nos interesan en este caso los primeros valores, ya que son los que determinarán el orden del error de truncación. Si realizamos un análisis de Fourier descomponiendo la función aproximada en sus frecuencias, nos deja algunas condiciones que deben cumplir μ junto a θ para que exista convergencia. Estas condiciones son las siguientes:
Para valores de θ tales que $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ tenemos estabilidad $\iff \nu \leq \frac{1}{2}\frac{1}{1-2\theta}$
Para valores de θ tales que $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$ tenemos estabilidad incondicional, por lo que estamos seguros de que el método converge. En este caso, como θ es en efecto igual a $\frac{1}{2}$ podemos afirmar que el método en este caso converge.
Si sustituimos el valor de θ en nuestro error de truncación, queda algo así:

$$T_j^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{12}[(\Delta x)^2 u_{xxxx} + (\Delta t)^2 u_{ttt} + ...] \tag{6}$$

Nos podemos quedar sólamente con los primeros dos términos porque los demás son de orden superior, y solo cuenta el orden más bajo. Como hemos definido ν, sabemos que $O(\Delta t) = O((\Delta x)^2)$, lo que implica que la ecuación queda:

$$T_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{-1}{12}[(\Delta x)^2 u_{xxxx} + (\Delta x)^4 u_{ttt} + ...] \tag{7}$$

Sin embargo, como la menor potencia de Δx es 2, deducimos que este el el orden del error de truncación. Usando argumentos anteriormente expuestos, se deduce que la pendiente deberá tener pendiente de la recta de la representación en escala doblemente logarítmica cercana a -2, que es tal y como sale en la gráfica.

esquema 4: $\theta = 1/2, \mu = 1/40$
En este caso se sigue un argumento parecido al anterior. Dada esta ecuación para el error de truncación del θ-método

$$T_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{-1}{12}[(\Delta x)^2 u_{xxxx} + (\Delta t)^2 u_{ttt} + ...] \tag{8}$$

Sabiendo que si definimos μ se cumple que $O(\Delta t) = O(\Delta x)$, está claro de que podemos sustituir $0((\Delta t)^2)$ por $O((\Delta x)^2)$, que en este caso nos volvería a dar un orden 2 de convergencia en el error de truncación, que es de nuevo similar a una recta en escala logarítmica, de pendiente -2.

esquema 5:$\theta = 1, \nu = 5$
En este caso, nos encontramos ante el método implícito. Para hallar la fórmula del error de truncación, basta con sustituir $\theta = 1$ en la ecuación para el θ-método. Nos deja esta ecuación:

$$T_j^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\Delta t u_{xxt} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 u_{xxxx} + ... \tag{9}$$

Como podemos observar, los grados de este método son notablemente más bajos que los anteriores. para ν constante, sabemos que $0(\Delta t) = O((\Delta x)^2)$, lo que si sustituimos en la ecuación, nos da de resultado que el error tiene orden 2 de convergencia.

$$T_j^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}(\Delta x)^2 u_{xxt} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 u_{xxxx} + ... \tag{10}$$

Esto, como podemos observar en la gráfica, se traduce en que la pendiente de la recta de regresión de nuestros valores del error respecto de cómo crece J es cercana a -2.

esquema 6:$\theta = 1, \mu = 1/40$
Para este esquema, basta con tener en cuenta la nueva relación de convergencia entre el espacio y el tiempo, que en este caso tendrán el mismo orden de convergencia $0(\Delta t) = O(\Delta x)$. Esto implica que la cantidad de pasos en tiempo que necesitemos crecerá linealmente conforme aumentemos J. sustituyendo esta relación en el error de truncación, nos queda;

$$T_j^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\Delta x u_{xxt} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 u_{xxxx} + ... \tag{11}$$

De lo que se infiere que en este caso el método tiene orden $0(\Delta x) = O(J^{-1})$ de convergencia, lo que está representado por una recta de pendiente -1, tal y como viene en la gráfica.
Con esto damos por finalizado el análisis de los órdenes de convergencia de estos métodos.

Breve resumen y conclusiones:
Como hemos podido comprobar, el método con mayor orden de convergencia es el explícito, seguido del CN y por último el implícito. Sin embargo, esto es a costa de imponer una relación de crecimiento muy restrictiva entre Δt y Δx, de forma que para el método explicito para un crecimiento en el número de nodos con los que representamos la barra necesitamos un crecimiento cuadrático en los pasos de tiempo para llegar al tiempo final deseado. Esto entonces para

valores grandes de J será indeseable, y preferiremos métodos con un orden de convergencia menor, pero que alcanzen el tiempo final en menos pasos. Esto además nos ahorra posibles errores que puedan acumularse en el proceso de hacer muchas operaciones seguidas una encima de otra.

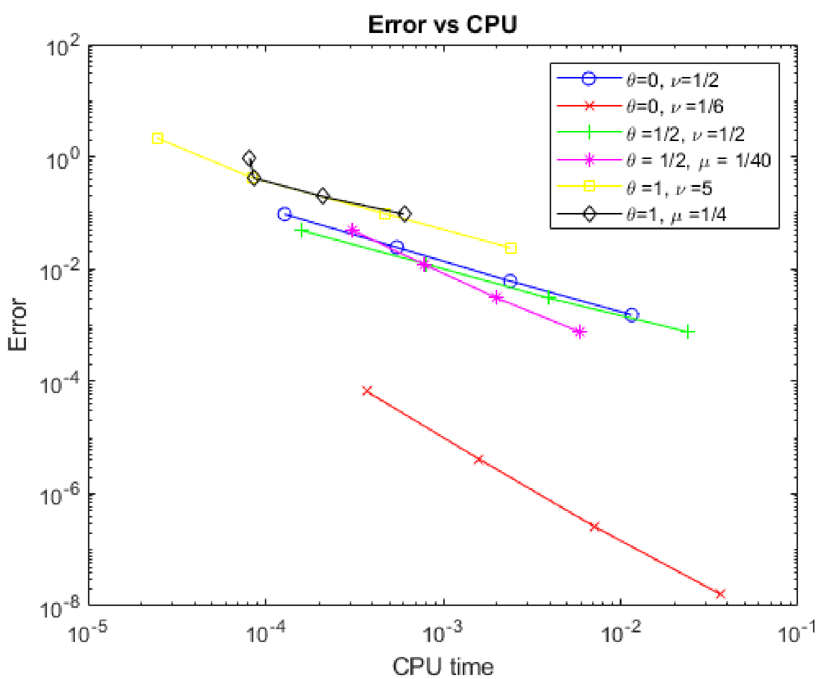
3 Eficiencia de los métodos

En el siguiente apartado responderemos a las siguientes cuestiones:

- Realice ahora un gráfico en escala doblemente logarítmica representando el tiempo de CPU necesario para obtener cada una de las aproximaciones frente al error en norma infinito en tiempo $T = 0.6$ para los mismos valores del apartado anterior.

  Realize un estudio de la eficiencia de los distintos métodos.

A conitnuación se encuentra el gráfico en cuestión:



Podemos separar claramente este gráfico en dos conjuntos importantes: el del método explícito para $\nu = \frac{1}{6}$ y todos los demás. Tenemos que mirar este gráfico con cuidado para darnos cuenta de la información que lleva. Para empezar, podemos observar que para los valores de J en el experimento, el método que obtiene el menor error de todos es el explícito para $\nu = \frac{1}{6}$.
Nuestra forma de seleccionar modelos según el error, será fijar el error deseado y quedaros con el modelo que menos tiempo requiera para alcanzar dicho error.

En este caso, para cualquier error menor que 10^{-4} vamos a seleccionar el método explícito para $\nu = \frac{1}{6}$. Para errores más grandes, podríamos elegir un modelo entre el rosa, el azul o el verde (puede verse cuáles son exactamente gracias a la leyenda). Puede ser también que para valores de J más grandes, sea el rosa el que dé el mejor error de estos tres (que es la tendencia que parece que existe) pero para ello tendríamos que probar con valores de J más alto.

Conclusión y el problema de J

Hemos podido observar cúales eran los modelos más eficientes para cada caso, a fin de optimizar al máximo el tiempo de computación disponible, para obtener el error deseado en el menor tiempo posible. Sin embargo, cabe también tener en cuenta la densidad de puntos que utilizamos de la barra, ya que a mayor densidad de puntos, obtendremos una expresión más fiable de la temperatura real. Un ejemplo de este problema de la densidad de puntos, es tener un modelo con J=4 y un error pequeñísimo. Podemos tener un error muy pequeño, pero el modelo no será útil para medir los valores intermedios. Sin embargo, tener en cuenta esta cuestión corre a cuenta de la solución concreta que se busque con estos modelos.