Linguaggi di Programmazione

Alessio Marini, 2122855

Appunti presi durante il corso di **Linguaggi di Programmazione** nell'anno **2025/2026** del professsore Pietro Cenciarelli.
Gli appunti li scrivo principalmente per rendere il corso più comprensibile **a me** e anche per imparare il linguaggio Typst. Se li usate per studiare verificate sempre le informazioni 🙏.

Contatti:

alem1105

marini.2122855@studenti.uniroma1.it

September 27, 2025

Indice

1. Algebre e Strutture Dati Induttive

Questa tipologia di Algebre ci servirà a dare un significato alla struttura dei programmi, ovvero la **semantica**, sono inoltre la base matematica di strutture dati come *alberi, liste ecc…*, ci serviranno anche per fare induzione su altre strutture e non solo su sistemi numerici, questa è chiamata **induzione strutturale**.

Ci serviranno delle strutture universali, proviamo ad esempio a descrivere i numeri naturali $\mathbb{N}$ attraverso delle regole, gli **Assiomi di Peano**.

Assiomi di Peano

- $0 \in \mathbb{N}$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$
- $\nexists n \quad \text{t.c.} \quad 0 = \text{succ}(n)$
- $\forall n, m \quad \text{se} \quad \text{succ}(n) = \text{succ}(m) \Rightarrow n = m$
- $\forall S \subseteq \mathbb{N}(0 \in S \land n \in S \Rightarrow \text{succ}(n) \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}$

Grazie a queste regole possiamo «staccarci» dagli elementi dei numeri naturali, abbiamo descritto la loro **struttura**.

L'ultimo degli assiomi viene anche chiamato **assioma di Induzione**, infatti è molto simile al **principio di induzione**.

Principio di Induzione

Data una proprietà P che vale per un $n = 0$, la assumiamo vera per un $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamo che è vera anche per $n + 1$, se riusciamo abbiamo dimostrato che P vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

In simboli:

$$P(0) \land (P(n) \Rightarrow P(n+1)) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} P(m)$$

2. Algebre

Proprietà ed Insiemi

Dire che un elemento appartiene ad un insieme o che soddisfa una proprietà possiamo vederla come la stessa cosa.

Quando definiamo un'algebra dobbiamo definire l'insieme dei suoi elementi le operazioni che ne fanno parte, ad esempio: (A, Γ) e le sue operazioni possono essere:

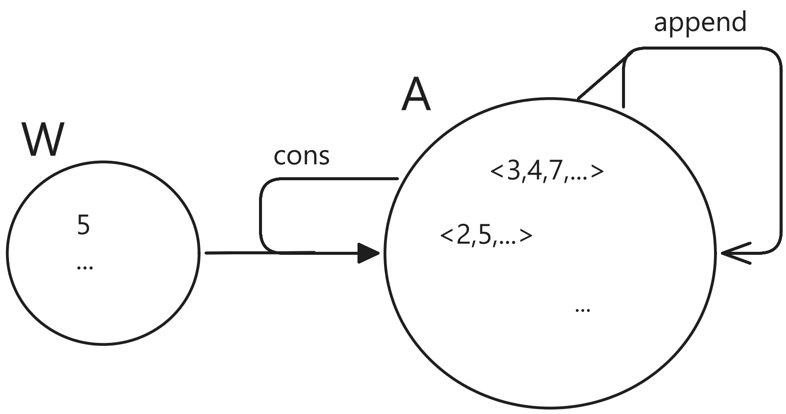
$$\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots\}$$

Questo serve perché sullo stesso insieme possiamo definire più algebre.

Esempio

Prendiamo come insieme di elementi delle liste di numeri naturali e due operazioni:
- **append**: Prende in input due liste e restituisce la lista che concatena le due prese in input.
- **cons**: Prende in input un numero da $\mathbb{N}$ ed una lista e inserisce il numero all'inizio della lista.

Graficamente abbiamo che:



- $\text{append}(< 3, 4, 7 >, < 2, 5 >) =< 3, 4, 7, 2, 5 >$
- $\text{cons}(5, < 3, 4, 7 >) =< 5, 3, 4, 7 >$

Notiamo che come risultato **abbiamo sempre un elemento dell'algebra**.

Come input possiamo avere anche elementi estranei, se questo accade allora l'algebra prende il nome di **Algebra Eterogenea**.

2.1. Chiusura rispetto ad una funzione

Data un'algebra A prendiamo $S \subseteq A$ e una funziona $f : A \to S$

- S è **chiusa** rispetto a f quando

$$x \in S \Rightarrow f(x) \in S$$

Quindi se prendo come input un elemento da S devo tornare in S, questo deve funzionare anche se prendo come input più elementi.

- Se abbiamo ad esempio un insieme $B \not\subseteq A$ e $S \subseteq A$ allora:

$$\forall y \in B$$
$$x \in S \Rightarrow f(x, y) \in S$$

- Ultimo caso da tenere in mente è quando come input non abbiamo elementi di S, in questo caso la funzione S è comunque chiusa rispetto ad f dato che stiamo negando la prima parte dell'implicazione.

Adesso, con questo concetto in mente possiamo parlare di Algebre Induttive.

2.2. Algebre Induttive

Definizione

Un Algebra (A, Γ) si dice induttiva quando:
- Tutte le Γ_i sono iniettive
- Tutte le Γ_i hanno immagini disgiunte
- $\forall S \subseteq A$ se S è chiuso rispetto a tutte le Γ_i allora $S = A$

Proviamo a costruire un'algebra induttiva con i numeri naturali usando queste 3 regole e gli assiomi di Peano.

I primi due assiomi di Peano:
- $0 \in \mathbb{N}$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{succ}(n) \in \mathbb{N}$

Ci danno la segnatura dell'algebra:

$$\left(\mathbb{N}, \underbrace{\{0, \mathrm{succ}, \mathrm{zero}\}}_{\Gamma}\right)$$

La funzione nullaria zero ci serve per rappresentare l'elemento 0.

Funzione Nullaria

Prendiamo come esempio la coppia $(7, 3)$ questa sarà elemento di $\mathbb{N}^2$ mentre $(7, 3, 5)$ sarà elemento di $\mathbb{N}^3$ ma allora $()$ sarà elemento di $\mathbb{N}^0$ e sarà anche l'**unico**. Indichiamo con $\mathbb{1}$ questo insieme.

$$\mathbb{N}^0 = \{()\} = \mathbb{1}$$

Quindi una funzione nullaria su un insieme A avrà una segnatura del tipo $\mathbb{1} \to A$.

Una funzione nullaria su un insieme A può essere vista come un elemento di A.

Vediamo se rispettiamo le proprietà delle algebre induttive:

- Entrambe le funzioni sono induttive, zero è nullaria mentre succ rispetta l'induzione:
  - Vale per 0
  - Se vale per n vale anche per $n + 1$
- Le due funzioni hanno immagini disgiunte, una ha solo 0 come immagine mentre l'altra ha $\mathbb{N} - \{0\}$.
- Prendiamo un $S \subseteq \mathbb{N}$ e supponiamo che sia chiuso su entrambe le funzione succ, zero questo implica che:
  - $0 \in S$ per zero
  - $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$ per succ

Quindi se S è chiuso su entrambe allora abbiamo preso $\mathbb{N}$ e l'algebra è induttiva perché rispettiamo le 3 proprietà.

5 Assiomi - Algebra Induttiva

I 5 Assiomi di Peano sono quindi un caso particolare di Algebra Induttiva con le operazioni zero e succ.

Quando un'algebra è induttiva le sue operazioni Γ_i si chiamano **costruttori dell'algebra**.

2.2.1. Liste finite come algebre induttive

Dato un insieme A, indichiamo con $A -$ list l'insieme delle liste finite di elementi di A. La tupla $(A\text{-list}, \text{empty}, \text{cons})$ é un algebra induttiva dove:
- empty: $\mathbb{1} \to A$-list é la funzione costante che restituisce la lista vuota <>.
- cons: $(A\text{-list} \times A) \to A$-list. Ad esempio: $\text{cons}(3, < 5, 7 >) =< 3, 5, 7 >$. É quindi la funzione che costruisce una lista aggiungendo un elemento in testa.

Questa è un'algebra induttiva, infatti:
- I costruttori hanno immagini disgiunte
- I costruttori sono chiusi per A-list
- C'è un unico modo per costruire ogni lista

Liste Infinite

Le liste infinite non possono essere un'algebra induttiva, infatti contengono una sotto-algebra induttiva, quella delle liste finite che abbiamo appena visto.

2.2.2. Booleani come Algebra non Induttiva

Consideriamo l'algebra (B, not) dove $B = \{0, 1\}$ e $\text{not} : B \to B : b \to \neg b$

- not rispetta le prime due caratteristiche delle algebre induttive
- L'algebra però non rispetta il terzo requisito, infatti se consideriamo $\emptyset \subseteq B$ notiamo che not è chiusa rispetto ad esso, questo perchè se consideriamo un $x \in \emptyset$ e l'implicazione $x \in \emptyset \Rightarrow \text{not}(x) \in \emptyset$ questa risulta vera dato che la premessa è falsa.

Abbiamo quindi trovato un S ovvero $\emptyset$ chiuso per le operazioni dell'algebra ma che è diverso da B. Quindi possiamo dire che (B, not) non è un'algebra induttiva.

2.2.3. Alberi Binari come Algebre Induttive

L'insieme degli alberi binari finiti (B-trees, leaf, branch) dove:
- B-trees: $\{t | t \text{ è una foglia, oppure } t =< t_1, t_2 > \text{ con } t_1, t_2 \in \text{B-trees}\}$
- leaf: $1 \to$ B-trees. un elemento foglia
- branch: B-trees $\times$ B-trees $\to$ B-trees : $(t_{sx}, t_{dx}) \to t$. Costruisce un ramo in modo che t_{sx}, t_{dx} siano i due sottoalberi di t.

È un algebra induttiva.

Teorema

Un albero binario con n foglie ha $2n - 1$ nodi.

Dimostrazione

Possiamo dimostrarlo per induzione strutturale sui costruttori degli alberi:

Caso Base: Consideriamo l'albero formato da una sola foglia, costruito quindi con leaf(). Questo avrà $n = 1$ foglie e $2n - 1 = 1$ nodi.

Ipotesi Induttiva: Ogni argomento dato in input ai costruttori rispetta la proprietà.

Dimostriamo quindi che branch, dati due argomenti che rispettano la proprietà, rispetti la proprietà.

Passo Induttivo: Abbiamo $t = \text{branch}(t_1, t_2)$. Siano:
- $n = n_1 + n_2$ il numero di foglie di t
- n_1 sono le foglie di t_1
- n_2 le foglie di t_2.

Per ipotesi induttiva t_1 ha $2n_1 - 1$ nodi e t_2 ne ha $2n_2 - 1$, dunque t ne avrà

$$(2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + 1$$
$$(+1 \text{ perché c'è se stesso})$$

Che corrisponde a

$$2(n_1 + n_2) - 1 = 2n - 1 \quad \blacksquare$$

2.3. Omomorfismo

Prima vediamo cosa significa che due algebre hanno la stessa segnatura.

Due algebre hanno la stessa segnatura quando hanno le stesse operazioni, ad esemio prendiamo un'algebra su l'insieme D con le operazioni:
- $f_D = A \times D \to D$
- $g_d = \mathbb{1} \to D$

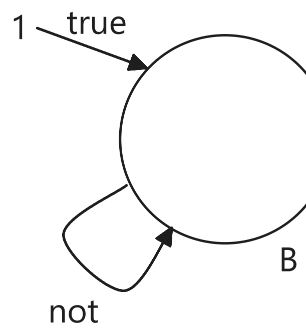
- $h_D = A \times B \times D \to D$

Un'algebra sull'insieme C con la stessa segnatura, avrà le seguenti operazioni:

- $f_C = A \times C \to C$
- $g_C = \mathbb{1} \to C$
- $h_C = A \times B \times C \to C$

Più formalmente quindi, due algebre (A, Γ_A) e (B, Γ_B) hanno la stessa segnatura se sostituendo A con B in tutte le $\gamma \in \Gamma_A$ ottengo Γ_B.

Esempio

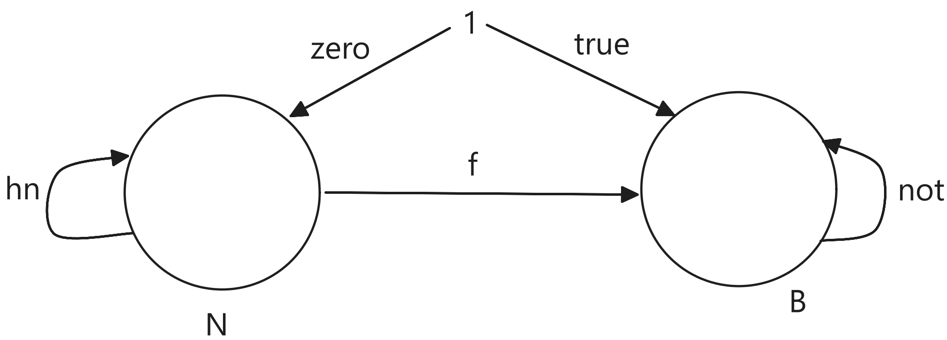


L'algebra definita sopra sull'insieme $\mathbb{B}$ ha la stessa segnatura dei naturali, anche se non è induttiva. Infatti abbiamo che *true* corrisponde a *zero* mentre *not* a *succ*

Un omomorfismo tra due algebre $(A, \gamma) \to (B, \delta)$ con la stessa segnatura I è una funzione $h : A \to B$ tale che per ogni $i \in I$ con $a_i = n$ e m parametri esterni si ha:

$$h(\gamma_i(a_1, ..., a_n, k_1, ..., k_m)) = \delta_i(h(a_1), ..., h(a_n), h(k_1), ..., h(k_m))$$

Ad esempio prendiamo il seguente omomorfismo f:



Se prendiamo un elemento da $\mathbb{N}$ e ci eseguiamo sopra h_n otteniamo un certo elemento. Questo elemento possiamo mandarlo in $\mathbb{B}$ con f e poi applicarci *not*. Dobbiamo ottenere lo stesso valore, formalmente:

$$f(h_n(n)) = not(f(n))$$

In questo esempio deve anche essere vero:

$$\text{true} = f(\text{zero})$$

Isomorfismo

Un isomorfismo è un omomorfismo biiettivo. Questo significa che abbiamo una corrispondenza 1:1 fra gli elementi delle due algebre. Possiamo usarle allo stesso modo per fare calcoli ed operazioni, l'unica cosa che cambia è la rappresentazione.

Lemma

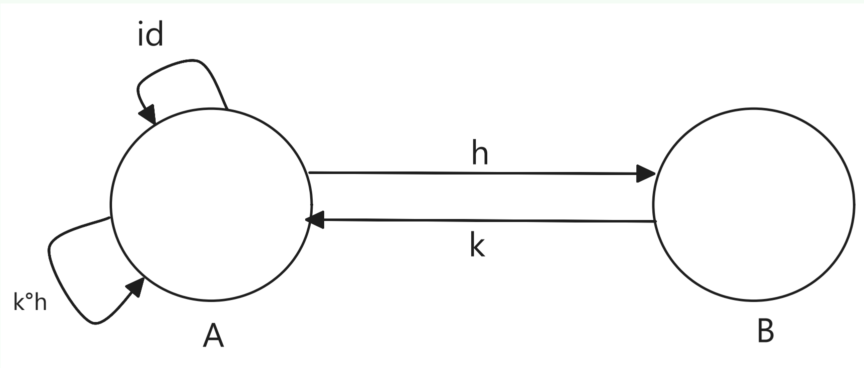
Data un'algebra induttiva A con una certa segnatura, se prendiamo un'altra algebra B con la stessa segnatura (non obbligatoriamente induttiva) allora esiste un unico omomorfismo $A \to B$.

Lemma di Lambek

Due algebre induttive A e B con la stessa segnatura sono **isomorfe** (esiste un isomorfismo fra di esse)

Dimostrazione

- Supponiamo A, B induttive
- Allora $\exists! h : A \to B$ e $\exists! k : B \to A$
- **Lemma:** Componendo due omomorfismi ottengo un omomorfismo. Otteniamo quindi $k \circ h : A \to A$:



- Sappiamo che per le algebre esiste l'omomorfismo identità id.
- Otteniamo i due omomorfismi $k \circ h$ e id che hanno segnatura $A \to A$ ma siccome A è induttiva ne esiste soltanto uno, questo significa che $k \circ h = id$.
- Siccome $k \circ h$ è uguale all'identità significa che le due funzioni h, k sono invertibili ed esiste quindi una biiezione tra A e B. Sono isomorfe.
- Stesso discorso può essere fatto per $h \circ k$

3. Espressioni

Definiamo un linguaggio L come un insieme di stringhe. Per descrivere la sintassi di linguaggi formali (la grammatica), usiamo la **BNF (Backus-Naur Form)**, con questa sintassi:

$$\text{<simbolo>} ::= \text{\_espressione\_}$$

Esempio

Consideriamo la grammatica:

$$M, N ::= 5 | 7 | M + N | M * N$$

Le espressioni che rispettano questa grammatica sono del tipo:
- «5» o «7»
- Un'espressione del tipo $M + N, M * N$ che rispetta a sua volta la grammatica.

Introduciamo una funzione $\text{eval} : L \to \mathbb{N}$ che valuta le espressioni del linguaggio:
- $\text{eval}(5) = 5$
- $\text{eval}(7) = 7$
- $\text{eval}(M + N) = \text{eval}(M) + \text{eval}(N)$
- $\text{eval}(M * N) = \text{eval}(M) * \text{eval}(N)$

Notiamo che nell'esempio precedente l'algebra (L, eval) non è induttiva, infatti una stringa $5 + 7 * 5$ potrebbe essere stata generata in due modi diversi: $(5 + 7) * 5$ e $5 + (7 * 5)$.

Possiamo però considerare $5, 7, +, *$ come costruttori dell'algebra e in questo modo $(5 + 7) * 5 \neq 5 + (7 * 5)$, si potrebbe quindi dimostrare come $(L, 5, 7, +, *)$ è un'algebra induttiva.

4. Linguaggio Exp

In questo semplice linguaggio indichiamo le espressioni con

$$M, L, N, \dots ::= 0 \mid 1 \mid \dots \mid x \mid y \mid z \mid \dots \mid M + N \mid \text{let x = M in N}$$

Quando usiamo let x = M in N stiamo assegnando un valore alla variabile x all'interno dell'espressione N. Al di fuori di quell'espressione x avrà altri significati.

Ad esempio:
- $\text{let x = 3 in x + x}$ vale 6
- let x = 2 in 10 vale 10

Funzione Free

La funzione free: $\text{Exp} \to P(\text{Var})$, prende in input un'espressione e restituisce l'insieme delle variabili libere, ovvero quelle che non hanno un valore assegnato e sono quindi inutili al calcolo dell'espressione.

Esempi:
- $\text{free}(0) = \{\}$
- $\text{free}(k) = \{\}$ con k una qualsiasi costante
- $\text{free}(x) = \{x\}$
- $\text{free}(M + N) = \text{free}(M) \cup \text{free}(N)$
- $\text{free(let x = M in N)} = \text{free(M)} \cup \{\text{free(N) - \{x\}}\}$

4.1. Sintassi e Semantica Astratta

Assumiamo che siano un dati un insieme *Var* di variabili ed un insieme di costanti entrambi numerabili:
- Utilizziamo $x, y, \dots$ per indicare le variabili
- $k_1, k_2, \dots$ per le costanti
- M, N per i termini del linguaggio

L'insieme di tutti questi termini è definito induttivamente dalla sintassi astratta:

$$k ::= 5|40|\dots$$
$$M ::= k|x|M + N|\text{let x} = M \text{ in } N$$

L'operatore *let* ha segnatura:

$$\text{let} : \text{Var} \times \text{Exp} \times \text{Exp} \to \text{Exp}$$

Questo operatore (termine) rappresenta un segmento di codice che definisce la variabile locale x, la inizializza al valore dell'espressione M all'interno del corpo N che può contenere o no dei riferimenti ad x. *Ad esempio:*

$$\text{let } x = 3 + 2 \text{ in } x + x = 10$$

Nell'esempio precedente la variabile x compare due volte in N, si dice che ci sono duie **occorrenze** della variabile, per la x che invece compare subito dopo il *let* si parla di **dichiarazione**.

Se però prendiamo ad esempio l'espressione:

$$\text{let } x = 3 \text{ in } x + \text{let } x = 2 \text{ in } x + x$$

Quante occorrenze di x troviamo? **Dipende**.

L'espressione contiene due variabili con lo stesso nome e dobbiamo quindi capire quante volte compare ciascuna di esse ad esempio specificando meglio la struttura dell'espressione attraverso l'uso di parentesi:

$$\text{let } x = 3 \text{ in } (x + ((\text{let } x = 2 \text{ in } x) + x))$$

In questo caso ci aspettiamo una valutazione di 8 e:
- La x con valore 3 ha 2 occorrenze
- La x con valore 2 ha 1 occorrenza

Espressioni Alfa-Equivalenti

Due espressioni si dicono **alfa-equivalebti** se sono identiche a meno di ridenominazione di variabili legate, ad esempio:

$$\text{let x} = 1 \text{ in } x + 1$$

è alfa equivalente a:

$$\text{let y} = 1 \text{ in } y + 1$$

4.2. Domini Semantici

La semantica di *Exp* viene rappresentata usando la nozione di **ambiente**, un ambiente è una funzione **parziale** (non necessariamente definita su tutto il dominio) che associa dei valori ad un insieme finito di variabili:

$$\text{Env} = \text{Var} \xrightarrow{fin} \text{Val}$$

Indichiamo gli ambienti come insiemi di coppie, per esempio l'ambiente E dove z vale 3 e y vale 9 lo scriviamo come $\{(z, 3), (y, 9)\}$.

Il dominio di un ambiente è sempre un sottoinsieme finito di *Var*, in questo caso il dominio è $\{x, y\}$

Concatenazione di Ambienti

Dati due ambienti E_1, E_2, la loro concatenazione indicata da $E_1 E_2$ il cui dominio è $\text{dom}(E_1) \cup \text{dom}(E_2)$ è definita come:

$$(E_1 E_2)(x) = \begin{cases} E_2(x) \text{ se } x \in \text{dom}(E_2) \\ E_1(x) \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Ha quindi la precedenza il dominio più a destra.

4.3. Semantica Operazionale

La **semantica operazionale** di *Exp* è una relazione:

$$\rightsquigarrow \subseteq \text{Env} \times \text{Exp} \times \text{Val}$$

Un'asserzione di appartenenze $(E, M, v) \in \rightsquigarrow$ viene chiamata **giudizio operazionale** e si scrive $E \vdash M \rightsquigarrow v$. Viene letta «*nell'ambiente E, M viene valutato come* v».

(Indichiamo dei generici valori con la variabile v*)*

Regola di Inferenza

Date delle proposizioni $P_1, ..., P_n, C$ indichiamo la seguente proposizione:

$$P_1 \land ... \land P_n \land ((P_1 \land ... \land P_n) \Rightarrow C)$$

che può essere scritta con la seguenta notazione alternativa detta **regola di inferenza**:

$$\frac{P_1 \quad ... \quad P_n}{C}$$

Dove $P_1, ..., P_n$ vengono dette **premesse** e C viene detta **conclusione**.

I giudizi operazionali hanno delle regole:

1. $$E \vdash k \rightsquigarrow k$$

2. $$E \vdash x \rightsquigarrow v \quad (\text{se } E(x) = v)$$

3. $$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v \quad E \vdash N \rightsquigarrow w}{E \vdash M + N \rightsquigarrow u} \quad (\text{se } u = v + w)$$

4. $$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v \quad E\{(x, v)\} \vdash N \rightsquigarrow v'}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v'}$$

Attenzione!

Quali triple non appartengono a $\rightsquigarrow$? Quelle che preso un qualsiasi ambiente non possono restituire il valore fissato.

Per tripla intendiamo $(M, E, k) \in \rightsquigarrow$, che leggiamo «*L'espressione* M *nell'ambiente* E *vale* v». Ma se ad esempio prendiamo la tripla $(5, [E], 7)$ con E un qualsiasi ambiente questa non apparterrà mai a $\rightsquigarrow$, infatti in qualsiasi ambiente 5 non potrà mai valere 7.