Algebre e Strutture Dati Induttive

Questa tipologia di Algebre ci servirà a dare un significato alla struttura dei programmi, ovvero la **semantica**, sono inoltre la base matematica di strutture dati come *alberi, liste ecc…*, ci serviranno anche per fare induzione su altre strutture e non solo su sistemi numerici, questa è chiamata **induzione strutturale**.

Ci serviranno delle strutture universali, proviamo ad esempio a descrivere i numeri naturali $\mathbb{N}$ attraverso delle regole, gli **Assiomi di Peano**.

Assiomi di Peano

- $0 \in \mathbb{N}$
- $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$
- $\nexists n \quad \text{t.c.} \quad 0 = \succ (n)$
- $\forall n, m \quad \text{se} \quad \succ (n) = \succ (m) \Rightarrow n = m$
- $\forall S \subseteq \mathbb{N}(0 \in S \wedge n \in S \Rightarrow \succ (n) \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}$

Grazie a queste regole possiamo "staccarci" dagli elementi dei numeri naturali, abbiamo descritto la loro **struttura**.

L'ultimo degli assiomi viene anche chiamato **assioma di Induzione**, infatti è molto simile al **principio di induzione**.

Principio di Induzione

Data una proprietà P che vale per un $n = 0$, la assumiamo vera per un $n \in \mathbb{N}$ e dimostriamo che è vera anche per $n + 1$, se riusciamo abbiamo dimostrato che P vale $\forall n \in \mathbb{N}$. In simboli:

$$P(0) \wedge (P(n) \Rightarrow P(n + 1)) \Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} P(m)$$