

Busca

Aula 4

Diego Padilha Rubert

Faculdade de Computação
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Algoritmos e Programação II

Conteúdo da aula

- 1 Introdução
- 2 Busca sequencial
- 3 Busca em vetor ordenado
- 4 Exercícios

- ▶ Busca é uma operação básica em Computação
- ▶ Depende da maneira como o conjunto está modelado
- ▶ Convenção: conjunto de números inteiros armazenados em um vetor
 - ▶ Busca sequencial
 - ▶ Busca binária

- ▶ Busca é uma operação básica em Computação
- ▶ Depende da maneira como o conjunto está modelado
- ▶ Convenção: conjunto de números inteiros armazenados em um vetor
 - ▶ Busca sequencial
 - ▶ Busca binária

- ▶ Busca é uma operação básica em Computação
- ▶ Depende da maneira como o conjunto está modelado
- ▶ Convenção: conjunto de números inteiros armazenados em um vetor
 - ▶ Busca sequencial
 - ▶ Busca binária

- ▶ Busca é uma operação básica em Computação
- ▶ Depende da maneira como o conjunto está modelado
- ▶ Convenção: conjunto de números inteiros armazenados em um vetor
 - ▶ Busca sequencial
 - ▶ Busca binária

- ▶ Busca é uma operação básica em Computação
- ▶ Depende da maneira como o conjunto está modelado
- ▶ Convenção: conjunto de números inteiros armazenados em um vetor
 - ▶ Busca sequencial
 - ▶ Busca binária

Busca sequencial

Problema

Dado um número inteiro $n \geq 0$, um vetor de números inteiros $v[0..n-1]$ e um número inteiro x , encontrar um índice k tal que $v[k] = x$

```
/* Recebe um número inteiro n >= 0, um vetor v[0..n-1] com n números inteiros e um número inteiro x e devolve k no intervalo [0, n-1] tal que v[k] == x. Se tal k não existe, devolve -1. */  
int busca_sequencial(int n, int v[MAX], int x)  
{  
    int k;  
  
    for (k = n - 1; k >= 0 && v[k] != x; k--)  
        ;  
  
    return k;  
}
```


Busca sequencial

Problema

Dado um número inteiro $n \geq 0$, um vetor de números inteiros $v[0..n-1]$ e um número inteiro x , encontrar um índice k tal que $v[k] = x$

```
/* Recebe um número inteiro n >= 0, um vetor v[0..n-1] com n números inteiros e um número inteiro x e devolve k no intervalo [0, n-1] tal que v[k] == x. Se tal k não existe, devolve -1. */  
int busca_sequencial(int n, int v[MAX], int x)  
{  
    int k;  
  
    for (k = n - 1; k >= 0 && v[k] != x; k--)  
        ;  
  
    return k;  
}
```

Busca sequencial recursiva

```
/* Recebe um número inteiro n >= 0, um vetor de números in-
   teiros v[0..n-1] e um número x e devolve k tal que 0 <= k
   < n e v[k] == x. Se tal k não existe, devolve -1. */
int busca_sequencial_R(int n, int v[MAX], int x)
{
    if (n == 0)
        return -1;
    else
        if (x == v[n - 1])
            return n - 1;
        else
            return busca_sequencial_R(n - 1, v, x);
}
```

Busca sequencial

- ▶ Tempo de execução (de pior caso) proporcional a n ou $O(n)$ ou linear no tamanho da entrada n
- ▶ Correção semelhante à mostrada no exercício 3.1
- ▶ “Maus exemplos” no capítulo 3, páginas 12 e 13, do livro de P. Feofiloff

- ▶ Tempo de execução (de pior caso) proporcional a n ou $O(n)$ ou linear no tamanho da entrada n
- ▶ Correção semelhante à mostrada no exercício 3.1
- ▶ “Maus exemplos” no capítulo 3, páginas 12 e 13, do livro de P. Feofiloff

- ▶ Tempo de execução (de pior caso) proporcional a n ou $O(n)$ ou linear no tamanho da entrada n
- ▶ Correção semelhante à mostrada no exercício 3.1
- ▶ “Maus exemplos” no capítulo 3, páginas 12 e 13, do livro de P. Feofiloff

- ▶ Tempo de execução (de pior caso) proporcional a n ou $O(n)$ ou linear no tamanho da entrada n
- ▶ Correção semelhante à mostrada no exercício 3.1
- ▶ “Mais exemplos” no capítulo 3, páginas 12 e 13, do livro de P. Feofiloff

- ▶ Tempo de execução (de pior caso) proporcional a n ou $O(n)$ ou linear no tamanho da entrada n
- ▶ Correção semelhante à mostrada no exercício 3.1
- ▶ “Maus exemplos” no capítulo 3, páginas 12 e 13, do livro de P. Feofiloff

Busca em vetor ordenado

Definição

Um vetor de números inteiros $v[0..n-1]$ é **crecente** se $v[0] \leq v[1] \leq \dots \leq v[n-1]$ e **decrecente** se $v[0] \geq v[1] \geq \dots \geq v[n-1]$

Definição

Um vetor é **ordenado** se é crescente ou decrescente

Problema

Dado um número inteiro $n \geq 0$, um vetor de números inteiros ordenado $v[0..n-1]$ e um número inteiro x , encontrar um índice k tal que $v[k-1] < x \leq v[k]$

Busca em vetor ordenado

Definição

Um vetor de números inteiros $v[0..n-1]$ é **crescente** se $v[0] \leq v[1] \leq \dots \leq v[n-1]$ e **decrecente** se $v[0] \geq v[1] \geq \dots \geq v[n-1]$

Definição

Um vetor é **ordenado** se é crescente ou decrescente

Problema

Dado um número inteiro $n \geq 0$, um vetor de números inteiros ordenado $v[0..n-1]$ e um número inteiro x , encontrar um índice k tal que $v[k-1] < x \leq v[k]$

Busca em vetor ordenado

Definição

Um vetor de números inteiros $v[0..n-1]$ é **crescente** se $v[0] \leq v[1] \leq \dots \leq v[n-1]$ e **decrecente** se $v[0] \geq v[1] \geq \dots \geq v[n-1]$

Definição

Um vetor é **ordenado** se é crescente ou decrescente

Problema

Dado um número inteiro $n \geq 0$, um vetor de números inteiros ordenado $v[0..n-1]$ e um número inteiro x , encontrar um índice k tal que $v[k-1] < x \leq v[k]$

Busca em vetor ordenado

- ▶ $v[k - 1] < x \leq v[k]$ vale para todo k , com $0 \leq k \leq n$
 - ▶ se $k = 0$ então a condição é $x \leq v[0]$
 - ▶ se $k = n$ então a condição é $v[n - 1] < x$
- ▶ Supor $n \geq 1$

Busca em vetor ordenado

- ▶ $v[k - 1] < x \leq v[k]$ vale para todo k , com $0 \leq k \leq n$
 - ▶ se $k = 0$ então a condição é $x \leq v[0]$
 - ▶ se $k = n$ então a condição é $v[n - 1] < x$
- ▶ Supor $n \geq 1$

Busca em vetor ordenado

- ▶ $v[k - 1] < x \leq v[k]$ vale para todo k , com $0 \leq k \leq n$
 - ▶ se $k = 0$ então a condição é $x \leq v[0]$
 - ▶ se $k = n$ então a condição é $v[n - 1] < x$
- ▶ Supor $n \geq 1$

Busca em vetor ordenado

- ▶ $v[k - 1] < x \leq v[k]$ vale para todo k , com $0 \leq k \leq n$
 - ▶ se $k = 0$ então a condição é $x \leq v[0]$
 - ▶ se $k = n$ então a condição é $v[n - 1] < x$
- ▶ Supor $n \geq 1$

Busca em vetor ordenado

```
/* Recebe um número inteiro n > 0, um vetor de números in-
   teiros crescente v[0..n-1] e um número inteiro x e devol-
   ve um índice k em [0, n] tal que v[k-1] < x <= v[k] */
int busca_ordenada(int n, int v[MAX], int x)
{
    int k;

    for (k = 0; k < n && v[k] < x; k++)
        ;

    return k;
}
```

Tempo de execução $O(n)$

Busca em vetor ordenado

```
/* Recebe um número inteiro n > 0, um vetor de números in-  
teiros crescente v[0..n-1] e um número inteiro x e devol-  
ve um índice k em [0, n] tal que v[k-1] < x <= v[k] */  
int busca_ordenada(int n, int v[MAX], int x)  
{  
    int k;  
  
    for (k = 0; k < n && v[k] < x; k++)  
        ;  
  
    return k;  
}
```

Tempo de execução $O(n)$

Busca em vetor ordenado

- **Busca binária:** processo automático que usamos para busca uma palavra em um dicionário

```
/* Recebe um número inteiro n > 0, um vetor de números in-
   teiros crescente v[0..n-1] e um número inteiro x e devol-
   ve um índice k em [0, n] tal que v[k-1] < x <= v[k] */
int busca_binaria(int n, int v[MAX], int x)
{
    int esq, dir, meio;

    esq = -1;
    dir = n;
    while (esq < dir - 1) {
        meio = (esq + dir) / 2;
        if (v[meio] < x)
            esq = meio;
        else
            dir = meio;
    }
    return dir;
}
```

Busca em vetor ordenado

- ▶ Busca binária: processo automático que usamos para busca uma palavra em um dicionário

```
/* Recebe um número inteiro n > 0, um vetor de números in-  
teiros crescente v[0..n-1] e um número inteiro x e devol-  
ve um índice k em [0, n] tal que v[k-1] < x <= v[k] */  
int busca_binaria(int n, int v[MAX], int x)  
{  
    int esq, dir, meio;  
  
    esq = -1;  
    dir = n;  
    while (esq < dir - 1) {  
        meio = (esq + dir) / 2;  
        if (v[meio] < x)  
            esq = meio;  
        else  
            dir = meio;  
    }  
    return dir;  
}
```

Busca em vetor ordenado

- ▶ Busca binária: processo automático que usamos para busca uma palavra em um dicionário

```
/* Recebe um número inteiro n > 0, um vetor de números in-
   teiros crescente v[0..n-1] e um número inteiro x e devol-
   ve um índice k em [0, n] tal que v[k-1] < x <= v[k] */
int busca_binaria(int n, int v[MAX], int x)
{
    int esq, dir, meio;

    esq = -1;
    dir = n;
    while (esq < dir - 1) {
        meio = (esq + dir) / 2;
        if (v[meio] < x)
            esq = meio;
        else
            dir = meio;
    }
    return dir;
}
```

Busca em vetor ordenado

- ▶ Invariante (para provar correção):

no início de cada repetição `while`, imediatamente antes da comparação de `esq` com `dir - 1`, vale a relação $v[esq] < x \leq v[dir]$.

- ▶ Tempo de execução: em cada iteração, o tamanho do vetor v é dado por `dir - esq - 1`. No início da primeira iteração, o tamanho do vetor é n . No início da segunda iteração, o tamanho do vetor é aproximadamente $n/2$. No início da terceira, aproximadamente $n/4$. No início da $(k + 1)$ -ésima, aproximadamente $n/2^k$. Quando $k > \log_2 n$, temos $n/2^k < 1$ e a execução da função termina. Assim, o número de iterações é aproximadamente $\log_2 n$. O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto proporcional a $\log_2 n$.

Busca em vetor ordenado

- ▶ Invariante (para provar correção):

*no início de cada repetição **while**, imediatamente antes da comparação de **esq** com **dir - 1**, vale a relação **$v[esq] < x \leq v[dir]$** .*

- ▶ Tempo de execução: em cada iteração, o tamanho do vetor v é dado por **$dir - esq - 1$** . No início da primeira iteração, o tamanho do vetor é n . No início da segunda iteração, o tamanho do vetor é aproximadamente $n/2$. No início da terceira, aproximadamente $n/4$. No início da $(k + 1)$ -ésima, aproximadamente $n/2^k$. Quando $k > \log_2 n$, temos $n/2^k < 1$ e a execução da função termina. Assim, o número de iterações é aproximadamente $\log_2 n$. O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto proporcional a $\log_2 n$.

Busca em vetor ordenado

- ▶ Invariante (para provar correção):

no início de cada repetição `while`, imediatamente antes da comparação de `esq` com `dir - 1`, vale a relação $v[esq] < x \leq v[dir]$.

- ▶ Tempo de execução: em cada iteração, o tamanho do vetor v é dado por `dir - esq - 1`. No início da primeira iteração, o tamanho do vetor é n . No início da segunda iteração, o tamanho do vetor é aproximadamente $n/2$. No início da terceira, aproximadamente $n/4$. No início da $(k + 1)$ -ésima, aproximadamente $n/2^k$. Quando $k > \log_2 n$, temos $n/2^k < 1$ e a execução da função termina. Assim, o número de iterações é aproximadamente $\log_2 n$. O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto proporcional a $\log_2 n$.

Busca em vetor ordenado

- ▶ Invariante (para provar correção):

no início de cada repetição `while`, imediatamente antes da comparação de `esq` com `dir - 1`, vale a relação $v[esq] < x \leq v[dir]$.

- ▶ Tempo de execução: em cada iteração, o tamanho do vetor v é dado por `dir - esq - 1`. No início da primeira iteração, o tamanho do vetor é n . No início da segunda iteração, o tamanho do vetor é aproximadamente $n/2$. No início da terceira, aproximadamente $n/4$. No início da $(k + 1)$ -ésima, aproximadamente $n/2^k$. Quando $k > \log_2 n$, temos $n/2^k < 1$ e a execução da função termina. Assim, o número de iterações é aproximadamente $\log_2 n$. O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto proporcional a $\log_2 n$.

Busca em vetor ordenado

- ▶ Invariante (para provar correção):

no início de cada repetição `while`, imediatamente antes da comparação de `esq` com `dir - 1`, vale a relação $v[esq] < x \leq v[dir]$.

- ▶ Tempo de execução: em cada iteração, o tamanho do vetor v é dado por `dir - esq - 1`. No início da primeira iteração, o tamanho do vetor é n . No início da segunda iteração, o tamanho do vetor é aproximadamente $n/2$. No início da terceira, aproximadamente $n/4$. No início da $(k + 1)$ -ésima, aproximadamente $n/2^k$. Quando $k > \log_2 n$, temos $n/2^k < 1$ e a execução da função termina. Assim, o número de iterações é aproximadamente $\log_2 n$. O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto proporcional a $\log_2 n$.

Busca em vetor ordenado

- ▶ Invariante (para provar correção):

no início de cada repetição `while`, imediatamente antes da comparação de `esq` com `dir - 1`, vale a relação $v[esq] < x \leq v[dir]$.

- ▶ Tempo de execução: em cada iteração, o tamanho do vetor v é dado por `dir - esq - 1`. No início da primeira iteração, o tamanho do vetor é n . No início da segunda iteração, o tamanho do vetor é aproximadamente $n/2$. No início da terceira, aproximadamente $n/4$. No início da $(k + 1)$ -ésima, aproximadamente $n/2^k$. Quando $k > \log_2 n$, temos $n/2^k < 1$ e a execução da função termina. Assim, o número de iterações é aproximadamente $\log_2 n$. O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto proporcional a $\log_2 n$.

Busca em vetor ordenado

- ▶ Invariante (para provar correção):

no início de cada repetição `while`, imediatamente antes da comparação de `esq` com `dir - 1`, vale a relação $v[esq] < x \leq v[dir]$.

- ▶ Tempo de execução: em cada iteração, o tamanho do vetor v é dado por `dir - esq - 1`. No início da primeira iteração, o tamanho do vetor é n . No início da segunda iteração, o tamanho do vetor é aproximadamente $n/2$. No início da terceira, aproximadamente $n/4$. No início da $(k + 1)$ -ésima, aproximadamente $n/2^k$. Quando $k > \log_2 n$, temos $n/2^k < 1$ e a execução da função termina. Assim, o número de iterações é aproximadamente $\log_2 n$. O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto proporcional a $\log_2 n$.

Busca em vetor ordenado

- ▶ Invariante (para provar correção):

no início de cada repetição `while`, imediatamente antes da comparação de `esq` com `dir - 1`, vale a relação $v[esq] < x \leq v[dir]$.

- ▶ Tempo de execução: em cada iteração, o tamanho do vetor v é dado por `dir - esq - 1`. No início da primeira iteração, o tamanho do vetor é n . No início da segunda iteração, o tamanho do vetor é aproximadamente $n/2$. No início da terceira, aproximadamente $n/4$. No início da $(k + 1)$ -ésima, aproximadamente $n/2^k$. Quando $k > \log_2 n$, temos $n/2^k < 1$ e a execução da função termina. Assim, o número de iterações é aproximadamente $\log_2 n$. O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto proporcional a $\log_2 n$.

- ▶ Invariante (para provar correção):

no início de cada repetição `while`, imediatamente antes da comparação de `esq` com `dir - 1`, vale a relação $v[esq] < x \leq v[dir]$.

- ▶ Tempo de execução: em cada iteração, o tamanho do vetor v é dado por `dir - esq - 1`. No início da primeira iteração, o tamanho do vetor é n . No início da segunda iteração, o tamanho do vetor é aproximadamente $n/2$. No início da terceira, aproximadamente $n/4$. No início da $(k + 1)$ -ésima, aproximadamente $n/2^k$. Quando $k > \log_2 n$, temos $n/2^k < 1$ e a execução da função termina. Assim, o número de iterações é aproximadamente $\log_2 n$. O consumo de tempo da função é proporcional ao número de iterações e portanto proporcional a $\log_2 n$.

Busca em vetor ordenado

- Busca binária recursiva: procura o elemento x no vetor crescente $v[\text{esq}..\text{dir}]$

```
/* Recebe dois números inteiros esq e dir, um vetor de números
   inteiros crescente v[esq..dir] e um número inteiro x tais
   que v[esq] < x <= v[dir] e devolve um índice k em
   [esq+1, dir] tal que v[k-1] < x <= v[k] */
int busca_binaria_R(int esq, int dir, int v[MAX], int x)
{
    int meio;

    if (esq == dir - 1)
        return dir;
    else {
        meio = (esq + dir) / 2;
        if (v[meio] < x)
            return busca_binaria_R(meio, dir, v, x);
        else
            return busca_binaria_R(esq, meio, v, x);
    }
}
```

Busca em vetor ordenado

- Busca binária recursiva: procura o elemento x no vetor crescente $v[\text{esq}..\text{dir}]$

```
/* Recebe dois números inteiros esq e dir, um vetor de números
   inteiros crescente v[esq..dir] e um número inteiro x tais
   que v[esq] < x <= v[dir] e devolve um índice k em
   [esq+1, dir] tal que v[k-1] < x <= v[k] */
int busca_binaria_R(int esq, int dir, int v[MAX], int x)
{
    int meio;

    if (esq == dir - 1)
        return dir;
    else {
        meio = (esq + dir) / 2;
        if (v[meio] < x)
            return busca_binaria_R(meio, dir, v, x);
        else
            return busca_binaria_R(esq, meio, v, x);
    }
}
```

- ▶ É fácil mostrar que a versão recursiva da busca binária está correta (por indução)
- ▶ Tempo de execução: quando a função `busca_binaria_R` é chamada com argumentos $(-1, n, v, x)$, ela chama a si mesma cerca de $\lfloor \log_2 n \rfloor$ vezes. Este número de chamadas é a profundidade da recursão e determina o tempo de execução da função

- ▶ É fácil mostrar que a versão recursiva da busca binária está correta (por indução)
- ▶ Tempo de execução: quando a função `busca_binaria_R` é chamada com argumentos $(-1, n, v, x)$, ela chama a si mesma cerca de $\lfloor \log_2 n \rfloor$ vezes. Este número de chamadas é a profundidade da recursão e determina o tempo de execução da função

- ▶ É fácil mostrar que a versão recursiva da busca binária está correta (por indução)
- ▶ Tempo de execução: quando a função `busca_binaria_R` é chamada com argumentos $(-1, n, v, x)$, ela chama a si mesma cerca de $\lfloor \log_2 n \rfloor$ vezes. Este número de chamadas é a profundidade da recursão e determina o tempo de execução da função

- 4.1 Tome uma decisão de projeto diferente daquela da seção 2: se x não estiver em $v[0..n-1]$, a função deve devolver n . Escreva a versão correspondente da função **busca**. Para evitar o grande número de comparações de k com n , coloque uma “sentinela” em $v[n]$.

```
/* Recebe um número inteiro n >= 0, um vetor de números inteiros v[0..n-1] e um número inteiro x e devolve k no intervalo [0, n-1] tal que v[k] == x. Se tal k não existe, devolve n */
int busca_sequencial_sentinela(int n, int v[MAX+1], int x)
{
    int k;

    v[n] = x;
    for (k = 0; v[k] != x; k++)
        ;

    return k;
}
```

- 4.2 Considere o problema de determinar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0..n - 1]$ e a função a seguir.

```
int maximo(int n, int v[MAX])
{
    int i, x;

    x = v[0];
    for (i = 1; i < n; i++)
        if (x < v[i])
            x = v[i];

    return x;
}
```

- (a) A função `maximo` acima resolve o problema?
- (b) Faz sentido trocar `x = v[0]` por `x = 0` ?
- (c) Faz sentido trocar `x = v[0]` por `x = INT_MIN` ?
- (d) Faz sentido trocar `x < v[i]` por `x <= v[i]` ?

- 4.2 Considere o problema de determinar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0..n - 1]$ e a função a seguir.

```
int maximo(int n, int v[MAX])
{
    int i, x;

    x = v[0];
    for (i = 1; i < n; i++)
        if (x < v[i])
            x = v[i];

    return x;
}
```

- (a) A função **maximo** acima resolve o problema?
- (b) Faz sentido trocar `x = v[0]` por `x = 0` ?
- (c) Faz sentido trocar `x = v[0]` por `x = INT_MIN` ?
- (d) Faz sentido trocar `x < v[i]` por `x <= v[i]` ?

- 4.2 Considere o problema de determinar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0..n - 1]$ e a função a seguir.

```
int maximo(int n, int v[MAX])
{
    int i, x;

    x = v[0];
    for (i = 1; i < n; i++)
        if (x < v[i])
            x = v[i];

    return x;
}
```

- (a) A função **maximo** acima resolve o problema?
- (b) Faz sentido trocar **x = v[0]** por **x = 0** ?
- (c) Faz sentido trocar **x = v[0]** por **x = INT_MIN** ?
- (d) Faz sentido trocar **x < v[i]** por **x <= v[i]** ?

- 4.2 Considere o problema de determinar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0..n - 1]$ e a função a seguir.

```
int maximo(int n, int v[MAX])
{
    int i, x;

    x = v[0];
    for (i = 1; i < n; i++)
        if (x < v[i])
            x = v[i];

    return x;
}
```

- (a) A função **maximo** acima resolve o problema?
- (b) Faz sentido trocar **x = v[0]** por **x = 0** ?
- (c) Faz sentido trocar **x = v[0]** por **x = INT_MIN** ?
- (d) Faz sentido trocar **x < v[i]** por **x <= v[i]** ?

- 4.2 Considere o problema de determinar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[0..n - 1]$ e a função a seguir.

```
int maximo(int n, int v[MAX])
{
    int i, x;

    x = v[0];
    for (i = 1; i < n; i++)
        if (x < v[i])
            x = v[i];

    return x;
}
```

- (a) A função **maximo** acima resolve o problema?
- (b) Faz sentido trocar **x = v[0]** por **x = 0** ?
- (c) Faz sentido trocar **x = v[0]** por **x = INT_MIN** ?
- (d) Faz sentido trocar **x < v[i]** por **x <= v[i]** ?

- 4.3 O autor da função abaixo afirma que ela decide se x está no vetor $v[0..n-1]$. Critique seu código.

```
int buscaR2(int n, int v[MAX], int x)
{
    if (v[n-1] == x)
        return 1;
    else
        return buscaR2(n-1, v, x);
}
```

4.4 A operação de remoção consiste de retirar do vetor $v[0..n-1]$ o elemento que tem índice k e fazer com que o vetor resultante tenha índices $0, 1, \dots, n-2$. Essa operação só faz sentido se $0 \leq k < n$.

(a) Escreva uma função não-recursiva com a seguinte interface:

```
int remove(int n, int v[MAX], int k)
```

que remove o elemento de índice k do vetor $v[0..n-1]$ e devolve o novo valor de n , supondo que $0 \leq k < n$.

(b) Escreva uma função recursiva para a remoção com a seguinte interface:

```
int remove_R(int n, int v[MAX], int k)
```

4.4 A operação de remoção consiste de retirar do vetor $v[0..n-1]$ o elemento que tem índice k e fazer com que o vetor resultante tenha índices $0, 1, \dots, n-2$. Essa operação só faz sentido se $0 \leq k < n$.

(a) Escreva uma função não-recursiva com a seguinte interface:

```
int remove(int n, int v[MAX], int k)
```

que remove o elemento de índice k do vetor $v[0..n-1]$ e devolve o novo valor de n , supondo que $0 \leq k < n$.

(b) Escreva uma função recursiva para a remoção com a seguinte interface:

```
int remove_R(int n, int v[MAX], int k)
```

4.4 A operação de remoção consiste de retirar do vetor $v[0..n-1]$ o elemento que tem índice k e fazer com que o vetor resultante tenha índices $0, 1, \dots, n-2$. Essa operação só faz sentido se $0 \leq k < n$.

(a) Escreva uma função não-recursiva com a seguinte interface:

```
int remove(int n, int v[MAX], int k)
```

que remove o elemento de índice k do vetor $v[0..n-1]$ e devolve o novo valor de n , supondo que $0 \leq k < n$.

(b) Escreva uma função recursiva para a remoção com a seguinte interface:

```
int remove_R(int n, int v[MAX], int k)
```

4.5 A operação de inserção consiste em introduzir um novo elemento y entre a posição de índice $k - 1$ e a posição de índice k no vetor $v[0..n - 1]$, com $0 \leq k \leq n$.

(a) Escreva uma função não-recursiva com a seguinte interface:

```
int insere(int n, int v[MAX], int k, int y)
```

que insere o elemento y entre as posições $k - 1$ e k do vetor $v[0..n - 1]$ e devolve o novo valor de n , supondo que $0 \leq k \leq n$.

(b) Escreva uma função recursiva para a inserção com a seguinte interface:

```
int insere_R(int n, int v[MAX], int k, int x)
```

4.5 A operação de inserção consiste em introduzir um novo elemento y entre a posição de índice $k - 1$ e a posição de índice k no vetor $v[0..n - 1]$, com $0 \leq k \leq n$.

(a) Escreva uma função não-recursive com a seguinte interface:

```
int insere(int n, int v[MAX], int k, int y)
```

que insere o elemento y entre as posições $k - 1$ e k do vetor $v[0..n - 1]$ e devolve o novo valor de n , supondo que $0 \leq k \leq n$.

(b) Escreva uma função recursiva para a inserção com a seguinte interface:

```
int insere_R(int n, int v[MAX], int k, int x)
```

4.5 A operação de inserção consiste em introduzir um novo elemento y entre a posição de índice $k - 1$ e a posição de índice k no vetor $v[0..n - 1]$, com $0 \leq k \leq n$.

(a) Escreva uma função não-recursive com a seguinte interface:

```
int insere(int n, int v[MAX], int k, int y)
```

que insere o elemento y entre as posições $k - 1$ e k do vetor $v[0..n - 1]$ e devolve o novo valor de n , supondo que $0 \leq k \leq n$.

(b) Escreva uma função recursiva para a inserção com a seguinte interface:

```
int insere_R(int n, int v[MAX], int k, int x)
```

4.6 Na busca binária, suponha que $v[i] = i$ para todo i .

- (a) Execute a função `busca_binaria` com $n = 9$ e $x = 3$;
- (b) Execute a função `busca_binaria` com $n = 14$ e $x = 7$;
- (c) Execute a função `busca_binaria` com $n = 15$ e $x = 7$.

4.7 Execute a função `busca_binaria` com $n = 16$. Quais os possíveis valores de m na primeira iteração? Quais os possíveis valores de m na segunda iteração? Na terceira? Na quarta?

4.8 Confira a validade da seguinte afirmação: quando $n + 1$ é uma potência de 2, o valor da expressão `(esq + dir)` é divisível por 2 em todas as iterações da função `busca_binaria`, quaisquer que sejam v e x .

4.6 Na busca binária, suponha que $v[i] = i$ para todo i .

- (a) Execute a função `busca_binaria` com $n = 9$ e $x = 3$;
- (b) Execute a função `busca_binaria` com $n = 14$ e $x = 7$;
- (c) Execute a função `busca_binaria` com $n = 15$ e $x = 7$.

4.7 Execute a função `busca_binaria` com $n = 16$. Quais os possíveis valores de m na primeira iteração? Quais os possíveis valores de m na segunda iteração? Na terceira? Na quarta?

4.8 Confira a validade da seguinte afirmação: quando $n + 1$ é uma potência de 2, o valor da expressão `(esq + dir)` é divisível por 2 em todas as iterações da função `busca_binaria`, quaisquer que sejam v e x .

4.6 Na busca binária, suponha que $v[i] = i$ para todo i .

- (a) Execute a função `busca_binaria` com $n = 9$ e $x = 3$;
- (b) Execute a função `busca_binaria` com $n = 14$ e $x = 7$;
- (c) Execute a função `busca_binaria` com $n = 15$ e $x = 7$.

4.7 Execute a função `busca_binaria` com $n = 16$. Quais os possíveis valores de m na primeira iteração? Quais os possíveis valores de m na segunda iteração? Na terceira? Na quarta?

4.8 Confira a validade da seguinte afirmação: quando $n + 1$ é uma potência de 2, o valor da expressão `(esq + dir)` é divisível por 2 em todas as iterações da função `busca_binaria`, quaisquer que sejam v e x .

4.6 Na busca binária, suponha que $v[i] = i$ para todo i .

- (a) Execute a função `busca_binaria` com $n = 9$ e $x = 3$;
- (b) Execute a função `busca_binaria` com $n = 14$ e $x = 7$;
- (c) Execute a função `busca_binaria` com $n = 15$ e $x = 7$.

4.7 Execute a função `busca_binaria` com $n = 16$. Quais os possíveis valores de m na primeira iteração? Quais os possíveis valores de m na segunda iteração? Na terceira? Na quarta?

4.8 Confira a validade da seguinte afirmação: quando $n + 1$ é uma potência de 2, o valor da expressão `(esq + dir)` é divisível por 2 em todas as iterações da função `busca_binaria`, quaisquer que sejam v e x .

4.6 Na busca binária, suponha que $v[i] = i$ para todo i .

- (a) Execute a função `busca_binaria` com $n = 9$ e $x = 3$;
- (b) Execute a função `busca_binaria` com $n = 14$ e $x = 7$;
- (c) Execute a função `busca_binaria` com $n = 15$ e $x = 7$.

4.7 Execute a função `busca_binaria` com $n = 16$. Quais os possíveis valores de m na primeira iteração? Quais os possíveis valores de m na segunda iteração? Na terceira? Na quarta?

4.8 Confira a validade da seguinte afirmação: quando $n + 1$ é uma potência de 2, o valor da expressão `(esq + dir)` é divisível por 2 em todas as iterações da função `busca_binaria`, quaisquer que sejam v e x .

4.9 Responda as seguintes perguntas sobre a função

busca_binaria.

- (a) Que acontece se a sentença `while (esq < dir - 1)` for substituída pela sentença `while (esq < dir)` ?
- (b) Que acontece se a sentença `if (v[meio] < x)` for substituída pela sentença `if (v[meio] <= x)` ?
- (c) Que acontece se `esq = meio` for substituído por `esq = meio + 1` ou então por `esq = meio - 1` ?
- (d) Que acontece se `dir = meio` for substituído por `dir = meio + 1` ou então por `dir = meio - 1` ?

4.10 Se t segundos são necessários para fazer uma busca binária em um vetor com n elementos, quantos segundos serão necessários para fazer uma busca em n^2 elementos?

4.9 Responda as seguintes perguntas sobre a função

busca_binaria.

- (a) Que acontece se a sentença `while (esq < dir - 1)` for substituída pela sentença `while (esq < dir)` ?
- (b) Que acontece se a sentença `if (v[meio] < x)` for substituída pela sentença `if (v[meio] <= x)` ?
- (c) Que acontece se `esq = meio` for substituído por `esq = meio + 1` ou então por `esq = meio - 1` ?
- (d) Que acontece se `dir = meio` for substituído por `dir = meio + 1` ou então por `dir = meio - 1` ?

4.10 Se t segundos são necessários para fazer uma busca binária em um vetor com n elementos, quantos segundos serão necessários para fazer uma busca em n^2 elementos?

4.9 Responda as seguintes perguntas sobre a função

`busca_binaria`.

- (a) Que acontece se a sentença `while (esq < dir - 1)` for substituída pela sentença `while (esq < dir)` ?
- (b) Que acontece se a sentença `if (v[meio] < x)` for substituída pela sentença `if (v[meio] <= x)` ?
- (c) Que acontece se `esq = meio` for substituído por `esq = meio + 1` ou então por `esq = meio - 1` ?
- (d) Que acontece se `dir = meio` for substituído por `dir = meio + 1` ou então por `dir = meio - 1` ?

4.10 Se t segundos são necessários para fazer uma busca binária em um vetor com n elementos, quantos segundos serão necessários para fazer uma busca em n^2 elementos?

4.9 Responda as seguintes perguntas sobre a função

busca_binaria.

- (a) Que acontece se a sentença `while (esq < dir - 1)` for substituída pela sentença `while (esq < dir)` ?
- (b) Que acontece se a sentença `if (v[meio] < x)` for substituída pela sentença `if (v[meio] <= x)` ?
- (c) Que acontece se `esq = meio` for substituído por `esq = meio + 1` ou então por `esq = meio - 1` ?
- (d) Que acontece se `dir = meio` for substituído por `dir = meio + 1` ou então por `dir = meio - 1` ?

4.10 Se t segundos são necessários para fazer uma busca binária em um vetor com n elementos, quantos segundos serão necessários para fazer uma busca em n^2 elementos?

4.9 Responda as seguintes perguntas sobre a função

busca_binaria.

- (a) Que acontece se a sentença `while (esq < dir - 1)` for substituída pela sentença `while (esq < dir)` ?
- (b) Que acontece se a sentença `if (v[meio] < x)` for substituída pela sentença `if (v[meio] <= x)` ?
- (c) Que acontece se `esq = meio` for substituído por `esq = meio + 1` ou então por `esq = meio - 1` ?
- (d) Que acontece se `dir = meio` for substituído por `dir = meio + 1` ou então por `dir = meio - 1` ?

4.10 Se t segundos são necessários para fazer uma busca binária em um vetor com n elementos, quantos segundos serão necessários para fazer uma busca em n^2 elementos?

- 4.11 Escreva uma versão da busca binária para resolver o seguinte problema: dado um inteiro x e um vetor decrescente $v[0..n-1]$, encontrar k tal que $v[k-1] > x \geq v[k]$.
- 4.12 Suponha que cada elemento do vetor $v[0..n-1]$ é uma cadeia de caracteres (ou seja, temos uma matriz de caracteres). Suponha também que o vetor está em ordem lexicográfica. Escreva uma função eficiente, baseada na busca binária, que receba uma cadeia de caracteres x e devolva um índice k tal que x é igual a $v[k]$. Se tal k não existe, a função deve devolver -1 .

- 4.11 Escreva uma versão da busca binária para resolver o seguinte problema: dado um inteiro x e um vetor decrescente $v[0..n-1]$, encontrar k tal que $v[k-1] > x \geq v[k]$.
- 4.12 Suponha que cada elemento do vetor $v[0..n-1]$ é uma cadeia de caracteres (ou seja, temos uma matriz de caracteres). Suponha também que o vetor está em ordem lexicográfica. Escreva uma função eficiente, baseada na busca binária, que receba uma cadeia de caracteres x e devolva um índice k tal que x é igual a $v[k]$. Se tal k não existe, a função deve devolver -1 .

- 4.13 Suponha que cada elemento do vetor $v[0..n-1]$ é um registro com dois campos: o nome do(a) estudante e o número do(a) estudante. Suponha que o vetor está em ordem crescente de números. Escreva uma função de busca binária que receba o número de um(a) estudante e devolva seu nome. Se o número não estiver no vetor, a função deve devolver a cadeia de caracteres vazia.
- 4.14 Escreva uma função que receba um vetor crescente $v[0..n-1]$ de números inteiros e devolva um índice i entre 0 e $n-1$ tal que $v[i] = i$. Se tal i não existe, a função deve devolver -1 . A sua função não deve fazer mais que $\lfloor \log_2 n \rfloor$ comparações envolvendo os elementos de v .

- 4.13 Suponha que cada elemento do vetor $v[0..n-1]$ é um registro com dois campos: o nome do(a) estudante e o número do(a) estudante. Suponha que o vetor está em ordem crescente de números. Escreva uma função de busca binária que receba o número de um(a) estudante e devolva seu nome. Se o número não estiver no vetor, a função deve devolver a cadeia de caracteres vazia.
- 4.14 Escreva uma função que receba um vetor crescente $v[0..n-1]$ de números inteiros e devolva um índice i entre 0 e $n-1$ tal que $v[i] = i$. Se tal i não existe, a função deve devolver -1 . A sua função não deve fazer mais que $\lfloor \log_2 n \rfloor$ comparações envolvendo os elementos de v .