# Contenido de la semana 2

| | |
|---|---|
| **Nombre de la materia** | **Elementos de Análisis Matemático** |
| **Nombre/ n° de la semana** | **Presentación de matrices y operaciones con matrices** |

**Título del contenido** 1:
**Presentación de matrices**

**Desarrollo del contenido** 1

1. **Matriz**

Definición de Matriz

Se llama matriz de orden m×n a todo conjunto rectangular de una distribución de números llamados elementos **aij** dispuestos en **m líneas horizontales (filas)** y **n verticales (columnas).**

Abreviando la matriz, A =[aij], con i =1, 2,..., m; j =1, 2, ..., n. de la forma:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Columnas de la matriz A}} \left.\begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}\right\} \text{Filas de la matriz A}$$

Los subíndices indican la posición del elemento dentro de la matriz, el primero denota la fila (i) y el segundo la columna (j).

El número real que en la **matriz *A*** se encuentra en el cruce de la **fila i** con la **columna j**, se denota $a_{ij}$ .

Es decir, que en el lugar $ij$ de la matriz *A* está el número $a_{ij}$ . Esto se simboliza: $A = (a_{ij})$ o $A_{mxn} = (a_{ij})$

**Observación:** $En\ la\ diagonal\ i = j \quad debajo\ de\ la\ diagonal\ i > j \quad y\ sobre\ la\ diagonal\ i < j$

$i = j$

<u>Ejemplo:</u>

Consideramos la matriz $A_{2x4} = (a_{ij})$ .Es una matriz de 2x4, sabemos que tiene 2 filas y 4 columnas:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$ Tal que $a_{ij} = i - j$ , para cualquier valor de *i* y *j* entonces

$$a_{11} = 1-1 \Rightarrow a_{11} = 0 \quad a_{12} = 1-2 \Rightarrow a_{12} = -1 \quad a_{13} = 1-3 \Rightarrow a_{13} = -2 \quad a_{14} = 1-4 \Rightarrow a_{14} = -3$$

$$a_{21} = 2-1 \Rightarrow a_{21} = 1 \quad a_{22} = 2-2 \Rightarrow a_{22} = 0 \quad a_{23} = 2-3 \Rightarrow a_{23} = -1 \quad a_{24} = 2-4 \Rightarrow a_{24} = -2$$

Entonces, la matriz *A* es: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

## 2. Tipos de matrices

**Matriz columna**: Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, n =1 y por tanto es de orden m x 1.  Por ejemplo:

$$A_{(3x1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -a \end{bmatrix}$$

**Matriz fila**: Es una matriz que solo tiene una fila, es decir m =1 y por tanto es de orden 1x n.

Por ejemplo:

$$A_{(1x3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

**Matriz Nula**

La matriz nula de orden m x n es una matriz donde todos sus elementos son cero. A esta matriz la simbolizamos con la letra *N*.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad orden \quad 2x4$$

**Matriz Cuadrada**

Una matriz cuadrada es una matriz de **orden n x n**, es decir, una matriz que tiene igual cantidad de filas que de columnas. En este caso, decimos que la matriz es de **orden n**.

En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n, y no n x n (aunque es lo mismo).

**Diagonal de una matriz cuadrada**

La diagonal de una matriz **cuadrada *A* de orden n** está formada por los elementos en los cuales $i = j$, es decir, $a_{11},\ a_{22},\ a_{33},......,\ a_{nn}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Los elementos aij con i = j, o sea aij forman la llamada diagonal principal de la matriz cuadrada, y los elementos aij con i + j = n +1 la diagonal secundaria.

En la matriz $A_{(3x3)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

La diagonal principal está formada por [ 1 1 9 ] y la diagonal secundaria por [ 0 1 3 ]

**Matriz Diagonal**

Una matriz diagonal es, una **matriz cuadrada** en la cual los elementos que no se encuentran en la diagonal son cero.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal de orden 3

**Matriz Opuesta**

La matriz opuesta de una matriz A, es aquella que tiene todos sus coeficientes opuestos y la simbolizamos –A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} su \quad opuesta \quad es \qquad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{pmatrix} \; Ejemplo\,A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-A = \begin{pmatrix} -2 & +1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

**Matriz Identidad**

La matriz identidad es una matriz diagonal en la cual los elementos que están en la diagonal son todos igual a 1. A esta matriz se la simboliza con I.

Ejemplo: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz identidad de orden 32.1.6.

**Matriz traspuesta**

La matriz traspuesta de una matriz A de orden mxn, que se simboliza **$A^t$** ,es la matriz de orden nxm en la cual las filas coinciden con las columnas de A y las columnas con las filas de A.

La primera fila de A es la primera columna de At, la segunda fila de A es la segunda columna de At y así sucesivamente. De la definición se deduce que si A es de orden m x n, entonces At es de orden n x m.

Ejemplo: $A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Ejemplo: $A_{(2x3)} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ entonces $A^t_{(3x2)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

**Matriz simétrica**

Una matriz cuadrada A, es **matriz simétrica** si se verifica que **$A^t = A$**

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -8 \\ 1 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} & -0{,}8 \\ 3 & \frac{1}{2} & -4 & 15 \\ -8 & -0{,}8 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & -8 \\ 1 & \sqrt{2} & \frac{1}{2} & -0{,}8 \\ 3 & \frac{1}{2} & -4 & 15 \\ -8 & -0{,}8 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & \sqrt{7} \end{bmatrix}$ (Comprobar que $A = A^t$)

**Matriz triangular superior**

Una matriz triangular superior A de orden mxn es una matriz que verifica que $a_{ij} = 0$ siempre que i > j.
Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ siempre que i > j

**Matriz triangular inferior**

Una matriz triangular inferior A de orden mxn es una matriz que verifica que $a_{ij}=0$ siempre que i < j.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0{,}6 & 3 \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=0$ siempre que i < j.

**Matrices iguales**

**Dos matrices son iguales** si son del mismo orden y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas deben ser **iguales**. También, al realizar la resta de las **dos matrices** resulta una matriz nula

2.1.11 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} de\,orden\, 2x4$ $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & a_{24} \end{pmatrix} de\ orden\ 2x4$

$$A = B \quad si \quad a_{11} = b_{11} \quad , a_{12} = b_{12} \quad etc$$

**Menor complementario de una matriz cuadrada A**

Llamamos **menor complementario ij de una matriz cuadrada A,** y lo denotamos $A_{ij}$ , a la matriz que se obtiene al **quitar de la matriz A la fila i y la columna j.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$a_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

**Título del contenido** 2:
**Operaciones con matrices**

**Desarrollo del contenido** 2

1. **Suma de matrices**

Si $A$ y $B$ son dos matrices del **mismo orden,** entonces la suma $A+B$ es la matriz obtenida al sumar los elementos de $A$ con los elementos **homólogos** de $B$. No es posible sumar matrices de distinto orden.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$, entonces $A+B = \begin{pmatrix} 2+1 & -1-2 \\ 5+4 & 4+8 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

2. **Resta de matrices**

Para realizar $A-B$ se debe sumar a la matriz $A$ la opuesta de la matriz $B$, es decir, $A-B = A+(-B)$

$$A-B = A+(-B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & +2 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} \qquad A-B = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+2 \\ 5+(-4) & 4+(-8) \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

3. **Producto de una matriz por un escalar**

Si $A$ es una matriz cualquiera y $c$ es un escalar cualquiera, entonces el producto de $cA$ es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de $A$ por $c$.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 9 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $c = 2$, entonces $c.A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 8 & 18 \\ -4 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

4. **Producto entre dos matrices**

Si $A$ es una matriz de orden **mxr** y $B$ es una matriz de orden **rxn**, entonces el producto $A.B$ es la matriz *C* de orden **mxn** cuyos elementos $c_{ij}$ se obtienen de la siguiente forma:

Cálculo de $c_{ij}$

1) Tomamos el renglón $i$ de la matriz $A$ y la columna $j$ de la matriz $B$.
2) Multiplicamos entre sí los elementos homólogos que ocupan la misma posición y luego sumamos.

Ejemplo:

Verificar que existe *A.B* y calcular el elemento $c_{23}$ siendo:

$A = (1\ 2\ 4\ 2\ 6\ 0\ )\ orden\ 2x3\ \ y\ \ B = (4\ \ 1\ 0\ -\ 1\ 2\ \ 7\ \ 4\ 3\ \ 3\ 1\ \ 5\ 2\ )orden\ 3x4\ luego\ existe\ A.$

$A.B = (1\ 2\ 4\ 2\ 6\ 0\ )_{2x3} \bullet (4\ \ 1\ 0\ -\ 1\ 2\ \ 7\ \ 4\ 3\ \ 3\ 1\ \ 5\ 2\ )_{3x4_{2x4}} \Rightarrow$

1) Tomamos el renglón 2 de la matriz $A$ y la columna 3 de la matriz $B$.
2) Multiplicamos entre sí y sumamos $(2.4)+(6.3)+(0.5) = 8+18+0 = 26$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 26 & \cdots \end{pmatrix}$$

En forma análoga realicen el resto de los elementos, entonces $A.B = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{pmatrix}$