

# Kolokvij 1 - Osnove teoretične statistike

16. februar, 2018

1. Naj bo  $\hat{\sigma}^2$  nepristranska in dosledna cenilka za  $\sigma^2$ .

- Ali je cenilka  $\frac{\hat{\sigma}^2}{n}$  nepristranska cenilka za  $\frac{\sigma^2}{n}$ ?
- Ali je cenilka  $\frac{\hat{\sigma}^2}{n}$  dosledna cenilka za  $\frac{\sigma^2}{n}$ ?
- Ali je cenilka  $\widehat{SE} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}$  nepristranska cenilka za  $SE = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ ?
- Ali je cenilka  $\widehat{SE} = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}$  dosledna  $SE = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$ ?

Vsak odgovor kratko utemeljite.

2. Naj bodo  $X_i, i = 1, \dots, n$  neodvisne, enako porazdeljene normalne slučajne spremenljivke. Označimo pričakovano vrednosti  $E(X_i) = \mu$  in varianco  $\text{var}(X_i) = \sigma^2$ .

- Pokažite, da velja

$$(n-1) \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

- Zapišite psevdokodo, s katero bi grafično preverili ta rezultat

3. Oceniti želimo delež različnih veroizpovedi med prebivalci nekega mesta v Sloveniji, v anketi jih razdelimo v tri skupine: 'katoliki', 'ateisti', 'druge verske izpovedi'. Ocenilo in njen interval zaupanja želimo izračunati s pomočjo metode največjega verjetja. Zbrali smo vzorec velikosti  $n$ , ki vsebuje  $n_1$  katolikov,  $n_2$  ateistov in  $n_3$  pripadnikov drugih verskih skupnosti.

- Zapišite funkcijo verjetja
- Verjetnosti posameznih izidov želimo zapisati z intervalom zaupanja, pri tem lahko kot znan upoštevate rezultat, ki smo ga izpeljali na predavanjih: cenilka po metodi največjega verjetja za skupino ateistov je enaka  $\frac{n_2}{n}$

4. Zanima nas, ali je slovenski evrski kovanec pošten. Zberemo  $k = 15$  kovancev po 1 evro, vsakega vržemo 25x( $n$ ) in beležimo delež cifer. Označimo verjetnost cifre  $z$  s  $\pi$ , verjetnost cifre pri posameznem kovancu pa s  $\pi_i$ .

- Naj bo  $\hat{\pi} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \hat{\pi}_i$ , kjer je  $\hat{\pi}_i$  delež, ki ga ocenite na  $i$ -tem vzorcu. Ali ta cenilka nepristransko ocenjuje verjetnost cifre?
- Pri vsakem metu kovanca  $i$  seveda lahko dobimo drugačen izid. Izpeljite formulo za varianco teh izidov.
- Denimo, da imajo vsi kovanci enako varianco izidov (glej prejšnjo točko). Ali to pomeni, da imajo vsi tudi enako pričakovano vrednost? Utemeljite z izpeljavo.
- Denimo, da imajo vsi kovanci enako pričakovano vrednost. Zapišite, kako boste ocenili 95% interval zaupanja za verjetnost cifre, razložite, kako ste prišli do te formule.
- Ali je bil vaš vzorec optimalno alociran? Utemeljite oz. predlagajte bolj optimalen načrt.