Domača naloga 4 (do 5 točk)

š.l. 2020/21

Domačo nalogo oddajte v html z imenom **dn4_priimek.html** (kjer namesto besede *priimek* uporabite vaš priimek). Naloga naj vsebuje izpeljave, rešitve in vso kodo v R.

Točka 1.

Slučajna spremenljivka X je porazdeljena po gama porazdelitvi kot $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$. Njena gostota je za $x > 0$ enaka

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}.$$

Novo slučajno spremenljivko Y definiramo kot $Y = \frac{1}{X}$.

a) Izpeljite gostoto f_Y spremenljivke Y. Pomagate si lahko s knjigo Rice (Mathematical statistics and data analysis), podpoglavje 2.3 Functions of a random variable. Najbolj vam lahko pride prav:

> PROPOSITION **B**
>
> Let X be a continuous random variable with density $f(x)$ and let $Y = g(X)$ where g is a differentiable, strictly monotonic function on some interval I. Suppose that $f(x) = 0$ if x is not in I. Then Y has the density function
>
> $$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$
>
> for y such that $y = g(x)$ for some x, and $f_Y(y) = 0$ if $y \neq g(x)$ for any x in I. Here g^{-1} is the inverse function of g; that is, $g^{-1}(y) = x$ if $y = g(x)$. ■

Slika 1: Pomoč.

Dobljeno funkcijo narišite/predstavite kot krivuljo v R. Komentirajte njeno definicijsko območje in obliko ter povejte, kaj mora veljati za zvezno funkcijo, da je to lahko gostota zvezne spremenljivke.

b) Izračunajte pričakovano vrednost spremenljivke Y po definiciji. V pomoč vam je lahko, da se tej porazdelitvi reče tudi inverzna-gama porazdelitev.

Pomoč: Kot znano lahko uporabite, da za funkcijo $\Gamma(z)$ velja $\Gamma(z+1) = \Gamma(z) \cdot z$.

Točka 2.

Nadaljujmo z inverzno-gama porazdelitvijo, in sicer za spremenljivko Y poleg gostote poznamo tudi parameter $\alpha = 2$.

a) Po metodi največjega verjetja poiščite cenilko za parameter β.

b) Ali je cenilka iz prejšnje točke nepristranska? Pokažite (ne)pristranskost še s simulacijami.

c) S pomočjo teorije MNV izračunajte varianco (in interval zaupanja) za parameter β.

d) S simulacijami podkrepite teoretične rezultate o asimptotski porazdelitvi količine $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta_0)$, kjer je $\hat{\beta}_0$ cenilka iz točke a) za parameter β, β_0 pa njegova prava vrednost. **Utemeljite in komentirajte rezultate.**

e) Varianco $\hat{\beta}$ izračunajte tudi s pomočjo metode delta.

Pomoč: uporabite dejstva o spremenljivki X, ki je porazdeljena po gama porazdelitvi, in sicer: $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$ in $var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$. Za vzorce večje od 10 lahko pri gama porazdelitvi predpostavite, da že velja CLI.

Točka 3. BONUS (in kot vaja za kolokvij)

Imejmo dve cenilki za parameter θ:

- $\hat{\theta}$ je pristranska (pristranost je $1/n$) in ima varianco $var(\hat{\theta})$
- $\tilde{\theta}$ je nepristranska in ima varianco za 20% večjo od $\hat{\theta}$

Izračunajte, pri kateri velikosti vzorca bo srednja kvadratna napaka za $\hat{\theta}$ že manjša od srednje kvadratne napake za $\tilde{\theta}$ (torej pri katerih velikostih vzorca se bolj *splača* uporabiti eno, in kdaj drugo cenilko glede na srednjo kvadratno napako).