

Kolokvij 2 - Osnove teoretične statistike

28. april, 2016

1. Zapišite, ali so spodnje trditve resnične in v enem stavku utemeljite odločitev.
 - (a) Testna statistika pod ničelno domnevo je porazdeljena po enakomerni porazdelitvi.
 - (b) Pri statističnem testu je stopnja značilnosti enaka verjetnosti, da je ničelna hipoteza pravilna.
 - (c) Verjetnost, da ničelno domnevo napačno zavrnilo, je enaka moči testa.
 - (d) Verjetnost napake 2. vrste je prenosorazmerna z variabilnostjo podatkov.
 - (e) Razmerje verjetij je slučajna spremenljivka.
 - (f) Za izračun moči testa je dovolj poznati porazdelitev testne statistike pod ničelno domnevo.
 - (g) Napaka 1. vrste se lahko zgodi samo, če je vrednost testne statistike v območju zavrnilne statističnega testa.

2. Naj bodo X_i neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke s porazdelitvijo $N(\mu_1, \sigma^2)$ in Y_i neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke s porazdelitvijo $N(\mu_2, \sigma^2)$.

Za vsak i naj bosta X_i in Y_i med seboj odvisni, s korelacijo ρ . Zanima nas ničelna domneva $\mu_1 = \mu_2$.

- Imamo vzorec velikosti n . Teoretično pokažite, da je v primeru pozitivne korelacije ρ test na parnih vzorcih učinkovitejši od testa za neodvisne vzorce.
- Razložite se, kako bi enako primerjavo utemeljili s pomočjo simulacij.
Opomba: odvisna vzorca z varianco $\sigma^2 = 1$ in korelacijo $\rho = 0,75$ v R-u lahko generiramo s pomočjo funkcije `mvrnorm` v paketu `MASS`:

```
> Sigma <- matrix(c(1,0.75,0.75,1),nrow=2)
> xy <- mvrnorm(n, c(mu1,mu2), Sigma)
```

Dobljeni objekt `xy` je matrika, v prvem stolpcu so vrednosti X_i , v drugem vrednosti Y_i .

3. Zanima nas delež posameznikov s senenim nahodom v Sloveniji, radi bi pokazali, da ni enak π_0 (kar vemo, da je delež v Avstriji). Zberemo vzorec velikosti n .
 - (a) Zapišite ničelno domnevo za naše vprašanje.
 - (b) Zapišite cenilko za delež, kakšna je njena asimptotska porazdelitev? Zapišite parametre porazdelitve.
 - (c) S pomočjo gornjega rezultata zapišite testno statistiko, ki bo standardno normalno porazdeljena.
 - (d) Gornjo ničelno domnevo bi lahko preverili tudi s testom χ^2 . Izmiselite si podatke in vrednost π_0 , zapišite jih v ustrezno tabelo in izračunajte vrednost testne statistike za ta primer. Utemeljite porazdelitev testne statistike pod ničelno domnevo.
 - (e) Uvedite oznako $\hat{\pi}$ za oceno deleža na vzorcu in z danimi oznakami izrazite opazovane in pričakovane vrednosti ter testno statistiko.
 - (f) Dokažite, da sta testni statistiki v točkah c) in e) ekvivalentni.

4. Elektronska tehnikca je točna, če je pričakovana vrednost njenih merskih napak enaka nič. Inšpektor je proizvajalcem predpisal testiranje ničelne domneve $\mu = 0$ (s testom t) na 50 enotah: če proizvajalec ničelno domnevo zavrne, linija ne sme v prodajo. Inšpektor je število enot (50) predpisal po izračunu moči - rad bi, da je verjetnost, da proizvajalec zavrne linijo, kadar je ta neustrezna, dovolj velika. Pri tem izračunu je predpostavil, da je varianca enaka $\sigma^2 = 0,5^2$. Sedaj ga skrbi, da je predpostavljena varianca napačna.

Inšpektor želi s testom za varianco preveriti, ali je predpostavka $\sigma_0 = 0,5$ pravilna. Za tehnikco dobi 30 meritev. Vzorčno povprečje merskih napak je enako $-0,2$, vzorčna varianca pa je $0,55$. Vse meritve so podane v gramih.

Testna statistika za test na vzorcu velikosti n je

$$T = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

Pod ničelno domnevo je porazdeljena kot χ_{n-1}^2 .

- (a) Utemeljite, katere vrednosti variance bolj motijo inšpektorja - prevelike ali premajhne?
- (b) V skladu s prvo točko zapišite ničelno domnevo za test variance
- (c) Utemeljite (za inšpektorjev vzorec), kaj je **natančno** območje zavrnitve, pri tem si pomagajte s priloženo tabelo.
- (d) Zapišite vsebinsko interpretacijo za statistični sklep, ki ga na podlagi vzorca izpelje inšpektor.
- (e) Kolikšna je moč testa, če je pravi standardni odklon $\sigma_{pravi} = 0,6$? Ker verjetnosti ne morete natančno izračunati, s pomočjo priložene tabele le ugotovite, ali je moč večja od $0,1$ in ali je večja od $0,9$. Narišite še skico.