(Posplošeni) test razmerja verjetij

Nataša Kejžar

Povzetek

(Posplošeni) test razmerja verjetij

Zapis razmerja verjetij (Neyman-Pearsonova lema), če imamo enostavni domnevi H_0 in H_A:

$$T = \prod_{i=1}^{n} \frac{f_0(X_i)}{f_A(X_i)} = \frac{L_0(X)}{L_A(X)}.$$

Testna statistika ima enake lastnosti, če jo transformiramo z bijektivno preslikavo (torej, če npr. odštejemo konstante, delimo s konstantnimi členi ipd. in s tem poenostavimo zapis).

Ideja posplošenega testa razmerja verjetij je, da zapišemo verjetje (ki ga zaradi tega, ker domneva ni enostavna, ne moremo zapisati kot produkta gostot) v tisti vrednosti parametra (ali parametrov), za katero je to verjetje največje (to so parametri po metodi MLE).

Posplošeno razmerje verjetij (Wilksov Λ):

$$\Lambda = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(X, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(X, \theta)}$$

$-2 \log \Lambda$ je asimptotsko porazdeljena po $\chi^2_{\dim(\Theta) - \dim(\Theta_0)}$. Parameter porazdelitve χ^2 je torej število prostih parametrov samo pod H_A. Za majhne vrednosti Λ bomo H_0 zavrnili.

Enakomerno najmočnejši test (Rice 9.2.3)

če je H_A sestavljena, je test, ki je najmočnejši za vsako enostavno domnevo znotraj H_A, enakomerno najmočnejši.

Npr. $H_0 : \mu = \mu_0$ in $H_A : \mu > \mu_0$. Kritična vrednost za zavrnitev je t_0 in smo jo izračunali preko normalne porazdelitve s parametroma $\mu_0, \sigma^2/n$. Za vsako alternativno domnevo $\mu_{A2} > \mu_{A1} > \mu_0$ ostaja kritična vrednost povsem enaka (je neodvisna od μ_A), zato je test enakomerno najmočnejši.

Naloge

1. Zanima nas, kakšna je hitrost (rate), s katero prihajajo avtomobili do semaforiziranega križišča. Hitrost merimo tu v številu avtomobilov na minuto. Za avtomobile velja, da prihajajo neodvisno eden od drugega in neodvisno od tistih, ki so prišli do križišča pred tem (spremljamo jih v časovnem pasu, ko ni prometnih konic). Zato bomo predpostavili, da so njihovi prihodi porazdeljeni po Poissonovi porazdelitvi (λ je parameter za hitrost).

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \exp(-\lambda)}{x!}; \qquad X \sim Pois(\lambda)$$

   Podatki so v datoteki **data_semafor.csv**.
   Opomba: Poissonovo porazdelitev lahko sicer modeliramo tudi z binomsko porazdelitvijo za majhne vrednosti p in velike vrednosti n ($Bin(n,p) \approx Pois(np)$).

   a. Zapišite H_0 in H_A za testiranje prihodov na križišče s hitrostjo 3 in alternativno s hitrostjo 3,5.
   b. Zapišite razmerje verjetij za testiranje ničelne hipoteze.
   c. Zapišite razmerje verjetij bolj splošno z λ_0 in λ_A, kjer je $\lambda_A > \lambda_0$ in poiščite testno statistiko. Bi bila testna statistika razmerja verjetij kaj drugačna, če bi bila vaša alternativna domneva obrnjena v nasprotno smer? Pojasnite, zakaj.
   d. Določite testno statistiko, njeno porazdelitev in območje zavrnitve za test pri stopnji značilnosti $\alpha = 0.05$. Uporabite dejstvo, da je vsota neodvisnih Poissonovih slučajnih spremenljivk porazdeljena po $Pois(\sum_i \lambda_i)$.
   e. Izračunajte moč testa.
   f. Izračunajte testno statistiko za vaše podatke in določite vrednost p.
   g. Interpretirajte rezultate.
   h. Utemeljite, zakaj je testna statistika, ki smo jo dobili v točki (c) enakomerno najmočnejša za testiranje $H_0 : \lambda = \lambda_0$ proti $H_A : \lambda > \lambda_0$.
   i. S simulacijami pokažite prejšnjo točko. Generirajte veliko vzorcev z različnimi $\lambda_A > \lambda_0$ in izračunajte moči teh testov. Prikažite na grafu.

2. Imamo eno opazovanje X iz enakomerne porazdelitve, ki je definirana na $[0, \theta]$. Testiramo domnevo: $H_0 : \theta = 1$ glede na $H_A : \theta = 2$.

   a. Poiščite test, ki ima stopnjo značilnosti $\alpha = 0$. Koliko je njegova moč?
   b. Kakšna sta stopnja značilnosti in moč testa, ki zavrača za $X \in (1 - \alpha, 1]$?

3. Slučajna spremenljivka ima pod H_0 kumulativno porazdelitveno funkcijo $F_0(x) = x^2;\ 0 \leq x \leq 1$ in pod alternativno $F_A(x) = x^3;\ 0 \leq x \leq 1$.

   a. Zapišite test razmerja verjetij in povejte, za kakšne vrednosti X bo test zavračal.
   b. Za katere vrednosti X (velikost vzorca 1) je verjetnost, da drži alternativna domneva, večja?
   c. Kakšna je moč testa, če je velikost testa α?

4. Naj bo $X_1, \dots, X_n$ slučajni vzorec iz eksponentne porazdelitve z gostoto $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}$. Izpeljite posplošeni test razmerja verjetij za $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_0 : \theta \neq \theta_0$.

   a. Pokažite, da je območje zavrnitve oblike $\bar{X} e^{-\theta_0 \bar{X}} \leq c$.

5. V datoteki **data_studenti.csv** so podatki o študentih (teža, višina, spol in vrsta študija). S pomočjo posplošenega testa razmerja verjetij bi radi preverili, ali je vrsta študija (gre za študente medicine, dentalne medicine in veterine) povezana s težo.

   a. Zapišite ničelni model v Rju. Zapišite splošni (celotni) model.
   b. Izračunajte vrednost testne statistike za LRT (likelihood ratio test) in pridobite vrednost p. (na rezultatu linearne regresije uporabite funkcijo **logLik**).
   c. Kaj boste izvedeli o povezanosti med težo in vrsto študija, če v vaš ničelni model model dodate še višino, ali še višino in spol? Zakaj? Izvedite tak test.

6. Poiščite statistiko, ki jo da posplošeni test razmerja verjetij, ko veste, da je spremenljivka X porazdeljena normalno, vendar vrednost variance σ^2 ni znana. Ničelna domneva pa naj bo $H_0 : \mu = \mu_0$. Alternativna domneva je torej $H_A : \mu \neq \mu_0$.

   a. Poiščite prostor vrednosti parametra μ za H_0 in H_A.
   b. Katero cenilko za varianco bomo uporabili? Zakaj?
   c. Zapišite Wilksov Λ. Kaj bo cenilka za vrednost μ za H_A?
   d. Izpeljite testno statistiko in povejte, kako je porazdeljena.

7. Poiščite testno statistiko, ki jo dobimo **s posplošenim testom razmerja verjetij** za primer vzorca iz normalne porazdelitve, pri katerem nas zanima, ali je populacijska varianca enaka σ_0^2. Povprečje porazdelitve naj bo znano.

   a. Zapišite ničelno domnevo.
   b. Kaj bo cenilka za σ^2 pod alternativno domnevo? Ali je cenilka nepristranska?
   c. Zapišite Wilksov Λ.
   d. Izpeljite testno statistiko in povejte, kako je porazdeljena.
   e. Kaj bi se spremenilo, če populacijsko povprečje porazdelitve ne bi bilo znano?

8. Zanima nas ali imajo zares vsi športniki enako variabilnost hemoglobina. Primerjati želimo meritve k športnikov, naj bodo vrednosti i-tega športnika ($i = 1, \ldots, k$) porazdeljene normalno, torej $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, kjer $j = 1, \ldots, n_i$ označujejo meritve pri posamezniku. Predpostavimo, da so vse meritve med seboj neodvisne.

   a. Zapišite ničelno in alternativno domnevo.
   b. Najprej vzemimo, da imamo le enega športnika in n njegovih meritev. Kako bi ocenili njegova parametra μ in σ^2 z metodo največjega verjetja?
   c. Vrnimo se h k športnikom. Utemeljite, da so pod alternativno domnevo ocene parametrov enake

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i &= \frac{1}{n_i} \sum x_{ij} \\ \hat{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \hat{\mu}_i)^2 \end{aligned}$$

   d. Kakšna je ocena povprečij pod ničelno domnevo?
   e. Kakšna je ocena variance pod ničelno domnevo?
   f. Kako bi ničelno domnevo preverili s posplošenim testom razmerja verjetij?
   g. Generirajte primer s k športniki in n_i meritvami pri vsakem športniku. Individualna povprečja športnikov naj bodo normalno porazdeljena okrog 148 s standardnim odklonom 7. Vzemite, da ničelna domneva drži in da so standardni odkloni okrog individualnih povprečij za vse športnike enaki (npr. 5). Na vsakem generiranem vzorcu ocenite potrebne parametre in izračunajte vrednost testne statistike.
   h. Izračunajte mejo zavrnitve za vaš primer.
   i. Naredite 100 ponovitev tega primera. Porazdelitev vzorčnih vrednosti testne statistike primerjajte s teoretično (asimptotsko) porazdelitvijo.
   j. Oglejte si, kako spreminjanje parametrov vpliva na to ali bo asimptotska porazdelitev uporabna pri vašem primeru — predvsem spreminjajte **velikost vzorca**, torej število športnikov in število meritev na športnika. Opazili boste, da je pri majhnih vzorcih asimptotska porazdelitev dokaj slab približek. Se velikost testa poveča ali zmanjša?
   k. Spremenite še vrednosti varianc in izračunajte (simulirajte) moč testa za nekaj primerov.

9. Poiščite testno statistiko, ki jo dobimo **s posplošenim testom razmerja verjetij** za primer, ko imamo dva neodvisna vzorca iz normalnih porazdelitev z enako varianco (za varianco privzemite, da je znana). V prvem vzorcu je m enot, v drugem pa n. Preverjali bi radi, ali sta povprečji teh dveh porazdelitev enaki.

a. Zapišite ničelno domnevo.
b. Poiščite cenilko za parameter μ pod ničelno domnevo po metodi največjega verjetja.
c. Kaj sta cenilki pod alternativno domnevo? (Zapišite tudi cenilko za parameter pod ničelno domnevo kot njuno funkcijo.)
d. Zapišite Wilksov Λ.
e. Izpeljite testno statistiko.
f. Pokažite, da je ta testna statistika enaka kvadrirani testni statistiki testa z za dva neodvisna vzorca.