Пред. th теории вероятн.

Нерав. Чебышева:

① Пусть 1) X - св 2) $X \geq 0$ 3) $\exists MX$, тогда
$\forall \varepsilon > 0$ $P\{X \geq \varepsilon\} \leq MX/\varepsilon$ $\quad |P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{MX}{\varepsilon}$

② Пусть 1) X - св 2) $\exists MX, \exists DX$ тогда
$\forall \varepsilon > 0$ $P\{|X - MX| \geq \varepsilon\} \leq DX/\varepsilon^2$ $\quad |P\{|X-MX| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$

исп 1НЧ для $\varepsilon \leq MX$ и 2НЧ для $\varepsilon \leq \sqrt{DX}$ $\Rightarrow P \leq 1$

сходимость св

① Посл. $X_1, X_2, \dots$ сход по вер к св Z ($X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Z$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{P\{|X_n - Z| \geq \varepsilon\}}_{\text{число} = a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

② Посл $X_1, X_2, \dots$ слабо сход к св Z ($F_{X_n} \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} F_Z$), если

$\forall x \in \mathbb{R}$ так, что F_Z непр в x: $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_Z(x)$

(т.е. числ. посл. $\overbrace{F_{X_n}(x)}^{\text{число}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \overbrace{F_Z(x)}^{\text{число}}$)

ЗБЧ

3) ① Опр. Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ - посл св 2) $\exists MX_i = m_i$, $i \in \mathbb{N}$
удов, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\underbrace{\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}_{\overline{X}_n} - \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(то есть $\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$, $\overline{X}_n \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$ - не св

1) ② Th Чеб. Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ - посл нез. св 2) $\exists MX_i = m_i$, $\exists DX_i = \sigma_i^2$, $i \in \mathbb{N}$
3) дисперсии огр. в совокуп: $(\exists c > 0)(\sigma_i^2 \leq c, i \in \mathbb{N})$
тогда посл удов ЗБЧ

(3 можно ослаб. до 3': $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 0$)

2) След 1 Пусть 1) $X_1, X_2, \dots$ - посл нез. св 2) X_i одинак. распр 3) $\exists DX_i = \sigma^2$, $\exists MX_i = m$, $i \in \mathbb{N}$
тогда $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} m$

След 2 th Бернулли Пусть 1) n исп Б, p 2) $r_n = \frac{\{\text{число усп}\}}{n}$. Тогда $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$

(т.е при больш n $r_n \approx p$)

ЦПТ ① Пусть 1. 1) $X_1, X_2, \dots$ посл. незав св 2) Все X_i одинак. распр 3) $\exists MX_i = m, \exists DX_i = \sigma^2$

2) $Y_n = \dfrac{\overline{X_n} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_1 X_i - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}, n \in N$

тогда посл $Y_1, Y_2, \dots$ слабо сход к св $Z \sim N(0,1)$, то есть

$F_{Y_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (св Y_n им. ассимптотич. норм. станд. ра

$(M\overline{X_n} = m; D\overline{X_n} = \frac{\sigma^2}{n}, MY = 0, DY = 1)$

② интегр. th Муавра-Лапласа. Пусть 1) серия из $n \gg 1$ Б, p 2) S - число усп. в этой серии
тогда

$P\{k_1 \leq S \leq k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1)$, где $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$

$(MX_i = p, DX_i = pq)$

· нач. мом $\hat{m}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

· центр. выбороч. мом. $\overset{\circ}{\hat{m}}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k$

· выбороч. среднее $\bar{X} = \hat{m}_1(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

· выбороч. дисперсия $\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \overset{\circ}{\hat{m}}_2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

исправ. выб. дисперсия

$S^2(\vec{X}) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

(+) вариац. ряд - упорядоченный $F_{X_{(n)}}(t) = [F(t)]^n$; $F_{X_{(1)}}(t) = 1-[1-F_X(t)]^n$

(+) статистич. ряд

$Z_{(1)}$	...	$Z_{(m)}$
n_1		n_m

$\frac{n_i}{n}$ - отн. частота знач. $Z_{(i)}$

<u>Эмпирич. ф. распр.:</u> (по выборке $\vec{x}$) $F_n(t) = \frac{n(t,\vec{x})}{n}$ - число комп. $\vec{x}$, которые $< t$

· прин зн. $\frac{0}{n} \dots \frac{n}{n}$

· разрывы в $t = Z_{(i)}$

· справа включительно

<u>Выборочная ф. распр:</u> (по случ. выборке $\vec{X}$) $\hat{F}(t) = \frac{n(t,\vec{X})}{n}$ - св, для каждой реализации $\vec{x} = n(t,\vec{x})$

· при фикс. t $\hat{F}(t)$ - св, прин. зн. $\frac{0}{n} \dots \frac{n}{n}$

· t_0, $p = P\{X<t_0\} = const$, $P\{n(t_0,\vec{X}) = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$

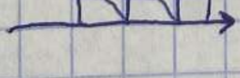
бином. распр с $p = P\{X<t_0\}$

· $\hat{F}(t_0,\vec{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F(t_0)$

(+) интерв. статистич. ряд

$m = \lfloor \log_2 n \rfloor + 2$ (+1); $\Delta = \frac{|J|}{m} = \frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{m}$

$J_i = [x_{(1)}+(i-1)\Delta;\ x_{(1)}+i\Delta)$, $i = \overline{1,m-1}$; $J_m = [x_{(1)}+(m-1)\Delta;\ x_{(n)}]$



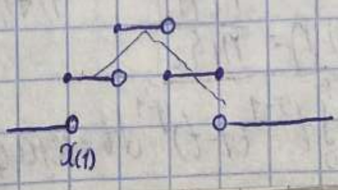
J_1	...	J_m
n_1		n_m

<u>Эмпирич. ф. плотн.</u> (по выб. $\vec{x}$) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n_i}{n\Delta}, & x \in J_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$f_n(x) \approx f(x)$ при $n \gg 1$

график - гистограмма

середины - полигон частот



① Гамма-функция Эйлера $\boxed{\Gamma(x)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt}$

x-параметр, $R^+ \to R$, при $x \leq 0$ расх.

1) $\Gamma^{k}_{(x)} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} (\ln t)^k\, dt$, $k \geq 0$

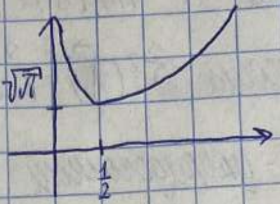
2) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

3) $\Gamma(1) = 1$

4) $\Gamma(n+1) = n!$

5) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

6) $\Gamma(\frac{n+1}{2}) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$



$\boxed{\Gamma(\lambda, \alpha)}$

② Гамма-распределение

λ и α - парам.

$$\boxed{f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}}$$

1) $Exp(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$

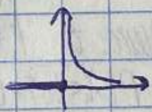
2) $\xi_1 \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1)$, $\xi_2 \sim \Gamma(\lambda, \alpha_2)$, ξ_1 незав $\xi_2 \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1+\alpha_2)$

$\xi_1 + \ldots \xi_n \sim \Gamma(\lambda, \alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$

③ Распределение Релея σ^2

$$\boxed{\eta = \xi^2, \ \xi \sim N(0, \sigma^2) \Rightarrow f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{-x}{2\sigma^2}}, & x>0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}}$$

1) $\eta \sim \Gamma(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{1}{2})$



④ Распределение хи-квадрат n

1) $\xi_1, \ldots \xi_n$ - незав

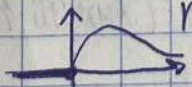
2) $\xi_i \sim N(0,1)$

3) $\boxed{\eta = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$

$\eta \sim \boxed{\chi^2(n)}$ χ^2, степ. свободы

1) $\xi_i^2 \sim$ Релей с $\sigma^2 = 1 \Rightarrow \eta_i \sim \Gamma(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \Rightarrow \eta \sim \Gamma(\frac{1}{2}; \frac{n}{2})$; $\chi^2(n) = \Gamma(\frac{1}{2}; \frac{n}{2})$

2) если $\eta_1 \ldots \eta_n$ незав, $\eta_i \sim \chi^2(k_i) \Rightarrow \eta_1 + \ldots + \eta_n \sim \chi^2(k_1 + \ldots + k_n)$



⑤ Распределение Фишера n_1, n_2

1) ξ_1, ξ_2 - незав

2) $\xi_i \sim \chi^2(n_i)$

3) $\boxed{\eta = \frac{n_2 \xi_1}{n_1 \xi_2}}$

$\boxed{\eta \sim F(n_1, n_2)}$

1) $f_\eta(x) = \begin{cases} \frac{c \cdot x^{(n_1/2 - 1)}}{(1+\frac{n_1 x}{n_2})^{(\frac{n_1+n_2}{2})}}, & x>0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$C = \frac{(n_1/n_2)^{n_1/2}}{B(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2})}$ $\quad B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$ - бета ф. Эйлера

2) $\frac{1}{\eta} \sim F(n_2, n_1)$

• 2 Задача МС

∨ 1) построение точечных оценок

2) построение доверит. интервалов

<u>Опр</u> Точ. оценкой парам θ наз статистика $\hat{\theta}(\vec{X})$, выбороч. знач. кот приним в кач-ве θ (одном. св)

$\theta = \hat{\theta}(\vec{x})$ 3) Эффективность: $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ несмещ; $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2 \Rightarrow \hat{\theta}_1$ более эф. | эф. в классе $(\forall \tilde{\theta} \in \Theta)(D\hat{\theta} \leq D\tilde{\theta})$ | ед

<u>Характеристики</u> 1) несмещенность $(M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta)$ (σ^2 смещ, S^2 - нс)(мом $k \geq 2$ - смещ)

! 2) Состоят. $(\underbrace{\hat{\theta}(\vec{X_n})}_{\text{посл. св}} \xrightarrow[n \to \infty]{P} \theta)$ (S^2, σ^2 - сост)(все мом.)

⊙ построение точечных оценок: 2 метода

∨ 1) метод моментов (метод макс правдопод)

r неизв. параметров $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$

1) $r = r \Rightarrow$ потр r уравнений: одно отн момента 1го пор, одно отн. момента 2го пор...

первое запишем отн (нач/центр) момента, ..

Тогда система будет иметь вид: $\begin{cases} m_1(\theta_1, \theta_2) = \hat{m}_1(\vec{X}) \\ m_2(\theta_1, \theta_2) = \hat{m}_2(\vec{X}), \dots \end{cases}$

2) приходим к системе

• 1 ⊙ Нерав. Рао-Крамера:

<u>Опр</u> Ф. правдоподобия $\vec{L}(\vec{X}, \vec{\theta}) = p(X_1, \vec{\theta}) \cdot \ldots \cdot p(X_n, \vec{\theta})$ - случ. велич, где $p = P\{X = X_i\}$ или $f(X_i, \theta$

<u>Опр</u> Кол-во инф по Фишеру

$$I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

<u>Теорема</u> Нерав. Крамера 1) модель явл. регул. 2) $\hat{\theta}(\vec{X})$ несмещ $\Rightarrow D[\hat{\theta}] \geq \frac{1}{I(\theta)}$

<u>Опр</u> Показатель эффективности по Рао

$$e(\hat{\theta}) = \frac{1}{I(\theta) D(\hat{\theta})} \quad (0 < e(\hat{\theta}) \leq 1)$$

Если $e(\hat{\theta}) = 1$, то наз эф. по Рао

Эф. по Рао => просто эф.

Иногда вводят

$$I_0(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial p(X, \theta)}{\partial(\theta)}\right)^2\right],$$ $p(X, \theta)$ можно назвать кол-вом инф в 1 исп.

Для нек. моделей справедливо $I(\theta) = n I_0(\theta)$

---

⑥ Распр. Стьюдента

1) $\xi \sim N(0,1)$

2) $\eta \sim \chi^2(n)$

3) ξ и η - независ

4) $\zeta = \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \sqrt{n} \Rightarrow \zeta \sim St(n)$

двигида

степень своб

$$f_\zeta(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in R$$

Независимые случ. величины

X и Y незав, если $F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

Th 1) дискр: $p_{ij} = p_{X_i} \cdot p_{Y_j}$

2) непр: $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ (или по опр)

если $\varphi(x) > 0$ и D не пр/у - зависимые

Условные распределения

I. Дискретный случайный вектор

$Y = y_j$ $\quad P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \dfrac{p_{ij}}{p_{Y_j}} = [\text{обозн. } \pi_{ij}]$

усл. закон распр X - набор пар (x_i, π_{ij}), $i = \overline{1,m}$

$X = x_i$ $\quad \tau_{ij}$

Усл. ф. распр. $F_X(x \mid Y = y) = P\{X < x \mid Y = y\}$ ($\neq 0$) - дискр

$f_X(x \mid Y = y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)_{\neq 0}}$ - непр.

незав. $f_X(x \mid Y = y) = f_X(x)$ непр

$P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = P\{X = x_i\}$

Когда шум для $N(m, \sigma^2)$

при поиске M: $x - m = t$

D: $\dfrac{x-m}{\sigma} = t$, $dx = \sigma dt$

числ. характеристики

① Мат. ожидание: дискр. $M[X] = \sum_{i \in I} x_i p_i$

непр. $M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x\, dx$

Свойства

1° Если $P\{X = x_0\} = 1$, то $MX = x_0$

2° Линейность $M[aX+b] = aMX + b$

$M[X_1 + X_2] = MX_1 + MX_2$

3° Если X_1, X_2 - незав, то $M[X_1 X_2] = (MX_1)(MX_2)$

4° 1) Если X - дискр, то $M[\varphi(X)] = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) p_i$

2) Непр., $\varphi\ R \to R$ $M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx$

$X \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow MX = m$

② Дисперсия

$D[X] = M[(X-m)^2]$, где $m = MX$

дискр: $DX = \{M[\varphi(X)]$, где $\varphi(x) = (x-m)^2\} = \sum_{i \in I} p_i (x_i - m)^2$

непр $DX = \{M[\varphi(X)]$, где $\varphi(x) = (X-m)^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx$

среднекв. откл. $\sigma_X = \sqrt{DX}$

Свойства: 1) $DX \geq 0$

2) $D[aX+b] = a^2 DX$

3) если X_1 и X_2 незав, то $D[X_1 + X_2] = DX_1 + DX_2$

4) $DX = M[X^2] - (MX)^2$

5 (2) $P\{X = x_0\} = 1 \Rightarrow DX = 0$

3. Ковариация

$$cov(X_1, X_2) = M[(X_1 - m_1)(X_2 - m_2)]$$

$$m_i = MX_i, \quad i = \overline{1n}$$

Дискр: $cov(X_1, X_2) = \sum_i \sum_j p_{ij} (x_{1,i} - m_1)(x_{2,j} - m_2)$,

где $\{x_{1,i};\ i \in I\}$ - мн-во возм зн X_1

$\{x_{2,j};\ j \in J\}$

$$p_{ij} = P\{(X_1, X_2) = (x_{1,i}; x_{2,j})\}$$

непр.

$$cov(X_1, X_2) = \iint_{R^2} (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

Св-ва ковариации

1° $cov(X, X) = DX$

2° $D[X+Y] = DX + DY + 2cov(X, Y)$

3° $cov(a_1 X + b_1, a_2 Y + b_2) = a_1 a_2 cov(X, Y)$

4° $cov(X, Y) = M[XY] - (MX)(MY)$

5°) если X, Y - незав ~~M[XY] = MXMY~~ $cov(X, Y) = 0$

6° $|cov(X, Y)| \leq \sqrt{DX \cdot DY}$

$= \Leftrightarrow$ X и Y связ лин. зав $Y = aX + b$
и тогда $sgn(cov(X, Y)) = sgn(a)$

$\rho_{XY} = \dfrac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$ - коэфф. корр.

$|\rho_{XY}| \leq 1$, при этом

$$\rho_{XY} = \begin{cases} +1 \Leftrightarrow Y = aX + b, \text{ где } a > 0 \\ -1 \Leftrightarrow Y = aX + b, \text{ где } a < 0 \end{cases}$$

Век. средних (мат. ожид)

$M[\vec{X}] = (MX_1, \dots MX_n)$

Ковариац. матр

$\Sigma = (\sigma_{ij})$, где $i, j = \overline{1n}$

$\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} DX_1 & & cov(X_1, X_n) \\ & \ddots & \\ & & DX_n \end{bmatrix}$$

Сочет без повт $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ (порядок неважен)

Размещение с пов. $\bar{A}_n^m = n^m$, (порядок важен)

Размещение без пов $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ (порядок важен)

Перестановки (разм. без повт из n по n) $P_n = n!$

везде $n > m$

Условная: A при наступившем B

I по опр $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

II 1) перестроить $\Omega_B = B$

2) найти $P(A|B)$ как обычно, но в Ω_B

и те же св-ва для A

$P(A) > 0 \Rightarrow$

$P(AB) = P(A)P(B|A)$ или

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots A_{n-1}) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \ldots$ } теорема умнож. вер-й

$P(A_1+A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$

$P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1}A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \ldots A_n)$ сложения

Схема упор. разбиений $C(n; k_1, \ldots k_m) = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!}$ - число сп. разл n шаров по m урн

Два соб. незав $\Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$

форм. полн. вер. $P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)$

форм. Байеса $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{\underbrace{P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}_{P(A)}}$

Схема испыт. бернулли 1) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

2) $P_n\{k_1 \le k \le k_2\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$ 3) $P_n\{k \ge 1\} = 1 - q^n$

4) $P_n(0) = q^n$

МАТ СТАТ

I. ф. распределения $F_X(x) = P\{X<x\}$

св-во: $P\{a \le X \le b\} = F(b) - F(a)$

Непрерывные:

ф. распределения $F(x)$

ф. плотности распределения вер. f: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$; $f(x) = F'(x)$

св-ва

1) $P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)dx$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3) $P\{x_0 \le X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$

4) $P\{X = x_0\} = 0$

II **Случайные векторы**

ф. распр (совместная) $F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\} = \{X_1 < x_1\} \cdot \{X_2 < x_2\} \cdot \ldots \{X_n < x_n\}$

св-ва: 1) одна фикс, другая $\to -\infty \Rightarrow 0$

2) ~~одна фикс~~, обе $\to +\infty \Rightarrow 1$

3) $\lim\limits_{x_1 = const,\ x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)$ и наоб. — функция распр. сл. вел. X_1 — частная (одномер.) / маргин. ф. р.

4) попадет в □ $P\{a_1 \le X < b_1, a_2 \le X_2 < b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$

следств

из $F(x_1, x_2)$ можно найти

$$F_{X_1}(x_1) = \lim_{x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2)$$

1. Дискретные св 1) $\sum\sum p = 1$

2) $P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_{x_i}$ и наоб.

2. Непрерывные

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f(t_1, t_2)dt_2$$

$$f(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0)}$$

4) в одну т. $= 0$

5) $P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x_1, x_2)dx_1dx_2$

6) $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)dx_2$ маргинальные

св-ва

1) $P\{a_1 \le X_1 \le b_1; a_2 \le X_2 \le b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)dx_2$

2) $\iint_{R^2} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 1$

3) $\approx f(x_1^0, x_2^0)\Delta x_1 \Delta x_2$

еще: $f_{X_1}(x_1) = \frac{d}{dx_1} F_{X_1}(x_1)$

С семинара:

I. $F(x_1, x_2) \Rightarrow f(x_1, x_2)$ ① $\Rightarrow f_{X_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2)\,dx_2 \Rightarrow F_{X_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} f'_{X_1}(t)\,dt$; $\Rightarrow$

①f

II. $F(x_1, x_2) \Rightarrow F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty) \Rightarrow f_{X_1}(x_1) = F'_{X_1}(x_1)$ - проще

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}$$

1) Пуассоновская св - большое число испыт. с малой вер-ю успеха
параметр $\lambda > 0$.

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \{0,1,2,\dots\}$$

$X \sim \Pi(\lambda)$

$MX = \lambda$
$DX = \lambda$

2) Биномиальная - кол-во успехов в схеме испыт. Бернулли
параметр $n \in N$, $p \in (0,1)$

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0,1,\dots,n\}$$

$X \sim B(n,p)$

$MX = np$
$DX = npq$

3) Геометрическое - кол-во испыт Бернулли до первого успеха (в k-м => X = k-1
параметр $p \in (0,1)$

$$P\{X=k\} = pq^k, \quad k = 0,1,2,\dots$$

$X \sim Geom(p)$

$MX = \frac{q}{p}$

$DX = q/p^2$

Дискретные

$MX = \frac{a+b}{2}$ $\quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

4) Равномерно распр. сл. велич.

$$f(x) = \begin{cases} C, & x \in [a,b] \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}, \quad C = \frac{1}{b-a}$$

$X \sim R[a;b]$

вер. пропорц. $[a,b]$ => геом. определение вер-ти в одном случае

5) Экспоненциальная сл.в

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

параметр $\lambda > 0$

$MX = 1/\lambda$
$DX = 1/\lambda^2$

время безотказной работы

$X \sim Exp(\lambda)$

6) Нормальная сл.в.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in R$$

параметры m, $\sigma > 0$

$X \sim N(\underbrace{m}_{MX}, \underbrace{\sigma^2}_{DX})$

вершина (x)
разброс
чем меньше, тем выше пик

m - коорд. x центра, σ - разброс, чем ↓σ, тем выше экстремум

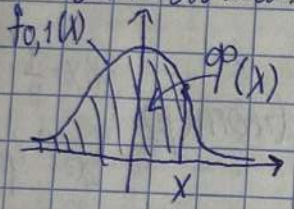
• Функция распределения норм. сл. вел. $X\sim N(m,\sigma^2)$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}dt\right)$$ (не берется

• Распр $N(0,1)$ - стандартное норм. распределение

$$f_{0,1}(x)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in R$$

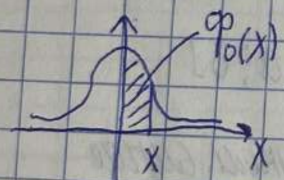
• Для вычисл. вероятн. из станд. норм. распр.



$$\Phi(x)=F_{0,1}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

функция Лапласа

• Часто вместо $\Phi(x)$ исп



$$\Phi_0(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

Св-ва:

1) $\Phi(x)=\frac{1}{2}+\Phi_0(x)$

2) $\Phi_0(x)=-\Phi_0(x)$ (четная)

3) $\Phi_0(+\infty)=\frac{1}{2}$

4) $\Phi_0(-\infty)=-\frac{1}{2}$

• $P\{a\leq X\leq b\}=\Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$

Первообразные

1) $x^p \to \frac{x^{p+1}}{p+1}$ — $(kx+b)^p \to \frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}$

2) $\frac{1}{x} \to \ln x$ — $\frac{1}{(kx+b)} \to \frac{1}{k}\ln(kx+b)$

3) $e^x \to e^x$ — $e^{kx-b} \to \frac{1}{k}e^{kx-b}$

4) $a^x = \frac{a^x}{\ln a}$

5) $\sin \to -\cos$ — $\sin(kx+b) \to -\frac{1}{k}\cos(kx+b)$

6) $\cos \to \sin$

7) $\frac{1}{\cos^2} \to tg$

8) $\frac{1}{\sin^2} \to -ctg$

9) $\frac{1}{1+x^2} \to arctgx$

10) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \arcsin x$

Полярные

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \int d\varphi \int f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$

$$\int d\varphi \int f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\cdot ab\rho\,d\rho$$

- повт-ти 2 порядка
- uv
- метод сечения