Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №2 по курсу "Математическая статистика"

Тема Интервальные оценки

Студент Зайцева А. А.

Группа ИУ7-62Б

Преподаватель Власов П. А.

Москва — 2022 г.

Оглавление

1 Задание **2**

2 Теоретические сведения **3**

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины 3

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины. 3

3 Результаты работы **5**

3.1 Текст программы 5

3.2 Результаты работы программы 7

1 Задание

1. Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

   (a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и $S^2(\vec{x}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   (b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для математического ожидания MX;

   (c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2. вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3. для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объема выборки из индивидуального варианта:

   (a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   (b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретические сведения

2.1 Определение γ-доверительного интервала для значения параметра распределения случайной величины

Пусть X – случайная величина, закон распределения которой известен с точностью до неизвестного параметра θ.

Определение.

Интервальной оценкой параметра θ уровня γ (γ-интервальной оценкой) называют пару статистик $\underline{\theta}(\vec{X})$ и $\overline{\theta}(\vec{X})$ таких, что

$$P\{\theta \in (\underline{\theta}(\vec{X}), \overline{\theta}(\vec{X}))\} = \gamma$$

Определение. γ-доверительным интервалом (доверительным интервалом уровня γ) для параметра θ называют реализацию (выборочное значение) интервальной оценки уровня γ для этого параметра, то есть интервал $(\underline{\theta}(\vec{x}), \overline{\theta}(\vec{x}))$ с детерминированными границами.

2.2 Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии нормальной случайной величины.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для математического ожидания нормальной случайной величины:

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X})t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}) t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{X}$ – выборочное среднее, $S^2(\vec{X})$ – исправленная выборочная дисперсия, n – объем выборки, γ – уровень доверия, $t^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – квантиль уровня $\frac{1+\gamma}{2}$ распределения Стьюдента с n-1 степенью свободы.

Формулы для вычисления границ γ-доверительного интервала для дисперсии нормальной случайной величины:

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1+\gamma}{2}}},$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{(n-1)S^2(\vec{X})}{h^{(n-1)}_{\frac{1-\gamma}{2}}},$$

где $S^2(\vec{X})$ – исправленная выборочная дисперсия, n – объем выборки, γ – уровень доверия, $h^{(n-1)}_{\alpha}$ – квантиль уровня α распределения χ^2 с n - 1 степенью свободы.

3 Результаты работы

3.1 Текст программы

```
X = [7.76,6.34,5.11,7.62,8.84,4.68,8.65,6.90,8.79,6.61,6.62,7.13,6.75,7.28,...
7.74,7.08,5.57,8.20,7.78,7.92,6.00,4.88,6.75,6.56,7.48,8.51,9.06,6.94,6.93,...
7.79,5.71,5.93,6.81,5.76,5.88,7.05,7.22,6.67,5.59,6.57,7.28,6.22,6.31,5.51,...
6.69,7.12,7.40,6.86,7.28,6.82,7.08,7.52,6.81,7.55,4.89,5.48,7.74,5.10,8.17,...
7.67,7.07,5.80,6.10,7.15,7.88,9.06,6.85,4.88,6.74,8.76,8.53,6.72,7.21,7.42,...
8.29,8.56,9.25,6.63,7.49,6.67,6.79,5.19,8.20,7.97,8.64,7.36,6.72,5.90,5.53,...
6.44,7.35,5.18,8.25,5.68,6.29,6.69,6.08,7.42,7.10,7.14,7.10,6.60,6.35,5.99,...
6.17,9.05,6.01,7.77,6.27,5.81,7.80,9.89,4.39,6.83,6.53,8.15,6.68,6.87,6.31,...
6.83];


gamma = 0.9;
N = length(X);
% prompt = "Input gamma: ";
% gamma = input(prompt);

% 2
mu = find_mu(X);
s_sqr = find_s_sqr(X);
mu_low = find_mu_low(mu, s_sqr, N, gamma);
mu_high = find_mu_high(mu, s_sqr, N, gamma);
s_sqr_low = find_sigma_sqr_low(s_sqr, N, gamma);
s_sqr_high = find_sigma_sqr_high(s_sqr, N, gamma);

%fprintf("For given sample (N =

% 3
n_array = zeros([1 N]);
mu_array = zeros([1 N]);
mu_low_array = zeros([1 N]);
mu_high_array = zeros([1 N]);
s_sqr_array = zeros([1 N]);
s_sqr_low_array = zeros([1 N]);
s_sqr_high_array = zeros([1 N]);
for i = 1:N
    n_array(i) = i;

    mu_i = find_mu(X(1:i));
    mu_array(i) = mu_i;
```

```
    s_sqr_i = find_s_sqr(X(1:i));
    s_sqr_array(i) = s_sqr_i;

    mu_low_array(i) = find_mu_low(mu_i, s_sqr_i, i, gamma);
    mu_high_array(i) = find_mu_high(mu_i, s_sqr_i, i, gamma);

    s_sqr_low_array(i) = find_sigma_sqr_low(s_sqr_i, i, gamma);
    s_sqr_high_array(i) = find_sigma_sqr_high(s_sqr_i, i, gamma);
end

mu_const = mu * ones(N);
s_sqr_const = s_sqr * ones(N);

% a
plot(n_array, mu_const, n_array, mu_array, ...
    n_array, mu_low_array, n_array, mu_high_array);
xlabel('n');
ylabel('y');
xlim([1 N]);
legend('$\hat␣\mu(\vec␣x_N)$', '$\hat␣\mu(\vec␣x_n)$', ...
    '$\underline{\mu}(\vec␣x_n)$', '$\overline{\mu}(\vec␣x_n)$', ...
    'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);
figure;

% b
plot(n_array, s_sqr_const, n_array, s_sqr_array, ...
    n_array, s_sqr_low_array, n_array, s_sqr_high_array);
xlabel('n');
ylabel('z');
xlim([1 N]);
legend('$\hat␣S^2(\vec␣x_N)$', '$\hat␣S^2(\vec␣x_n)$', ...
   '$\underline{\sigma}^2(\vec␣x_n)$', '$\overline{\sigma}^2(\vec␣x_n)$', ...
   'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);

% functions
function [mu] = find_mu(X)
    mu = mean(X);
end

function [s_sqr] = find_s_sqr(X)
    s_sqr = var(X);
end

% tinv(a, n) - квантиль уровня a распределения Стьюдента с n степенями свободы.
function [mu_low] = find_mu_low(mu, s_sqr, n, gamma)
```

```
    mu_low = mu - sqrt(s_sqr) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

function [mu_high] = find_mu_high(mu, s_sqr, n, gamma)
    mu_high = mu + sqrt(s_sqr) * tinv((1 + gamma) / 2, n - 1) / sqrt(n);
end

%chi2inv(a, n) - квантиль уровня a распределения хи квадрат с n степенями свободы.
function [sigma_sqr_low] = find_sigma_sqr_low(s_sqr, n, gamma)
    sigma_sqr_low = (n - 1) * s_sqr / chi2inv((1 + gamma) / 2, n - 1);
end

function [sigma_sqr_high] = find_sigma_sqr_high(s_sqr, n, gamma)
    sigma_sqr_high = (n - 1) * s_sqr / chi2inv((1 - gamma) / 2, n - 1);
end
```

3.2 Результаты работы программы

$$\hat{\mu}(\vec{x}_n) = 6.944500$$

$$S^2(\vec{x}_n) = 1.171956$$

$$\underline{\mu}(\vec{x}_n) = 6.780673$$

$$\overline{\mu}(\vec{x}_n) = 7.108327$$

$$\underline{S^2}(\vec{x}_n) = 0.958766$$

$$\overline{S^2}(\vec{x}_n) = 1.470952$$

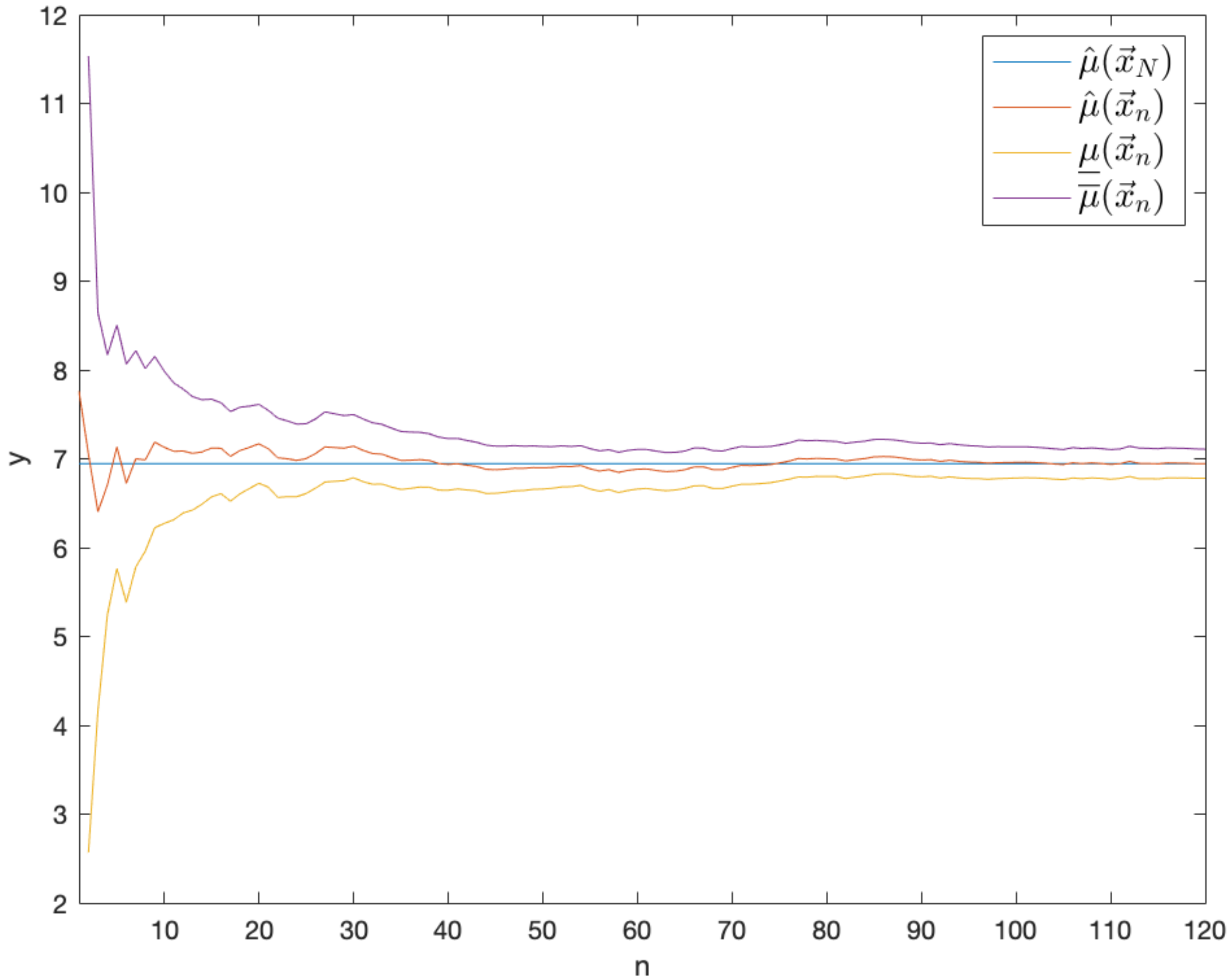

Рис. 3.1: Прямая $y = \hat{\mu}(\vec{x}_N)$, а также графики функций $y(n) = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $y(n) = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N

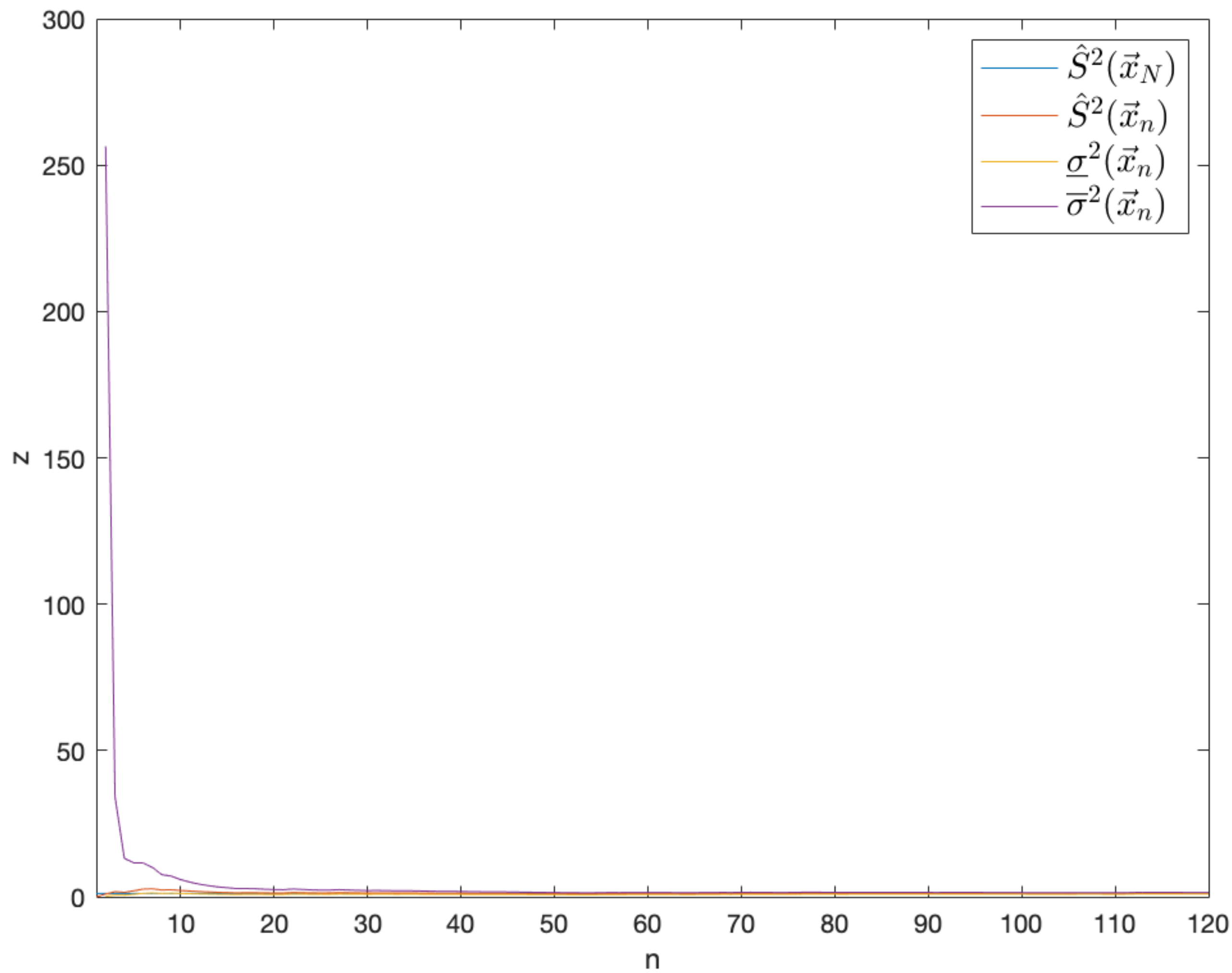

Рис. 3.2: Прямая $z = S^2(\vec{x}_N)$, а также графики функций $z(n) = S^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$, $z(n) = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N