14.02.
Семинар 1

Предельные теоремы теории вероятностей

① Неравенства Чебышева

Пример По результатам большого числа наблюдений среднесут. расход воды в нек. нас. пункте составляет 50 тыс литров/сут. Оценить вероятность того, что в нек случ выбр день расход воды в этом нп превысит 150 тыс литров. Как изменится эта оценка, если доп. известно, что СКО сут расх воды в этом пункте составл 10 тыс литров

как на лекции

Пример Известно, что $X \geq 0$, $MX = 1$, $\sigma_X = 0.2$. Оценить с исп 1-го и 2-го нерав. Чебышева вероятности

а) $\{0,5 \leq X < 1.5\}$ б) $\{0,75 \leq X < 1.35\}$ в) $\{X < 2\}$

а)

1) С исп. 1 нер: $P\{0,5 \leq X < 1,5\} =$

$\xrightarrow{\text{исп}} \leq P\{X \geq \overset{\varepsilon}{0,5}\} \leq \frac{MX}{\varepsilon} = \frac{1}{0,5} = 2$ (тривиальная оценка)

$\xrightarrow{\text{исп}} \boxed{\leq} P\{X < 1.5\} \boxed{\geq} \frac{MX}{\varepsilon} = 1 - \frac{1}{1,5} = \frac{1}{3}$ (т.о. оценить $P\{\ldots\}$ с исп. 1го нерав. Чебышева не получилось)

2) С исп 2 нер $P\{0,5 - MX \leq X - MX \leq 1,5 - MX\} =$

$= P\{-0,5 \leq X - 1 < 0,5\} \geq$

$\geq P\{-0,5 < X - 1 < 0,5\} = P\{|X-1| < \underbrace{0,5}_{\varepsilon}\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,2^2}{0,5^2} = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$

$\left(\frac{0,2}{0,25}\right)^2 = \left(\frac{20}{25}\right)^2 = \frac{400}{625} = \frac{16}{25}$

т.о. $P\{0,5 \leq X < 1,5\} \geq \frac{21}{25}$

б) аналогично 2) $P\{0,75 - 1 \leq X - 1 \leq 1,35 - 1\}$ ~~$= P\{-0,25 < X - 1 < 0,25\}$~~ $=$

~~$\geq P\{|X-1| < \overset{\varepsilon}{0,25}\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,2^2}{0,25^2} = 1 - \frac{4}{625} = \frac{621}{625}$~~

$= P\{-0,25 \leq X - 1 < 0,35\} \geq P\{|X-1| < 0,25\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,2^2}{0,25^2} = \frac{621}{625}$

или

$\boxed{\leq} P\{|X-1| < 0,35\} \boxed{\geq} 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} = 1 - \left(\frac{0,2}{0,35}\right)^2$ (бесполезно

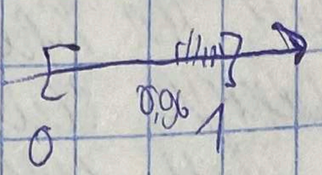
т.о. $P\{0,75 \leq X < 1,35\} \geq \cancel{\frac{621}{625}}\ \frac{16}{25}$

б) $P\{X<2\}$

а) нер. ЧНЧ $P\{X<\underset{\varepsilon}{2}\} \geq 1-\frac{MX}{\varepsilon}=1-\frac{1}{2}=2$

б) $P\{X<2\}=P\{X-1<1\} \geq P\{|X-1|<1\} \geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}=1-0{,}04=0{,}96$

Т.о. $P\{X<2\} \geq 0{,}96$



② Закон Больших чисел

<u>Пример</u> Удов ли посл незав св $X_1, X_2, \ldots$, если закон распр св X_i задан таблицей

x_i	$-ia$	0	ia
p	$\frac{1}{(i+1)^2}$	$1-\frac{2}{(i+1)^2}$	$\frac{1}{(i+1)^2}$

<u>Решение</u> Проверим условия теоремы Чебышева

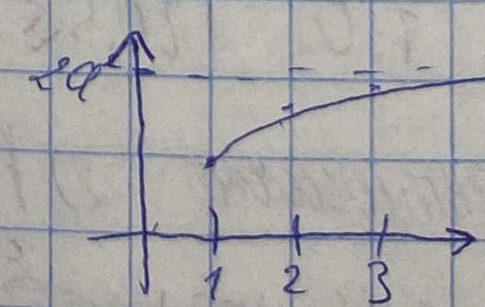
1) $X_1, X_2, \ldots$ незав (по усл.)

2) $MX_i=\sum_i x_i p_i=(-ia+ia)\left(\frac{1}{(i+1)^2}\right)=0$ сущ

$M[X_i^2]=(ia)^2\cdot\frac{1}{(i+1)^2}$

$\sigma_i^2=DX_i=M[X_i^2]-(MX_i)^2=2\frac{(ia)^2}{(i+1)^2}$ $=2a^2\frac{i^2}{(i+1)^2}$ сущ

3) $\lim\limits_{i\to\infty}\sigma_i^2=\lim\limits_{i\to\infty}2a^2\left(\frac{i}{i+1}\right)^2=2a^2$



Если посл. (σ_i^2) сходится, то она ограничена

Ответ: Посл $X_1, X_2, \ldots$ удов ЗБЧ

Замеч Если для пос выполн условия th Чебышева, то она удов ЗБЧ.
При этом гов, что она удов ЗБЧ в форме Чебышева

Семинар 2 16.02

Пр Дана пос $X_1, X_2, \dots$ незав св. Пуа, удов ли она ЗБЧ, если ряд распр с.в. X_i имеет вид $i \in N$

X_i	
P	

См. фото

Пр Дана пос-ть $X_1, X_2, \dots$ незав. с.в. Исследовать, вып. ли для ее ЗБЧ, если функция плотн. распр-я

$f_{X_i}(x) = c_i e^{-\frac{x^2}{i}}$, $x \in R$ для некот. подход. c_i

Решение 1) Если $X \sim N(m, \sigma^2)$, то $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in R$

В нашем примере $m_i = 0$; $2\sigma_i^2 = i \Rightarrow \sigma_i^2 = \frac{i}{2} \Rightarrow \sigma_i = \sqrt{\frac{i}{2}}$

таким образом, $X_i \sim N(0; \frac{i}{2})$ при $c_i = \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{i}{2}} = \sqrt{i\pi} \Rightarrow c_i = \frac{1}{\sqrt{i\pi}}$

2) Проверим усл. th. Чебышева

1) $X_1, X_2, \dots$ незав

2) $MX_i = 0$ $DX_i = i/2$

3) DX_i не огранич. в совокуп.

$DX_i \to +\infty \Rightarrow$ дисперсии не огранич. в совок. $\Rightarrow$ для пос-ти $X_1, X_2, \dots$ не выполн ЗБЧ в форме Чебышева

3) вместо усл-я 3) th Чебышева проверим усл. 3') "усиленного" аналога

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}[1+2+\ldots+n] = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{(1+n)}{2}\cdot n\cdot\frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim \frac{n+1}{n} = \frac{1}{4} \neq 0 \Rightarrow$$ условие 3' тоже не выполнено

но утв. что не удов - нельзя

4) Проверим определение ЗБЧ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i}_{0}| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

нужно проверить $P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (*)

$$P\{|\overline{X}_n| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

5) $\overline{X}_n = \frac{1}{n}X_1 + \ldots$

$\overline{X}_n$ явл. лин. комбинацией норм. св $\Rightarrow \overline{X}_n \sim N(\overline{m}_n, \overline{\sigma}_n^2)$

$$\overline{m}_n = M[\overline{X}_n] = M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i = 0$$

$$\overline{\sigma}_n^2 = D\overline{X}_n = D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] \overset{\text{незав}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2} = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+n)}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{n+1}{4n}$$

6) Вместо усл-я * проверим эквивалентное усл-е

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\overline{X}_n| < \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad (**)$$

$$P\{|\overline{X}_n| < \varepsilon\} = P\{-\varepsilon < X_n < \varepsilon\} = \Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{4n}{n+1}}\right) - \Phi_0\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{4n}{n+1}}\right) =$$

$$= 2\Phi_0\left(2\varepsilon\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\Phi_0(2\varepsilon) = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \Phi_0(2\varepsilon) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{+\infty}{2} = +\infty$ | т.о. усл. ** не вып. $\Rightarrow$ Ответ: посл $X_1, X_2, \ldots$ не удов ЗБЧ

2) Обозначим через X_i с.в. прин. знач. равное времени горения i-й лампочки из отобр. (час) $1,n$

Тогда X_i, $i=\overline{1,n}$ незав.

$$X_i \sim X$$

$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ - набл. среднее время горения лампочек из отобранной выборки

После проведения эксперимента примем $m \approx \bar{X}_n$

Нужно найти

$$P\{|\bar{X}_n - m| \leq 10\}$$

Закон распр св X неизвестен, дали его общий вид

$$P\{|\bar{X}_n - m| < 10\} = P\{\underbrace{\frac{|\bar{X}_n - m|}{\sigma/\sqrt{n}}}_{Y_n} < \frac{10}{\sigma/\sqrt{n}}\} \approx \left\{ \begin{array}{l} 400 \gg 1 \Longrightarrow \\ Y_n \underset{\text{прибл.}}{\sim} N(0,1) \end{array} \Bigg| \Rightarrow \text{ЦПТ} \right\} \approx$$

$$\approx 2\Phi_0\left(\frac{10\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{10 \cdot 20}{80}\right) = 2\Phi_0(2{,}5) \approx 2 \cdot 0{,}49379 = 0{,}98758$$

Семинар 3
28.02

Центральная предельная теорема

Th ЦПТ в форме

Пусть 1) $X_1, X_2, \dots X_n$ - посл. незав. св

2) X_i одинаково распр $i \in N$

3) ~~каждая из X_i~~ $\exists MX_i = m$, $\exists DX_i = \sigma^2$, $n \in N$

4) $Y_n = \dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$, $n \in N$, где $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Тогда $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Z \sim N(0,1)$,

~~Тогда~~ т.е $\forall x \in R$: $F_{Y_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

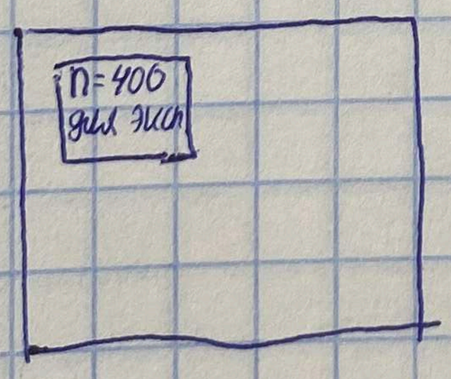
числ. посл-ть

$F_{Y_1}(x) \dots F_{Y_n}(x)$

$a_1 \quad a_n$

<u>Пример</u> проводится исследование очень большой партии однотип. лампочек с целью установления среднего времени их горения (безотказ. работы). Для этого из партии отбирают 400 лампочек, для каждой из кот. время горения устанавливают экспериментально. Найти вероятность того, что набл. среднее будет отличаться от теоретического (истинного) ~~вр~~ среднего времени горения лампочек партии не более чем на 10 часов, если СКО времени горения $\sigma = 80$ часов

<u>Решение</u>



Партия однотип. лампочек

Пусть X - с.в., равная времени горения случайно выбранной лампочки из партии, ч

Тогда $MX = m$ - средним время горения лампочек партии (m неизвестна, для оценки значения m и ставится эксперимент)

$\sqrt{DX} = \sigma = 80$ часов

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

<u>Пример</u> Проводятся $n=800$ исп. по Б, $p=\frac{1}{4}$. Найти вер. того, что число k успехов заключено в диап. $[150; 250]$

а) с исп 2Н4

б) с исп. knet th М.-Л.

см. фото

Семинар 4
14.03

Предв. обработка рез-в эксперимента

<u>Пример</u>. Для данной выборки

$\vec{x} = (13.7,\ 14.7,\ 13.4,$
$12.3,\ 13.0,\ 9.7,$
$16.4,\ 11.9,\ 13.8,$
$13.4,\ 13.7,\ 14.7$
$13.7,\ 12.5,\ 15.5)$

а) построить вариац. ряд
б) построить статист. ряд
в) построить интервальный стат. ряд
г) построить гистограмму
д) найти выборочн. среднее, выб. дисперсию, исправ. выб. дисп.

См. фото

Точечные оценки

① Основные понятия

вспомним 2 осн. задачу матстата

X-св, для кот известен общий вид ее закона распр-я, но неизвестен значения одного или нескольких параметров этого закона распр. Требуется оценить значения этих параметров

Для решения этой задачи можно исп. след. подходы
1) построение точечных оценок
2) построение доверит. интервалов

Пусть θ - неизв. параметр закона распр-я св X, общий вид которого известен

$\hat{\theta}(\vec{X})$ ⟺ одноим. случ. вел.

<u>Опр</u> <u>Точечной оценкой</u> параметра θ наз. статистика, выб. знач. кот. принимается в кач-ве значения параметра θ

$\theta = \hat{\theta}(\vec{x})$
мал.

16.03

$$M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(M[A_i] + \frac{1}{n^2}M[C] + \frac{1}{n^2}M[D] - \frac{2}{n}M[B_i]\right) = *$$

$$M[A_i] = M[(X_i - m)^2] = \left\{ \begin{array}{l} X_i \text{ - комп. случ. выб.} \Rightarrow X_i \sim X \end{array} \right\} = M[(X-m)^2] = DX = \sigma^2$$

$$M[B_i] = M\left[\sum_{j=1}^{n}(X_i - m)(X_j - m)\right] = \sum_{j=1}^{n} cov(X_i, X_j) =$$

$$= cov(X_i, X_i) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} cov(X_i, X_j) = DX = \sigma^2$$

т.к. $X_i X_j$ - ~~независимы~~ элементы случ. выб. $\Rightarrow$ независимы

$$M[C] = \sum_{j=1}^{n} M[(X_j - m)^2] = n\sigma^2$$

$$M[D] = 2\sum_{1\le j<k\le n} M[(X_j - m)(X_k - m)] = 2\sum_{1\le j<k\le n} cov(X_j, X_k) = 0, \text{ т.к. } j \neq k \ldots$$

$$= * \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 + \cancel{\frac{1}{n^2}\cdot 0} - \frac{2}{n}\cdot\sigma^2\right) = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

$M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] \neq \sigma^2 \Rightarrow$ оценка смещенная

<u>Замечание</u> Рассмотрим статистику

$$\sigma^2(\vec{X}) = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Тогда $M[S^2(\vec{X})] = \frac{n}{n-1}M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2$

и S^2 явл. несмещенной оценкой дисп.

<u>Опр</u> Статистика $S^2(\vec{X})$ наз исправленной выборочной дисперсией

а) $M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[(X_i-\bar{X})^2] =$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[(X_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j)^2] = \left\{\begin{array}{l}\text{обозн. } m=MX \\ \text{т возм. неизв.} \\ \text{и вычтем из обе ч.}\end{array}\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[((X_i-m) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-m))^2] =$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[(X_i-m)^2 + \frac{1}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)^2\right]^2 - 2\cdot\frac{1}{n}(X_i-m)\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)] =$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[(X_i-m)^2 + \frac{1}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)^2 + 2\sum_{1\le j<k\le n}(X_j-m)(X_k-m)\right] -$

$\left\{\begin{array}{l}\text{исп.} \\ (a_1+\ldots+a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j\end{array}\right\}$

$- \frac{2}{n}(X_i-m)\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)]$

Обозн

$A_i = (X_i-m)^2$

$B_i = (X_i-m)\sum_{j=1}^{n}(X_j-m)$

$C = \sum_{j=1}^{n}(X_j-m)^2$

$D = 2\sum_{1\le j<k\le n}(X_j-m)(X_k-m)$

$M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(M[A_i] + \frac{1}{n^2}M[C] + \frac{1}{n^2}M[D] - \frac{2}{n}M[B_i]\right)$

Пример Пусть X - св, $m = MX$

В кач-ве точечных оценок для m можно предл. статистики:

$$\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\theta}_2(\vec{X}) = \frac{1}{2}\left[X_{(1)} + X_{(n)}\right]$$

$$\hat{\theta}_3(\vec{X}) = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{если } n\text{-нечетное} \\ \frac{1}{2}\left[X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}\right] \end{cases}$$

$$\hat{\theta}_4(\vec{X}) = \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1} X_{(i)}$$

$$\hat{\theta}_5(\vec{X}) = X_1^2$$ – опр-но не противоречит

Для исследования качества точечной оценки используются качественные характеристики:
- несмещенность
- состоятельность
- эффективность

Опр Точечная оценка $\hat{\theta}(\vec{X})$ (это случ. велич.) неизв-параметра θ наз <u>несмещенной</u>, если ее матожид. равно теоретическому (т.е "истинному") значению парам. θ,

т.е. $M[\hat{\theta}(\vec{X})] = \theta$

Пример Док, что выборочн. ~~средняя~~ дисперсия явл смещенной оценкой дисперсии сл. вел.

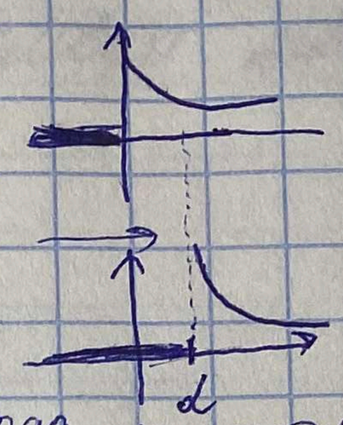
Реш-е

т.е. надо показать, что

$$\hat{\sigma}^2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad M[\hat{\sigma}^2(\vec{X})] \neq \sigma^2$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Пример. Пусть $X \sim Exp(\lambda, \alpha)$ - сдвиг. экс. распр., т.е.



$$f(x, \lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Построить точечн. оценки параметров λ и α с исп. метода моментов

Решение

1) $r = 2 \Rightarrow$ потребуются 2 уравнения

Как и в предыд. примере: первое ур-е зададим отсюда начальных моментов

$m_1(\lambda, \alpha) = \hat{m}_1(\vec{X})$ - первое ур-е отн. нач. мом. первого пор.

~~второе отн. центрального момента~~

$\mathring{m}_2(\lambda, \alpha) = \hat{\mathring{m}}_2(\vec{X})$ - втор. ур-е отн. центр мом. 2-го порядка

$\cancel{m_1(\vec{X}) = MX = \int_{-\infty}^{+\infty}}$

$$m_1(\lambda, \alpha) = MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, \lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda} + \alpha \quad \text{(из механич. интерпр. матожидания)}$$

$$\mathring{m}_2(\lambda, \alpha) = DX = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{(из мех. интерпретации дисперсии)}$$

Т.о. приходим к системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda} + \alpha = \overline{X} \\ \frac{1}{\lambda^2} = \hat{\sigma}^2(\vec{X}) \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1}{\hat{\sigma}^2(\vec{X})}$$

$$\alpha = \overline{X} - \hat{\sigma}^2(\vec{X})$$

Ответ: $\hat{\lambda}(\vec{X}) = \frac{1}{\hat{\sigma}^2(\vec{X})}$

$\hat{\alpha}(\vec{X}) = \overline{X} - \hat{\sigma}^2(\vec{X})$

Замечание

Иногда для сост. ур-й в метод моментов удобнее использовать не начальные, а центральные моменты. В этом случае соотв. ур-е будет иметь вид

$$\mathring{m}_i(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{\mathring{m}}_i(\vec{X})$$

Пример $X \sim N(\theta_1, \theta_2)$, где θ_1, θ_2 - неизв.
С использованием метода моментов построить оц. оценки θ_1 и θ_2

1) $r = 2 \Rightarrow$ потр. 2 ур-я: одно отн. момента 1-го порядка
2-го порядка

первое ур-е запишем отн. начального момента,
второе - отн. центрального.

Тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} m_1(\theta_1, \theta_2) = \hat{m}_1(\vec{X}) \\ \mathring{m}_2(\theta_1, \theta_2) = \hat{\mathring{m}}_2(\vec{X}) \end{cases}$$

слева

$$m_1(\theta_1, \theta_2) = MX = \theta_1$$

$$\mathring{m}_2(\theta_1, \theta_2) = M[X^2] - (MX)^2 = DX = \theta_2$$

справа

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

$$\hat{\mathring{m}}_2(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \hat{\sigma}^2(\vec{X})$$

можно S^2

Т.о. получаем систему: $\begin{cases} \theta_1 = \overline{X} \\ \theta_2 = \hat{\sigma}^2(\vec{X}) \end{cases}$

а решение: $\hat{\theta}_1(\vec{X}) = \overline{X}$

$\hat{\theta}_2(\vec{X}) = \hat{\sigma}^2(\vec{X})$

② Метод моментов

Вторая задача МС

2 метода построения точечных оценок
1) метод моментов
2) метод max правдоподобия

Ранее были введены понятия выборочных моментов. ~~Центральн~~
Нач. выборочным моментом порядка k наз. статистика $\hat{m}_k(\vec{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

Выборочные моменты явл. статистическими аналогами соответств. теоретических моментов, и при дост. больших n могут быть использованы в кач-ве оценок последних.

На этой идеи основан метод моментов построения точечных оценок

Пусть закон распр. св X зависит от $\underset{=!}{r}$ неизв. параметров, которые запишем в вектор $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$

Метод моментов
1) Вычисляем r первых теоретических моментов св X, которые будут зависеть от неизв. параметров

$$m_k(\vec{\theta}) = M[X^k], \quad k = \overline{1,r}$$

2) приравниваем теор. моменты к их выборочным аналогам, и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} m_1(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{m}_1(\vec{X}) \\ \dots \\ m_r(\theta_1, \dots, \theta_r) = \hat{m}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

3) решаем сист. отн. неизв. параметров

$$\begin{cases} \theta_1 = \hat{\theta}_1(\vec{X}) \\ \vdots \\ \theta_r = \hat{\theta}_r(\vec{X}) \end{cases}$$

фун. $\hat{\theta}_i(\vec{X})$ принимаем в кач-ве точечной оценки параметра θ_i

Д3

Пр С пом. метода моментов построить оценку параметра лямбда.

$X \sim \Pi(\lambda)$

Решение

$r=1 \Rightarrow$ нужно одно уравнение

$m_1(\lambda) = \hat{m}_1(\vec{X})$

слева $m_1(\lambda) = MX = \lambda$

справа $\hat{m}_1(\vec{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

$\hat{\lambda} = \bar{X}$

Ответ: $\hat{\lambda}(\vec{X}) = \bar{X}$

③ Метод максимального правдоподобия

Пусть 1) X - ген. совокуп, 3) $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - случ. выборка из ген сов X

2) $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ - вектор параметров закона распр св X

Опр Функцией правдоподобия случ. выборки $\vec{X}$ наз функцию

$L(\vec{X}, \vec{\theta}) = p(X_1, \vec{\theta}) \cdot \ldots \cdot (X_n, \vec{\theta})$, где

$$p(X_i, \vec{\theta}) = \begin{cases} f_X(X_i, \vec{\theta}), & \text{если } X\text{-нсв} \\ P\{X = X_i\}, & \text{если } X\text{-дсв} \end{cases}$$

Пр $X \sim N(m, \sigma^2)$

$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots X_n)$

Запишем ф. правдоподобия

$$f(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R$$

Тогда $L(\vec{X}, m, \sigma^2) = f(X_1, m, \sigma^2) \cdot \ldots \cdot f(X_n, m, \sigma^2) =$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X_1-m)^2}{2\sigma^2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(X_n-m)^2}{2\sigma^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - m)^2\right)$$

Пр $X \sim \Pi(\lambda)$. Найти для λ оц. макс. правдоп.

1) $X \sim \Pi(\lambda)$ означ, что $P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k=0,1,\dots$

2) Запишем ф. правдоп.

$$L(\vec{X},\lambda) = \{X\text{-дсв}\} = P\{X=x_1\}\cdot\ldots\cdot P\{X=x_n\} = \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda^{x_n}}{x_n!}e^{-\lambda} =$$

$$= \frac{e^{-\lambda n}}{x_1!\cdot\ldots\cdot x_n!}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

Нужно решить задачу $L(\vec{X},\lambda) \to \max\limits_{\lambda}$

Вместо этой задачи будем решать эквив. задачу

$$\ln L(\vec{X},\lambda) \to \max_{\lambda}$$

(эти задачи эквив, тк логарифм - монотонно возраст. ф.)

$$\ln L(\vec{X},\lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \ln\lambda - \ln(x_1!\cdot\ldots\cdot x_n!) \to \max_{\lambda}$$

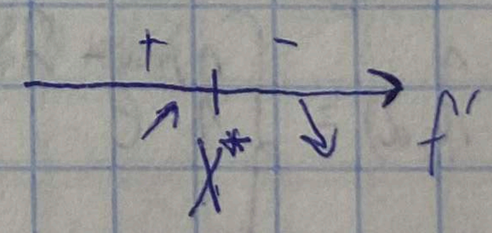
Необх. усл-е экстремума: $\frac{\partial \ln L(\vec{X},\lambda)}{\partial\lambda} = 0$

$$\frac{\partial \ln L(\vec{X},\lambda)}{\partial\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} = 0$$

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i = n \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{X}$$

Т.о. $\hat{\lambda} = \overline{X}$

Проверим достат. усл-е максимума



не это.

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\lambda^2}\Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} < 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}\cdot\sum_{i=1}^n x_i = -\frac{n}{\lambda^2}\overline{X}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\lambda^2}\Big|_{\lambda=\hat{\lambda}} = -\frac{n}{\overline{X}^2}\overline{X} = -\frac{n}{\overline{X}} < 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \overline{X}$$ - точка максимума

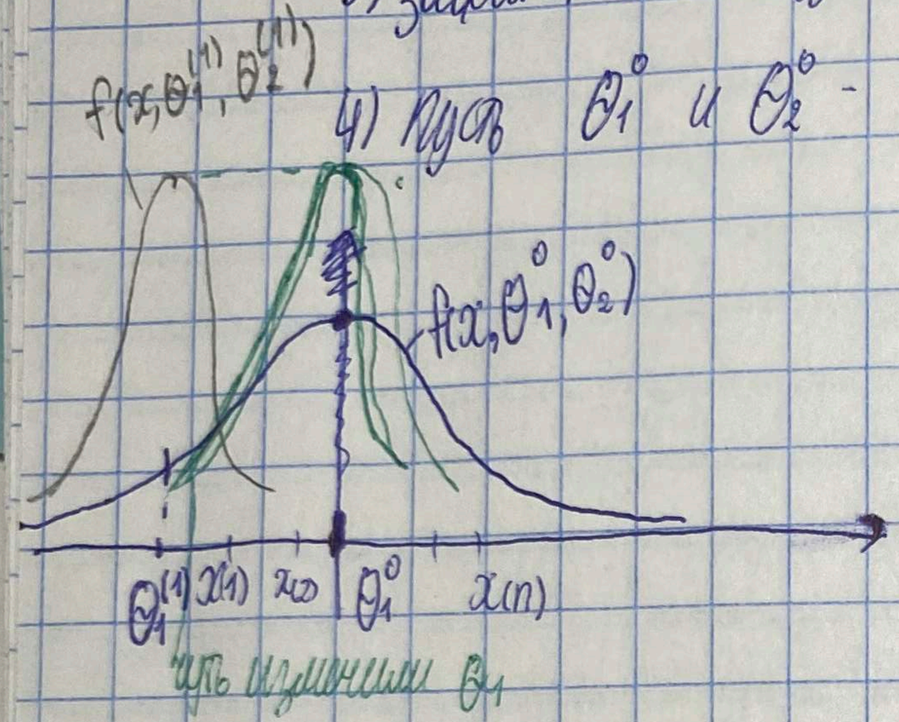
Ответ: $\hat{\lambda}(\vec{X}) = \overline{X}$

Пример Пусть 1) $X \sim N(\theta_1, \theta_2)$

2) $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ - выборка из ген. совокуп X

3) зафикс. $\vec{x}$ и будем изменять знач-я параметров θ_1 и θ_2

4) пусть θ_1^0 и θ_2^0 - теоретич. (те истинные знач. параметров)



Предположим, что мы выбрали в кач-ве значения параметров $\theta_1^{(1)}$ и $\theta_2^{(1)}$

Ф-я правдоподобия:

$L(\vec{x}, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}) = f(x_1, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(2)}) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$

в $x_{(1)}$... высоты больше => произв. будет больше

чем ~~тем~~ ~~тем~~ ближе значения оценок $\theta_1^{(1)}$ и $\theta_2^{(2)}$ неизв. параметров к их теор знач-ям, тем больше знач-я принимает ф. правдоподобия

(предп, что выборка фикс.: $\vec{x} = const$, $\vec{\theta} = var$)

- В методе макс. правдоподобия в кач-ве точ. оценок неизв. параметров принимаются такие знач, которые доставляют функции правдопод. L макс. значения.

Для этого нужно решить задачу

$$\begin{cases} L(\vec{X}, \vec{\theta}) \to \max\limits_{\vec{\theta}} \\ \vec{\theta} = var \\ \vec{X} = const \end{cases}$$

Решение

$\{X \sim \Gamma(\frac{1}{\theta}, m)\}$

11.04

Интервальные оценки

нерав 4, 364, ЦПТ

Опр Гамма-дов. интервалом (дов. интерв. уровня гамма) для парам. θ наз ~~выборочное значен~~ интервал, границы которого отвечают выб. значениям границ интервальной оценки уровня γ для парам. θ

$$(\underline{\theta}(\vec{x}), \bar{\theta}(\vec{x}))$$

Замеч γ-интервал - реализация интерв. оценки уровня γ

Опр Размахом интерв. оценки наз. случ. велич. $l(\vec{X}) = \bar{\theta}(\vec{X}) - \underline{\theta}(\vec{X})$

Как строить?

Опр Статистика $T(\vec{X}, \theta)$ наз. центральной, если закон ее распр-я не зависит от парам. θ

Пример $X \sim N(\theta, \sigma^2)$, где θ - неизв, σ изв

Расм. статистику $T(\vec{X}, \theta) = \frac{\theta - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}$

Закон распр $T(\vec{X}, \theta)$ - ?

а) $T = \frac{\theta}{\sigma}\sqrt{n} - \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(X_1 + \ldots + X_n)$

$X_i \sim X \sim N(\theta, \sigma^2)$ - норм. св $\Rightarrow$

$T \sim N(m_T, \sigma_T^2)$ - T имеет норм распр

$T \sim N(0, 1)$

$m_T = M[T] = M\left[\frac{\theta - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} M[\theta - \bar{X}] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}[\theta - \underset{\underset{\theta}{\parallel}}{M\bar{X}}] = 0$

$D[T] = M[T^2] - (MT)^2 = \frac{n}{\sigma^2} D[\theta - \bar{X}] = \frac{n}{\sigma^2} D\bar{X} = \frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} DX_i$

$= 1$

5) Оценку для λ найдем "обычным" способом с исп. ур-я правдоп.

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n}(X_i - \underset{\downarrow \atop X_{(1)}}{\alpha}) = 0$$

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} X_i + nX_{(1)} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i - nX_{(1)}} = \frac{1}{\overline{X} - X_{(1)}}$$

Ответ: $\hat{\lambda}(\vec{X}) = X_{(1)}$

$\hat{\alpha}(\vec{X}) = \frac{1}{\overline{X} - X_{(1)}}$

④ Нерав. Рао

<u>Th</u> Пусть 1) X - св, закон распр кот зависит от неизв парам θ

2) $\hat{\theta}(\vec{X})$ - несмещ оценка для θ

Тогда $D[\hat{\theta}(\vec{X})] \geq \frac{1}{I(\theta)}$,

где $I(\theta) = M\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right)^2\right]$ - кол-во инф. по Фишеру в выб. $\vec{X}$

<u>Пр</u> Пусть св X имеет плотн распр

$$f(x, \theta) = \frac{x^{m-1}}{\Gamma(m)\theta^m} e^{-\frac{x}{\theta}}$$ m - изв, θ неизв.

Пров, явл. ли оценка

$\hat{\theta}(\vec{X}) = \frac{1}{m}\overline{X}$

а) несмещ

б) эфф. по Рао

Пр $X \sim N(\theta_1, \theta_2)$. Построить для θ_1 и θ_2 оценки

см. фото

1п - проверить сдвиг, 2п - несдвиг
дост.

Пр $X \sim Exp(\lambda, \alpha)$

$$f(x, \lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\alpha)} & , x \geq \alpha \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$

с исп. метода макс правдоп. постр. оценки для парам.

1) $L(\vec{X}, \lambda, \alpha) = \{X - \text{нез}\} = f(X_1, \lambda, \alpha) \cdot \ldots \cdot f(X_n, \lambda, \alpha) =$

$= \lambda^n \exp(-\lambda \sum_{i=1}^{n} (X_i - \alpha))$ — верно, но $\alpha \leq X_{(1)}$

$\ln L(\vec{X}, \lambda, \alpha) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} (X_i - \alpha)$

$\sum X_i - n\alpha$

Уравнения правдоподобия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} (X_i - \alpha) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -\lambda \cdot -n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0 \quad \text{упс}$$

$n \neq 0$

не учли $x \geq \alpha$

4) Аккуратно записанная

$$L(\vec{X}, \lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} (X_i - \alpha)}, & \text{если } \alpha \leq X_{(1)} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

~~$L(\vec{X}, \lambda, \alpha) = f(X_1, \lambda, \alpha) \cdot \ldots$~~

Из рисунка видно, что чем больше $\hat{\alpha}$, тем больше $f(X_i; \lambda, \alpha) \Rightarrow$ тем больше $L(\vec{X}, \lambda, \alpha) \Rightarrow$ нужно

$$\begin{cases} \alpha \to \max \\ \alpha \leq X_{(1)} \end{cases} \Rightarrow \hat{\alpha} = X_{(1)}$$

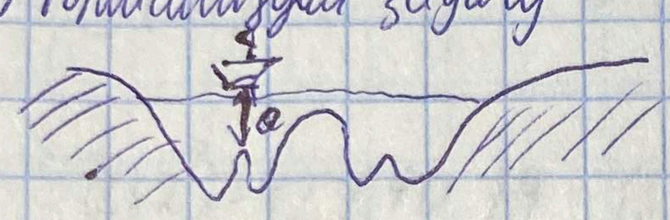
13.04

Пример

Произв. измерения глубины оз. в данной точке с исп. эхолота. Эхолот не имеет сист. ошибки, а случ. ошибки распределены по норм. закону. Построить дов. интервал уровня 0.9 для глубины озера в данной точке и СКО ошибки эхолота, если после $n=16$ изм $\bar{x}=12.7$ м, $S^2(\vec{x})=3.22$ м^2

Реш

1) Формализуем задачу



~~Глубина a в данной точке - велич. детерм~~

Пусть a - глубина оз. в данной точке в м.
детерм., но неизв. величина

ε - случ. велич, прин. значение, равное ~~показаниям~~ ошибкам эхолота

Из усл $\Rightarrow \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$
сист. ошибка $=0$
неизв.

Пусть $X = a+\varepsilon$
св. прин. знач., равное показаниям эхолота

Тогда $X = const + \varepsilon \Rightarrow X \sim N(m_X, \sigma_X^2)$
$N(\ldots)$

$m_X = MX = M[a+\varepsilon] = a + \cancel{M\varepsilon}^{0} = a$

$\sigma_X^2 = DX = D[a+\varepsilon] = D\varepsilon = \sigma^2$

т.о. $X \sim N(a, \sigma^2)$, где a - неизв, σ^2 - неизв.

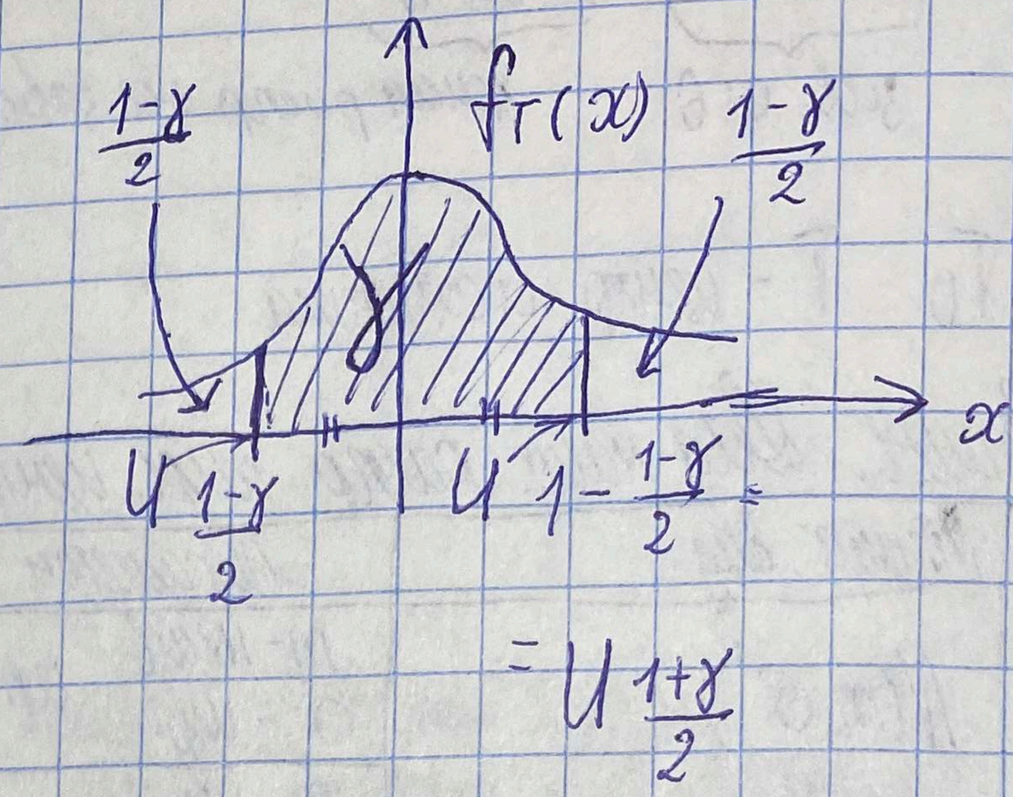
В задании просят построить интервалы для a и для σ

Пр $X \sim N(m, \sigma^2)$

m - неизв

σ^2 - изв

Построить интерв оценку уровня γ



Реш

$$T(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$\gamma = P\left\{-u_{\frac{1+\gamma}{2}} < T(\vec{X}, m) < u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\}$$

$$\left\{-u_{\frac{1+\gamma}{2}} < \frac{m-\bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} < u_{\frac{1+\gamma}{2}}\right\} \Leftrightarrow \left\{\underbrace{\bar{X} - \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}}_{\underline{m}} < m < \underbrace{\bar{X} + \frac{\sigma u_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}}_{\bar{m}}\right\}.$$

Тогда

$$P\{\underline{m}(\vec{X}) < m < \bar{m}(\vec{X})\} = \gamma$$

То $\underline{m}(\vec{X}), \bar{m}(\vec{X})$ - инт. оценка уровня γ для m

25.04 ЛР

27.04 РК1

~~09.05~~

11.05 ЛР

23.05.

25.05

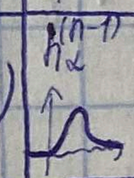
With ♥
from Ira

То $T \sim N(0,1)$

$$\underbrace{T(\vec{X}, \theta)}_{\text{зав. от } \theta} \sim \underbrace{N(0,1)}_{\text{закон распр не зависит от } \theta}$$

То T - центр статистика

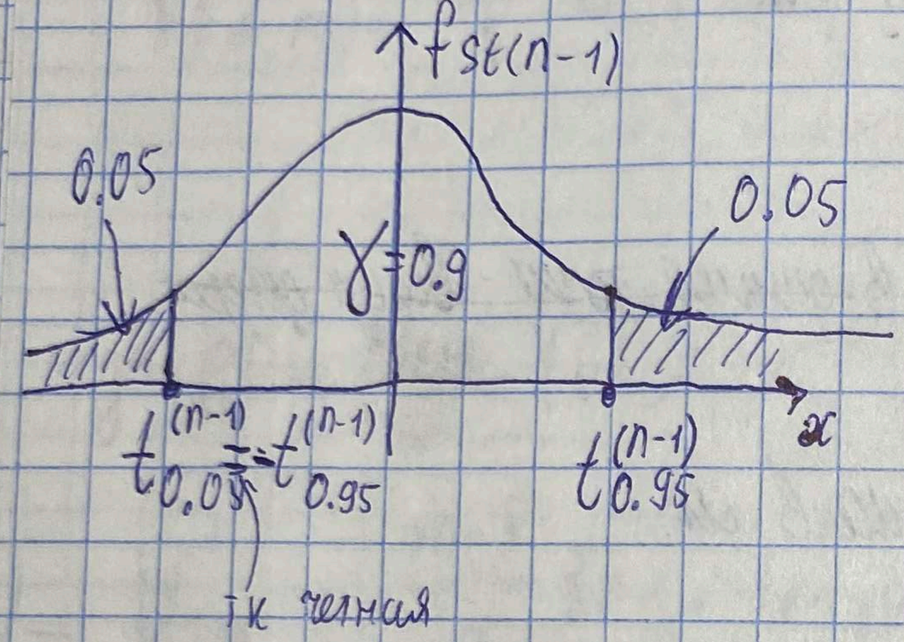
Замеч. Для наиб. распр случ. центр стат построены

Общий вид	Параметры		Центр статистика и ее закон распр	
$N(m, \sigma^2)$	m - неизв, σ^2 - изв	оценить m	$T = \frac{m - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$	u
	m - неизв, σ^2 - неизв	оценить m	$T = \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$	$t_\alpha^{(n-1)}$
	m - неизв, σ^2 - неизв	оценить σ	$T = \frac{S^2(\vec{X})}{\sigma^2}(n-1) \sim \chi^2(n-1)$	$h_\alpha^{(n-1)}$ 
$Exp(\lambda)$	λ - неизв, оценить λ		$2\lambda n \bar{X} \sim \chi^2(2n)$	

Стат $\Rightarrow$ $u_{1-p} = -u_p$

2) Доверит. интервал для a

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(a, \sigma^2) \\ a\text{-неизв} \\ \sigma^2\text{-неизв} \\ \text{Оценить } a \end{array}\right\} T = \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$



(Здесь $t^{(n-1)}_{0.95}$ - квантиль ур-ня 0.95 распр $St(n-1)$)

Исп. св-во нсв:

$$P\left\{-t^{(n-1)}_{0.95} < \frac{a - \bar{X}}{s(\vec{X})}\sqrt{n} < t^{(n-1)}_{0.95}\right\} = 0.9$$

$$P\left\{\underbrace{\bar{X} - \frac{S(\vec{X})\, t^{(n-1)}_{0.95}}{\sqrt{n}}}_{\underline{a}(\vec{X})} < a < \underbrace{\bar{X} + \frac{S(\vec{X})\, t^{(n-1)}_{0.95}}{\sqrt{n}}}_{\bar{a}(\vec{X})}\right\} = 0.9$$

то $(\underline{a}(\vec{X}), \bar{a}(\vec{X}))$ - интерв. оценка для a

доверит. интервал для a:

$(\underline{a}(\vec{x}), \bar{a}(\vec{x}))$

(таб. квантили)

Найдем доверит. интервал

а) $n-1=15$

б) $t_{0.95}^{(15)} = \{\text{по таб}\} = 1.753$

в) $\dfrac{s(\vec{x})\, t_{0.95}^{(15)}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{3.22}\cdot 1{,}753}{4} \approx 0.79$

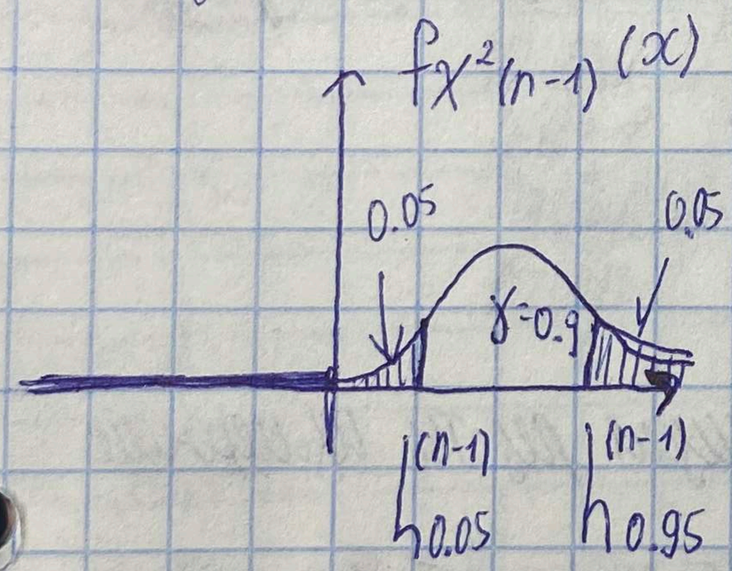
г) $\underline{a}(\vec{x}) = 1.27 - 0.79 = \underline{\underline{11.91}}$

$\bar{a}(\vec{x}) = 12.7 + 0.79 = \underline{\underline{13.49}}$

3) Доверит. интервал для σ

$\left.\begin{array}{l} X \sim N(a, \sigma^2) \\ \sigma^2 - \text{неизв} \\ \text{оценить } \sigma \end{array}\right\} \Rightarrow T(\vec{X}, \sigma) = \dfrac{(n-1)\, S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$

форми $\dfrac{\sigma}{\sigma}$



$h_{\alpha}^{(n-1)}$ - квант. ур-ни α распр $\chi^2_{(n-1)}$

$P\left\{ h_{0.05}^{(n-1)} < \dfrac{(n-1)\, S^2(\vec{X})}{\sigma^2} < h_{0.95}^{(n-1)} \right\} = 0.9$

$P\left\{ \underbrace{\sqrt{\dfrac{(n-1)\, S^2(\vec{X})}{h_{0.95}^{(n-1)}}}}_{\underline{\sigma}(\vec{X})} < \sigma < \underbrace{\sqrt{\dfrac{(n-1)\, S^2(\vec{X})}{h_{0.05}^{(n-1)}}}}_{\bar{\sigma}(\vec{X})} \right\} = 0.9$

инт оценка

Найдем доверит. интервал для σ

а) $n-1=15$

б) $h_{0.05}^{(15)} = 7.26$

в) $h_{0.95}^{(15)} = 25.0$ } из таб

г) $\underline{\sigma}(\vec{x}) = \sqrt{\dfrac{15\cdot 3{,}22}{25.0}} \approx 1.39$

$\bar{\sigma}(\vec{x}) = \sqrt{\dfrac{15\cdot 3{,}22}{7{,}26}} \approx 2.58$

Ответ: доверит. инт. для a: $(11.91, 13.49)$

σ: $(1.39, 2.58)$

Пример (простейшая задача планирования эксперимента)

Для измерения расстояния (по дороге) между 2 нас. пунктами снимают показания одометра автомобиля. Считая, что ошибки измерений (любой природы) имеют норм. распр с СКО $\sigma = 2$ км, надо найти такое кол-во поездок, то рез-ы которых с вероятн 0.9 измеренное знач. будет отличаться от теор. не более, чем на 100 м.

Решение 1) Пусть a - расстояние между нас. пунктами (по дороге), км - детерм. велич.

ε - ошибка измерения (сост в ошибка одометра + проскальз. колес + виляние по дороге и т.д.)

$$\varepsilon \sim N(0, \underbrace{\sigma^2}_{4\text{ км}^2})$$

0 - мат. ожидание

Пусть $X = a + \varepsilon$ - св, прин знач-я, равные показаниям одометра

$$\Rightarrow X \sim N(a, \sigma^2),$$

σ^2 - изв

a - неизв

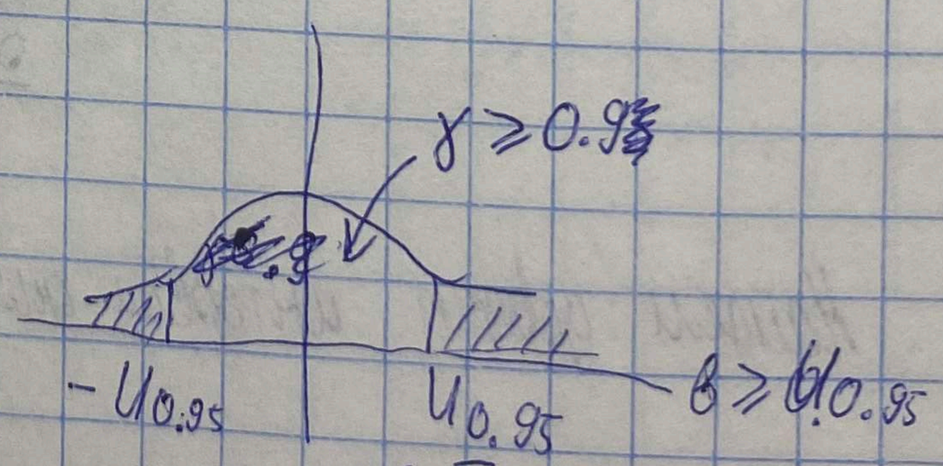
2) Пусть $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ - случ. выборка, содержащая рез-ты измерений

Тогда $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ - значение расстояний по рез-м наблюдений

$$P\{|\bar{X} - a| \leq 0.1\} \geq 0.9 \Rightarrow n = ?$$

$$T(\vec{X}, a) = \frac{a - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - a}{\sigma}\sqrt{n}\right| \leq \frac{0.1}{\sigma}\sqrt{n}\right\} \geq 0.9$$



Это будет обеспеч., если $b \geq u_{0.95}$, следоват.

$$\frac{0.1}{\sigma}\sqrt{n} \geq u_{0.95} \Rightarrow n \geq \left(\frac{u_{0.95}\sigma}{0.1}\right)^2 = \frac{1.645^2 \cdot 4}{0.01} = 1084$$

Отв: $n \geq 1084$

→ плохо, меньше можно

Пример Решить пред. задачу с исп. одност. крит., если σ неизв, но по рез-м изм получено $s^2(\vec{x}) = 1.21$ мм^2

Решение

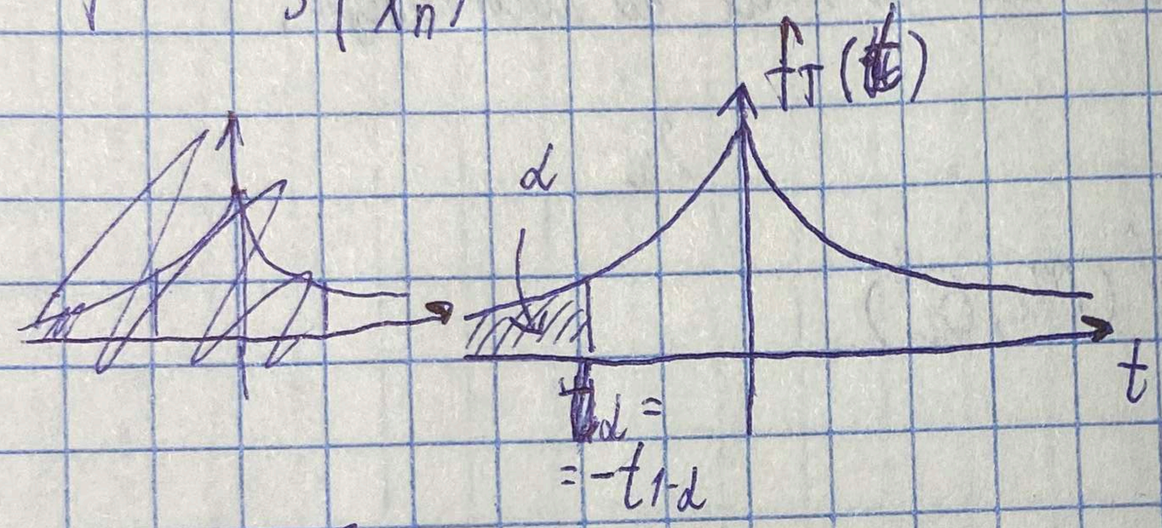
$X \sim N(m, \sigma^2)$ — m: неизв, σ^2: неизв

$H_0 = \{m = m_0\}$

$H_1 = \{\cancel{m < m_0}\}$ или $H_1 = \{m > m_0\}$

ТК $\bar{x} = 10.3 > 10 = m_0$

$$T = \frac{\bar{X} - m_0}{S(\vec{X}_n)} \sqrt{n} \sim St(n-1)$$



$$T(\vec{x}) = \frac{10 - 10.3}{1.1} 4 = -1.09$$

$$t^{(15)}_{1-\alpha} = t^{(15)}_{0.95} = 1.753$$

$$T(\vec{x}) \overset{?}{\leq} t^{15}_{0.95}$$

$-1.09 \overset{?}{\leq} -1.753$ — неверно $\Rightarrow \vec{x} \notin W \Rightarrow$ прин H_0, откл H_1

Ответ: не предусл

$H_1 = ?$

а) $H_1 = \{m < m_0\}$

б) $H_1 = \{m > m_0\}$ } односторонние критерии

или одн. 10 б тк.

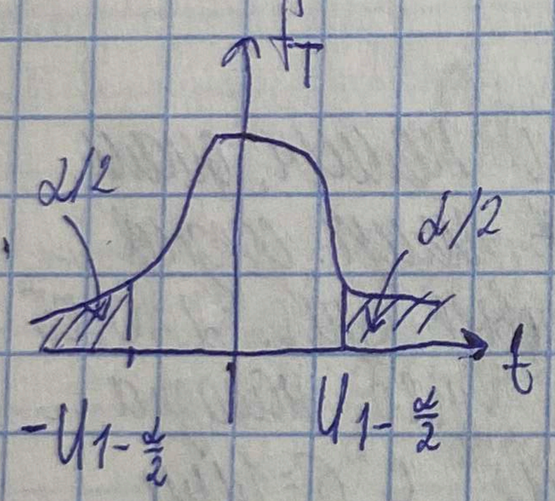
в) $H_1 = \{m \neq m_0\}$ } двусторонний

Из практич. обор. $H_1 = \{m \neq m_1\}$

3) Дано $X \sim N(m, \sigma^2)$ изв

$H_0 = \{m = m_0\}$ $H_1 = \{m \neq m_0\}$

$$T = \frac{\mu_0 - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$



$\parallel H_1$

$W = \{\vec{x} : |T(\vec{x})| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

$$T(\vec{x}) = \frac{10 - 10.3}{1}\sqrt{16} = -1.2$$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{0.05}{2}} = u_{0.975} = 1.96$$

$|T(\vec{x})| \overset{?}{\geq} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$, т.е

$|-1.2| \overset{?}{\geq} 1.96$ - неверно $\Rightarrow \vec{x} \notin W \Rightarrow$ ~~отвергаем~~ принимаем H_0, отвергаем H_1

Ответ: наладка не требуется

$H_1 = \{m = m_0\}$ 10.3 10 никогда

11.05

25 - РК
23 - пом. лекц.

I. $X \sim N(m, \sigma^2)$,
σ^2 изв

$H_0 = \{ m = m_0 \}$

$W = \{ \vec{x} \in \mathcal{X}:$

Задача 1 $H_0 = \{ m = m_0 \}$ против $H_1 = \{ m < m_0 \}$: $T(\vec{X}_n) \geq u_{1-\alpha} \}$

Задача 2 – $H_1 = \{ m > m_0 \}$: $T(\vec{X}_n) \leq -u_{1-\alpha}$

Задача 3 $H_1 = \{ m \neq m_0 \}$: $|T(\vec{x})| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$$T(\vec{X}_n) = \frac{m_0 - \bar{X}}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0,1)$$

Пример 1. Станок автомат должен изгот. шарики номин. диам. 10 мм. После проверки $n=16$ шариков получ. среднее знач-е диаметра 10.3 мм. При уровне знач. $\alpha = 0.05$ проверить гип. о том, что станку не треб. наладка. Распр-е контр. признака - нормальное с $\sigma = 1$ мм

Реш-е

1) Пусть X - св, прин. знач-я, равные диаметру готовых шариков, мм

Из условия $\Rightarrow X \sim N(m, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1$ мм^2

Тогда m - номин. диаметр ~~тех шариков, которые стан~~ изготовленных шариков

$H_0 = \{$ станку не треб. нал $\} = \{ m = m_0 \}$, где $m_0 = 10$

H_1 - ?

№ 2 штурмана опр. момент маяка, исп. 2 пеленгатора

Рез-ты: 1) ср. зн. 70.2° по рез-м $n_1=4$

2) 70.5 $n_2=9$

При уровне значимости $\alpha=0.05$ пров ил. о том, что различие, вызв случ. ошибками, если показ. обоих пеленгаторов распр по норм. закону, с СКО $\sigma_1=\sigma_2=0.05$

Решение

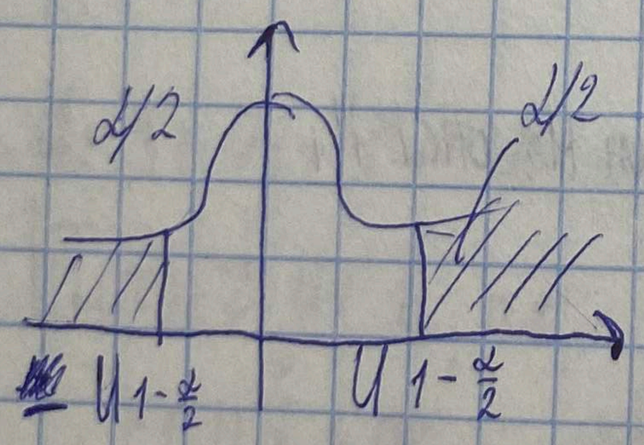
1) Пусть X – св, прин знач, равные показаниям 1го пеленгатора,
Y – 2го

Из усл $X \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(m_2, \sigma_2^2)$

$H_0 = \{m_1 = m_2\}$

$H_1 = \{$разница вызвана случайной ошибкой$\} = \{m_1 \neq m_2\}$

II. $T(\vec{X}, \vec{Y}) = \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$



$W = \{(\vec{x}, \vec{y}) : |T(\vec{x}, \vec{y})| \geq U_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

$T(\vec{x}, \vec{y}) \approx -9.98$

$U_{1-\frac{\alpha}{2}} = U_{0.975} = 1.96$

Верно $\Rightarrow (\vec{x}, \vec{y}) \in W \Rightarrow$ прин H_1, отв. H_0

Отв. разн вызв систематич. ошиб.