



Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №1 по дисциплине «Моделирование»

Тема Программная реализация приближенного аналитического метода и
численных алгоритмов первого и второго порядков точности при
решении задачи Коши для ОДУ

Студент Зайцева А. А.

Группа ИУ7-62Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Градов В. М.

1 | Задание

Цель работы.

Получение навыков решения задачи Коши для ОДУ методами Пикара и явными методами первого порядка точности (Эйлера) и второго порядка точности (Рунге-Кутты).

Исходные данные.

ОДУ 1.1, не имеющее аналитического решения:

$$\begin{cases} u'(x) = u^2 + x^2 \\ u(0) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Результат работы программы.

1. Таблица, содержащая значения аргумента с заданным шагом в интервале $[0, x_{\max}]$ и результаты расчета функции $u(x)$ в приближениях Пикара (от 1-го до 4-го), а также численными методами. Границу интервала x_{\max} выбирать максимально возможной из условия, чтобы численные методы обеспечивали точность вычисления решения уравнения $u(x)$ до второго знака после запятой.

2 | Теоретическая часть

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n -ого порядка имеет вид 2.1:

$$F(x, u', u'', \dots, u^{(n)} = 0). \quad (2.1)$$

Задача Коши состоит в нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям 2.2:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u) \\ u(\xi) = \eta \end{cases} \quad (2.2)$$

Рассмотрим методы решения этой задачи.

2.1 Метод Пикара

Метод Пикара является приближенно-аналитическим. Идея состоит в том, чтобы заменить дифференциальное уравнение интегральным 2.3.:

$$y^s(x) = \eta + \int_{\xi}^x f(t, y^{s-1}(t)) dt \quad (2.3)$$

$$y^{(0)} = \eta \quad (2.4)$$

Метод сходится если правая часть непрерывна и выполнено условие Липшица: $|f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|$, где L - константа Липшица.

Для данного в задании ОДУ 1.1:

$$y^{(1)} = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} \quad (2.5)$$

$$y^{(2)} = 0 + \int_0^x \left[\left(t^2 + \frac{t^3}{3} \right)^2 \right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \quad (2.6)$$

$$y^{(3)} = 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^7}{63} + \frac{t^3}{3} \right)^2 \right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
y^{(4)} &= 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535} \right)^2 \right] dt = \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{13x^{15}}{218295} + \frac{82x^{19}}{37328445} + \\
&\quad + \frac{662x^{23}}{10438212015} + \frac{4x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876903905}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 Метод Эйлера

Метод Эйлера – это явный метод первого порядка точности, использующий формулу 2.9:

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n). \tag{2.9}$$

2.3 Метод Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты – это явный метод второго порядка точности, использующий формулу 4.1:

$$y_{n+1} = y_n + h * \left[\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \right], \tag{2.10}$$

где $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$.

исправить

Используя описанные выше методы построить таблицу для:

1. метода Пикара:

- (a) Первое приближение;
- (b) Второе приближение;
- (c) третье приближение;
- (d) четверное приближение.

2. метод Эйлера;

3. метод Рунге-Кутты.

3 | Листинги реализованных методов

4 | Ответы на вопросы

1. Для того, чтобы указать интервал значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений проанализируем полученные значения. Так как нам дано начальное приближение, то левой границей будет 0. Для определения правой границы мы будем анализировать полученные решения методом Пикара для конкретного приближения и сравнивать со значениями более высоких порядков приближения и с результатами численных методов при определенном шаге. В листинге был подобран шаг $1e-4$. Для первого приближения искомым интервалом будет $[0, 0.89]$, для второго $[0, 1.12]$, для третьего $[0, 1.39]$, для четвертого $[0, 1.4]$

2. В численных методах правильность полученного результата, при фиксированном значении аргумента, доказывается путем уменьшения шага. Правильно полученный результат - это когда при уменьшении шага значение аргумента незначительно (или вообще) не меняется.

3. Примерное значение функции при $x = 2$.

$$u(2) \approx 316.713 \tag{4.1}$$