ЗАДАНИЕ
на лабораторные работы №4

Тема: Программно- алгоритмическая реализация моделей на основе дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями III рода и исследование математической модели на основе технологии вычислительного эксперимента.

Цель работы. Получение навыков разработки алгоритмов решения смешанной краевой задачи при реализации моделей, построенных на квазилинейном уравнении параболического типа, и исследование соответствующей компьютерной математической модели.

Исходные данные.

1. Задана математическая модель.

Уравнение для функции $T(x,t)$

$$c\ (T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{2}{R}\alpha\,(x)T + k(T)\,F_0(t)\,e^{-k(T(x))\,x} + \frac{2T_0}{R}\alpha(x) \qquad (1)$$

Краевые условия

$$\begin{cases} t = 0, \quad T(x,0) = T_0, \\ x = 0, \quad \lambda(T(0))\,\dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha_0\,(T(0) - T_0), \\ x = l, \quad -\lambda(T(l))\,\dfrac{\partial T}{\partial x} = \alpha_N\,(T(l) - T_0) \end{cases}$$

2, Значения параметров (все размерности согласованы)

$\lambda(T) = a_1(b_1 + c_1\,T^{m_1})$, Вт/см К,

$c(T) = a_2 + b_2\,T^{m_2} - \dfrac{c_2}{T^2}$, Дж/см^{3}К.

$$k(T) = k_0\left(\frac{T}{300}\right)^2,$$

$k_0 = 1.0\ см^{-1}$,

a_1=0.0134, b_1=1, c_1=4.35 10^{-4}, m_1=1,

a_2=2.049, b_2=0.563 10^{-3}, c_2=0.528 10^{5}, m_2=1,

$\alpha(x) = \dfrac{c}{x-d}$, где константы c, d находятся из условия, что в точках x_0, x_N коэффициенты равны $\alpha_0 = 0.05$ Вт/см^2 К, $\alpha_N = 0.01$ Вт/см^2 К,

$l =$ 10 см,

$T_0 = 300$К,

$R = 0.5$ см,

2. Определен поток излучения $F_0(t)$ при $x = 0$

$$F_0(t) = \frac{F_{max}}{t_{max}} t \exp(-(t/t_{max} - 1)),$$

где F_{max}, t_{max} - амплитуда импульса потока и время её достижения (Вт/см^2 и с).

Для отладки принять $F_{max} = 50$ Вт/см^2, t_{max} = 60 с.

Физическое содержание задачи (для понимания получаемых результатов при отладке программы)**.**

Сформулированная математическая модель описывает нестационарное температурное поле $T(x,t)$ вдоль цилиндрического стержня радиуса R и длиной l, причем $R << l$ и температуру можно принять не зависящей от радиуса цилиндра. Таким образом, температурное поле $T(x,t)$ зависит от координаты x и меняется во времени *t*. Ось x направлена вдоль оси цилиндра, и начало координат совпадает с левым торцом стержня. Слева при $x = 0$ в цилиндр поступает импульс излучения $F_0(t)$ меняющийся во времени по заданному закону. Поглощение этого излучения в стержне служит источником тепловыделения, которое его нагревает. Стержень со всех сторон обдувается воздухом, температура которого равна T_0. В результате происходит съем тепла с цилиндрической поверхности и двух торцов: с левого торца при $x = 0$ и правого торца при $x = l$.

Функции $\lambda(T), c(T), k(T)$ являются, соответственно, коэффициентами теплопроводности, теплоемкости и оптического поглощения материала стержня, и они привязаны к температуре, α - коэффициент теплоотдачи при обдуве.

Если в настоящей работе задать поток постоянным, т.е. $F_0(t)$=const, то будет происходить формирование температурного поля от начальной температуры T_0 до некоторого установившегося (стационарного) распределения $T(x,t)$. Это поле в дальнейшем с течением времени меняться не будет. Это полезный факт для тестирования программы.

Если после разогрева стержня положить поток $F(t)$=0, то будет происходить *остывание*, пока температура не выровняется по всей длине и не станет равной T_0.

При произвольной зависимости потока $F(t)$ от времени температурное поле будет некоторым сложным образом отслеживать поток.

Замечание. Варьируя параметры задачи, следует обращать внимание на то, что решения, в которых температура превышает примерно 2000К, физического смысла не имеют и практического интереса не представляют.

Результаты работы.

1. Алгоритм и программа, реализующие решение сформулированной задачи методом конечных разностей.

2. Исследование по выбору оптимальных шагов по времени τ и пространству h. Шаги должны быть максимально большими при сохранении устойчивости разностной схемы и заданной точности расчета.

Рассмотреть влияние на получаемые результаты амплитуды импульса $F_{\max}$ и времени $t_{\max}$ (определяют крутизну фронтов и длительность импульса).

Точность расчета можно оценить разными способами.

1) Уменьшая шаги и наблюдая сходимость решений в фиксированной пространственной точке и в фиксированный момент времени.

2) Проверяя, соблюдается ли при выбранных шагах h,τ баланс мощности после выхода на стационарное распределение температуры (в установившемся режиме), реализующееся при $F(t)$=const, т.е. в этом режиме должно выполняться условие: отводимая мощность равна подводимой. Имеем

$$\pi R^2(-F_0+F_N)+2\pi R\int_0^l \alpha(T(x,t_M)-T_0)\,dx = \pi R^2 F_0(t)\int_0^l k(T(x))\, e^{-k(T(x))\,x}\,dx$$

,

окончательно

$$\left| \frac{-F_0+F_N+\dfrac{2}{R}\int\int_0^l \alpha[T(x,t_M)-T_0]dx}{F_0(t)\int_0^l k(T(x))\, e^{-k(T(x))\,x}\,dx} - 1 \right| \le \varepsilon\,.$$

Здесь

$$F_0 = -\lambda(T(0))\,\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0},\quad F_N = -\lambda(T(0))\,\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l}.$$

Задать точность ε примерно 10^{-2}. Здесь t_M - время выхода на стационарный режим, т.е. когда температура перестает меняться с заданной точностью.

Замечание. Варьируя параметры задачи, следует иметь ввиду, что решения, в которых температура превышает значения примерно 2000К, физического смысла не имеют и практического интереса не представляют.

3. График зависимости температуры $T(0,t)$ при 3-4 значениях параметров a_2 и/или b_2 теплоемкости.

Справка. С ростом теплоемкости темп нарастания температуры снижается.

4. График зависимости температуры $T(0,t)$ (т.е. при $x = 0$) в частотном режиме теплового нагружения. Импульсы следуют один за другим с заданной частотой ν (частота определяется количеством импульсов в 1 секунду).

Показать, что при большом количестве импульсов температурное поле выходит на регулярный режим, т.е. начинает в точности воспроизводиться от импульса к импульсу.

Продемонстрировать, как по мере роста частоты импульсов размах колебаний температуры уменьшается (вплоть до нуля), т.е. реализуется квазистационарный режим. Проследить, чтобы импульсы не перекрывались на уровне 0.35 от F_{max}.

Методика оценки работы.

Модуль 3, срок - 17-я неделя.

1. Разработана программа, проведено тестирование, выполнены пункты 1-3 Задания, обнаружено понимание технологии исследования в математическом моделировании - 18 баллов (минимум).

2. Проведено детальное исследование по всем пунктам задания и любых других вопросов, сформулированных автором в инициативном порядке по теме работы в различных компонентах вычислительного эксперимента: модель, алгоритм, программа, исследование предметной области – 19-30 баллов (максимум).