Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №1 по дисциплине «Моделирование»

Тема Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ

Студент Зайцева А. А.

Группа ИУ7-62Б

Оценка (баллы) ____________

Преподаватель Градов В. М.

Москва — 2022 г.

1 Задание

Цель работы.

Получение навыков решения задачи Коши для ОДУ методами Пикара и явными методами первого порядка точности (Эйлера) и второго порядка точности (Рунге-Кутты).

Исходные данные.

ОДУ 1.1, не имеющее аналитического решения:

$$\begin{cases} u'(x) = u^2 + x^2 \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Результат работы программы.

1. Таблица, содержащая значения аргумента с заданным шагом в интервале [0, xmax] и результаты расчета функции u(x) в приближениях Пикара (от 1-го до 4-го), а также численными методами. Границу интервала xmax выбирать максимально возможной из условия, чтобы численные методы обеспечивали точность вычисления решения уравнения u(x) до второго знака после запятой.

2. График функции в диапазоне [-xmax, xmax].

2 Теоретическая часть

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n-ого порядка имеет вид 2.1:

$$F(x, u', u'', ..., u^{(n)} = 0). \tag{2.1}$$

Задача Коши состоит в нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям 2.2:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u) \\ u(\xi) = \eta \end{cases} \tag{2.2}$$

Рассмотрим методы решения этой задачи.

2.1 Метод Пикара

Метод Пикара является приближенно-аналитическим. Идея состоит в том, чтобы заменить дифференциальное уравнение интегральным 2.3:.

$$y^s(x) = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y^{s-1}(t))dt \tag{2.3}$$

$$y^{(0)} = \eta \tag{2.4}$$

Для данного в задании ОДУ 1.1:

$$y^{(1)} = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} \tag{2.5}$$

$$y^{(2)} = 0 + \int_0^x \left[\left(t^2 + \frac{t^3}{3} \right)^2 \right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} y^{(3)} = 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^7}{63} + \frac{t^3}{3} \right)^2 \right] dt = \\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$y^{(4)} = 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535}\right)^2\right] dt =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{13x^{15}}{218295} + \frac{82x^{19}}{37328445} + \tag{2.8}$$
$$+ \frac{662x^{23}}{10438212015} + \frac{4x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876902975}$$

2.2 Метод Эйлера

Метод Эйлера – это явный (численный) метод первого порядка точности, использующий формулу 2.9:

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n). \tag{2.9}$$

2.3 Метод Рунге-Кутты

Метод Ругнге-Кутты – это явный (численный) метод второго порядка точности, использующий формулу 2.10:

$$y_{n+1} = y_n + h * [(1 - \alpha)k_1 + \alpha * k_2], \tag{2.10}$$

где $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha}k_1)$, $\alpha = 1$ или $\frac{1}{2}$

3 Исходный код алгоритмов

```
class UDESolver:
  def __init__(self, x_start, y_start, x_max, step, f,
     f_approximation_number_s):
    if (x_start < x_max) != (step > 0):
      raise ValueError('Ошибка вшаге ')

  self.x_start = x_start
  self.y_start = y_start
  self.x_max = x_max
  self.step = step
  self.f = f
  self.f_approximation_number_s = f_approximation_number_s
  self.cmp_func = lambda x1, x2: x1 < x2 + EPS

  def reverse_move(self):
    self.step *= -1
    self.x_max *= -1
    self.cmp_func = lambda x1, x2: x1 > x2 - EPS

  def x_range(self):
    result = []
    x = self.x_start
    while self.cmp_func(x, self.x_max):
      result.append(x)
      x += self.step
    return result

    def solve_euler(self):
    result = []
    x, y = self.x_start, self.y_start

    while self.cmp_func(x, self.x_max):
      result.append(y)

      y = y + self.step * self.f(x, y)
      x += self.step

    return result

  def solve_runge_kutta(self):
    a = 0.5
    result = []
    x, y = self.x_start, self.y_start

    while self.cmp_func(x, self.x_max):
```

```
            result.append(y)

            k1 = self.f(x, y)
            k2 = self.f(x + self.step / (2 * a), y + self.step * k1 / (2 *
                a))
            y += self.step * ((1 - a) * k1 + a * k2)
            x += self.step

        return result

    def solve_picar(self, approx):

        result = []
        x, y = self.x_start, self.y_start

        while self.cmp_func(x, self.x_max):
            result.append(y)
            x += self.step
            y = f_approximation_number_s(x, approx)

        return result


def function(x, u):
    return x * x + u * u

def function_approximation_number_s(x, s):
    first_sum = 0
    for i in range(1, s + 1):
        chisl = pow(x, pow(2, i + 1) - 1)
        znam = 1
        for k in range(-1, i - 2 + 1):
            znam *= (pow((pow(2, i - k) - 1), pow(2, k + 1)))
        first_sum += (chisl / znam)

    second_sum = 0
    for i in range(2, s + 1):
        chisl = pow(x, pow(2, i + 1) - 1)
        znam = 1
        for k in range(-1, i - 2 + 1):
            znam *= (pow((pow(2, i - k) - 1), pow(2, k + 1)))
        first_mult = chisl / znam

        second_mult = 0
        for j in range(i + 1, s + 1):
            chisl = pow(x, pow(2, j + 1) - 1)
            znam = 1
            for p in range(-1, j - 2 + 1):
```

```
            znam *= (pow((pow(2, j - p) - 1), pow(2, j + 1)))
        second_mult += (chisl / znam)
    second_sum += (first_mult * second_mult)

second_sum *= 2

return first_sum + second_sum
```

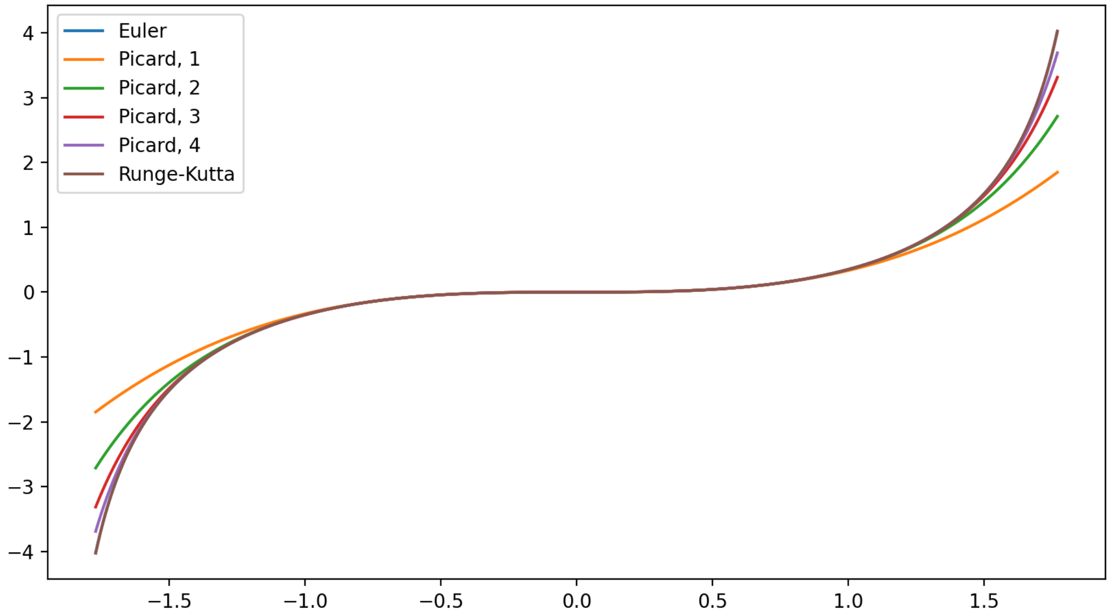
Приближение Пикара высчитывается по выведенной формуле:

$$y^{(S)} = \sum_{i=1}^{S} \frac{x^{[2^{(i+1)}-1]}}{\prod_{k=-1}^{i-2} (2^{i-k}-1)^{2^{[k+1]}}} + 2\sum_{i=2}^{S} \frac{x^{[2^{(i+1)}-1]}}{\prod_{k=-1}^{i-2} (2^{i-k}-1)^{2^{[k+1]}}} \cdot \sum_{j=i+1}^{S} \frac{x^{[2^{(j+1)}-1]}}{\prod_{p=-1}^{j-2} (2^{j-p}-1)^{2^{[p+1]}}}$$

4 Результат работы программы

Исходные данные: h=10^{-4}, xmax = 1.77, x0=0, y0 = 0, округление при выводе - до 2 знака после запятой, шаг вывода=0.01.

На рисунке 4 приведен график функции в диапазоне [-xmax; xmax].



Ниже приведена таблица с полученными данным.

x	Euler	Runge–Kutta	Picard, 1	Picard, 2	Picard, 3	Picard, 4
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

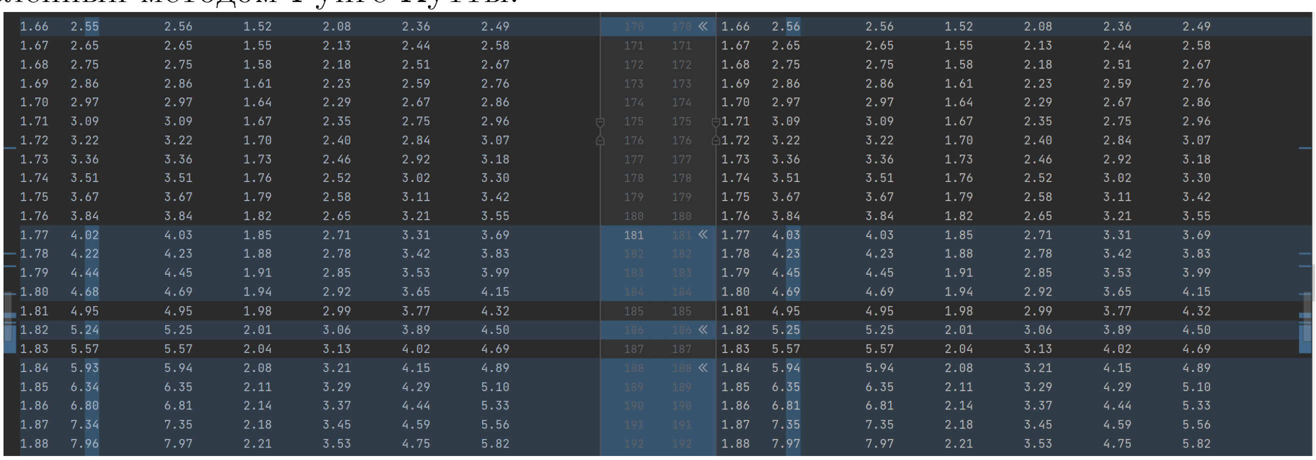
0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.23	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.24	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.25	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.26	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.27	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.28	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.29	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.30	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.31	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.32	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.33	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.34	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.35	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.36	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.37	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.38	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.39	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.40	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.41	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.42	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.43	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.44	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.45	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.46	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.47	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.48	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.49	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.50	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.51	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.52	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
0.53	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
0.54	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
0.55	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
0.56	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
0.57	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
0.58	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
0.59	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
0.60	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
0.61	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
0.62	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
0.63	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
0.64	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09

0.65	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
0.66	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
0.67	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
0.68	0.11	0.11	0.10	0.11	0.11	0.11
0.69	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11
0.70	0.12	0.12	0.11	0.12	0.12	0.12
0.71	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12
0.72	0.13	0.13	0.12	0.13	0.13	0.13
0.73	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13
0.74	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
0.75	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
0.76	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
0.77	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
0.78	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16
0.79	0.17	0.17	0.16	0.17	0.17	0.17
0.80	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17
0.81	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
0.82	0.19	0.19	0.18	0.19	0.19	0.19
0.83	0.19	0.20	0.19	0.19	0.20	0.20
0.84	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
0.85	0.21	0.21	0.20	0.21	0.21	0.21
0.86	0.22	0.22	0.21	0.22	0.22	0.22
0.87	0.23	0.23	0.22	0.23	0.23	0.23
0.88	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23
0.89	0.24	0.24	0.23	0.24	0.24	0.24
0.90	0.25	0.25	0.24	0.25	0.25	0.25
0.91	0.26	0.26	0.25	0.26	0.26	0.26
0.92	0.27	0.27	0.26	0.27	0.27	0.27
0.93	0.28	0.28	0.27	0.28	0.28	0.28
0.94	0.29	0.29	0.28	0.29	0.29	0.29
0.95	0.30	0.30	0.29	0.30	0.30	0.30
0.96	0.31	0.31	0.29	0.31	0.31	0.31
0.97	0.32	0.32	0.30	0.32	0.32	0.32
0.98	0.33	0.33	0.31	0.33	0.33	0.33
0.99	0.34	0.34	0.32	0.34	0.34	0.34
1.00	0.35	0.35	0.33	0.35	0.35	0.35
1.01	0.36	0.36	0.34	0.36	0.36	0.36
1.02	0.37	0.37	0.35	0.37	0.37	0.37
1.03	0.39	0.39	0.36	0.38	0.39	0.39
1.04	0.40	0.40	0.37	0.40	0.40	0.40
1.05	0.41	0.41	0.39	0.41	0.41	0.41
1.06	0.42	0.42	0.40	0.42	0.42	0.42
1.07	0.44	0.44	0.41	0.43	0.44	0.44
1.08	0.45	0.45	0.42	0.45	0.45	0.45
1.09	0.46	0.46	0.43	0.46	0.46	0.46
1.10	0.48	0.48	0.44	0.47	0.48	0.48
1.11	0.49	0.49	0.46	0.49	0.49	0.49
1.12	0.51	0.51	0.47	0.50	0.51	0.51

1.13	0.52	0.52	0.48	0.52	0.52	0.52
1.14	0.54	0.54	0.49	0.53	0.54	0.54
1.15	0.55	0.55	0.51	0.55	0.55	0.55
1.16	0.57	0.57	0.52	0.57	0.57	0.57
1.17	0.59	0.59	0.53	0.58	0.59	0.59
1.18	0.60	0.60	0.55	0.60	0.60	0.60
1.19	0.62	0.62	0.56	0.62	0.62	0.62
1.20	0.64	0.64	0.58	0.63	0.64	0.64
1.21	0.66	0.66	0.59	0.65	0.66	0.66
1.22	0.68	0.68	0.61	0.67	0.68	0.68
1.23	0.70	0.70	0.62	0.69	0.70	0.70
1.24	0.72	0.72	0.64	0.71	0.72	0.72
1.25	0.74	0.74	0.65	0.73	0.74	0.74
1.26	0.76	0.76	0.67	0.75	0.76	0.76
1.27	0.78	0.78	0.68	0.77	0.78	0.78
1.28	0.81	0.81	0.70	0.79	0.80	0.81
1.29	0.83	0.83	0.72	0.81	0.83	0.83
1.30	0.85	0.85	0.73	0.83	0.85	0.85
1.31	0.88	0.88	0.75	0.85	0.87	0.88
1.32	0.90	0.90	0.77	0.88	0.90	0.90
1.33	0.93	0.93	0.78	0.90	0.92	0.93
1.34	0.96	0.96	0.80	0.93	0.95	0.95
1.35	0.98	0.98	0.82	0.95	0.98	0.98
1.36	1.01	1.01	0.84	0.98	1.01	1.01
1.37	1.04	1.04	0.86	1.00	1.03	1.04
1.38	1.07	1.07	0.88	1.03	1.06	1.07
1.39	1.10	1.10	0.90	1.05	1.09	1.10
1.40	1.13	1.13	0.91	1.08	1.12	1.13
1.41	1.17	1.17	0.93	1.11	1.16	1.16
1.42	1.20	1.20	0.95	1.14	1.19	1.20
1.43	1.23	1.24	0.97	1.17	1.22	1.23
1.44	1.27	1.27	1.00	1.20	1.26	1.27
1.45	1.31	1.31	1.02	1.23	1.29	1.31
1.46	1.35	1.35	1.04	1.26	1.33	1.34
1.47	1.39	1.39	1.06	1.29	1.37	1.38
1.48	1.43	1.43	1.08	1.33	1.41	1.42
1.49	1.47	1.47	1.10	1.36	1.45	1.47
1.50	1.52	1.52	1.12	1.40	1.49	1.51
1.51	1.56	1.56	1.15	1.43	1.53	1.56
1.52	1.61	1.61	1.17	1.47	1.57	1.60
1.53	1.66	1.66	1.19	1.51	1.62	1.65
1.54	1.71	1.71	1.22	1.54	1.67	1.70
1.55	1.77	1.77	1.24	1.58	1.71	1.76
1.56	1.82	1.82	1.27	1.62	1.76	1.81
1.57	1.88	1.88	1.29	1.66	1.82	1.87
1.58	1.94	1.95	1.31	1.70	1.87	1.92
1.59	2.01	2.01	1.34	1.75	1.92	1.99
1.60	2.08	2.08	1.37	1.79	1.98	2.05

1.61	2.15	2.15	1.39	1.84	2.04	2.12
1.62	2.22	2.22	1.42	1.88	2.10	2.18
1.63	2.30	2.30	1.44	1.93	2.16	2.26
1.64	2.38	2.38	1.47	1.98	2.23	2.33
1.65	2.46	2.47	1.50	2.03	2.29	2.41
1.66	2.55	2.56	1.52	2.08	2.36	2.49
1.67	2.65	2.65	1.55	2.13	2.44	2.58
1.68	2.75	2.75	1.58	2.18	2.51	2.67
1.69	2.86	2.86	1.61	2.23	2.59	2.76
1.70	2.97	2.97	1.64	2.29	2.67	2.86
1.71	3.09	3.09	1.67	2.35	2.75	2.96
1.72	3.22	3.22	1.70	2.40	2.84	3.07
1.73	3.36	3.36	1.73	2.46	2.92	3.18
1.74	3.51	3.51	1.76	2.52	3.02	3.30
1.75	3.67	3.67	1.79	2.58	3.11	3.42
1.76	3.84	3.84	1.82	2.65	3.21	3.55
1.77	4.02	4.03	1.85	2.71	3.31	3.69

На рисунке 4 приведен вывод программы при шагах 1e-4 (слева) и 1e-5 (справа). Порядок колонок сохранен. Нас интересуют первые 3 (справа и слева) – значение аргумента, результат, вычисленный методом Эйлера и результат, вычисленный методом Рунге-Кутты.



1.66	2.55	2.56	1.52	2.08	2.36	2.49
1.67	2.65	2.65	1.55	2.13	2.44	2.58
1.68	2.75	2.75	1.58	2.18	2.51	2.67
1.69	2.86	2.86	1.61	2.23	2.59	2.76
1.70	2.97	2.97	1.64	2.29	2.67	2.86
1.71	3.09	3.09	1.67	2.35	2.75	2.96
1.72	3.22	3.22	1.70	2.40	2.84	3.07
1.73	3.36	3.36	1.73	2.46	2.92	3.18
1.74	3.51	3.51	1.76	2.52	3.02	3.30
1.75	3.67	3.67	1.79	2.58	3.11	3.42
1.76	3.84	3.84	1.82	2.65	3.21	3.55
1.77	4.02	4.03	1.85	2.71	3.31	3.69
1.78	4.22	4.23	1.88	2.78	3.42	3.83
1.79	4.44	4.45	1.91	2.85	3.53	3.99
1.80	4.68	4.69	1.94	2.92	3.65	4.15
1.81	4.95	4.95	1.98	2.99	3.77	4.32
1.82	5.24	5.25	2.01	3.06	3.89	4.50
1.83	5.57	5.57	2.04	3.13	4.02	4.69
1.84	5.93	5.94	2.08	3.21	4.15	4.89
1.85	6.34	6.35	2.11	3.29	4.29	5.10
1.86	6.80	6.81	2.14	3.37	4.44	5.33
1.87	7.34	7.35	2.18	3.45	4.59	5.56
1.88	7.96	7.97	2.21	3.53	4.75	5.82

1.66	2.56	2.56	1.52	2.08	2.36	2.49
1.67	2.65	2.65	1.55	2.13	2.44	2.58
1.68	2.75	2.75	1.58	2.18	2.51	2.67
1.69	2.86	2.86	1.61	2.23	2.59	2.76
1.70	2.97	2.97	1.64	2.29	2.67	2.86
1.71	3.09	3.09	1.67	2.35	2.75	2.96
1.72	3.22	3.22	1.70	2.40	2.84	3.07
1.73	3.36	3.36	1.73	2.46	2.92	3.18
1.74	3.51	3.51	1.76	2.52	3.02	3.30
1.75	3.67	3.67	1.79	2.58	3.11	3.42
1.76	3.84	3.84	1.82	2.65	3.21	3.55
1.77	4.03	4.03	1.85	2.71	3.31	3.69
1.78	4.23	4.23	1.88	2.78	3.42	3.83
1.79	4.45	4.45	1.91	2.85	3.53	3.99
1.80	4.69	4.69	1.94	2.92	3.65	4.15
1.81	4.95	4.95	1.98	2.99	3.77	4.32
1.82	5.25	5.25	2.01	3.06	3.89	4.50
1.83	5.57	5.57	2.04	3.13	4.02	4.69
1.84	5.94	5.94	2.08	3.21	4.15	4.89
1.85	6.35	6.35	2.11	3.29	4.29	5.10
1.86	6.81	6.81	2.14	3.37	4.44	5.33
1.87	7.35	7.35	2.18	3.45	4.59	5.56
1.88	7.97	7.97	2.21	3.53	4.75	5.82

На рисунке видно, что результаты, полученные методом Эйлера на одних и тех же аргументах, но с разным шагом, начинают сильно отличаться при x=1.77, поэтому именно это значение и выбрано в качетсве максимального.

5 Ответы на вопросы

1. Укажите интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений Пикара. Точность результата оценивать до второй цифры после запятой. Объяснить свой ответ.

i-е приближение Пикара можно считать решением уравнения до тех пор, пока совпадают результаты для i-го и (i+1)-го приближений до второго знака после запятой.

Основываясь на таблице результатов:

- 1-ое приближение можно считать решением на отрезке [0, 0.84];
- 2-ое приближение можно считать решением на отрезке [0, 1.06];
- 3-ое приближение можно считать решением на отрезке [0, 1.37];
- для определения промежутка, на котором 4-ое приближение можно считать решением, необходимо использовать 5-ое приближение. При его расчете происходит ошибка OverflowError: int too large to convert to float: second_mult += (chisl / znam)

2. Пояснить, каким образом можно доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах.

Путем уменьшения шага для того же метода. Если при меньшем шаге этим же методом получен примерно такой же результат, значит и при большем шаге был получен корректный ответ.

Рассмотрим, например, значение функции при x=1.

По Эйлеру:

- при шаге=10^{-1} y=0.29,
- при шаге=10^{-2} y=0.34,
- при шаге=10^{-3} y=0.35,
- при шаге=10^{-4} y=0.35.

По Рунге-Кутта:

- при шаге=10^{-1} y=0.35,

- при шаге$=10^{-2}$ y=0.35.

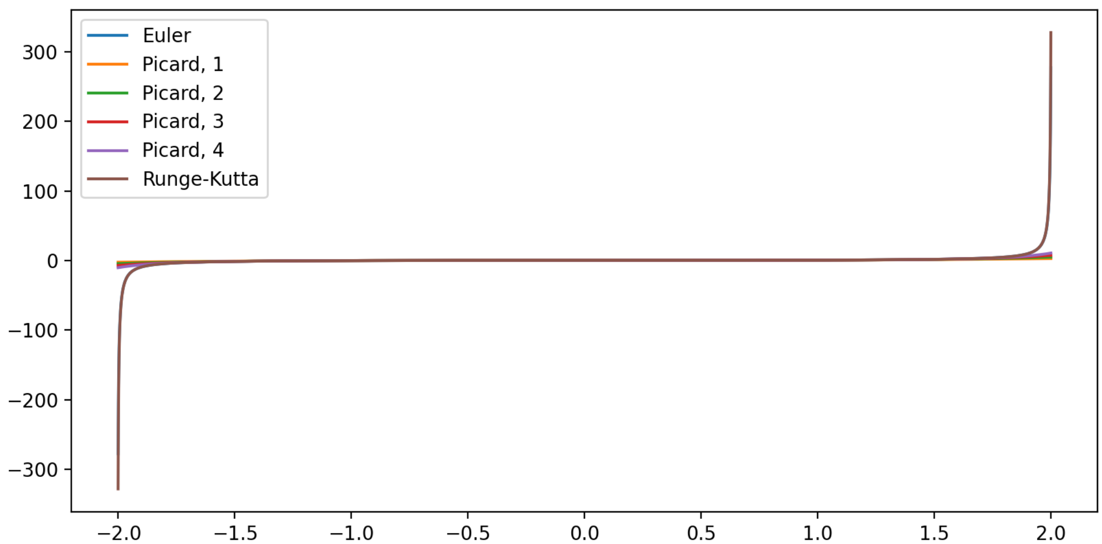
Таким образом, правильным ответом является y=0.35, причем при вычислении по Рунге-Кутта можно остановиться на шаге 10^{-1}, при вычислении по Эйлеру – на шаге 10^{-3}

3. Каково значение решения уравнения в точке x=2, т.е. привести значение u(2)

$$u(2) \approx 317.72 \tag{5.1}$$

4. Дайте оценку точки разрыва решения уравнения.

На рисунке 5 приведен график функции в диапазоне [-2.0001; 2.0001].



По графику видно, что x=-2 и x=2 являются точками разрыва (2 рода) решения уравнения, так как численные методы Эйлера и Рунге-Кутта асимптотически растут при приближении аргумента к этим значениям справа и слева, соответственно.

5. Покажите, что метод Пикара сходится к точному аналитическому решению уравнения:

5) $\begin{cases} u' = x^2 + u \\ u(0) = 0 \end{cases}$

Аналитическое решение:

$u' + a(x)u = b(x)$ - лин ур-е 1 порядка,

где $a(x) = -1$, $b(x) = x^2$

1) пусть $u = fg$; $u' = fg' + gf'$

$$f'g + gf' - fg = x^2$$

$$g'f + g(f' - f) = x^2$$

1.1) $f' - f = 0$ $\quad \frac{df}{f} = dx \Rightarrow f = e^x$

1.2) $g'f + g(f' - f) = x^2$ при $f = e^x$ и $(f' - f) = 0$

$$g' e^x = x^2$$

$$g = \int \frac{x^2}{e^x} dx = C - \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x}$$

2) Обратная замена

$\cancel{g = \frac{u}{f},\ f = e^x}$ $\quad u = fg = e^x\left(C - \frac{x^2 + 2x + 2}{e^x}\right) = Ce^x - x^2 - 2x - 2$

3) подставим нач. значения:

$$0 = Ce^0 - 0^2 - 2 \cdot 0 - 2 = C - 2 \Rightarrow C = 2$$

Ответ: $u = 2e^x - x^2 - 2x - 2$

Метод Пикара

$$y^{(1)} = 0 + \int_0^x (t^2 + 0)\,dt = \frac{x^3}{3}$$

$$y^{(2)} = 0 + \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^3}{3}\right)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{12}$$

$$y^{(3)} = 0 + \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{12}\right)dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{60}$$

$$\cancel{y^{(n)} = \frac{t^n}{n} + \frac{t^{(n+1)}}{n(n+1)} + \frac{t^{(n+2)}}{n(n+1)(n+2)} + \ldots}$$

[ряд Тейлора $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$]

$$y^{(n)} = 2\left(\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + \frac{t^{(n+2)}}{(n+2)!}\right) = 2\left(e^t - \frac{t^2}{2!} - \frac{t}{1!} - 1\right) = 2e^t - t^2 - 2t - 2$$