Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №1 по дисциплине «Моделирование»

Тема Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ

Студент Зайцева А. А.

Группа ИУ7-62Б

Оценка (баллы) ______________________

Преподаватель Градов В. М.

Москва — 2022 г.

1 Задание

Цель работы.

Получение навыков решения задачи Коши для ОДУ методами Пикара и явными методами первого порядка точности (Эйлера) и второго порядка точности (Рунге-Кутты).

Исходные данные.

ОДУ 1.1, не имеющее аналитического решения:

$$\begin{cases} u'(x) = u^2 + x^2 \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Результат работы программы.

1. Таблица, содержащая значения аргумента с заданным шагом в интервале [0, xmax] и результаты расчета функции u(x) в приближениях Пикара (от 1-го до 4-го), а также численными методами. Границу интервала xmax выбирать максимально возможной из условия, чтобы численные методы обеспечивали точность вычисления решения уравнения u(x) до второго знака после запятой.

2. График функции в диапазоне [-xmax, xmax].

2 Теоретическая часть

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n-ого порядка имеет вид 2.1:

$$F(x, u', u'', ..., u^{(n)} = 0). \tag{2.1}$$

Задача Коши состоит в нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям 2.2:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u) \\ u(\xi) = \eta \end{cases} \tag{2.2}$$

Рассмотрим методы решения этой задачи.

2.1 Метод Пикара

Метод Пикара является приближенно-аналитическим. Идея состоит в том, чтобы заменить дифференциальное уравнение интегральным 2.3:.

$$y^s(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y^{s-1}(t))dt \tag{2.3}$$

$$y^{(0)} = \eta \tag{2.4}$$

Для данного в задании ОДУ 1.1:

$$y^{(1)} = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} \tag{2.5}$$

$$y^{(2)} = 0 + \int_0^x \left[\left(t^2 + \frac{t^3}{3}\right)^2\right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} y^{(3)} = 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^7}{63} + \frac{t^3}{3}\right)^2\right] dt = \\ \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$y^{(4)} = 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535}\right)^2\right] dt =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{13x^{15}}{218295} + \frac{82x^{19}}{37328445} + \qquad (2.8)$$
$$+ \frac{662x^{23}}{10438212015} + \frac{4x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876903905}$$

2.2 Метод Эйлера

Метод Эйлера – это явный (численный) метод первого порядка точности, использующий формулу 2.9:

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n). \qquad (2.9)$$

2.3 Метод Рунге-Кутты

Метод Ругнге-Кутты – это явный (численный) метод второго порядка точности, использующий формулу 4.1:

$$y_{n+1} = y_n + h * [(1 - \alpha)k_1 + \alpha * k_2], \qquad (2.10)$$

где $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha}k_1)$, $\alpha = 1$ или $\frac{1}{2}$

3 Листинги реализованных методов

4 Ответы на вопросы

1. Для того, чтобы указать интервал значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений проанализируем полученные значения. Так как нам дано начальное приближение, то левой границей будет 0. Для определения правой границы границы мы будем анализировать полученные решения методом Пикара для конкретного приближения и сравнивать со значениями более высоких порядков приближения и с результатами численных методов при определенном шаге. В листинге был подобран шаг 1e-4. Для первого приближения искомым интервалом будет [0, 0.89], для второго [0, 1.12], для третьего [0, 1.39], для четвертого [0, 1.4]

2. В численных методах правильность полученного результата, при фиксированном значении аргумента, доказывается путем уменьшения шага. Правильно полученный результат - это когда при уменьшение шага значение аргумента незначительно (или вообще) не меняется.

3. Примерное значение функции при x = 2.

$$u(2) \approx 316.713 \tag{4.1}$$