Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №1 по дисциплине «Моделирование»

Тема Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ

Студент Зайцева А. А.

Группа ИУ7-62Б

Оценка (баллы) ______________________

Преподаватель Градов В. М.

Москва — 2022 г.

1 Задание

Цель работы.

Получение навыков решения задачи Коши для ОДУ методами Пикара и явными методами первого порядка точности (Эйлера) и второго порядка точности (Рунге-Кутты).

Исходные данные.

ОДУ 1.1, не имеющее аналитического решения:

$$\begin{cases} u'(x) = u^2 + x^2 \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Результат работы программы.

1. Таблица, содержащая значения аргумента с заданным шагом в интервале [0, xmax] и результаты расчета функции u(x) в приближениях Пикара (от 1-го до 4-го), а также численными методами. Границу интервала xmax выбирать максимально возможной из условия, чтобы численные методы обеспечивали точность вычисления решения уравнения u(x) до второго знака после запятой.

2. График функции в диапазоне [-xmax, xmax].

2 Теоретическая часть

Обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) n-ого порядка имеет вид 2.1:

$$F(x, u', u'', ..., u^{(n)} = 0). \tag{2.1}$$

Задача Коши состоит в нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям 2.2:

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u) \\ u(\xi) = \eta \end{cases} \tag{2.2}$$

Рассмотрим методы решения этой задачи.

2.1 Метод Пикара

Метод Пикара является приближенно-аналитическим. Идея состоит в том, чтобы заменить дифференциальное уравнение интегральным 2.3:.

$$y^s(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y^{s-1}(t))dt \tag{2.3}$$

$$y^{(0)} = \eta \tag{2.4}$$

Для данного в задании ОДУ 1.1:

$$y^{(1)} = 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} \tag{2.5}$$

$$y^{(2)} = 0 + \int_0^x \left[\left(t^2 + \frac{t^3}{3}\right)^2\right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \tag{2.6}$$

$$y^{(3)} = 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^7}{63} + \frac{t^3}{3}\right)^2\right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} \tag{2.7}$$

$$y^{(4)} = 0 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} + \frac{2t^{11}}{2079} + \frac{t^{15}}{59535}\right)^2\right] dt =$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{13x^{15}}{218295} + \frac{82x^{19}}{37328445} +$$
$$+ \frac{662x^{23}}{10438212015} + \frac{4x^{27}}{3341878155} + \frac{x^{31}}{109876903905} \tag{2.8}$$

2.2 Метод Эйлера

Метод Эйлера – это явный (численный) метод первого порядка точности, использующий формулу 2.9:

$$y_{n+1} = y_n + h * f(x_n, y_n). \tag{2.9}$$

2.3 Метод Рунге-Кутты

Метод Ругнге-Кутты – это явный (численный) метод второго порядка точности, использующий формулу 2.10:

$$y_{n+1} = y_n + h * [(1-\alpha)k_1 + \alpha * k_2], \tag{2.10}$$

где $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + \frac{h}{2\alpha}, y_n + \frac{h}{2\alpha}k_1)$, $\alpha = 1$ или $\frac{1}{2}$

3 Исходный код алгоритмов

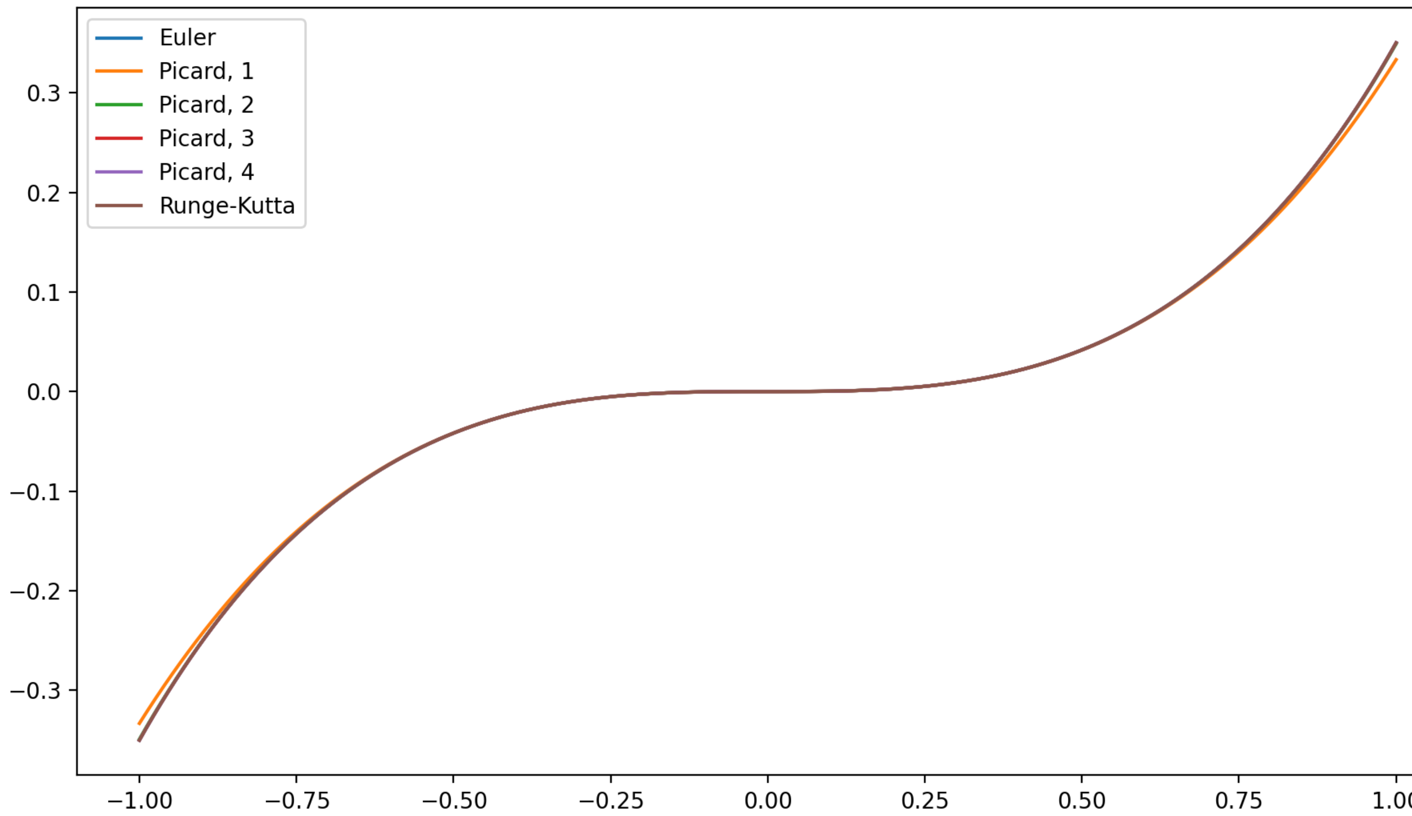
```
class UDESolver:
  def __init__(self, x_start, y_start, x_max, step, f, f_derivatives):
    if (x_start < x_max) != (step > 0):
      raise ValueError('Ошибка вшаге ')

  self.x_start = x_start
  self.y_start = y_start
  self.x_max = x_max
  self.step = step
  self.f = f
  self.f_derivatives = f_derivatives
  self.cmp_func = lambda x1, x2: x1 < x2 + EPS

  def reverse_move(self):
    self.step *= -1
    self.x_max *= -1
    self.cmp_func = lambda x1, x2: x1 > x2 - EPS

  def x_range(self):
    result = []
    x = self.x_start
    while self.cmp_func(x, self.x_max):
      result.append(x)
      x += self.step
    return result

    def solve_euler(self):
    result = []
    x, y = self.x_start, self.y_start

    while self.cmp_func(x, self.x_max):
      result.append(y)

      y = y + self.step * self.f(x, y)
      x += self.step

    return result

  def solve_runge_kutta(self):
    a = 0.5
    result = []
    x, y = self.x_start, self.y_start

    while self.cmp_func(x, self.x_max):
```

```
      result.append(y)

      k1 = self.f(x, y)
      k2 = self.f(x + self.step / (2 * a), y + self.step * k1 / (2 * a))
      y += self.step * ((1 - a) * k1 + a * k2)
      x += self.step

    return result

  def solve_picar(self, approx):
    func = self.f_derivatives[approx - 1]

    result = []
    x, y = self.x_start, self.y_start

    while self.cmp_func(x, self.x_max):
      result.append(y)
      x += self.step
      y = func(x)

    return result


def function(x, u):
  return x * x + u * u


def fd1(x):
  return pow(x, 3) / 3


def fd2(x):
  return fd1(x) + pow(x, 7) / 63


def fd3(x):
  return fd2(x) + 2 * pow(x, 11) / 2079 + pow(x, 15) / 59535


def fd4(x):
  return (fd2(x) + 2 * pow(x, 11) / 2079 + 13 * pow(x, 15) / 218295 +
  82 * pow(x, 19) / 37328445 + 662 * pow(x, 23) / 10438212015 +
  4 * pow(x, 27) / 3341878155 + pow(x, 31) / 109876903905)
```

4 Результат работы программы

Исходные данные: h=10^{-4}, xmax = 1, x0=0, y0 = 0, округление при выводе - до 2 знака после запятой, шаг вывода=0.01.

На рисунке 4 приведен график функции в диапазоне [-1;1].



Ниже приведена таблица с полученными данными (xmax увеличен до 1.23 для выполнения последующих заданий).

x	Euler	Runge—Kutta	Picard, 1	Picard, 2	Picard, 3	Picard, 4
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.12	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.18	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.20	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.23	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.24	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.25	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.26	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.27	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.28	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.29	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.30	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.31	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.32	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.33	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.34	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.35	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
0.36	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.37	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.38	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.39	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.40	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.41	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.42	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.43	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.44	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.45	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.46	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.47	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
0.48	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.49	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.50	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.51	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.52	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
0.53	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
0.54	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
0.55	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
0.56	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
0.57	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06

0.58	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
0.59	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
0.60	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
0.61	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
0.62	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
0.63	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
0.64	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
0.65	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09	0.09
0.66	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
0.67	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
0.68	0.11	0.11	0.10	0.11	0.11	0.11
0.69	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11
0.70	0.12	0.12	0.11	0.12	0.12	0.12
0.71	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12
0.72	0.13	0.13	0.12	0.13	0.13	0.13
0.73	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13	0.13
0.74	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
0.75	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
0.76	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
0.77	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15	0.15
0.78	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16	0.16
0.79	0.17	0.17	0.16	0.17	0.17	0.17
0.80	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17	0.17
0.81	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
0.82	0.19	0.19	0.18	0.19	0.19	0.19
0.83	0.19	0.20	0.19	0.19	0.20	0.20
0.84	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
0.85	0.21	0.21	0.20	0.21	0.21	0.21
0.86	0.22	0.22	0.21	0.22	0.22	0.22
0.87	0.23	0.23	0.22	0.23	0.23	0.23
0.88	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23
0.89	0.24	0.24	0.23	0.24	0.24	0.24
0.90	0.25	0.25	0.24	0.25	0.25	0.25
0.91	0.26	0.26	0.25	0.26	0.26	0.26
0.92	0.27	0.27	0.26	0.27	0.27	0.27
0.93	0.28	0.28	0.27	0.28	0.28	0.28
0.94	0.29	0.29	0.28	0.29	0.29	0.29
0.95	0.30	0.30	0.29	0.30	0.30	0.30
0.96	0.31	0.31	0.29	0.31	0.31	0.31
0.97	0.32	0.32	0.30	0.32	0.32	0.32
0.98	0.33	0.33	0.31	0.33	0.33	0.33
0.99	0.34	0.34	0.32	0.34	0.34	0.34
1.00	0.35	0.35	0.33	0.35	0.35	0.35
1.01	0.36	0.36	0.34	0.36	0.36	0.36
1.02	0.37	0.37	0.35	0.37	0.37	0.37
1.03	0.39	0.39	0.36	0.38	0.39	0.39
1.04	0.40	0.40	0.37	0.40	0.40	0.40
1.05	0.41	0.41	0.39	0.41	0.41	0.41

1.06	0.42	0.42	0.40	0.42	0.42	0.42
1.07	0.44	0.44	0.41	0.43	0.44	0.44
1.08	0.45	0.45	0.42	0.45	0.45	0.45
1.09	0.46	0.46	0.43	0.46	0.46	0.46
1.10	0.48	0.48	0.44	0.47	0.48	0.48
1.11	0.49	0.49	0.46	0.49	0.49	0.49
1.12	0.51	0.51	0.47	0.50	0.51	0.51
1.13	0.52	0.52	0.48	0.52	0.52	0.52
1.14	0.54	0.54	0.49	0.53	0.54	0.54
1.15	0.55	0.55	0.51	0.55	0.55	0.55
1.16	0.57	0.57	0.52	0.57	0.57	0.57
1.17	0.59	0.59	0.53	0.58	0.59	0.59
1.18	0.60	0.60	0.55	0.60	0.60	0.60
1.19	0.62	0.62	0.56	0.62	0.62	0.62
1.20	0.64	0.64	0.58	0.63	0.64	0.64
1.21	0.66	0.66	0.59	0.65	0.66	0.66
1.22	0.68	0.68	0.61	0.67	0.68	0.68
1.23	0.70	0.70	0.62	0.69	0.70	0.70
1.24	0.72	0.72	0.64	0.71	0.72	0.72
1.25	0.74	0.74	0.65	0.73	0.74	0.74
1.26	0.76	0.76	0.67	0.75	0.76	0.76
1.27	0.78	0.78	0.68	0.77	0.78	0.78
1.28	0.81	0.81	0.70	0.79	0.80	0.81
1.29	0.83	0.83	0.72	0.81	0.83	0.83
1.30	0.85	0.85	0.73	0.83	0.85	0.85
1.31	0.88	0.88	0.75	0.85	0.87	0.88
1.32	0.90	0.90	0.77	0.88	0.90	0.90
1.33	0.93	0.93	0.78	0.90	0.92	0.93
1.34	0.96	0.96	0.80	0.93	0.95	0.95
1.35	0.98	0.98	0.82	0.95	0.98	0.98
1.36	1.01	1.01	0.84	0.98	1.01	1.01
1.37	1.04	1.04	0.86	1.00	1.03	1.04
1.38	1.07	1.07	0.88	1.03	1.06	1.07
1.39	1.10	1.10	0.90	1.05	1.09	1.10
1.40	1.13	1.13	0.91	1.08	1.12	1.13
1.41	1.17	1.17	0.93	1.11	1.16	1.16
1.42	1.20	1.20	0.95	1.14	1.19	1.20
1.43	1.23	1.24	0.97	1.17	1.22	1.23

5 Ответы на вопросы

1. Укажите интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений Пикара. Точность результата оценивать до второй цифры после запятой. Объяснить свой ответ.

i-е приближение Пикара можно считать решением уравнения до тех пор, пока совпадают результаты для i-го и (i+1)-го приближений до второго знака после запятой.

Основываясь на таблице результатов:

- 1-ое приближение можно считать решением на отрезке [0, 0.84];
- 2-ое приближение можно считать решением на отрезке [0, 1.19];
- 3-ое приближение можно считать решением на отрезке [0, 1.41];
- для определения промежутка, на котором 4-ое приближение можно считать решением, необходимо использовать 5-ое приближение, которое в данной работе не рассматривалось.

Пояснить, каким образом можно доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах.

2. Путем уменьшения шага. Если получен правильный результат, то при уменьшении шага значение результата меняется незначительно.

Рассмотрим, например, значение функции при x=1.

По Эйлеру:

- при шаге=10^{-1} y=0.29,
- при шаге=10^{-2} y=0.34,
- при шаге=10^{-3} y=0.35,
- при шаге=10^{-4} y=0.35.

По Рунге-Кутта:

- при шаге=10^{-1} y=0.35,
- при шаге=10^{-2} y=0.35.

Таким образом, правильным ответом является y=0.35, причем при вычислении по Рунге-Кутта можно остановиться на шаге 10^{-1}, при вычислении по Эйлеру – на шаге 10^{-3}

3. Каково значение решения уравнения в точке x=2, т.е. привести значение u(2)

3. Примерное значение функции при x = 2.

$$u(2) \approx 317.57 \tag{5.1}$$