ЛЕКЦИИ №1, 2

ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

1. **Понятия о моделях, моделировании и предмете курса. Общая классификация моделей.**

Моделирование – специфический метод (методология) познания, основанный на замене реального объекта (системы, процесса, ситуации, явления) некоторой моделью и исследовании в дальнейшем созданной модели.

Моделью называется представление системы, объекта, ситуации или процесса в виде, отличном от облика, способа или формы их реального существования (функционирования, протекания).

Классификация моделей может быть выполнена различными способами. Например, согласно различным литературным источникам существуют следующие типы моделей:

1. по форме выражения – механические, логические, математические;
2. по предмету исследования – физические, химические, технические, физиологические, медицинские и т.д.;
3. по виду – материальные, идеальные, предметные;
4. по природе явления – социальные, экономические, биологические, психологические, молекулярные, квантовые;
5. по степени точности – приближенные, точные, достоверные, вероятностные и т.д.;
6. по задачам исследования – эвристические, прогностические;
7. по объему – полные и неполные;
8. по способу выражения – знаковые, вещественные, графические;
9. по свойствам отражения – функциональные, информационные, системные.

Детально классификацию лучше проводить в конкретной предметной области. В качестве примера рассмотрим более подробно, как выглядит классификация моделей по видовому признаку (рис.1).

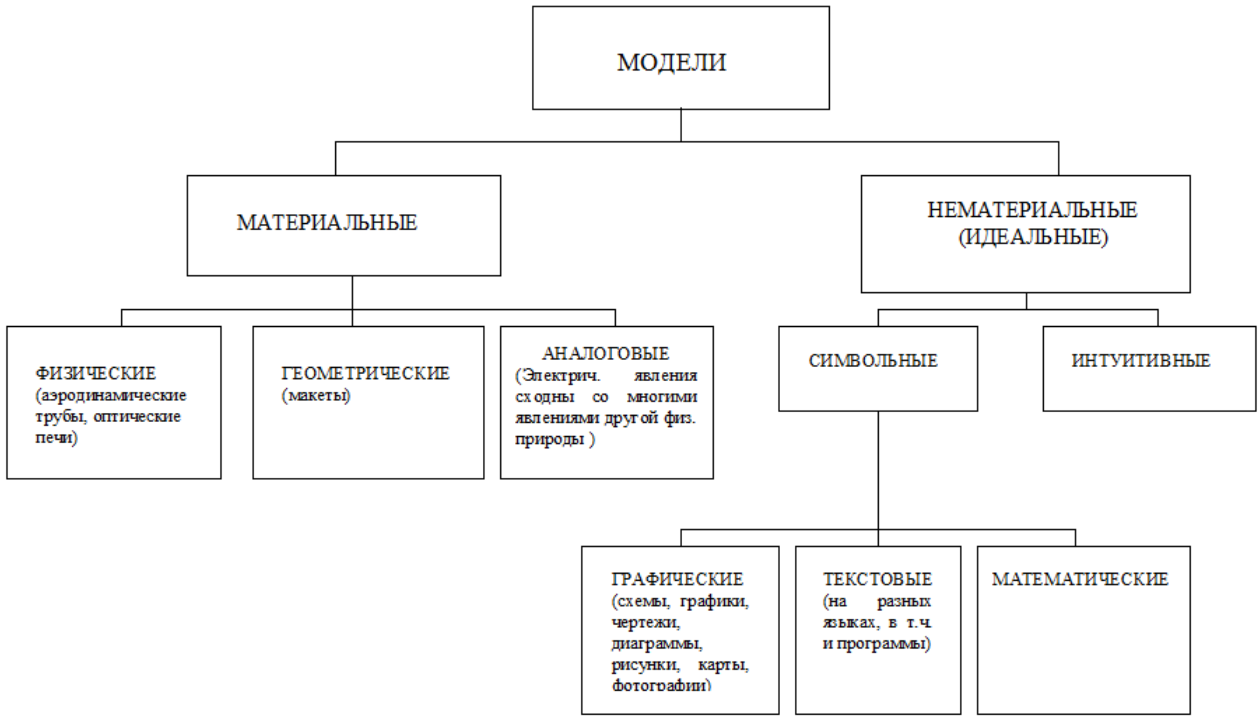

Рис. 1. Классификация моделей

Итак, согласно рис.1. модели можно разделить на **материальные и нематериальные (идеальные).**

Среди материальных – **физические, геометрические, аналоговые,** среди нематериальных – **символьные и интуитивные.**

Геометрические модели отражают конфигурацию элементов систем, их взаимное расположение и внешний вид. Например, макеты архитектурных сооружений, технических устройств, муляжи, манекены т.д.

Физические и математические модели строятся для получения количественных характеристик систем.

Графические модели – машиностроительные чертежи, диаграммы и т.д.

В **физических** моделях обеспечивается сохранение (воспроизводство) основных физических процессов и условий функционирования реального объекта. Например, продувка частей летательных аппаратов в аэродинамических трубах, изучение поражающего действия атомного взрыва за счет радиации в оптических печах и т.д.

Наконец **математической** моделью называется описание процесса или объекта на языке математических понятий: формул, уравнений, логических соотношений. **Математическим моделированием** называется методология исследования, основанная на замене реального объекта или процесса его математической моделью. При математическом моделировании исследование реального процесса или системы заменяется исследованием его математической модели.

Среди математических моделей можно выделить **регулярные** (функциональные) модели, модели **идентификации и имитационные** модели**.**

Регулярные модели опираются на теорию функционирования объектов и описывают реальные процессы в системах. Модели **идентификации** создаются путем изучения реакции объекта на некоторое воздействие. Сама исследуемая система представляет собой «черный ящик». Часто такая модель представляется в виде некоторой интерполяционной зависимости. Модели **идентификации** строятся на основе экспериментов или численных расчетов. **Имитационные** модели применяются при исследовании систем массового обслуживания.

Возможно продолжение классификации математических моделей. В частности, регулярные модели бывают аналитические и численные, статистические и детерминированные, линейные, квадратичные, позиномные и т.д.

Вообще методы и алгоритмы моделирования можно условно разбить на два больших класса: детерминированные и статистические (вероятностные). Последние широко применяются в имитационном моделировании. Однако вероятностные методы применяют и для вычисления интегралов, решения уравнений в частных производных, воспроизведения физических процессов (например, перенос излучения).

Области **применения** математического моделирования, в которых преимущество данной методологии проявляется особенно выпукло:

1. Исследование длительной во времени эволюции процесса (например, исследование долговечности объекта)
2. Исследование связано с уничтожением объекта
3. Исследование критических и закритических режимов функционирования объекта.
4. Исследование вреда от экологически опасных процессов (загрязнение океана, атмосферы)
5. Воспроизведение давно прошедших событий (Тунгусский метеорит)
6. Высокая стоимость объекта – оригинала.

7. Отсутствие объекта – оригинала (различные проекты). Предварительная отработка на моделях позволяет повысить качество создаваемых объектов и сократить сроки и стоимость их разработки.

Естественно, что ключевым вопросом при оценке моделей оказывается вопрос **адекватности** используемых моделей, под которой понимается соответствие моделей поставленным при их создании задачам. Наиболее используемым методом оценки моделей является сравнение с данными экспериментов, при этом часто применяется прием **ретроспективного** моделирования, когда моделируются состояния системы, по которым уже имеется достоверная информация. Следует отметить, что хорошее совпадение численных и экспериментальных данных еще не гарантирует точности модели, а лишь свидетельствует о ее пригодности для задач моделирования. Всегда может быть разработана модель, обеспечивающая лучшее согласие с данными эксперимента. Подчеркнем, что имеют право на существование модели никогда не происходивших процессов или событий, например, космические катастрофы, глобальное изменение состояния атмосферы и т.д.

2. Функции математических моделей

Можно выделить следующие важные **функции математических** моделей:

- средство **познания** действительности**.** Уже на этапе создания модели выясняются нелогичности и пробелы в наших знаниях, формулируются направления необходимых исследований, конкретизируются соответствующие задачи. Вся научная деятельность состоит в построении и исследовании моделей.
- средство накопления и **передачи информации и общения,** благодаря компактности, точности и объективности модели.
- средство обучения и тренажа, способствующее приобретению профессиональных навыков без риска для жизни и здоровья.
- средство **прогнозирования** поведения объекта. Математическое моделирование позволяет еще до возникновения реальной ситуации оценить условия ее возникновения и способы управления развитием событий, выбрать оптимальные параметры и режимы работы системы до ее реального создания. Появляется возможность исследовать последствия катастроф, наступление которых невозможно допустить (взрыв ядерной установки, космические катастрофы, отравление океана, глобальные изменения климата и т.д.).

Помимо адекватности к математическим моделям предъявляются т**ребования** по

* Точности.

*   Экономичности.

*   Универсальности.

Моделирование как метод познания основывается на принципе материального единства мира, существования общих законов развития природы, на признании всеобщей связи и взаимообусловленности явлений.

Модель представляет некоторое отражение действительного объекта. Физические модели связаны с натурным объектом непосредственно и естественно. В то же время связь абстрактных моделей с моделируемой системой далеко не столь очевидна (например, связь некоторого процесса с описывающей его системой уравнений, а затем и с реализующими эту модель вычислительными средствами).

Представим некоторые достаточно авторитетные высказывания о сущности моделирования.

Г. Клаус определяет моделирование как «отображение фактов, вещей и отношений определенной области знания в виде более простой наглядной материальной структуры этой области или другой области».

В.А Штоф (Штоф В.А. Моделирование и философия. М., 1966) считает: «Под моделью понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте».

Д. Харафас (Д. Харафас . Системы и моделирование. М., 1967) рассматривает моделирование как динамическую аналогию, что означает **не тождественное** подобие свойств и отношений. Характерной чертой моделей является их тенденциозность, т.е. описание системы, объекта лишь с некоторых сторон, в его некоторых свойствах и признаках.

У.У. Эшби отмечает, что «моделирование – это логика упрощения».

3. Понятие и схема вычислительного эксперимента

Математическое моделирование получило небывалое развитие, начиная со второй половины XX века. К этому времени произошло чрезвычайное усложнение и удорожание технических, социальных, экономических проектов, когда цена ошибки стала слишком высокой. Кроме того, получило мощное развитие направление вычислительной техники и средств вычислений. Ведь модели человечество применяет с незапамятных времен. Довольно давно сформулированы математические описания различных фундаментальных явлений окружающего мира. Вопрос стоял в разрешимости математических моделей. При ограниченных средствах вычислений модели неизбежно должны были упрощаться, и исходили при этом не из иерархии процессов по их важности, а по принципу возможности получения аналитического решения.

В настоящее время не существует областей человеческой деятельности, где бы ни применялось математическое моделирование. Разработаны математические модели самых разных технических устройств, технологических процессов, геологических и геофизических процессов, модели социальных систем, модели биологические, экономики регионов, медицинские.

Существует определенная технология математического моделирования или **вычислительного эксперимента**. Термин вычислительный эксперимент отражает новые реалии нашего мира, когда в дополнение к **натурному** эксперименту появился эксперимент математический (компьютерный, численный), связанный с исследованием математических моделей. Указанная технология может быть представлена следующей укрупненной схемой

Рис.2. Схема вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент, обладающий большими возможностями в плане точности описания реальных объектов и систем, ни в коей мере не отменяет натурный эксперимент, как средство получения новых фактов и накопления материала для тестирования.

Предмет настоящего курса – изучение эффективных алгоритмов решения вычислительных задач, возникающих при исследовании математических моделей, и обработке и интерпретации результатов численных и натурных экспериментов.

4. Методы получения математических моделей

1. На основе перво - принципов (фундаментальных законов природы)
2. С помощью вариационных принципов (принцип наименьшего действия, принцип Ферма)
3. На основе аналогий
4. Выстраиванием иерархии моделей (сверху - вниз или снизу- вверх)

5. Структура погрешности результатов вычислений.

Можно выделить четыре вида погрешности результатов расчетов:

a) Погрешность модели. Определяется уровнем существующих знаний, новизной проблемы, обоснованностью физических допущений и т.д. В нашем курсе эти вопросы систематически не рассматриваются.

в) Погрешность исходных данных. Исходные данные неизбежно задаются с некоторой ошибкой. Данное обстоятельство приводит к погрешности решения, которая называется *неустранимой*.

с) Погрешность метода.

Если по известным входным данным $\boldsymbol{x}$ требуется найти некоторую величину $\boldsymbol{y}$, то символически задачу можно записать в следующем виде $\boldsymbol{y=Ax}$ (здесь $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ могут быть числами, матрицами, функциями). В тех случаях, когда оператор $\boldsymbol{A}$ сложен и не допускает аналитического решения, задачу решают приближенно. Например, при вычислении производной от таблично заданной функции можно построить интерполяционный многочлен, который затем продифференцировать. Можно также записать сеточные аналоги производной различного порядка точности, выбирая соответствующие конфигурации узлов. Погрешность метода целесообразно выбирать так, чтобы она была примерно в 5 раз меньше неустранимой погрешности.

d) Погрешность округления. Появляется из-за того, что все вычисления выполняются с конечным числом значащих цифр. Согласно статистике при совершении N одинаковых операциях среднее значение суммарной ошибки возрастает в $\sqrt{N}$ раз, вследствие взаимной компенсации погрешностей разного знака. Таким образом, если отсутствуют систематические погрешности, то случайные ошибки не слишком сильно накапливаются.

Если алгоритм порождает систематические погрешности , то он должен быть изменен.

6. Понятие о корректности постановки задач, примеры неустойчивых и плохо обусловленных задач. Понятие об устойчивости численных алгоритмов.

Задача $y=Ax$ называется корректно поставленной, если для всех x , принадлежащих некоторому классу, решение y существует, единственно и устойчиво по входным данным.

Существование и единственность решения достаточно очевидные условия. Обратимся к устойчивости. Входные данные имеют некоторую погрешность δx, в итоге получается неустранимая погрешность $\delta y = A(x+\delta x) - Ax$.Если решение непрерывно зависит от входных данных, т.е. $\delta y \to 0$ при $\delta x \to 0$, то задача называется устойчивой по входным данным, иначе задача неустойчива по входным данным. Рассмотрим классический пример - задача Коши для эллиптического уравнения в полуплоскости $y \geq 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad u(x,0)=0, \frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\varphi(x).$$

Входными данными является $\varphi(x)$.

Если $\varphi(x)=\overline{\varphi}(x)=0$, то $u(x,y)=\overline{u}(x,y)=0$.

Если $\varphi(x)=\varphi_n(x)=\frac{1}{n}\cos nx$, то $u(x,y)=u_n(x,y)=\frac{1}{n^2}\cos nx\cdot sh\, ny$.

Видно, что при $n\to\infty$ $\varphi_n(x)\to 0=\overline{\varphi}(x)$, однако при этом $u_n(x,y)$ отнюдь не стремится к $\overline{u}(x,y)$, а возрастает неограниченно. Таким образом малое отклонение $\varphi(x)$ от 0 приводит к катастрофическому нарастанию *u(x,y)*. Разобранная задача имеет физическое содержание - модель описывает поведение тяжелой жидкости , налитой поверх легкой. В данном случае действительно возникает релей- тейлоровская неустойчивость. К задаче с неустойчивостью применять непосредственно численные методы сложно, т. к. погрешности, обязательно появляющиеся в ходе счета, будут сильно нарастать в процессе вычислений. В настоящее время созданы методы решения некорректных задач, при этом решается не исходная некорректная задача, а близкая к ней вспомогательная корректно поставленная задача, содержащая параметр. При варьировании этого параметра решение вспомогательной задачи можно устремить к решению исходной задачи.

Остановимся еще на важном понятии <u>слабой устойчивости (плохой обусловленности).</u>

Пусть $\delta\mathbf{y}\le\mathbf{C}\delta\mathbf{x}$. Формально задача устойчива, однако при большой константе *C* малые погрешности исходных данных приведут к большой ошибке результата, т.е. здесь возникают те же проблемы , что и в случае неустойчивых задач. Рассмотрим пример.

$$\mathbf{z}''(\mathbf{t})=\mathbf{z}(\mathbf{t}),$$
$$\mathbf{z}(0)=\mathbf{a},\ \mathbf{z}'(0)=-\mathbf{a},$$
$$\mathbf{a}>0.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$\mathbf{z}(\mathbf{t})=\frac{\mathbf{z}(0)+\mathbf{z}'(0)}{2}\mathbf{e}^{\mathbf{t}}+\frac{z(0)-z'(0)}{2}e^{-t}\ .$$

При точном значении начальных условий решение представляет

$\mathbf{z(t)} = \mathbf{a e^{-t}}$.

Теперь пусть исходные данные заданы с погрешностью $\delta\mathbf{a}$, т.е.

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{a} + \delta\mathbf{a} \ .$$

Тогда решение примет вид

$$\mathbf{z(t)} + \delta\,\mathbf{z} = \frac{\delta\,\mathbf{a}}{2}\,\mathbf{e^{t}} + (\mathbf{a} + \frac{\delta\,\mathbf{a}}{2})\,\mathbf{e^{-t}}.$$

Величина погрешности расчета равна

$$\delta\,\mathbf{z} = \frac{\mathbf{e^{t}} + \mathbf{e^{-t}}}{2}\delta\,\mathbf{a} \ \text{, т.е. константа } \mathbf{C} = \frac{\mathbf{e^{t}} + \mathbf{e^{-t}}}{2}.$$

При $\delta\,\mathbf{a} = 10^{-10}$ и t=100 имеем

$\mathbf{C} \approx 10^{43}$, $\delta\mathbf{z} \approx 10^{33}$. Понятно, что для устойчивости счета на практике константа *C* должна быть не слишком велика.

Еще пример плохой обусловленности. Система линейных уравнений

$$\mathbf{x}_1 + 0.005\mathbf{x}_2 = 1,$$
$$3\mathbf{x}_1 + 0.02\mathbf{x}_2 = 3.$$
$$\mathbf{x}_1 = 1, \ \ \mathbf{x}_2 = 0.$$

Изменим свободный член во втором уравнении на треть процента, получим

$$\mathbf{x}_1 + 0.005\mathbf{x}_2 = 1,$$
$$3\mathbf{x}_1 + 0.02\mathbf{x}_2 = 3.01.$$
$$\mathbf{x}_1 = 0.99, \ \ \mathbf{x}_2 = 2.$$

Даже при устойчивой задаче численный алгоритм может быть неустойчивым. Например, при вычислении производных с помощью разностей необходимо вычитать близкие числа, что сильно уменьшает точность. По аналогии с данным выше определением можно говорить об устойчивости алгоритма.

Рассмотрим простую задачу

$$z'(x) = -\alpha\, z(x),$$
$$x = 0, \quad z(0) = z_0.$$

Аналитическое решение задачи находится просто

$z(x) = z_0 e^{-\alpha x}$.

Получаем семейство интегральных кривых при различных значениях z_0.

Будем решать задачу численно. В области решения уравнения построим разностную сетку (множество точек, называемых узлами) с постоянным расстоянием (шагом) между узлами - h. Простейшая явная схема Эйлера (схема ломаных) для двух соседних узлов с номерами n и n+1 выглядит так

$$z_{n+1} = z_n - \alpha z_n h$$

или

$$z_{n+1} = z_n (1 - \alpha h).$$

При $(1-\alpha h) < 0,\ \ h > \frac{1}{\alpha}$ будем получать знакопеременные решения. Говорят алгоритм не обладает устойчивостью.

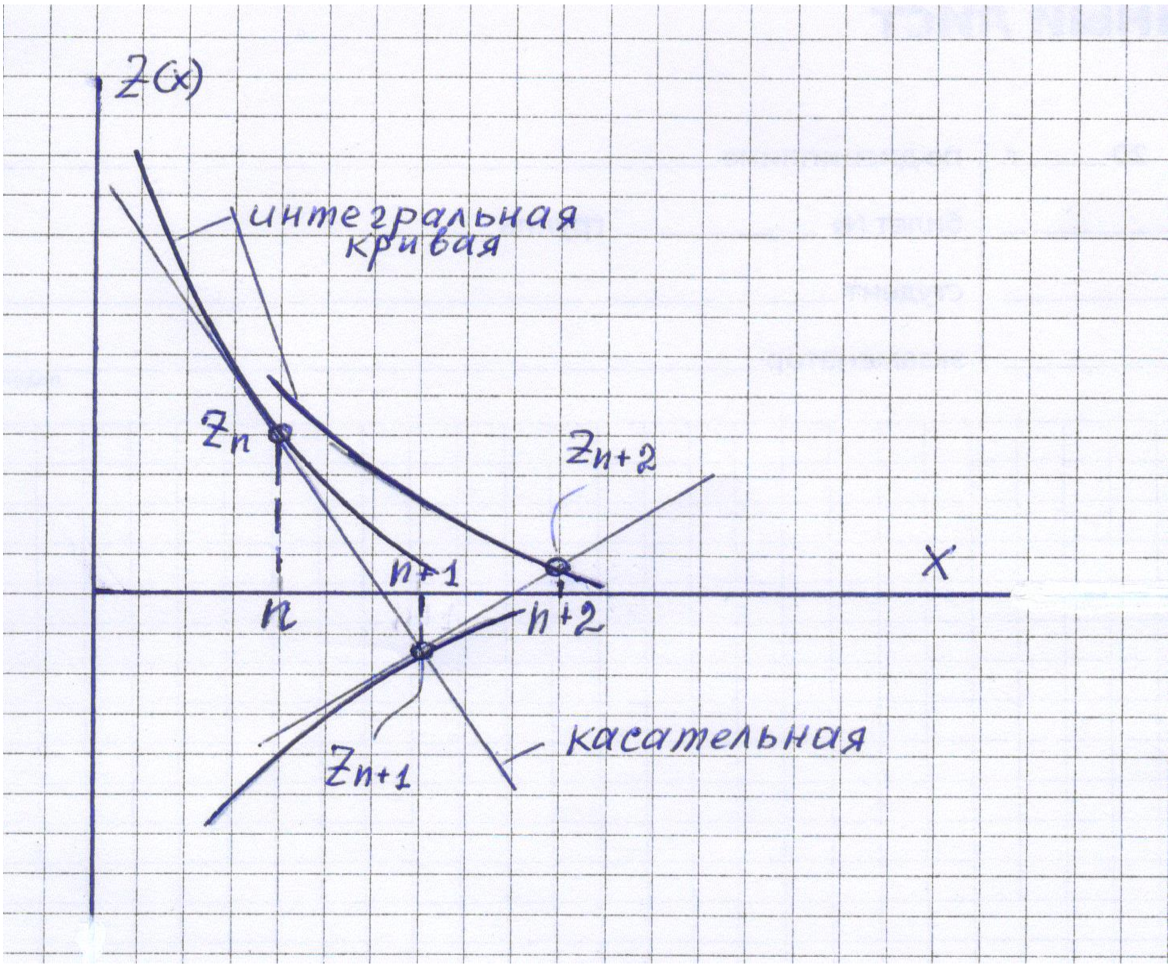

Рис.3. Геометрическая интерпретация явного метода

В схеме Эйлера переход из узла с номером n в узел n+1 и из узла n+1 в n+2 происходит вдоль касательной к интегральной кривой (рис.3). В итоге при достаточно большом шаге получается пилообразное решение, никак не соответствующее истинному решению исходного уравнения.

Модернизируем алгоритм, применяя неявный метод Эйлера

$$z_{n+1} = z_n - \alpha z_{n+1} h,$$

или

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{1+\alpha h}$$

В этом случае проблема неустойчивости алгоритма и ограничения на шаг снимаются.

В следующих лекциях мы перейдем к рассмотрению конкретных вопросов, связанных с построением и исследованием математических моделей разных типов и алгоритмов их реализации.