

Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе  
«Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения»



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
**«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский  
университет)»**

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор-проректор по учебной  
работе  
МГТУ им. Н.Э. Баумана

Б.В. Падалкин

«28»

11

2016 г.

**Учебно-методическое пособие  
к циклу повышения квалификации для педагогических работников по  
дополнительной образовательной программе**

**Прикладная информатика. Современные тенденции  
профессионального обучения**

**Авторы:**

Рудаков И.В., заведующий кафедрой «Программное обеспечение ЭВМ и  
информационные технологии», к.т.н., доцент

Фомичев А.В., заместитель заведующего кафедрой «Системы автоматического  
управления», к.т.н., доцент

Москва, 2016

УДК 681.32, 681.142.2

**Рудаков И.В., Фомичев А.В.**

Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения: учеб.-метод. пособие / И.В. Рудаков, А.В. Фомичев. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. - ... с. : ил.

Изложены методические аспекты формирования профессиональных компетенций слушателей курсов повышения квалификации в области прикладной информатики и их использование в своей педагогической деятельности для сопровождения интерактивных учебных, исследовательских и творческих проектов обучающихся, работа над которыми повышает уровень их подготовки в области информатики и её приложения к решению инженерных задач.

Предназначено для учителей информатики и математики, ведущих работу с учащимися инженерных классов.

Учебно-методическое пособие рекомендовано учебно-методической комиссией Научно-учебного комплекса «Информатика и системы управления» МГТУ им. Н.Э. Баумана к применению в школьной практике урочной и внеурочной деятельности профильного инженерно-технического обучения.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Введение .....	6
1. Язык General Purpose System Simulation (GPSS) .....	10
1.1 Описание языка General Purpose System Simulation (GPSS) .....	10
1.2 Классификация блоков GPSS .....	14
1.3 Задержка транзактов по заданному времени .....	15
1.4 Группа блоков создания и уничтожения транзактов .....	17
1.5 Изменение параметров транзактов .....	18
1.6 Блоки, определяющие аппаратную категорию .....	26
1.7 Блоки, изменяющие маршруты транзактов .....	31
1.8 Блоки, относящиеся к статистической категории .....	36
1.9 Определение функции в GPSS .....	40
1.10 Моделирование вероятностных функций распределения GPSS World .....	43
2. Основы теории управления. Моделирование и исследование сложных технических систем с использованием вычислительной среды Matlab-Simulink .....	44
2.1 Проектирование систем автоматического управления как многоэтапный технологический процесс .....	46
2.2 Общие принципы концептуальной организации систем автоматического управления .....	59
2.2.1 Основные понятия и определения .....	60
2.2.2 Общие принципы построения автоматических регуляторов и систем управления .....	63
2.2.3 Общие принципы построения многомерных автоматических регуляторов и систем управления .....	75
2.2.4 Автоматические регуляторы и системы управления с многоуровневой иерархической организацией .....	80

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 3 из 204*

2.3 Математические модели систем автоматического управления .....	93
2.3.1 Динамические модели систем автоматического управления .....	94
2.3.2 Общая методология формирования математических моделей систем управления .....	96
2.3.3 Классификация систем управления в зависимости от особенностей их математического описания .....	102
2.3.4 Классификация математических моделей внешних воздействий и процессов .....	105
2.3.5 Математические модели типовых тестовых воздействий .....	109
2.4 Структурные блок-схемы моделей линейных систем автоматического управления и их эквивалентные преобразования .....	115
2.4.1 Условные обозначения структурных блок-схем моделей одномерных линейных динамических систем .....	115
2.4.2 Эквивалентные преобразования структурных блок-схем моделей линейных динамических систем .....	117
2.5 Динамическая устойчивость линейных непрерывных систем автоматического управления .....	123
2.5.1 Анализ устойчивости линейных непрерывных систем управления прямыми методами .....	124
2.5.2 Косвенные методы анализа устойчивости линейных систем автоматического управления .....	128
2.5.3 Корневые методы анализа устойчивости линейных систем автоматического управления .....	129
2.5.4 Алгебраические методы анализа устойчивости линейных систем автоматического управления .....	135
2.5.4.1 Алгебраический критерий анализа устойчивости Рууса .....	136
2.5.4.2 Алгебраический критерий анализа устойчивости линейных систем автоматического управления Гурвица ...	138
2.5.5 Методы анализа устойчивости линейных систем	

автоматического управления в частотной области .....	145
2.5.5.1 Частотный критерий анализа устойчивости линейных систем автоматического управления Михайлова .....	146
2.5.5.2 Частотный критерий анализа устойчивости линейных непрерывных систем автоматического управления Найквиста .....	150
2.5.5.3 Критерий устойчивости Найквиста для логарифмических частотных характеристик .....	159
2.6 Анализ качества линейных непрерывных систем автоматического управления .....	167
2.6.1 Прямые показатели статической точности .....	169
2.6.2 Косвенные показатели статической точности .....	172
2.6.3 Показатели динамического качества систем управления .....	174
2.6.4 Методы анализа качества систем автоматического управления ...	178
2.6.5 Анализ качества систем управления методами математического моделирования .....	180
2.6.6 Анализ динамического качества линейных систем автоматического управления .....	182
2.7 Синтез алгоритмов управления систем автоматического управления ...	188
Литература .....	202

## **Введение**

Данное учебно-методическое пособие подготовлено к циклу повышения квалификации для педагогических работников по дополнительной образовательной программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения».

Цель программы – совершенствование профессиональных компетенций обучающихся/слушателей (учителей информатики и др.), направленных на повышение мотивации учащихся к обучению по курсу «Информатика», а также дальнейшее формирование у обучающихся/слушателей математической культуры и профессиональных компетенций в области организации учебной проектно-исследовательской деятельности учащихся при изучении методов анализа динамических объектов (систем) и систем управления (СУ) путём моделирования процессов функционирования данного класса объектов и СУ с применением языков программирования сверхвысокого уровня, а также специальных проблемно-ориентированных вычислительных платформ, необходимых для профессиональной деятельности.

Дополнительная профессиональная программа (программа повышения квалификации) рассчитана на преподавателей образовательных учреждений общего среднего образования всех видов и типов, построена по блочно-модульному принципу на основе модульно-компетентностного подхода.

Задачи программы – изучение и применение основных типовых математических моделей, формализующих процесс функционирования динамических объектов (систем) и СУ;

- методов расчета систем и сетей массового обслуживания для определения их характеристик и производительности;
- принципов построения программной модели динамического объекта (системы) и СУ;
- основных алгоритмов управления модельным временем (управляющая программа модели);

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 6 из 204*

- основных приёмов и алгоритмов вычислений;
- основных инструкций языка имитационного моделирования *GPSS PC*;
- основных особенностей построения и применения вычислительной системы инженерных и научных расчётов *Matlab-Simulink*.

В учебно-методическом пособии изложены основные подходы к проведению имитационного моделирования, которое в настоящее время применяется практически во всех сферах деятельности человека, начиная от моделей технических, технологических и организационных систем и заканчивая проблемами развития человечества.

Основой имитационного моделирования (ИМ) является методология системного анализа. С помощью ИМ возможно осуществить исследование проектируемой или существующей системы по схеме, которая включает следующие взаимосвязанные этапы: постановка задачи, разработка концептуальной модели, разработка и программная реализация имитационной модели, проверка адекватности модели и оценка точности результатов моделирования, планирование и проведение экспериментов, принятие решений. В этом случае ИМ возможно использовать как универсальный метод для принятия решений в условиях неопределенности и для учета в моделях трудно формализуемых факторов, а также применять основные принципы системного подхода для решения разнообразных практических задач.

С помощью ИМ возможно учесть изменение свойств объектов во времени, поскольку имитационные модели – это динамические модели. Они могут быть детерминированными или стохастическими. Учет в модели случайных факторов приводит к необходимости учёта их статистической оценки результатов моделирования.

В качестве имитационной модели выступает, как правило, ее программная реализация на ЭВМ. Имитационное моделирование сводится к проведению экспериментов с моделью путем запусков программы на некотором множестве данных, которые определяют среду моделируемой системы.

Использование данного метода на практике предполагает необходимость создания программных реализаций имитационных моделей, которые воспроизводят в модельном времени динамику функционирования моделируемой системы. По сравнению с традиционными методами программирования разработка имитационной модели требует перестройки принципов мышления. Поэтому принципы, положенные в основу имитационного моделирования, дали импульс к развитию объектного программирования. В настоящее время разработчики программных средств имитации решают проблему упрощения создания программных реализаций имитационных моделей. Это предполагает конструирование специализированных языков и систем имитационного моделирования.

Одним из языков моделирования, облегчающих процесс написания имитационных программ, является язык *GPSS*, созданный фирмой *IBM*. Изучение данного языка и программирование на нём позволяет понять принципы разработки имитационных программ и научиться работать с имитационными моделями. *GPSS* (*General Purpose Simulating System* – общечелевая система моделирования) – это язык моделирования, используемый для построения дискретных моделей и проведения моделирования на ЭВМ.

Другой очень популярной системой имитационного моделирования в настоящее время является *Matlab* («*Matrix Laboratory*») — пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноимённый язык программирования, используемый в этом пакете. Пакет используют более миллиона инженерных и научных работников, он работает на большинстве современных операционных систем, включая *Linux*, *Mac OS* и *Microsoft Windows*.

*Simulink* – это интерактивная графическая среда имитационного моделирования, которая позволяет с помощью блок-диаграмм в виде направленных графов, строить динамические модели, включая дискретные, непрерывные и гибридные, нелинейные и разрывные системы. *Simulink* позволяет использовать уже готовые библиотеки блоков для моделирования электросиловых, механических и гидравлических систем, а также применять развитый модельно-

ориентированный подход при разработке систем управления, средств цифровой связи и устройств реального времени.

Дополнительные библиотеки расширения *Simulink* позволяют решать широкий спектр задач от разработки концепции модели до тестирования, проверки, генерации кода и аппаратной реализации. *Simulink* интегрирован в среду *Matlab*, что позволяет использовать встроенные математические алгоритмы, мощные средства обработки данных и научную графику.

В данном учебно-методическом пособии излагаются основы теории управления, вопросы анализа и синтеза систем управления динамическими объектами и процессами. Рассматриваются особенности построения и применения языка имитационного моделирования *GPSS PC*, а также вычислительной системы инженерных и научных расчётов *Matlab-Simulink* для проведения исследований с помощью имитационного моделирования разнообразных динамических систем и процессов.

В учебно-методическом пособии содержатся соответствующие теоретические сведения и иллюстративные примеры.

## **1. Язык General Purpose System Simulation**

### **1.1 Описание языка General Purpose System Simulation**

**Язык General Purpose System Simulation (GPSS)** – общечелевая система моделирования. Как и любой язык программирования, она содержит словари и грамматику, с помощью которых разрабатываются имитационные модели сложных дискретных систем версий 1, 2, V, GPSS /PC, GPSS World.

Позволяет:

- Многозадачность
- Использование виртуальной памяти
- Интерактивность
- Графический интерфейс пользователя.
- Визуализация процесса моделирования.

Основное применение (то, что заявлено в качестве рекламы):

- Транспорт (самая известная модель: эксплуатация парка самолетов в авиационно-технической транспортной компании).
- Сетевые технологии. Исследование распределенной региональной сети передачи данных.
- Промышленность. Имитация автоматизированного металлургического производства.
- Финансовые и медицинские аспекты.

Система GPSS построена в предположении, что моделью сложной дискретной системы является описание её элементов и логических правил их взаимодействия в процессе функционирования моделируемой системы. Для определенного класса моделируемых систем можно выделить конечный набор абстрактных элементов, называемых «**объекты**», причем набор логических правил так же ограничен и может быть описан небольшим числом стандартных операций. Объекты языка подразделяются на 7 категорий и 14 типов (Таблица 1).

Таблица 1 – Объекты языка GPSS

Категория	Типы
Динамическая	Транзакция
Операционная	Блоки
Аппаратная	Устройства памяти, ключи
Вычислительная	Переменные, арифметические, логические, функции
Статистическая	Очереди, таблицы
Запоминающая	Ячейки, матрицы ячеек
Группирующие	Списки, группы

Основой системы являются программы, описывающие функционирование выделенного конечного набора объектов и специальная программа-диспетчер, которая выполняет следующие функции:

- Обеспечивает, заданные программистом, маршруты.
- Продвижение динамических объектов, называемых *транзактами* (*заявками или сообщениями*).
- Планирование событий происходящих в модели, путем регистрации времени наступления события и реализацию этих событий в нарастающей временной последовательности.
- Регистрация статистической информации.

**Динамическими объектами** являются транзакты, которые представляют собой единицы исследуемых потоков и производят ряд определенных действий, продвигаясь по фиксированной структуре, представляющей собой совокупность объектов других категорий.

**Операционный объект.** Блоки задают логику функционирования системы и определяют маршрут движения транзактов между **объектами аппаратной категории**. Это абстрактные элементы, на которые может быть декомпозирована структура реальной системы. Воздействуя на эти объекты, транзакты могут изменять их состояния и оказывать влияние на движение других объектов.

**Вычислительный объект.** Служит для описания таких операций в процессе моделирования, когда связи между элементами моделируемой системы наиболее просто выражаются в виде математических соотношений.

**К статистическим объектам** относятся очереди и таблицы, служащие для оценок влияющих характеристик.

В процессе моделирования системы одни объекты взаимодействуют с другими, в результате чего происходит изменение атрибутов и преобразование их значений. Такие преобразования называются «*события*». Транзакты моделируют прохождение по системе соответствующих единиц исследуемого потока. Такое движение может быть разбито на цепь элементарных событий, происходящих в определенные моменты времени. Основной задачей симулятора является выявления моментов наступления этих событий, расположенных в их правильной временной последовательности и выполнения определенных действий при наступлении определенных событий. Все отрезки времени описываются целыми числами. Поэтому перед составлением модели необходимо провести временное масштабирование для всех характеристик модели связанных со временем. Каждому объекту соответствуют атрибуты, определяющие его состояние в данный момент времени. Значения атрибутов могут быть *арифметическими* или *логическими*. Большая часть атрибутов недоступна для пользователей. Атрибуты, которые доступны (или атрибуты, которые нужно адресовать) называются *стандартными числовыми* или *стандартными логическими атрибутами* (СЧА или СЛА).

Практически все изменения состояний происходят в результате ввода транзакции в блок и выполнения блоком своих функций.

С блоками непосредственно связаны операционные блоки, изменяющие процесс моделирования, блоки вывода и печати промежуточных результатов, команды, управляющие процессом моделирования и редактированием результатов.

**Транзакты** представляют собой описание динамических процессов в реальных системах. Они могут описывать как реальные физические объекты, так

и нефизические (например, канальная программа). Транзакты можно генерировать и уничтожать в процессе моделирования. Основным атрибутом любого транзакта является число параметров. Изменяться это число параметров может от 0 до 1020. Параметры обозначаются как  $P_x$ : номер параметра  $x$  + тип параметра. Может быть:

- слово – W
- полуслово – H
- байт – B
- плавающая точка – L

Важными атрибутами любого транзакта является **уровень приоритета** PR. Изменяются от 0 до 100000. Когда два транзакта соперничают за что-то, первым обрабатывается тот, у которого приоритет выше. Если приоритеты одинаковы, то сначала обрабатывается тот, у которого время ожидания обработки больше.

В одном задании может выполняться как один, так и несколько прогонов модели. При этом текущим значением абсолютного времени  $A_1$  модели будет называться **суммарное время по всем реализованным прогонам**, а текущим значением относительного времени модели –  **$C_1$  – системное время в пределах одного прогона**. Время в течение которого транзакт обрабатывается в процессе моделирования обозначается  $M_1$  и называется **транзактным временем**. Оно отсчитывается:

1. С момента относительного времени.
2. С момента прохода транзакта через специальный блок МАР, до текущего момента относительного времени.

Параметрическое транзактное время определяется вычитанием из текущего относительного момента времени значения n-ого параметра транзакта с типом X.

## **1.2 Классификация блоков GPSS**

У каждого блока имеется два стандартных числовых атрибута:

- $W_n$  – *счетчик входов в блок* или *ожидающий счетчик*, который содержит в себе номер текущего транзакта, находящегося в блоке
- $N_n$  – *общий счетчик транзактов*, поступивших в блок с начального момента моделирования или с момента обнуления.

Оба счетчика меняют свое содержимое автоматически.

### **1. Блоки, осуществляющие модификацию атрибутов транзактов**

Временная задержка ADVANCE

Генерация и уничтожение транзактов GENERATE TERMINATE SPLIT ASSEMBLE

Синхронизация движения нескольких транзактов MATCH GATHER

Изменение параметров транзакции ASSIGN INDEX MARK

Изменение приоритетов PRIORITY

### **2. Блоки, изменяющие последовательность передвижения транзактов, т.е. блоки передачи управления**

TRANSFER, LOOP, TEST, GATE

### **3. Блоки, связывающие с группирующей категорией**

JOIN REMOVE EXEMINE SCAN ALTER

### **4. Блоки, сохраняющие значения для дальнейшего использования**

SAVEVALUE

ASAVEVALUE

### **5. Блоки, организующие использование объектов аппаратной категории**

Устройства:

SEIZE RELEASE (парные команды)

PREEMP RETURN – тоже самое, но с приоритетной обработкой

FAVAIL FUNAVAIL – доступность устройства

Памяти:

ENTER LEAVE (если выходит из этого, то с памятью не происходит Ничего!)

SAVAIL SUNAVAIL

Ключи:

предназначены для описания элементов схемы

LOGIC

## 6. Блоки, обеспечивающие получение статистической информации

QUEUE DEPART

TABULATE TABLE – статистические таблицы

## 7. Специальные блоки

HELP TRACE UNTRACE PRINT и еще куча

## 8. Блоки для организации цепей

LINK UNLINK

## 9. Вспомогательные блоки

REPORT – создание стандартного отчета

LOAD SAVE и т.д.

Каждый блок определяется с помощью отдельной команды.

В общем случае: сначала идет нумерация (как в Basic'e), затем обязательно поле метки, затем поле операции, поле operandов, затем, если необходимо, комментарий (через ; - точку с запятой). Т.е.:

<Нумерация><Оператор><Метка><Операнды><Комментарии>

## 1.3 Задержки транзактов по заданному времени

ADVANCE A, B

Блок задает среднее время выполнения операций в моделируемой системе, а так же разброс времени относительно среднего. Задержка – целое число.

Для задания времени пребывания в блоке ADVANCE пользователь указывает среднее время в поле А, а модификатор в поле В. Если поле задержки постоянно, то поле В может быть пустым. А если нулевое, то и поле А может отсутствовать.

Модификаторы могут быть двух типов:

1. Модификатор «**интервал**», используется, когда время задержки транзакта распределено равномерно в некотором заданном интервале.

Например: ADVANCE 5,2 (т.е. интервал от 3 до 7)

2. Модификатор «**функция**», когда интервал отличается от равномерного и приходится с помощью этого блока находить данное время. Указываем среднюю величину, а дальше функцию, на значение которой должна быть умножена данная величина.

Например: ADVANCE 3, FN\$XPDIS

**Параметры транзактов** – свойства транзактов, определяемые пользователем, т.е. набор стандартных числовых атрибутов (СЧА), которые принадлежат транзакту.

Параметры, по сути, являются локальными переменными, которые доступны только этому транзакту.

В процессе перемещения транзакта по модели его параметры могут задаваться и модифицироваться в соответствии с логикой работы модели.

Особенности параметров.

1. Задаются:

P <номер>

P \$<имя>

где Р – стандартный числовой атрибут транзакта определяющий его групповое имя.

2. Номера или имена конкретных членов множества параметров задаются с помощью целых чисел или символьных имен.

3. При входе транзакта в модель начальные значения параметров равны нулю. Значения всех параметров транзактов и их изменение определяет сам пользователь. Причем эти значения могут быть любыми числами, в том числе и отрицательными.
4. Транзакт может обращаться только к своим параметрам. Если необходим доступ к параметрам других транзактов, то это можно сделать с помощью ячеек сохраняемых величин или использовать группы транзактов.
5. Параметры можно использовать в качестве операндов блоков или в качестве аргументов.
6. Параметры также позволяют организовать косвенную адресацию. <самостоятельно>

#### **1.4 Группа блоков создания и уничтожения транзактов**

##### **Блок GENERATE A,B,C,D,E**

Функцией данного блока является создание транзактов входящих в систему.

В поле А задается среднее время между поступлением отдельных транзактов. Как и в блоке ADVANCE, это поле может быть модифицировано с помощью модификатора находящегося в поле В (также интервал или функция). В поле может быть записан NULL. Если при вычислении времени появления в системе 1-ого транзакта, оно получилось равным 0, то симулятор полагает его равным 1.

Задаваемый модификатором интервал не должен превосходить среднего, записанного в поле А.

Интервал между транзактами, т.е. время появления следующего транзакта вычисляется только после того, как генерируемый транзакт покидает блок GENERATE. Поэтому если после блока GENERATE стоит блок, который может по какой либо причине задержать транзакт, то время генерации следующе-

го транзакта будет вычислено после снятия блокирующего устройства, т.е. когда сгенерированный транзакт пройдет следующий за блоком GENERATE блок. Поэтому средний интервал между транзактами будет больше чем среднее значение заданное в поле А. Что приводит к ошибке. Избежать её можно поместив после блока GENERATE блок, не задерживающий транзакт.

В поле С записывается начальная задержка. Заданное в этом поле число без модификации определяет интервал времени до создания данным блоком первого транзакта. По отношению к А оно может быть любым.

Поле D задает число транзактов, которое должно быть создано блоком GENERATE. Если это поле пусто, то блок генерирует неограниченное число транзактов.

В поле Е задается приоритет присваиваемый генерируемому транзакту. Если поле пусто, то нулевой приоритет.

Поля F – I: максимальное число параметров каждого типа.

*Пример.*

GENERATE 10, 3, 100, 16, 5, 5PB, 20PH, 3PL, 4PW

### **Блок TERMINATE A**

Удаляет транзакты из системы. Он используется для обозначения окончания пути транзакта.

Поле А указывает изменяет ли этот блок содержимое счетчика завершения в момент поступления транзакта и, если изменяет, то на сколько единиц.

### **1.5 Изменения параметров транзакта**

#### **Блок ASSIGN A, B, C, D**

Является основным средством для задания параметров транзактов.

В поле А указывается какой параметр поступившего транзакта должен быть изменен. Следующий непосредственно за номером транзакта символ ука-

зывает что нужно сделать с записанным в поле В целым числом. Прибавить (+), вычесть (-) или заменить этим числом.

Если в поле С указано значение, то оно интерпретируется как номер функции. Определяется значение этой функции, а результат используется для модификации целого числа, указанного в поле В. Произведение помещается в параметр, указанный в поле А.

В поле D задается тип изменяемого параметра.

*Пример.* ASSIGN 1, 4 (присвоили первому параметру 4).

### **LOOP A, [B]**

Циклы можно организовывать с помощью параметров. Блок LOOP управляет количеством повторных прохождений транзактов определенной последовательности блоков модели.

А – параметр транзакта, используемый для организации цикла. Оно может быть именем, числом, стандартным числовым атрибутом.

В – метка (имя) блока начального блока цикла.

Когда транзакт входит в блок LOOP транзакт указанный в операнде А уменьшается на 1. А затем проверяется его значение на равенство нулю. Если нулю не равно, то транзакт переходит в блок указанный в операнде В, если равен, то в следующий блок.

*Задача:* построить программу модели процесса прохождения 70 деталей, поступающих с интервалом времени 12+-2; и обработка происходит 1 рабочим по 5-ти последовательно идущим операциям, времена которых также распределены равномерно в интервале 2 +-1 ед. времени.

```
GENERATE    12,2
ASSIGN      2,5          //P2=5
SEIZE       1
```

```
WAIT      ADVANCE 2,1  
LOOP      2, WAIT  
RELEASE   1  
TERMINATE 1  
START     70
```

### **Группа блоков, создания копий транзактов**

#### **SPLIT A,B,C**

В отличие от блока GENERATE данный блок не создает самостоятельных транзактов, а лишь генерирует заданное число копий входящего в него транзакта. Число копий задается в поле А.

После прохождения блока SPLIT исходный транзакт направляется в следующий блок. А все копии пересылаются по адресу, указанному в поле В.

Исходное сообщение и копии являются равноправными и могут снова проходить через любое количество блоков SPLIT. Все транзакты полученные копированием, а так же копии копий принадлежат к одному ансамблю. И далее к этому ансамблю можно применять специальные операции или блоки, осуществляющие обработку ансамблей транзактов. Получаемый ансамбль транзактов может быть пронумерован. Для этого в поле С записывается номер параметра транзакта, в котором будет произведена нумерация. Если в исходном транзакте значение этого параметра было равно по величине k, то после нумерации исходный транзакт получит номер k+1, первая копия k+2 и т.д.

Копии, полученные в блоке SPLIT, могут иметь число и типы параметров отличные от исходного.

### **Группа блоков синхронизации движения транзактов**

#### **ASSEMBLE A**

Блок ASSEMBLE для объединения определенного числа транзактов, являющихся членами одного ансамбля. Число определяемых ансамблей указыва-

ется в поле А. Транзакты, принадлежащие одному ансамблю, будут задерживаться в блоке ASSEMBLE до тех пор, пока не поступит заданное число транзактов этого ансамбля.

В результате на выходе блока появляется один первый транзакт ансамбля, а остальные транзакты уничтожаются. В одном блоке ASSEMBLE могут накапливаться транзакты разных ансамблей. Транзакты одного ансамбля могут накапливаться в разных блоках ASSEMBLE. Если число собираемых транзактов задается с помощью косвенной адресации, то для его установления используется параметр первого пришедшего транзакта.

*Задача.* Построить модель прохождения 100 деталей, поступление которых подчиняется равномерному закону в интервале 8+-2 ед. времени. И обработка производится параллельно двумя рабочими, каждый из которых выполняет свою операцию независимо друг от друга со временем 5+-3.

Определить коэффициенты занятости этих рабочих.

Распараллеливание – split.

Передать (transfer) и собрать (assemble).

```
GENERATE 8,2
      SPLIT 1, Lwrk2          // копию второго рабочего

      //начало обработки детали
      SEIZE      Wrk1
      ADVANCE    5,3
      RELEASE   Wrk1
      TRANSFER   ,LJoin

LWrk2      SEIZE      Wrk2
```

```
ADVANCE      5,3
RELEASE Wrk2

LJoin ASSEMBLE    2
TERMINATE      1

START 100
```

Изменить программу так, чтобы можно было написать START 1  
\*сделать всем на GPSS.

~=

```
GENERATE 8,2,,100
SPLIT 1, Lwrk2      // копию второго рабочего

//начало обработки детали
SEIZE      Wrk1
ADVANCE 5,3
RELEASE Wrk1
TRANSFER, LJoin

LWrk2      SEIZE Wrk2
ADVANCE 5,3
RELEASE Wrk2

LJoin ASSEMBLE    2
TERMINATE      1

START 1
```

Разница будет в том, что первый закончит свою работу кода 100 уничтожится. А второй когда 100 создастся.

## **GATHER A**

Действие блока GATHER аналогично действию ASSEMBLE. Отличие в том, что после накопления в блоке числа транзактов указанного в поле A – они все передаются в следующий блок. Этот блок позволяет синхронизировать движение транзактов одного ансамбля по одному пути.

*Задача.* Необходимо моделировать 80 деталей. Каждая деталь является подшибником (поступают обоймы и шарики) с интервалом времени 25+-4 ед. времени. На контроль обоймы затрачивается 4+-1 ед. времени. Контроль шариков производится последовательно со времени 2+-1 ед. времени на шарик. Операция сборки требует одновременного поступления обоймы и всех шариков и производится со временем 4+-2.

GENERATE	25,4
SPLIT	8,Sharik
SEIZE	OboimaControl
ADVANCE	4,1
RELEASE	OboimaControl
TRANSFER	FINAL
Sharik	SEIZE SharikControl
	ADVANCE 2,1
	RELEASE SharikControl
	GATHER 8
FINAL	ASSEMBLE 9

```

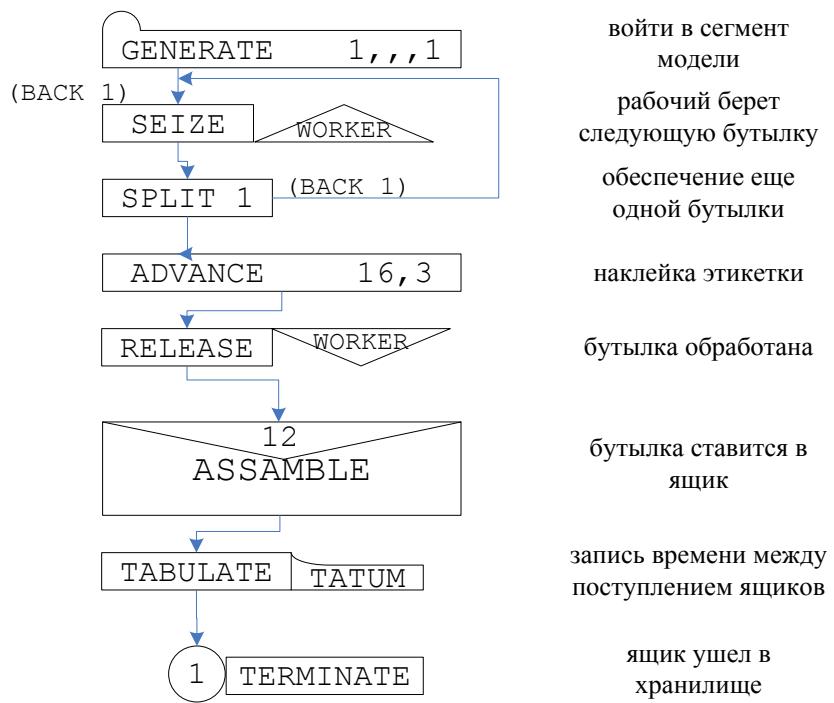
SEIZE      Sborka
ADVANCE    4,2
RELEASE   Sborka

TERMINATE  1
START     80

```

Если вместо GATHER поставить ASSEMBLE. Что будет?

*Задача.* Рассмотрим часть производственного процесса на небольшом винном заводике в Калифорнии. Объем продукции не оправдывает приобретение машины для автоматической наклейки этикеток на бутылке. Этую операцию проделывает один рабочий вручную. Ему требуется 16+3 секунды. В каждый ящик умещается 12 бутылок. Оценить интервалы времени между перемещениями полных ящиков в хранилище.



Оператор SPLIT обеспечивает неограниченный источник бутылок и осуществляет необходимое условие принадлежности всех входящих транзактов одному ансамблю.

## МАТСН А

Блок MATCH предназначен для синхронизации продвижения двух транзактов одного ансамбля, движущихся по разным путям. Для синхронизации необходимо 2 блока MATCH, находящиеся в соответствующих местах блок-диаграммы и называемые сопряженные.

В поле А каждого блока MATCH указывается метка сопряженного ему блока. При подходе этого транзакта к этому блоку, проверяется наличие в сопряженном ему блоке транзакта из того же ансамбля. Если в обоих блоках имеются транзакты одного ансамбля, то они одновременно пропускаются через блоки MATCH. Иначе поступающий транзакт будет ожидать поступления транзакта того же ансамбля в сопряженный блок MATCH. После чего они оба будут пропущены в следующие за блоками MATCH блоки.

*Задача.* Построить программу моделирования для исследования обработки 500 деталей. Детали поступают с интервалом времени 300+-50 ед. Обработку производят 2 рабочих по 2-м операциям. После первой операции выполняемой 1-ым рабочим со временем 70+-20ед. и вторым 60+-30 производится операция сверки (время её выполнения = 0). После сверки выполняется вторая операция первым рабочим со временем 20+-10 и вторым 30+-20. Затем 3-ий рабочий производит сборку изделия из этих деталей со временем 50+-20. Все процессы подчиняются равномерному закону.

```
// поступление деталей  
GENERATE      300,50
```

	SPLIT	1,Worker2
Worker1	SEIZE	1
	ADVANCE	70,20
Check1	MATCH	Check2 ; сверка
	ADVANCE	20,10
	RELEASE	1
	TRANSFER	,Worker3
Worker2	SEIZE	2
	ADVANCE	60,30
Check2	MATCH	Check1 ; сверка
	ADVANCE	30,20
	RELEASE	2
Worker3	ASSEMBLE	2
	SEIZE	3
	ADVANCE	50,20
	RELEASE	3
	TERMINATE	1
	START	500

## **1.6 Блоки, определяющие аппаратную категорию**

### **PREEMPT A,B,C,D,E**

Фиксирует использование устройства на более высоком уровне, чем блок SEIZE, а так же приостанавливает обслуживание транзакта захватившего устройство ранее и предоставляет возможность прерванному транзакту захватить устройство после того, как закончится обслуживание прервавшего транзакта. Если

при реализации данного блока оказывается, что одно прерывание уже произошло (устройство обслуживает прерывание), то данный блок не может выполниться, и транзакт задерживается до тех пор, пока не освободится устройство. Затем обслуживается новый прерывающий транзакт (а не прерванный).

*Исключение:* когда блок PREEMPT работает в режиме приоритетов (т.е. в поле В стоит мнемоническое значение PR), он подразумевает разрешение прерывания в зависимости от приоритетности транзактов.

Для последующей обработки прерванных транзактов существуют следующие возможности.

В поле С может быть описан какой-либо блок, на который будет передан прерванный транзакт. При этом прерванный транзакт будет претендовать на тот блок, который указан в поле А. Если прерванный транзакт находится в поле ADVANCE, то вычисляется остаток времени от момента прерывания до момента выхода из блока ADVANCE, и полученное значение помещается в параметр описанный в поле D. Если в поле Е данного блока стоит мнемоническое обозначение RE, то блок будет проводить обычные операции за исключением того, что прерванный транзакт больше не участвует в конфликте из-за захвата устройства.

## **RETURN A**

Говорит об окончании прерывания. При входе в блок, задержки возникнуть не может, но закончить прерывание может только тот транзакт, который перед этим прошел блок PREEMPT, относящийся именно к данному устройству. Прерывание заканчивается в момент входа транзакта в блок RETURN.

Время, в течение которого транзакт находится в прерванном состоянии, не фиксируется.

На прерывания имеются следующие ограничения: нельзя производить прерывание транзакта, захватившего или прервавшего обслуживание других транзактов.

Имя\_устройства, задержка, конец\_прерывания.

## **FUNAVAIL A, B–H**

Выполняет операции переводящие устройства в состояния *недоступности*. Недоступность устройства предупреждает прерывания или занятие устройства последующими сообщениями. При этом возможно задание специальных режимов работы для данного блока обеспечивающих окончание обслуживания последнего транзакта, передачу его другому блоку до обслуживания транзакта после окончания периода недоступности устройства.

В поле А – номер или диапазон номеров, переводимых в состояние недоступности.

Поля В–Н – для задания специальных режимов.

### **FAVAIL A**

Делает доступным устройство с указанным номером или диапазоном в поле А. Отменяет все режимы, заданные блоком FUNAVAIL для данного устройства.

*Пример.*

FUNAVAIL 1-15

ADVANCE 30

FUNAVAIL 1-10

ADVANCE 15

FANAVAIL 11-15

Устройства 1-15 становятся доступными через 30 ед. времени, 11-15 через 45.

Элементы исследуемой системы предназначенные для хранения или обработки нескольких транзактов называются **памятью**. Для того чтобы описать память используют команду **STORAGE**. А изменение состояния памяти производится операторами **ENTER, LEAVE, SUNAVAIL, SAVAIL**.

## **ENTER A, B**

Поле А – интерпретируется как номер памяти.

Поле В указывает число единиц памяти, занимаемых транзактом при входе в блок.

При выходе транзактов из блока ENTER никаких изменений в содержимом памяти не происходит. Если поле В пусто, то число единиц памяти полагают = 1. Если в памяти нет достаточного числа свободных единиц, чтобы удовлетворить запрос транзакта, то этот транзакт не может быть обслужен оператором ENTER. А если для последующего это число единиц достаточно, то он входит в память раньше первого.

## **LEAVE A,B**

Поле А определяет имя памяти.

Поле **B** — число единиц, которые надлежит освободить при входе транзакта в блок.

Не всегда освобождается такое же число единиц памяти, какое было занято. Транзакт, освобождающий память, не обязательно должен был ее занимать. Однако необходимо, чтобы в сумме освобождалось столько единиц памяти, сколько было занято. Освобождать можно 0 единиц.

При реализации блока LEAVE задержка не возникает.

*Пример.*

```
ENTER      1,1
```

```
SEIZE 2
```

```
LEAVE      1,*2
```

// \* - косвенная адресация (т.е. освободим ровно столько сколько содержалось в 2.

Реализуется занятие единицы памяти *памяти №1*, а затем происходит освобождение числа ед. памяти равное содержимому параметра 2.

## **SUNAVAIL A**

Переводит накопитель в состояние недоступности, при котором транзакты не могут войти в накопитель. Уменьшение содержимого накопителя в этот период может происходить путем прохождения транзакта через блок LEAVE.

Номер или диапазон номеров накопителей, переводимых в состояние недоступности, записывается в поле А.

## **SAVAIL A**

Оператор **SAVAIL** переводит заданный накопитель из состояния недоступности в состояние доступности. Если данный накопитель уже доступен, то оператор **SAVAIL** никаких действий не выполняет.

Номер или номера накопителей, переводимых в состояние доступности, записываются в поле А.

*Пример.*

SUNAVAIL2-5 – делаются недоступными накопители с именами 2, 3, 4, 5.

SAVAIL 2-5 – делаются доступными накопители с именами 2, 3, 4, 5.

**Логические ключи** предназначены для описания элементов моделируемой системы, которые могут находиться только в двух состояниях. Статистика о работе ключей не собирается. Логические ключи не имеют СЧА (стандартных числовых атрибутов). Но зато они имеют два логических атрибута, принимающих 0 при не выполнении и 1 при выполнении следующих условий:

LR ключ в состоянии 0.

LS ключ в состоянии 1.

В начале моделирования ключи могут быть установлены в состояние 1 с помощью команды INITIAL. А изменение состояния в процессе моделирования производится блоком LOGIC, который используется для установки логических ключей, состояние которых может быть запрошено в любом другом месте модели.

При входе в блок LOGIC задержки не возникает.

Состояние логического объекта, указанного в поле А изменяется одним из 3х способов:

LOGIC S – установлен

R – сброшен

I – инвертирован

Вид изменения определяется соответствующим мнемоническим обозначением, идущим сразу за блоком LOGIC.

*Пример:*

```
LOGICS    4          // установить ключ 4
LOGICR     65         // сбросить ключ 65
LOGICI     4          // инвертировать ключ 4
```

## 1.7 Блоки, изменяющие маршруты транзактов

### **GATE О А,В**

Этот блок используется для определения состояния объектов устройств без изменения собственно их состояний и работает в двух режимах:

- 1) Отказа или условного входа. При работе в этом режиме блок не пропускает транзакты, если соответствующий объект не находится в требуемом состоянии.
- 2) Перехода или безусловного входа.

Поле А определяет номер объекта аппаратной категории (устройства, памяти или ключа).

Если в поле В указано наименование или номер блока, то вместо отказа блок GATE будет посыпать транзакт на указанный адрес. Следовательно, если поле В пусто, то блок работает в режиме отказа, - нет – в режиме перехода.

Существуют специальные логические атрибуты, описывающие состояние устройств, памятий, ключей и условий синхронизации. Мнемонические обозначения проверяемого условия записываются непосредственно после **GATE**.

Состояние устройства описывается следующими условиями:

- **FNU** — устройство не используется, свободно;
- **FU** — устройство используется, занято (обслуживает захвативший транзакт или прерывание);
- **FNI** — устройство работает без прерывания (свободно или обслуживает захвативший его транзакт);
- **FI** — устройство обслуживает прерывание;
- **FV** — устройство доступно;
- **FNV** — устройство недоступно.

Могут быть две мнемонические записи , которые позволяют проверить условие синхронизации:

**M** – выполнение условия

**NM** – невыполнение условия

*Пример.*

**GATE SF,16**

Состояние памяти описывается условиями:

- **SE** - память пуста;
- **SNE** — память не пуста;
- **SF** — память заполнена;
- **SNF** - память не заполнена;
- **SV** - память доступна;
- **SNV** — память недоступна.

Состояние ключа описывается двумя условиями:

- **LR** — логический ключ в состоянии «выключен»;

- **LS** — логический ключ в состоянии «включен».

*Пример:*

GATESF 167 - блокировать транзакт до тех пор, пока память 167 не будет заполнена.

GATELS 265 - блокировать транзакт до тех пор, пока ключ 265 не установлен

GATEFU 19 - блокировать транзакт до тех пор, пока устройство 19 не освободится

GATEFI 34,ALTR - если устройство 34 прервано, то перейти к ALTR

### **TEST O A, B, C**

Описывает условие, которое проверяет при входе в него транзакта и определяет направление его дальнейшего движения в зависимости от условия, которое записывается в виде алгебраического соотношения двух аргументов.

При выполнении соотношения транзакт пропускается в следующий за блоком TEST блок. В случае невыполнения транзакт направляется в блок, метка которого указана в поле С. Если поле С пусто, то транзакт блокируется данным блоком до выполнения соотношения.

Проверяемое соотношение записывается сразу за блоком TEST, при этом используются классические мнемонические обозначения операции отношения.

Соотношение рассматривается между первым и вторым компонентами записываемых в полях А и В. Аргументы должны принадлежать к стандартным числовым атрибутам. Условие указывается сразу за именем оператора. Символы условий:

- **G** - больше,
- **L** - меньше,
- **E** - равно,

- **NE** - неравно,
- **LE** - меньше или равно,
- **GE** - больше или равно.

В случае не выполнения условия транзакт направляется в оператор, метка которого указана в поле **C**. Если поле C пусто, то транзакт при выполнении условия не сможет войти в блок TEST и управляющая программа в каждый момент модельного времени будет проверять, не изменилось ли блокирующее условие. Такой режим является нежелательным вследствие больших затрат машинного времени на многократную проверку блокирующего условия.

### *Пример.*

TESTE V7,256,LAB - переход по условию (условная передача управления): перехода нет, если переменная V7 = 256, иначе переход к оператору с номером LAB.

TESTL S1,10 – если число транзактов в памяти S1<10, то выполнять следующий оператор. Иначе остановить движение транзакта.

TESTG C1,120 - если системное время больше 120 единиц, то выполнять следующий оператор. Иначе остановить движение транзакта.

TESTE P1,2,MET1 - перехода нет, если переменная первый параметр транзакта равен 2, иначе переход к оператору с номером MET1.

## **TRANSFER      A, B, C, D**

Этот блок обычно используется для того, чтобы передать в него транзакты не следующие по номеру за ним. Передача может быть выполнена – логически, статистически, условно и безусловно.

Вид передачи определяется мнемоническим изображением указанным в поле А. Если безусловно, то указывается один следующий блок.

Поле В определяет первый или единственный из следующих блоков.

Поле С определяет следующий блок и интерпретируется с режимом работы блока TRANSFER.

- Если поле А пусто, то все транзакты приходящие на этот блок будут переданы на блок, определяемый в поле В.
- Если в поле А стоит BOTH, то каждый транзакт поступающий в этот блок проверяет два пути. Сначала проверяется блок указанный в поле В и если транзакт не может войти, то он пытается войти в блок указанный в блоке С, а если он не может войти и туда, то вынуждены опять постоянно проверять эти условия. И происходит задержка в блоке TRANSFER.
- Если в поле А стоит ALL, то транзакты входящие в блок могут опрашивать много путей. Поле В – в этом случае определяет первый определяемый блок, поле С – последний, поле D – индексную константу, которая предоставляет пользователю возможность пользователю опрашивать определенные блоки, находящиеся между первым и последним.
- Если стоит SIM, то выбирается один из возможных путей.

#### Статистический режим выбора

Если в поле А блока TRANSFER записана десятичная дробь, то производится случайный выбор между блоками В и С. Вероятность перехода в блок С задает эта дробь.

#### *Пример.*

```
TRANSFER 0.607,Work1,Work      // транзакт с вероятностью 0.607 пойдет на второго рабочего, а с вероятностью 1-0.607 перейдет к оператору с меткой Work1.
```

```
TRANSFER PICK,STK7,STK21      // равновероятный переход к операторам с номерами STK7, STK7+1, STK7+2, . . . , STK21.
```

TRANSFER FN,AAA,5 // переход к оператору, метка которого равна сумме значения функции AAA и числа 5.

TRANSFER .P5,,МЕТ // трехзначное число, записанное в параметре 5 транзакта, интерпретируется как вероятность (в долях от тысячи) того, что транзакт будет передаваться на метку МЕТ, а в остальных случаях – следующему оператору.

TRANSFER P,4,41 // переход к оператору, метка которого равна сумме значения параметра 4 транзакта и числа 41.

TRANSFER SBR,PRC,7 // переход к оператору PRC с записью метки данного оператора в параметр 7 транзакта.

## **1.8 Блоки, относящиеся к статистической категории**

Используются два типа объектов:

- очереди
- таблицы

### **QUEUE A,B**

Этот блок аналогичен блоку ENTER и осуществляет сбор статистики об очереди. Номер очереди, в которую заносится транзакт, задается в поле А. При записи нового транзакта в очередь определяется длина интервала времени, в течение которого длина очереди оставалась неизменной.

При входе транзакта в данный блок текущая длина очереди увеличивается на число единиц, указанное в поле В. Затем происходит сравнение с максимальной длиной очереди, достигнутой до этого момента времени. Если оно больше старого значения, то оно его заменяет. Кроме того, счетчик общего числа единиц прошедших через очередь увеличивается на тоже число единиц.

## **DEPART A, B**

Аналогичен блоку LEAVE.

Поле А интерпретируется как номер очереди.

Поле В задает количество единиц на которое уменьшается длина очереди.

Моделирующая программа вычисляет длину интервала времени в течение которого транзакт находился в очереди и если длина получается равной нулю, то указанное в поле В число единиц добавляется к счетчику, регистрирующему число транзактов прошедших через блок без задержки.

## **QTABLE A, B, C, D**

С помощью этой команды можно заносить в таблицу время пребывания транзакта в очередь.

A – номер очереди

B – начальное значение

C – шаг таблицы

D – количество шагов

*Сбор статистики:*

QUEUE	Queue1
SEIZE	1
DEPART	Queue1
ADVANCE	10
RELEASE	1
QTABLE	Q1,0,5,100

## **TABULATE A, B**

Используется для создания таблиц нескольких типов.

Для занесения информации в таблицы с помощью специального блока TABULATE необходимо с помощью QTABLE или TABLE задавать характеристики таблицы.

При входе транзакта в блок TABULATE моделирующая программа записывает в соответствующую таблицу статистическую информацию.

Поле А определяет номер этой таблицы. В поле В заносится число единиц, добавляемых к числу наблюдений того интервала, в который попадает при данном обращении аргумент. Если В == 0, то полагается В == 1.

Предусмотрено несколько режимов табулирования, которые указываются в поле А. Знак минус за величиной, указанной в поле А, указывает на то, что в таблицу заносится не само значение, а разность между значением этой величины и последним значением, занесенным в таблицу. Такой режим называется разностным.

Если в поле А стоит мнемоническое обозначение RT, то при в ходе в блок TABULATE, который связан с таблицей, именно таким образом автоматическое обращение к классу частот не производится. Вместо этого число единиц заданное в блоке TABULATE добавляется к счетчику числа входов. Поэтому при описании блока в поле D должен быть определен временной интервал.

Если в поле А стоит мнемоническое обозначение IA, то моделирующая программа определяет время, прошедшее с момента последнего обращения к этой таблице. И такая таблица представляет собой распределение промежутков времени между моментами поступления транзактов в данную точку программы.

*Задача.* Простейшая телефонная система имеет две линии связи. Звонки, которые приходят извне, поступают каждые 100+-60 секунд. Когда линия занята, абонент набирает номер повторно через 5+-1 минуты. Требуется осуществить табулирование распределения времени, которое необходимо каждому абоненту, чтобы установить связь и произвести разговор. Сколько времени понадобится, для реализации 200 разговоров. Продолжительность разговора 3+-1 минуты.

200 SETS	STORAGE	2
210 TRANSIT	TABLE	M1,100,100,20
220	GENERATE	100,60

230 AGAIN	GATE	SNF SETS, OCCUPIED
240	ENTER	SETS
250	ADVANCE	100,50
260	LEAVE	SETS
270	TABULATE	TRANSIT
280	TERMINATE	1
290 OCCUPIED	ADVANCE	300,60
300	TRANSFER	,AGAIN

*Комментарии:*

200: память с именем SETS с общей емкостью 2 ед. берется для имитирования двух телефонных линий.

210: определяется таблица TRANSIT. Когда транзакт попадает в блок TABULATE, то его время прибывания в модель записывается в СЧА M1, т.е. длительность времени, отсчитанного с первого звонка абонента до тех пор пока абонент не закончит разговор.

220: транзакт, который имитирует вызов, создается каждые 100+-60 секунд.

230: блок GATE пересыпает блоку с меткой OCCUPIED, когда все линии заняты. Такая ситуация возможна, когда память заполнена и абонент должен ждать, прежде чем звонить повторно.

240: если память не занята, либо не занято только одно место, то транзакт проходит через блок gate к блоку ENTER, занимая тем самым место в памяти. Если все места в памяти заняты, то GATE не пропускает дальше транзакт. Каждый транзакт, пришедший в блок LEAVE, имитирует вызов, который был успешно осуществлен.

250: транзакт входит в блок ADVANCE, где задерживается на продолжительность разговора.

260: когда транзакт входит в блок LEAVE, он освобождает одно место в памяти с именем SETS, т.е. происходит имитация вновь свободившейся линии.

270: TABULATE добавляет длительность проведенного разговора к гистограмме.

280: выводит транзакт из системы, после того, как разговор завершен.

290: транзакт переходит в блок ADVANCE с меткой OCCUPIED, когда он пытался и не сумел занять в памяти SETS, т.е. происходит имитация абонента, который должен подождать, прежде чем заново начать набирать номер.

300: блок TRANSFER посыпает каждый транзакт в блок GATE помеченный как AGAIN. Там транзакт снова пытается занять место в памяти. Т.е. абонент пытается перезвонить.

## 1.9 Определение функции в GPSS

Она относится к управляющим операторам.

Формат: имя\_функции FUNCTION A, B

A – либо генератор случайных чисел (ГСЧ), либо СЧА.

B – тип функции. (D – дискретная, C – непрерывная, L – табличная (числовая), E – дискретная атрибутивная, M – табличная атрибутивная).

Дискретная функция (D) представляет собой кусочно непрерывную функцию, состоящую из горизонтальных ступенек.

Непрерывная функция (C) представляет кусочно-непрерывную, состоящую из соединенных между собой прямых отрезков. Получается ломаная линия.

Чтобы задать D-функцию необходимо задать координаты крайних точек горизонтальных отрезков. Для C-функции необходимо задать координаты всех точек, которые являются концами отрезков.

Действия необходимые для определения функций.

1. Присвоить функции имя. Имя либо числовое либо символьное.
2. Задать аргумент функции. Аргументами могут быть:

- a. Ссылка на генератор случайных чисел, используемый для розыгрыша в соответствии с распределением заданной функции.
  - b. СЧА
  - c. Ссылка на любую другую функцию.
3. Задать тип функции и число крайних точек функции.
  4. Задать значение аргумента и соответствующее значение функции.

За каждым оператором описания функции следуют операторы описания точек функции, т.е. значения точек  $x$  и  $y$ . Это операторы описания координат точек функции. Пишутся через запятую.

Особенности оператора описания:

1. Основной единицей информации оператора описания координат функций является пара координат  $i$ -ой точки  $(x_i, y_i)$ .
2. Значение координат одной точки отделяются друг от друга знаком «,». Последовательные наборы координат отделяются знаком «\».
3. Все строки должны начинаться с первой позиции.
4. Необходимо соблюдать соотношение:  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

Моделирование Пуассоновского потока:

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad t = 2$$

**GENERATE 2#100,FN\$XPDIS //100** – потому, что округление до целого приводит к нарушению ордиарности потока: весь начальный отрезок получается на нуле.

Интервалы поступления заявок пуассоновского потока распределены по экспоненциальному закону. Согласно методу обратной функции можно получить ряд чисел, которые имеют экспоненциальное распределение, если для какого-то ряда случайных чисел  $\sim R(0,1)$  преобразовать эти числа в соответствии с функцией, обратной к экспоненциальной. Т.е. мы получаем:  $-t \cdot \ln(...)$ , где  $t$  – разыгранный интервал времени.

Разработчиками GPSS была выполнена аппроксимация этой функции при  $\lambda = 1$  и функция  $e^{f(x)}$  была заменена 23 отрезками, которые преобразовали значение генератора в  $\log$  от этого значения.

Пуассоновский входящий поток с интенсивностью  $\lambda \neq 1$ , моделируется с помощью блока GENERATE следующим образом:

1. В качестве операнда A используют среднее значение интервала времени

$$t = \frac{1}{\lambda}, \text{ где } \lambda - \text{интенсивность пуассоновского потока}$$

2. В качестве операнда B используют СЧА, а именно значение функции XPDIS.

Если необходимо моделировать задержку со средним значением 3, то выполняем масштабирование и т.д.: ADVANCE 300,FN\$XPDIS

*Задача:* Необходимо решить какое число мест на стоянке для автомобилей, ожидающих мойки следуют предусмотреть, чтобы их грузить по максимуму. Поток автомобилей является Пуассоновским со значением среднего интервала равным 5 минутам. Время мойки автомобиля распределено экспоненциально со значением среднего 4 минуты. Если клиенты подъезжают и не застают свободного места, то они уезжают. Исследовать систему при использовании 1, 2 и 3 мест на стоянке. Моделировать работу в течение 8 часового рабочего дня.

Park	STORAGE 1	
	GENERATE	300,FN\$XPDIS
	TRANSFER	BOTH,,Bye_bye
	ENTER	Park ;заехали на стоянку
	SEIZE	Wash ;заняли мойку
	LEAVE	Park ;выехали со стоянки
	ADVANCE 240,FN\$XPDIS	; экспоненциальный закон
	RELEASE Wash	

```
Bye_bye    TERMINATE
```

```
    GENERATE    28800
    TERMINATE    1
```

## 1.10 Моделирование вероятностных функций распределения GPSS World

В библиотеку процедур включено 24 вероятностных распределения. При вызове вероятностного распределения требуется определить 4 аргумента:

1. Stream – может быть выражением и определяет, как правило, номер генератора случайных чисел. При моделировании генератора случайных чисел создаются по мере необходимости и их явное определение необязательно.

Большинство вероятностных распределений имеет собственные параметры, которые называются Locate, Scale, Shape.

2. Locate – используется после построения примененного распределения и прибавляется к нему. Это позволяет горизонтально перемещать функцию распределения по оси X.
3. Scale – меняет масштаб функции распределения.
4. Shape – меняет форму.

## **2. Основы теории управления. Моделирование и исследование сложных технических систем с использованием вычислительной среды Matlab-Simulink**

Проектирование систем автоматического управления представляет собой сложную научно–техническую проблему, решение которой можно рассматривать как реализация некоторого многоэтапного технологического процесса.

Важной и ответственной начальной стадией этого технологического процесса является стадия «Аван–проектирования систем управления», основными задачами которой являются:

- формирование функционально–информационного облика проектируемой системы управления;
- формирования математического описания проектируемой системы;
- выполнение динамического расчета системы с целью определения структуры и параметров алгоритмов управления, обеспечивающих наиболее эффективное функционирование системы в процессе реализации ее основной системной цели управления.

Фундаментальной научно–теоретической основой, необходимой для решения указанных выше научно–технических проблем является теория автоматического управления.

В представленном ниже материале излагается система основных базовых понятий, положений и методов, составляющих фундаментальные основы теории автоматического управления.

Излагаются и подробно рассматриваются теоретические основы и методы решения следующих важнейших проблем динамического расчета систем управления:

- проблем формирования функционально–информационного облика проектируемых систем автоматического управления, на основе реализации возможных наиболее эффективных принципов их организации;

- проблем формирования математических моделей систем управления и их преобразования;
- проблем анализа динамической устойчивости систем автоматического управления;
- проблем анализа статической точности и динамического качества систем управления;
- проблем, связанных с решением основной целевой задачи этапа динамического проектирования и расчета систем автоматического управления – задачи структурно–параметрического синтеза алгоритмов регулирования и управления техническими объектами, системами и процессами.

Необходимо отметить, что изложение основ теории автоматического управления в данном материале ограничено рассмотрением основ теории и методов динамического расчета и исследования одного класса динамических систем, а именно линейных непрерывных систем управления, то есть систем управления, все функциональные компоненты которых описываются линейными моделями.

Представленный ниже материал сопровождается многочисленными примерами, способствующими лучшему восприятию теоретических положений и освоению тех или иных рассматриваемых методологий динамического проектирования систем управления, а также дополняется многочисленным иллюстративным графическим материалом и таблицами.

Теория автоматического управления представляет собой фундаментальное, постоянно развивающееся научное направление, поэтому изложенные ниже ее теоретические основы не претендуют на полное и исчерпывающее, детальное изложение ее фундаментальных теоретических положений и методов.

Для более широкого и глубокого изучения теории автоматического управления как научной дисциплины предлагается список рекомендуемой литературы, позволяющей получить необходимую дополнительную информацию.

## **2.1 Проектирование систем автоматического управления как многоэтапный технологический процесс**

Проектирование систем автоматического управления (САУ) представляет собой сложный многоэтапный процесс. Рассмотрим основные этапы проектирования САУ и их основное содержание.

Очевидно, что прежде чем перейти непосредственно к проектированию системы управления необходимо предварительно определить саму цель, задачу проектирования, то есть определить:

- какие функции должна выполнять система управления;
- что представляет собой объект управления;
- каким требованиям должна удовлетворять проектируемая система управления;
- каковы условия эксплуатации системы управления;
- и т.д.

Вся эта исходная, необходимая для проектирования САУ информация оформляется в форме Исходных данных, Технического задания на разработку системы автоматического управления, Технических и Эксплуатационных требований к проектируемой системе.

Эти документы формируются и оформляются Заказчиком, являющимся потребителем разрабатываемой системы управления и осуществляющим финансирование проведения работ по ее проектированию и созданию.

В Техническом задании отражаются все возможные режимы работы системы, условия ее эксплуатации, величины предельных значений показателей, которые характеризуют качество и эффективность ее работы, характеристики объекта управления, и т.д.

***Этап формирования Технического задания (ТЗ) является важным начальным этапом в технологической цепочке проектирования систем управления.***

Формирование Технического задания предполагает оформление в виде официального документа совокупности показателей, отражающих все необходимые, желаемые свойства и характеристики проектируемой системы, связанные с ее функционированием, эксплуатацией, условиями хранения и профилактического обслуживания.

Формирование, подготовка и оформление ТЗ осуществляется представителями организации–Заказчика выполнения разработки.

Составленное и утвержденное Заказчиком Техническое задание выдается организации-Разработчику, который непосредственно обеспечивает выполнение необходимых научно–исследовательских и опытно–конструкторских работ (НИОКР), связанных с разработкой системы управления, и берет на себя ответственность за их выполнение в заданные сроки, в полном соответствии с Техническим Заданием.

В формировании ТЗ, помимо специалистов–представителей организации–Заказчика, участвуют представители организации –Разработчика, которые обладая высокими профессиональными знаниями и опытом в области проектирования и разработки систем автоматического управления и их отдельных функциональных компонент способны правильно оценить уровень сложности сформулированной в ТЗ задачи и возможные пути ее решения. При необходимости, они могут потребовать от Заказчика дополнительную информацию, позволяющую конкретизировать или изменить отдельные пункты ТЗ.

Участие высокопрофессиональных специалистов – разработчиков систем автоматического управления в формировании ТЗ должно обеспечить высокое качество и уровень согласованности составленного ТЗ, что во многом определяет эффективность процесса проектирования систем управления и реализации принятых проектных решений.

Ниже приведен пример возможного варианта оформления Исходных данных и Технического задания на проектирование автоматического привода малой мощности.

**Пример оформления Техническое задание на проектирование автоматического привода:**

*Выполнить научно-исследовательскую и опытно конструкторскую разработку автоматического электромеханического привода.*

**Функциональное назначение привода:**

*Спроектировать серво-привод, обеспечивающий автоматическое угловое позиционирование элементов технологического оборудования .*

**Основные требования к эксплуатационным характеристикам автоматического привода:**

- диапазон заданных значений углового положения нагрузки –  $\theta \in [-180^\circ, +180^\circ]$  ;
- время перевода нагрузки из начального углового положения в конечное –  $t_{max} \leq 1c$  ;
- ошибка позиционирования нагрузки –  $\varepsilon_{MAX} \leq 1^\circ$  ;
- длительность переходных процессов –  $T_{пп} \leq 1.5 c$  ;
- величина относительного перерегулирования —  $\sigma_{MAX} \leq 20\%$  ;
- тип привода – электромеханический ;
- способ управления – цифровое управление ;

**Исходные данные для проектирования:**

- момент инерции нагрузки –  $J_H = 2000 \text{ г см}^2 = 2000 \cdot 10^{-7} \text{ кг м}^2$  ;
- максимальный статический момент нагрузки –  $M_H^{CT} = 2200 \text{ Г см} = 2200 \cdot 9.8 \cdot 10^{-5} \text{ н м}$  ;
- характеристики источников энергии :     $U_{CC}^1 = +5 B, 2 A$ ;    $U_{CC}^2 = +12 B, 3 A$  ;
- условия эксплуатации привода :
  - диапазон температур окружающей среды –  $t^\circ \in [-20^\circ, +40^\circ]$ ;
  - относительная влажность среды – не более 80% .

Полученная Разработчиком информация в форме Исходных данных и Технического задания позволяет перейти к реализации следующего этапа технологического процесса проектирования системы автоматического управления – к реализации этапа эскизного или аван-проектирования.

**Основная цель этапа эскизного или аван-проектирования систем автоматического управления состоит в решении следующих задач:**

- определение концептуальной организации системы управления, которая предполагает: определение принципа построения системы;

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 48 из 204*

- определение функционального состава и характеристик необходимых для нормального функционирования системы элементов;
- определение структуры и характера информационных связей между функциональными элементами системы управления;
- определение наиболее эффективной структуры и параметров алгоритмов управления.

Таким образом, этап эскизного или аван–проектирования представляет собой процесс проектирования системы автоматического управления на виртуальном, динамическом уровне.

Этап эскизного или аван–проектирования может быть представлен в виде последовательности выполнения следующих двух основных этапов:

- этапа концептуального проектирования системы управления;
- этапа динамического проектирования системы управления.

*На этапе концептуального проектирования определяются возможные принципы построения проектируемой системы управления исходя из ее назначения и сформулированных в Техническом задании функций, которые она должна выполнять, определяется функциональный состав проектируемой САУ, а также структура информационных связей между функциональными элементами системы, что определяет ее функционально–информационный “облик”.*

На основе принятой на этапе концептуального проектирования системы оценок, проводится сравнительный анализ различных возможных принципов организации проектируемой системы управления и по результатам сравнительного анализа ряда возможных структур системы управления, выбирается, принимается и утверждается оптимальный, принимаемый в качестве расчетного вариант ее организации.

Используя сформированную на этапе концептуального проектирования расчетную структуру системы управления можно перейти к следующему этапу

- этапу динамического проектирования (динамического расчета) системы управления.

***Основной целью этапа динамического проектирования является формирование структуры алгоритмов управления и выбор таких значений параметров этих алгоритмов, при которых обеспечиваются все требуемые характеристики точности системы управления, а также желаемые значения показателей ее динамического качества.***

Для обеспечения определенных в Техническом задании требуемых характеристик точности системы управления, а также для обеспечения ее желаемой динамики, на этапе динамического проектирования системы управления должны быть решены следующие основные задачи:

- формирование математических моделей функциональных элементов системы, объекта управления и всей системы управления в целом, их преобразование и приведение к принятой стандартной, канонической форме;
- решение задачи структурно-параметрического синтеза алгоритмов управления, то есть определение структуры алгоритмов управления, а также значений их параметров;
- решение задачи исследования спроектированной на виртуальном, динамическом уровне системы управления методами математического и имитационного моделирования с целью определения соответствия ее расчетных характеристик требованиям Технического задания;
- принятие решения по результатам моделирования системы управления о возможности завершения этапа ее динамического расчета или о необходимости повторного решения задач структурно-параметрического синтеза алгоритмов управления.

Кроме того, по результатам исследований проектируемой системы методами математического и имитационного моделирования, формируются требования к характеристикам и параметрам отдельных функциональных компонент системы управления, в частности к ее информационно-измерительным устройствам.

ствам, к усилительным, усилительно-преобразующим устройствам, к исполнительным устройствам, к цифровым вычислительным средствам, и т.д.

На основе этих требований осуществляется аргументированный выбор конкретных функциональных элементов САУ из номенклатуры существующих унифицированных устройств, либо формируются Технические задания на проектирование отдельных функциональных подсистем, компонент и элементов системы, с характеристиками, удовлетворяющими расчетным проектным требованиям.

Конечной целью выполнения научно-исследовательской работы (НИР) и опытно-конструкторской разработки (ОКР) является создание физического, “в металле” реального опытного образца, необходимого для проведения в дальнейшем его натурных испытаний.

*Важным этапом общей технологической цепочки проектирования и создания систем автоматического управления является этап Технического проектирования, основной целью которого является разработка технической, конструкторской и иной документации, необходимой для изготовления опытных образцов отдельных функциональных элементов и подсистем проектируемой системы автоматического управления.*

Разработка конструкторской документации осуществляется на основе Технических заданий, которые формируются специалистами в проблемно-ориентированных областях знаний, связанных с решением проблем проектирования соответствующих подсистем, с учетом основных системных требований к этим подсистемам, сформулированным на основе анализа результатов этапа динамического проектирования и расчета системы управления.

*Технические задания на проектирование и разработку отдельных функциональных подсистем системы управления и входящих в ее состав элементов формируются при участии специалистов-разработчиков систем управления, ответственных за выполнение динамического расчета автоматической системы.*

После формирования и получения Технических заданий на отдельные компоненты проектируемой системы управления, а также всей системы управления в целом, можно перейти непосредственно к выполнению соответствующей опытно-конструкторской разработки.

На этапе Технического проектирования решаются следующие основные задачи:

- разработка и оформление технической и конструкторской документации на проектирование и создание нестандартных функциональных элементов с требуемыми, определенными в результате динамического расчета САУ характеристиками;
- разработка и оформление технической и конструкторской документации на проектирование и создание усилительных и усилительно преобразующих устройств;
- разработка и оформление технической и конструкторской документации на проектирование и создание нестандартных исполнительных устройств;
- разработка и оформление технической и конструкторской документации на проектирование и создание конструктивных элементов САУ;
- разработка и оформление технической и конструкторской документации на проектирование и создание электрических принципиальных схем устройств и кабельных соединений;
- разработка и оформление технической и конструкторской документации на проектирование и создание программного обеспечения цифровых вычислителей и контроллеров;
- другие задачи.

***За этапом Технического проектирования следует этап Изготовления опытных, макетных образцов отдельных компонент системы управления и всей системы управления в целом.***

Разработанная на этапе Технического проектирования техническая и конструкторская документация передается на опытное производство для изготов-

ления макетных или опытных образцов соответствующих компонент проектируемой системы управления, а также необходимой для их промышленного изготовления средств технологической оснастки, технологических средств измерений и контроля.

После изготовления и отладки опытного макетного образца системы управления следует этап Испытаний опытного образца.

***Целью проведения испытаний является проверка качества функционирования спроектированной системы управления с учетом влияния на систему реальных внешних воздействий, условий функционирования и эксплуатации, а также окончательная проверка соответствия всех характеристик спроектированной системы требованиям Технического задания.***

Успешное проведение испытаний опытного образца завершает выполнение исследовательских и опытно-конструкторских работ по созданию системы управления. В том случае, если результаты испытаний – неудовлетворительны, то процесс проектирования и создания системы автоматического управления должен быть продолжен.

Таким образом, процесс проектирования систем автоматического управления представляет последовательность отдельных этапов, которая в наиболее общей форме может быть представлена следующим образом:

- Этап формирования Заказчиком Технического задания на проектирование автоматической системы и выдача его Разработчику системы;
- Выполнение исследований и разработок в рамках реализации этапа Эскизного проектирования автоматической системы;
- Этап динамического проектирования и расчета автоматической системы, по результатам выполнения которого формируются Технические задания на проектирование отдельных подсистем и функциональных элементов автоматической системы и выдача их Разработчикам этих подсистем;
- Этап Технического проектирования отдельных подсистем и функциональных элементов, входящих в состав системы;

- Этап изготовления макетных или опытных образцов отдельных функциональных элементов системы управления, а также макетного или опытного образца всей системы управления в целом;
- Этап испытаний опытного образца спроектированной системы управления и принятия Решения о необходимости внесения изменений в результаты разработки как на концептуальном, так и на алгоритмическом, техническом и технологическом уровнях;
- Этап оформления отчетной документации по результатам выполнения НИР и ОКР по проектированию автоматической системы управления для передачи Заказчику разработки.
- Этап приемки результатов выполнения НИР и ОКР по созданию новой или модификации существующей системы автоматического управления Заказчиком разработки.

Общая последовательность технологических этапов проектирования САУ может быть представлена в виде графа, изображенного на рисунке 1.1.



Рисунок 1.1. Общий график технологического процесса проектирования САУ

Наибольший интерес, с точки зрения решения общих проблем, связанных с проектированием систем автоматического управления, представляет собой рассмотрение проблем, связанных с реализацией общей методологии проектирования систем автоматического управления на концептуальном и на динамическом уровнях.

*Методология проектирования систем автоматического управления на концептуальном и на динамическом уровнях носит общий характер и ее реализация базируется на знании фундаментальных основ теории автоматического управления, знании современных методов и технологий обработки информации и управления, а также знании методов и технических средств, необходимых для реализации этих технологий.*

Как было отмечено выше, проектирование систем автоматического управления на динамическом уровне составляет основную задачу этапа Эскизного или Аван-проектирования САУ.

Рассмотрим обобщенную структуру этого этапа, основные, решаемые на этом этапе задачи, а также последовательность их решения, более подробно. Реализация этапа Эскизного или Аван-проектирования может быть представлена в виде последовательности выполнения следующих технологических шагов:

- этап концептуального проектирования системы, в результате выполнения которого формируются концептуальные, функциональные блок-схемы системы управления и ее отдельных подсистем;
- этап выполнения оценочных статических, энергетических, механических, электрических, тепловых и т.д. расчетов на основе результатов выполнения которых производится оценка требуемых значений основных статических, динамических и энергетических параметров и характеристик отдельных функциональных элементов системы управления;
- выбор на основе использования результатов оценочных расчетов конкретных типов функциональных элементов системы управления из располагаемого набора существующих унифицированных функциональных модулей;

- формирование математических моделей внешних воздействий на систему, отдельных функциональных элементов системы управления, а также всей системы управления в целом;
- преобразование сформированных математических моделей функциональных элементов системы, а также всей системы управления в целом; к одной из необходимых стандартных канонических форм;
- решение задач структурно-параметрического синтеза алгоритмов обработки информации и управления на основе использования выбранного метода синтеза;
- исследование динамических свойств и характеристик спроектированной на абстрактном, динамическом уровне системы управления методами математического и цифрового имитационного моделирования с учетом синтезированных алгоритмов обработки информации и управления;
- определение значений критериальных оценок, полученных в результате проведенных методами моделирования исследований, которые характеризуют качество функционирования и эффективность спроектированной системы управления, а также принятие решения об успешном завершении этапа динамического проектирования системы управления, либо, в противном случае, о необходимости внесения концептуальных, структурных, параметрических, алгоритмических и других изменений в проектируемую систему;
- формирование и оформление Технических Заданий и другой документации, необходимой для перехода к выполнению следующего этапа проектирования системы, связанного с Техническим проектированием системы управления и ее отдельных функциональных компонент.

Общая последовательность реализации процесса аван-проектирования САУ может быть представлена в виде графа, изображенного на рисунке 1.2.

Подробное рассмотрение этапа Эскизного проектирования позволяет сделать вывод о том, что методологической основой его реализации при решении задач концептуального и динамического проектирования САУ, является **теория**.

## **рия автоматического управления.**

В этой связи, изложение последующего материала будет посвящено рассмотрению основных проблем, составляющих фундаментальные методологические основы проектирования систем автоматического управления, а именно:

– рассмотрение общих принципов построения САУ, составляющих методологическую основу решения проблем формирования концептуального “облика” САУ;

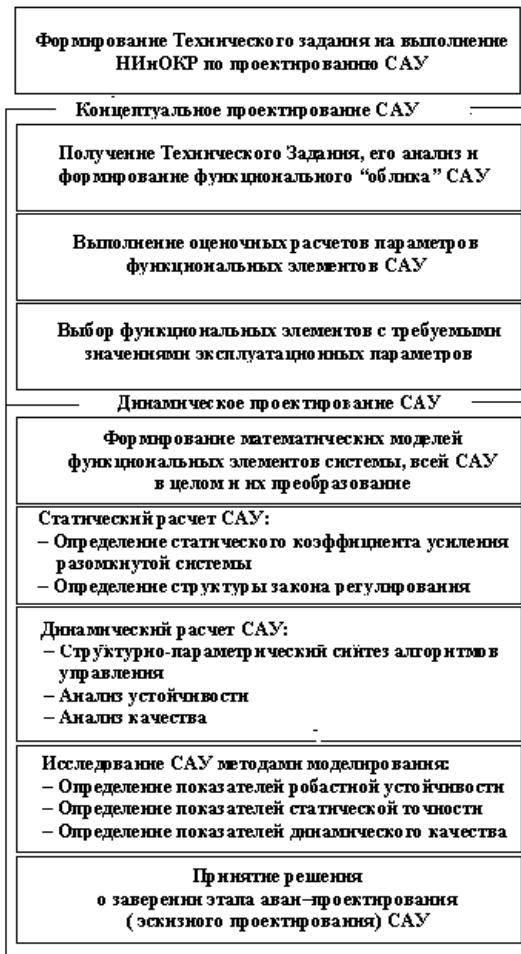


Рисунок 1.2 Граф процесса реализации этапа Эскизного проектирования САУ

– рассмотрение основных типов и форм представления математических моделей функциональных элементов САУ и всей САУ в целом, методов их преобразования, а также рассмотрение основных типов и форм представления математических моделей действующих на систему внешних воздействий;

- рассмотрение вопросов, связанных с изучением методов оценивания динамической устойчивости САУ, а также методов оценивания их характеристик точности и показателей динамического качества;
- рассмотрение основных методов синтеза алгоритмов обработки информации и управления;
- рассмотрение проблем синтеза алгоритмов управления с учетом структурно-параметрических неопределенностей математических моделей объектов управления;
- рассмотрение проблем синтеза алгоритмов обработки информации и управления, ориентированных на их цифровую реализацию;
- рассмотрение проблем реализации современных технологий обработки информации и управления;
- рассмотрение других важных методологических проблем динамического проектирования и исследования САУ.

Проектирование современных высокоеффективных систем автоматического управления и их реализация базируется на использовании высокопроизводительных средств цифровой обработки информации. Поэтому, разработчик систем управления, помимо знания фундаментальных основ теории управления, должен владеть современными методами, средствами и технологиями цифровой обработки информации для решения задач управления, должен знать современные технические средства, необходимые для реализации процессов управления, а также владеть современными методами, технологиями, инструментальными вычислительными и программными средствами, предназначенными для решения задач проектирования, моделирования и исследования САУ.

## **2.2 Общие принципы концептуальной организации систем автоматического управления**

Начальная стадия проектирования систем автоматического управления связана с формированием облика системы на концептуальном уровне. На этом этапе определяется принцип построения системы, а также ее функциональный состав, структура и характер информационных связей между функциональными блоками.

Этап концептуального проектирования систем автоматического управления является важным и ответственным этапом в решении общей проблемы проектирования систем автоматического управления. На этапе концептуального проектирования определяется и формируется расчетная структура системы управления, составляющая основу для проведения последующего этапа проектирования системы – этапа ее динамического проектирования и расчета.

От сформированной на этапе концептуального проектирования функционально-информационной структуры системы управления во многом зависят результаты ее динамического расчета. Основной целью динамического расчета является синтез алгоритмов обработки информации и управления, обеспечивающих целенаправленное, наиболее эффективное изменение контролируемых переменных, характеризующих внутреннее динамическое состояние объекта управления с учетом заданных в Техническом задании требуемых значений показателей качества, а также действующих на систему управления различного рода возмущающих факторов.

Рассмотрим основные общие принципы построения систем автоматического управления, составляющих методологическую основу для решения задач их концептуального и динамического проектирования.

## 2.2.1 Основные понятия и определения

Основным элементом структуры системы управления является **объект управления**, целенаправленное контролируемое изменение динамического состояния которого составляет основную цель функционирования любой автоматической системы.

**Под объектом управления следует понимать технический объект, техническую систему или процесс, динамическое состояние которого необходимо целенаправленно контролировать для достижения заданной цели управления.**

Динамическое состояние объекта управления может изменяться под влиянием действующих на него внешних воздействий. На рисунке 2.1 представлены возможные информационные структуры объектов управления, отражающие характер их взаимодействия с внешней средой.

На рисунке 2.1а представлена информационная структура объекта управления с одним внешним контролируемым управляющим входом, с одним наблюдаемым контролируемым выходным информационным сигналом и внешним неконтролируемым возмущающим воздействием.

Здесь:

*u(t) – управляющее контролируемое воздействие на объект управления* генерируемое системой управления для целенаправленного изменения его внутреннего динамического состояния;

*y(t) – выходная контролируемая регулируемая переменная*, отражающая внутреннее динамическое состояние объекта управления;

*f(t) – неконтролируемое, действующее на объект управления возмущающее воздействие.*

Возмущающее воздействие  $f(t)$  носит случайный, характер и, таким образом, вносит в процесс управления элемент неопределенности, препятствующий достижению цели управления с высокой точностью и качеством.

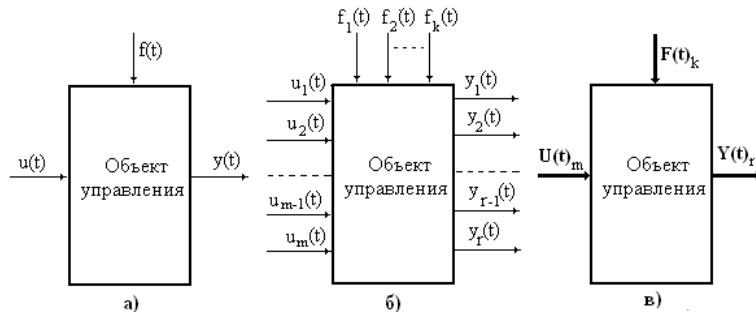


Рисунок 2.1 Графическое представление информационной структуры объекта управления

- а) объект управления с одним входом и одним выходом;
- б) объект управления с многими входами и многими выходами;
- в) объект управления с векторными входами и векторным выходом

На рисунке 2.1б представлена информационная структура объекта управления с  $m$  внешними контролируемыми воздействиями, которые представлены  $m$  внешними управляемыми сигналами  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ . Объект управления имеет многомерный выход, представленный  $r$  выходными информационными сигналами  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)$ , отражающими внутреннее динамическое состояние объекта управления.

На объект управления действуют  $k$  внешних неконтролируемых возмущающих воздействий  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)$ .

Таким образом:

$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$  – управляемые воздействия на объект управления, формируемые системой управления для целенаправленного изменения динамического состояния объекта управления;

$y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)$  – выходные контролируемые переменные, отражающие динамическое состояние объекта управления;

$f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)$  – внешние действующие на объект управления неконтролируемые возмущающие воздействия.

Информационные структуры объектов управления с многими входными воздействиями и многими выходными сигналами могут быть представлены в компактной, векторной форме. На рисунке 2.1в представлена информационная структура объекта управления с компактным, векторным представлением информационных сигналов, где:

$\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$  – **вектор управляющих воздействий** на объект управления, размерности  $m$ , компонентами которого являются внешние управляющие воздействия;

$\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)]^T$  – **вектор выходных регулируемых переменных** размерности  $r$ , отражающий внутреннее динамическое состояние объекта управления;

$\mathbf{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)]^T$  – **вектор внешних возмущающих воздействий** на объект управления размерности  $k$ .

В автоматических системах управляющие воздействия на объект управления формируются специальными **устройствами управления, регуляторами или контроллерами**, которые осуществляют обработку поступающей в них измерительной информации в соответствии с алгоритмами управления ирабатывают командные сигналы, обеспечивающие целенаправленное изменение динамического состояния объекта управления, в результате чего достигается основная системная цель управления.

Системы управления с одним управляющим входом и одним контролируемым выходом относятся к классу **одномерных систем, или систем с одним входом и одним выходом**. В соответствии с международной классификацией эти системы относятся к классу **SISO–систем (Single Input-Single Output)**.

Системы управления с многими управляющими входами и многими контролируемыми выходами относятся к классу **многомерных систем, или систем с многими входами и многими выходами**. В соответствии с международной классификацией эти системы относятся к классу **MIMO–систем (Multi Input- Multi Output)**.

Очевидно, что многомерные системы автоматического управления пред-  
Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Приклад-  
ная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 62 из 204

ставляют собой более сложный класс систем управления по сравнению с одномерными системами, что отражается на сложности их функциональной, структурной и информационной организации.

Рассмотрим основные принципы построения автоматических регуляторов и систем управления в порядке усложнения их организационной структуры.

### **2.2.2 Общие принципы построения автоматических регуляторов и систем управления**

Начальный этап проектирования систем управления связан с решением проблем их концептуального проектирования. На этом этапе определяется функциональная, структурная и информационная организация проектируемой системы. При решении задач концептуального проектирования системы автоматического управления необходимо, прежде всего, исходить из заданных в Техническом задании требований, определяющих основную системную цель проектируемой системы, отражающую ее функциональное назначение.

В зависимости от своего функционального назначения можно выделить, в частности, следующие классы систем управления:

- системы стабилизации;
- системы программного управления;
- следящие системы;
- системы иного назначения.

*Функциональное назначение систем стабилизации состоит в том, чтобы в условиях влияния на объект управления внешних возмущений  $f(t)$  поддерживать значение выходной регулируемой переменной  $y(t)$  в малой окрестности ее требуемого стабилизируемого значения  $y^*(t) = r_m^*(t)$ .*

В системах стабилизации требуемое значение выходной стабилизируемой переменной определяется некоторым внешним информационным сигналом, получившим название *задающего воздействия*, который поступает на управ-

ляющий вход системы стабилизации. Очевидно, что для систем стабилизации задающее воздействие представляет собой постоянную величину  $r(t) = r_m^*(t) = \text{const}$ .

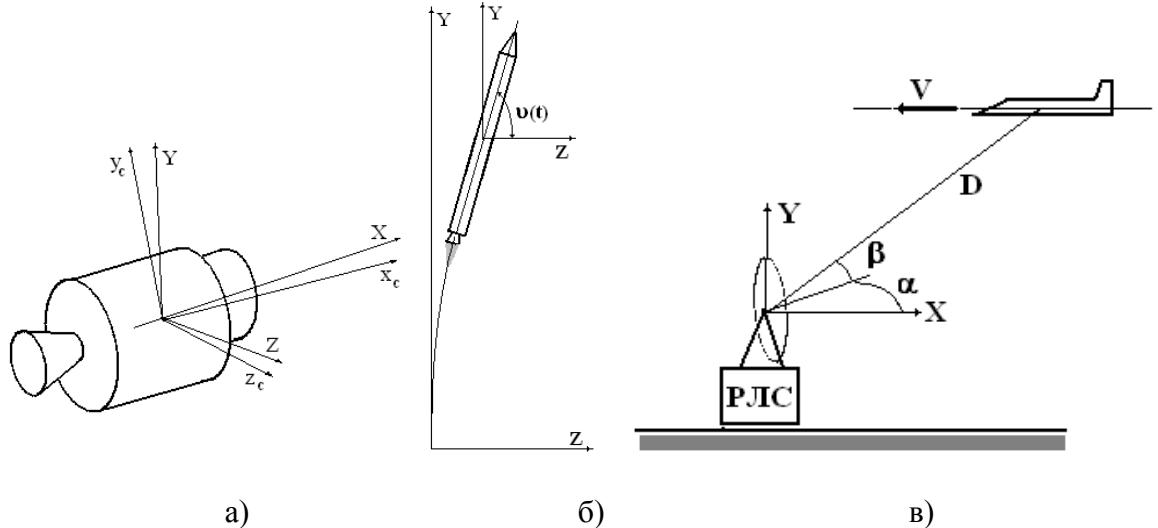


Рисунок 2.2 Примеры систем автоматического управления различного функционального назначения

Примером системы стабилизации (см. рисунок 2.2а) является система стабилизации космического летательного аппарата (КА). Основное назначение системы стабилизации в этом случае состоит в поддержании неизменной пространственной угловой ориентации КА.

Другим примером систем стабилизации является система стабилизации температурного режима в камере терmostата. Можно привести и другие примеры систем стабилизации.

*Функциональное назначение систем программного управления состоит в том, чтобы в условиях влияния на объект управления внешних возмущений  $f(t)$  обеспечить требуемый характер изменения во времени ее выходной регулируемой переменной  $y^*(t) = r^*(t)$ .*

В системах программного управления требуемый характер изменения во времени выходной контролируемой переменной определяется внешним задающим воздействием на систему, представляющим собой известную априори функцию времени, то есть  $r(t) = r^*(t)$ .

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 64 из 204*

Примером системы программного управления является система программного изменения угловой ориентации ракеты–носителя в процессе вывода космического летательного аппарата (КА) на околоземную орбиту (см. рисунок 2.2б).

Другим примером системы программного управления является система управления многокоординатным станком с числовым программным управлением, основное назначение которой состоит в обеспечении требуемого, заданного перемещения во времени обрабатывающего инструмента относительно заготовки.

*Функциональное назначение следящих систем состоит в том, чтобы в условиях влияния на объект управления внешних возмущений  $f(t)$  обеспечить отслеживание выходной регулируемой переменной  $y(t)$  изменяющихся во времени случайных значений поступающих на управляющий вход системы управления внешнего информационного сигнала  $r(t)$  с ограниченной допустимой динамической ошибкой.*

Таким образом, внешние задающие воздействия на следящие системы представляют собой случайные, заранее неизвестные функции времени, то есть  $r(t) = r_s^*(t)$ .

Примером следящей системы является система управления станцией радиолокационного обнаружения и автосопровождения движущихся объектов, основное назначение которой состоит в получении информации о параметрах, характеризующих текущее положение, направление и скорость движения наблюдаемых объектов (см. рисунок 2.2в).

Для реализации требуемого функционального назначения систем управления могут быть использованы различные принципы их функциональной, структурной и информационной организации.

Рассмотрим основные общие принципы построения систем автоматического управления, которые позволяют разработчику определить функционально–информационный облик системы и решить проблему ее концептуального проектирования с учетом конкретного функционального назначения системы.

Возможны следующие основные *принципы организации автоматических систем и регуляторов*:

- *принцип управления без обратной связи* или принцип управления по разомкнутому циклу;
- *принцип управления с отрицательной обратной связью* или принцип управления по замкнутому циклу;
- *принцип комбинированного управления*.

Принцип организации управления без обратной связи иллюстрируется на рисунке 2.3.



Рисунок 2.3 Блок-схема разомкнутой САУ с управлением без обратной связи

Сигналы, характеризующие информационное взаимодействие системы управления с внешней средой имеют следующий смысл:

- $r(t)$  – задающее воздействие на вход системы управления;
- $u(t)$  – управляющее воздействие на вход объекта управления;
- $y(t)$  – выходная регулируемая переменная;
- $f(t)$  – возмущающее воздействие на объект управления.

Система управления в данном случае может быть представлена в виде совокупности следующих блоков:

- объекта управления;
- задающего устройства;
- регулятора (контроллера).

**Объект управления** – физический объект, техническая система или процесс, динамическое состояние которого необходимо целенаправленно изменять для достижения цели управления.

**Задающее устройство** генерирует задающее воздействие  $r(t)$ , определяющее требуемое, желаемое значение выходной регулируемой переменной  $y(t)$ . В качестве задающего устройства может выступать либо специальный пульт управления оператора, либо система управления высшего иерархического уровня. Как правило, задающее устройство на блок-схемах систем управления не изображается, а его наличие предполагается.

**Регулятор (контроллер)** обрабатывает в соответствии с алгоритмом управления поступающее на его вход задающее воздействие  $r(t)$  и генерирует управляющее воздействие  $u(t)$  на объект управления, что приводит к целенаправленному изменению его динамического состояния, а, следовательно, к изменению его выходной регулируемой переменной.

Приведем следующие сравнительные характеристики реализации принципа управления без обратной связи.

#### **Достоинства:**

- простота функциональной структуры системы управления;
- возможность реализации управления в том случае, если значения выходных регулируемых переменных недоступны для измерений;
- реализация управления осуществляется с использованием минимального числа функциональных элементов;
- низкая стоимость реализации системы управления.

#### **Недостатки:**

- необходимо точное знание математических моделей объектов управления и функциональных элементов системы;
- чувствительность характеристик точности системы по отношению к возможным изменениям характеристик объекта управления и функциональных элементов системы управления;
- чувствительность характеристик точности управления к действующим на объект управления возмущающим воздействиям;
- низкая стабильность динамических характеристик и характеристик точ-

ности системы управления.

Примером организации управления по разомкнутому циклу является система управления скоростью движения транспортного средства, в котором управление скоростью осуществляется оператором–водителем путем изменения подачи топлива в рабочие цилиндры двигателя.

Рассмотрим принцип организации управления с отрицательной обратной связью (ООС) или принцип управления по замкнутому циклу.

Принцип организации управления с отрицательной обратной связью (ООС) или принцип организации управления по замкнутому циклу иллюстрируется на рисунке 2.4.

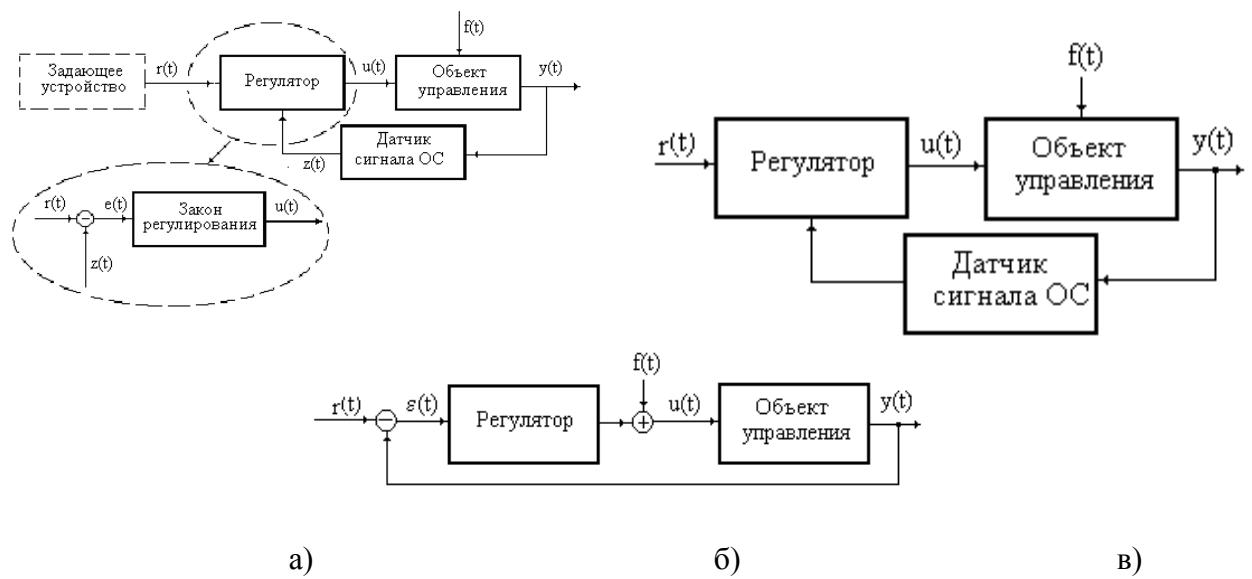


Рисунок 2.4 Принцип организации управления с отрицательной обратной связью

а) Иллюстративная блок-схема системы с ООС;

б) Обобщенная блок-схема системы с ООС;

в) Эквивалентная блок-схема системы с единичной ООС

Сигналы, характеризующие информационное взаимодействие системы управления с внешней средой имеют следующий смысл:

$r(t)$  – задающее воздействие на вход системы управления;

$u(t)$  – управляющее воздействие на вход объекта управления;

$y(t)$  – выходная наблюдаемая регулируемая переменная;

$\epsilon(t)$  – информационный сигнал, характеризующий ошибку регулирования;  
 $z(t)$  – сигнал отрицательной обратной связи с измерителем ;  
 $f(t)$  – возмущающее воздействие на объект управления.

Система управления в данном случае может быть представлена в виде совокупности следующих блоков (см. рисунок 2.4б):

- объекта управления;
- задающего устройства;
- регулятора;
- датчика (измерителя) сигнала главной отрицательной обратной связи.

*Задающее устройство* генерирует задающее воздействие  $r(t)$ , определяющее требуемое, желаемое значение выходной регулируемой переменной  $y(t)$ .

*Регулятор*, представляет собой аналоговый или цифровой вычислитель (контроллер), на входы которого поступают информационные сигналы с задающего устройства  $r(t)$  и сигнал ООС  $z(t)$ , который представляет собой сигнал с измерителя выходной контролируемой физической переменной  $y(t)$ . В результате обработки входных информационных сигналов формируется командной сигнал управления  $u(t)$  на объект управления (см. рисунок 2.4а).

В регуляторе (контроллере) осуществляется сравнение сигнала с датчика обратной связи  $z(t)$  и сигнала задающего воздействия  $r(t)$  путем их вычитания, в результате чего вычисляется сигнал ошибки регулирования  $\epsilon(t)$ , характеризующий фактическое значение отклонения регулируемой величины  $y(t)$  от ее требуемого значения, которое определяется задающим воздействием. Поэтому принцип управления с отрицательной обратной связью иногда называют принципом “управления по отклонению” регулируемой величины от ее требуемого значения.

В регуляторе в соответствии с синтезированным на этапе динамического расчета системы алгоритмом управления происходит обработка поступающих в него информационных сигналов и формируется управляющее воздействие на объект управления  $u(t)$ , что приводит к целенаправленному изменению его ди-

намического состояния, а следовательно к изменению его выходной регулируемой переменной  $y(t)$ .

В ряде случаев, при решении задач динамического расчета систем управления, их структура путем эквивалентных преобразований преобразуется к эквивалентной – с единичной обратной связью (см. рисунок 2.4в).

Информационное объединение регулятора, объекта управления и информационно-измерительных устройств образует **основной замкнутый контур управления**.

Информационное объединение регулятора и объекта управления образует **прямую цепь контура управления**.

Информационно-измерительные средства и каналы передачи информационных сигналов образуют **цепь обратной связи контура управления**.

Таким образом, любая автоматическая система, реализующая принцип управления с отрицательной обратной связью, должна содержать функциональные элементы, позволяющие организовать **замкнутый контур управления**.

Приведем некоторые сравнительные характеристики реализации принципа управления с отрицательной обратной связью.

#### **Достоинства:**

- простота структуры системы управления и ее реализации;
- высокая точность управления выходной регулируемой переменной;
- высокое динамическое качество процессов управления;
- высокая точность регулирования в условиях действующих на систему и объект управления возмущений;
- высокая стабильность характеристик точности и динамического качества системы управления по отношению к структурно-параметрическим неопределенностям моделей объекта управления и функциональных элементов системы.

#### **Недостатки:**

- более сложная реализация управления по сравнению с управление без ОС;

- необходимость использования дополнительных функциональных элементов системы, а именно датчиков–измерителей контролируемых физических величин;
- возможны проблемы реализации принципа управления с отрицательной обратной связью в том случае, если выходная регулируемая переменная недоступна для прямых измерений с помощью измерительных средств ;
- в замкнутых системах управления с обратными связями возможен эффект потери системой динамической устойчивости;
- более высокая стоимость реализации системы управления .

Одним из способов повышения характеристик точности управления в условиях неопределенностей, обусловленных действующими на систему управления внешними возмущениями, является применение и реализация **комбинированных принципов организации управления**.

На рисунке 2.5 приведен пример блок–схемы системы управления, реализующей принцип комбинированного управления, который интегрирует принцип “управления по отклонению” регулируемой переменной от ее требуемого значения, реализуемый основным контуром управления с отрицательной обратной связью, а также принцип “управления по возмущению”, реализуемый контуром управления по возмущению без обратной связи.

Система работает следующим образом. Основная цель управления, а также требуемая динамика системы управления обеспечиваются алгоритмами управления, реализуемыми регулятором основного контура управления с ООС.



Рисунок 2.5 Блок-схема автоматической системы с комбинированным управлением

Однако влияние на объект управления возмущающих воздействий  $f(t)$  приводит к снижению характеристик точности управления. Повышение точности управления может быть обеспечено дополнительным, без обратной связи, контуром управления по возмущению.

Регулятор дополнительного контура управления по возмущению на основе обработки результатов измерений действующих на объект управления возмущающих воздействий и оценивания степени их влияния на систему, формирует дополнительный сигнал управления, компенсирующий влияние возмущающих воздействий, что приводит к повышению характеристик точности всей системы управления в целом.

На рисунке 2.6 приведен иллюстративный пример реализации системы комбинированного управления положением зеркала антенны радиолокационной станции (РЛС) с целью повышения точности получения измеряемых значений углов направления на визируемую цель в условиях воздействия на зеркало антенны ветровых возмущений.

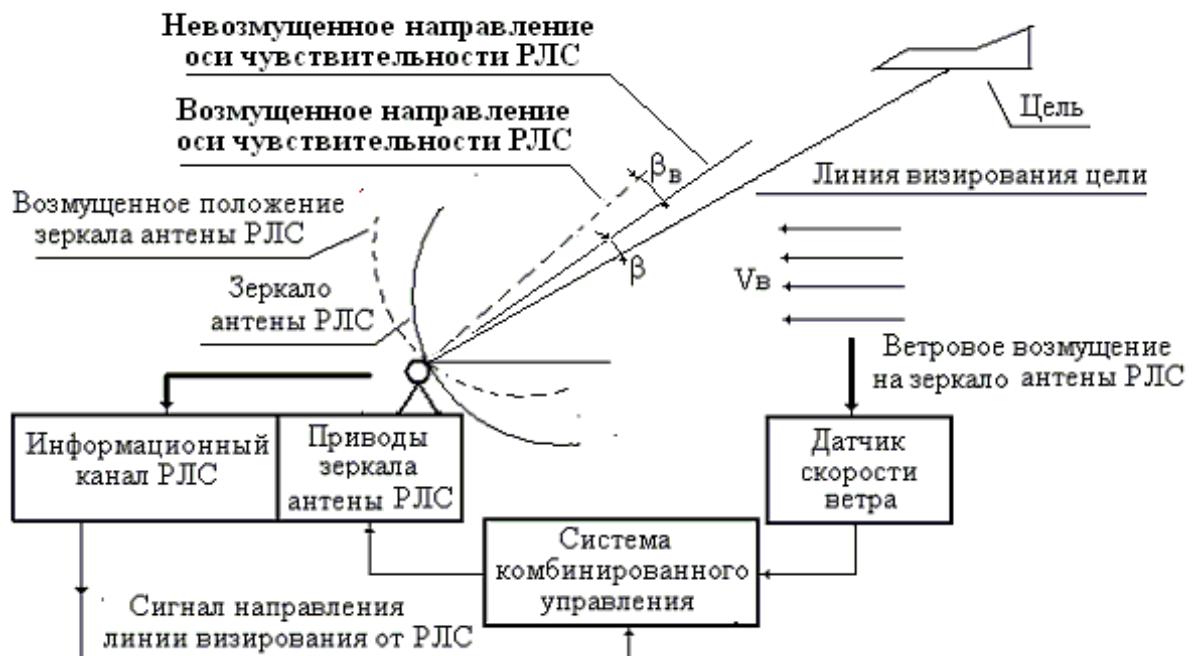


Рисунок 2.6 Пример реализации системы комбинированного управления по отклонению и возмущению

Система работает следующим образом. В основной контур управления поступают информационные сигналы от информационно–измерительной радиотехнической части РЛС, а также от датчиков положения зеркала антенны РЛС . Основная цель управления, реализуемая основным контуром состоит в обеспечении непрерывного слежения за визируемой целью и определении углов визирования, позволяющих определить ее положение в пространстве.

Однако на зеркало антенны действуют ветровые возмущения, что приводит к деформациям и неконтролируемому изменению его углового положения. В результате чего результаты измерений углов визирования цели осуществляются с погрешностями.

Повышение точности получаемой информации осуществляется дополнительным контуром управления по возмущению. При этом, измеряя скорость ветровых возмущений можно косвенно оценить величины действующих на зеркало антенны механических сил и моментов и компенсировать их влияние с использованием системы автоматических приводов, управляющих положением зеркала РЛС.

Рассматривая приведенный выше пример можно обратить внимание на то, что в общем случае направление линии визирования на цель определяется двумя углами  $\alpha$  и  $\beta$ , которые задают ее направление относительно некоторой базовой, связанной с РЛС системой координат. Очевидно, что реальная система управления РЛС должна осуществлять управление положением зеркала антенны по двум каналам.

Это говорит о том, что данная система управления РЛС относится к классу двухканальных систем, поскольку система управления представляет собой объединение двух систем, осуществляющих управление по каждой из двух выходных контролируемых независимых переменных  $\alpha$  и  $\beta$ .

Таким образом, системы управления могут иметь достаточно сложную организацию, обусловленную наличием нескольких каналов управления. Следовательно, можно выделить следующие подклассы систем управления:

**– одноканальных системах управления;**

**– многоканальных системах управления.**

При реализации замкнутых систем управления главная отрицательная обратная связь образует **основной замкнутый контур управления**. Однако, в ряде случаев для улучшения динамического качества систем управления, внутри основного контура управления формируются один или несколько дополнительных внутренних контуров.

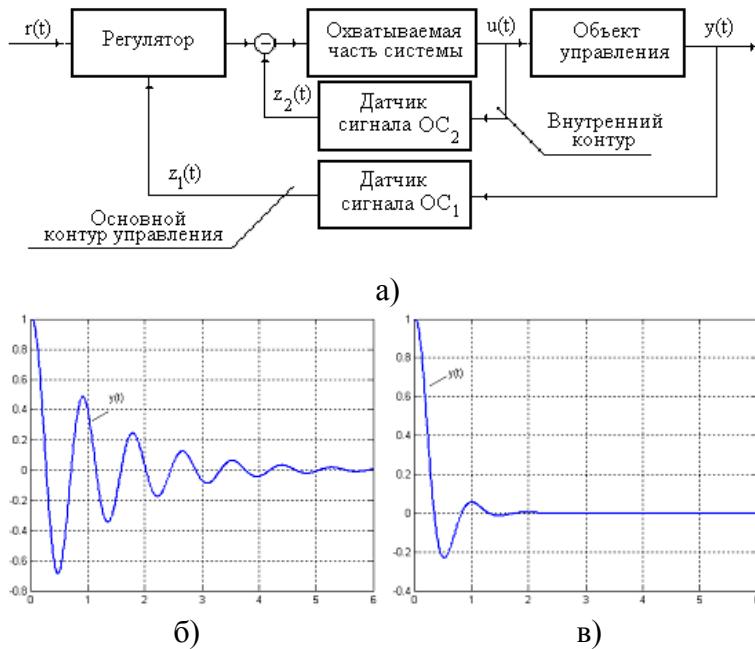


Рисунок 2.7 Структура двухконтурной системы управления и переходные процессы

В этом случае **система управления становится многоконтурной**. На рисунке 2.7а приведен пример организации двухконтурной системы управления с одним основным контуром управления, образованным главной обратной связью, и вспомогательным, внутренним контуром управления, способствующим улучшению динамики замкнутой системы.

Рисунки 2.7б и 2.7в иллюстрируют влияние вспомогательного внутреннего корректирующего контура на динамику системы управления. На рисунке 2.7б представлены переходные процессы имеющие колебательный характер в системе управления без внутреннего корректирующего контура. На рисунке 2.7в представлены переходные процессы в системе управления с внутренней

демпфирующей корректирующей обратной связью.

Таким образом, замкнутые системы управления могут иметь более сложную организацию, обусловленную наличием нескольких внутренних контуров, а следовательно можно выделить следующие подклассы систем управления:

- **одноконтурные системы управления;**
- **многоконтурные системы управления.**

Реализация многоконтурных структур систем управления в ряде случаев позволяет существенно повысить точность управления, а также улучшить динамику поведения автоматических систем в переходных процессах.

### **2.2.3 Общие принципы построения многомерных автоматических регуляторов и систем управления**

К многомерным системам автоматического управления относятся системы с нескольким управляющими входами и несколькими управляемыми, контролируемыми выходами.

Многомерные системы автоматического управления в общем случае представляют собой наиболее сложный класс систем управления с точки зрения их функциональной, структурной и информационной организации.

Сложность организации многомерных регуляторов и систем управления в существенной мере зависят от динамических свойств объекта управления.

Рассмотрим в качестве примера динамические особенности летательного аппарата аэrodинамического типа как объекта управления.

На рисунке 2.8 отражено распределение сил, действующих на ЛА при движении в атмосфере. На ЛА действуют следующие силы:

- сила земного притяжения  $G$ ;
- сила тяги двигательной установки  $P$ ;
- равнодействующая аэродинамических сил  $R_a$ .

Условием движения ЛА с постоянной скоростью, является равенство силы тяги двигательной установки  $P$  силе лобового аэродинамического сопротивления

$R_a^x$ , то есть  $R_a^x = \mathbf{P}$ . Условием прямолинейного движения ЛА в вертикальной плоскости является равенство вертикальной составляющей полной аэродинамической силы  $R_a^y$  – силе притяжения Земли  $\mathbf{G}$ , то есть  $R_a^y = \mathbf{G}$ .

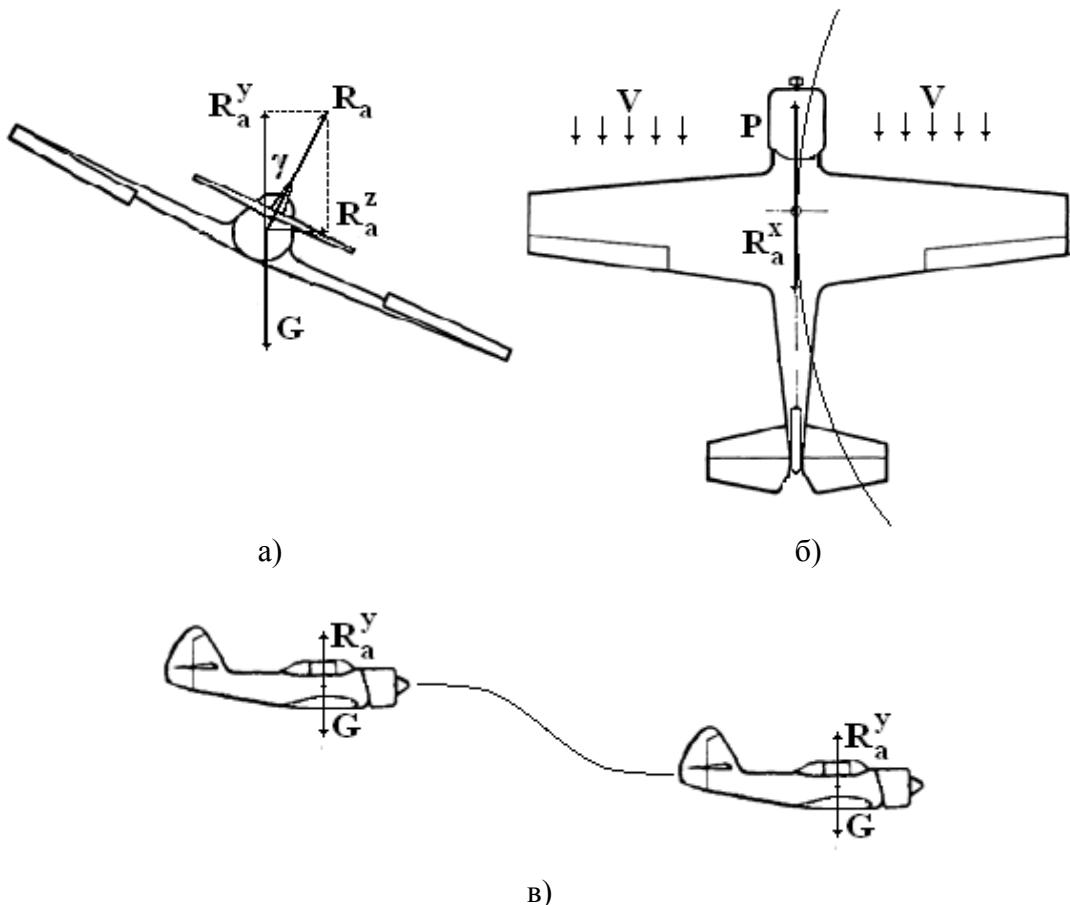


Рисунок 2.8 Летательный аппарат аэrodинамического типа как объект со свойствами зависимого управления пространственным движением

Маневрирование ЛА в горизонтальной плоскости осуществляется путем разворота ЛА относительно продольной оси симметрии по крену  $\gamma$  (рисунок 2.8а). При этом горизонтальная составляющая проекции аэродинамической силы  $R_a^z = \mathbf{R}_a \sin \gamma$  становится отличной от нуля, в результате чего ЛА движется в горизонтальной плоскости по криволинейной пространственной траектории (рисунок 2.8б).

Однако, как следует из рисунка 2.8а, при этом величина вертикальной составляющей полной аэродинамической силы  $R_a^y = \mathbf{R}_a \cos \gamma$  также изменяется,

$R_a^y < \mathbf{G}$  и ЛА “проваливается” под влиянием силы земного притяжения (рисунок 2.8в).

Следовательно, динамические особенности ЛА как объекта управления таковы, что параметры движения ЛА в вертикальной и горизонтальной плоскостях оказываются динамически зависимыми.

Это значит, что каналы управления движением ЛА в вертикальной и горизонтальной плоскости являются динамически взаимозависимыми.

Таким образом, можно выделить следующие основные **подклассы многомерных регуляторов и систем управления**:

- **системы зависимого регулирования (управления);**
- **системы независимого регулирования (управления).**

**Системы зависимого регулирования** (управления) отличаются тем, что при изменении в процессе управления какой либо одной выходной регулируемой переменной – значения других регулируемых переменных также изменяются.

**Системы независимого регулирования** отличаются тем, что при изменении в процессе управления какой либо одной выходной регулируемой переменной – значения других регулируемых переменных не изменяются.

В том случае, если динамические свойства объекта управления таковы, что выходные контролируемые переменные являются динамически независимыми, то система управления “распадается” на несколько независимых каналов управления. Каждый из каналов, при этом, может проектироваться и исследоваться отдельно, независимо друг от друга.

Такие системы управления представляют собой многомерные автоматические системы независимого регулирования.

На рисунке 2.9 приведен пример возможной структуры двухканальной системы управления для случая, когда выходные контролируемые переменные объекта управления динамически полностью независимы. В этом случае система управления представляет собой двухканальную систему с полностью независимыми контурами управления.

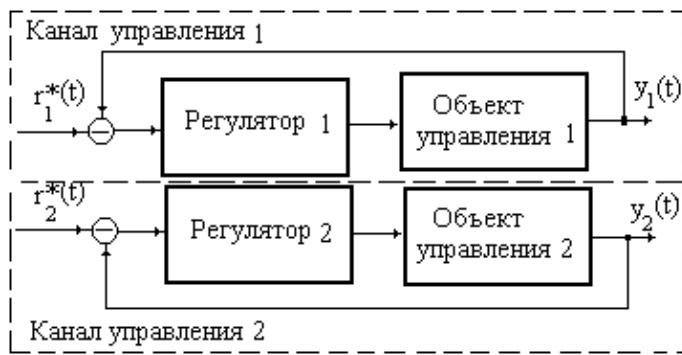


Рисунок 2.9 Пример организации двухканальной системы независимого, несвязанного регулирования

В том случае, если динамические свойства объекта управления таковы, что выходные контролируемые переменные являются динамически зависимыми, то выбор наиболее эффективной организации контуров управления в существенной мере определяется степенью динамической взаимосвязи каналов управления, а также уровнем требований к показателям точности и качества управления.

Если динамическая взаимосвязь регулируемых переменных – несущественная, то взаимным влиянием каналов управления можно пренебречь и проектировать систему управления как систему с независимыми и несвязанными через измерения каналами управления.

В этом случае эффект от взаимного влияния каналов управления можно рассматривать как эффект от некоторых действующих на систему возмущений, приводящих к снижению точности и качества управления . Такие системы управления относятся к классу систем ***зависимого несвязанного управления***.

Если динамические свойства объекта управления таковы, что динамическая взаимосвязь регулируемых переменных является существенной, то для обеспечения высокой точности и качества управления взаимное влияние каналов управления можно компенсировать путем специальной организации контуров ***связанного регулирования (управления)***.

Таким образом, можно выделить следующие классы ***автоматических систем и регуляторов***:

- класс систем несвязанного регулирования (управления);
- класс систем связанного регулирования (управления).

К классу *систем несвязанного регулирования* (управления) относятся такие системы зависимого регулирования, в которых регуляторы в каждом канале управления не используют информацию о текущих значениях регулируемых переменных по другим каналам.

На рисунке 2.10 приведен пример структуры многомерной системы зависимого несвязанного регулирования.



Рисунок 2.10 Пример организации двухканальной системы зависимого, несвязанного регулирования

К классу *систем связанного регулирования* (управления) относятся такие системы зависимого регулирования, в которых регуляторы по каждому каналу при формировании сигналов управления используют информацию о текущих значениях регулируемых переменных по другим каналам.

На рисунке 2.11 приведен пример организации системы связанного регулирования.

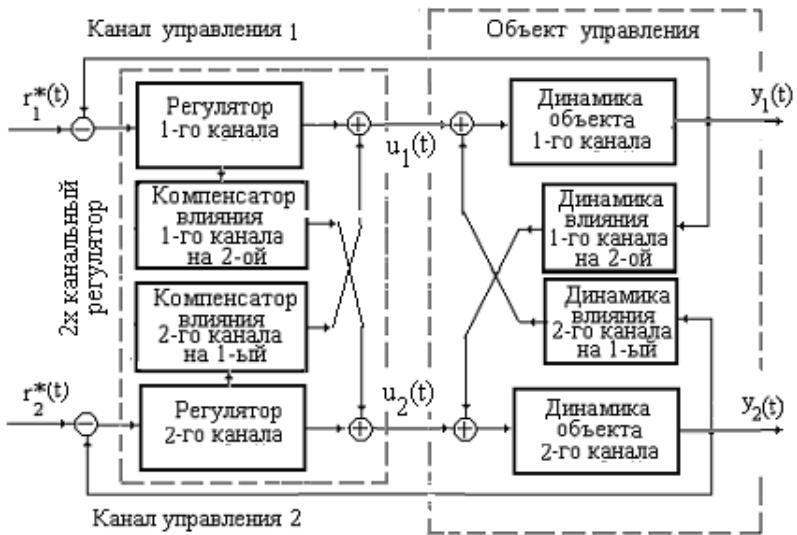


Рисунок 2.11 Пример организации двухканальной системы  
связанного регулирования

Как следует из рисунка 2.11 для уменьшения или полного исключения динамической взаимосвязи контролируемых переменных, регулятор каждого канала управления содержит динамический фильтр, предназначенный для компенсации взаимного влияния каналов управления.

#### **2.2.4 Автоматические регуляторы и системы управления с многоуровневой иерархической организацией**

Системы управления могут иметь различную по сложности внутреннюю многоуровневую структуру с иерархической организацией.

На рисунке 2.12 представлены основные уровни *иерархической организации систем управления*.

Как следует из рисунка 2.12 простейшие автоматические системы имеют организацию, соответствующую низшему иерархическому уровню – уровню регулирования.

Основное назначение этих систем состоит в регулировании или целенаправленном изменении какой–либо одной физической переменной.

**Такие системы называются системами автоматического регулирования (САР) или автоматическими регуляторами.**

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 80 из 204*

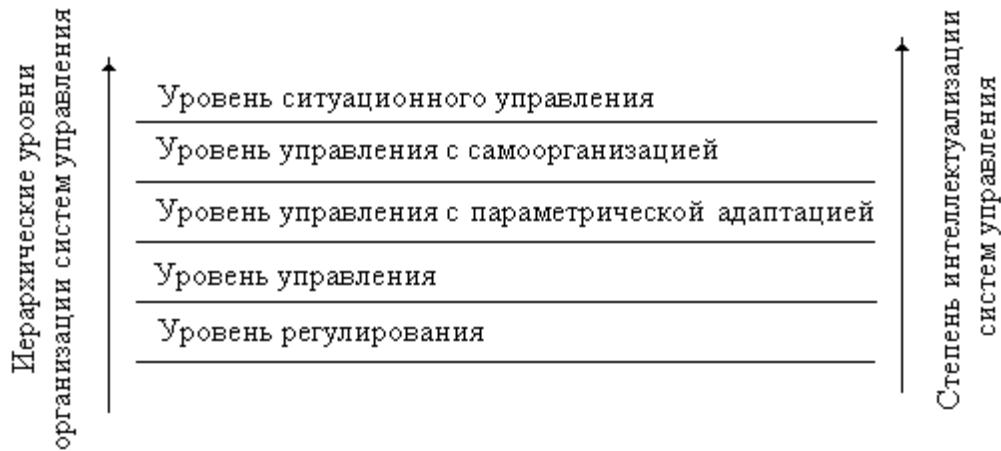


Рисунок 2.12 Основные принципы иерархической организации систем управления

Примерами систем автоматического регулирования являются:

- системы автоматического регулирования температурных режимов;
- системы автоматического регулирования скорости углового или линейного перемещения элементов технологического оборудования;
- системы автоматического углового или линейного позиционирования элементов технологического оборудования;
- и т.д.

Автоматические системы управления могут иметь более сложную – двухуровневую или многоуровневую иерархическую организацию.

***В системах автоматического управления (САУ) достижение основной, системной цели управления обеспечивается целенаправленным, контролируемым изменением всех физических переменных, от значений которых зависит достижение основной системной цели управления.***

Таким образом, системы управления с неразвитой структурой имеют двухуровневую организацию, а именно:

- высший иерархический уровень – уровень управления;
- низший иерархический уровень – уровень регулирования или уровень исполнения управления.

Система управления на высшем иерархическом уровне формирует и пе-

редает на низший, исполнительный уровень управления командные сигналы, отрабатываемые и реализуемые автоматическими регуляторами.

Поступившие на низший иерархический уровень управления командные сигналы используются в качестве задающих воздействий на автоматические регуляторы, образующие нижний уровень организации управления – уровень автоматического регулирования.

На рисунке 2.13 представлена обобщенная блок-схема системы автоматического управления, отражающая ее двухуровневую организацию.

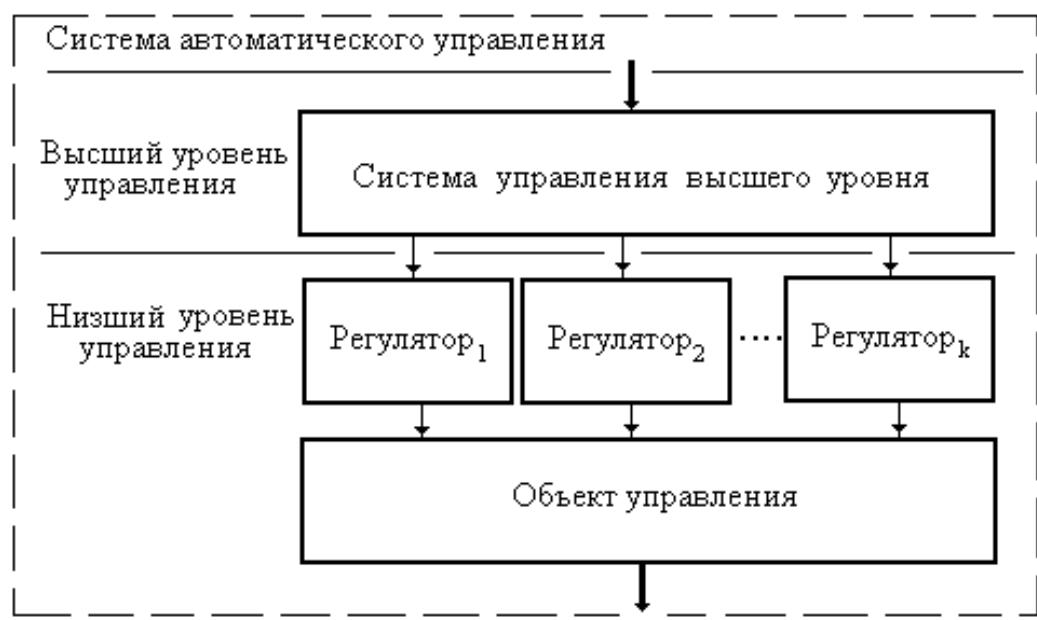


Рисунок 2.13 Иерархическая организация систем автоматического управления

В качестве примера реализации двухуровневой системы управления, рассмотрим иерархическую организацию автопилота самолета, выполняющего функции автоматической стабилизации летательного аппарата (ЛА) по высоте и по направлению движения.

В упрощенной форме структура, отражающая иерархическую организацию автопилота представлена на рисунке 2.14.



Рисунок 2.14 Функциональная блок-схема автопилота

Автопилот работает следующим образом. В контур управления автопилота на высшем иерархическом уровне поступает измерительная информация, которая отражает текущие значения высоты полета, направление вектора скорости самолета и характеризует текущее динамическое состояние летательного аппарата как объекта управления.

В результате обработки измерительной информации в бортовом вычислителе в соответствии с алгоритмами управления высшего иерархического уровня, формируются командные сигналы на нижний, исполнительный уровень управления, реализуемый системой автоматических рулевых приводов, которые обеспечивают требуемое угловое отклонение управляющих аэродинамических поверхностей летательного аппарата.

При отклонении аэродинамических поверхностей изменяются действующие на летательный аппарат аэродинамические силы и моменты, что приводит к изменению его угловой ориентации по отношению к набегающему воздушному потоку. Вследствие изменения ориентации ЛА, происходит изменение действующих на ЛА аэродинамических сил, в результате чего происходит требуемое изменение пространственного положения ЛА, так, чтобы достигалась основная цель управления.



Рисунок 2.15 Функциональная блок-схема автоматического рулевого привода ЛА

Организация управления на нижнем, исполнительном уровне иллюстрируется рисунком 2.15, на котором представлена функциональная блок-схема автоматического рулевого привода летательного аппарата, предназначенного для управления управляемыми аэродинамическими поверхностями.

На вход рулевого привода ЛА от автопилота поступает командный сигнал  $r(t)$ , формируемый системой управления высшего уровня, представляющей собой задающее воздействие или “уставку”, которая определяет величину требуемого значения угла  $\delta$  – углового отклонения управляемой аэродинамической поверхности от своего нейтрального положения.

Этот командный сигнал поступает в вычислитель (контроллер) где сравнивается с информационным сигналом с датчика углового положения аэродинамической поверхности и формируется сигнал управления, поступающий на входы каскадов предварительного усиления, каскадов усиления сигнала по мощности и, далее, на обмотки управления исполнительного силового привода электрогидравлического или электромеханического типа.

Силовой привод создает управляющие силы или моменты, которые через редуктор воздействует на управляемые аэродинамические поверхности, заставляя их отклоняться на заданный угол.

Таким образом, выше были рассмотрены частные примеры систем управления с двухуровневой иерархической организацией:

- с организацией управления на высшем иерархическом уровне;
- организацией управления на нижнем иерархическом уровне – уровне регулирования.

Необходимо иметь в виду, что в процессе нормального функционирования системы, структура и параметры модели объекта управления могут непрогнозируемым образом существенно изменяться. Влияние неопределенностей, обусловленных случайным, непрогнозируемым характером изменением динамических характеристик объектов управления может привести к потере качества управления либо, к потере динамической устойчивости систем управления.

На рисунке 2.16 отражены графики процессов на выходе динамически устойчивой и динамически неустойчивой систем управлений, которые позволяют сделать вывод о том, что ***динамически неустойчивые системы управления являются функционально неработоспособными.***

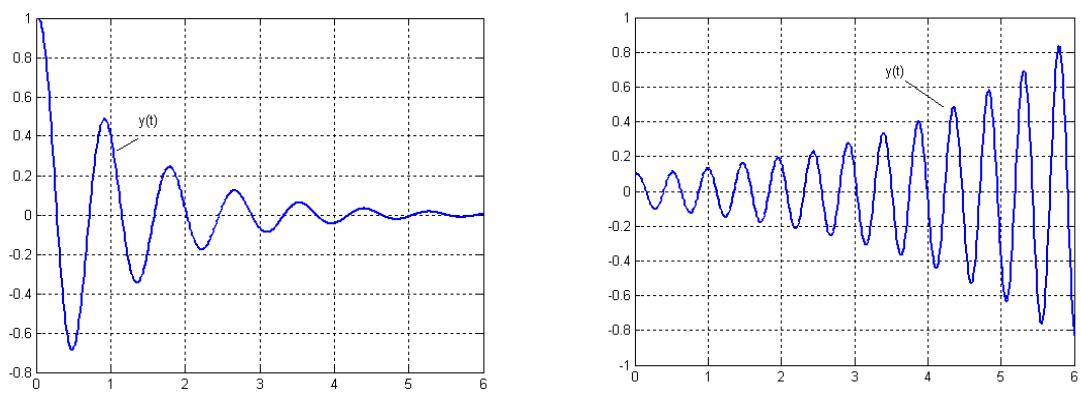


Рисунок 2.16 Переходные процессы в системах автоматического управления  
а) в динамически устойчивой системе управления;  
б) в динамически неустойчивой системе управления

Структурно–параметрические неопределенностии динамических моделей объектов управления, внешней среды и внешних воздействий могут быть обусловлены их стохастическим, нестационарным характером, вследствие чего, в процессе нормального функционирования системы, структура и параметры моделей объекта управления и функциональных элементов могут непрогнозируемым образом изменяться, в результате чего динамические свойства всей системы управления в целом существенно изменяются.

*Основная цель решения задач динамического проектирования систем управления, функционирующих в условиях неопределенностей, состоит в формировании такой структуры системы управления и синтезе таких алгоритмов управления, при реализации которых влияние на динамику и качество функционирования системы управления различных источников неопределенностей – было несущественным.*

Свойство систем автоматического управления сохранять динамическую устойчивость и качество функционирования в условиях влияния различных источников неопределенностей, называется *робастной устойчивостью*.

Таким образом, одним из необходимых общих требований ко всем системам автоматического управления является *обеспечение свойств их робастной устойчивости и качества*.

Качество управления и динамическую устойчивость систем управления в случае существенных изменений динамических характеристик объекта управления можно обеспечить путем изменения в процессе функционирования системы значений параметров (настроек) и/или структуры алгоритмов управления, которые реализуются регулятором или контроллером основного контура управления. Такой принцип организации управления *называется управлением с адаптацией или адаптивным управлением*.

*В том случае, если реализация адаптивного управления предполагает автоматическую подстройку параметров регулятора основного контура управления при его неизменной структуре, то такой принцип управления представляет собой принцип управления с параметрической адаптацией или принцип управления с самонастройкой, а сам регулятор называется самонастраивающимся.*

На рисунке 2.17 приведен пример возможной структуры адаптивной самонастраивающейся системы управления.



Рисунок 2.17 Структура адаптивной самоадаптирующейся системы управления

Как следует из рисунка, адаптивная самоадаптирующаяся система имеет более сложную структуру управления с многоуровневой иерархической организацией. Нижнему иерархическому уровню управления соответствует основной контур управления с главной отрицательной обратной связью. В рассматриваемом примере регулятор основного контура управления имеет три свободных настраиваемых параметра, значения которых можно изменять в процессе самонастройки, что приводит к изменению динамических свойств внутреннего контура управления, а также всей системы управления в целом.

Высший иерархический уровень управления образуется контуром самонастройки, в состав которого входит блок самонастройки, реализующий соответствующие алгоритмы самонастройки (адаптации). Этот блок формирует желаемые, оптимальные значения настраиваемых параметров основного контура управления, при которых обеспечивается желаемое качество системы и ее динамическая устойчивость, и передает эти значения в адаптивный регулятор основного контура.

Алгоритмы самонастройки, их структура и параметры определяются на стадии динамического расчета системы управления исходя из условий обеспечения устойчивости и качества проектируемой адаптивной системы управления, функционирующей в условиях неопределенностей.

*В том случае, если реализация адаптивного управления предполагает автоматическое изменение как структуры, так и параметров регулятора основного контура управления, то такой принцип управления представляет собой принцип управления с структурно-параметрической адаптацией или принцип управления с самоорганизацией, а сам адаптивный регулятор называется самоорганизующимся.*

Очевидно, что адаптивные самоорганизующиеся системы управления имеют еще более сложную структурную иерархическую организацию.

В ряде случаев во время работы систем управления возможны непрогнозируемые изменения условий их функционирования, носящие ситуационный характер. Эти изменения, в частности, могут быть связаны с функциональными нарушениями и иными нештатными ситуациями в контурах систем управления.

В этом случае для сохранения работоспособности и возможности достижения цели управления необходимо так организовать структуру системы управления, чтобы оценивалось влияние на систему управления возмущений ситуационного характера, принималось решение о необходимости изменения функциональной, информационной и алгоритмической организации системы, реализуя, таким образом, *управление на ситуационном уровне*.

В этом случае система управления приобретает новое, дополнительное качество, которое позволяет системе при существенных изменениях условий ее функционирования, обеспечить высокую надежность достижения цели управления, сохранить все основные эксплуатационные характеристики системы, а также ее динамическое качество.

Таким образом, придание системам управления новых, важных свойств, которые позволяют обеспечить им возможность нормального функционирования, возможность достижения цели управления и сохранения требуемых характеристик точности и динамического качества в условиях существенного влияния на систему различных источников неопределенностей, может быть достигнуто с использованием и реализацией более сложных функциональных, алго-

ритмических, информационных структур, а также *интеллектуальных технологий* обработки информации и управления.

Очевидно, что усложнение структур систем управления, приводящих к увеличению числа уровней их иерархической организации, соответствует возрастанию их интеллектуальных свойств (см. рисунок 2.12).

Анализ иерархической организации систем управления, функционирующих в условиях широкого спектра неопределенностей, позволяет говорить о возможности реализации систем управления, обладающих новыми, развитыми *интеллектуальными свойствами*.

*Системы управления, которые благодаря своей функциональной, структурной, информационной и алгоритмической организации, использованию и реализации для представления и обработки информации интеллектуальных технологий способны обеспечить высокоэффективное достижение цели управления в условиях существенного влияния структурных, параметрических, информационных, ситуационных и других источников неопределенностей, относятся к классу интеллектуальных систем управления.*

Создание интеллектуальных систем управления, имеющих сложную внутреннюю информационно–алгоритмическую структуру, стало возможным в связи с развитием современных высокопроизводительных цифровых вычислительных средств и реализации на их основе новых интеллектуальных технологий обработки информации и управления.

К интеллектуальным технологиям обработки информации и управления относятся, в частности, следующие:

- технологии экспертного управления (*Data Based Control*);
- технологии управления, основанные на реализации алгоритмов нечеткой логики (*Fuzzy Logic Control*);
- технологии управления, основанные на реализации нейросетевых алгоритмов обработки информации (*Neural Network Control*);

– другие интеллектуальные и комбинированные технологии.

На рисунке 2.18 приведена блок-схема интеллектуальной адаптивной самонастраивающейся системы управления, отражающая один из возможных принципов организации контура адаптации на основе использования и реализации интеллектуальных нейросетевых технологий обработки информации и управления.

В рассматриваемом примере интеллектуальная адаптивная система управления имеет многоуровневую организацию. Основной контур управления нижнего уровня реализует общий принцип организации управления – принцип управления с отрицательной обратной связью. Контур управления высшего иерархического уровня образуется нейросетевым контуром самонастройки адаптивного регулятора основного контура.



Рисунок 2.18 Блок-схема адаптивной системы управления с нейросетевым контуром самонастройки

Такая организация структуры интеллектуальной системы управления позволяет обеспечить высокоэффективное достижение системой цели управления, высокие характеристики точности и динамического качества в условиях существенных изменений динамических свойств объекта управления в процессе функционирования системы.

Использование интеллектуальных нейросетевых и нечетких технологий эффективно в тех случаях, когда определение адекватной структуры и параметров модели объекта управления аналитическими методами представляет значительную проблему, либо когда модель имеет сложный нелинейный, неопределенный, нестационарный характер.

В ряде случаев для повышения надежности функционирования систем управления в условиях действующих на систему и объект управления возмущений, имеющих ситуационный характер, в контур управления может быть включен человек–оператор.

На рисунке 2.19 представлена блок-схема системы управления, которая иллюстрирует один из возможных принципов организации *динамических человеко-машинных (“ручных”) систем управления*.

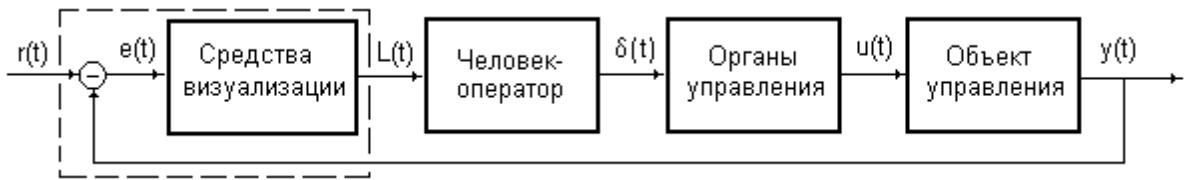


Рисунок 2.19 Блок-схема динамической человеко-машинной (“ручной”) системы управления

Система управления функционирует следующим образом. Оператор, наблюдая с помощью средств визуализации предъявляемый ему информационный сигнал, воздействует на органы ручного управления (в частности на “ручку” управления, джойстик, штурвал) и, таким образом формирует управляющее воздействие на объект управления, что приводит к целенаправленному изменению его динамического состояния.

Таким образом, рассмотренная структура организации управления предполагает функционирование человека–оператора в динамическом режиме в составе основного замкнутого контура управления.

Осуществляя управление в динамическом режиме, человек–оператор может одновременно контролировать текущую ситуационную обстановку и в за-

висимости от ситуации принимать решение о необходимости реконфигурирования системы управления как на функциональном, так и на информационном уровнях, реализуя таким образом функции ситуационного управления, что обеспечивает высокие значения показателей надежности ее функционирования и живучести.

Рассмотрев основные общие принципы концептуальной организации систем автоматического управления, перейдем теперь к рассмотрению фундаментальных теоретических, математических и методологических основ решения проблем их динамического проектирования и расчета.

## **2.3 Математические модели систем автоматического управления**

Методы теории автоматического управления, направленные на решение основной задачи этапа динамического проектирования систем управления, связанной с синтезом алгоритмов обработки информации и управления, основываются на использовании математических моделей этих систем и действующих на них внешних воздействий.

Использование математических моделей систем управления позволяет разработчику решать все основные задачи, связанные с структурно-параметрическим синтезом алгоритмов управления, а также с исследованием синтезированных алгоритмов с целью определения показателей их эффективности и качества как аналитическими методами, так и методами имитационного моделирования.

В процессе динамического расчета, использование математических моделей позволяет методами математического и имитационного моделирования оценивать характер переходных процессов в системах управления, возникающих под влиянием внешних воздействий и, таким образом, оценивать значения показателей точности, показателей динамического качества проектируемых систем автоматического управления, и, соответственно, значения показателей эффективности синтезированных алгоритмов обработки информации и управления.

Использование математических моделей систем управления и действующих на них внешних воздействий позволяет решать все задачи динамического проектирования и расчета систем управления не на физическом, а на виртуальном уровне.

Рассмотрим обобщенные структуры моделей систем управления, общую методологию формирования математических моделей, а также вопросы классификации систем управления в зависимости от особенностей их математического описания.

### 2.3.1 Динамические модели систем автоматического управления

Методы теории автоматического управления, позволяют решать все задачи динамического расчета и проектирования систем управления, синтеза алгоритмов управления, а также их исследования основываясь на использовании математических моделей этих систем и действующих на них внешних воздействий.

Системы автоматического управления представляют собой физические динамические системы, то есть системы, которые изменяют свое внутреннее динамическое состояние *во времени* под влиянием действующих на систему внешних воздействий. Поведение динамических систем в переходных процессах определяется характером действующих на систему внешних воздействий, а также их собственными внутренними динамическими свойствами.

Таким образом, математические модели систем управления должны связывать модели внешних воздействий на систему и модели реакции системы на эти воздействия.

Обобщенные структуры математических моделей динамических систем могут быть представлены в графической форме в виде блок–схем.

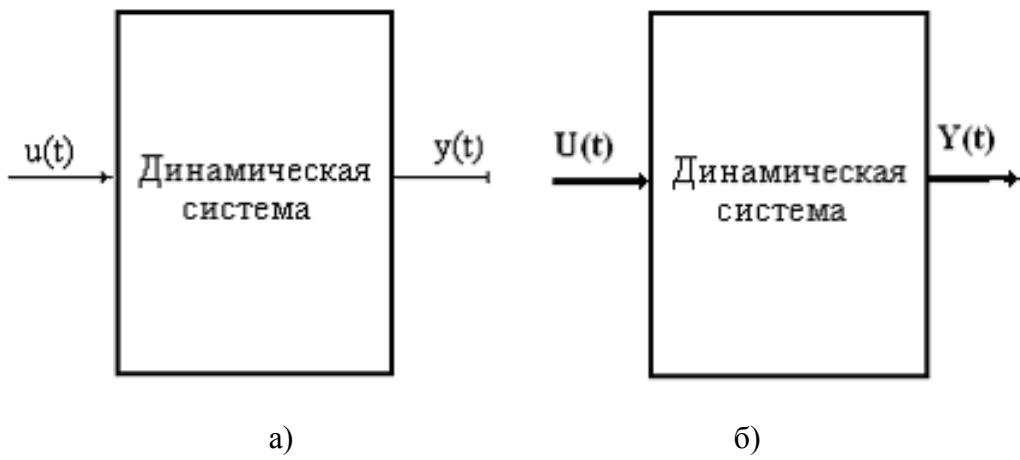


Рисунок 3.1 Обобщенная структура модели динамической системы

- Структура модели динамической системы с одним входом и одним выходом;
- Структура модели динамической системы с векторными входом и выходом

На рисунке 3.1а изображена блок-схема модели системы с одним управляющим входом и одним контролируемым выходом. Модель системы связывает в аналитической форме математические модели управляющего воздействия и модель выходного сигнала системы. При этом формы представления моделей могут быть различными.

В обобщенном виде модель одномерной динамической системы в этом случае может быть представлена следующим образом:

$$f_s(p, y, u, \theta, t) = 0,$$

где

$f_s(*)$  – обобщенный оператор, определяющий структуру модели системы;

$p = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования;

$\theta$  – вектор параметров модели системы;

$u$  – входное воздействие на систему;

$y$  – выходной сигнал системы;

$t$  – время.

На рисунке 3.1б изображена блок-схема модели многомерной динамической системы с несколькими управляющими входами и несколькими контролируемыми выходами, модели которых представлены в векторной форме. Модель этой системы связывает в аналитической форме математические модели этих двух векторных процессов. Очевидно, что в этом случае модель системы будет иметь существенно более сложную структуру, позволяющую отображать многомерные связи между моделями векторных процессов. Формы представления моделей многомерных систем в этом случае также могут быть различными.

Обобщенная модель многомерной динамической системы может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{F}_s(p, \mathbf{u}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \Theta, t) = 0,$$

где

$\mathbf{F}_s(*)$  – обобщенный матричный оператор, определяющий структуру модели системы;

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 95 из 204*

$p = \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования;

$\Theta$  – матрица коэффициентов– параметров модели системы;

$u$  – вектор входных воздействий на систему;

$x$  – вектор внутренних динамических переменных состояния системы;

$y$  – вектор выходных переменных системы;

$t$  – время.

Структуры обобщенных моделей динамических систем могут быть раскрыты и конкретизированы в зависимости от форм их представления, выбор которых зависит от многих факторов, в частности:

- от динамических особенностей моделируемой системы;
- от характеристик и свойств процессов на входах и выходах системы;
- от используемых методов синтеза алгоритмов обработки информации и управления, ориентированных на вполне определенную форму представления моделей систем, для которых процесс синтеза оказывается наиболее простым, удобным и эффективным с точки зрения его реализации .

***Формирование математических моделей динамических систем и их преобразование представляет собой важный и ответственный этап динамического расчета систем автоматического управления.***

Рассмотрим вопросы, связанные с формированием математических моделей систем управления, с их преобразованием и классификацией.

### **2.3.2 Общая методология формирования математических моделей систем управления**

Формирование математической модели системы управления представляет собой начальную стадию этапа ее динамического расчета, который следует за этапом концептуального проектирования системы, в результате реализации которого формируется функциональная блок–схема системы, отражающая ее функционально–информационную организацию.

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 96 из 204*

Основой для формирования математической модели системы управления является информация, отражающая как ее развернутую функциональную организацию, так и информацию, содержащую основные технические и эксплуатационные характеристики конкретных функциональных элементов системы, выбор которых осуществляется на основе предварительно полученных результатов механических, энергетических, электрических и других расчетов.

При формировании математической модели системы управления каждый функциональный блок с учетом информационных связей между ними представляется своей математической моделью. Таким образом, математическая модель системы управления представляет собой совокупность моделей всех функциональных элементов системы.

Полученная математическая модель системы управления может представлять собой в общем случае смешанную систему алгебраических, дифференциальных и т.д. уравнений, что существенно затрудняет процесс динамического расчета проектируемой системы автоматического управления и ее исследования.

*В теории автоматического управления разработаны методы динамического расчета и исследования систем автоматического управления, ориентированные на вполне определенный класс моделей систем управления и некоторые стандартные формы их представления.*

Поэтому, преобразование полученной математической модели и приведение ее к некоторой стандартной, канонической форме, на использование которой рассчитаны эффективные методы динамического расчета и исследования систем автоматического управления, разработанные в рамках теории автоматического управления является важным этапом формирования расчетной математической модели системы.

Рассмотрим общую методологию формирования математических моделей систем управления на простом примере формирования математической модели рассмотренного выше автоматического рулевого привода автопилота. Функциональная блок–схема привода отражена на рисунке 3.2.

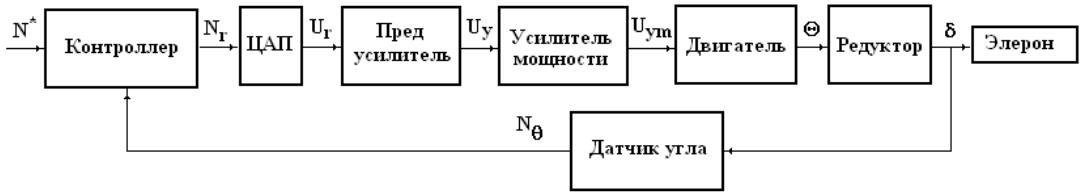


Рисунок 3.2 Функциональная блок–схема рулевого привода

Рассмотрим функциональную организацию и принцип работы автоматического рулевого привода более подробно.

На вход рулевого привода ЛА от автопилота поступает командный сигнал  $r(t)=N^*$ , представляющий собой цифровой код задающего воздействия или “установку”, которая определяет величину требуемого значения угла  $\delta$  – углового отклонения управляемой аэродинамической поверхности (элерона) от своего нейтрального положения.

Этот командный сигнал поступает в вычислитель (контроллер), где сравнивается с информационным сигналом  $N_\theta$  с датчика углового положения аэrodинамической поверхности и формируется цифровой код сигнала управления  $N_r$ . Этот код поступает на вход цифро–аналогового преобразователя (ЦАП), результат преобразования  $U_r$  поступает на каскады предварительного усиления, которые усиливают аналоговый сигнал до уровня  $U_y$ , необходимого для “раскачки” выходных каскадов усилителя мощности. Выходной сигнал усилителя мощности  $U_{ym}$  поступает на обмотки управления мощного электромеханического привода, вращательное движение выходного вала которого  $\Theta$  через редуктор передается на управляемые аэродинамические поверхности летательного аппарата, обеспечивая их требуемое угловое позиционирование  $\delta$ .

Сформируем некоторые обобщенные модели функциональных элементов привода и всего рулевого привода в целом.

Формирование моделей функциональных элементов привода осуществляется на основе использования моделей физических процессов, лежащих в основе функционирования того или иного устройства. Рассмотрим некоторые обобщенные модели этих устройств.

*Обобщенная модель контроллера*

$$\begin{cases} N_e(t)|_{t=i\Delta T} = N^*(t)|_{t=i\Delta T} - N_\theta^i(t)|_{t=i\Delta T} \\ N_r(t)|_{t=i\Delta T} = Z\{N_e(t)|_{t=i\Delta T}\} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} N_e^i = N^* - N_\theta^i \\ N_r^i = Z\{N_e^i\} \end{cases},$$

где  $\Delta T$  – шаг дискретизации процессов по времени;

$i$  – порядковый номер шага дискретизации процессов;

$Z\{\cdot\}$  – разностный оператор.

*Обобщенная модель ЦАП*

$$U_r(t) = \begin{cases} K_{ЦАП} \cdot N_r^i, & \text{при } t \geq i \cdot \Delta T \\ K_{ЦАП} \cdot N_r^i, & \text{при } t \leq (i+1) \cdot \Delta T \end{cases}$$

где  $K_{ЦАП}$  – статический коэффициент передачи ЦАП;

*Обобщенная модель предварительного усилителя*

$$U_y(t) = K_y \cdot U_r(t)$$

где  $K_y$  – коэффициент усиления усилителя;

*Обобщенная модель усилителя мощности*

$$\begin{cases} T_{ym} \dot{U}_{ym} + U_{ym} = K_{ym} \cdot U_y(t) \\ U_{ym} = U_{max} \cdot \text{sign}(U_{ym}) \quad \text{при } |U_{ym}| > U_{огр} \end{cases}$$

где  $K_{ym}, T_{ym}$  – коэффициент усиления и постоянная времени усилителя мощности соответственно;

$U_{огр}$  – входное напряжение, при котором наступает ограничение выходного сигнала;

*Обобщенная модель цифрового датчика угла*

$$N_\theta^i = E\{K_{ДУ} \cdot \delta^i + 0.5\}$$

где  $E\{\cdot\}$  – целая часть выражения;

$K_{ЦАП}$  – статический коэффициент передачи цифрового датчика угла;

*Обобщенная модель редуктора*

$$\delta(t) = \delta\{\theta(t), \Omega(t), M_{uu}(t)\}$$

где  $\delta\{\cdot\}$  – нелинейная в общем случае зависимость угла отклонения аэродинамической поверхности  $\delta$  от угла поворота ротора двигателя и угловой скорости его вращения с учетом наличия люфта в редукторе, а также действующего на аэродинамическую поверхность шарнирного момента, обусловленного влиянием аэродинамических сил.

### *Обобщенная модель двигателя*

$$\begin{cases} i_y = i_y \{ \Omega(t), U_{ym}(t) \} \\ \Omega(t) = \Omega \{ M_h, M_{\partial\theta}(i_y) \} \\ \dot{\Omega}(t) = \ddot{\theta}(t) \end{cases}$$

где  $i_y\{\cdot\}$  – нелинейная зависимость тока управления от напряжения на обмотках управления и угловой скорости вращения ротора двигателя;

$\Omega\{\cdot\}$  – нелинейная зависимость угловой скорости вращения ротора двигателя от момента нагрузки на валу двигателя и врачающего момента двигателя.

Приведенная система уравнений представляет собой математическую модель всего автоматического привода в целом. Данная система уравнений носит смешанный характер, поскольку в нее входят линейные и нелинейные: алгебраические уравнения, линейные и нелинейные дифференциальные уравнения, а также разностные, дискретные по времени уравнения.

Такая модель представляет значительную сложность для ее непосредственного применения при решении задач динамического расчета и проектирования автоматического привода. Поэтому, на начальной стадии динамического расчета автоматического привода целесообразно использовать преобразованные, упрощенные модели функциональных элементов, которые могут быть получены с учетом особенностей режимов работы элементов привода. Так, в частности:

- в том случае, если интервал  $\Delta T$  дискретизации по времени процессов обновления значений информационных сигналов мал, то система разностных уравнений контроллера может быть с достаточной степенью точности заменена

эквивалентными линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями.

– в том случае, если разрядность цифровых информационных кодов большая, то дискретностью нелинейных моделей цифро-аналогового преобразователя и цифрового датчика угла можно пренебречь и заменить их модели эквивалентными линейными алгебраическими моделями.

– в том случае, если значения управляющих напряжений незначительны и усиливательные каскады работают в линейном режиме, то эффектами “насыщения” каскадов можно пренебречь и модели усилителей заменить эквивалентными линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями.

– в том случае, если влияние момента нагрузки (шарнирного момента) на динамические свойства силовой части привода незначительно, то нелинейная модель двигателя может быть заменена эквивалентным линейными дифференциальным уравнением.

– в том случае, если влиянием нежесткости элементов редуктора, а также наличием люфта между элементами передачи можно пренебречь, то нелинейная модель редуктора может быть заменена эквивалентным линейными алгебраическим уравнением.

Таким образом, исходная модель автоматического привода может быть сведена к смешанной системе линейных алгебраических и дифференциальных уравнений, а путем последующих достаточно простых эквивалентных преобразований – приведена к линейной модели в стандартной канонической форме вида:

$$\ddot{\delta} + a_1(\Theta)\dot{\delta} + a_2(\Theta)\delta + a_3(\Theta)\delta^* = b_0(\Theta)\delta^*,$$

где  $a_i(\Theta), b_j(\Theta)$  – коэффициенты линейного дифференциального уравнения, зависящие как от характеристик, параметров моделей элементов привода, так и от структуры и параметров принятого закона регулирования.

$\Theta$  – вектор параметров принятого закона регулирования.

$\delta^*$  – требуемое значение угла отклонения аэродинамической поверхности.

Таким образом, одной из основных задач динамического расчета систем управления является синтез (определение) такой структуры и вектора параметров  $\Theta$ , при которых характеристики точности, а также динамические свойства системы, представленной своей моделью удовлетворяют заданным требованиям.

Выбор метода динамического расчета системы управления в существенной мере зависит от особенностей ее математического описания. Поэтому рассмотрим вопросы классификации систем управления в зависимости от особенностей их математического описания более подробно.

### **2.3.3 Классификация систем управления в зависимости от особенностей их математического описания**

Решение задачи определения классификационной принадлежности проектируемой системы управления к тому или иному классу, в зависимости от ее динамических особенностей представляет собой важную проблему при выборе метода синтеза алгоритмов управления, а также на этапе формирования математической модели системы, ее преобразования и приведения к наиболее эффективной форме.

Как было отмечено выше, математические модели динамических систем и формы их представления определяются особенностями динамических физических процессов в контурах систем. Поэтому прежде чем перейти к рассмотрению различных форм математического описания систем автоматического управления, рассмотрим вопросы их классификации.

На рисунке 3.3 приведена классификация систем управления в зависимости от особенностей их математического описания.

Как следует из приведенной выше схемы можно выделить следующие основные классы систем автоматического управления:

- **непрерывные системы управления**, к которым относятся системы, процессы в каждой точке функциональной структуры которых являются непрерывными функциями времени.

- **дискретные системам управления**, к которым относятся системы, процессы в каждой точке функциональной структуры которых являются дискретными функциями времени.
- **детерминированные системы управления**, к которым относятся системы, модели которых носят вполне определенный характер и могут быть представлены аналитическими выражениями.
- **стохастические системы управления**, к которым относятся системы, структура и параметры моделей которых в каждый момент времени могут принимать случайные значения.

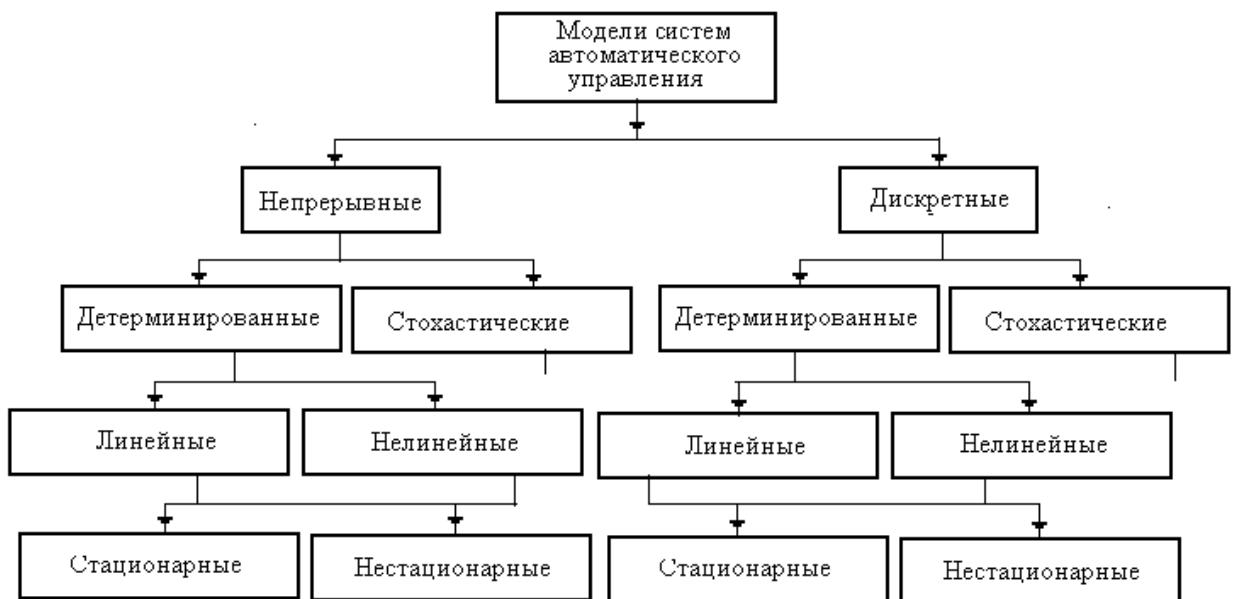


Рисунок 3.3 Классификация моделей систем управления

Помимо рассмотренных выше классов систем управления можно выделить следующие классы динамических систем управления:

- стационарные системы управления;
- нестационарные системы управления;
- линейные системы управления;
- нелинейные системы управления;
- другие классы систем.

**К стационарным системам управления** относятся системы, структура и параметры моделей которых не изменяются во времени.

**К нестационарным системам управления** относятся системы, структура и параметры моделей которых изменяются во времени.

**К линейным системам управления** относятся системы, динамические свойства которых могут быть адекватно представлены линейными математическими моделями.

**К нелинейным системам управления** относятся системы, динамические свойства которых могут быть адекватно представлены нелинейными математическими моделями.

Все множество моделей систем автоматического управления можно представить двумя основными типами моделей:

- модели типа “вход–выход”;
- модели в “пространстве состояний”.

*Модели систем управления типа “вход–выход” связывают модели входного воздействия и реакции системы на это воздействие и используются, как правило, для математического описания одномерных систем управления, то есть систем с одним входом и одним выходом.*

*Модели систем управления “в пространстве состояний” связывают модели входных воздействий и выходных контролируемых переменных с некоторыми обобщенными переменными, полностью определяющими динамическое состояние системы управления.*

Модели в “пространстве состояний” ориентированы в основном на формирование математического описания многомерных систем управления, то есть систем управления с многими входами и многими выходами. Однако эта форма представления моделей может использоваться и для математического описания одномерных систем управления.

### 2.3.4 Классификация математических моделей внешних воздействий и процессов

Характер действующих на системы автоматического управления внешних воздействий в значительной степени определяет поведение системы в переходных процессах. Поэтому выбор внешних тестовых воздействий, формирование математических моделей внешних воздействий наиболее адекватных реальным воздействиям, а также использование этих моделей для решения задач синтеза алгоритмов управления, представляет собой важный и ответственный этап динамического расчета систем управления.

Математические модели процессов в существенной мере определяются характером их изменения во времени, в также их свойствами. Поэтому прежде чем перейти к рассмотрению различных форм математического описания процессов в системах автоматического управления, рассмотрим вопросы их классификации.

На рисунке 3.4 представлена классификационная структура процессов, действующих в контурах автоматических систем.

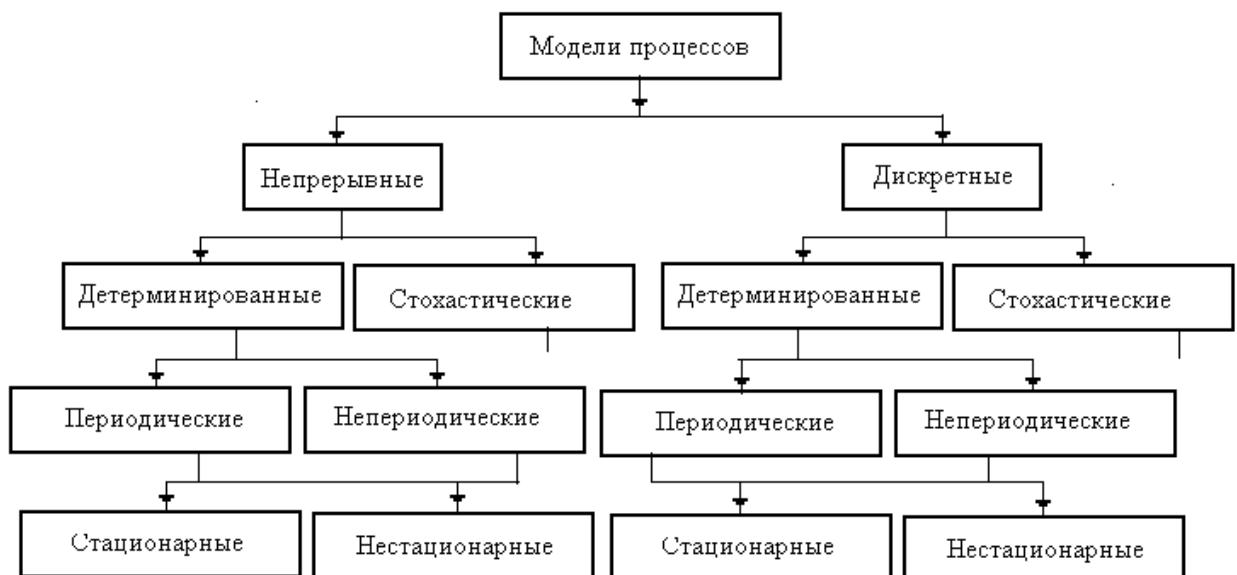


Рисунок 3.4 Классификационная структура процессов в системах управления

Как следует из приведенной выше схемы можно выделить следующие классы процессов.

К **непрерывным процессам** относятся процессы, значения которых определены в каждый момент времени. Модель непрерывного процесса может быть представлена в виде функции  $x(t)$ .

К **дискретным процессам** относятся процессы, значения которых определены только в дискретные моменты времени, отстоящие друг от друга на **шаг дискретизации процессов по времени**  $\Delta T$ .

Модель дискретного процесса может быть представлена в виде

$$x^*(t)|_{t=i \cdot \Delta T} = x(i \cdot \Delta T), i = 0, 1, 2, \dots \text{ либо } x^*(t)|_{t=i \cdot \Delta T} = x^i, i = 0, 1, 2, \dots$$

К **детерминированным непрерывным процессам** относятся процессы, значения которых определены в каждый момент времени и характер изменения значений которых носит вполне определенный характер, который может быть представлен аналитическими выражениями.

К **стохастическим непрерывным процессам** относятся процессы, которые в каждый момент времени принимают случайные значения. Модели стохастических процессов могут быть представлены только их статистическими характеристиками.

Внутри класса детерминированных непрерывных процессов можно выделить два класса процессов:

- непериодические процессы;
- периодические процессы.

К **непериодическим процессам** относятся процессы, значения которых не повторяются во времени с постоянным периодом  $T$ .

К **периодическим процессам** относятся процессы, значения которых повторяются во времени с определенным периодом  $T$  и частотой  $\omega$ , то есть справедливо соотношение

$$x(t) = x(t + T); \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Внутри класса детерминированных непрерывных процессов можно выделить следующие классы процессов:

- стационарные процессы;
- нестационарные процессы.

К *стационарным детерминированным процессам* относятся процессы, структура и параметры моделей которых не изменяются во времени.

*Пример:*

$$x(t) = x_m \sin(\omega t)$$

К *нестационарным детерминированным процессам* относятся процессы, структура и параметры моделей которых изменяются во времени.

*Пример:*

$$x(t) = x_m \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

К *детерминированным дискретным процессам* относятся процессы, дискретные значения которых определены в каждый дискретный момент времени, характер изменения которых носит вполне определенный характер и может быть представлен аналитическими выражениями.

К *стохастическим дискретным процессам* относятся процессы, которые в каждый дискретный момент времени принимают случайные значения.

Внутри класса детерминированных дискретных процессов можно выделить два основных класса:

- класс периодических процессов;
- класс непериодических процессов.

К *периодическим дискретным процессам* относятся процессы, значения которых повторяются во времени с определенным периодом  $T$  и частотой  $\omega$ , то есть справедливо соотношение

$$x^*(i\Delta T) = x(i\Delta T + T), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

К *непериодическим дискретным процессам* относятся процессы, значения которых не повторяются во времени с постоянным периодом  $T$ .

На рисунке 3.5 приведены графики изменения во времени различных классов процессов. Так на рисунке 3.5а приведен график непрерывного непериодического, изменяющегося по параболическому закону, процесса. На рисунке 3.5б приведен график непрерывного периодического процесса типа “меандр” с периодом  $T=2c$ . На рисунке 3.5в приведен график дискретного стохастического процесса.

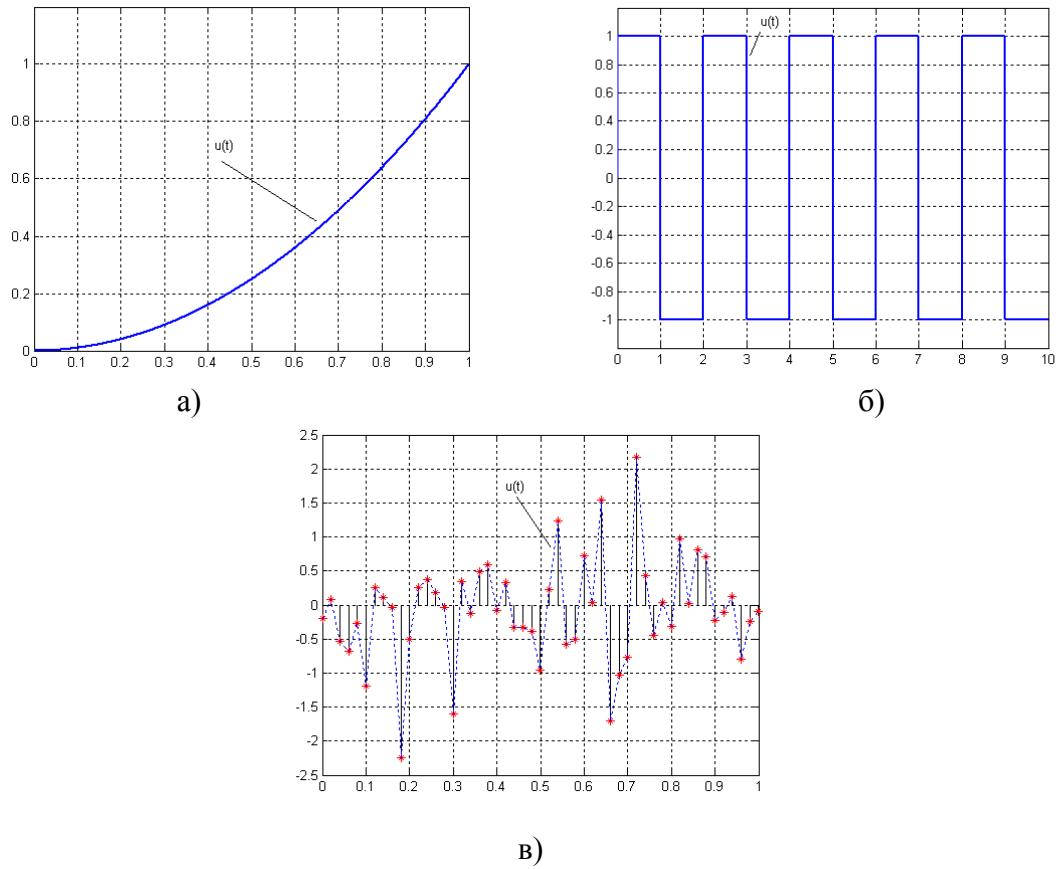


Рисунок 3.5 Графики изменения во времени различных классов процессов

- а) Непрерывный непериодический;
- б) Непрерывный периодический;
- в) Дискретный стохастический (случайный)

При исследовании систем управления с целью определения эффективности и качества управления необходимо учитывать свойства внешних воздействий, реально действующих на систему в процессе ее функционирования.

Для того, чтобы результаты исследований корректно отражали свойства системы управления, необходимо использовать модели воздействий, наиболее адекватно отражающих характер их изменения во времени в реальных условиях.

ях. На практике, при формировании моделей реальных воздействий обычно используют в качестве аппроксимирующих, модели некоторых типовых процессов. Рассмотрим основные модели типовых внешних воздействий, нашедших широкое применение в практике проектирования автоматических систем.

### **2.3.5 Математические модели типовых тестовых воздействий**

#### ***Модель ступенчатого воздействия.***

Аналитическое представление модели  $u(t - \tau) = \begin{cases} u_m, & \text{если } t \geq \tau \\ 0, & \text{если } t < \tau \end{cases}$

где  $u_m$  - уровень воздействия;  $\tau$  - момент подачи воздействия,  $\tau \leq t$ .

Если

$u_m = 1$ , то  $1(t - \tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq \tau \\ 0, & \text{если } t < \tau \end{cases}$  - единичная, ступенчатая функция;

График ступенчатого воздействия единичного уровня представлен на рисунке 3.6а.

#### ***Модель линейно возрастающего воздействия.***

Аналитическое представление модели

$$u(t) = \begin{cases} V_m \cdot t, & \text{если } t \geq 0 \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

где  $V_m$  - скорость изменения воздействия.

График линейно возрастающего воздействия представлен на рисунке 3.6б.

#### ***Модель квадратично возрастающего воздействия.***

Аналитическое представление модели

$$u(t) = \begin{cases} \frac{a_m}{2} \cdot t^2, & \text{если } t \geq 0 \\ 0, & \text{если } t < 0 \end{cases}$$

где  $a_m$  - ускорение, с которым изменяется воздействие.

График квадратично возрастающего воздействия представлен на рисунке 3.6в.

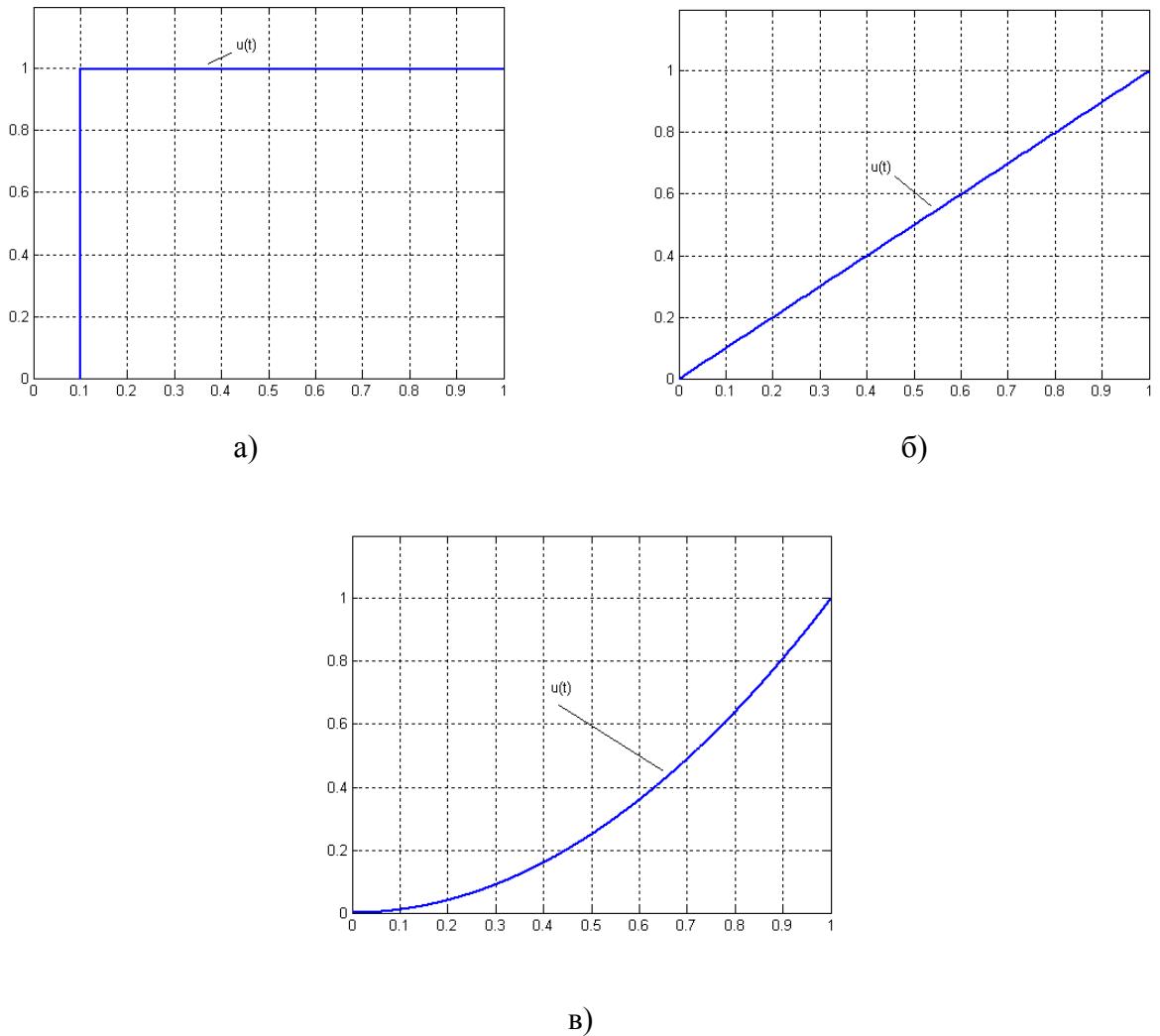


Рисунок 3.6. Графики типовых внешних тестовых воздействий

Рассмотренные выше модели типовых тестовых воздействий представляют собой частные случаи обобщающего класса моделей процессов – класса моделей полиномиального типа.

Этот класс моделей может быть представлен аналитическим выражением следующего вида:

$$u(t) = C_0 + C_1t + C_2t^2 + \dots = \sum_{i=0}^n C_i t^i$$

В ряде случаев модель внешнего воздействия представляет собой одиночный импульс. Для моделирования такого воздействия обычно используют идеальную модель импульса представляющую собой так называемую  $\delta$ -функцию.

**Математическое представление  $\delta$ -функции имеет следующий вид:**

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } t = 0 \\ 0, & \text{если } t \neq 0 \end{cases}$$

Свойства  $\delta$ -функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = f(\tau);$$

График  $\delta$ -функции представляет собой бесконечно узкий импульс с бесконечной амплитудой, площадь которого равна 1.

Рассмотрим теперь некоторые основные модели типовых тестовых воздействий, имеющих периодический характер.

### **Модели воздействий гармонического типа**

$$u(t) = u_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \Delta\phi)$$

где  $u_{\max}$  - амплитуда воздействия;  $\Delta\phi$  - начальная фаза сигнала [рад];

$\omega$  - круговая частота [1/с].

В качестве одного из параметров моделей периодических процессов используется частота их изменения во времени. При этом, наряду с круговой частотой  $\omega$ , измеряемой в [1/с], часто используется циклическая частота  $f$ , измеряемая в [Гц].

Между круговой и циклической частотой существует зависимость

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad \text{или} \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Начальная фаза сигнала  $\Delta\phi$  также может измеряться или в градусах или в радианах. Между этими различными формами представления значений начальной фазы также существует зависимость следующего вида

$$\Delta\phi^o = \frac{180^o}{\pi} \cdot \Delta\phi^{rad} \quad \text{или} \quad \Delta\phi^{rad} = \frac{\pi}{180^o} \cdot \Delta\phi^o$$

График изменения во времени внешнего гармонического воздействия представлен на рисунке 3.7а.

### **Модель периодического воздействия типа “меандр”:**

$$u(t) = u_{\max} \cdot sign \left\{ \sin(\omega \cdot t) \right\},$$

где  $u_{max}$  - амплитуда импульсов;  $\omega$  - круговая частота [1/c];

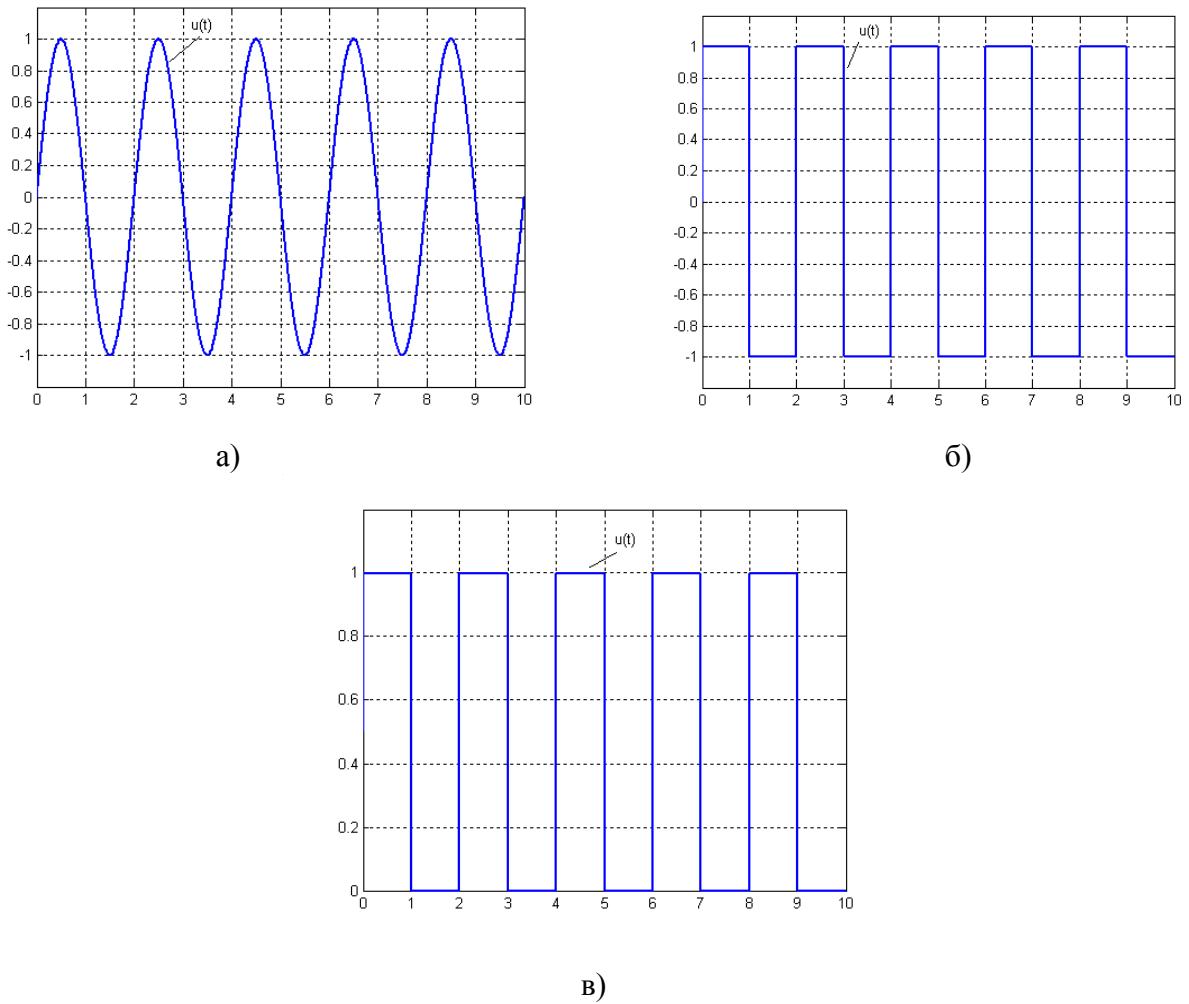


Рисунок 3.7 Графики изменения во времени непрерывных периодических процессов

$\text{sign}\{x\}$  - функция знака:

$$\text{sign}\{x\} = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

График изменения во времени внешнего воздействия типа “меандр” представлен на рисунке 3.7б.

**Модель внешнего воздействия типа “импульсная последовательность”:**

$$u(t) = \frac{u_{max}}{2} \cdot [\text{sign} \{ \sin(\omega \cdot t) + \Delta \} + 1]$$

где  $u_{max}$  - амплитуда импульсной последовательности;

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 112 из 204*

$\omega$  - круговая частота [1/c] импульсной последовательности;

$\Delta$  - параметр, влияющий на скважность импульсной последовательности,  $-1 \leq \Delta \leq 1$ .

График изменения во времени внешнего воздействия типа “импульсная последовательность” представлен на рисунке 3.7в.

Рассмотрим модели воздействий стохастического характера, представляющих собой случайные процессы.

***Модель стохастического воздействия с равномерным законом плотности распределения вероятности.***

Функция равномерного распределения плотности вероятности имеет вид:

$$W(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{при } u \leq b, u \geq a \\ 0, & \text{при } u > b, u < a \end{cases}$$

где  $[a, b]$  – интервал равномерного распределения.

График плотности равномерного распределения вероятности представлен на рисунке 3.8б.

***Модель стохастического воздействия с нормальным законом плотности распределения вероятности.***

Функция плотности нормального распределения вероятности имеет вид:

$$W(u) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \sigma_u} \cdot \exp\left( \frac{-(u - m_u)^2}{2\sigma_u^2} \right)$$

где  $m_u$  – математическое ожидание случайного воздействия;

$\sigma_u$  – среднеквадратическое отклонение случайного воздействия.

График плотности нормального распределения вероятности представлен на рисунке 3.8в.

График случайного процесса, отражающий характер его изменения во времени представлен на рисунке 3.8а, а его возможные статистические характеристики – на рисунках 3.8б и 3.8в.

Характер изменения значений случайного процесса во времени, статистическая взаимосвязь его отдельных значений в различные моменты времени за-

даются такими статистическими характеристиками как корреляционная функция или спектральная плотность.

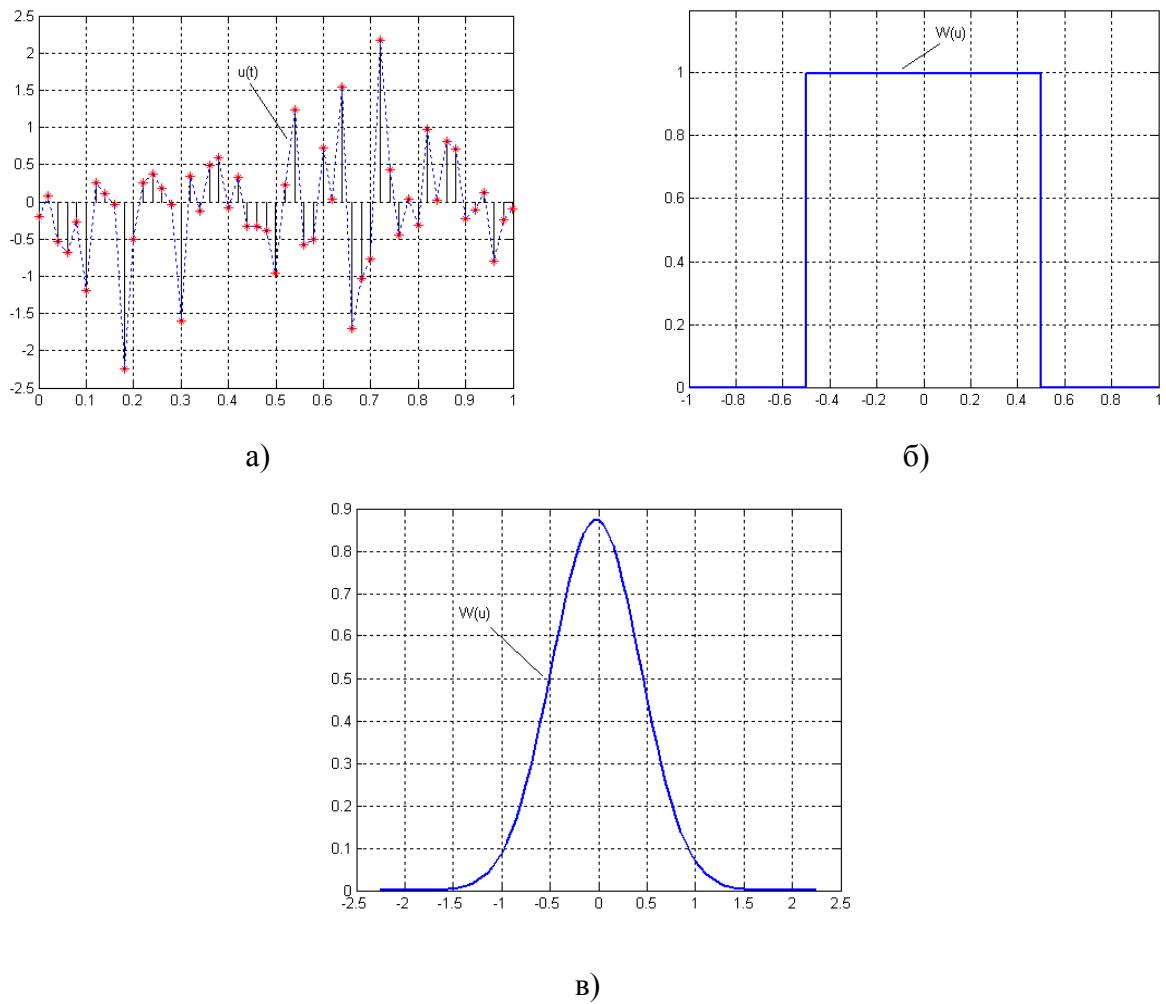


Рисунок 3.8 Случайное воздействие и его статистические характеристики

Как следует из приведенных выше классификационных структур систем автоматического управления и моделей внешних воздействий, наиболее простыми, с точки зрения решения проблем динамического расчета систем управления являются детерминированные непрерывные линейные динамические системы.

Рассмотрим основные канонические, стандартные формы представления моделей линейных непрерывных динамических систем автоматического управления, а также некоторые основные методы решения задач синтеза алгоритмов управления и исследования динамических свойств систем управления, составляющих **фундаментальные основы теории линейных непрерывных систем автоматического управления**.

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 114 из 204*

## 2.4 Структурные блок-схемы моделей линейных систем

### автоматического управления и их эквивалентные преобразования

Системы автоматического управления могут иметь достаточно сложную функционально–информационную организацию поэтому возникают проблемы формирования их математических моделей.

Один из подходов к существенному упрощению решения этой проблемы основывается на использовании графических представлений моделей функциональных элементов системы и систем управления в целом в форме так называемых *структурных блок-схем* моделей систем управления и их последующими эквивалентными преобразованиями.

Рассмотрим некоторые основные условные обозначения, используемые при построении структурных блок-схем линейных моделей систем управления.

#### 2.4.1 Условные обозначения структурных блок-схем моделей одномерных линейных динамических систем

Элементы обозначений моделей линейных одномерных динамических систем приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

№	Наименование блока	Условное обозначение
1	Блок – линейный оператор общего вида	$\frac{u(t)}{y(t)} \xrightarrow{N(p)y(t)=M(p)u(t)} \frac{u(s)}{W(s)} \xrightarrow{y(s)}$
2	Блок – интегратор	$\frac{u(t)}{\int y(t)} \xrightarrow{u(s)} \frac{1}{s} y(s)$
3	Блок – дифференциатор	$\frac{u(t)}{\frac{d}{dt} y(t)} \xrightarrow{u(s)} s y(s)$
4	Блок – элемент сравнения	$\frac{u(t)}{y(t)} \xrightarrow{x(t)} \frac{u(t)}{y(t)} \xrightarrow{x(t)}$
5	Блок – сумматор	$\frac{f(t)}{u(t)} \xrightarrow{+} \frac{f(t)}{u(t)} \otimes y(t)$
6	Блок – перемножитель	$\frac{u(t)}{x(t)} \xrightarrow{\times} \frac{u(t)}{x(t)} \xrightarrow{y(t)}$
7	Блок – делитель	$\frac{u(t)}{x(t)} \xrightarrow{:} \frac{u(t)}{x(t)} \xrightarrow{y(t)}$
8	Точка ветвления	$\frac{x(t)}{x(t)} \xrightarrow{} \frac{x(t)}{x(t)}$

Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 115 из 204

Основным элементом системы обозначений структурных блок-схем является **блок**.

**Блок** предполагает преобразование поступающего на его вход информационного сигнала в соответствии с тем оператором, который определяет содержание самого блока.

В качестве описывающего блок оператора может использоваться дифференциальное уравнение в явной или операторной форме, передаточные функции, а также другие формы описания операторов. В частности, можно выделить следующие основные типовые линейные операторы, имеющие специальное обозначение.

**Интегратор** – предполагает выполнение следующей математической операции  $y(t) = \int_{t_0}^t u(t)dt$ .

**Дифференциатор** – предполагает выполнение следующей математической операции  $y(t) = \frac{d}{dt}u(t)$ .

Особенностью блока является направленность информационного сигнала от входа к его выходу, но не в обратном направлении. Одномерные операторные блоки являются одновходовыми.

Помимо операторных блоков используются многовходовые блоки, к которым, в частности, относятся: блоки-элементы сравнения, блоки-сумматоры, блоки-перемножители, блоки-делители и т.д.

**Двухходовые блоки-элементы сравнения** – предполагают выполнение следующей математической операции

$$y(t) = u(t) - x(t);$$

**Двухходовые блоки-сумматоры** – предполагают выполнение следующей математической операции

$$y(t) = u(t) + f(t)$$

**Блоки-перемножители** – предполагают выполнение следующей математической операции

$$y(t) = u(t) \times x(t)$$

**Блоки-делители** – предполагают выполнение следующей математической операции  $y(t) = \frac{u(t)}{x(t)}$ .

Поскольку информационные связи между переменными в моделях могут быть достаточно сложными, то одна и та же переменная может поступать на входы различных операторов, для чего вводится условное обозначение “разветвителя” информационных сигналов в форме графического символа **точка ветвления**.

Представление моделей динамических систем в виде структурных блок-схем отличается наглядностью, позволяет анализировать информационные связи между различными физическими переменными и, таким образом, оценивать их возможное взаимное влияние.

Кроме того, используя аппарат эквивалентных преобразований структурных блок-схем, который будет рассмотрен ниже, можно чисто формальными действиями находить эквивалентные, компактные модели динамических систем, связывающих внешние воздействия и выходные переменные.

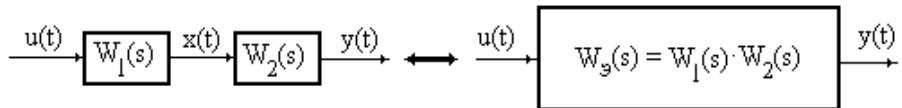
#### **2.4.2 Эквивалентные преобразования структурных блок-схем моделей линейных динамических систем**

При формировании структурных блок-схем систем управления возможны четыре основных способа информационного объединения блоков:

- последовательный способ;
- параллельный способ;
- объединение блоков с отрицательной обратной связью;
- объединение блоков с положительной обратной связью.

Объединения группы блоков можно заменить одним блоком с эквивалентной динамической моделью. Рассмотрим основные правила эквивалентных преобразований структурных блок-схем моделей линейных динамических систем.

### **Эквивалентное преобразование моделей последовательного соединения динамических звеньев.**



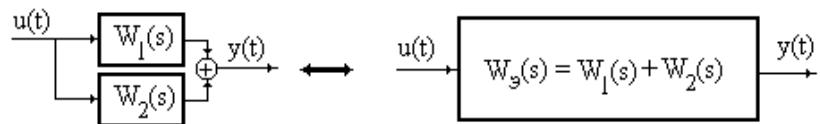
Для структуры с последовательным соединением блоков найдем выражение для определения эквивалентной передаточной функции:

$$x(s) = W_1(s) \cdot u(s); \quad y(s) = W_2(s) \cdot x(s) = W_2(s) \cdot W_1(s) \cdot u(s) = W_3(s) \cdot u(s);$$

Таким образом, выражение для эквивалентной передаточной функции последовательного соединения блоков будет иметь вид:

$$W_3(s) = W_1(s) \cdot W_2(s);$$

### **Эквивалентное преобразование моделей параллельного соединения динамических звеньев.**



Для структуры с параллельным соединением блоков найдем выражение для определения эквивалентной передаточной функции:

$$y(s) = y_1(s) + y_2(s); \quad y_1(s) = W_1(s) \cdot u(s); \quad y_2(s) = W_2(s) \cdot u(s);$$

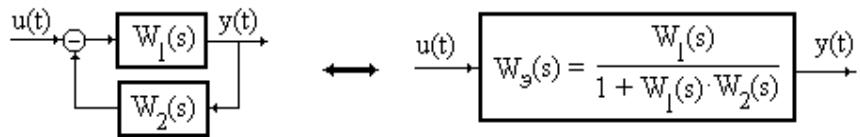
Тогда

$$y(s) = [W_1(s) + W_2(s)] \cdot u(s) = W_3(s) \cdot u(s);$$

Таким образом, выражение для эквивалентной передаточной функции параллельного соединения блоков будет иметь вид:

$$W_3(s) = W_1(s) + W_2(s);$$

### **Эквивалентное преобразование моделей соединений динамических звеньев с отрицательной обратной связью.**



Для соединений блоков с отрицательной обратной связью найдем выражение для определения эквивалентной передаточной функции:

$$y(s) = W_1(s) \cdot \varepsilon(s); \quad \varepsilon(s) = u(s) - z(s); \quad z(s) = W_2(s) \cdot y(s);$$

Тогда

$$y(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s)} \cdot u(s) = W_3(s) \cdot u(s);$$

Таким образом, выражение для эквивалентной передаточной функции соединения блоков с отрицательной обратной связью будет иметь вид:

$$W_3(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s)};$$

где  $W_1(s)$  – передаточная функция прямой цепи контура;

$W_2(s)$  – передаточная функция цепи обратной связи контура;

Если разорвать отрицательную обратную связь, то входное воздействие пройдет последовательно через два блока с передаточными функциями  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ . Таким образом, произведение этих передаточных функций при соединении блоков с обратной связью представляет собой передаточную функцию разомкнутого контура (системы):

$$W_P(s) = W_1(s) \cdot W_2(s);$$

Тогда эквивалентную передаточную функцию соединения с отрицательной обратной связью можно представить в виде:

$$W_3(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s)} = \frac{W_1(s)}{1 + W_P(s)};$$

Рассмотрим частный случай структуры соединения блоков с отрицательной обратной связью, когда обратная связь – “единичная”, то есть передаточная

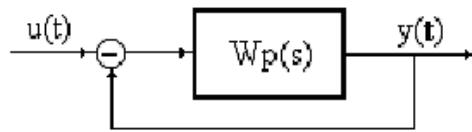
функция цепи обратной связи  $W_2(s) = I$ . В этом случае передаточная функция прямой цепи

$$W_1(s) = W_p(s).$$

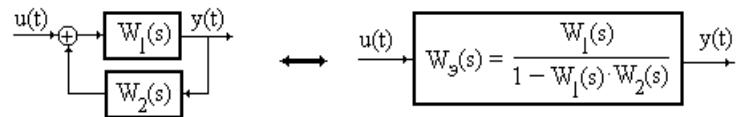
Тогда эквивалентную передаточную функцию соединения с “единичной” отрицательной обратной связью можно представить в виде:

$$W_3(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)};$$

В этом случае структура замкнутого контура или системы с единичной обратной связью будет иметь вид:



**Эквивалентное преобразование соединения динамических звеньев с положительной обратной связью**



Для соединений блоков с положительной обратной связью найдем выражение для определения эквивалентной передаточной функции:

$$y(s) = W_1(s) \cdot \varepsilon(s); \quad \varepsilon(s) = u(s) + z(s); \quad z(s) = W_2(s) \cdot y(s);$$

Тогда

$$y(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s) \cdot W_2(s)} \cdot u(s) = W_3(s) \cdot u(s);$$

Таким образом, выражение для эквивалентной передаточной функции соединения блоков с положительной обратной связью будет иметь вид:

$$W_3(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s) \cdot W_2(s)};$$

где  $W_1(s)$  – передаточная функция прямой цепи контура;

$W_2(s)$  – передаточная функция цепи обратной связи контура.

Если разорвать положительную обратную связь, то входное воздействие пройдет последовательно через два блока с передаточными функциями  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ . Таким образом, произведение этих передаточных функций при соединении блоков с обратной связью представляет собой передаточную функцию разомкнутого контура (системы):

$$W_p(s) = W_1(s) \cdot W_2(s);$$

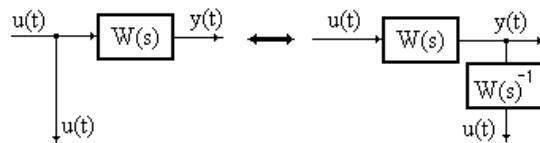
Тогда эквивалентную передаточную функцию соединения с положительной обратной связью можно представить в виде:

$$W_3(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s) \cdot W_2(s)} = \frac{W_1(s)}{1 - W_p(s)};$$

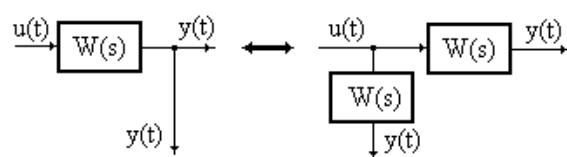
Однако, не всегда информационная структура модели системы управления может быть представлена набором типовых соединений отдельных ее блоков. Поэтому, в ряде случаев необходимо применять некоторые дополнительные эквивалентные преобразования, позволяющие так модифицировать структуру модели системы, чтобы путем структурных преобразований найти ее эквивалентную модель.

Рассмотрим некоторые дополнительные, вспомогательные правила эквивалентных преобразований структурных блок-схем систем управления.

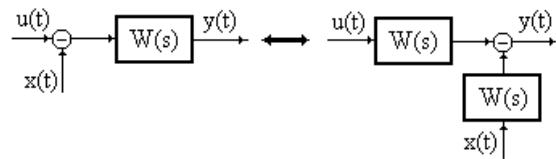
### **Эквивалентное преобразование переноса точки ветвления в прямом направлении**



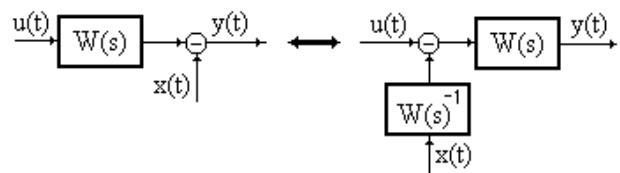
### **Эквивалентное преобразование переноса точки ветвления в обратном направлении**



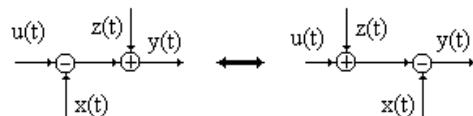
**Эквивалентное преобразование переноса сумматора в прямом направлении**



**Эквивалентное преобразование переноса сумматора в обратном направлении**



**Эквивалентное преобразование переноса сумматоров и элементов сравнения.**



Рассмотрев различные формы представления моделей систем управления и методы их преобразования, перейдем к рассмотрению прикладных аспектов применения этих моделей для решения широкого спектра задач динамического проектирования систем автоматического управления.

## **2.5 Динамическая устойчивость линейных непрерывных систем автоматического управления**

Обеспечение свойства динамической устойчивости является одним из основных необходимых требований к проектируемым системам управления в процессе их динамического расчета.

*Свойство динамической устойчивости систем управления состоит в том, что если на систему управления действуют ограниченные по модулю или по норме воздействия, то реакция системы на эти воздействия у динамически устойчивых систем должны быть также ограниченной.*

В том случае, если система управления является *динамически неустойчивой* и указанное выше свойство – не выполняется, то система автоматического управления в процессе функционирования оказывается функционально неработоспособной, поскольку действующие на систему ограниченные по модулю или по норме возмущения могут привести к непрогнозируемому и неограниченному изменению во времени выходных регулируемых переменных.

В этой связи, в процессе динамического проектирования и расчета систем автоматического управления возникает *проблема анализа устойчивости систем управления* на основе использования их математических моделей.

Существуют различные методы исследования устойчивости систем управления, которые можно условно разделить на несколько групп:

- прямые методы анализа устойчивости;*
- косвенные методы анализа устойчивости.*

*К прямым методам относятся методы, позволяющие непосредственно проверить выполнение или невыполнение условий динамической устойчивости систем управления методами математического или имитационного моделирования.*

Проверка этих условий основывается на использовании математических моделей систем управления в различных формах их представления для оценивания

ния характера изменения реакции систем управления на ограниченные внешние воздействия.

*К косвенным методам относятся методы, основанные на использовании косвенных связей с условиями динамической устойчивости различных характеристик, параметров и отображений, формируемых на основе математических моделей систем управления.*

Можно выделить следующие *косвенные методы анализа устойчивости*:

- *корневые методы анализа устойчивости систем управления;*
- *алгебраические методы анализа устойчивости систем управления;*
- *частотные методы анализа устойчивости систем управления;*
- *другие методы.*

Рассмотрим некоторые основные методы анализа устойчивости динамических систем и проведем их сравнительный анализ.

### **2.5.1 Анализ устойчивости линейных непрерывных систем управления прямыми методами**

Прямые методы анализа устойчивости предполагают непосредственную проверку выполнения свойства устойчивости, которое состоит в ограниченности изменения во времени выходных переменных при подаче на вход системы ограниченных по модулю или по норме внешних воздействий.

Очевидно, что реализация этого метода связана с определением реакции системы на внешнее ограниченное воздействие методами математического или цифрового имитационного моделирования.

Пусть структура динамической системы имеет вид:

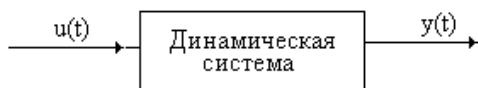


Рисунок 5.1 Структурная блок-схема модели одномерной динамической системы

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 124 из 204*

Рассмотрим особенности применения процедур анализа устойчивости систем автоматического управления прямыми методами математического моделирования на основе использования моделей систем управления в форме дифференциальных уравнений.

Пусть математическая модель системы в форме дифференциального уравнения имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_i y^{(n-i)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_j u^{(m-j)} + \dots + b_n u$$

Тогда свободное движение системы описывается однородным дифференциальным уравнением вида:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_i y^{(n-i)} + \dots + a_n y = 0,$$

Определим свободное движение системы при возмущении начального динамического состояния системы, находящейся в состоянии покоя. Для этого проинтегрируем дифференциальное уравнение системы при возмущении начальных условий.

Пусть  $y_o, y^{(1)}_o, \dots, y^{(n-2)}_o, y^{(n-1)}_o$ . Тогда свободное движение системы из возмущенных начальных условий определяется выражением:

$$y_{ce}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t},$$

где  $\lambda_i, i = \overline{1, n}$  – корни характеристического уравнения

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_i \lambda^{n-k} + \dots + a_n \lambda = 0$$

$C_i$  – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Интегрируя в аналитической форме или численными методами однородное дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях получим переходной процесс системы  $y_{ce}(t)$ , анализируя который можно проверить выполнение или не выполнение основного условия динамической устойчивости системы управления – ограниченность ее реакции на внешние ограниченные возмущения.

Рассмотрим применение прямых методов анализа устойчивости на следующих примерах.

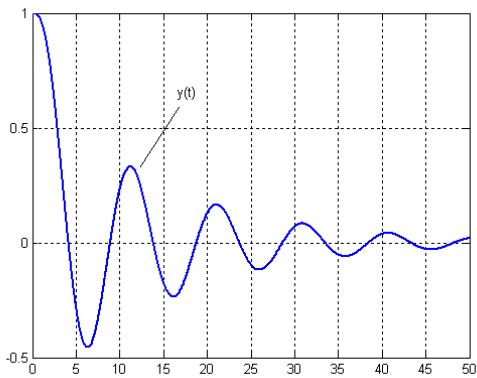
*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 125 из 204*

**Пример 1.** Пусть дифференциальные уравнения систем имеют вид:

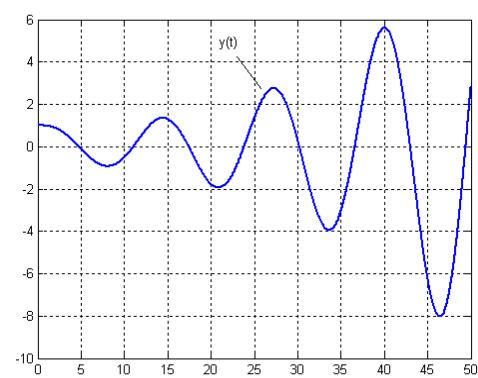
$$a) \quad 4y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y^{(1)} + y = u(t); \quad u(t) = 0; \quad y_0 = 1;$$

$$\bar{b}) \quad 10y^{(3)} + 3y^{(2)} + 2y^{(1)} + y = u(t); \quad u(t) = 0; \quad y_0 = 1;$$

Применяя метод цифрового имитационного моделирования для исследования систем а) и б) получим переходные процессы в системах, графики которых представлены на рисунках 8.2.а и 8.2.б соответственно.



а)



б)

Рисунок 5.2 Результаты имитационного моделирования систем управления

а) переходные процессы в устойчивой системе;

б) переходные процессы в неустойчивой системе

Из приведенных на графиках результатов имитационного моделирования исследуемой системы а) следует, что при ограниченном по уровню возмущенном начальном состоянии – ее выходная реакция  $y_{ce}(t)$  является ограниченной и стремящейся к нулю. Следовательно, **система а) является динамически устойчивой**.

Из результатов имитационного моделирования исследуемой системы б) следует, что при ограниченном по уровню возмущенном начальном состоянии – ее выходная реакция  $y_{ce}(t)$  является неограниченно возрастающей и стремящейся к бесконечности. Следовательно, **система б) является динамически неустойчивой**.

**Пример 2.** Исследуем устойчивость системы, заданной своей моделью в форме передаточной функции  $W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{4}{s^2 + 3s - 4}$  аналитическими методами

Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 126 из 204

ми. Пусть действующее на систему ограниченное возмущение представляет собой ступенчатое воздействие единичного уровня, то есть  $u(t)=1$ . Определим реакцию системы на внешнее воздействие  $y(t)$ .

*Этап 1. Определим преобразование Лапласа от выходного процесса системы*

$$u(s) = L\{1(t)\}; \quad y(s) = W(s) \cdot u(s) = \frac{4}{(s^2 + 3s - 4) \cdot s};$$

*Этап 2. Определим реакцию системы как обратное преобразование Лапласа от  $y(s)$ .*

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2 + 3s - 4) \cdot s}\right\};$$

*Определим полюса  $y(s)$ :*

$$(s^2 + 3s - 4) \cdot s = 0 \rightarrow s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = -4;$$

*Значения вычетов в полюсах системы:*

$$\underset{s_1}{Res}\{y(s)e^{st}\} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{4e^{st}}{(s-1)(s+4) \cdot s} \cdot (s-0) \right\} = -1;$$

$$\underset{s_1}{Res}\{y(s)e^{st}\} = \lim_{s \rightarrow 1} \left\{ \frac{4e^{st}}{(s-1)(s+4) \cdot s} \cdot (s-1) \right\} = \frac{4}{5}e^t;$$

$$\underset{s_1}{Res}\{y(s)e^{st}\} = \lim_{s \rightarrow -4} \left\{ \frac{4e^{st}}{(s-1)(s+4) \cdot s} \cdot (s+4) \right\} = -\frac{4}{5}e^{-4t};$$

*Таким образом, реакция системы на внешнее ограниченное по модулю возмущение равна:*

$$y(t) = -1 + 0.8e^t - 0.8e^{-4t}$$

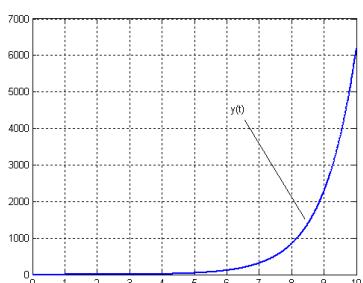
*Как следует из полученного соотношения, реакция системы на внешнее воздействие с ростом времени бесконечно возрастает, то есть*

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-1 + 0.8e^t - 0.8e^{-4t}) = \infty.$$

*Это значит, что исследуемая система управления динамически неустойчива.*

Несмотря на простоту реализации процедуры анализа устойчивости систем управления прямыми методами, основанными на анализе результатов математического

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 127 из 204*



или имитационного моделирования этих систем при ограниченных внешних возмущениях, они обладают рядом существенных недостатков.

Основным из этих недостатков является то, что в общем случае, лежащие в основе прямых методов анализа устойчивости методы математического или цифрового имитационного моделирования, не позволяют устанавливать в аналитической форме связь, между структурой и параметрами алгоритмов регулирования и управления и условиями обеспечения устойчивости автоматических систем в процессе их динамического проектирования и расчета.

Поэтому в практике решения задач динамического проектирования систем автоматического управления наибольшее распространение и применение нашли косвенные методы анализа устойчивости. Перейдем к рассмотрению некоторых основных косвенных методов анализа устойчивости.

### **2.5.2 Косвенные методы анализа устойчивости линейных систем автоматического управления**

Как было отмечено выше, к косвенным методам анализа динамической устойчивости систем автоматического управления относятся следующие группы методов, а именно:

- корневые методы анализа устойчивости;
- алгебраические методы анализа устойчивости;
- частотные методы анализа устойчивости.

**Корневые методы анализа устойчивости** предполагают вычисление и исследование значений корней характеристического уравнения динамической системы с целью определения их соответствия сформулированным в рамках теории управления условиям устойчивости.

**К алгебраическим методам анализа устойчивости** относятся методы, предполагающие формирование и исследование специальных таблиц или матриц, элементы которых выражаются через коэффициенты характеристического уравнения системы.

Алгебраические методы анализа устойчивости основываются на использовании:

- алгебраического критерия анализа устойчивости Раяса;
- алгебраического критерия анализа устойчивости Гурвица.

*К частотным методам анализа устойчивости* относятся методы, предполагающие исследование частотных характеристик систем управления с разомкнутой отрицательной обратной связью.

Частотные методы анализа устойчивости основываются на использовании:

- частотного критерия анализа устойчивости Михайлова;
- частотного критерия анализа устойчивости Найквиста для моделей систем в форме комплексных АФЧХ;
- частотного критерия анализа устойчивости Найквиста для моделей систем в форме ЛАФЧХ.

Рассмотрим критерии анализа динамической устойчивости систем автоматического управления более подробно и их применение проиллюстрируем на примерах.

### **2.5.3 Корневые методы анализа устойчивости линейных систем автоматического управления**

Рассмотрим группу корневых методов анализа устойчивости. Суть этих методов заключается в том, что выводы об устойчивости или неустойчивости систем управления делаются на основе результатов исследования значений корней характеристического уравнения системы управления.

Формализованная связь между свойствами динамической устойчивости систем автоматического управления и значениями корней характеристических уравнений основана на результатах работ русского математика Ляпунова А.М., посвятившим ряд своих исследований изучению проблем устойчивости решений систем дифференциальных уравнений.

Для того, чтобы лучше понять истоки корневых методов анализа устойчивости систем управления рассмотрим особенности интегрирования их однородных дифференциальных уравнений.

Пусть однородное дифференциальное уравнение системы управления имеет вид:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_iy^{(n-i)} + \dots + a_ny = 0$$

Определим свободное движение системы при возмущении начального динамического состояния системы, находящейся в состоянии покоя. Для этого проинтегрируем дифференциальное уравнение системы при возмущении начальных условий.

Пусть  $y_o, y^{(1)}_o, \dots, y^{(n-2)}_o, y^{(n-1)}_o$  – начальные условия. Тогда свободное движение системы из возмущенных начальных условий определяется выражением:

$$y_{\text{св}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t},$$

где  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - корни характеристического уравнения;

$C_i$  – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_i\lambda^{n-k} + \dots + a_n\lambda = 0$$

Таким образом, свободное движение системы из начальных условий представляет собой сумму отдельных составляющих или мод, зависящих от значений корней характеристического уравнения.

Возможны следующие основные структуры мод свободного движения системы:

- структура моды, соответствующей положительному значению вещественного корня характеристического уравнения системы  $\lambda_i = \alpha_i$ ; может быть представлена в виде:  $y_i(t) = C_i e^{\alpha_i t}$ ;
- структура моды, соответствующей отрицательному значению вещественному корню характеристического уравнения системы  $\lambda_i = -\beta_i$ ; может быть представлена в виде:  $y_i(t) = C_i e^{-\beta_i t}$ ;

ственного корня характеристического уравнения системы  $\lambda_i = -\alpha_i$ ; может быть представлена в виде:  $y_i(t) = C_i e^{-\alpha_i t}$ ;

– структура моды, соответствующей паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения системы с положительными значениями их вещественных частей  $\lambda_{i,i+1} = \alpha_{i,i+1} \pm j\beta_{i,i+1}$  может быть представлена в виде:

$$y_i(t) = C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + C_2);$$

– структура моды, соответствующей паре комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения системы с отрицательными значениями их вещественных частей  $\lambda_{i,i+1} = -\alpha_{i,i+1} \pm j\beta_{i,i+1}$  может быть представлена в виде:

$$y_i(t) = C_i e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i t + C_2);$$

– структура моды, соответствующей нулевым значениям вещественных корней характеристического уравнения системы  $\lambda_i = 0$ ; может быть представлена в виде:  $y_i(t) = C_i = const$ ;

– структура моды, соответствующей паре комплексно-сопряженным корням характеристического уравнения системы с нулевыми значениями их вещественных частей  $\lambda_{i,i+1} = \pm j\beta_{i,i+1}$  может быть представлена в виде:

$$y_i(t) = C_i \sin(\beta_i t + C_2).$$

***Анализ мод, составляющих свободное движение систем из возмущенных начальных условий показывает, что значения этих мод будут тогда и только тогда ограниченными, когда соответствующие им корни характеристического уравнения будут иметь отрицательные вещественные части.***

Графики соответствующих мод свободного движения систем управления из ограниченных начальных условий отражены на рисунках 5.3.

Этот вывод позволяет сделать обобщающие заключения и сформулировать критерии динамической устойчивости систем управления в форме ряда теорем. Рассмотрим эти теоремы.

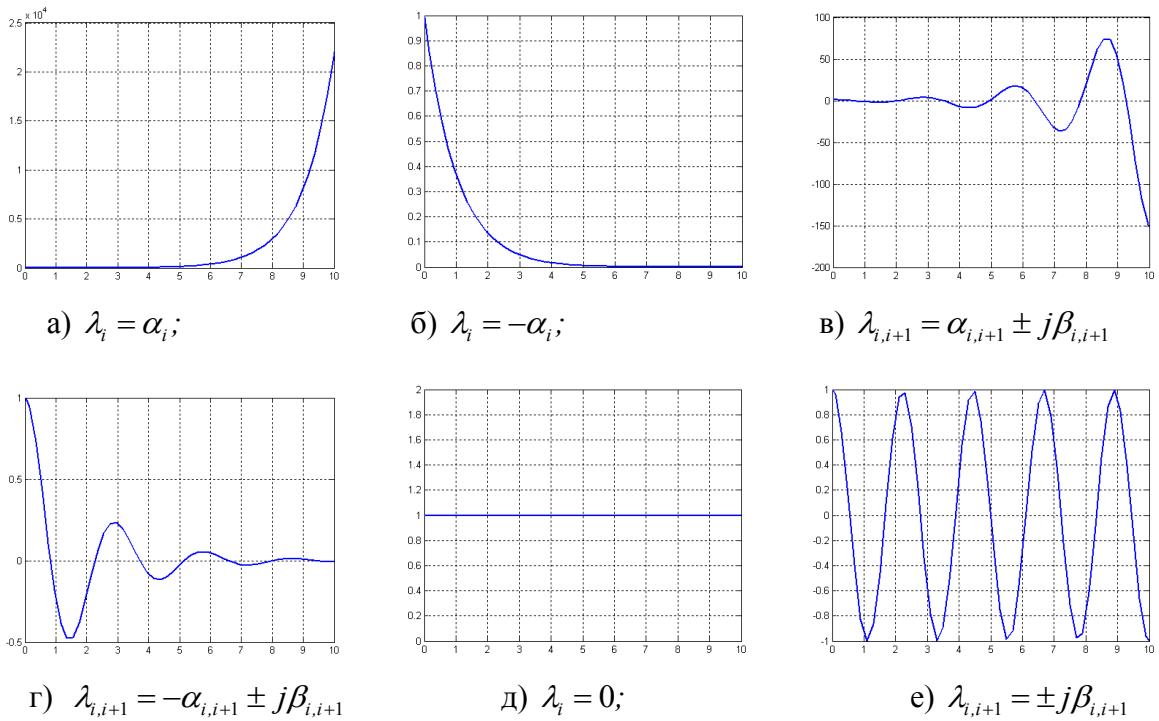


Рисунок 5.3 Моды свободного движения системы управления

**Теорема 1:** Для устойчивости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, то есть:

$$\operatorname{Re} \{\lambda_i\} < 0 \quad \text{для всех } i = \overline{1, n}.$$

**Теорема 2:** Если среди корней характеристического уравнения системы имеется хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то есть  $\operatorname{Re} \{\lambda_i\} > 0$ , то такая система является динамически неустойчивой.

**Теорема 3:** Если среди корней характеристического уравнения системы управления имеется хотя бы одна пара комплексно-сопряженных корней с равной нулю вещественной частью, то есть  $\operatorname{Re} \{\lambda_i, \lambda_{i+1}\} = 0$ , то такая динамическая система находится на границе устойчивости.

Расположение корней характеристического уравнения на комплексной координатной плоскости приведены на рисунке 5.4 и их анализ позволяет приведенные выше критерии устойчивости сформулировать в иной форме.

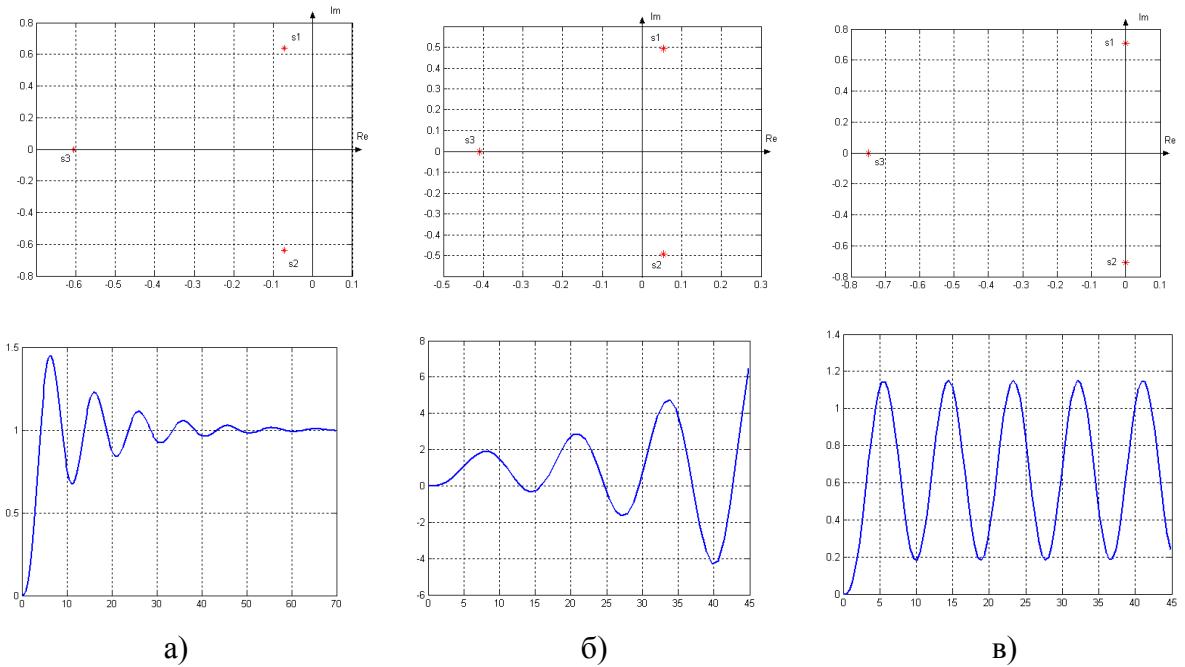


Рисунок 5.4 Расположение полюсов системы на комплексной плоскости и соответствующие им переходные процессы

- а) Расположение полюсов и переходные процессы в устойчивой системе;
- б) Расположение полюсов и переходные процессы в неустойчивой системе;
- в) Расположение полюсов и переходные процессы в системе, находящейся на границе устойчивости

Можно привести следующую формулировку корневого критерия устойчивости:

**Критерий устойчивости:** Для устойчивости динамической системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения лежали в левой полуплоскости комплексной координатной плоскости корней характеристического уравнения.

Рассмотрим применение корневых методов анализа устойчивости на примерах.

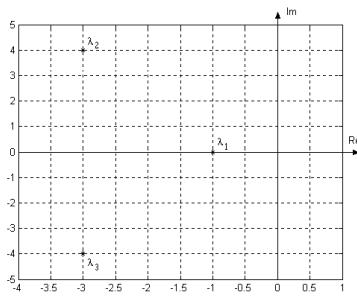
**Пример 1.** Пусть передаточная функция замкнутой динамической системы имеет вид:

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{1}{s^3 + 7s^2 + 31s + 25}.$$

Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 133 из 204

*Исследовать устойчивость системы корневыми методами.*

*Этап 1. Определение корней характеристического уравнения:*



$$D(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 31\lambda + 25 = 0.$$

*Пусть известен один корень уравнения  $\lambda_1 = -1$ .*

*Понизим порядок характеристического полинома путем формального деления его на  $(\lambda - \lambda_1) = (\lambda + 1)$ .*

*Получим:  $\lambda^2 + 6\lambda^2 + 25 = 0$ , корни которого  $\lambda_2 = -3 + j4$ ;*

$$\lambda_3 = -3 - j4.$$

*Таким образом, значения всех корней характеристического уравнения ("полюсов") системы следующие:*

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -3 + j4; \quad \lambda_3 = -3 - j4.$$

*Этап 2. Исследование корней характеристического уравнения:*

*Все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части.*

**Вывод:** Так как все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то система – **устойчива**.

Несмотря на простоту реализации процедуры анализа устойчивости систем управления корневыми методами, предполагающими необходимость вычисления корней характеристического уравнения, они обладают рядом существенных недостатков.

Основным из этих недостатков является то, что связанные с условиями устойчивости значения корней характеристического уравнения могут быть вычислены аналитически только для систем управления порядка не выше 3-го. Только в этом случае можно определить аналитическую зависимость между структурой и параметрами алгоритмов регулирования и управления и условиями обеспечения динамической устойчивости системы управления в процессе ее динамического расчета и проектирования.

Для систем управления с порядком модели выше третьего значения корней характеристического уравнения системы могут быть определены только численными методами с помощью специальных вычислительных процедур.

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 134 из 204*

Поэтому в практике решения задач динамического проектирования систем автоматического управления наибольшее распространение и применение нашли иные косвенные методы анализа устойчивости, в частности группа алгебраических и частотных методов анализа устойчивости.

Перейдем к рассмотрению некоторых основных алгебраических методов анализа устойчивости.

#### **2.5.4 Алгебраические методы анализа устойчивости линейных систем автоматического управления**

Исследование устойчивости систем управления на основе применения корневых методов основывается на результатах анализа корней характеристических уравнений этих систем . Однако, на самом деле, как мы выяснили, для того, чтобы сделать вывод об устойчивости системы или ее неустойчивости нет необходимости вычислять абсолютные значения корней характеристического уравнения, а достаточно получить оценки только знаков вещественных частей этих корней.

Очевидно, что оценивание знаков вещественных частей корней характеристических уравнений представляет собой существенно более простую задачу, чем вычисление абсолютных значений этих корней.

Используя свойства коэффициентов характеристических полиномов и их связь с значениями корней характеристических уравнений, был предложен ряд правил, которые позволяют путем алгебраических преобразований коэффициентов характеристических уравнений, не вычисляя самих значений корней характеристических уравнений, получить косвенные оценки знаков их вещественных частей и, таким образом, сделать вывод об устойчивости или неустойчивости исследуемой системы управления.

Эти правила получили название алгебраических критериев устойчивости систем автоматического управления. Рассмотрим основные из них.

#### 2.5.4.1 Алгебраический критерий анализа устойчивости Рауса

Алгебраические критерии анализа динамической устойчивости основываются на использовании значений коэффициентов характеристического уравнения динамической системы, причем критерий устойчивости Рауса предполагает формирование специальной таблицы с использованием этих коэффициентов, а критерий Гурвица – предполагает формирование матрицы, элементами которой являются коэффициенты характеристического уравнения.

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_i\lambda^{n-k} + \dots + a_n\lambda = 0$$

В соответствии с критерием Рауса для оценивания динамической устойчивости систем управления требуется проверка двух условий:

- необходимого условия устойчивости;
- достаточного условия устойчивости;

Система автоматического управления устойчива только в том случае, когда для нее выполняются оба указанных условия.

**Необходимое условие устойчивости:** Все коэффициенты характеристического полинома должны иметь одинаковый знак (быть положительны), то есть  $a_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2 \dots n$ .

**Достаточное условие устойчивости:** Все элементы первого столбца таблицы Рауса должны быть положительны.

Таблица Рауса.

зде:

$a_0$	$a_2$	$a_4$	$\dots$	$b_0 = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1};$	$b_2 = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1}; \dots$
$a_1$	$a_3$	$a_5$	$\dots$	$b_1 = \frac{b_0 \cdot a_3 - a_1 \cdot b_2}{b_0};$	$b_3 = \frac{b_0 \cdot a_5 - a_1 \cdot b_4}{b_0}; \dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$b_0 = \frac{b_1 \cdot b_2 - b_0 \cdot b_3}{b_1};$	$c_2 = \frac{b_1 \cdot b_4 - b_0 \cdot b_5}{b_1}; \dots$
$b_0$	$b_2$	$b_4$	$\dots$		
$b_1$	$b_3$	$b_5$	$\dots$		
$c_0$	$c_2$	$c_4$	$\dots$		
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	.....	

Таким образом, критерий динамической устойчивости Рауса можно сформулировать следующим образом.

**Критерий Рауса:** Система автоматического управления динамически устойчива если все коэффициенты ее характеристического полинома имеют один знак и элементы первого столбца таблицы Рауса – положительны.

Следует отметить, что в том случае, если необходимое условие устойчивости – выполняется, а достаточное условие – не выполняется и система является динамически неустойчивой, то число чередований знаков элементов первого столбца таблицы Рауса говорит о числе корней характеристического уравнения системы с положительными вещественными частями . Рассмотрим ряд примеров.

**Пример 4.** Передаточная функция динамической системы имеет вид:

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{1}{4s^3 + 3s^2 + 2s + 1}.$$

Исследовать устойчивость системы с использованием алгебраического критерия Рауса.

**Этап 1. Проверка выполнения необходимого условия устойчивости:**

**Характеристический полином системы:**

$$D(\lambda) = 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Коэффициенты полинома:  $a_0 = 4 > 0$ ;  $a_1 = 3 > 0$ ;  $a_2 = 2 > 0$ ;  $a_3 = 1 > 0$ .

**Вывод:** так как для всех  $a_i$ ,  $i=0,1\dots 3$  справедливо  $a_i > 0$ , то необходимое условие – выполняется.

**Этап 2. Проверка выполнения достаточного условия.**

Составим таблицу Рауса:

4	2	0
3	1	0
2/3	0	0
1	0	0

**Вывод:** Так как необходимое условие устойчивости – выполняется и все элементы первого столбца таблицы Рауса положительны, то система – устойчива.

**Пример 5.** Пусть передаточная функция динамической системы имеет вид:

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{1}{10s^3 + 3s^2 + 2s + 1}.$$

Исследовать устойчивость системы с использованием алгебраического критерия Рауса.

**Этап 1.** Проверка выполнения необходимого условия устойчивости:

Характеристический полином системы:

$$D(\lambda) = 10\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Коэффициенты полинома:

$$a_0 = 10 > 0; \quad a_1 = 3 > 0; \quad a_2 = 2 > 0; \quad a_3 = 1 > 0.$$

Проверка выполнения необходимого условия.

Так как все  $a_i > 0$ , для  $i=0,1\dots 3$ , то необходимое условие – выполняется.

**Этап 2.** Проверка выполнения достаточного условия:

Составим таблицу Рауса:

<b>10</b>	2	0
3	1	0
-4/3	0	0
1	0	0

**Вывод:** Так как элементы первого столбца таблицы Рауса имеют разные знаки, то достаточное условие устойчивости – не выполняется и система – динамически **неустойчива**.

Кроме того, поскольку имеет место двукратное чередование знаков элементов в первом столбце матрицы Рауса, то неустойчивость системы определяется наличием двух корней характеристического уравнения с положительными вещественными частями, то есть  $p=2$ .

#### 2.5.4.2 Алгебраический критерий анализа устойчивости линейных систем автоматического управления Гурвица

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$D(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{i-1}\lambda^{n-i} + \dots + a_n\lambda = 0$$

В соответствии с критерием Гурвица для оценивания динамической устойчивости систем управления требуется проверка двух условий:

- необходимого условия устойчивости;
- достаточного условия устойчивости;

Система автоматического управления устойчива только в том случае, когда для нее выполняются оба указанных условия.

**Необходимое условие устойчивости:** *Все коэффициенты характеристического полинома должны иметь одинаковый знак (быть положительны), то есть  $a_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2 \dots n$ .*

Для проверки условий выполнения достаточных условий устойчивости по Гурвицу необходимо сформировать матрицу Гурвица, которая имеет следующую структуру.

$$G = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_2 &= a_1 \cdot a_2 - a_3 \cdot a_0 \\ &\dots \\ \Delta_n &= \Delta_{n-1} \cdot a_n \end{aligned}$$

Тогда достаточное условие устойчивости формулируется следующим образом.

**Достаточное условие устойчивости:** *Определитель матрицы Гурвица и все ее диагональные миноры должны быть положительны.*

Таким образом, критерий динамической устойчивости Гурвица можно сформулировать следующим образом.

**Критерий Гурвица:** *Система автоматического управления динамически устойчива, если все коэффициенты ее характеристического полинома имеют один знак, а определитель матрицы Гурвица и все ее диагональные миноры – положительны.*

Необходимо отметить, что в том случае, если необходимое условие устойчивости выполняется, а достаточное условие – не выполняется и система является динамически неустойчивой, то число миноров с отрицательными зна-

ками говорит о числе корней характеристического уравнения системы с положительными вещественными частями.

Рассмотрим ряд примеров.

**Пример 5.** Пусть передаточная функция динамической системы имеет вид:

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{1}{4s^3 + 3s^2 + 2s + 1}.$$

Исследовать устойчивость системы с использованием алгебраического критерия Гурвица.

*Этап 1.* Определим коэффициенты характеристического полинома системы:

$$D(\lambda) = 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

*Этап 2.* Проверка выполнения необходимого условия устойчивости.

Коэффициенты полинома:

$$a_0 = 4 > 0; \quad a_1 = 3 > 0; \quad a_2 = 2 > 0; \quad a_3 = 1 > 0.$$

Так как все  $a_i > 0$ , для  $i=0,1\dots 3$ , то необходимое условие – выполняется.

*Этап 3.* Проверка выполнения достаточного условия.

Составим матрицу Гурвица:  $\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$  и вычислим диагональные миноры.

Диагональные миноры:  $\Delta_1 = 3$ ;  $\Delta_2 = 2$ ;  $\Delta_3 = 2$ .

*Вывод:* Так как необходимое условие устойчивости выполняется и все диагональные миноры матрицы Гурвица - положительны, то система - **устойчива**.

**Пример 6.** Пусть передаточная функция динамической системы имеет вид:

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{1}{10s^3 + 3s^2 + 2s + 1}.$$

Исследовать устойчивость системы с использованием алгебраического критерия Гурвица.

*Этап 1.* Определим коэффициенты характеристического полинома системы:

Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 140 из 204

$$D(\lambda) = 10\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

*Этап 2. Проверка выполнения необходимого условия устойчивости.*

*Коэффициенты полинома:*

$$a_0 = 10 > 0; \quad a_1 = 3 > 0; \quad a_2 = 2 > 0; \quad a_3 = 1 > 0.$$

*Проверка выполнения необходимого условия устойчивости:*

*Так как все  $a_i > 0$ , для  $i=0,1\dots 3$ , то необходимое условие – выполняется.*

*Этап 3. Проверка выполнения достаточного условия:*

*Составим матрицу Гурвица:  $\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$  и вычислим ее диагональные*

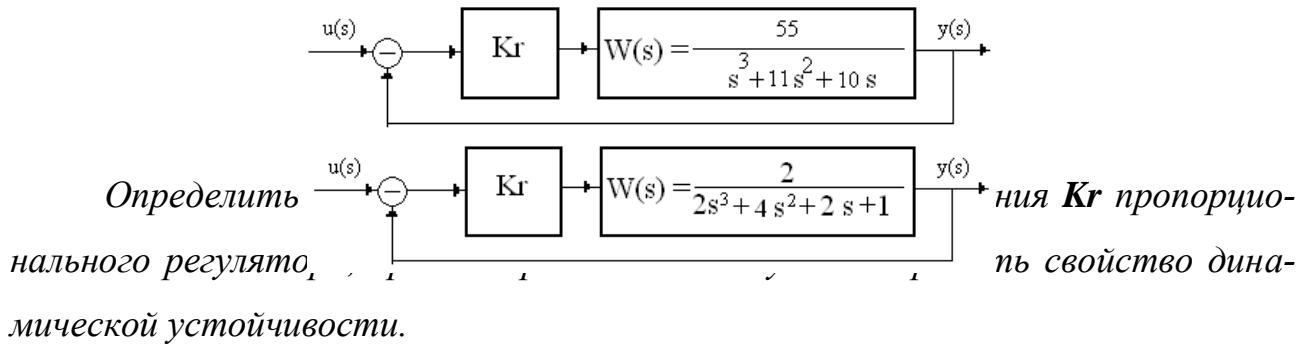
*миноры.*

$$\text{Диагональные миноры: } \Delta_1 = 3; \quad \Delta_2 = -4; \quad \Delta_3 = -4.$$

**Вывод:** Так как диагональные миноры матрицы Гурвица имеют разные знаки, то достаточное условие устойчивости не выполняется и система – **неустойчива**.

Кроме того, поскольку два диагональных минора матрицы Гурвица имеют отрицательные знаки, то неустойчивость системы определяется наличием двух корней характеристического уравнения с положительными вещественными частями, то есть  $p=2$ .

**Пример 6.** Пусть математическая модель системы управления представлена в форме ее структурной блок-схемы следующего вида:



Для решения поставленной задачи воспользуемся алгебраическим критерием анализа устойчивости Гурвица.

*Этап 1. Методами эквивалентных преобразований структурных блок-схем*

Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 141 из 204

схем моделей систем управления определим эквивалентную передаточную функцию всей замкнутой системы с отрицательной обратной связью.

Получим:

$$Wp(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{55Kr}{s^3 + 11s^2 + 10s}; \quad \Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{Wp(s)}{1 + Wp(s)} = \frac{55Kr}{s^3 + 11s^2 + 10s + 55Kr};$$

где  $W_p(s)$  – передаточная функция разомкнутой системы;

$\Phi(s)$  – передаточная функция замкнутой системы.

*Этап 2. Определение характеристического полинома замкнутой системы управления.*

Получим:

$$D(\lambda) = \lambda^3 + 11\lambda^2 + 10\lambda + 55Kr = 0$$

*Этап 3. Проверка необходимого условия устойчивости Гурвица:*

$$a_0 = 1 > 0; a_1 = 11 > 0; a_2 = 10 > 0; a_3 = 55Kr > 0$$

Необходимое условие устойчивости выполняется при  $Kr > 0$ .

*Этап 4. Проверка достаточного условия устойчивости Гурвица:*

Сформируем матрицу Гурвица:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 11 & 55Kr & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 11 & 55Kr \end{bmatrix}$$

Вычислим диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = 11 > 0;$$

$$\Delta_2 = 11 \cdot 10 - 1 \cdot 55Kr > 0;$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot 55Kr > 0;$$

Очевидно, что для первого и третьего миноров достаточные условия устойчивости выполняются всегда. Поэтому предельно допустимое значение коэффициента усиления пропорционального регулятора  $K_r$  определим через неравенство для второго диагонального минора, влияющего на выполнение достаточного условия устойчивости.

Получим:  $0 < K_r < 2$ . Таким образом, предельное критическое значение коэффициента усиления  $K_r$ , при котором система управления теряет устойчивость  $K_r^{max} = 2$ .

Проверим полученный результат с помощью критерия Гурвица и метода имитационного моделирования при значении  $K_r = 1$ .

При  $K_r = 1$  характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$D(\lambda) = \lambda^3 + 11\lambda^2 + 10\lambda + 55 = 0$$

Очевидно, что необходимое условие устойчивости – выполняется.

Проверим выполнение достаточного условия устойчивости.

Матрица Гурвица имеет вид :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 11 & 55 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 11 & 55 \end{bmatrix}.$$

Вычислим значения диагональных миноров, получим:

$$\Delta_1 = 11 > 0;$$

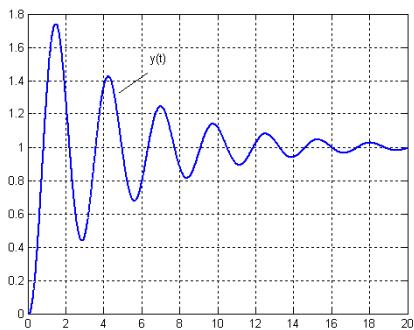
$$\Delta_2 = 11 \cdot 10 - 1 \cdot 55 = 55 > 0;$$

$$\Delta_3 = \Delta_2 \cdot 55 > 0;$$

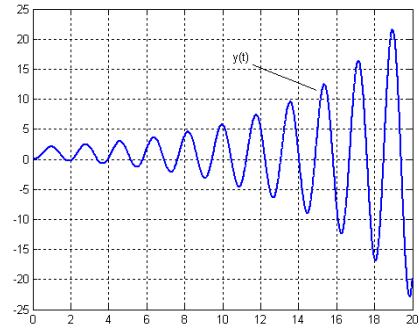
Таким образом, при  $K_r = 1$  выполняются как необходимое так и достаточное условия устойчивости, следовательно при выбранном значении  $K_r = 1$  система динамически **устойчива**.

Исследуем систему при значениях  $K_r = 1 < K_r^{max} = 2$  и при  $K_r = 2.5 > K_r^{max} = 2$  методом имитационного моделирования.

Таким образом, на данном примере проиллюстрировано важное достоинство алгебраических критериев анализа устойчивости – возможность их использования для решения задач параметрического синтеза регуляторов исходя из условий обеспечения динамической устойчивости систем автоматического управления.



a)



за;  
ичива

Рисунок 5.5 Результаты имитаци

- а) коэффициент  $K_r = 1$  выбран правильно
- б) коэффициент  $K_r = 2.5$  выбран неправильн

Вместе с тем алгебраические методы анализа устойчивости имеют ряд недостатков, связанных с тем, что их применение отличаются малой наглядностью, поскольку основываются на реализации чисто формальных алгебраических соотношений. Кроме того, применение этой группы методов для решения задач динамического проектирования систем управления высокого порядка в ряде случаев оказывается затруднительным и малоэффективным.

Высокой наглядностью и эффективностью обладают методы анализа устойчивости в частотной области, в основном ориентированные на графоаналитические представления моделей линейных систем управления в частотной области.

Благодаря своей наглядности и эффективности применение частотных методов анализа устойчивости нашло широкое применение в практике решения задач динамического проектирования систем автоматического управления.

Рассмотрим некоторые основные методы анализа устойчивости систем управления в частотной области.

## **2.5.5 Методы анализа устойчивости линейных систем автоматического управления в частотной области**

Применение частотных методов анализа устойчивости систем управления основывается на результатах преобразования и исследования таких форм математического описания систем управления как частотные характеристики.

Напомним, что для определения свойств устойчивости систем управления достаточно оценить знаки вещественных частей корней характеристических уравнений исследуемых систем. Получение оценок знаков вещественных частей корней характеристических уравнений представляет собой относительно простую задачу, которая может быть решена в частотной области.

Частотные характеристики систем управления представляют собой комплексные функции частоты. Поэтому, искомая связь между свойствами корней характеристических уравнений и свойствами и параметрами частотных характеристик вытекает из основных положений теории функций комплексных переменных.

Таким образом, частотные методы анализа устойчивости систем автоматического управления позволяют на основе результатов анализа свойств частотных характеристик систем управления делать выводы об устойчивости автоматических систем.

Пусть задан некоторый полином  $P(s)$  как функция от комплексного аргумента  $s$ . Допустим, что порядок этого полинома  $n$ . Это значит, что существуют  $n$  корней этого полинома. Предположим, что среди  $n$  корней полинома  $p$  корней имеют положительные значения вещественных частей, а остальные  $n-p$  корней имеют отрицательные значения вещественных частей.

Тогда, в соответствии с “принципом аргумента”, сформулированным в теории функций комплексных переменных можно записать

$$\Delta \arg \{P(s)\}_{-j\infty}^{j\infty} = (n - p) \cdot \pi - p \cdot \pi = (n - 2p) \pi$$

или

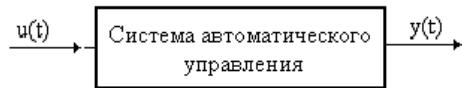
$$\Delta \arg \{P(s)\} \Big|_0^{j\infty} = (n-p) \cdot \frac{\pi}{2} - p \cdot \frac{\pi}{2} = (n-2p) \frac{\pi}{2}$$

Приведенные выше соотношения составили основу для ряда методов анализа устойчивости систем управления в частотной области.

Рассмотрим метод анализа устойчивости систем автоматического управления в частотной области, сформулированный Михайловым А.В.

### 2.5.5.1 Частотный критерий анализа устойчивости линейных систем автоматического управления Михайлова

Пусть структура системы управления имеет вид:



Известно выражение для характеристического полинома системы управления, полученное непосредственно по дифференциальному уравнению системы, либо по выражению для ее передаточной функции:

$$D(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_i \lambda^{n-k} + \dots + a_n$$

Пусть  $\lambda = j\omega$ . Подставляя значение комплексного аргумента в выражение для характеристического полинома системы получим выражение для так называемой характеристической функции Михайлова в виде:

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_i(j\omega)^{n-k} + \dots + a_n = x(\omega) + jy(\omega)$$

Будем изменять значение независимой комплексной переменной  $\omega$  в диапазоне от 0 до  $\infty$ . Тогда изменение функции  $D(j\omega)$  комплексного переменного можно отобразить на координатной комплексной плоскости в виде годографа этой функции.

В соответствии с принципом аргумента теории функций комплексных переменных можно записать

$$\Delta \arg \{P(s)\} \Big|_0^{j\infty} = (n-2p) \frac{\pi}{2}$$

где  $n$  – порядок модели системы управления;

$p$  – число корней характеристического уравнения системы с положительными вещественными частями.

Как известно, для устойчивости систем управления необходимо и достаточно, чтобы все корни их характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части. Таким образом для динамически устойчивых систем  $p = 0$ .

Сформулируем критерий устойчивости линейных систем автоматического управления Михайлова в следующей форме:

**Критерий устойчивости Михайлова:** Для устойчивости систем управления необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты  $\omega$  в диапазоне от 0 до  $\infty$ , значение аргумента комплексной характеристической функции Михайлова  $D(j\omega)$  изменилось на величину  $\Delta \arg\{P(s)\}|_0^{\infty} = n \frac{\pi}{2}$ .

Имея в виду, что изменение аргумента комплексной функции на  $\frac{\pi}{2}$  соответствует повороту ее радиуса-вектора в пределах одного квадранта, можно сформулировать критерий устойчивости Михайлова в иной форме, а именно:

**Критерий устойчивости Михайлова:** Для устойчивости систем управления необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты  $\omega$  в диапазоне от 0 до  $\infty$ , годограф комплексной характеристической функции Михайлова проходил последовательно через “ $n$ ” квадрантов.

Рассмотрим примеры применения критерия Михайлова для анализа устойчивости динамических систем.

**Пример 1.** Пусть известен характеристический полином системы:

$$D(\lambda) = 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Требуется исследовать устойчивость системы с использованием критерия Михайлова и сделать выводы.

**Этап 1.** Определим комплексную характеристическую функцию Михайлова

$$D(j\omega) = D(\lambda)|_{\lambda=j\omega} = 4(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1 = (1 - 3\omega^2) + j\omega(2 - 4\omega^2)$$

*Этап 2. Определим значение аргумента комплексной характеристической функции Михайлова  $D(j\omega)$  при  $\omega=0$ .*

$$\arg\{D(j\omega)\}\Big|_{\omega=0} = \arctg\left(\frac{y(\omega)}{x(\omega)}\right) = \arctg\left(\frac{\omega(2-4\omega^2)}{(1-3\omega^2)}\right)\Big|_{\omega=0} = 0$$

*Этап 3. Определим значение аргумента комплексной характеристической функции Михайлова  $D(j\omega)$  при  $\omega=\infty$ .*

$$\arg\{D(j\omega)\}\Big|_{\omega=\infty} = \arctg\left(\frac{y(\omega)}{x(\omega)}\right) = \arctg\left(\frac{\omega(2-4\omega^2)}{(1-3\omega^2)}\right)\Big|_{\omega=\infty} = 3\frac{\pi}{2}$$

*Так как изменение значений аргумента характеристической функции Михайлова при изменении частоты  $0 \leq \omega < \infty$  равно  $3\frac{\pi}{2}$ , при этом порядок системы  $n = 3$ , то необходимые и достаточные условия устойчивости по Михайлому выполняются, а следовательно система управления – динамически устойчива.*

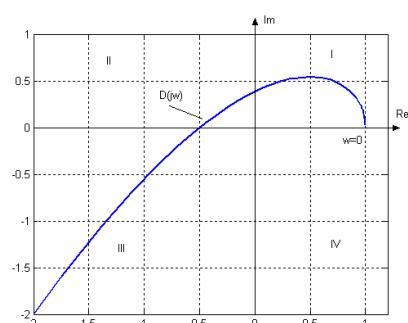
*Для решения той же самой задачи применим частотный критерий устойчивости на основе построения годографа комплексной функции Михайлова*

*Этап 1. Определим комплексную характеристическую функцию Михайлова*

$$D(j\omega) = D(\lambda)\Big|_{\lambda=j\omega} = 4(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1 = (1-3\omega^2) + j\omega(2-4\omega^2)$$

*Этап 2. Построим годограф характеристической функции Михайлова при изменении частоты  $0 \leq \omega < \infty$ .*

*Из анализа приведенного выше годографа Михайлова для исследуемой системы следует, что система **устойчива**, так как годограф проходит последовательно  $n=3$  квадрантов.*



**Пример 2.** Пусть известен характеристический полином системы:

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 148 из 204*

$$D(\lambda) = 10\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Требуется исследовать устойчивость системы с использованием критерия Михайлова и сделать выводы.

*Этап 1. Определим комплексную характеристическую функцию Михайлова*

$$D(j\omega) = D(\lambda)|_{\lambda=j\omega} = 10(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1 = (1 - 3\omega^2) + j\omega(2 - 10\omega^2)$$

*Этап 2. Определим значение аргумента комплексной характеристической функции Михайлова  $D(j\omega)$  при  $\omega = 0$ .*

$$\arg\{D(j\omega)\}|_{\omega=0} = \operatorname{arctg}\left(\frac{y(\omega)}{x(\omega)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega(2 - 10\omega^2)}{(1 - 3\omega^2)}\right)|_{\omega=0} = 0$$

*Этап 3. Определим значение аргумента комплексной характеристической функции Михайлова  $D(j\omega)$  при  $\omega = \infty$ .*

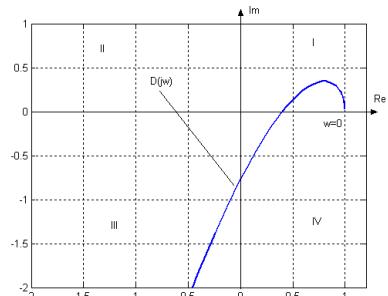
$$\arg\{D(j\omega)\}|_{\omega=\infty} = \operatorname{arctg}\left(\frac{y(\omega)}{x(\omega)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega(2 - 10\omega^2)}{(1 - 3\omega^2)}\right)|_{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Так как изменение значений аргумента характеристической функции Михайлова при изменении частоты  $0 \leq \omega < \infty$  равно  $\frac{\pi}{2}$ , при этом порядок системы  $n = 3$ , то необходимые и достаточные условия устойчивости по Михайлому не выполняются, а следовательно система управления – динамически неустойчива.

Для решения той же самой задачи применим частотный критерий устойчивости на основе построения голографа комплексной функции Михайлова

*Этап 1. Определим комплексную характеристическую функцию Михайлова*

$$D(j\omega) = D(\lambda)|_{\lambda=j\omega} = 10(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1 = (1 - 3\omega^2) + j\omega(2 - 10\omega^2)$$



*Этап 2. Построим годограф характеристической функции Михайлова при изменении частоты  $0 \leq \omega < \infty$ .*

*Из анализа приведенного выше годографа Михайлова для исследуемой системы следует, что система **неустойчива**, так как годограф не проходит последовательно  $n=3$  квадрантов.*

Как следует из приведенных выше примеров, частотный критерий Михайлова обладает рядом недостатков, существенно ограничивающих применение этого критерия анализа устойчивости при решении практических, прикладных задач динамического проектирования и расчета систем автоматического управления.

В значительной мере свободным от указанных выше недостатков является частотный метод анализа устойчивости систем автоматического управления, предложенный Найквистом.

Рассмотрим основные положения и особенности применения частотного критерия Найквиста для анализа устойчивости систем управления более подробно.

#### **2.5.5.2 Частотный критерий анализа устойчивости линейных непрерывных систем автоматического управления Найквиста**

Постановка проблемы анализа устойчивости систем управления в соответствии с формулировкой Найквиста существенно отличается от традиционных. Особенность применения критерия Найквиста для исследования устойчивости систем управления состоит в том, что в качестве необходимой для проведения исследований модели системы используется модель системы управления в форме частотных характеристик системы с разомкнутой обратной связью.

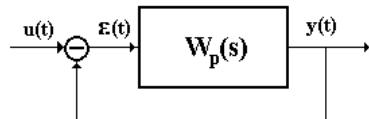
*Использование критерия устойчивости Найквиста позволяет сделать вывод о свойствах устойчивости исследуемой замкнутой с отрицательной обратной связью системы управления на основе анализа частотных характеристик системы в разомкнутом состоянии.*

Такая постановка проблемы анализа устойчивости обусловлена рядом факторов, в частности:

- модель системы в разомкнутом состоянии проще, чем модель замкнутой системы;
- нет необходимости выполнять эквивалентные преобразования моделей систем с целью определения эквивалентных моделей замкнутых с обратной связью систем управления;
- простое вычисление эквивалентных частотных характеристик последовательно соединенных блоков с заданными в частотной области моделями;
- возможность предварительного оценивания влияния на динамические свойства системы включения в ее прямую цепь корректирующих динамических фильтров различной структуры и параметрами;
- другие факторы.

Рассмотрим постановку проблемы исследования устойчивости систем автоматического управления на основе применения критерия Найквиста более подробно.

Пусть исследуемая замкнутая система автоматического управления с отрицательной обратной связью задана своей структурой вида:



где  $W_p(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$  - передаточная функция разомкнутой системы:

Тогда выражение для передаточной функции замкнутой системы с учетом правил эквивалентных преобразований структурных схем моделей систем управления будет иметь вид:

$$\Phi(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)} = \frac{M(s)}{N(s) + M(s)} = \frac{M(s)}{D(s)}$$

где  $M(s) = b'_0 s^m + b'_1 s^{m-1} + \dots + b'_{m-1} s + b'_m$  – полином числителя передаточной функции разомкнутой системы степени  $m$ ;

$N(s) = a'_0 s^n + a'_1 s^{n-1} + \dots + a'_{n-1} s + a'_n$  – характеристический полином – полином знаменателя передаточной функции разомкнутой системы степени  $n$ ;

$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$  – характеристический полином – полином знаменателя передаточной функции замкнутой системы степени  $n$ ;

Введем в рассмотрение функцию

$$\xi(s) = 1 + W_p(s) = 1 + \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)} = \frac{D(s)}{N(s)}$$

Очевидно, что уравнение  $\xi(s) = D(s) = 0$  – представляет собой характеристическое уравнение замкнутой системы.

Используя соотношения, вытекающие из принципа аргумента теории функций комплексного переменного

$$\Delta \arg\{P(s)\}_{|0}^{\infty} = (n - 2p) \frac{\pi}{2}$$

определим условия устойчивости замкнутой системы управления.

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части. Это значит, что число корней характеристического уравнения с отрицательными вещественными частями функции  $\xi(s)$  должно быть равно порядку  $n$  характеристического полинома замкнутой системы  $D(s)$ .

Пусть частота  $\omega$  изменяется в диапазоне  $0 \leq \omega < \infty$ , тогда изменение аргумента комплексной функции частоты для устойчивости замкнутой системы должно быть равно:

$$\Delta \arg\{\xi(j\omega)\}_{|0}^{\infty} = \frac{\pi}{2} n - \frac{\pi}{2}(n - 2p) = \frac{\pi}{2} 2p = 2\pi \cdot \frac{p}{2}.$$

где  $n$  – порядок системы, число корней характеристических уравнений системы управления в разомкнутом  $N(s)$  и замкнутом  $D(s)$  состоянии;

$p$  – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительными вещественными частями.

Очевидно, что если  $p = 0$ , то система управления в разомкнутом состоянии является устойчивой. В том случае, если  $p \neq 0$ , то система управления в разомкнутом состоянии является неустойчивой.

Необходимо отметить, что комплексная функция частоты

$$\xi(j\omega) = \xi(s)|_{s=j\omega} = 1 + W_p(s)|_{s=j\omega} = 1 + W_p(j\omega)$$

где  $W_p(j\omega)$  – комплексная частотная характеристика системы управления в разомкнутом состоянии.

Таким образом, годограф комплексной функции частоты  $\xi(j\omega)$  представляет собой смещенный на 1-цу вправо годограф комплексной частотной характеристики разомкнутой системы управления  $W_p(j\omega)$ .

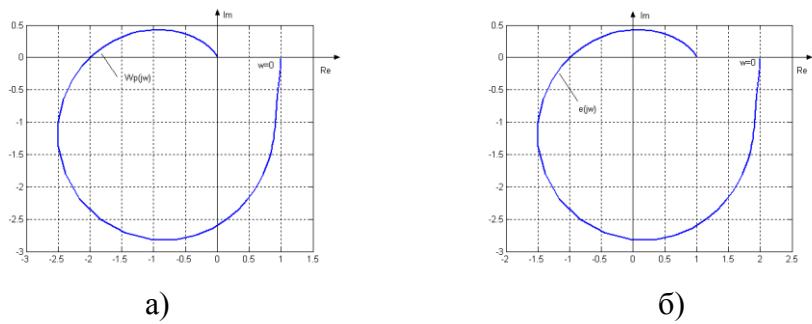


Рисунок 5.6 Годографы

а) комплексной частотной характеристики разомкнутой системы  $W_p(j\omega)$ ;

б) вспомогательной комплексной функции частоты  $\xi(j\omega)$

Выполненные выше преобразования позволяют лучше понять содержание и формулировку критерия устойчивости линейных систем управления, предложенного Найквистом. Полная формулировка частотного критерия устойчивости Найквиста приведена ниже.

**Критерий устойчивости Найквиста для комплексных частотных характеристик:**

**Случай 1. Пусть система в разомкнутом состоянии устойчива и число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительной вещественной частью  $p=0$ . В этом случае, для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы при**

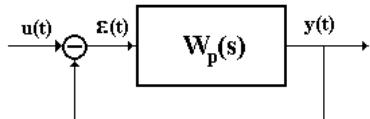
*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 153 из 204*

*изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  - годограф комплексной частотной характеристики разомкнутой системы  $W_p(j\omega)$  не охватывал точку с координатами  $[-1, j0]$ .*

*Случай 2. Пусть система в разомкнутом состоянии неустойчива и характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет  $p \neq 0$  корней с положительной вещественной частью. В этом случае, для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  - годограф комплексной частотной характеристики разомкнутой системы  $W_p(j\omega)$  охватывал точку с координатами  $[-1, j0]$   $\frac{p}{2}$  раз в положительном направлении.*

Рассмотрим ряд иллюстративных примеров, позволяющих понять методику применения частотного критерия устойчивости Найквиста и особенности его применения для анализа динамической устойчивости систем автоматического управления.

**Пример 1.** Структура системы управления имеет вид:



Задано выражение для передаточной функции системы управления в разомкнутом состоянии  $W_p(s)$ . Требуется исследовать свойства динамической устойчивости замкнутой системы с помощью критерия устойчивости Найквиста и сделать соответствующие выводы.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)}.$$

*Этап 1. Анализ устойчивости системы в разомкнутом состоянии.*

Для исследования устойчивости системы в разомкнутом состоянии воспользуемся корневым критерием устойчивости. Для этого определим корни характеристического уравнения разомкнутой системы:

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 154 из 204*

$$N(s) = (s+1)(s+2)(s+5) = 0$$

Отсюда:  $s_1 = -1; s_2 = -2; s_3 = -5$ .

Так как все корни характеристического уравнения разомкнутой системы – вещественные и отрицательные, то система управления в разомкнутом состоянии является динамически **устойчивой**. При этом число корней характеристического уравнения с положительными вещественными частями  $p=0$ .

*Этап 2.* Определение выражения для комплексной частотной характеристики разомкнутой системы  $W_p(j\omega)$  и построение ее годографа при изменении частоты в диапазоне  $0 \leq \omega < \infty$  (смотри рисунок).

$$W_p(j\omega) = W_p(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)} \Big|_{s=j\omega}$$

*Этап 3.* Анализ устойчивости замкнутой системы с использованием критерия Найквиста.

Так как, система в разомкнутом состоянии является устойчивой и годограф частотной характеристики разомкнутой системы не охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ , условия критерия Найквиста выполняются и замкнутая система является **устойчивой**.

*Этап 4.* Проверка устойчивости замкнутой системы методом имитационного моделирования.

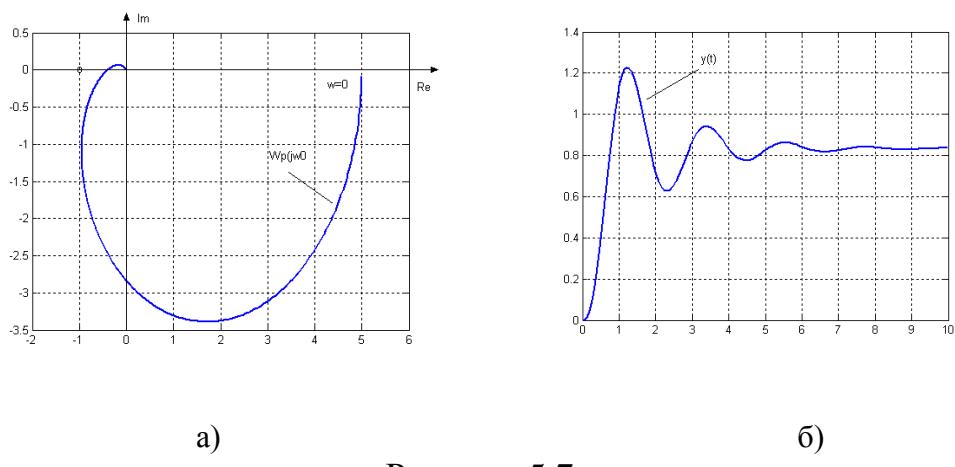


Рисунок 5.7

- а) График годографа АФЧХ разомкнутой системы;
- б) Реакция системы управления на внешнее воздействие

Как следует из результатов имитационного моделирования – замкнутая система автоматического управления является устойчивой, так как реакция системы на ограниченное внешнее воздействие – также ограничена. Таким образом, вывод об устойчивости замкнутой системы управления, сделанный на основе применения критерия устойчивости Найквиста является правильным.

**Пример 2.** Для замкнутой системы с отрицательной обратной связью задано выражение для передаточной функции системы управления в разомкнутом состоянии  $W_p(s)$ . Требуется исследовать свойства динамической устойчивости замкнутой системы с помощью критерия устойчивости Найквиста и сделать соответствующие выводы.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{4}{2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}.$$

*Этап 1. Анализ устойчивости системы в разомкнутом состоянии.*

Для исследования устойчивости системы в разомкнутом состоянии воспользуемся алгебраическим критерием устойчивости Гурвица.

Для проверки достаточного условия устойчивости составим матрицу Гурвица.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= 3 > 0 \\ \text{Тогда диагональные миноры: } \Delta_2 &= 4 > 0 \\ \Delta_3 &= 1 \cdot \Delta_2 > 0 \end{aligned}$$

Так как все диагональные миноры – положительны, то достаточные условия устойчивости – выполняются и система в разомкнутом состоянии – **устойчива**. При этом число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительными вещественными частями  $p=0$ .

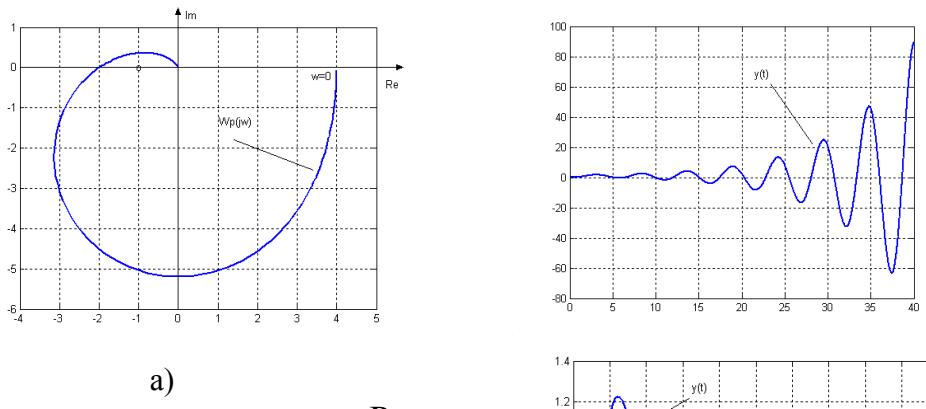
*Этап 2. Определение выражения для комплексной частотной характеристики разомкнутой системы  $W_p(j\omega)$  и построение ее годографа при изменении частоты в диапазоне  $0 \leq \omega < \infty$  (смотри рисунок).*

$$W_p(j\omega) = W_p(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{4}{2s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \Big|_{s=j\omega}$$

*Этап 3. Анализ устойчивости замкнутой системы с использованием критерия Найквиста.*

Так как, система в разомкнутом состоянии является устойчивой и годограф частотной характеристики разомкнутой системы охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$ , то условия критерия Найквиста не выполняются и замкнутая система является **неустойчивой**.

*Этап 4. Проверка устойчивости замкнутой системы методом имитационного моделирования.*



Рисунок

- а) График годографа АФЧХ  
б) Реакция системы управления

Как следует из результатов имитации замкнутой системы автоматического управления является **неустойчивой**, так как реакция системы на ограниченное внешнее воздействие – не ограничена. Таким образом, вывод об устойчивости замкнутой системы управления, сделанный на основе применения критерия устойчивости Найквиста является правильным.

**Пример 3.** Система управления представляет собой систему управления с отрицательной обратной связью. Задано выражение для передаточной функции системы управления в разомкнутом состоянии  $W_p(s)$ . Требуется исследовать свойства динамической устойчивости замкнутой системы с помо-

Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 157 из 204

щью критерия устойчивости Найквиста и сделать соответствующие выводы.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{50(4s+1)}{(10s-1)(5s-1)(0.5s+1)}.$$

Этап 1. Анализ устойчивости системы в разомкнутом состоянии.

Для исследования устойчивости системы в разомкнутом состоянии воспользуемся корневым критерием устойчивости. Для этого определим корни характеристического уравнения разомкнутой системы:

$$N(s) = (10s-1)(5s-1)(0.5s+1) = 0$$

Отсюда:  $s_1 = 0.1$ ;  $s_2 = 0.2$ ;  $s_3 = -2$ .

Так как среди корней характеристического уравнения разомкнутой системы есть два положительных вещественных корня, то система управления в разомкнутом состоянии является динамически **неустойчивой**. При этом число корней характеристического уравнения с положительными вещественными частями  $p=2$ .

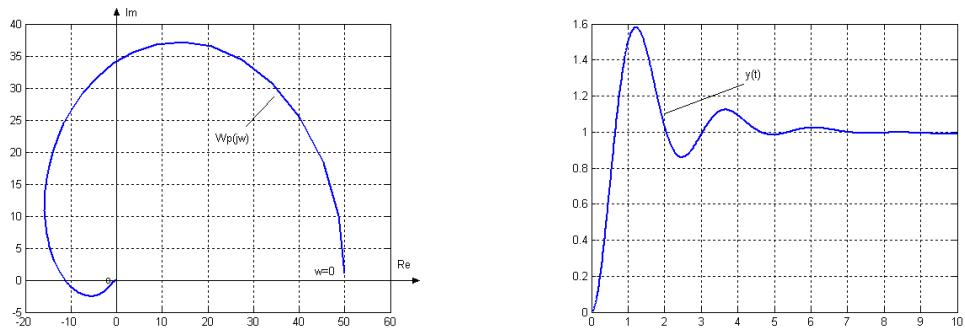
Этап 2. Определение выражения для комплексной частотной характеристики разомкнутой системы  $W_p(j\omega)$  и построение ее годографа при изменении частоты в диапазоне  $0 \leq \omega < \infty$  (смотри рисунок).

$$W_p(j\omega) = W_p(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{50(4s+1)}{(10s-1)(5s-1)(0.5s+1)} \Big|_{s=j\omega}$$

Этап 3. Анализ устойчивости замкнутой системы с использованием критерия Найквиста.

Так как, система в разомкнутом состоянии является неустойчивой и годограф частотной характеристики разомкнутой системы охватывает точку с координатами  $[-1, j0]$   $\frac{p}{2} = 1$  раз, в положительном направлении, то условия критерия Найквиста выполняются и замкнутая система является **устойчивой**.

Этап 4. Проверка устойчивости замкнутой системы методом имитационного моделирования.



а)

б)

Рисунок 5.9

- а) График годографа АФЧХ разомкнутой системы;  
б) Реакция системы управления на внешнее воздействие

*Как следует из результатов имитационного моделирования – замкнутая система автоматического управления является устойчивой, так как реакция системы на ограниченное внешнее воздействие – также ограничена . Таким образом, вывод об устойчивости замкнутой системы управления, сделанный на основе применения критерия устойчивости Найквиста является правильным.*

### 2.5.5.3 Критерий устойчивости Найквиста для логарифмических частотных характеристик

В практике решения задач динамического расчета и проектирования систем автоматического управления использование моделей систем в форме комплексных частотных характеристик получило исключительно ограниченное применение.

Поведение годографов частотных характеристик в широком диапазоне частот оказывается ненаглядным. По форме годографов практически невозможно оценить структуру и параметры динамических фильтров, включая которые в контур управления можно было бы модифицировать динамические свойства систем управления желаемым образом.

Указанные выше факторы объясняют то, что при решении прикладных задач динамического проектирования систем автоматического управления наиболее широкое применение в качестве форм представления моделей систем получил аппарат логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик.

Поэтому, в процессе динамического расчета систем управления в качестве наиболее эффективного метода анализа устойчивости является обобщение частотного критерия устойчивости Найквиста на класс моделей систем в форме логарифмических частотных характеристик.

Приведем формулировку частотного критерия Найквиста для анализа устойчивости линейных систем автоматического управления по их логарифмическим частотным характеристикам.

### **Случай 1.**

*Пусть система в разомкнутом состоянии устойчива и число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительной вещественной частью  $p=0$ . В этом случае, для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы во всем диапазоне частот, где логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы положительна, то есть  $L_p(\omega) > 0$  – логарифмическая фазовая частотная характеристика  $F_p(\omega)$  не пересекала линию  $-180^\circ \pm k \cdot 360^\circ$ , где  $k=0,1,\dots$ .*

### **Случай 2**

*Пусть система в разомкнутом состоянии неустойчива и характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет  $p \neq 0$  корней с положительной вещественной частью. В этом случае, для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы во всем диапазоне частот, где логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы положительна, то есть  $L_p(\omega) > 0$ , - логарифмическая фазовая частотная характеристика  $F_p(\omega)$  не пересекала линию  $-180^\circ \pm k \cdot 360^\circ$ , где  $k=0,1,\dots$ .*

*рифмическая фазовая частотная характеристика  $F_p(\omega)$  пересекала линию  $-180^\circ \pm k \cdot 360^\circ$ , где  $k=0,1,.., \frac{p}{2}$  раз в положительном направлении.*

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие применение критерия Найквиста.

**Пример 4.** Задано выражение для передаточной функции системы управления в разомкнутом состоянии  $W_p(s)$ . Требуется исследовать свойства динамической устойчивости замкнутой системы с помощью критерия устойчивости Найквиста и сделать соответствующие выводы.

*Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:*

$$W_p(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)}.$$

*Этап 1. Анализ устойчивости системы в разомкнутом состоянии.*

Для исследования устойчивости системы в разомкнутом состоянии воспользуемся корневым критерием устойчивости. Для этого определим корни характеристического уравнения разомкнутой системы:

$$N(s) = (s+1)(s+2)(s+5) = 0$$

*Отсюда:  $s_1 = -1$ ;  $s_2 = -2$ ;  $s_3 = -5$ .*

*Так как все корни характеристического уравнения разомкнутой системы – вещественные и отрицательные, то система управления в разомкнутом состоянии является динамически устойчивой. При этом число корней характеристического уравнения с положительными вещественными частями  $p=0$ .*

*Этап 2. Определение выражений для логарифмических амплитудно-фазовых частных характеристик разомкнутой системы  $L_p(\omega)$ ,  $\varphi_p(\omega)$  и построение голографов ЛАФЧХ при изменении частоты в диапазоне  $0 \leq \omega < \infty$  (смотри рисунок).*

$$W_p(j\omega) = W_p(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+5)} \Big|_{s=j\omega}; \quad \begin{cases} L_p(\omega) = 20 \lg(|W_p(j\omega)|) \\ \varphi_p(\omega) = \arg(|W_p(j\omega)|) \end{cases}$$

*Этап 3. Анализ устойчивости замкнутой системы с использованием критерия Найквиста.*

Так как, система в разомкнутом состоянии является устойчивой и во всем диапазоне частот, где логарифмическая амплитудная частотная характеристика  $L_p(\omega) > 0$  – годограф логарифмической фазовой частотной характеристики  $\varphi_p(\omega)$  не пересекает уровень  $-180^\circ$ , то условия устойчивости Найквиста выполняются и замкнутая система является **устойчивой**.

**Этап 4.** Проверка устойчивости замкнутой системы методом имитационного моделирования.

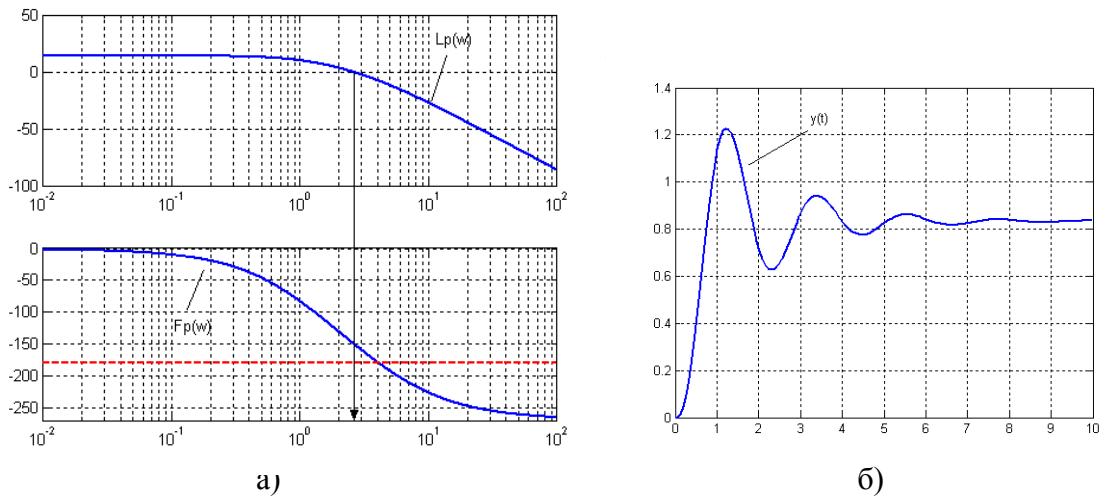


Рисунок 5.10

- а) График годографа ЛАФЧ разомкнутой системы;  
б) Реакция системы управления на внешнее воздействие

Как следует из результатов имитационного моделирования – замкнутая система автоматического управления является **устойчивой**, так как реакция системы на ограниченное внешнее воздействие – также ограничена. Таким образом, вывод об устойчивости замкнутой системы управления, сделанный на основе применения критерия устойчивости Найквиста является **правильным**.

**Пример 5.** Для замкнутой системы с отрицательной обратной связью задано выражение для передаточной функции системы управления в разомкнутом состоянии  $W_p(s)$ . Требуется исследовать свойства динамической устойчивости замкнутой системы с помощью критерия устойчивости Найквиста и сделать соответствующие выводы.

*Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:*

$$W_p(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{4}{2s^3 + 3s^2 + 2s + 1}.$$

*Этап 1. Анализ устойчивости системы в разомкнутом состоянии .*

*Для исследования устойчивости системы в разомкнутом состоянии воспользуемся алгебраическим критерием устойчивости Гурвица.*

*Так как все коэффициенты характеристического полинома разомкнутой системы – положительны, то необходимое условие устойчивости – выполняется.*

*Для проверки достаточного условия устойчивости составим матрицу Гурвица.*

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Delta_1 = 3 > 0$$

*Тогда диагональные миноры:  $\Delta_2 = 4 > 0$*

$$\Delta_3 = 1 \cdot \Delta_2 > 0$$

*Так как все диагональные миноры – положительны, то достаточные условия устойчивости – выполняются и система в разомкнутом состоянии – **устойчива**. При этом число корней характеристического уравнения разомкнутой системы с положительными вещественными частями  $p=0$ .*

*Этап 2. Определение выражений для логарифмических амплитудно-фазовых частных характеристик разомкнутой системы  $L_p(\omega)$ ,  $\varphi_p(\omega)$  и построение голографов ЛАФЧХ при изменении частоты в диапазоне  $0 \leq \omega < \infty$  (смотри рисунок).*

$$W_p(j\omega) = W_p(s)|_{s=j\omega} = \frac{4}{2s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \Big|_{s=j\omega}; \quad \begin{cases} L_p(\omega) = 20 \lg(|W_p(j\omega)|) \\ \varphi_p(\omega) = \arg(W_p(j\omega)) \end{cases}$$

*Этап 3. Анализ устойчивости замкнутой системы с использованием критерия Найквиста.*

*Так как, система в разомкнутом состоянии является устойчивой и во всем диапазоне частот, где логарифмическая амплитудная частотная характеристика  $L_p(\omega) > 0$  – голограф логарифмической фазовой частотной харак-*

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 163 из 204*

теристики  $\varphi_p(\omega)$  пересекает уровень  $-180$ , то условия устойчивости Найквиста не выполняются и замкнутая система является **неустойчивой**.

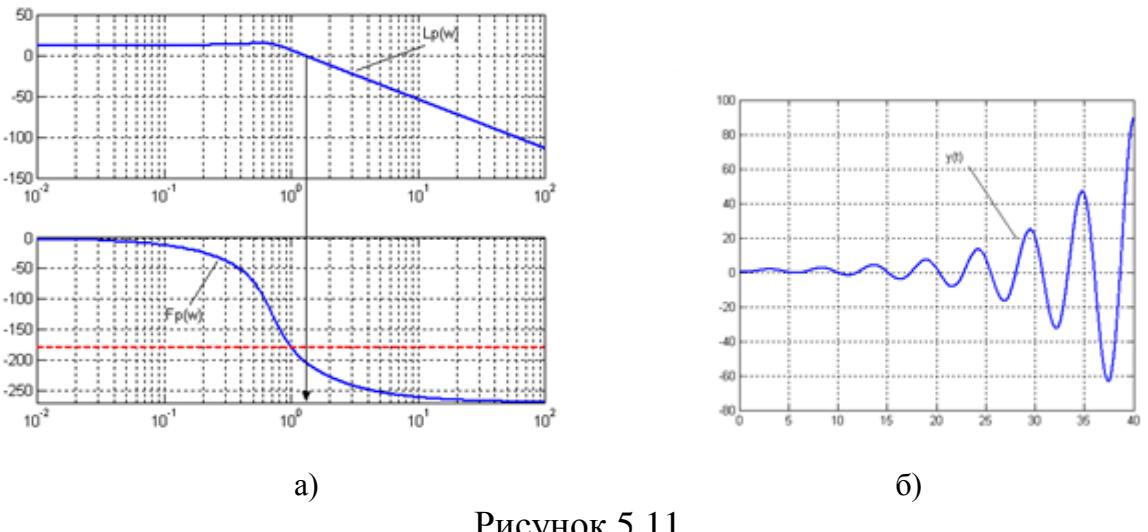


Рисунок 5.11

- а) График годографа ЛАФЧХ разомкнутой системы;
- б) Реакция системы управления на внешнее воздействие.

*Этап 4. Проверка устойчивости замкнутой системы методом имитационного моделирования.*

Как следует из результатов имитационного моделирования – замкнутая система автоматического управления является неустойчивой, так как реакция системы на ограниченное внешнее воздействие – не ограничена. Таким образом, вывод об устойчивости замкнутой системы управления, сделанный на основе применения критерия устойчивости Найквиста является правильным.

**Пример 6.** Система управления представляет собой систему управления с отрицательной обратной связью. Задано выражение для передаточной функции системы управления в разомкнутом состоянии  $W_p(s)$ . Требуется исследовать свойства динамической устойчивости замкнутой системы с помощью критерия устойчивости Найквиста и сделать соответствующие выводы.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W_p(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{50(4s+1)}{(10s-1)(5s-1)(0.5s+1)}.$$

Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 164 из 204

*Этап 1. Анализ устойчивости системы в разомкнутом состоянии.*

Для исследования устойчивости системы в разомкнутом состоянии воспользуемся корневым критерием устойчивости. Для этого определим корни характеристического уравнения разомкнутой системы:

$$N(s) = (10s - 1)(5s - 1)(0.5s + 1) = 0$$

Отсюда:  $s_1 = 0.1$ ;  $s_2 = 0.2$ ;  $s_3 = -2$ .

Так как среди корней характеристического уравнения разомкнутой системы есть два положительных вещественных корня, то система управления в разомкнутом состоянии является динамически **неустойчивой**. При этом число корней характеристического уравнения с положительными вещественными частями  $p=2$ .

*Этап 2. Определение выражения для комплексной частотной характеристики разомкнутой системы  $W_p(j\omega)$  и построение ее годографа при изменении частоты в диапазоне  $0 \leq \omega < \infty$  (смотри рисунок).*

$$W_p(j\omega) = W_p(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{50(4s+1)}{(10s-1)(5s-1)(0.5s+1)} \Big|_{s=j\omega}$$

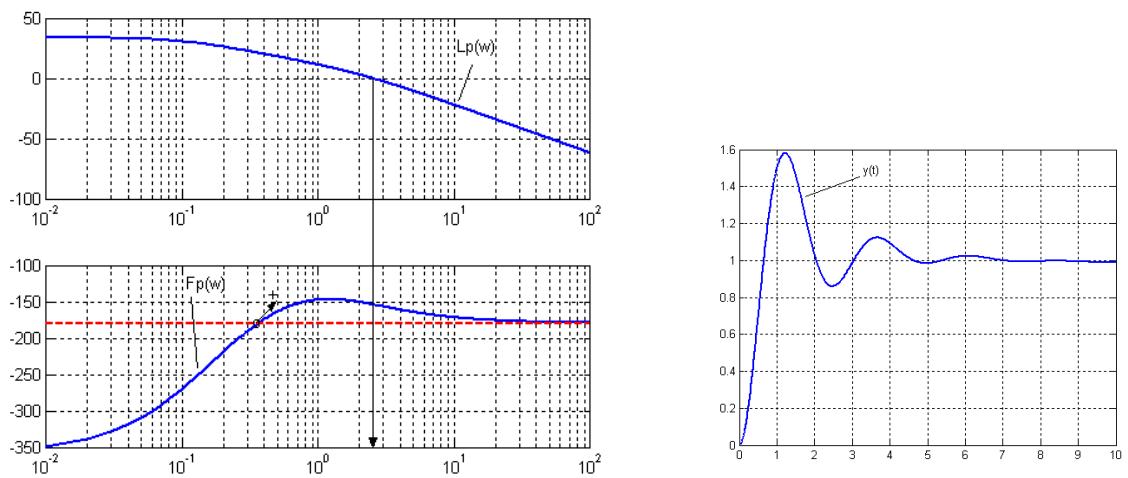


Рисунок 5.12

- а) График годографа ЛАФЧХ разомкнутой системы;
- б) Реакция системы управления на внешнее воздействие

*Этап 3. Анализ устойчивости замкнутой системы с использованием критерия Найквиста.*

*Так как, система в разомкнутом состоянии является неустойчивой и в диапазоне частот, где логарифмическая амплитудная частотная характеристика  $L_p(\omega) > 0$  – годограф логарифмической фазовой частотной характеристики  $\varphi_p(\omega)$  пересекает уровень  $-180$  в положительном направлении  $\frac{P}{2} = 1$ , то условия устойчивости Найквиста выполняются и замкнутая система является устойчивой.*

*Этап 4. Проверка устойчивости замкнутой системы методом имитационного моделирования.*

*Как следует из результатов имитационного моделирования – замкнутая система автоматического управления является устойчивой, так как реакция системы на ограниченное внешнее воздействие – также ограничена. Таким образом, вывод об устойчивости замкнутой системы управления, сделанный на основе применения критерия устойчивости Найквиста является правильным.*

Рассмотренные выше критерии анализа динамической устойчивости систем автоматического управления позволяют не только решать задачи анализа устойчивости, но и решать на основе их использования задачи структурно-параметрического синтеза регуляторов, некоторые основные методы решения, которых будут рассмотрены ниже.

Проблемы исследования устойчивости систем автоматического управления являются важными, но не единственными проблемами в процессе решения задач их динамического расчета. Помимо обеспечения устойчивости проектируемой автоматической системы перед разработчиком стоят задачи обеспечения требуемых динамических свойств системы управления, которые определены в Техническом задании на проектирование автоматической системы в форме заданных желаемых числовых значений особых параметров, которые получили название показателей динамического качества.

Рассмотрим систему понятий показателей качества, а также методологию их определения в процессе динамического расчета и исследования автоматических систем более подробно.

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 166 из 204*

## **2.6 Анализ качества линейных непрерывных систем автоматического управления**

В теории управления вводится понятие **качества** систем управления. Качество систем управления выражается через числовые значения некоторых параметров, получивших название **показателей качества**, которые отражают динамические свойства систем управления, как в установившихся режимах, так и в переходных процессах.

Можно выделить три основные группы показателей качества систем управления:

- показатели статической точности;
- показатели динамического качества;
- интегральные показатели качества.

**Показатели статической точности** характеризуют точность реализации функций управления автоматическими системами в установившихся режимах после окончания переходных процессов.

**Показатели динамического качества** характеризуют поведение системы в переходных процессах и определяются, как правило, по реакции системы на типовые тестовые воздействия.

**Интегральные показатели качества** характеризуют динамические свойства систем управления в динамических и установившихся режимах с возможностью учета характера изменения во времени управляющих воздействий.

Среди групп показателей статической точности и динамического качества можно выделить следующие группы показателей:

- прямые показатели качества;
- косвенные показатели качества.

**К прямым показателям статической точности** относятся:

– абсолютные значения установившихся ошибок  $\varepsilon_{y_{cm}}$  регулирования и управления;

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 167 из 204*

- относительные значения установившихся ошибок  $\delta_{y_{cm}}$  регулирования и управления;
- величина амплитуды ошибки регулирования при гармонических внешних воздействиях  $\varepsilon_{y_{cm}}^{\Gamma}$ ;
- другие показатели статической точности.

***К косвенным показателям статической точности*** относятся:

- коэффициенты ошибки  $C_i^u$  системы по управляющему воздействию;
- коэффициенты ошибки  $C_i^f$  системы по возмущающему воздействию;
- показатели добротности  $D_i^u$  системы по управляющему воздействию;
- показатели добротности  $D_i^f$  системы по возмущающему воздействию;
- другие показатели статической точности.

***К прямым показателям динамического качества*** относятся:

***– показатели быстродействия системы:***

- время переходного процесса  $T_{\text{пп}}$ ;
- время разгона  $t_p$ ;
- другие показатели.

***– показатели динамической точности системы:***

- величина абсолютного перерегулирования  $\Delta y_{max}$ ;
- величина относительного перерегулирования  $\sigma$ ;
- другие показатели.

***– показатели, характеризующие поведение системы в переходных процессах:***

- показатель колебательности системы  $n_k$ ;
- коэффициент колебательности системы  $k_N$ ;
- другие показатели.

Рассмотрим вопросы формального определения показателей статической точности и динамического качества более подробно.

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 168 из 204*

## 2.6.1 Прямые показатели статической точности

Как было отмечено выше, к **прямым** показателям статической точности относятся:

- абсолютные значения установившихся ошибок  $\varepsilon_{y_{cm}}$  регулирования и управления;
- относительные значения установившихся ошибок  $\delta\varepsilon_{y_{cm}}$  регулирования и управления.

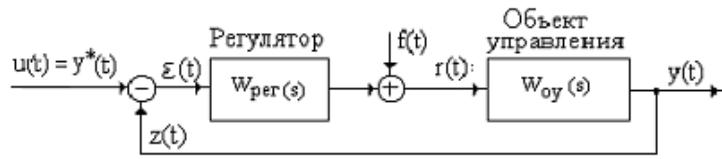


Рисунок 6.1 Обобщенная структурная схема САР

На рисунке 6.1 представлена обобщенная структурная блок-схема системы автоматического регулирования. Здесь использованы следующие обозначения:

- $u(t)$  – внешнее управляющее задающее воздействие;
- $y^*(t)$  – требуемое, желаемое значение регулируемой переменной;
- $y(t)$  – выходная регулируемая переменная;
- $r(t)$  – регулирующее воздействие на объект управления;
- $f(t)$  – возмущающее воздействие;
- $\varepsilon(t)$  – ошибка регулирования;
- $z(t)$  – сигнал обратной связи (в случае единичной обратной связи  $z(t) = y(t)$ ).

Внешнее задающее воздействие  $u(t)$  определяет требуемое значение выходной регулируемой переменной  $y^*(t)$ . Управляющее воздействие на объект управления генерируется регулятором на основе результатов сравнения задающего воздействия с фактическим значением выходной регулируемой переменной.

ной, информация о котором поступает с датчиков сигнала обратной связи, реализуя, таким образом, принцип управления с отрицательной обратной связью.

Очевидно, что результат сравнения задающего воздействия  $u(t) = y^*(t)$  с фактическим значением выходной регулируемой переменной  $y(t)$  представляет собой текущее значение динамической ошибки регулирования, то есть

$$\varepsilon(t) = u(t) - y(t) = y^*(t) - y(t)$$

В переходных процессах динамическая ошибка регулирования  $\varepsilon(t)$  изменяется во времени. После завершения переходных процессов динамическая ошибка регулирования стремится к своему установившемуся значению

$$\varepsilon_{y_{cm}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\varepsilon(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{u(t) - y(t)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \{y^*(t) - y(t)\}$$

модуль которой может быть принят за показатель статической точности системы управления.

Как правило, показатели статической точности системы управления оцениваются по реакции системы на некоторое внешнее тестовое воздействие, которое принимает предельные значения для класса наиболее характерных для данной системы управления внешних воздействий.

*За показатель статической точности системы управления принимается максимальное абсолютное значение установившейся ошибки регулирования  $\varepsilon_{max}$  для заданного класса внешних воздействий:*

$$\varepsilon_{y_{cm}}^{max} = |r^*(t) - y_{y_{cm}}| = |y^*(t) - y_{y_{cm}}|.$$

Очевидно, что максимальное установившееся значение абсолютной ошибки регулирования, принятое в качестве показателя статической точности имеет недостаток, который состоит в зависимости этого показателя от уровня воздействия.

Для того, чтобы исключить эту зависимость за показатель статической точности систем управления может быть принято *максимальное значение установившейся относительной ошибки регулирования* так как величина относительной установившейся ошибки регулирования  $\delta\varepsilon_{y_{cm}}$  не зависит от уровня

ня внешнего воздействия на систему и наиболее адекватно отражает характеристики статической точности системы управления.

**Максимальное значение установившейся относительной ошибки регулирования** определяется следующим образом:

$$\delta \varepsilon_{\text{уст}}^{\max} = \frac{\varepsilon_{\text{уст}}^{\max}}{y^*} \cdot 100\%$$

Многие системы управления функционируют в условиях внешних возмущений, имеющих случайный характер. Эти внешние воздействия в ряде случаев можно аппроксимировать суммой отдельных гармонических сигналов. В этом случае, оценку точности управления можно получить через оценку точности системы, находящейся под влиянием эквивалентных внешних гармонических воздействий.

Так как внешнее воздействие – гармоническое, то и установившееся значение реакции системы на это воздействие, а соответственно и установившееся значение ошибки регулирования, будет также изменяться по гармоническому закону.

**Таким образом, в качестве показателя статической точности систем управления при внешних гармонических воздействиях может рассматриваться значение амплитуды ошибки регулирования  $\varepsilon_m^\Gamma$ :**

$$\varepsilon_{\text{уст}}(t) = \varepsilon_m^\Gamma \cdot \sin(\omega t + \Delta\varphi)$$

Как следует из рисунка 6.1 ошибки регулирования в системах управления определяются не только характером изменения и уровнем управляющих воздействий, но и характером изменения во времени и уровнем действующих на систему возмущающих воздействий. Таким образом, величина ошибки регулирования системы управления определяется суммарным эффектом двух составляющих:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^u(t) + \varepsilon^f(t)$$

Как видно из данного соотношения в зависимости от знаков управляющих и возмущающих воздействий ошибки регулирования могут взаимно компенсироваться. Очевидно, что характеристики точности системы управления

должны определяться как сумма модулей предельных значений составляющих ошибок регулирования, обусловленных как управляющими, так и возмущающими воздействиями, то есть:

$$\varepsilon_{max} = |\varepsilon_{max}^u| + |\varepsilon_{max}^f|$$

***Параметры, определяющие требуемые значения характеристик точности или предельные значения ошибки регулирования и управления, задаются Заказчиком и входят в Техническое задание на проектирование автоматической системы.***

Определение показателей статической точности при заданных предельных значениях внешних воздействий и синтезированных структуре и параметрах алгоритмов управления, представляет собой важную ***проблему анализа статической точности систем управления.*** Основная цель решения этой проблемы состоит в проверке соответствия достигнутых в результате динамического расчета системы управления показателей статической точности – их предельным значениям, заданным в техническом задании.

Рассмотрим определения понятий косвенных показателей статической точности более подробно.

### **2.6.2 Косвенные показатели статической точности**

К косвенным показателям статической точности относятся:

- коэффициенты ошибки  $C_i^u$  системы по управляющему воздействию;
- коэффициенты ошибки  $C_j^f$  по возмущающему воздействию;
- показатели добротности  $D_i^u$  системы по управляющему воздействию;
- показатели добротности  $D_i^f$  системы по возмущающему воздействию;
- другие показатели.

Под коэффициентами ошибки систем управления понимаются значения коэффициентов разложения динамической ошибки регулирования в ряд при  $t \rightarrow \infty$ .

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 172 из 204*

$$\varepsilon_{y_{cm}}^u(t) = C_0^u \cdot u(t) + \frac{C_1^u}{1!} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{C_2^u}{2!} \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \dots,$$

где  $C_0^u, C_1^u, C_2^u, \dots$  – коэффициенты составляющей ошибки, обусловленной управляющим воздействием;  $u(t)$  – управляющее воздействие.

Из представленного выше выражения следует, что чем больше значения коэффициентов ошибки тем больше установившееся значение ошибки регулирования  $\varepsilon_{y_{cm}}(t)$  для одного и того же внешнего воздействия и тем ниже характеристики точности системы управления.

Таким образом, значения коэффициентов ошибки позволяют оценить предельные значения установившихся ошибок регулирования и таким образом, являются ***косвенными показателями*** статической точности систем управления.

Показатели добротности системы определяются как величины, обратные значениям соответствующих коэффициентов ошибки регулирования, то есть:

$$D_0 \cdot = \frac{1}{C_0}; \quad D_1 \cdot = \frac{1!}{C_1}; \quad D_2 \cdot = \frac{2!}{C_2}; \quad \dots,$$

где  $D_0^u, D_1^u, D_2^u \dots$  – показатели добротности системы по управляющему воздействию.

Показатели добротности системы также представляют собой ***косвенные показатели*** статической точности системы управления, которые отличаются тем, что чем больше значения показателей добротности системы – тем выше характеристики ее статической точности.

Аналогично определяются понятия коэффициентов ошибки регулирования и показателей добротности по возмущающим воздействиям, как косвенных показателей статической точности системы управления по отношению к действующим на систему внешним возмущениям, а именно:

$$\varepsilon_{y_{cm}}^f(t) = C_0^f \cdot f(t) + \frac{C_1^f}{1!} \cdot \frac{df}{dt} + \frac{C_2^f}{2!} \cdot \frac{d^2f}{dt^2} + \dots$$

где  $C_0^f, C_1^f, C_2^f, \dots$  – коэффициенты составляющей ошибки, обусловленной возмущающим воздействием;  $f(t)$  – возмущающее воздействие.

Показатели добротности по возмущающему воздействию:

$$D_0^f \cdot = \frac{I}{C_0^f}; \quad D_1^f \cdot = \frac{I!}{C_1^f}; \quad D_2^f \cdot = \frac{2!}{C_2^f}; \quad \dots$$

Необходимо отметить, что связь между значениями установившихся ошибок регулирования и коэффициентов ошибки системы управления справедлива только для установившихся режимов. Это значит, что для получения корректного результата необходимо, чтобы внешние воздействия должны быть такими, чтобы для них было возможно существование установившихся режимов. К таким воздействиям относятся воздействия с моделями полиномиального типа, то есть:

$$u(t) = k_0 + k_1 t + k_2 t^2 + k_3 t^3 + \dots = \sum_{i=0}^{i_{max}} k_i t^i,$$

где  $k_0, k_1, k_2, k_3, \dots$  – коэффициенты аппроксимирующей полиномиальной модели внешнего воздействия.

Поэтому, в частности, применение аппарата коэффициентов ошибки для анализа статической точности систем управления при гармонических внешних воздействиях – **недопустимо**.

### 2.6.3 Показатели динамического качества систем управления

**Показатели динамического качества** характеризуют поведение системы в переходных процессах и определяются, как правило, по реакции системы на типовые тестовые воздействия.

**К прямым показателям динамического качества** относятся:

– показатели быстродействия системы:

- время переходного процесса  $T_{пп}$ ;
- время разгона  $t_p$ ;
- другие показатели.

– показатели динамической точности системы:

- величина абсолютного перерегулирования  $\Delta y_{max}$ ;

- величина относительного перерегулирования  $\sigma$ ;
  - другие показатели.
- показатели, характеризующие поведение системы в переходном процессе:
- показатель колебательности системы  $n_k$ ;
  - коэффициент колебательности системы  $k_N$ ;
  - другие показатели.

Рассмотрим вопросы формального определения показателей динамического качества систем управления более подробно.

Прямые показатели динамического качества линейных автоматических регуляторов, как правило, определяются через основные параметры реакции системы на внешнее ступенчатое воздействие единичного уровня.

Приведем соотношения, формально определяющие значения прямых показателей динамического качества.

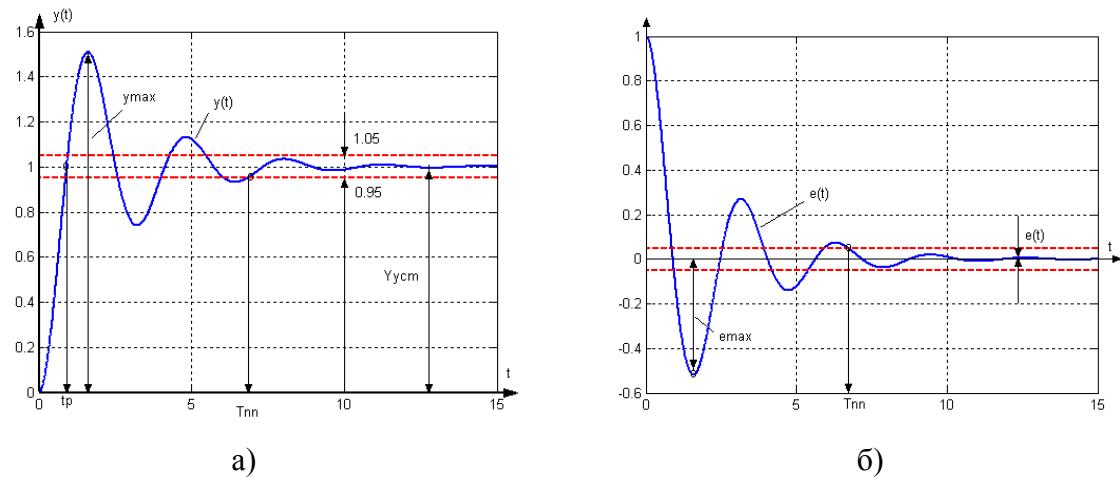


Рисунок 6.2 Определение прямых показателей динамического качества

- Переходной процесс по выходной переменной;
- Динамическая ошибка регулирования

**Показатели быстродействия системы** (смотри рисунок 6.2):

- под временем переходного процесса  $T_{III}$  следует понимать временной интервал, в течение которого изменения выходной переменной  $y(t)$  в

$\Delta$ -окрестности ее установившегося значения  $y_{y_{cm}}$  становится пренебрежимо малы.

Как правило, границы  $\Delta$ -окрестности определяются границами 5%-ой области относительно установившегося значения выходной регулируемой переменной  $y_{y_{cm}}$ , то есть значениями  $[0.95 y_{y_{cm}}, 1.05 y_{y_{cm}}]$ .

В аналитической форме **время переходного процесса**  $T_{pp}$  можно определить следующим образом:

$$\arg \left\{ \min_t |y(t) - y_{y_{cm}}| \leq 0.05 y_{y_{cm}} \right\}$$

– под временем время разгона  $t_p$  следует понимать минимальное значение временного интервала, за который выходная регулируемая переменная  $y(t)$  достигает своего прогнозируемого требуемого установившегося значения  $y_{y_{cm}}$ .

В аналитической форме **время разгона**  $t_p$  можно определить следующим образом:

$$t_p = \min_t \arg \left\{ y(t) - y_{y_{cm}} = 0 \right\} ;$$

#### **Показатели динамической точности систем управления:**

– под величиной абсолютного перерегулирования  $\Delta y_{max}$  следует понимать максимальное значение превышения выходной регулируемой переменной ее установившегося значения в переходном процессе, то есть:

$$\Delta y_{max} = y_{max} - y_{y_{cm}} ;$$

– под относительным перерегулированием  $\sigma$  следует понимать отношение величины абсолютного перерегулирования  $\Delta y_{max}$  к установившемуся значению выходной регулируемой переменной  $y_{y_{cm}}$ , то есть:

$$\sigma = \frac{\Delta y_{max}}{y_{y_{cm}}} 100\% .$$

Значения абсолютного  $\Delta y_{max}$  и относительного  $\sigma$  перерегулирования характеризуют динамическую точность систем управления при отработке задающего управляющего воздействия.

**Показатели, характеризующие поведение системы в переходном процессе:**

- под показателем колебательности системы  $n_k$  следует понимать число свободных колебаний выходной регулируемой переменной  $y(t)$  относительно ее установившегося значения  $y_{\text{уст}}$  за время переходного процесса  $T_{\text{пп}}$ ;
- **коэффициент колебательности системы**  $k_N$  отражает резонансные свойства системы управления, вследствие проявлений которых в переходных процессах может присутствовать колебательная составляющая на резонансной частоте.

Коэффициент колебательности системы управления формально определяется как отношение максимума амплитудной частотной характеристики  $A_{\max}(\omega)$  к ее значению на нулевой частоте  $A(\omega)|_{\omega=0}$ , то есть:

$$k_N = \frac{A_{\max}(\omega)}{A(\omega)|_{\omega=0}}.$$

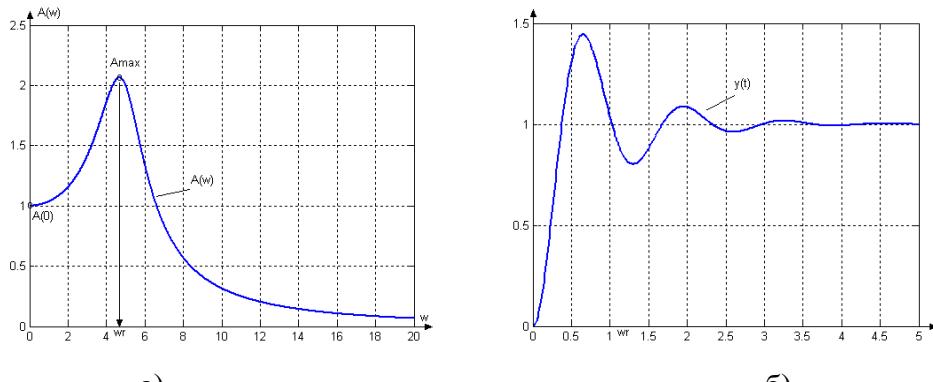


Рисунок 6.3 Определение косвенных показателей динамического качества

- a) АЧХ замкнутой системы;  
б) Колебательный переходной процесс.

На рисунке 6.3 изображен график амплитудной частотной характеристики системы управления  $A(\omega)$ , коэффициент колебательности которой  $k_N$  равен примерно 2.2 и реакция системы на внешнее ступенчатое воздействие единичного уровня, имеющая колебательный характер, причем частота свободных колебаний близка к резонансной частоте системы управления  $\omega_{\text{рез}} \approx 4.5 \text{ c}^{-1}$ .

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 177 из 204*

### ***Интегральные показатели качества:***

– под интегральными показателями качества следует понимать числовые значения параметров, характеризующих динамические свойства систем управления как в динамических, так и в установившихся режимах с возможностью учета изменения во времени управляющих воздействий.

Возможные структуры интегральных показателей качества имеют вид:

$I_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$  – показатель качества, в интегральном плане характеризующий динамическую точность системы и ее быстродействие на всем интервале управления;

$I_2 = \int_0^{\infty} \left\{ k_{\varepsilon} \varepsilon^2(t) + k_u u^2(t) \right\} dt$  – показатель качества, в интегральном плане характеризующий динамическую точность системы и ее быстродействие на всем интервале управления с учетом энергетических затрат системы на реализацию функций управления.

Перейдем теперь непосредственно к рассмотрению проблем анализа качества систем автоматического управления.

#### **2.6.4 Методы анализа качества систем автоматического управления**

Исследование систем автоматического управления с целью определения показателей качества представляет собой важный этап в процессе решения задач их динамического проектирования и расчета. Реализация этого этапа возможна двумя основными методами:

- методами математического моделирования;
- методами имитационного моделирования.

Анализ качества систем автоматического управления методами математического моделирования предполагает использование соотношений в аналитической форме, устанавливающих зависимости между внешними тестовыми

воздействиями и теми или иными выходными переменными системы, необходимыми для определения ее показателей качества.

Применение методов математического моделирования для анализа качества систем управления представляет значительную сложность, однако применение этих методов позволяет установить искомые зависимости между показателями качества систем управления и параметрами алгоритмов управления в аналитической форме.

Использование этих зависимостей в процессе динамического проектирования и расчета систем автоматического управления позволяет решать как задачи анализа систем управления, то есть задач определение их показателей качества при заданных параметрах алгоритмов управления, так и задач синтеза алгоритмов управления, то есть задач определения такой структуры и параметров алгоритмов управления, при которых показатели качества проектируемой системы удовлетворяют их заданным, требуемым значениям.

Анализ качества систем автоматического управления методами имитационного моделирования, как правило, предполагает использование моделей систем управления в форме систем дифференциальных уравнений, устанавливающих зависимости между внешними тестовыми воздействиями и теми или иными выходными переменными системы, необходимыми для определения ее показателей качества, и их интегрирование с применением соответствующих вычислительных процедур.

В настоящее время методы имитационного моделирования нашли широкое применение для анализа качества сложных, высокого порядка систем автоматического управления, для исследования которых применение аналитических методов оказывается проблематичным. Современные технологии имитационного моделирования основываются на реализации компьютерных технологий обработки информации и применении мощных инструментальных программных систем.

Рассмотрим теоретические основы применения методов математического моделирования для анализа качества систем автоматического управления более подробно.

## 2.6.5 Анализ качества систем управления методами математического моделирования

Как было отмечено выше, анализ качества систем автоматического управления методами математического моделирования основывается на использовании соотношений в аналитической форме, устанавливающих зависимости между внешними тестовыми воздействиями и теми или иными выходными переменными системы, необходимыми для определения ее показателей качества. Применим для определения этих аналитических зависимостей аппарат математических моделей систем управления в форме передаточных функций.

На рисунке 6.4 представлена обобщенная структура системы управления, находящейся под влиянием действующих на нее управляющего  $u(t)$  и возмущающего  $f(t)$  воздействий.

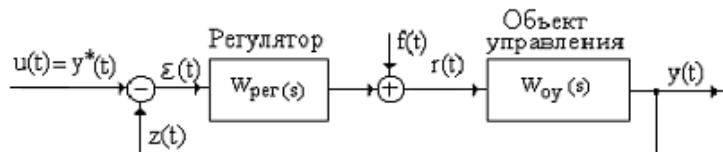


Рисунок 6.4 Обобщенная структура системы управления

Определение показателей статической точности системы управления основывается на результатах исследования ошибки регулирования  $\varepsilon(t)$  как выходной переменной системы, которая изменяется под влиянием действующих на систему воздействий  $u(t)$  и  $f(t)$ . Определение показателей динамического качества системы управления основывается на результатах исследования выходной регулируемой переменной  $y(t)$ , которая изменяется под влиянием действующих на систему воздействий  $u(t)$  и  $f(t)$ .

Таким образом, определение прямых и косвенных показателей качества

связано с определением и обработкой реакций системы на внешние управляющие и возмущающие воздействия. Наиболее простым образом связь между внешними воздействиями, выходной переменной системы и ошибкой регулирования устанавливается с использованием аппарата передаточных функций.

Используя методы эквивалентных преобразований структурных блок-схем систем автоматического управления, определим понятия передаточных функций системы управления, связывающих действующие на систему внешние воздействия  $u(t)$  и  $f(t)$  и ее выходные переменные  $\varepsilon(t)$  и  $y(t)$ .

Дадим следующие определения:

**Передаточная функция замкнутой системы по управляющему воздействию**

$$\Phi_y^u(s) = \frac{y^u(s)}{u(s)} = \frac{W_{pe\bar{\varepsilon}}(s) \cdot W_{oy}(s)}{1 + W_{pe\bar{\varepsilon}}(s) \cdot W_{oy}(s)} = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)}$$

**Передаточная функция ошибки системы по управляющему воздействию**

$$\Phi_\varepsilon^u(s) = \frac{\varepsilon^u(s)}{u(s)} = \frac{I}{1 + W_{pe\bar{\varepsilon}}(s) \cdot W_{oy}(s)} = \frac{I}{1 + W_p(s)}$$

**Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию**

$$\Phi_y^f(s) = \frac{y^f(s)}{f(s)} = \frac{W_{oy}(s)}{1 + W_{pe\bar{\varepsilon}}(s) \cdot W_{oy}(s)} = \frac{W_{oy}(s)}{1 + W_p(s)}$$

**Передаточная функция ошибки системы по возмущающему воздействию.**

$$\Phi_\varepsilon^f(s) = \frac{\varepsilon^f(s)}{f(s)} = -\frac{W_{oy}(s)}{1 + W_{pe\bar{\varepsilon}}(s) \cdot W_{oy}(s)} = -\frac{W_{oy}(s)}{1 + W_p(s)},$$

где

$$W_p(s) = \frac{z(s)}{\varepsilon(s)} = W_{pe\bar{\varepsilon}}(s) \cdot W_{oy}(s) \text{ — передаточная функция разомкнутой системы;}$$

$W_{pe\bar{\varepsilon}}(s)$  — передаточная функция регулятора;

$W_{oy}(s)$  – передаточная функция объекта управления.

Полученные в форме передаточных функций выражения позволяют получить любые другие формы математических моделей, связывающих внешние воздействия, выходные переменные и ошибку регулирования.

## **2.6.6 Анализ динамического качества линейных систем автоматического управления**

Исследование систем автоматического управления с целью определения показателей динамического возможно двумя основными методами:

- методами математического моделирования;
- методами имитационного моделирования.

Анализ динамического качества систем автоматического управления методами математического моделирования предполагает использование соотношений в аналитической форме, устанавливающих зависимости между внешними тестовыми воздействиями и теми или иными выходными переменными системы, необходимыми для определения ее показателей качества.

В качестве возможных форм представления моделей систем управления могут быть использованы:

- дифференциальные уравнения, типа “вход–выход”;
- системы дифференциальных уравнений в пространстве состояний;
- передаточные функции;
- другие формы представления моделей.

Этот метод решения проблем определения показателей динамического качества обладает важным преимуществом, которое состоит в возможности получения соотношений в аналитической форме между структурой и параметрами модели системы управления и значениями искомых показателей динамического качества.

Однако применение методов математического моделирования систем управления для определения значений показателей динамического качества

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 182 из 204*

имеет очень ограниченное применение на практике, поскольку получение таких соотношений представляет сложную проблему, решение которой возможно только в достаточно простых случаях.

Поэтому наиболее универсальным, широко используемым на практике методом анализа динамического качества систем управления являются методы, основанные на использовании и реализации вычислительных процедур, лежащих в основе методов цифрового имитационного моделирования.

Пусть модель системы задана в форме дифференциального уравнения вида:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = b_0 u^{(m)} + \cdots + b_{m-1} u^{(1)} + b_m u$$

Тогда задаваясь шагом интегрирования по времени  $\Delta t$  можно перейти к эквивалентному разностному уравнению в форме рекуррентной вычислительной процедуры вида:

$$y^{i+n} = -a_1^d y^{i+n-1} - \cdots - a_n^d y^i + b_m^d u^{i+m} + \cdots + b_m^d u^i; \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

где  $a_k^d, b_k^d$  – коэффициенты эквивалентного разностного уравнения;

$y^i = y(i \cdot \Delta t)$ ,  $u^i = u(i \cdot \Delta t)$ , – значения выходной переменной и входного воздействия в дискретные моменты времени на каждом  $i$ -м шаге интегрирования.

Этот подход сложен в реализации, поскольку требует сложных преобразований, связанных с формированием рекуррентного вычислительного алгоритма.

Поэтому, большинство стандартных вычислительных процедур интегрирования дифференциальных уравнений требует представления моделей динамических систем в виде систем дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1 \dots x_n, u_1 \dots u_m) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + b_{i1}u_1 + \dots + b_{im}u_m; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Тогда рекуррентная вычислительная процедура метода Эйлера интегрирования системы дифференциальных уравнений в форме системы разностных уравнений будет иметь вид:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \Delta t \cdot f_i(x_1^k \dots x_n^k, u_1^k \dots u_m^k), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

В том случае, если модель системы управления задана в пространстве состояний в векторно-матричной форме вида:

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 183 из 204*

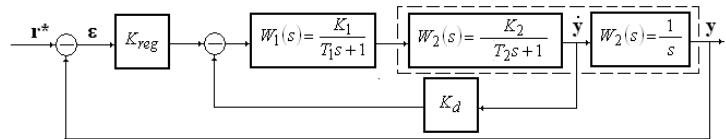
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu},$$

то рекуррентная вычислительная процедура интегрирования систем дифференциальных уравнений может быть представлена в компактной векторно-матричной форме в виде:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i + \Delta t \cdot (\mathbf{Ax}^i + \mathbf{Bu}^i) = [\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}] \mathbf{x}^i + \Delta t \cdot \mathbf{Bu}^i; i = 0, 1, \dots$$

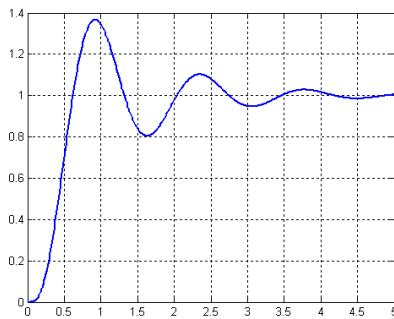
Рассмотрим особенности решения задачи анализа качества системы управления методами имитационного моделирования на примерах.

**Пример 1.** Исследовать систему управления структурная блок-схема которой имеет вид

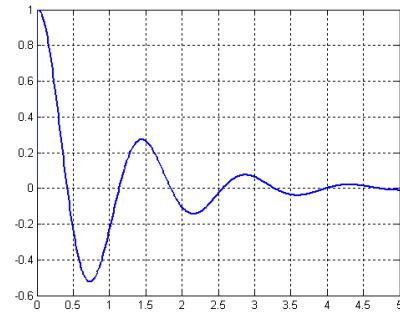


Текст программного модуля имитационного моделирования системы управления методом Эйлера в среде Matlab имеет вид:

```
T1=0.5; T2=0.2; K1=5; K2=2; Kr=1; Krd=0.2;
;
dt=0.01; tk=5;
t=0:dt:tk; n=length(t);
;
u=1*sign(t); x=zeros(3,n);
for i=1:n,
e(i)=u(i)-x(1,i);
ur(i)=Kr*e(i)-Krd*x(2,i);
;
x(1,i+1)=x(1,i)+dt*x(2,i);
x(2,i+1)=x(2,i) + dt*(-1/T2*x(2,i) + K2/T2*x(3,i));
x(3,i+1)=x(3,i) + dt*(-1/T1*x(3,i) + K1/T1*ur(i));
y(i)=x(1,i);
end
figure(1)
plot(t,y); grid on; set(1,'color',[1 1 1]);
figure(2)
plot(t,e); grid on; set(2,'color',[1 1 1]);
```



$y(t)$



$\varepsilon(t)$

На рисунках представлены графики изменения выходной переменной и ошибки регулирования. По результатам моделирования можно определить следующие значения показателей качества:  $T_{\text{пп}} \approx 3\text{с}$ ;  $\sigma \approx 36\%$ ;  $y_{\text{ycm}} = 1$ ;  $\varepsilon_{\text{ycm}} = 0$ .

**Пример 2.** Исследовать систему управления, модель которой имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2.1x_1 + x_2 + 0.5u \\ x_2 = -2.5x_1 + 2.5u \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -2x_1 + x_2 + 0.5u \end{cases}$$

Начальные условия:  $x_{10} = 0$ ,  $x_{20} = 0$ .

Найти показатели динамического качества и статической точности при внешнем воздействии  $u(t) = 1(t)$ .

**Этап 1.** Преобразование системы дифференциальных уравнений и представление ее в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{cases}$$

где матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Текст программного модуля имитационного моделирования системы управления с использованием встроенных процедур моделирования линейных динамических систем с моделями в векторно-матричной форме в пространстве состояний в среде Matlab имеет вид:

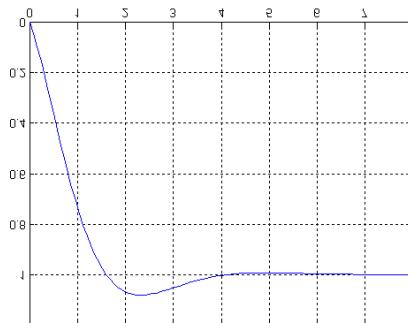
$$\mathbf{A} = [-2 \ 1; -2.5 \ 0]; \quad \mathbf{B} = [0.5; 2.5]; \quad \mathbf{C} = [1 \ 0; -2 \ 1]; \quad \mathbf{D} = [0; 0.5];$$

Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 185 из 204

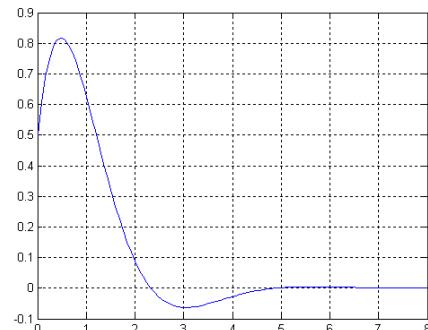
```

;
W=ss(A,B,C,D);
tmax=8;
[y,t]=step(W,tmax);
n=length(t);
x1(1:n)=y(1:n,1);
figure(1)
plot(t,x1); grid on;
set(1,'color',[1 1 1]); axis([0 8 0 1.2]);
figure(2);
x2(1:n)=y(1:n,2);
plot(t,x2); grid on;
set(2,'color',[1 1 1]); %axis([0 8 0 0.6]);

```



$x_1$



$x_2$

Из приведенных графиков переменных состояния  $x_1$  и  $x_2$ , полученных по результатам имитационного моделирования можно сделать вывод о следующих значениях:  $T_{pp} \approx 3c$ ;  $\sigma \approx 10\%$ ;  $y_{ycm} = 1$ ;  $\varepsilon_{ycm} = 0$ .

При решении задач динамического проектирования систем автоматического управления необходим иметь в виду, что их динамические свойства могут в существенной степени отличаться от расчетных вследствие влияния на свойства системы различных источников неопределенностей.

К источникам неопределенностей относятся, в частности, неопределенности структуры и параметров моделей объекта управления и функциональных элементов системы управления по отношению к принятым за расчетные в процессе проектирования автоматической системы.

Влияние неопределенностей может привести к снижению значений показателей динамического качества и статической точности системы управления в реальных условиях ее функционирования, а в ряде случаев к потере динамической устойчивости.

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 186 из 204*

Поэтому проектируемые на динамическом уровне системы управления должны обладать важным свойством, получившим название свойства робастности (*Robust*), которое отражает свойство малой чувствительности, грубости по отношению к различного рода структурно–параметрическим неопределенностям моделей компонент системы управления.

## **2.7 Синтез алгоритмов управления систем автоматического управления**

Одной из основных проблем динамического проектирования систем автоматического управления является решение проблем синтеза алгоритмов регулирования и управления.

Синтезированные в процессе динамического проектирования систем управление алгоритмы управления должны обеспечить выполнение системой своего функционального назначения, а также придать проектируемой системе такие характеристики точности и динамические свойства, которые позволяют обеспечить реализацию всех тех требований, которые сформулированы Заказчиком разработки и оформлены в Техническом задании на проектирование автоматической системы.

Кроме того, синтезируемые в процессе динамического проектирования систем управление алгоритмы управления должны обеспечить системе свойства робастности, учитывающие вероятный неопределенный характер динамических свойств систем управления в реальных условиях их функционирования.

С учетом возможного влияния на динамические свойства систем управления различных источников неопределенностей можно сформулировать основные общие требования к синтезируемым алгоритмам управления.

*Основным общим требованием к синтезируемым алгоритма управления является обеспечение динамической устойчивости систем управления и качества переходных процессов в контурах системы в процессе ее нормального функционирования с учетом возможных изменений динамических свойств объекта управления, функциональных компонент системы управления, которые находят свое отражение в структурно-параметрических неопределенностях их математических моделей.*

В том случае, если влияние источников неопределенностей на динамические свойства системы – несущественны, то обеспечение свойств динамической устойчивости, а также требуемых значений показателей статической точности и

динамического качества, может быть реализовано на основе применения **статичных робастных регуляторов**, то есть регуляторов с неизменяемой структурой и постоянными значениями параметров–настроек.

В том случае, если влияние источников неопределенности на динамические свойства системы – существенны, то обеспечение свойств динамической устойчивости, а также требуемых значений показателей статической точности и динамического качества, может быть реализовано только на основе применения **робастно–адаптивных алгоритмов регулирования и управления**.

**Робастно–адаптивные алгоритмы управления** предполагают использование более сложной иерархической организации системы управления, в которой помимо основного контура управления с отрицательной обратной связью вводится дополнительный контур – контур адаптации. В состав этого контура входит блок адаптации, который формирует и выдает на блок регулятора основного контура управления командные сигналы на автоподстройку его параметров или на изменение и его структуры и его параметров.

Методы решения проблем синтеза робастно–адаптивных алгоритмов управления представляет собой специальный важный раздел теории автоматического управления, который в данном материале не рассматривается.

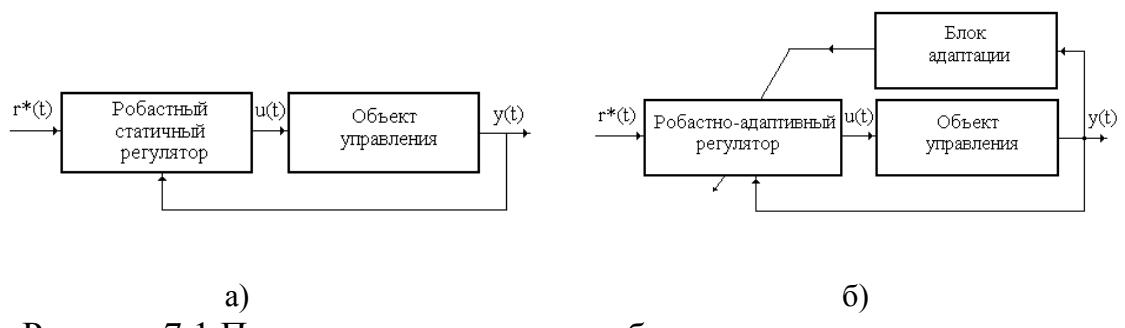


Рисунок 7.1 Примеры организации робастных систем управления

- а) с неадаптивным статичным робастным регулятором;
- б) с адаптивным робастным регулятором

Процесс синтеза алгоритмов управления основывается на использовании математических моделей динамических систем в различных стандартных фор-

мах их представления. Таким образом, реализуемые в процессе динамического проектирования систем управления методы синтеза должны учитывать особенности математического описания систем управления и их отдельных функциональных компонент.

В теории управления для различных классов систем управления в зависимости от особенностей их математического описания разработаны специальные группы методов синтеза алгоритмов управления, ориентированных на конкретный класс моделей систем управления и на определенные формы их представления.

Можно выделить следующие основные группы методов синтеза алгоритмов управления в зависимости от форм представления моделей систем управления:

- методы синтеза алгоритмов управления, ориентированные на представление моделей объекта управления и функциональных элементов систем управления моделями типа “вход–выход”;*
- методы синтеза алгоритмов управления, ориентированные на представление объекта управления и функциональных элементов систем управления моделями “в пространстве состояний”.*

В обобщенной постановке, независимо от класса используемых для описания систем управления моделей и форм их представления, задача синтеза алгоритмов управления может быть сформулирована следующим образом.

Пусть обобщенная модель объекта управления задана в виде:

$$S_o(u, x, y, f, \theta_o, x_0, t, p) = 0,$$

где  $S_o(*) = 0$  – обобщенный оператор, определяющий структуру модели объекта управления;

$x \in R^n$  – вектор независимых переменных, характеризующих динамическое состояние объекта управления;

$y \in R^r$  – вектор выходных контролируемых переменных, доступных для прямых измерений;

$u \in R^{m_u}$  – вектор внешних управляющих воздействий на объект управления;

$f \in R^{m_f}$  – вектор внешних возмущающих воздействий на объект управления;

$\theta_o \in R^{n_{\theta}}$  – вектор параметров модели объекта управления;

$x_0 \in R^n$  – вектор переменных, отражающих начальное состояние объекта управления;

$p = \frac{d}{dt}$  – дифференциальный оператор;

$t$  – время.

Задан критерий качества управления в форме обобщенного функционала вида:

$$I = I_S \left\{ S_R(r^*, y, u, \theta_R, t, p), S_o(x, y, u, f, \theta_o, x_0, t, p) \right\}$$

где  $S_R(*)$  – обобщенный оператор, определяющий структуру модели регулятора или алгоритмов управления;

$r^* \in R^r$  – вектор задающих воздействий на систему управления, определяющий требуемые значения выходных контролируемых переменных;

$\theta_R \in R^{n_{\theta_R}}$  – вектор параметров регулятора.

Тогда задача синтеза алгоритмов управления/регулирования в обобщенной постановке может быть сформулирована следующим образом:

**Для заданных модели объекта управления  $S_o(x, y, u, f, \theta_o, x_0, t, p) = 0$  и критерия качества управления  $I = I_S \left\{ S_R(r^*, y, u, \theta_R, t, p), S_o(x, y, u, f, \theta_o, x_0, t, p) \right\}$  определить структуру  $S_R^*(r^*, y, u, \theta_R^*, t, p)$  и вектор параметров регулятора  $\theta_R^*$  такие, чтобы критерий качества управления либо достигал своего экстремального значения, то есть:**

$$I = I_S^* \left\{ S_R^*(r^*, y, u, \theta_R^*, t, p), S_o(x, y, u, f, \theta_o, x_0, t, p) \right\} \rightarrow \underset{S_R, \theta_R}{\text{extr}}$$

**либо удовлетворял системе заданных ограничений вида:**

$$I = I_S^* \left\{ S_R^*(r^*, y, u, \theta_R^*, t, p), S_o(x, y, u, f, \theta_o, x_0, t, p) \right\} \leq I_S^* \left\{ \varepsilon_{max}, T_{\Pi\Pi}^{max}, \sigma_{\%}^{max}, \dots \right\}$$

Критерии качества управления могут быть представлены в следующих формах:

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 191 из 204*

- в форме векторного критерия, определяющего систему ограничений на допустимые значения показателей статической точности и динамического качества;
- в форме интегрального функционала качества;
- другие формы.

В качестве примера можно привести интегральный квадратичный критерий качества управления для систем с одним входом и одним выходом следующего вида:

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \int_0^{\infty} [r^*(t) - y(t)]^2 dt \rightarrow \min_{S_R, \theta_R}$$

Смыслоное содержание этого критерия качества управления состоит в минимизации динамической ошибки регулирования  $\varepsilon(t)$  и длительности переходных процессов в системе.

Для решения задач синтеза алгоритмов управления для систем с моделями в пространстве состояний может использоваться интегральный критерий качества управления следующего вида:

$$I = \int_0^{\infty} \mathbf{\varepsilon}^T(t) Q \mathbf{\varepsilon}(t) dt = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)]^T Q [\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t)] dt \rightarrow \min_{S_R, \theta_R}$$

где  $Q$  – матрица весовых коэффициентов;

$\mathbf{\varepsilon}(t)$  – вектор ошибки управления системы;

$\mathbf{x}^*(t)$  – требуемое значение вектора динамического состояния системы;

$\mathbf{x}(t)$  – текущее значение вектора динамического состояния системы.

Смыслоное содержание этого критерия качества управления аналогичное, описанному выше.

Критерий качества управления может представлять собой некоторый векторный критерий, в форме системы ограничений, определяющих требования к показателям статической точности системы управления, а также к показателям ее динамического качества.

В качестве примера векторного критерия качества управления в форме системы ограничений можно привести следующее аналитическое выражение:

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 192 из 204*

$$I^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_{y_{cm}}^{max} & T_{\Pi\Pi}^{max} & \sigma_{max} & \dots \end{bmatrix}^T$$

То есть векторный критерий качества управления представляет собой вектор, компонентами которого являются допустимых предельных значения показателей статической точности динамического качества, показателей степени робастной устойчивости, и т.д.

Векторный критерий качества управления в форме системы ограничений может быть представлен в виде:

- аналитического выражения;
- в графической форме.

Система ограничений может быть представлена в графической форме, в виде “коробочки”, ограничивающей область допустимых значений переходного процесса системы на тестовое ступенчатое воздействие единичного уровня. (смотри рисунок).

На рисунке 7.2 представлена система ограничений в графической форме, которая определяет:

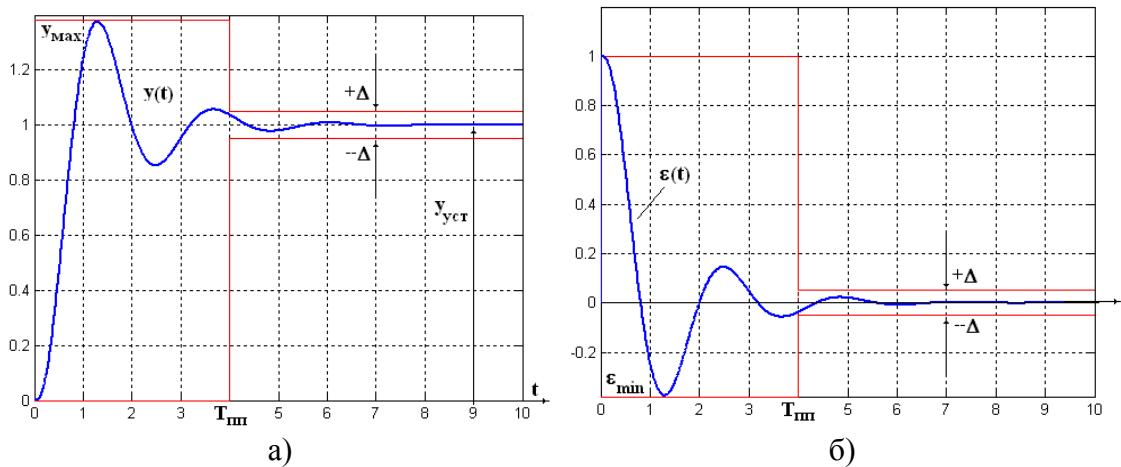


Рисунок 7.2 Система ограничений в графической форме

- a) Переходной процесс по выходной переменной;
- б) Переходной процесс по ошибке регулирования

- предельное значение установившейся ошибки регулирования  $\varepsilon_{max}^{y_{cm}}$ ;
- предельные допустимые значения величин абсолютного  $\Delta y_{max}$  и относительного  $\sigma\%$  перерегулирования;

– предельное допустимое значение времени переходного процесса  $T_{max}^{III}$ .

Общая проблема синтеза алгоритмов управления предполагает определение как алгоритмической структуры законов регулирования и управления, так и значений параметров этих алгоритмов. В теории автоматического управления эта проблема определена как *проблема структурно-параметрического синтеза алгоритмов управления*.

Решение задачи структурно-параметрического синтеза алгоритмов управления в общей постановке, представляет значительную сложность. Поэтому на практике, решение общей проблемы структурно-параметрического синтеза алгоритмов управления реализуют в два этапа:

– *этапа решения задачи структурного синтеза алгоритмов регулирования и управления*, то есть этапа определения наиболее эффективной структуры регулятора  $S_R^*(r^*, y, u, \theta_R, t, p)$ ;

– *этапа решения задачи параметрического синтеза алгоритмов регулирования и управления*, то есть этапа определения оптимальных значений параметров-настроек регулятора  $\theta^*$  при заранее заданной структуре модели регулятора  $S_R^*(r^*, y, u, \theta_R, t, p)$ .

Необходимо иметь в виду, однако, что процедуры структурного и параметрического синтеза алгоритмов управления тесно взаимосвязаны, поэтому решение общей задачи синтеза алгоритмов управления в целом представляет собой сложный, многоэтапный итерационный процесс.

Примерный граф процедуры синтеза алгоритмов управления в форме блок-схемы представлен на рисунке 7.3.

В соответствие с блок-схемой процедуры синтеза алгоритмов управления, на начальной стадии решения задачи динамического проектирования системы управления:

- на основе требований ТЗ определяется системная цель управления;
- на этапе концептуального проектирования формируется функциональная структура системы управления;

– с учетом требований ТЗ формируются критерии качества реализации цели управления.



Рисунок 7.3 Примерный график процедуры синтеза алгоритмов управления в форме блок-схемы

Далее, формируются математические модели объекта управления и всех функциональных составляющих системы управления. С учетом заданного критерия качества управления формулируется постановка проблемы структурного синтеза алгоритмов управления.

Формулируется и решается проблема структурного синтеза алгоритмов управления. Одним из подходов к решению проблемы структурного синтеза регуляторов является подход, основанный на результатах статического расчета системы управления, с учетом требований к заданным в ТЗ характеристикам статической точности управления, с учетом динамических свойств объекта управления и других функциональных составляющих системы, который будет рассмотрен ниже.

Далее, с учетом требований ТЗ и заданных показателей динамического качества системы управления, с учетом синтезированной структуры алгоритмов управления формулируется постановка задачи параметрического синтеза алго-

ритмов управления, в результате решения которой определяются все неизвестные параметры синтезированного алгоритма управления при его заданной структуре.

Методами математического или имитационного моделирования системы управления с учетом синтезированных алгоритмов управления осуществляется анализ характеристик статической точности системы управления, определяются значения показателей ее динамического качества и сопоставляются полученные результаты с заданными в ТЗ значениями.

В том случае, если результаты имитационного моделирования системы управления подтверждают тот факт, что все значения характеристик точности и показателей динамического качества спроектированной на динамическом уровне системы управления полностью соответствуют требованиям ТЗ, то можно считать, что этап динамического проектирования системы управления в целом – завершен.

При этом функциональная, информационная и алгоритмическая структура системы управления должны быть скорректированы и уточнены с учетом структуры и параметров синтезированных алгоритмов управления.

В этом случае можно переходить к реализации следующего технологического этапа проектирования САУ, в частности, к этапу ее технического проектирования.

В том случае, если результаты имитационного моделирования системы управления показывают, что при данной структуре алгоритмов управления и найденных значениях их параметров характеристики точности системы управления и ее динамические свойства не полностью или в целом не соответствуют требованиям ТЗ, то для придания систем желаемых динамических свойств необходимо:

– либо вернуться к стадии структурного синтеза алгоритмов управления и повторно решить задачу структурно-параметрического синтеза алгоритмов управления с учетом иной, новой выбранной структуры алгоритма управления;

– либо скорректировать динамические свойства проектируемой системы управления путем включения в ее контур управления специальных корректирующих динамических фильтров, определение структуры и параметров которых представляет собой отдельную, самостоятельную проблему, теоретические, фундаментальные основы решения которой будут рассмотрены ниже.

При решении задач структурного синтеза алгоритмов управления необходимо иметь в виду, что структура синтезируемых алгоритмов управления определяет как динамические свойства и характеристики точности системы управления, так и функциональную организацию системы управления, ее функциональную, информационную и алгоритмическую структуру, определяет структуру математических моделей системы управления, структуры необходимых для реализации системы управления технических, алгоритмических и программных средств обработки информации.

**Поэтому, *решение задачи структурного синтеза алгоритмов регулирования и управления необходимо производить с учетом требований минимальной сложности их реализации.***

Необходимость обеспечения требований минимальной сложности реализации синтезируемых алгоритмов управления обусловлена рядом следующих факторов:

- структура алгоритмов управления определяет состав необходимых для реализации алгоритмов управления измерителей и датчиков, их назначение и характеристики, что, в свою очередь, определяет стоимость необходимой для реализации алгоритмов управления измерительной подсистемы системы управления;
- структура алгоритмов управления определяет число и характер вычислительных операций, необходимых для реализации алгоритмов управления цифровым контроллером на каждом дискретном временном интервале обработки измерительной информации, что может потребовать применения в составе системы управления высокопроизводительных цифровых вычислительных средств;

- структура алгоритмов управления определяет характер и объем информационных данных, обработка которых необходима для реализации алгоритмов управления в реальном времени, что может потребовать применения в составе системы управления высокопроизводительных цифровых вычислительных средств и разработки специального программного обеспечения;
- другие факторы.

Таким образом, решение задачи структурного синтеза алгоритмов управления с учетом требований минимальной сложности их реализации позволяет:

- минимизировать стоимость информационно-измерительной и информационно-обрабатывающей аппаратуры, необходимой для реализации алгоритмов управления;
- минимизировать сроки и стоимость разработки технической документации и выполнения этапа технического проектирования системы управления;
- минимизировать сроки и стоимость выполнения этапа изготовления и испытания опытных образцов систем управления;
- и т.д.

Для решения задач структурного синтеза алгоритмов регулирования и управления существуют различные подходы и методы.

В частности, структура регулятора может быть определена по результатам статического расчета системы управления исходя из заданных требований к статической точности системы управления. При этом результаты статического расчета систем управления могут позволить определить не только структуру регулятора, но и значения его отдельных параметров-настроек.

Решение задачи *параметрического синтеза регулятора* при заданной структуре его математической модели представляет собой самостоятельную важную непростую проблему.

В рамках теории управления разработаны различные подходы к решению задач параметрического синтеза регуляторов и алгоритмов автоматического регулирования и управления, а также методы, позволяющие реализовать эти подходы.

*Можно выделить следующие основные группы методов параметрического синтеза регуляторов:*

- оптимационные методы параметрического синтеза регуляторов;*
- методы синтеза регуляторов основанные на выделении областей устойчивости в пространстве параметров регулятора;*
- “корневые” методы параметрического синтеза регуляторов;*
- методы синтеза модальных регуляторов;*
- частотные методы параметрического синтеза регуляторов;*
- другие методы.*

*Оптимационные методы параметрического синтеза регуляторов* предполагают определение оптимального вектора параметров—настроек регулятора путем реализации оптимационной вычислительной процедуры интегрального критерия качества управления.

- оптимационные методы параметрического синтеза регуляторов одномерных линейных систем управления;*
- методы аналитического конструирования регуляторов (АКОР) многомерных систем управления с моделями в пространстве состояний;*
- другие методы.*

*Методы синтеза регуляторов, основанные на выделении областей устойчивости* в пространстве параметров регулятора предполагают выделение областей значений параметров, при которых замкнутая система управления гарантированно устойчива. Накладывая на область устойчивости в пространстве параметров регулятора ”сетку” можно, используя вычислительные процедуры метода проб и ошибок или используя значения параметров из области устойчивости в качестве начального приближения оптимизационной вычислительной процедуры, найти искомые оптимальные значения параметров-настроек регулятора.

Можно выделить следующие частные методы выделения областей устойчивости в пространстве параметров:

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 199 из 204*

- методы выделения областей устойчивости в пространстве параметров без учета структурно–параметрических неопределенностей моделей компонент системы управления;
- методы синтеза робастных регуляторов с учетом известных интервальных ограничений на параметры моделей компонент системы управления, основанные на теореме Харитонова;
- другие методы.

**“Корневые” методы параметрического синтеза автоматических регуляторов** основаны на использовании зависимостей динамических свойств системы управления от значений корней характеристического уравнения (“полюсов”) замкнутой системы.

Назначая желаемые значения полюсов замкнутой системы с учетом обеспечения требуемой степени робастной устойчивости и желаемой динамики системы управления, можно определить искомые, требуемые значения параметров–настроек регулятора при заданной структуре его модели.

К “корневым” методам решения задач параметрического синтеза регуляторов можно привести следующие методы:

- методы синтеза регуляторов, обеспечивающих заданную степень робастной устойчивости;
- метод стандартных коэффициентов на основе полиномов Баттервортса;
- эмпирический метод параметрического синтеза регуляторов Циглера–Никольса;
- методы корневого годографа;
- другие методы.

Одной из разновидностей корневых методов параметрического синтеза регуляторов являются методы синтеза модальных многомерных регуляторов.

**Методы синтеза модальных регуляторов** предполагают решение задач параметрического синтеза регуляторов для многомерных систем управления с моделями в пространстве состояний.

Полюса замкнутой системы определяют отдельные “моды” свободного движения системы. Таким образом, назначая желаемые значения полюсов замкнутой системы с учетом обеспечения робастной устойчивости и желаемой динамики системы управления, можно определить искомые, требуемые значения коэффициентов матричного регулятора при заданной структуре его модели.

***Частотные методы синтеза регуляторов и корректирующих динамических фильтров*** основаны на использовании связи динамических свойств систем управления с графическими образами логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик (ЛАФЧХ), представляющих модели проектируемых систем управления в разомкнутом состоянии. Исследуя годографы ЛАФЧХ можно целенаправленно выбирать значения параметров регуляторов исходя из условий обеспечения робастной устойчивости систем управления и их желаемых динамических свойств.

К частным подходам к реализации частотного метода решения задач параметрического синтеза регуляторов можно отнести следующие:

- частотные методы параметрического синтеза робастных регуляторов;
- частотные методы параметрического синтеза регуляторов, основанные на представлении “желаемых” динамических моделей разомкнутых систем управления логарифмическими амплитудно-фазовыми частотными характеристиками (ЛАФЧХ);
- частотный метод параметрического синтеза корректирующих динамических фильтров систем управления;
- другие методы.

## **Литература**

1. Градов В.М., Рудаков И.В. Компьютерное моделирование: Учебное пособие для вузов. – М. 2016.
2. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов. – М. 2007
3. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания, М., «ЛКИ», 2007.
4. Имитационное моделирование: Пер. с англ. Лоу А.М., Кельтон В.Д. – СПб.: Питер, 2004.
5. Карпов Ю. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с Anylogic5, СПб, «БХВ-Петербург», 2006.
6. Павловский Ю.Н., Имитационное моделирование, М., «Академия», 2008.
7. Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. – СПб.: КОРОНА прнт, 2004.-384 с.
8. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов. – М., 2007
9. Томашевский В., Жданова Е. Имитационное моделирование в среде GPSS, М., «Бестселлер», 2003.
10. Рудаков И.В. Моделирование дискретных систем в среде GPSS PC: Методическое пособие по курсу «Моделирование». – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 64 с.
11. Куров А.В., Рудаков И.В. Определение показателей производительности вычислительных систем методами теории массового обслуживания: Методическое пособие по курсам «Модели оценки качества аппаратно-программных комплексов», «Моделирование». – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 64 с.
12. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в пяти томах. Под общей ред. К.А. Пупкова – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.

*Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 202 из 204*

13. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Теории автоматического управления техническими системами: Учебное пособие. – М.: Изд-во МГТУ, 1993. – 492 с.
  14. Митришкин Ю.В. Линейные модели управляемых динамических систем: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. ч.1: Уравнения «вход-выход» и «вход-состояние-выход»
  15. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. 1976
  16. Сивцов В.И., Шахназаров Г.А. Практикум по основам теории автоматического управления. – М.: Изд-во МГТУ, 2006
  17. Мирошник И.В. Теория автоматического управления: Линейные системы: Учебное пособие для вузов: 2005. Учебное пособие Издательство: ПИТЕР
  18. Мирошник И.В. Теория автоматического управления, Нелинейные и оптимальные системы. Учебное пособие для вузов: 2006. Учебное пособие Издательство: ПИТЕР
  19. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1989.
  20. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления: Учеб. Пособие. – М.: Наука, 1979.
  21. Теория автоматического управления. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Под ред. Воронова А.А. Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1986. – 368 с.
  22. Теория автоматического управления. Ч.2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / Под ред. Воронова А.А. Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1986. – 383 с.
  23. Воронов А.А., Титов В.К., Новогранов Б.Н. Основы теории автоматического регулирования и управления. – М.: Высшая школа, 1977
  24. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.
  25. Бесекерский В.А., Изранцев В.В. Системы автоматического управления с микроЭВМ. – М.: Наука, 1987
- Приложение 4.16 к Мероприятию 4. Учебно-методическое пособие к программе «Прикладная информатика. Современные тенденции профессионального обучения» стр. 203 из 204*

26. Дорф Р.К., Бишоп Р.Х. Современные системы управления. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. – 832 с.
27. Дьяконов В.П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. Основы применения. М.: СОЛОН-Пресс, 2005. - 800с.
28. Дьяконов В.П. Matlab 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6 в математике и моделировании. М.: СОЛОН-Пресс, 2005. - 576с.
29. Ануфриев И., Смирнов А., Смирнова Е. MATLAB 7.0 в подлиннике. Новая техническая книга, 2005
30. Кривилев А. Основы компьютерной математики с использованием системы MATLAB. Лекс-Книга, 2005
31. Потемкин В. Вычисления в среде MATLAB. Диалог-МИФИ. 2004.
32. Черных И. Simulink: среда создания инженерных приложений. Диалог-МИФИ. 2003.
33. Поршнев С. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB. Горячая Линия – Телеком. 2003.
34. Дэбни Дж., Харман Т. Simulink 4. Секреты мастерства. Бином. Лаборатория базовых знаний. 2003.
35. Данилов А. Компьютерный практикум по курсу "Теория управления". Simulink-моделирование в среде Matlab. МГУИЭ. 2002.
36. [http://loge.narod.ru/tipis/lectures/l6\\_extra.pdf](http://loge.narod.ru/tipis/lectures/l6_extra.pdf)
37. [http://www.simulation.kiev.ua/publication/didenko\\_immod2007.doc](http://www.simulation.kiev.ua/publication/didenko_immod2007.doc)
38. [http://www.gpss.ru/paper/okoln\\_2.pdf](http://www.gpss.ru/paper/okoln_2.pdf)
39. [http://ermak.cs.nstu.ru/~shalag/tems/lect\\_6.html](http://ermak.cs.nstu.ru/~shalag/tems/lect_6.html)
40. <http://www.mathworks.com/>