ÉCOLE
D'INGÉNIEURS

TRAITEMENT DE DONNEES
PROSIT 3 – CORBEILLE D'EXERCICES

Table des matières

PARTIE 1 : MODELISATION

Pour chacun des problèmes énoncés ci-dessous, donnez la formulation mathématique adéquate (système d'équations/d'inéquations)

1.1 Production agricole

Le Brésil veut investir dans la culture de 4 fruits à forte valeur ajoutée dans le marché des ressources agricoles : l'orange, le citron, le pomelo et les clémentines. L'état a un double objectif : d'une part, réduire le taux de chômage local et d'autre part, augmenter les exportations pour équilibrer la balance du commerce extérieur. Les études réalisées donnent les résultats suivants :

Culture	Rendement en kg/an/arbre	Surface min par arbre (m^2)	Prix moyen par kg ($)	Coût de production par arbre ($)	Heure/homme annuel par arbre
Orange	150	4	10	2	36
Citron	200	5	4	0.5	72
Pomelo	50	3	15	1	50
Clémentine	150	6	7	1.5	10

Le ministère de l'agriculture a mis à disposition des agriculteurs une surface totale de 250 000 m2 et il prend en charge l'approvisionnement en eau pour les 20 prochaines années. Le montage de cette opération s'élève à 20M$. Les arbres devraient être productifs à partir de la 3ème année et toute la récolte sera destinée à l'exportation. La main d'œuvre prévisionnelle est de 200 personnes en CDI à temps plein (journées de 8 heures de travail).

Une équipe de chercheurs s'est penchée sur ce projet pour répondre aux attentes et résoudre la question suivante : combien d'arbres de chaque culture faut-il planter pour maximiser la valeur de l'exportation annuelle ?

1.2. Production de produits : Meubles

L'entreprise KEIA fabrique 3 types de meubles (M1, M2, M3) et chacun est vendu à 200, 150 et 120 €, respectivement.

L'atelier est organisé en plusieurs départements : découpe, finitions, peinture. Le nombre d'heures disponibles pour chaque département est de 315, 110 et 50 heures, respectivement.

La fabrication du meuble M1 coûte 15 heures de découpe, 2 heures de finitions et 1 heure de peinture. Pour le meuble M2, 7.5, 3 et 1. Pour le meuble M3 5, 2 et 1.

Le nouveau manager souhaite trouver la quantité exacte de chaque meuble à fabriquer pour obtenir le plus gros bénéfice lors de la vente.

1.3. Planification

La société UPER gère une flotte des taxis et de chauffeurs. La compagnie assure un service 7j/7 et 24h/24 avec le déploiement d'un nombre variable de véhicules selon différents créneaux dans la journée (voir tableau ci-dessous).

Créneau	Nb Taxis
0h00 – 04h00	4
04h00 – 08h00	8
08h00 – 12h00	10
12h00 – 16h00	/
16h00 – 20h00	12
20h00 – 24h00	4

Les chauffeurs doivent travailler 8 heures d'affilée et leur tour ne peut commencer qu'au début de chaque créneau de 4 heures, cad, à 0, 4, 8, 12, 16 ou 20 heures. Par exemple, si un chauffeur commence son tour à 20h, il terminera à 4h du matin.

Comment minimiser le nombre de chauffeurs nécessaires pour conduire les taxis ?

Variante : nombre de chauffeurs pour un minimum de coût sur une période de 24 heures quand le coût horaire d'un chauffeur commençant entre 8h-16h est de 10€/heure et de 20€ pour un chauffeur commençant entre 20h-4h.

PARTIE 2 : RESOLUTION ALGEBRIQUE

Au travers de cet exercice, vous allez dérouler les étapes de la résolution algébrique en l'appliquant sur le système ci-après qui modélise la détermination d'un plan de fabrication de deux types d'ordinateurs sous une contrainte de disponibilité de ressources :

$$\begin{cases} Max(x_1, x_2) = 400x_1 + 800x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 10\,000 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 48\,000 \\ 3x_1 + x_2 \leq 24\,000 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, on change les unités :

$$\begin{cases} Max(x_1, x_2) = 4x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 10 & (1) \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 48 & (2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 24 & (3) \\ x_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$

La résolution graphique a conduit à la solution 3 milliers d'ordinateurs IM4 et 7 milliers d'ordinateurs IM5 : $x1 = 3$, $x2 = 7$ avec un profit maximal de 68 (en centaine de milliers d'euros).

Il s'agit maintenant de retrouver ce résultat par le calcul.

2.1 Représentation du problème sous forme standard

Un problème de programmation linéaire est dit sous forme standard si toutes les contraintes sont des contraintes d'égalité et si toutes les variables sont positives.

Pour toutes les contraintes, on introduit une variable positive appelée "variable d'écart" qui mesure l'écart entre le deuxième et le premier membre de l'inégalité.

➔ **Donnez la forme standard du problème initial. Donnez un exemple de solution réalisable et un autre exemple de solution non réalisable.**

2.2 Solution 1

$x1$=0, $x2$=0, $e1$=10, $e2$=48, $e3$=24, z=0.

➔ **Testez l'optimalité de cette solution.**

2.3 Construction de la solution 2

On construit une nouvelle solution en augmentant une seule des deux variables $x1$ ou $x2$ laissant l'autre nulle. Le choix entre $x1$ et $x2$ peut être fait en considérant leur coefficient dans la fonction objectif. Le coefficient de $x2$ est de 8 alors que celui de $x1$ n'est que de 4 : en application du "premier critère de Dantzig", on choisit d'augmenter $x2$ tout en laissant $x1$ nulle.

Etude des conséquences de l'augmentation de $x2$

Les variables étant liées entre elles par des égalités, lorsque $x2$ augmente, $x1$ restant nulle, la valeur des autres variables est modifiée. Il faut faire en sorte de rester dans le domaine des solutions réalisables. Toutes les variables doivent rester positives.

➔ **Posons $x1$= 0. Que devient le système des contraintes ?**

➔ **Quelle est la valeur max que l'on peut donner à $x2$?**

➔ **Que peut-on conclure ?**

A partir de la première solution obtenue en donnant à $x1$ et à $x2$ la valeur 0, on a construit une deuxième solution meilleure puisque la fonction objectif vaut maintenant 64.

Solution 1 : $x1$=0, $x2$=0, $e1$=10, $e2$=48, $e3$=24, z=0.

Solution2 : $x1$=0, $x2$=8, $e1$=2, $e2$=0, $e3$=16, z=64.

➔ **La solution 2 est-elle optimale ?**

➔ **Donnez le nouveau système qui en résulte.**

Lorsque dans ce nouveau système, qui est équivalent au premier, on donne à $x1$ et à $e2$ la valeur 0, on retrouve la solution 2.

On peut maintenant tester son optimalité, en écrivant la fonction objectif en fonction $x1$ et $e2$, ce qui est possible puisque toutes les variables peuvent s'exprimer en fonction de $x1$ et $e2$.

➔ **Cette solution est-elle optimale ?**

2.4 Construction de la solution 3

On cherche une meilleure solution en augmentant x_1 tout en laissant e_2 nulle.

➔ **Que devient le système si $e_2=0$?**

➔ **La nouvelle solution est-elle optimale ?**