

ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

1. О системах единиц в классической электродинамике

При измерении физической величины x её числовое значение $\{x\}$ свидетельствует о том, сколько раз в x содержится некоторая единица измерения $[x]$. Это означает, что

$$\{x\} = \frac{x}{[x]}. \quad (1.1)$$

Если, например, сила тока $I = 10$ А, то $\{I\} = 10$, $[I] = 1$ А. Соотношение (1.1) можно записать в виде

$$x = \{x\}[x]. \quad (1.2)$$

При уменьшении единицы измерения в α раз

$$[x] \rightarrow [X] = \frac{1}{\alpha}[x], \quad \{x\} \rightarrow \{X\} = \alpha\{x\}.$$

Сама физическая величина при этом не изменяется, поскольку

$$x = \{x\}[x] = \{X\}[X]. \quad (1.3)$$

Для каждой физической величины можно в принципе установить свою единицу, никак не связанную с единицами других величин. Это приводит, однако, к тому, что в уравнениях, выражающих физические законы, появляется множество численных коэффициентов. Уравнения становятся необозримыми, формулы — слишком сложными. Чтобы избежать этого, в физике уже давно отказались от независимого выбора единиц всех физических величин и стали применять системы единиц,

построенные по определённом принципу, который состоит в следующем. Некоторые величины принимаются за базисные, т.е. такие, для которых единицы устанавливаются произвольно. Так, например, в механике применяется система (L, M, T) , в которой за базисные величины принимаются длина L , масса M и время T . Выбор базисных величин и их число произвольны. Это вопрос соглашения. В международной системе СИ в качестве базисных величин приняты девять величин: длина, масса, время, сила электрического тока, температура, сила света, количество вещества, плоский угол, телесный угол. Величины, не являющиеся базисными, называются производными. Для производных величин единицы устанавливаются на основе формул, служащих их определением.

Здесь возникает понятие размерности. Если, например, число базисных величин равно трём и за них приняты длина L , масса M и время T , то для размерности производной величины y имеем

$$\dim y = L^p \cdot M^q \cdot T^r, \quad (1.4)$$

где p, q, r — постоянные числа. Формула (1.4) показывает, что если единицы длины, массы и времени уменьшить в α, β и γ раз, то единица производной величины y уменьшится в $\alpha^p \beta^q \gamma^r$ раз, и, следовательно, её числовое значение увеличится в такое же число раз. В этом и состоит смысл понятия размерности. Заметим, что для безразмерной величины z

$$\dim z = 1.$$

На практике величины p, q, r оказываются рациональными числами. Это обусловлено соответствующими определениями физических величин.

Часто размерность физической величины отождествляют с её единицей в соответствующей системе единиц. Так, например, говорят, что скорость имеет размерность м/с, а давление Н/м². В этом нет большой беды, хотя, строго говоря, это неверно: размерность скорости — LT^{-1} , а давления — $ML^{-1}T^{-2}$.

Рассмотрим вопрос о системах единиц в электродинамике. Законы макроскопической электродинамики определяются её фундаментальными аксиомами — уравнениями Максвелла, которые являются концентрированным обобщением экспериментальных фактов из области электричества и магнетизма. Запишем уравнения Максвелла для вакуума в произвольной системе единиц:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \alpha \int_V \rho dV, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \alpha \rho, \quad (1.5)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.6)$$

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\beta \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\beta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.7)$$

$$\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \gamma \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \delta \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \gamma \mathbf{j} + \delta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (1.8)$$

$$\mathbf{F} = \xi q \mathbf{E} + \eta q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (1.9)$$

$$d\mathbf{F} = \xi dq \mathbf{E} + \eta I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

Здесь приняты стандартные обозначения. Уравнение (1.9) или (1.10) служит для определения силовых векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} . Множество коэффициентов $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta)$ свидетельствует о том, что для каждой физической величины, входящей в систему уравнений (1.5) — (1.10), принята собственная единица измерения, независимая от единиц других величин.

Напомним физический смысл уравнений Максвелла. Уравнение (1.5) показывает, что источником электрического поля \mathbf{E} является электрический заряд. Из него можно получить закон Кулона:

$$\mathbf{F}_{12} = \alpha \frac{q_1 q_2}{4\pi r_{12}^3} \mathbf{r}_{12}. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.6) говорит о том, что в природе отсутствуют, насколько известно в настоящее время, магнитные заряды. Уравнение (1.7) — это математическая формулировка закона электромагнитной индукции. Оно свидетельствует о том, что изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Уравнение (1.8) показывает, что магнитное поле \mathbf{B} — всегда вихревое (силовые линии замкнуты), и его источником являются не только движущиеся заряды, но и переменное электрическое поле. Для постоянного магнитного поля с помощью (1.8) можно получить закон Био–Савара (см. Приложение):

$$d\mathbf{B} = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (1.12)$$

С помощью уравнения

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \gamma \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}$$

можно найти отнесённую к единице длины силу взаимодействия между двумя токами I_1 и I_2 , текущими по двум бесконечно длинным параллельным проводам:

$$\frac{dF}{dl} = \gamma \eta \frac{I_1 I_2}{2\pi r}. \quad (1.13)$$

Рассмотрим электромагнитное поле в области, где нет источников, т.е. $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$. В силу (1.7) и (1.8) имеем

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\beta \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{B} = -\beta \delta \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

или

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\beta \delta \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

т.е.

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \beta \delta \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (1.14)$$

Волновое уравнение (1.14) описывает распространение электромагнитных волн в вакууме. Скорость распространения волн равна $1/\sqrt{\beta\delta}$. Измерения дают $1/\sqrt{\beta\delta} = c$, где c — скорость света в вакууме. Таким образом, из опыта следует, что $\beta\delta = 1/c^2$, где c — универсальная фундаментальная постоянная.

Запишем уравнения (1.5) – (1.9) в безразмерном виде. Для каждой физической величины f , входящей в эту систему, введём следующие обозначения:

$$\{f\} \equiv f', \quad [f] \equiv f_0, \quad \text{т.е.} \quad f' = \frac{f}{f_0} \quad \text{или} \quad f = f' \cdot f_0. \quad (1.15)$$

Для единиц длины l и времени τ имеем

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' \cdot l, \quad t = t' \cdot \tau. \quad (1.16)$$

Подставляя (1.15) и (1.16) в систему (1.5) – (1.9) и опуская штрихи, находим

$$E_0 l^2 \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \alpha \rho_0 l^3 \int_V \rho dV, \quad \frac{E_0}{l} \text{div } \mathbf{E} = \alpha \rho_0 \rho, \quad (1.17)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (1.18)$$

$$E_0 l \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\beta \frac{B_0}{\tau} l^2 \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \frac{E_0}{l} \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\beta B_0}{\tau} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.19)$$

$$B_0 l \oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \gamma j_0 l^2 \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \delta \frac{E_0 l^2}{\tau} \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{S}, \quad \frac{B_0}{l} \text{rot } \mathbf{B} = \gamma j_0 \mathbf{j} + \frac{\delta E_0}{\tau} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.20)$$

$$F_0 \mathbf{F} = \xi q_0 q E_0 \mathbf{E} + \eta q_0 q v_0 B_0 \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (1.21)$$

Здесь $v_0 = \frac{l}{\tau}$, $j_0 = \rho_0 v_0$.

Из (1.17) – (1.21) следует, что

$$\begin{aligned} \dim \alpha &= \dim \frac{E_0}{\rho_0 l}, \\ \dim \beta &= \dim \frac{1}{v_0} \frac{E_0}{B_0}, \\ \dim \gamma &= \dim \frac{B_0}{j_0 l}, \\ \dim \frac{\delta}{\gamma} &= \dim \frac{j_0 \tau}{E_0} = \dim \frac{\rho_0 v_0 \tau}{E_0} = \dim \frac{\rho_0 l}{E_0}, \\ \dim \delta &= \dim \frac{1}{v_0} \frac{B_0}{E_0}, \\ \dim \frac{\xi}{\eta} &= \dim v_0 \frac{B_0}{E_0}. \end{aligned}$$

Отсюда можно видеть, что

$$\begin{aligned} \dim \frac{\alpha \delta}{\gamma} &= 1, \quad \dim \frac{\xi \beta}{\eta} = 1, \\ \dim \delta \beta &= \dim \frac{1}{v_0^2}. \end{aligned}$$

Последнее соответствует тому, что

$$\delta\beta = \frac{1}{c^2}.$$

При выборе базисных единиц естественно предположить, что

$$\frac{\alpha\delta}{\gamma} = 1, \quad \frac{\xi\beta}{\eta} = 1, \quad \delta\beta = \frac{1}{c^2}. \quad (1.22)$$

В таблице 1 показано, как в различных системах пользуются произволом, который дают соотношения (1.22). В настоящее время принято считать, что $c = 299\,792\,458$ м/с (точно). Это означает, что базисные единицы «привязаны» к этой величине. Это, конечно, соглашение. Мы полагаем в лаборатории $c \cong 3 \cdot 10^8$ м/с.

В общей физике в настоящее время используются в основном две системы единиц: гауссова система СГС (далее — система СГС) и международная система СИ (далее — система СИ). Система СГС, в которой в качестве базисных величин приняты длина, масса и время, разработана на основе законов механики Ньютона. Электрические и магнитные величины вводятся в ней как производные механических. Построенные по такому принципу системы единиц называются абсолютными. В системе СГС электрические величины измеряются в единицах СГСЭ, а магнитные — в единицах СГСМ.

В системе СИ к трём базисным механическим величинам — длине, времени и массе — в электродинамике добавлена независимая чисто электрическая величина, имеющая собственную размерность. В качестве таковой выбрана сила электрического тока, а её единицей выбран ампер. Единицей заряда при этом является ампер-секунда, называемая кулоном.

Эталон силы электрического тока устанавливается на основе формулы (1.13). В системе СИ $\gamma = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$, $\eta = 1$, поэтому

$$\Delta F = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{I_1 I_2}{2\pi r} \Delta l. \quad (1.23)$$

На основании международного соглашения принято по определению, что ампер — это единица силы тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и исчезающе малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м друг от друга в вакууме, вызывал бы между проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины. Реализовать эту единицу можно несколькими способами, например, измеряя силу взаимодействия двух катушек с постоянным током.

Т а б л и ц а 1
Некоторые системы единиц, используемые при
изучении макроскопической электродинамики

	α	β	γ	δ	ξ	η	$\frac{\alpha\delta}{\gamma}$	$\frac{\xi\beta}{\eta}$	$\delta\beta$
СГСЭ	4π	1	$\frac{4\pi}{c^2}$	$\frac{1}{c^2}$	1	1	1	1	$\frac{1}{c^2}$
СГСМ	$4\pi c^2$	1	4π	$\frac{1}{c^2}$	1	1	1	1	$\frac{1}{c^2}$
СГС	4π	$\frac{1}{c}$	$\frac{4\pi}{c}$	$\frac{1}{c}$	1	$\frac{1}{c}$	1	1	$\frac{1}{c^2}$
СИ	$\frac{1}{\varepsilon_0}$	1	$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$	$\frac{1}{c^2}$	1	1	1	1	$\frac{1}{c^2}$
МКС	1	1	$\frac{1}{c^2}$	$\frac{1}{c^2}$	1	1	1	1	$\frac{1}{c^2}$
$c = 299\,792\,458$ м/с (точно); $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.									

Полагая в (1.23) $I_1 = I_2 = 1$ А, имеем

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ Н} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{1}{2\pi} \text{ Н},$$

т.е.

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ ед. СИ}$$

или

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ ед. СИ}.$$

В системе СГС единиц формула (1.13) имеет вид

$$\Delta F = \frac{4\pi}{c^2} \frac{I_1 I_2}{2\pi r} \Delta l. \quad (1.24)$$

Установим соотношение между единицами силы электрического тока в системе СГС и системе СИ. Полагая в (1.23) $I_1 = I_2 = 1$ А, $r = \Delta l = 1$ м, находим

$$\Delta F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}. \quad (1.25)$$

Воспользуемся теперь для вычисления той же силы формулой (1.24). Полагая в этой формуле $I_1 = I_2 = I$, $r = \Delta l = 100$ см, находим

$$\Delta F = \frac{4\pi}{c^2} \frac{I^2}{2\pi} = \frac{2I^2}{c^2} \text{ дин} = \frac{2I^2}{c^2} 10^{-5} \text{ Н}. \quad (1.26)$$

Приравнивая (1.25) и (1.26), имеем

$$2 \cdot 10^{-7} = \frac{2I^2}{c^2} 10^{-5}, \quad \text{т.е.} \quad I = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС.}$$

Это означает, что

$$10[I]_{\text{СИ}} = c[I]_{\text{СГС}}, \quad (1.27)$$

где $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, $[I]_{\text{СИ}} = 1$ А. Соотношение (1.27) можно представить в виде

$$[I]_{\text{СИ}} = 3 \cdot 10^9 [I]_{\text{СГС}}$$

или

$$c = 10 \frac{\{I\}_{\text{СГС}}}{\{I\}_{\text{СИ}}} \left(\frac{\text{см}}{\text{с}} \right), \quad (1.28)$$

что может быть проверено экспериментально (см. работу № 3.1.1).

В силу (1.27) для электрического заряда имеем

$$[q]_{\text{СИ}} = 3 \cdot 10^9 [q]_{\text{СГС}}.$$

Установим соотношение между единицами разности потенциалов в системе СГС и системе СИ. Воспользуемся для этого формулой для отсчитываемого от бесконечно удалённой точки потенциала точечного заряда:

$$\varphi = \frac{q}{r} \quad (\text{СГС}), \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (\text{СИ}).$$

Пусть $q = 1$ ед. СГС, а $r = 1$ см, тогда $\varphi = 1$ ед. СГС $\equiv [\varphi]_{\text{СГС}}$. Вычислим этот же потенциал в системе СИ:

$$\varphi = \frac{9 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2}} = 300 \text{ В.}$$

Это означает, что для единиц разности потенциалов имеем

$$[U]_{\text{СГС}} = 300 [U]_{\text{СИ}}. \quad (1.29)$$

Соотношение (1.29) может быть также проверено экспериментально, например, с помощью абсолютного вольтметра (см. работу № 3.1.2).

Подобным образом устанавливаются соотношения между единицами других физических систем, величин (см. таблицу 2). Основные формулы в системах СИ и СГС представлены в таблице 3.

Т а б л и ц а 2

**Перевод числовых значений физических величин
из системы СИ в систему СГС**

Наименование	Обозн.	СИ	СГС
Длина	l	1 м (метр)	10^2 см
Масса	m	1 кг (килограмм)	10^3 г
Время	t	1 с (секунда)	1 с
Работа, энергия	A, W	1 Дж (джоуль)	10^7 эрг
Мощность	N	1 Вт (ватт)	$10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{с}}$
Давление	P	1 Па (паскаль)	$10 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$
Сила электрического тока	I	1 А (ампер)	$3 \cdot 10^9$
Электр. заряд	q	1 Кл (кулон)	$3 \cdot 10^9$
Поляризация	\mathbf{P}	$1 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$3 \cdot 10^5$
Электрическая индукция	\mathbf{D}	$1 \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$12\pi \cdot 10^5$
Электр. ёмкость	C	1 Ф (фарад)	$9 \cdot 10^{11}$ см
Электрическое сопротивление	R	1 Ом (ом)	$\frac{1}{9 \cdot 10^{11}} \frac{\text{с}}{\text{см}}$
Удельное сопротивление	ρ	1 Ом·м	$\frac{1}{9 \cdot 10^9}$ с
Электрическая проводимость	$\Lambda = \frac{1}{R}$	1 См (сименс)	$9 \cdot 10^{11} \frac{\text{см}}{\text{с}}$
Удельная проводимость	σ	$1 \frac{\text{См}}{\text{м}}$	$9 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$
Магнитный поток	Φ	1 Вб (вебер)	10^8 Мкс
Магнитная индукция	\mathbf{B}	1 Тл (тесла)	10^4 Гс
Напряжённость магнитного поля	\mathbf{H}	$1 \frac{\text{А}}{\text{м}}$	$4\pi \cdot 10^{-3}$ Э
Намагниченность	\mathbf{M}	$1 \frac{\text{А}}{\text{м}}$	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^4$ Гс
Индуктивность	L	1 Гн (генри)	10^9 см
Электрический потенциал	φ	1 В (вольт)	$\frac{1}{300}$
Напряжённость электр. поля	\mathbf{E}	$1 \frac{\text{В}}{\text{м}}$	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 3

Основные формулы в СИ и СГС

Наименование	СИ	СГС
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$
Электрическая индукция Напряжённость магнитного поля		
Материальные уравнения	$\mathbf{P} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}$ $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$
Уравнения Максвелла в интегральной форме	$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$ $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} =$ $= \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$	$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV$ $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} =$ $= \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$
Сила Лоренца	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Закон Кулона	$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3} \mathbf{r}$	$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3} \mathbf{r}$
Закон Био–Савара	$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$	$d\mathbf{H} = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$
Закон Ампера	$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$	$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$
Плотность энергии электромагнитного поля	$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})$	$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
Энергия магнитного поля тока	$W = \frac{LI^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2}$
Плотность импульса электромагнитного поля	$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

Т а б л и ц а 3 (продолжение)

Наименование	СИ	СГС
Индуктивность (определение)	$\Phi = LI$	$\Phi = \frac{1}{c} LI$
Индуктивность длинного соленоида	$L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{l}$	$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$
Магнитный момент витка с током	$\mathfrak{M} = IS$	$\mathfrak{M} = \frac{1}{c} IS$
Момент сил, действующий на виток с током	$\mathbf{M} = \mathfrak{M} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{M} = \mathfrak{M} \times \mathbf{B}$
Поле точечного магнитного диполя	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathfrak{M}\mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathfrak{M}}{r^3} \right)$	$\mathbf{B} = \frac{3(\mathfrak{M}\mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathfrak{M}}{r^3}$
Сила, действующая на магнитный диполь в неоднородном поле	$\mathbf{F} = (\mathfrak{M}\nabla)\mathbf{B}$	$\mathbf{F} = (\mathfrak{M}\nabla)\mathbf{B}$
Поле точечного электрического диполя	$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right)$	$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}$
Ёмкость плоского конденсатора	$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$	$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$	$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}$

Международная система СИ хорошо приспособлена для практических инженерных измерений. Она мало отличается от электротехнической системы, предложенной Джорджи в начале XX века (см. Приложение). В то время уравнения Максвелла мало использовались в электротехнике, преобладали механические воззрения на природу электромагнитного поля. С точки зрения рассмотренной выше структуры безразмерных параметров уравнений Максвелла выбор единиц системы СИ представляется совершенно случайным, хотя вполне допустимым. С теоретической точки зрения предпочтительной является система МКС, для которой все коэффициенты равны единице, кроме коэффициентов γ и δ , каждый из которых равен $1/c^2$ (см. таблицу 1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камке Д., Кремер К. Физические основы единиц измерения. — М.: Мир, 1980.
2. Власов А.Д., Мушин Б.П. Единицы физических величин в науке и технике. Справочник. — М.: Энергоатомиздат, 1990.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. К истории вопроса

Потребность в выборе системы единиц, соответствующей принятой физической картине мира, возникла в физике после опубликования Дж.К. Максвеллом (1831–1879) «Трактата об электричестве и магнетизме» (1873 г.), в котором были сформулированы его знаменитые уравнения электродинамики.

Естественным представлялось желание записать уравнения Максвелла в простейшем виде (с минимальным числом размерных коэффициентов). В этом, однако, не было необходимости с точки зрения накопленного метрологического знания домаксвелловской электродинамики.

Сохранилась некоторая реликтовая классификация абсолютных систем электрических единиц. В соответствии с употребляемыми механическими величинами системы электрических единиц могут принадлежать к системе сантиметр-грамм-секунда (СГС) или к системе метр-килограмм-секунда (МКС). В зависимости от принятых базисных единиц система называется классической или практической. И, наконец, по способу введения множителя 4π различают рационализированные и нерационализированные системы единиц. Международная система СИ принадлежит к группе практических рационализированных систем МКС. Абсолютная гауссова система принадлежит к группе классических нерационализированных систем.

В практических системах электрических единиц рационализация (устранение множителя 4π) осуществляется таким образом, чтобы она не затрагивала наиболее распространённые практические единицы ампер (А) и вольт (В).

В начале XX века наиболее употребительной была так называемая практическая система Джорджи. Это система МКС четырёх базисных единиц, в которой в качестве четвёртой электрической единицы выбирается либо кулон, либо ампер, либо стандартное сопротивление (сопротивление серебряной нити длиной 1 м с поперечным сечением 1 мм^2 при 0°C).

Можно видеть, например, что в рационализированной системе единиц коэффициент 4π входит в формулу для ёмкости сферического конденсатора, где он уместен, поскольку имеется сферическая симметрия; в нерационализированной системе единиц коэффициент 4π отсутствует в формуле для ёмкости сферического конденсатора, но входит в выражение ёмкости плоского конденсатора, что неуместно.

Английский исследователь Хевисайд (1850–1925), всю жизнь борющийся за рационализацию систем единиц, приводит следующее убедительное сравнение: в геометрии при переходе от измерения длин к измерению площадей можно было бы установить в качестве единицы площади круг с радиусом, равным единице. Логически это было бы возможно, но привело бы к странному выводу, что квадрат со стороной, равной единице, имеет площадь, равную $1/\pi$, и, конечно, всякий сказал бы, замечает Хевисайд, что присутствие π в выражении площади квадрата неуместно.

В 1900 г. вышла в свет книга Э. Кона «Электромагнитное поле». Уравнения Максвелла в ней были записаны в следующем виде:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{div } \mathbf{H} = j + \frac{\partial D}{\partial t},$$

$$\text{где } \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$$

Голландский физик Г.А. Лоренц (1853–1928), патриарх физики XIX века, писал в 1902 г.: «Система Кона имеет то преимущество, что с её помощью легко переходить к другим системам путём конкретного выбора значений V , ϵ_0 , μ_0 . Окончательный выбор единиц можно было бы сделать на основе возможных дальнейших успехов в понимании физических явлений. Но всё же мы не можем решиться оставить неопределённые величины в уже и без того сложных формулах».

Приступая в 1902 г. к работе над статьёй для «Энциклопедии математических наук», Лоренц взял за основу гауссову систему единиц. Однако в процессе работы над статьёй, изменив свои первоначальные планы, он решил модифицировать гауссову систему единиц с тем, чтобы воспользоваться рациональными единицами, т.е. рационализировать гауссову систему. Благодаря этому теоретические зависимости стали нагляднее, в уравнениях Максвелла исчезли коэффициенты 4π . Фундаментальные постоянные вакуума Лоренц положил равными единице ($\epsilon_0 = \mu_0 = 1$). В наших обозначениях это означает, что выбрана система единиц, для которой

$$\beta = \frac{1}{V}, \quad \delta = \frac{1}{V}, \quad \gamma = 1,$$

т.е.

$$V^2 = \frac{1}{\beta\delta} = c^2.$$

Чтобы сохранить при этом рациональную запись закона Кулона, Лоренцу пришлось, естественно, сохранить коэффициент 4π в определении единиц электрического и магнитного заряда. Современникам Лоренца такой подход в выборе системы единиц казался нефизическим. Несмотря на авторитет Лоренца, его рационализация гауссовой системы была проигнорирована.

Подробнее о системах единиц физических величин можно прочитать в работах [1], [2].

Б. Вектор Пойнтинга в произвольной системе единиц

Заметим прежде всего, что для произвольных векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} имеет место тождество

$$\text{div } \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{B}.$$

В силу уравнений (1.7) и (1.8) отсюда находим

$$\text{div } \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\beta \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \delta \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \gamma \mathbf{j} \mathbf{E}$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\beta B^2}{2} + \frac{\delta E^2}{2} \right) - \gamma \mathbf{j} \mathbf{E}. \quad (\text{П.1})$$

Умножая уравнение (1.9) скалярно на \mathbf{v} , имеем

$$\mathbf{F} \mathbf{v} = \xi q \mathbf{v} \mathbf{E}. \quad (\text{П.2})$$

Если считать, что величина $q\mathbf{E}$ есть сила, действующая на заряд q , то из (П.2) следует, что коэффициент ξ необходимо положить равным единице. Это означает, с другой стороны, что величина $(\mathbf{j} \mathbf{E})$ есть мощность джоулевых потерь в единице объёма. Таким образом, закон сохранения энергии (П.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \mathbf{j} \mathbf{E}, \quad (\text{П.3})$$

где плотность энергии

$$w = \frac{\delta}{\gamma} \frac{E^2}{2} + \frac{\beta}{\gamma} \frac{B^2}{2}.$$

Следовательно, для вектора Пойнтинга имеем выражение

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

В заключение приведём формулы для плотности энергии электромагнитного поля и вектора плотности потока энергии (вектора Пойнтинга) для некоторых систем единиц:

$$\text{СГС} \quad w = \frac{1}{8\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} B^2, \quad \mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

$$\text{МКСА} \quad w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 B^2, \quad \mathbf{\Pi} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

$$\text{МКС} \quad w = \frac{1}{2} E^2 + \frac{1}{2} c^2 B^2, \quad \mathbf{\Pi} = c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

В. Закон Био и Савара

Рассмотрим магнитное поле постоянного тока. Оно описывается уравнением

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \gamma \mathbf{j}. \quad (\text{П.4})$$

Введём в рассмотрение вектор-потенциал поля \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (\text{П.5})$$

Выберем кулоновскую калибровку потенциала:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (\text{П.6})$$

На основании (П.4) и (П.5) находим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \gamma \mathbf{j},$$

или

$$\Delta \mathbf{A} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\gamma \mathbf{j}.$$

В силу (П.6) имеем

$$\Delta \mathbf{A} = -\gamma \mathbf{j}. \quad (\text{П.7})$$

Решение уравнения (П.7) находится аналогично решению уравнения Пуассона:

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho,$$

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r} dV,$$

где r — расстояние от элемента dV до точки наблюдения поля. По аналогии находим из (П.7):

$$\mathbf{A} = \frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV,$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV.$$

Воспользуемся формулой векторного анализа:

$$\operatorname{rot} f \mathbf{a} = f \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} f \times \mathbf{a}.$$

В нашем случае

$$f = \frac{1}{r}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{j}.$$

Имеем

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{j}}{r} = \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

т.е.

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r}}{r^3} dV.$$

Учитывая, что

$$\mathbf{j} dV = I d\mathbf{l},$$

отсюда находим

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (\text{П.8})$$

Формулу (П.8) можно интерпретировать следующим образом. Элемент тока создаёт в данной точке магнитное поле, равное

$$d\mathbf{B} = \frac{\gamma}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Это и есть закон Био и Савара.

Работа 3.1.1

Магнитометр

Цель работы: определить горизонтальную составляющую магнитного поля Земли и установить количественное соотношение между единицами электрического тока в системах СИ и СГС.

В работе используются: магнитометр, осветитель со шкалой, источник питания, вольтметр, электромагнитный переключатель, конденсатор, намагниченный стержень, прибор для определения периода крутильных колебаний, секундомер, рулетка, штангенциркуль.

Магнитометром называют прибор для магнитных измерений, например компас, теодолит, веберметр и пр. С помощью магнитометров измеряют намагниченность ферромагнетиков, напряжённость магнитных полей, исследуют магнитные аномалии. Разработаны магнитометры различных конструкций: магнитостатические, электромагнитные, магнитодинамические, индукционные, резонансные. Эталонные магнитометры позволяют измерять горизонтальную и вертикальную составляющие напряжённости магнитного поля Земли с точностью 10^{-6} Э ($1 \text{ Э} = 79,6 \text{ А/м}$).

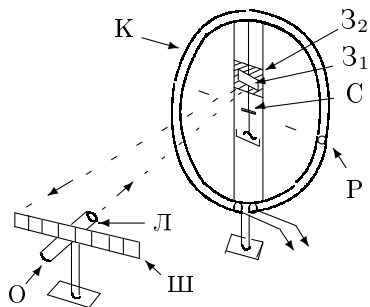


Рис. 1. Схема магнитометра

В нашей установке с помощью электромагнитного магнитометра измеряется горизонтальная составляющая земного магнитного поля и абсолютным образом определяется сила тока по его магнитному действию.

Экспериментальная установка.

Магнитометр (рис. 1) состоит из нескольких последовательно соединённых круговых витков К, расположенных вертикально. В центре кольца К на тонкой неупругой вертикальной нити подвешена короткая магнитная стрелка С. Жёстко связанная со

стрелкой крыльчатка погружена в масло и служит для демпфирования колебаний.

В отсутствие других магнитных полей стрелка располагается по направлению горизонтальной составляющей земного магнитного поля B_0 , т.е. лежит в плоскости магнитного меридиана.

Прибор настраивают с помощью световых зайчиков, отражённых от двух зеркал: Z_1 , прикреплённого к стрелке (подвижный зайчик), и Z_2 , расположенного в плоскости кольца К и жёстко связанного с ним (неподвижный зайчик). Оба зеркала освещаются одним и тем же осветителем О. Вращением кольца вокруг вертикальной оси можно совместить оба зайчика. При этом плоскость витков совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

При появлении дополнительного горизонтального магнитного поля B_{\perp} стрелка С установится по равнодействующей обоих полей B_{Σ} (рис. 2). В нашей установке дополнительное поле может быть создано либо ферромагнитным стержнем, расположенным на кольце на его горизонтальном диаметре (B_1), либо током, проходящим по кольцу (B_2). В обоих случаях дополнительное поле можно считать однородным, т.к. размеры стрелки много меньше радиуса кольца.

Поле намагниченного стержня (точечного диполя) на перпендикуляре к нему:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mathfrak{M}}{4\pi R^3}, \quad (1)$$

поле в центре кольца с током по закону Био и Савара:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} N. \quad (2)$$

Здесь \mathfrak{M} — магнитный момент ферромагнитного стержня, R — радиус кольца, N — число витков в кольце, I — сила тока в единицах СИ (амперах).

Измерив угол отклонения стрелки φ , можно связать поля B_0 и B_{\perp} (B_1 или B_2):

$$B_{\perp} = B_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

1. Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

Для определения горизонтальной составляющей земного магнитного поля B_0 тонкий короткий намагниченный стержень устанавливается в отверстие Р на горизонтальном диаметре кольца (рис. 1). Измерив тангенс угла отклонения стрелки

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_1}{2L}, \quad (4)$$

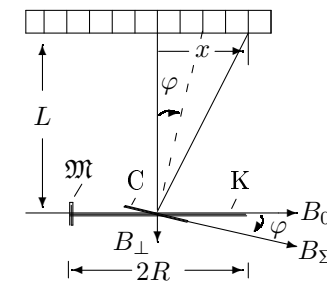


Рис. 2. Схема измерения угла отклонения магнитной стрелки

можно с помощью уравнений (1), (3) и (4) рассчитать поле B_0 , если исключить величину \mathfrak{M} — магнитный момент стержня.

Для исключения магнитного момента измерим период крутильных колебаний стержня в поле Земли. Подвешенный горизонтально за середину на тонкой длинной нити стержень в положении равновесия установится по полю Земли (упругость нити пренебрежимо мала). Если ось стержня отклонить в горизонтальной плоскости от направления B_0 на малый угол α , то под действием возвращающего механического момента

$$M_{\text{мех}} = \mathfrak{M} B_0 \sin \alpha \approx \mathfrak{M} B_0 \alpha$$

стержень с моментом инерции J в соответствии с уравнением

$$J\ddot{\alpha} + \mathfrak{M} B_0 \alpha = 0$$

будет совершать крутильные колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathfrak{M} B_0}}. \quad (5)$$

Момент инерции цилиндрического стержня относительно оси вращения

$$J = m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right) = \frac{ml^2}{12} \left[1 + 3 \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где m — масса стержня, l — длина, а r — его радиус.

Таким образом, рассчитав момент инерции J и измерив тангенс угла отклонения стрелки φ_1 и период малых крутильных колебаний стержня T , можно с помощью формул (1), (3), (4) и (5) определить горизонтальную составляющую магнитного поля Земли:

$$B_0 = \frac{2\pi}{TR} \sqrt{\frac{\mu_0 J L}{2\pi R x_1}}. \quad (7)$$

Поскольку магнитометр установлен в железобетонном здании, магнитное поле в нём может не только сильно отличаться от поля Земли, но и заметно меняться от места к месту, поэтому период колебаний следует определять вблизи магнитометра. Для устранения случайных помех стержень подвешивается в специальном стеклянном сосуде.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается измерить угол отклонения магнитной стрелки в поле намагниченного стержня и период колебаний этого

стержня в поле Земли. По результатам измерений рассчитывается горизонтальная составляющая магнитного поля Земли.

1. Включите осветитель и получите на горизонтальной шкале два чётких световых зайчика. Плавным поворотом кольца К (рис. 1) вокруг вертикальной оси добейтесь совмещения зайчиков. Их чёткость можно подрегулировать перемещением линзы Л вдоль оси осветителя.

2. В отверстие Р на горизонтальном диаметре кольца (рис. 1) вставьте намагниченный стержень и измерьте смещение подвижного зайчика x_1 (рис. 2). Оно должно составлять несколько сантиметров. Поменяв ориентацию стержня в гнезде, измерьте отклонение зайчика в другую сторону. При незначительном расхождении усредните результаты, при значительном ($> 5\%$) следует устранить причины расхождения.

3. Измерьте расстояние L от шкалы до зеркала.

4. Для измерения периода малых колебаний поставьте стеклянный сосуд вблизи магнитометра и опустите на дно привязанный за середину намагниченный стержень. Плавным поворотом спицы, на которой закреплена нить, чуть приподнимите стержень и приближённо определите период малых крутильных колебаний. Оцените, сколько колебаний надо взять для расчёта периода, чтобы погрешность расчёта была меньше одного процента. Точность, с которой можно на глаз зафиксировать начало и конец колебаний, порядка одной секунды.

Округлив результат, измерьте время нескольких десятков колебаний.

5. С помощью штангенциркуля измерьте линейные размеры стержня; запишите массу стержня и параметры магнитометра.

6. Рассчитайте величину B_0 и оцените погрешность.

II. Определение электродинамической постоянной

Для определения электродинамической постоянной c необходимо провести независимые измерения одного и того же тока в разных системах: в СИ — $I_{\text{СИ}}$ и в СГС — $I_{\text{СГС}}$:

$$c = 10 \frac{\{I\}_{\text{СГС}}}{\{I\}_{\text{СИ}}}. \quad (8)$$

Пропуская ток через витки магнитометра, измеряют тангенс угла отклонения стрелки ($\text{tg } \varphi_2 = x_2/2L$) и по формулам (2) и (3) рассчитывают величину

$$I_{\text{СИ}} = \frac{2B_0 R}{\mu_0 N} \text{tg } \varphi_2 = A \text{tg } \varphi_2. \quad (9)$$

Величина A является постоянной прибора в данном месте земной поверхности.

Заметим, что если B_0 известно, то определение силы тока не требует сравнения с какими-либо эталонами тока или напряжения и является абсолютным, т.е. непосредственно связывает ток с основными единицами системы СИ. При этом магнитометр может служить для изготовления эталонов и градуировки амперметров в системе СИ.

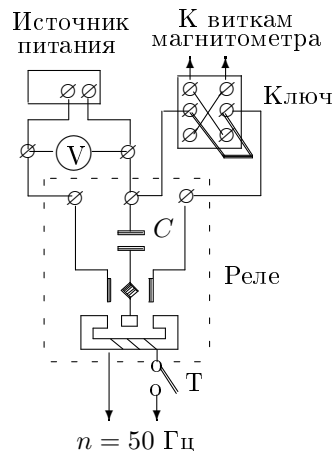


Рис. 3. Схема питания катушки магнитометра

Таким образом, измерение тока в системе СГС сводится к нахождению величин C и U , которые тоже могут быть определены абсолютным образом. Так, ёмкость плоского конденсатора можно вычислить, опираясь только на единицу длины. Разность потенциалов также может быть определена абсолютным образом, например, через силу, действующую на пластину заряженного конденсатора, как это делается в абсолютном вольтметре (см. работу № 3.2.1). Мы, однако, не будем проводить эту программу, а ограничимся только указанием на возможность её выполнения.

Вместо этого возьмём конденсатор, ёмкость которого выражена в сантиметрах (единица абсолютной гауссовой системы), и измерим напряжение U на нём вольтметром V , прокалиброванным в вольтах ($300 \text{ В} = 1 \text{ ед. СГС}$). Значения C и U в единицах системы СГС подставим в формулу (10).

ЗАДАНИЕ

В этом пункте предлагается по углу отклонения магнитной стрелки в поле кругового тока и известному полю Земли рассчитать ток в системе СИ, а по известному напряжению и параметрам вибратора рассчитать ток в гауссовой системе; по результатам измерений определить электродинамическую постоянную.

Одновременно тот же ток измеряется в системе СГС (рис. 3). Если разрядить конденсатор ёмкости C , заряженный до напряжения U , через витки, то через них протечёт заряд $q = CU$. Если n раз в секунду последовательно заряжать конденсатор от источника и разряжать через витки, то через них за секунду протечёт заряд CUn . Средний ток, прошедший через витки, равен при этом

$$I_{\text{СГС}} = CUn. \quad (10)$$

Таким образом, измерение тока в системе СГС сводится к нахождению величин C и U , которые тоже могут быть определены абсолютным образом. Так, ёмкость плоского конденса-

1. Уберите намагниченный стержень из гнезда магнитометра и соберите электрическую схему, изображённую на рис. 3.
2. Убедитесь, что зайчики совмещены в отсутствие тока через витки.
3. Включите в сеть источник питания и установите рабочее напряжение $U \approx 90\text{--}100 \text{ В}$ (любое целое, близкое к максимальному).
4. Замкнув ключ, подключите к цепи витки магнитометра.
5. Включив кнопкой К электровибратор, измерьте напряжение U на конденсаторе и отклонение x_2 зайчика на шкале. Поменяв полярность с помощью ключа, повторите измерения.
6. Запишите характеристики приборов и параметры N , C и n , указанные на установке.
7. Рассчитайте токи по формулам (9) и (10). Вычислите электродинамическую постоянную и оцените погрешность.

Контрольные вопросы

1. Приведите формулу для поля точечного магнитного диполя.
2. Получите формулу для магнитного поля в центре кругового витка с током.
3. Каким должно быть внутреннее сопротивление источника напряжения, чтобы ёмкость успевала разряжаться между замыканиями вибратора?
4. Мы измеряем не поле Земли, а поле внутри здания. Влияет ли это на точность определения электродинамической постоянной?
5. Установите соотношения между эрстедом и ампером на метр, гауссом и теслой, максвеллом и вебером.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Курс общей физики. Т.III.— М.: Наука, 1983, §§ 50–55.
2. Калашников С.Г. Электричество.— М.: Наука, 1970, §§ 83, 89, 125.

Работа 3.1.2

Абсолютный вольтметр

Цель работы: установить количественное соотношение между единицами электрического напряжения в системах СИ и СГС.

В работе используются: экспериментальный электростатический вольтметр, разноразовый, обычный электростатический вольтметр, выпрямитель, ключ.

Измерив силу притяжения двух электродов, к которым приложено электрическое напряжение, можно определить величину этого напряжения. На этом основан принцип действия электростатического вольтметра. Сила притяжения его электродов измеряется путём сравнения

с какой-нибудь механической силой, например с силой упругой деформации спиральной пружины. Так действуют обычные электростатические вольтметры, широко применяемые в технике измерений. В данной работе электрическая сила притяжения двух пластин плоского конденсатора сравнивается с весом гирек при помощи аналитических весов.

В системе СГС единица электрического заряда определяется через основные единицы: сантиметр, грамм и секунду. Поэтому, измеряя одни только механические величины: силу притяжения электродов, их размеры и расстояние между ними, — можно определить скопившийся на них заряд, а следовательно, и разность потенциалов между ними. Такие измерения и используемые для этой цели приборы принято называть абсолютными.

В системе СИ вводится дополнительная основная единица силы тока — ампер. Единица электрического заряда определяется через основные единицы: ампер и секунду. Как всегда в физике, введение добавочных независимых единиц приводит к появлению размерных констант. В формулах электростатики в системе СИ появляется размерная константа ϵ_0 , называемая электрической постоянной. Определение этой константы является одной из задач данной работы.

Обозначим через q заряд конденсатора и через E_1 — напряжённость электрического поля, создаваемого одной из пластин плоского конденсатора в том месте, где находится вторая пластина (считаем при этом, что расстояние d между пластинами мало по сравнению с поперечными размерами конденсатора). На вторую пластину действует со стороны первой сила $F = qE_1$, равная, конечно, силе действия второй пластины на первую. Напряжённость поля E_1 связана с плотностью электрического заряда $\sigma = q/S$ соотношением $E_1 = \sigma/2\epsilon_0$. Таким образом,

$$F = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q^2}{S}. \quad (1)$$

Для плоского конденсатора $q = UC = U\epsilon_0 S/d$, где d — расстояние между пластинами. Окончательно получаем

$$F = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2d^2}, \quad (2)$$

или

$$U = d\sqrt{\frac{2F}{\epsilon_0 S}} \quad (\text{в СИ}). \quad (3)$$

Формула (3) определяет в системе СИ связь между напряжением на конденсаторе и силой притяжения его пластин. Нетрудно получить аналогичную формулу в системе СГС. Проводя те же рассуждения, что и

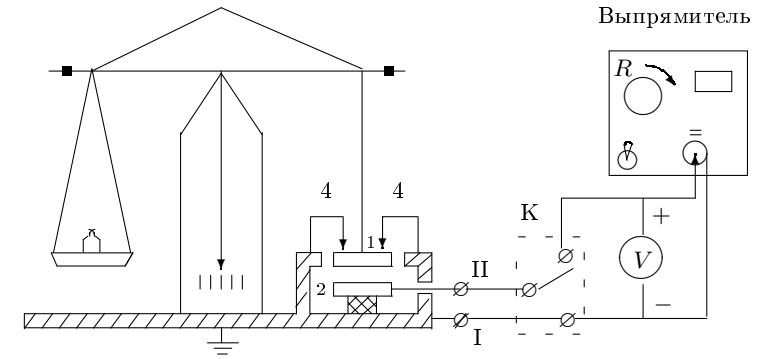


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

выше, найдём

$$U = 2d\sqrt{\frac{2\pi F}{S}} \quad (\text{в СГС}). \quad (4)$$

Опыты при постоянном напряжении на пластинах конденсатора можно использовать для определения электрической постоянной и для измерения коэффициента, переводящего напряжение, выраженное в вольтах, в единицы системы СГС. Квадратичный характер связи между силой и напряжением позволяет измерять с помощью весов и переменные напряжения, например напряжение электрической сети. В нашей установке опыты проводятся только при постоянном напряжении.

Экспериментальная установка. Основной составной частью экспериментальной установки являются аналитические весы (рис. 1), одна из чашек которых заменена подвижной пластиной 1 плоского воздушного конденсатора. Эта пластина заземлена. Высоковольтная неподвижная пластина 2 помещена внутри заземлённого электростатического экрана 3. Верхняя часть экрана имеет вид кольца, окружающего пластину 1 (охранное кольцо).

Нижние поверхности пластины и кольца лежат в одной плоскости. Так как их потенциалы равны, то они как бы образуют один проводник; электрическое поле оказывается однородным вдоль всей поверхности подвижной пластины, в том числе и у её краев.

Напряжение на конденсатор подаётся от высоковольтного выпрямителя. Высокоомный резистор (3 МОм), вмонтированный в выпрямитель, ограничивает ток короткого замыкания при случайных замыканиях пластин конденсатора. Параллельно пластинам конденсатора включён обычный электростатический вольтметр.

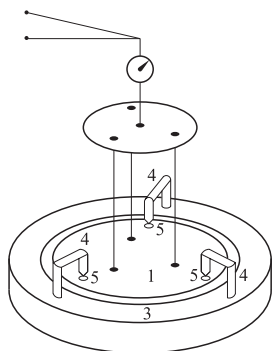


Рис. 2. Конструкция крепления подвижной пластины конденсатора

Измерения проводятся в условиях равновесия электрических и механических сил. Как следует из формулы (2), электрические силы быстро возрастают с уменьшением зазора между пластинами. С другой стороны, механические силы, обеспечивающие равновесие аналитических весов, возрастают при наклонах коромысла крайне медленно. В условиях нашего опыта равновесие весов при равенстве электрических и механических сил оказывается поэтому неустойчивым.

При настройке прибора на левую чашку весов кладётся некоторый перегрузок. При этом положение весов фиксируется тремя контактными винтами 4, расположенными в вершинах равностороннего треугольника (рис. 1 и 2). Винты упираются в контактные площадки 5, установленные на верхней плоскости подвижной пластины. Напряжение на пластинах регулируется с помощью реостата R выпрямителя. Электрические силы, действующие на пластину 1, возрастают по мере увеличения потенциала неподвижной пластины. В тот момент, когда эти силы сравниваются с весом перегрузка, коромысло теряет устойчивость и подвижная пластина «прилипает» к неподвижной. Этот момент фиксируется по движению стрелки весов.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать связь между силой притяжения пластин и разностью потенциалов между ними для определения электрической постоянной ϵ_0 и коэффициента перевода единиц напряжения из системы СГС в систему СИ.

Регулировка измерительного конденсатора требует определённых навыков и может производиться только лаборантом или механиком. Студент проверяет регулировку пластин визуально, не меняя их настройку самостоятельно.

1. Перед началом работы рассчитайте по формуле (2) максимально допустимую нагрузку, исходя из предела измерений электростатического вольтметра. Расстояние между пластинами d и площадь пластин S указаны на установке.
2. Соберите схему согласно рис. 1.

По уровню, расположенному на основании весов, проверьте, занимает ли платформа весов горизонтальное положение. При этом подвижная пластина измерительного конденсатора должна располагаться в центре охранного кольца, не касаясь его. При обнаружении неисправностей обратитесь к лаборанту.

Проверьте регулировку положения равновесия коромысла ненагруженных весов. Для этого следует отключить пластины конденсатора от выпрямителя и соединить их друг с другом (ключ K на рис. 1 переводится в нижнее положение). Осторожно, чтобы не сбить опорные призмы коромысла, освободите весы от арретира. В положении равновесия при закороченных пластинах упорные штифты должны быть близки к контактным пластинам и должны касаться их при незначительных (~ 10 мг) перегрузках на левой чашке весов.

При необходимости проведите регулировку положения коромысла весов. Для этого снова арретируйте весы и, перемещая тарировочные гайки, расположенные на концах коромысла, добейтесь того, чтобы стрелка весов оказалась на нулевом делении шкалы. Поворот гаек и изменение груза на чашке весов **всегда производятся при арретированных весах**, а проверка положения коромысла — когда весы сняты с арретира. Для изменения груза открываются боковые дверцы весов (фронтальная дверца открывается только на время ремонта).

3. Исследуйте зависимость силы притяжения пластин от напряжения на конденсаторе. Для измерения напряжения применяется электростатический вольтметр (вольтметр, вмонтированный в выпрямитель, для измерений не используется).

Переведите ключ K в положение измерения. Положите на левую чашку весов груз, равный примерно 0,1 от максимально допустимого. При этом подвижная пластина должна прижаться к упорным штифтам. Подберите напряжение, приводящее к потере устойчивости весов. Оно соответствует моменту начала движения стрелки весов.

Рекомендуется уточнить это напряжение 2–3 раза, каждый раз всё медленнее поворачивая ручку реостата R . Перед каждым измерением напряжения следует закорачивать пластины конденсатора ключом K , чтобы снять с пластин остаточный заряд.

Проведите такие измерения не менее чем в десяти точках, равномерно расположенных в рабочем диапазоне нагрузок.

4. Сразу после измерений изобразите результаты на графике в координатах F, U^2 . Если полученные точки в пределах ошибок опыта ложатся на прямую линию, эксперимент можно закончить. Если прямой линии не получилось, следует найти и устранить ошибку.

5. По наклону прямой $F = f(U^2)$ рассчитайте значение электрической постоянной ϵ_0 .

6. Используйте результаты измерений для определения коэффициента перевода единиц напряжения из системы СГС в систему СИ. Напряжение в единицах СГС может быть вычислено по формуле (4), а показания электростатического вольтметра позволяют определить это напряжение в вольтах. Изобразите полученные результаты на графике в координатах U (в СГС) = $f(U, В)$ и по наклону прямой, проведённой через экспериментальные точки, определите коэффициент пересчёта напряжений.

Контрольные вопросы

1. Оцените ошибку, возникающую вследствие того, что равновесие весов устанавливалось при наличии небольшого зазора между штифтами и контактными пластинами, а измерения производятся при отсутствии этого зазора.
2. Покажите, что электростатический вольтметр пригоден для измерения как постоянного, так и переменного напряжения.
3. Покажите, что измерения на переменном токе определяют именно эффективное значение его напряжения.
4. Чем определяется интервал частот, в котором можно измерять переменные напряжения с помощью электростатического вольтметра?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество — М.: Наука, 1983, § 125.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977, §§ 5, 6, 26.

Раздел II

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

В данном разделе мы будем рассматривать гармонические колебания токов (зарядов) в электрических цепях, включающих в себя резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Это — свободные затухающие колебания в колебательном контуре, а также вынужденные установившиеся колебания, возбуждаемые внешней ЭДС, изменяющейся по синусоидальному закону. Все колебания мы будем рассматривать при относительно низких частотах, когда выполняется условие квазистационарности. Квазистационарность означает, что мгновенные значения тока I практически одинаковы во всех проводниках, соединяющих элементы цепи, а изменения во времени происходят настолько медленно, что распространение электродинамических взаимодействий можно считать *мгновенным*. Такие взаимодействия распространяются со скоростью близкой к скорости света в вакууме c . Обозначим через l длину контура нашей цепи (практически эта длина совпадает с длиной провода, из которого изготовлена обмотка катушки самоиндукции). Время распространения электромагнитного возмущения на расстояние l

$$\tau = \frac{l}{c}.$$

Условие квазистационарности будет выполнено, если это время значительно меньше периода T колебаний тока в контуре: $\tau \ll T$, или частота колебаний $\nu = 1/T \ll 1/\tau$. При $l \sim 1$ м условие квазистационарности хорошо выполняется при частотах $\nu \ll 3 \cdot 10^8$ Гц.

Выполнение условия квазистационарности позволяет при расчёте цепей переменного тока пользоваться законом Ома для замкнутой цепи и законом сохранения заряда, как и в случае расчёта цепей постоянного тока. Следствием этих законов являются правила Кирхгофа. Первое правило Кирхгофа: в каждой точке разветвления цепи алгебраическая сумма токов равна нулю. Второе правило: для любого замкнутого контура сумма падений напряжений на отдельных участках контура равна

алгебраической сумме ЭДС в этом контуре. Ниже мы будем рассматривать идеализированные цепи переменного тока, в которых всё омическое сопротивление цепи сосредоточено в резисторе, некомпенсированные заряды расположены только на обкладках конденсатора, между которыми локализовано электрическое поле, а всё магнитное поле, связанное с током в цепи, локализовано в катушке самоиндукции. Условие квазистационарности позволяет использовать связь между током I и напряжением U на каждом из этих трёх элементов в виде: для резистора с сопротивлением R напряжение

$$U_R = IR; \quad (2.1)$$

для конденсатора, когда ток I направлен к положительно заряженной пластине,

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}, \quad (2.2)$$

где C — ёмкость конденсатора; для катушки самоиндукции

$$U_L = L \frac{dI}{dt}, \quad (2.3)$$

где L — индуктивность катушки.

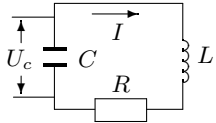


Рис. 2.1. Колебательный контур

В случае цепей постоянного тока правила Кирхгофа позволяют получить полную систему линейных алгебраических уравнений, из решения которой могут быть найдены все неизвестные токи. Используя правила Кирхгофа при расчёте цепи переменного тока, мы получаем систему линейных дифференциальных уравнений, которые дают возможность найти временную зависимость токов (зарядов) в данной

цепи. Когда же речь идёт о вынужденных стационарных колебаниях, нет необходимости решать дифференциальные уравнения: в этих случаях используются метод комплексных амплитуд или метод векторных диаграмм. Оба этих метода будут рассмотрены ниже в пункте «Вынужденные колебания».

1. Свободные колебания

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R (рис. 2.1). Обозначим разность потенциалов на конденсаторе через U_C ,

а ток, текущий в контуре, через I . Сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС самоиндукции:

$$RI + U_C = -L \frac{dI}{dt}. \quad (2.4)$$

Выразим U_C в (2.4) через заряд на конденсаторе q :

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0. \quad (2.5)$$

Продифференцируем полученное уравнение по времени. Учитывая, что $I = dq/dt$, найдём

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (2.6)$$

Разделим уравнение на L и введём обозначения:

$$\gamma = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (2.7)$$

Здесь γ — коэффициент затухания, ω_0 — собственная частота контура.

Обозначив дифференцирование по времени точкой, получим

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = 0. \quad (2.8)$$

Легко показать, что такой же вид имеют уравнения для заряда q и напряжения на конденсаторе U_C .

Линейными дифференциальными уравнениями второго порядка вида (2.8) описывается обширный класс колебательных систем как электрических, так и механических. Проще всего искать решение такого уравнения с помощью подстановки

$$I = A \cdot e^{\lambda t}, \quad (2.9)$$

где A и λ — некие константы.

Подстановка (2.9) в (2.8) приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (2.10)$$

Это уравнение определяет два возможных значения λ :

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$I = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.12)$$

и содержит две константы A_1 и A_2 , значения которых определяются начальными условиями задачи. Чаще всего в начальный момент времени ток в контуре отсутствует ($I = 0$), и задан начальный заряд конденсатора q_0 или напряжение на нём U_0 . Положив в (2.12) $t = 0$, получим

$$A_1 + A_2 = 0. \quad (2.13)$$

Подстановка $I = 0$, $U_C = U_0$ в исходное уравнение (2.4) даёт

$$U_0 = -L \cdot (\dot{I})_0. \quad (2.14)$$

Вычисляя из (2.12) \dot{I} при $t = 0$, найдём с помощью (2.14):

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = -\frac{U_0}{L}. \quad (2.15)$$

Уравнения (2.13) и (2.15) позволяют определить A_1 и A_2 :

$$A_1 = -\frac{U_0}{2L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}; \quad A_2 = \frac{U_0}{2L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}.$$

Для упрощения записи введём обозначение

$$\varkappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

и подставим полученные значения A_1 и A_2 в (2.12):

$$I = -\frac{U_0}{L\varkappa} e^{-\gamma t} \frac{e^{\varkappa t} - e^{-\varkappa t}}{2} = -\frac{U_0}{L\varkappa} e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \varkappa t. \quad (2.16)$$

В зависимости от соотношения между γ и ω_0 ток в контуре может по-разному меняться во времени.

Рассмотрим прежде всего случай, когда $\gamma < \omega_0$. При этом условии \varkappa будет мнимой величиной:

$$\varkappa = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \equiv i\omega. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.16), найдём:

$$I = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\gamma t} \operatorname{sh}(i\omega t) = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t. \quad (2.18)$$

Как видно из (2.18), ток в контуре в данном случае затухает, однако имеет колебательный характер.

Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = 1/\tau$, где τ — время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз.

Величина $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ носит название частоты свободных или собственных колебаний (не путать с собственной частотой ω_0). Период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (2.19)$$

Вернёмся к уравнению (2.8). Если известно, что $\gamma < \omega_0$, то решение уравнения (2.8) можно сразу искать в синусоидальной форме:

$$I = e^{-\gamma t} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) \quad \text{или} \quad I = B e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta).$$

Две последние формулы эквивалентны. Обе содержат две произвольных константы: A_1 и A_2 — в первом, B и θ — во втором случае. Нетрудно найти формулы, связывающие A_1 и A_2 с B и θ :

$$A_1 = B \cos \theta; \quad A_2 = B \sin \theta.$$

Если затухание мало, о затухающих колебаниях можно говорить, как о гармонических. В этом случае аргумент косинуса ($\omega t - \theta$) называют фазой, а коэффициент $B e^{-\gamma t}$ — амплитудой колебаний.

Если записать уравнение (2.8) для напряжения U_C на конденсаторе, то его решение при начальных условиях $t = 0$, $I = 0$, $U_C = U_0$ имеет вид

$$U_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta). \quad (2.20)$$

Зависимости тока I и напряжения U_C от времени в режиме свободных затухающих колебаний представлены на рис. 2.2.

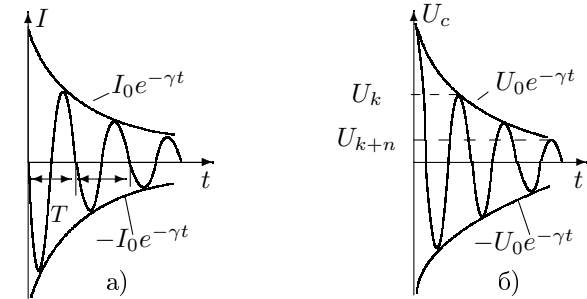


Рис. 2.2. Затухающие колебания ($\gamma < \omega_0$)

Заметим, что при $\gamma \neq 0$ напряжение и ток не являются строго периодическими функциями времени, поскольку $U(t) \neq U(t+T)$. Говорить о

периоде этой функции можно только в том смысле, что она принимает нулевые значения через равные промежутки времени.

Большой практический интерес представляет контур со слабым затуханием ($\gamma \ll \omega_0$). В этом случае $\omega \simeq \omega_0$, период

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (2.21)$$

а временная зависимость $U_C(t)$ может быть представлена в виде

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t. \quad (2.22)$$

В случае $\gamma > \omega_0$ оба корня характеристического уравнения (2.10) являются вещественными: поэтому уравнение (2.16) для тока имеет вид

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh } \kappa t, \quad (2.23)$$

а для напряжения U_C на конденсаторе —

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\kappa} \text{sh } \kappa t + \text{ch } \kappa t \right). \quad (2.24)$$

Графики зависимости тока I и напряжения U_C от времени, соответствующие (2.23) и (2.24), изображены на рис. 2.3. Как видно из графика, процесс не является колебательным. Такой процесс называют аperiодическим.

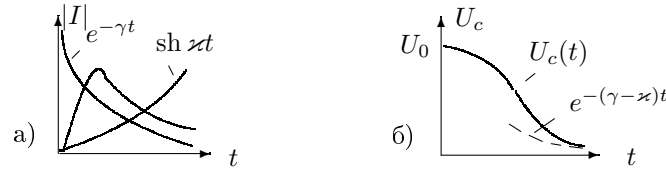


Рис. 2.3. Аperiодический режим ($\gamma > \omega_0$)

Режим, соответствующий условию $\gamma = \omega_0$, называется критическим. При этом κ , а следовательно, и ω равны нулю. Предельный переход при $\omega \rightarrow 0$ даёт

$$I = -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t}; \quad U_C = U_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t). \quad (2.25)$$

Приравнивая ω_0 и γ , из (2.7) найдём

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.26)$$

Формула (2.26) определяет критическое сопротивление контура. Графики зависимости I и U_C от времени для критического режима изображены на рис. 2.4. При $R > R_{\text{кр}}$ процесс имеет аperiодический, а при $R < R_{\text{кр}}$ — колебательный характер.

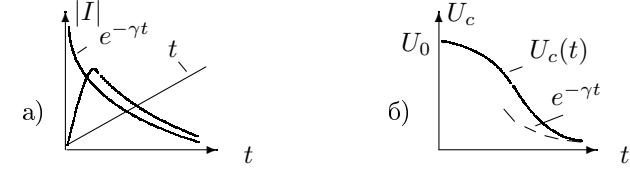


Рис. 2.4. Критический режим ($\gamma = \omega_0$)

В колебательном режиме потери в контуре принято характеризовать добротностью и логарифмическим декрементом затухания. Определим эти понятия. Назовем добротностью величину

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (2.27)$$

где W — запасённая в колебательном контуре энергия, а ΔW — потеря энергии за период. Из уравнения (2.22) найдём

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} e^{-2\gamma t}.$$

Потеря энергии за период равна

$$\Delta W_T = \frac{CU_0^2}{2} (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(t+T)}) = W(1 - e^{-2\gamma T}).$$

Полагая $2\gamma T \ll 1$ (слабое затухание), найдём:

$$\Delta W = \frac{1}{2\pi} \Delta W_T = \frac{\gamma T}{\pi} W.$$

Поэтому добротность

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T} = \frac{W}{\Delta W} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.28)$$

При написании цепочки (2.28) были использованы выражения (2.21) для периода и (2.7) для собственной частоты ω_0 и затухания γ .

Средняя потеря энергии ΔW за время изменения фазы на один радиан в 2π раз меньше, чем ΔW_T . Таким образом, добротность контура Q

показывает, во сколько раз запасённая в контуре энергия превосходит среднюю потерю энергии за время, в течение которого фаза колебаний изменяется на один радиан.

Введём логарифмический декремент затухания Θ — логарифм отношения двух последовательных максимальных отклонений в одну сторону. Из (2.22) имеем

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \quad (2.29)$$

На практике для определения Θ удобно использовать отношение максимальных отклонений, разделённых целым числом периодов n (рис. 2.2). В этом случае формула для определения Θ имеет вид

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}. \quad (2.30)$$

Можно определить физический смысл логарифмического декремента затухания: это величина, обратная числу периодов n_e , за которое амплитуда колебаний падает в e раз.

Сравнивая (2.28) и (2.29), найдём

$$Q = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\Theta}. \quad (2.31)$$

2. Вынужденные колебания. Метод комплексных амплитуд

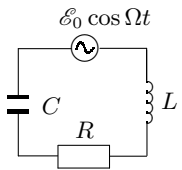


Рис. 2.5.
Последовательный контур с внешней ЭДС

Рассмотрим процессы, протекающие в контуре, подключённом к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t$ (рис. 2.5). Обозначим разность потенциалов на конденсаторе через U_C , а ток, текущий в контуре, через I . Сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС самоиндукции плюс ЭДС источника:

$$RI + U_C = -L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \quad (2.32)$$

Выразим U_C через заряд q на конденсаторе:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \quad (2.33)$$

Учитывая, что $q = \int I dt$, окончательно получим:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \quad (2.34)$$

Решение линейного дифференциального уравнения (2.34) с правой частью состоит из общего решения однородного уравнения (которое уже было получено в предыдущем параграфе) и какого-либо частного решения уравнения с правой частью. Для нахождения этого решения воспользуемся методом комплексных амплитуд. Этот метод основан на следующем утверждении: пусть некоторая комплексная функция является решением линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами и комплексной правой частью; тогда вещественная часть этой функции является решением того же уравнения, в правой части которого стоит вещественная часть прежнего выражения, а мнимая часть — решением уравнения с мнимой правой частью.

Исходя из сказанного, запишем уравнение (2.34) в комплексной форме:

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} + R\hat{I} + \frac{\int \hat{I} dt}{C} = \hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\Omega t}. \quad (2.35)$$

Здесь $\hat{\mathcal{E}}_0$ — комплексная амплитуда внешнего напряжения: $\hat{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi}$ («шляпкой» сверху будем обозначать комплексные величины, а индексом «0» — амплитудные значения).

Если начальная фаза $\varphi = 0$, то $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0$. Правая часть (2.34) является вещественной частью правой части (2.35). Решив уравнение (2.35), мы получим комплексное выражение для тока. Вещественная часть этого решения является, согласно указанному выше утверждению, решением исходного уравнения (2.34).

Будем искать решение уравнения (2.35) в комплексном виде:

$$\hat{I} = \hat{I}_0 e^{i\Omega t}, \quad (2.36)$$

где \hat{I}_0 — комплексная амплитуда тока. Подставляя (2.36) в (2.35) и сокращая на $e^{i\Omega t}$, найдём

$$\hat{I}_0 \left[R + i \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right) \right] = \mathcal{E}_0. \quad (2.37)$$

Величину, стоящую в квадратных скобках, называют импедансом контура и обозначают обычно буквой Z :

$$Z = R + i \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right). \quad (2.38)$$

Импеданс контура не зависит от начальных условий, не содержит ни токов, ни напряжений и определяется только свойствами элементов, соединённых в контур. Импеданс является, таким образом, характеристикой контура. Подстановка (2.38) в (2.37) даёт

$$\mathcal{E}_0 = Z\hat{I}_0. \quad (2.39)$$

Полученное выражение является обобщением закона Ома для переменных токов. Роль сопротивления играет в нём импеданс контура Z .

Выражение для Z содержит действительную часть, называемую обычно активным сопротивлением контура, и мнимую часть, носящую название реактивного сопротивления или реактанса. Импеданс индуктивности равен $i\Omega L$, импеданс ёмкости $1/(i\Omega C)$, импеданс сопротивления — просто R . Правила сложения импедансов при последовательном и параллельном включении элементов те же, что и для обыкновенных сопротивлений.

Равенство (2.39) обладает характерной особенностью: правая его часть содержит произведение двух комплексных величин, а левая является действительной. Легко видеть, что это обстоятельство не носит принципиального характера и является случайным. Возьмём вместо (2.33) несколько более общее выражение для синусоидальной ЭДС

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\Omega t + \varphi). \quad (2.40)$$

Фаза φ определяет начальные условия: в самом деле, при $t = 0$ напряжение не обязательно должно проходить через максимум, как это молчаливо предполагалось при написании (2.33). При переходе к (2.35) в правой части уравнения будет стоять уже не $\mathcal{E}_0 e^{i\Omega t}$, а $\hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\Omega t}$, где $\hat{\mathcal{E}}_0$ является комплексной величиной:

$$\hat{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi}.$$

Связь между током и напряжением в этом случае снова определяется импедансом контура Z , но вместо (2.39) следует писать

$$\hat{\mathcal{E}}_0 = Z\hat{I}_0. \quad (2.41)$$

Уравнение (2.41) имеет вполне общий характер.

Исследуем несколько более подробно свойства импеданса Z . Представим импеданс Z в показательной форме:

$$\left. \begin{aligned} Z &= Z_0 e^{i\psi}; \\ Z_0 &= \sqrt{R^2 + (\Omega L - \frac{1}{\Omega C})^2}; \\ \psi &= \arctg \frac{\Omega L - 1/(\Omega C)}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Разрешим уравнение (2.41) относительно \hat{I}_0 и перейдём от комплексного к действительному выражению для тока. Как было сказано выше, для этого достаточно взять действительную часть \hat{I} :

$$I = \text{Re}(\hat{I}_0 e^{i\Omega t}) = \text{Re} \left(\frac{\hat{\mathcal{E}}_0}{Z_0} e^{i\Omega t} \right) = \text{Re} \left(\frac{\mathcal{E}_0 e^{i\varphi}}{Z_0 e^{i\psi}} e^{i\Omega t} \right) = \frac{\mathcal{E}_0}{Z_0} \cos(\Omega t + \varphi - \psi). \quad (2.43)$$

Сравнивая (2.43) и (2.40), найдём, что ток отстаёт от напряжения по фазе на величину ψ , определяемую отношением мнимой и действительной частей импеданса. Амплитуда колебаний обратно пропорциональна модулю импеданса Z_0 .

Рассмотрим несколько частных случаев.

а. К источнику синусоидального напряжения подключено только чисто активное сопротивление R . В этом случае из формул (2.42) следует, что $\psi = 0$. Ток в активном сопротивлении совпадает по фазе с напряжением на нём.

б. К источнику подключена только ёмкость C (конденсатор без потерь). При этом $\psi = -\pi/2$. Ток опережает напряжение по фазе на $\pi/2$.

в. К источнику подключена только катушка самоиндукции с индуктивностью L , активное сопротивление которой $R_L = 0$. При этом $\psi = \pi/2$. Ток в цепи отстаёт по фазе от напряжения на $\pi/2$.

г. В общем случае, когда к источнику последовательно подключены резистор, конденсатор и катушка самоиндукции, сдвиг фазы между током и входным напряжением лежит в пределах: $-\pi/2 < \psi < +\pi/2$.

Импедансы реальных конденсаторов и катушек самоиндукции содержат кроме мнимой также и действительную часть. Действительная часть импеданса определяется необратимыми потерями энергии, которые могут быть связаны как с омическим сопротивлением проводников, так и с другими причинами: с утечками и диэлектрическими потерями в конденсаторах, с петлёй гистерезиса и токами Фуко в ферромагнитных сердечниках катушек самоиндукции. Особенно велика бывает обычно действительная часть импеданса у катушек самоиндукции.

Потери в конденсаторах и в катушках зависят как от частоты, так и от амплитуды проходящего через них тока. Поэтому, приводя величину эквивалентного сопротивления потерь (действительной части импеданса) в этих элементах, следует указывать частоту и амплитуду тока, при которых проведены измерения.

Решения, полученные методом комплексных амплитуд, допускают простую геометрическую интерпретацию. Комплексное число $Z = Z_0 e^{i\psi}$ представляется в комплексной плоскости вектором, длина которого равна Z_0 . Угол, составляемый вектором с вещественной осью, ра-

вен ψ . Комплексное напряжение $\mathcal{E}_0 e^{i\Omega t}$ или комплексный ток $I_0 e^{i(\Omega t - \psi)}$ представляются поэтому векторами, вращающимися с угловой скоростью Ω .

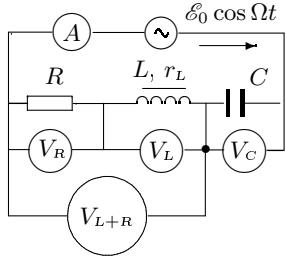


Рис. 2.6. Последовательный контур

напряжения $\mathcal{E}_0 \cos \Omega t$ последовательно подключены резистор R , катушка индуктивности L , действительная часть импеданса которой равна r_L , и ёмкость C . Четыре вольтметра измеряют напряжения на элементах цепи, амперметр измеряет ток.

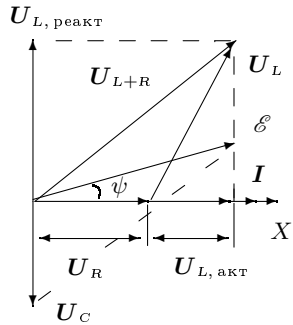


Рис. 2.7. Векторная диаграмма (последовательный контур)

Поскольку во всех элементах цепи течёт один и тот же ток I , удобно положить его фазу равной нулю и отсчитывать от неё фазы напряжений на всех элементах цепи. Отложим вектор I вдоль оси абсцисс (рис. 2.7). Напряжение на резисторе совпадает по фазе с током, поэтому вектор U_R также будет направлен вдоль оси абсцисс. Напряжение на конденсаторе (без потерь) отстает по фазе от тока на угол $\psi = \pi/2$, поэтому вектор напряжения U_C направлен вдоль отрицательной оси. Векторное равенство напряжений $U_{L+R} = U_L + U_R$ позволяет построить треугольник по трём сторонам. Сделаем две насечки: первую — радиусом, равным модулю вектора U_{L+R} , из начала вектора U_R (начала координат); вторую — радиусом, равным модулю вектора U_L , из конца вектора U_R . Точка пересечения насечек определяет положение векторов U_{L+R} и U_L на диаграмме. Сложив векторы U_{L+R} и U_C , получим вектор входного напряжения на контуре. Угол ψ показывает, каков сдвиг фаз между током и напряжением в цепи.

Удобно перейти к системе координат, которая сама вращается с угловой скоростью Ω . В этой системе векторы \mathcal{E} и I будут неподвижны. Длины векторов пропорциональны амплитудным значениям напряжения и тока. Вектор I повернут относительно \mathcal{E} на угол, равный сдвигу фаз между ними. Такие диаграммы называются векторными.

Построим векторную диаграмму напряжений для контура, изображённого на рис. 2.6. К источнику переменного на-

Разложим теперь вектор U_L по осям координат. Проекция U_L на ось абсцисс позволяет определить $U_{L, \text{акт}}$ — напряжение на активной части импеданса катушки, а проекция на ось ординат даёт реактивную часть $U_{L, \text{реакт}}$. Поделив эти напряжения на ток I , найдём действительную часть импеданса катушки r_L и мнимую ΩL .

3. Вынужденные колебания. Резонанс

Снова рассмотрим процессы, протекающие в последовательном контуре (рис. 2.5), подсоединённом к внешней ЭДС.

Продифференцируем уравнение (2.34) по времени:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = -\mathcal{E}_0 \Omega \sin \Omega t.$$

Разделим обе части уравнения на L и воспользуемся обозначениями (2.7):

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = -\mathcal{E}_0 \frac{\Omega}{L} \sin \Omega t. \quad (2.44)$$

Для нахождения решения этого уравнения воспользуемся методом комплексных амплитуд. Заменим $\sin \Omega t$ в правой части уравнения (2.44) на $e^{i\Omega t}$. Вместо уравнения (2.44) мы получим уравнение в комплексной форме:

$$\ddot{\hat{I}} + 2\gamma \dot{\hat{I}} + \omega_0^2 \hat{I} = -\mathcal{E}_0 \frac{\Omega}{L} e^{i\Omega t}. \quad (2.45)$$

Напомним, что общее решение уравнения (2.45) складывается из решения I_1 однородного уравнения, правая часть которого равна нулю, и любого частного решения I_2 неоднородного уравнения.

Будем искать частное решение (2.45) в комплексном виде:

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_0 e^{i\Omega t}, \quad (2.46)$$

где \hat{I}_0 — комплексная амплитуда тока. Подставляя (2.46) в (2.45) и сокращая на $e^{i\Omega t}$, получим

$$\hat{I}_0 = \frac{\mathcal{E}_0 \frac{\Omega}{L}}{\Omega^2 - \omega_0^2 - 2i\gamma\Omega}. \quad (2.47)$$

Представим знаменатель этого уравнения в показательной форме:

$$\Omega^2 - \omega_0^2 - 2i\gamma\Omega = \rho_0 e^{i\psi}. \quad (2.48)$$

Легко видеть, что модуль этого выражения равен

$$\rho_0 = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}, \quad (2.49)$$

а фаза ψ определяется формулой

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Подставляя (2.47) и (2.48) в (2.46), найдём

$$\hat{I}_2 = \frac{\mathcal{E}_0\Omega}{L\rho_0} e^{i(\Omega t - \psi)},$$

и, следовательно,

$$I_2 = \operatorname{Im} \hat{I}_2 = \frac{\mathcal{E}_0\Omega}{L\rho_0} \sin(\Omega t - \psi). \quad (2.50)$$

Решение I_1 однородного уравнения (уравнения (2.45) с нулевой правой частью) при $\gamma < \omega_0$ можно записать (см. (2.20)) в виде

$$I_1 = Be^{-\gamma t} \sin(\omega t - \theta). \quad (2.51)$$

Общее решение (2.45) является суммой I_1 и I_2 . С помощью (2.50) и (2.51) получаем

$$I = Be^{-\gamma t} \sin(\omega t - \theta) + \frac{\mathcal{E}_0\Omega}{L\rho_0} \sin(\Omega t - \psi). \quad (2.52)$$

Это решение содержит две произвольные постоянные — B и θ , которые определяются из начальных условий.

Формула (2.52) показывает, что при подключении контура к синусоидальной ЭДС в нём возникают колебания двух частот: собственные с частотой ω и вынужденные с частотой внешнего источника Ω . Амплитуда собственных колебаний $Be^{-\gamma t}$ зависит от начальных условий и постепенно затухает. Со временем она становится пренебрежимо малой, и в контуре остаются только вынужденные колебания, амплитуда которых не зависит от времени и, в существенной мере, определяется отношением Ω/ω_0 . Действительно, амплитуда вынужденных колебаний равна

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0\Omega}{L\rho_0} = \frac{\mathcal{E}_0\Omega/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0/(2\gamma L)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{2\gamma}\right)^2}}. \quad (2.53)$$

При совпадении частоты Ω внешнего источника с собственной частотой контура ω_0 возникает резонанс. Амплитуда вынужденных колебаний $I_{0, \text{рез}}$ в резонансе достигает своего максимального значения:

$$I_{0, \text{рез}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2\gamma L} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}. \quad (2.54)$$

График зависимости амплитуды установившихся колебаний I_0 от частоты внешнего напряжения Ω носит название резонансной кривой. Из (2.53), (2.54) имеем

$$\frac{I_0}{I_{0, \text{рез}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (2.55)$$

Уравнение (2.55) определяет форму резонансной кривой. Ширина этой кривой (рис. 2.8) зависит от добротности контура. При $Q \gg 1$ резонансный максимум оказывается узким, а в области резонанса, где

$$\frac{\Delta\Omega}{\omega_0} \equiv \frac{|\Omega - \omega_0|}{\omega_0} \ll 1,$$

формула (2.55) принимает более простой вид:

$$\frac{I_0}{I_{0, \text{рез}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta\Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (2.56)$$

Чаще всего форму резонансной кривой характеризуют шириной $2\Delta\Omega$, измеренной на уровне $I_{0, \text{рез}}/\sqrt{2}$. Подставляя в (2.56) величину

$$\frac{I_0}{I_{0, \text{рез}}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

найдем, что ширина кривой и добротность контура связаны соотношением

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega}. \quad (2.57)$$

Рассмотрим теперь вынужденные колебания в параллельном контуре, одна из ветвей которого содержит индуктивность L , а другая — ёмкость C (рис. 2.9). Такой контур широко используется в радиотехнике — например, в качестве нагрузки широкополосного усилителя.

Обозначим через r_L активное сопротивление катушки. Активным сопротивлением ёмкостной ветви контура обычно можно пренебречь.

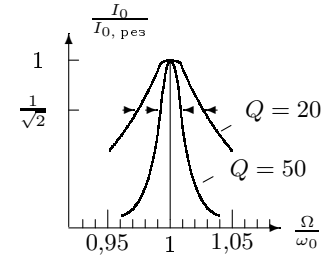


Рис. 2.8. Резонансные кривые

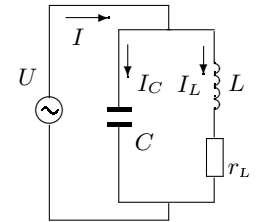


Рис. 2.9. Параллельный контур

Рассмотрим установившиеся колебания в контуре, когда напряжение на нём меняется по гармоническому закону: $U_C = U_0 \cos \Omega t$.

Введём обозначения для комплексных сопротивлений (импедансов) индуктивной и ёмкостной ветвей контура:

$$Z_L = r_L + i\Omega L \quad \text{и} \quad Z_C = \frac{1}{i\Omega C}.$$

Тогда полный импеданс контура может быть найден по правилу сложения параллельных сопротивлений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{r_L + i\Omega L} + i\Omega C = \\ &= \frac{1 - \Omega^2 LC + ir_L \Omega C}{r_L + i\Omega L} = \frac{1 - (\Omega/\omega_0)^2 + ir_L \Omega C}{r_L + i\Omega L}, \end{aligned}$$

где ω_0 — собственная частота колебательного контура ($\omega_0^2 = 1/(LC)$).

В резонансе, когда частота внешней вынуждающей силы совпадает с собственной частотой ($\Omega = \omega_0$),

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{r_L C} - i \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{L}{Cr_L} \left(1 - i \frac{r_L}{\omega_0 L} \right).$$

Сопротивление контура равно модулю импеданса Z :

$$R_{\text{рез}} = Z_{0,\text{рез}} = \frac{L}{Cr_L} \sqrt{1 + \left(\frac{r_L}{\omega_0 L} \right)^2}.$$

Сдвиг фаз между полным током в цепи и напряжением определяется отношением мнимой части импеданса к действительной:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r_L}{\omega_0 L}.$$

В случае, когда активная часть импеданса индуктивной ветви много меньше реактивной ($r_L \ll \omega_0 L$),

$$R_{\text{рез}} = \frac{L}{Cr_L}. \quad (2.58)$$

Реактивные сопротивления обеих ветвей контура при резонансе равны, поэтому, введя обозначение

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.59)$$

можно записать:

$$R_{\text{рез}} = \frac{\omega_0^2 L^2}{r_L} = \frac{1}{r_L \omega_0^2 C^2} = \frac{\rho^2}{r_L}. \quad (2.60)$$

Реактивное сопротивление ρ — одна из характеристик резонансного контура, не зависящая от частоты внешнего источника.

Учитывая, что добротность контура Q может быть выражена через активное и реактивное сопротивления:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r_L} = \frac{1}{r_L \omega_0 C} = \frac{\rho}{r_L}, \quad (2.61)$$

получим ещё одну удобную для расчётов резонансного сопротивления формулу:

$$R_{\text{рез}} = Q \cdot \rho. \quad (2.62)$$

При резонансе значения токов в ветвях контура $I_{L,\text{рез}}$, $I_{C,\text{рез}}$ и полного тока в контуре $I_{\text{рез}}$ связаны с напряжением на контуре простыми соотношениями:

$$I_{L,\text{рез}} = \frac{U_0}{\omega_0 L} = \frac{U_0}{\rho}; \quad (2.63)$$

$$I_{C,\text{рез}} = U_0 \omega_0 C = \frac{U_0}{\rho}; \quad (2.64)$$

$$I_{\text{рез}} = \frac{U_0}{Q\rho}. \quad (2.65)$$

Из этих выражений видно, что при резонансе токи в индуктивной и ёмкостной ветвях контура одинаковы и в Q раз больше тока в общей цепи:

$$Q = \frac{I_{C,\text{рез}}}{I_{\text{рез}}} = \frac{I_{L,\text{рез}}}{I_{\text{рез}}}. \quad (2.66)$$

Параллельный колебательный контур часто используется в качестве нагрузочного сопротивления в цепи с постоянной амплитудой тока. Найдём уравнение резонансной кривой для напряжения на таком контуре. Импеданс параллельного контура

$$Z = \frac{r_L + i\Omega L}{1 - (\Omega/\omega_0)^2 + ir_L \Omega C}.$$

В случае, когда $\Omega \gg r_L/L$, сопротивление контура

$$Z_0 = \frac{\Omega L}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_0)^2]^2 + (r_L \Omega C)^2}}.$$

Используем это выражение для выявления частотных свойств параллельного контура, используемого в качестве нагрузочного сопротивления. Если амплитуда общего тока I_0 , протекающего через колебательный контур (рис. 2.9), поддерживается постоянной (например, анодный ток в случае электронной лампы), то амплитуда напряжения на контуре пропорциональна сопротивлению контура:

$$U_0 = I_0 Z_0 = \frac{I_0 \Omega L}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_0)^2]^2 + (r_L \Omega C)^2}}.$$

Отсюда амплитуда напряжения при резонансе ($\Omega = \omega_0$)

$$U_{0,p} = I_0 \frac{L}{r_L C}.$$

Уравнение резонансной кривой напряжения на контуре будет иметь вид

$$\frac{U_0(\Omega)}{U_{0,p}} = \frac{r_L \Omega C}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_0)^2]^2 + (r_L \Omega C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2}}. \quad (2.67)$$

Полученное уравнение резонансной кривой для напряжения на параллельном контуре полностью совпадает с уравнением резонансной кривой для тока в последовательном контуре (2.55). Подчеркнём, что это имеет место при двух условиях: 1) амплитуда общего тока через параллельный контур не зависит от частоты генератора; 2) частота $\Omega \gg r_L/L$.

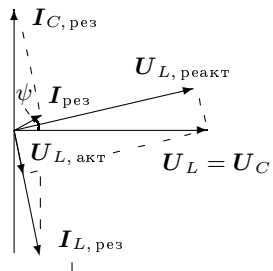


Рис. 2.10. Векторная диаграмма для параллельного контура

Векторная диаграмма для резонанса токов показана на рис. 2.10. По горизонтали отложено общее напряжение $U_L = U_C$.

Ток через ёмкость, опережающий напряжение на $\pi/2$, отложен вертикально вверх (конденсатор без потерь). Три вектора тока I_L , I_C и полный ток I образуют треугольник. Для его построения сделаем две насечки: первую — радиусом $|I|$, — из начала вектора I_C (из начала координат), вторую — радиусом $|I_L|$ — из конца

вектора I_C . Точка пересечения насечек определяет положение векторов I и I_L на диаграмме. В контуре с хорошей добротностью вектор I практически горизонтален, а I_L и I_C практически равны.

Перпендикуляр, опущенный из конца вектора U_L на вектор тока I_L , определяет $U_{L, \text{акт}}$ — активную часть напряжения на катушке. Активная $U_{L, \text{акт}}$ и реактивная $U_{L, \text{реакт}}$ составляющие напряжения на катушке взаимно перпендикулярны и в сумме равны U_L — полному напряжению на катушке. Поделив $U_{L, \text{акт}}$ и $U_{L, \text{реакт}}$ на ток в катушке, определим r_L — активную и ΩL — реактивную части импеданса катушки.

При $r_L \rightarrow 0$ сопротивление контура при резонансе $R_{\text{рез}} \rightarrow \infty$, как это следует из формулы (2.58). В этом случае ток в общей цепи $I_{\text{рез}} \rightarrow 0$, хотя каждый из токов $I_{L, \text{рез}}$ и $I_{C, \text{рез}}$ может иметь большую величину.

Можно, не пренебрегая величиной r_L по сравнению с $\omega_0 L$, выразить сопротивление контура и сдвиг фаз при резонансе через добротность:

$$R_{\text{рез}} = Z_{0,\text{рез}} = \frac{L}{Cr_L} \sqrt{1 + \left(\frac{r_L}{\omega_0 L} \right)^2} = \frac{L}{Cr_L} \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}; \quad (2.68)$$

$$\tan \varphi = \frac{r_L}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}. \quad (2.69)$$

Отсюда следует, что в параллельном контуре при резонансе ($\Omega = \omega_0$) условие минимума полного тока в цепи и условие отсутствия сдвига фаз между полным током и напряжением на контуре совпадают только для контура с хорошей добротностью ($Q \gg 1$).

Условия резонанса токов в параллельном контуре и резонанса напряжений в последовательном контуре совпадают: $\Omega = \omega_0$, но если в последовательном контуре резонансное сопротивление контура всегда равно чисто активному сопротивлению цепи и минимально (максимум тока), то в параллельном контуре $R_{\text{рез}}$ обратно пропорционально r_L и максимально (минимум полного тока). Сдвиг фаз при резонансе напряжений всегда отсутствует, а при резонансе токов он близок к нулю только, если $Q \gg 1$. Впрочем, как правило, о резонансе и добротности говорят только тогда, когда добротность контура достаточно велика.

4. Процесс установления колебаний

Рассмотрим процесс установления колебаний в контуре с высокой добротностью вблизи резонанса. Этот процесс описывается формулой (2.52). При начальных условиях ($U = 0$, $\dot{U} = 0$) формула (2.52) в области $|\Omega - \omega_0| \ll \omega_0$ приобретает вид

$$U = U_0 [\cos(\Omega t - \psi) - e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t - \psi)], \quad (2.70)$$

где через U_0 обозначена амплитуда вынужденных колебаний.

Действительно, подстановка начальных условий в уравнение (2.52) приводит к системе двух уравнений относительно B и θ :

$$B \cos \theta + U_0 \cos \psi = 0;$$

$$B\gamma \cos \theta - B\omega \sin \theta - U_0\Omega \sin \psi = 0.$$

Решение этой системы при стремлении Ω к ω_0 имеет вид

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} \theta = \psi; \quad \lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} B = -U_0.$$

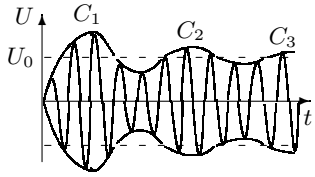


Рис. 2.11. Биения ($\Omega \simeq \omega_0$)

Как видно из (2.70), напряжение U содержит два близких по частоте колебания, между которыми происходят биения. Появление биений связано с тем, что разность фаз этих колебаний медленно меняется; при нулевой разности фаз они вычитаются друг из друга, а при расхождении фаз на π — складываются. Время, необходимое для изменения разности фаз на π , равно

$$t_1 = \frac{\pi}{|\Omega - \omega_0|}.$$

На рисунке 2.11 представлена форма колебаний в том случае, когда Ω и ω_0 мало отличаются друг от друга. При установлении колебаний их амплитуда то растёт, то падает, испытывая биения. Точки максимальных амплитуд C_1 , C_2 , C_3 и т. д. постепенно понижаются. Лишь когда экспонента $e^{-\gamma t}$ достаточно затухнет, биения прекратятся, и колебания станут синусоидальными.

При очень близких частотах Ω и ω_0 биения не возникают, так как за время t_1 (а это время становится очень большим) собственные колебания успевают затухнуть. Это происходит при условии

$$t_1\gamma = \frac{\gamma\pi}{|\Omega - \omega_0|} \gg 1. \quad (2.71)$$

Преобразуя это выражение с помощью (2.28), найдём

$$\Delta\Omega \ll \frac{\omega}{Q}$$

— отклонение от резонансной частоты много меньше ширины резонансной кривой. При выполнении этого условия нет смысла различать Ω и ω_0 , и формула (2.70) становится особенно простой:

$$U = U_0 (1 - e^{-\gamma t}) \cos(\omega_0 t - \psi). \quad (2.72)$$

Амплитуда колебаний в этом случае возрастает (рис. 2.12), экспоненциально приближаясь к U_0 . По форме огибающей нетрудно определить логарифмический декремент затухания Θ . Рассмотрим два момента времени t_1 и t_2 , отстоящих друг от друга на n периодов. Амплитуды колебаний $U_k(t_1)$ и $U_{k+n}(t_2)$ равны соответственно

$$U_k = U_0 (1 - e^{-\gamma t_1}); \quad U_{k+n} = U_0 (1 - e^{-\gamma(t_1 + nT)}).$$

Из этих равенств найдём

$$\Theta = \gamma T = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}. \quad (2.73)$$

В заключение напомним об основной характеристике электрического контура — добротности. Энергетический смысл добротности — отношение запасённой в контуре энергии W к потерям за период ΔW_T , умноженное на 2π (см. 2.28):

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T}.$$

Запасённая энергия сосредоточена в реактивных элементах — индуктивности L и ёмкости C , а потери связывают с протеканием тока по диссипативному элементу — резистору R , при этом добротность, выраженная через отношение сопротивлений, равна (см. (2.28))

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротность контура можно выразить через коэффициент затухания γ или через логарифмический декремент затухания Θ :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\Theta} = \pi n_e, \quad (2.74)$$

где n_e — число колебаний, которое совершит колебательный контур, прежде чем амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

Добротность последовательного контура (рис. 2.8) может быть найдена по измеренным значениям напряжений $U_{C, \text{рез}}$ на конденсаторе и \mathcal{E}_0 на входе контура при резонансе (см. (2.54)):

$$Q = \frac{U_{C, \text{рез}}}{\mathcal{E}_0},$$

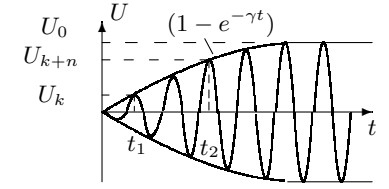


Рис. 2.12. Нарастание колебаний ($\Omega = \omega_0$)

а для параллельного контура (рис. 2.9) добротность — это отношение токов (см. (2.66)):

$$Q = \frac{I_{C, \text{рез}}}{I_{\text{рез}}},$$

где $I_{C, \text{рез}}$ — ток через конденсатор, а $I_{\text{рез}}$ — общий ток при резонансе. И, наконец, добротность характеризует резонансные свойства линейного колебательного контура: она численно равна величине, обратной относительной ширине резонансной кривой (рис. 2.8) на уровне 0,7 (см. (2.57)):

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega}.$$

Можно также рассчитать добротность как величину, обратную относительной ширине кривой, выражающей зависимость сдвига фаз ψ между током и напряжением в последовательном контуре от частоты: $\psi = f(\frac{\Omega}{\omega_0})$. Ширину следует измерять там, где сдвиг фаз $\psi = \pi/4$. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 122–124, 126, 127, 129, 130.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 221, 222, 210.
3. Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. Т. 1. — М.: Физматлит, 2001. §§ 8.1–8.3.

Работа 3.2.1

Сдвиг фаз в цепи переменного тока

Цель работы: изучить влияние активного сопротивления, индуктивности и ёмкости на сдвиг фаз между током и напряжением в цепи переменного тока.

В работе используются: генератор звуковой частоты (ЗГ), двухканальный осциллограф (ЭО), магазин ёмкостей, магазин сопротивлений, катушка индуктивности, резисторы, мост переменного тока.

Удобным, хотя и не очень точным прибором для измерения фазовых соотношений служит электронный осциллограф. Пусть нужно измерить сдвиг фаз между двумя напряжениями U_1 и U_2 . Подадим эти

напряжения на горизонтальную и вертикальную развёртки осциллографа. Смещение луча по горизонтали и вертикали определяется выражениями

$$x = x_0 \cos \Omega t, \quad y = y_0 \cos(\Omega t + \alpha),$$

где α — сдвиг фаз между напряжениями U_1 и U_2 , а x_0 и y_0 — амплитуды напряжений, умноженные на коэффициенты усиления соответствующих каналов осциллографа. Исключив время, после несложных преобразований найдём:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \alpha = \sin^2 \alpha.$$

Полученное выражение определяет эллипс, описываемый электронным лучом на экране осциллографа (рис. 1). Ориентация эллипса зависит как от искомого угла α , так и от усиления каналов осциллографа. Для расчёта сдвига фаз можно измерить отрезки $2y_{x=0}$ и $2y_0$ (или $2x_{y=0}$ и $2x_0$, на рисунке не указанные) и, подставляя эти значения в уравнение эллипса, найти

$$\alpha = \pm \arcsin \left(\frac{y_{x=0}}{y_0} \right).$$

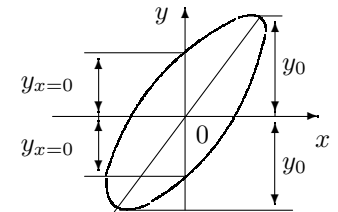


Рис. 1. Эллипс на экране осциллографа

Для правильного измерения отрезка $2y_{x=0}$ важно, чтобы центр эллипса лежал на оси y .

На практике часто используются устройства, позволяющие в широких пределах изменять фазу напряжения ($0 < \psi < \pi$). Такие устройства называются **фазовращателями**. Схема простого фазовращателя приведена на рис. 2. Она включает в себя два одинаковых резистора R_1 , ёмкость C и переменное сопротивление R .

Используя метод комплексных амплитуд, найдём зависимость сдвига фаз между входным напряжением $U_{\text{вх}} = U_0 \cos \Omega t$ и выходным $U_{\text{вых}}$ от соотношения между импедансами сопротивления R и ёмкости C . Для этого выразим выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ через $U_{\text{вх}}$, параметры контура и частоту внешнего источника Ω : $U_{34} = f(U_{12}, R, C, \Omega)$.

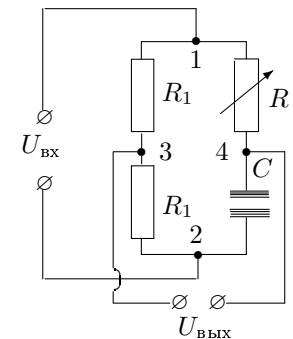


Рис. 2. Принципиальная схема фазовращателя

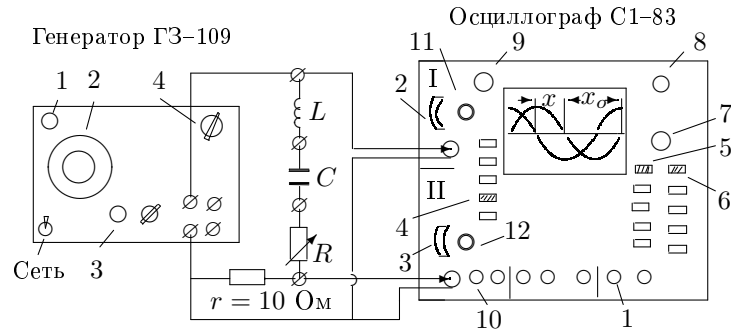


Рис. 3. Схема установки для исследования сдвига фаз между током и напряжением

Обозначим комплексную амплитуду входного напряжения через \hat{U}_0 . Тогда напряжение между точками 1 и 3 в силу равенства сопротивлений R_1

$$\hat{U}_{13} = \frac{\hat{U}_0}{2}.$$

Если фазу напряжения $\hat{U}_{\text{вх}}$ положить равной нулю, то \hat{U}_0 будет действительной величиной: $\hat{U}_0 = U_0$. Приняв напряжение в точке 1 равным нулю, получим амплитуду напряжения в точке 3:

$$\hat{U}_{03} = \frac{U_0}{2}.$$

Рассчитаем \hat{U}_{04} — амплитуду напряжения в точке 4. Импеданс Z последовательно соединённых сопротивления R и ёмкости C равен

$$Z = R - \frac{i}{\Omega C}.$$

Для комплексной амплитуды тока \hat{I}_0 , проходящего через R и C , имеем

$$\hat{I}_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R - i/(\Omega C)},$$

а для комплексной амплитуды напряжения в точке 4 —

$$\hat{U}_{04} = \hat{I}_0 R = U_0 \frac{R}{R - i/(\Omega C)}.$$

Выходное напряжение $\hat{U}_{\text{вых}}$ равно разности напряжений в точках 3 и 4:

$$\hat{U}_{\text{вых}} = \hat{U}_{04} - \hat{U}_{03} = \hat{U}_{04} - U_0/2 = \frac{U_0}{2} \frac{R + i/(\Omega C)}{R - i/(\Omega C)}.$$

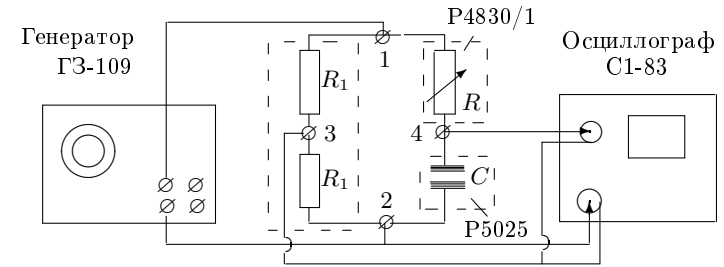


Рис. 4. Схема установки для исследования фазовращателя

В числитель и знаменатель последнего выражения входят комплексно-сопряжённые величины, модули которых одинаковы, поэтому величина выходного напряжения не меняется при изменении R . Модуль $U_{\text{вых}}$ всегда равен $U_0/2$ — половине $U_{\text{вх}}$. Сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями равен $2 \arctg[1/(\Omega RC)]$ и меняется от π (при $R \rightarrow 0$) до 0 (при $R \rightarrow \infty$).

Экспериментальная установка. Схема для исследования сдвига фаз между током и напряжением в цепи переменного тока представлена на рис. 3. Эталонная катушка L , магазин ёмкостей C и магазин сопротивлений R соединены последовательно и через дополнительное сопротивление r подключены к источнику синусоидального напряжения — звуковому генератору ГЗ-109.

Сигнал, пропорциональный току, снимается с сопротивления r , пропорциональный напряжению — с генератора. Оба сигнала подаются на универсальный осциллограф С1-83. Этот осциллограф имеет два канала вертикального отклонения, что позволяет одновременно наблюдать на экране два сигнала. В нашей работе это две синусоиды, смещённые друг относительно друга в зависимости от сдвига фаз между током и напряжением в цепи. На рис. 3 синусоиды на экране ЭО сдвинуты по фазе на $\pi/2$.

Схема фазовращателя, изображённая на рис. 4, содержит два одинаковых резистора R_1 , смонтированных на отдельной плате, магазин сопротивлений R и магазин ёмкостей C .

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимости сдвига фаз между током и напряжением от сопротивления в RC - и в RL -цепи; определить добротность колебательного контура, сняв зависимость сдвига фаз от частоты вблизи резонанса; оценить диапазон работы фазовращателя.

I. Знакомство с работой двухканального осциллографа С1-83

1. Соберите схему, изображённую на рис. 3. Установите на катушке индуктивности максимальное значение $L = 50$ мГн. Для катушки со значением $L = 500$ мГн рекомендации смотрите на её корпусе.

Для подключения магазина ёмкостей используйте клеммы «1» и «2'». В этом случае верхним рядом курбелей (ручек) можно менять ёмкость в интервале $0 \div 1$ мкФ. Показания курбелей суммируются. Установите значение $C = 0,5$ мкФ.

Для подключения магазина сопротивлений используйте клеммы 1 и 3. При этом работают все декады. Установите $R = 0$.

С помощью множителя частоты 1 и лимба 2 генератора установите рабочую частоту $\nu = 1$ кГц; переключатель 4 — нагрузка генератора — поставьте в положение 5 Ом (для $L = 500$ мГн нагрузка 600 Ом). Включите генератор. Потенциометр 3 позволяет менять величину выходного напряжения.

Включите осциллограф выдвижением на себя ручки 1. Переключатели 2 и 3 режимов работы входов усилителя поставьте в нижнее положение («~»). При этом исследуемый сигнал поступает на вход усилителя через разделительную ёмкость.

Нажмите на кнопку 4 («→») — переключатель режима работы усилителей, при котором на экране ЭО видны сигналы, поступающие на оба канала. При нажатии на кнопку «I» на экране виден только сигнал канала I, при нажатии на кнопку «II; $x - y$ » — только сигнал канала II.

В блоке «синхронизация» нажмите кнопку 5 (режим внутренней синхронизации по сигналу канала I) и кнопку 6 («+») — полярность синхронизирующего сигнала.

С помощью ручек 7 (внутренняя — плавная, внешняя — дискретная) переключателя «ВРЕМЯ/ДЕЛ» выберите частоту развёртки, при которой на экране укладывается немного больше одного периода синусоиды. Потенциометр 8 позволяет перемещать сигнал по горизонтали. При выдвижении на себя ручки 8 скорость развёртки сигнала увеличивается в 5 раз.

2. Переведите переключатель 2 в положение «⊥». При этом вход усилителя подключается к корпусу, и на экране появляется горизонтальная линия, соответствующая нулевой линии канала I. С помощью потенциометра 9 («↑») совместите линию с осью x экрана. Переведите переключатель 2 в исходное положение. Аналогичную операцию проделайте с каналом II. В этом случае используется потенциометр 10. С потенциометрами 9 и 10 совмещены переключатели изменения усиления кана-

лов. При выдвижении на себя переключателя коэффициент усиления возрастает в 10 раз.

Величину сигнала на экране можно регулировать как регулятором 3 выходной мощности генератора, так и регуляторами 11 и 12 коэффициента усиления каналов. Внешний регулятор осуществляет дискретное переключение, внутренний — плавное. Установите амплитуды обоих сигналов примерно одинаковыми.

3. Измерение сдвига фаз удобно проводить следующим образом:

- 1) подобрать частоту развёртки, при которой на экране осциллографа укладывается чуть больше половины периода синусоиды;
- 2) отцентрировать горизонтальную ось (см. п. 2);
- 3) измерить расстояние x_0 (рис. 3) между нулевыми значениями одного из сигналов, что соответствует смещению по фазе на π ;
- 4) измерить расстояние x между нулевыми значениями двух синусоид и пересчитать в сдвиг по фазе: $\psi = \pi \cdot x / x_0$.

II. Исследование зависимости сдвига фаз между током и напряжением от R в RC -цепи

4. В схеме, собранной согласно рис. 3, закоротите катушку, подключив оба провода, идущих к катушке, на одну клемму. Установите $C = 0,5$ мкФ, $\nu = 1$ кГц и рассчитайте реактивное сопротивление цепи $X_1 = 1/(\Omega C)$. Циклическая частота $\Omega = 2\pi\nu$.

5. Увеличивая сопротивление R от нуля до $10 \cdot Z_1$, проведите измерения сдвига фаз ψ (см. п. 3). Предварительно выберите шаги ΔR , для которых приращения x будут примерно одинаковы. Периодически проверяйте положение нулевой линии синусоиды.

III. Исследование зависимости сдвига фаз от R в RL -цепи

6. В схеме, собранной согласно рис. 3, закоротите магазин ёмкостей. Установите $L = 50$ мГн, $\nu = 1$ кГц (для катушки со значением $L = 500$ мГн рекомендации смотрите на её корпусе). Рассчитайте реактивное сопротивление цепи $X_2 = \Omega L$.

7. Меняя сопротивление от 0 до $10 \cdot Z_2$, проведите измерения сдвига фаз ψ для $6 \div 8$ значений R (см. п. 5).

IV. Исследование зависимости сдвига фаз от частоты в RCL -цепи

8. В цепи, собранной согласно рис. 3, установите значения $C = 0,5$ мкФ, $L = 50$ мГн ($C = 0,05$ мкФ для $L = 500$ мГн), $R = 0$. Рассчитайте резонансную частоту $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$.

9. Подбирая частоту 3Г, добейтесь резонанса. При резонансе сдвиг фаз $\psi = 0$ и нулевые значения двух синусоид должны совместиться, а при равенстве амплитуд синусоиды полностью совпадают.

10. Меняя частоту **в обе стороны** от резонансного значения, снимите зависимость сдвига фаз от частоты. С изменением частоты меняется расстояние x_0 , которое занимает половина периода синусоиды, поэтому разумно каждый раз фиксировать отношение x/x_0 . Вблизи резонанса ($|\psi| < \pi/3$) точки должны лежать почтаще.

11. Повторите измерения п. 10 для сопротивления $R = 100$ Ом.

12. Запишите значение R_L — активное сопротивление катушки, указанное на её крышке. Проверьте значения L и R_L с помощью моста Е7-8.

V. Исследование работы фазовращателя

13. Соберите схему по рис. 4. Убедитесь, что выход 3Г не заземлён. Установите $C = 0,5$ мкФ, $\nu = 1$ кГц. Оцените визуально диапазон изменения сдвига фаз при изменении R от 0 до 10 кОм.

VI. Обработка результатов

14. По результатам измерений сдвига фаз в RC -цепи постройте график: $\lg \psi = f[1/(\Omega CR_\Sigma)]$. Здесь R_Σ — суммарное активное сопротивление цепи: $R_\Sigma = R + r$; $r = 10$ Ом — сопротивление резистора. Постройте теоретический график на этом же листе.

15. Постройте график $\lg \psi = f(\Omega L/R_\Sigma)$ для RL -цепи. Здесь $R_\Sigma = R + r + R_L$. Сравните график с теоретическим.

16. Постройте на одном листе графики $|\psi| = f(\nu/\nu_0)$ для $R = 0$ и 100 Ом (величину ψ удобно откладывать в долях π).

Определите по графикам добротность контура: $Q = \nu_0/(2\Delta\nu)$, где $2\Delta\nu/\nu_0$ — ширина графика при сдвиге фаз $\psi = \pi/4$.

17. Сравните добротность, определённую графически, с расчётом через параметры L , C и R (см. (2.28)).

18. Постройте векторную диаграмму для фазовращателя.

Контрольные вопросы

1. Что называется импедансом электрической цепи?
2. Как складываются импедансы при последовательном и параллельном соединении элементов электрической цепи?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 129, 130.
2. Калашиников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 220, 227, 228.

Работа 3.2.2

Резонанс напряжений

Цель работы: изучение последовательной цепи переменного тока, наблюдение резонанса напряжений.

В работе используются: регулировочный автотрансформатор, катушка индуктивности с выдвижным сердечником, магазин ёмкостей, реостат, резистор, амперметр, три вольтметра, ваттметр, осциллограф, универсальный мост.

В теории переменных токов (см. введение к разделу) напряжения и токи принято выражать комплексными величинами. Модуль комплексной величины равен при этом амплитудному значению напряжения (или тока), а фаза — сдвигу фаз, измеренному по отношению к какому-либо одному напряжению или току, принятому в качестве опорного. Параметры основных элементов цепи задаются их импедансами, т. е. тоже некоторыми комплексными числами.

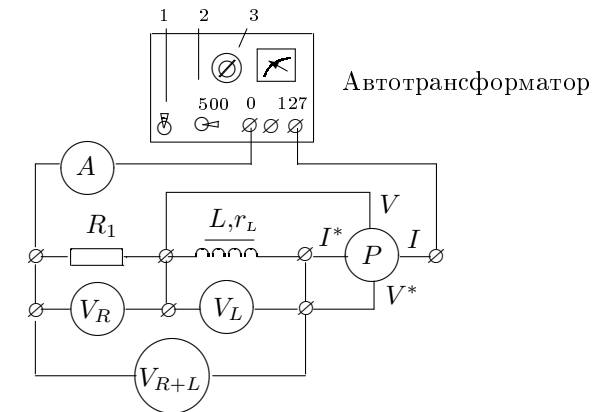


Рис. 1. Схема установки для изучения закона Ома в цепи переменного тока

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из резистора R и катушки индуктивности L с импедансом $Z_L = r_L + i\Omega L$, последовательно подключённых к внешнему источнику, ЭДС которого меняется по синусоидальному закону с частотой Ω (рис. 1).

Обозначим через U_R напряжение на резисторе, через U_L — напряжение на катушке и через U_{R+L} — суммарное напряжение на катушке и на резисторе. Для этих напряжений справедливы комплексные соотношения:

$$\hat{U}_R = \hat{I}R, \quad \hat{U}_L = \hat{I}(r_L + i\Omega L), \quad \hat{U}_{R+L} = \hat{I}(R + r_L + i\Omega L). \quad (1)$$

Напомним, что здесь r_L — активное сопротивление катушки, которое характеризует суммарные потери энергии в катушке, в том числе потери в её ферромагнитном сердечнике.

Переходя к модулям и фазам токов и напряжений, найдём из (1):

$$U_R = I \cdot R, \quad \operatorname{tg} \psi_1 = 0; \quad (2)$$

$$U_L = I \cdot \sqrt{r_L^2 + (\Omega L)^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_2 = \frac{\Omega L}{r_L}; \quad (3)$$

$$U_{R+L} = I \sqrt{(R + r_L)^2 + (\Omega L)^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_3 = \frac{\Omega L}{R + r_L}. \quad (4)$$

В этих формулах U и I обозначают *эффективные* значения напряжений и токов (показания приборов), как принято в электротехнике.

Измеряя с помощью трёх вольтметров значения U_R , U_L и U_{R+L} и зная сопротивление резистора R , нетрудно вычислить, пользуясь формулами (2), (3) и (4), силу тока в цепи, активное сопротивление катушки r_L , её индуктивность L , мощность P_L , выделяемую на катушке, и сдвиг фаз между током и напряжением на катушке.

Рассчитаем мощность переменного тока, выделяемую в катушке. Мгновенное значение мощности равно

$$P = U(t) \cdot I(t).$$

Средняя мощность за период T определяется формулой

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \cdot I(t) dt.$$

Полагая $I(t) = I\sqrt{2} \cos \Omega t$, $U(t) = U\sqrt{2} \cos(\Omega t + \psi)$, получим после интегрирования:

$$P_L = U_L \cdot I \cos \psi = I^2 \cdot r_L. \quad (5)$$

Средняя мощность, выделяющаяся в катушке самоиндукции, определяется, таким образом, действительной частью её импеданса.

Активное сопротивление катушки r_L можно определить, если включить её в последовательный колебательный контур с известными параметрами — сопротивлением R и ёмкостью C (рис. 2). В контуре, настроенном в резонанс на частоту Ω внешнего источника (собственная частота контура и внешняя совпадают: $\omega_0 = \Omega$), реактивные сопротивления индуктивности и ёмкости одинаковы:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (6)$$

Определив каким-либо экспериментальным способом добротность Q этого контура, можно рассчитать полное сопротивление контура R_Σ в резонансе, поскольку

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C R_\Sigma}. \quad (7)$$

Резонансное сопротивление контура R_Σ включает в себя известное сопротивление резистора R и активное сопротивление катушки r_L :

$$R_\Sigma = R + r_L. \quad (8)$$

Экспериментальная установка. Схема установки для исследования закона Ома в цепи переменного тока представлена на рис. 1. Цепь, состоящая из резистора $R_1 \simeq 100$ Ом и катушки L с выдвижным сердечником, подключена к автотрансформатору, выходное напряжение которого можно менять от 0 до 127 В. Напряжения на каждом из элементов и суммарное напряжение цепи измеряются тремя вольтметрами: V_R , V_L и V_{R+L} . Амперметр A измеряет ток в цепи, а ваттметр P — мощность, выделяющуюся на катушке.

Ваттметр электродинамической системы состоит из двух катушек, одна из которых вращается в магнитном поле другой, если через них течёт ток. Токовая катушка ваттметра II^* включается последовательно в исследуемую цепь, а катушка напряжений (потенциальная) VV^* — параллельно к элементу, в котором измеряется выделяемая мощность.

Два из четырёх зажимов ваттметра помечены звёздочкой (*). Эти зажимы надо соединить вместе. Предел измерений устанавливается при помощи переключателей или штепселей, которые вставляются в соответствующие гнезда: произведение цифр против штепселя токовой катушки II^* и против переключателя катушки напряжений VV^* определяет мощность, соответствующую отклонению стрелки на всю шкалу. Отсчёт мощности ведётся по любой из шкал, обозначенных буквой P .

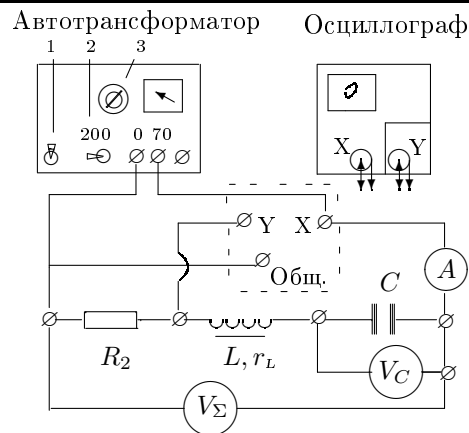


Рис. 2. Схема установки для наблюдения резонанса напряжений

Схема установки для изучения резонанса напряжений изображена на рис. 2. Последовательно соединены резистор $R_2 \approx 5$ Ом, катушка L и магазин ёмкостей C . Амперметр A измеряет ток в цепи, вольтметр V_C — напряжение на ёмкости, вольтметр V_Σ — суммарное напряжение на контуре. Резонанс можно зафиксировать с помощью осциллографа, если подать на вход X напряжение с контура, а на вход Y — напряжение с резистора R_2 , пропорциональное току в цепи. В общем случае на экране виден эллипс. При резонансе эллипс вырождается в прямую линию.

Резонансные напряжения на контуре $U_{\Sigma, \text{рез}}$ и на ёмкости $U_{C, \text{рез}}$ равны соответственно

$$U_{\Sigma, \text{рез}} = I_{\text{рез}} R_\Sigma, \quad U_{C, \text{рез}} = \frac{I_{\text{рез}}}{\Omega C}. \quad (9)$$

Сравнивая (7) и (9), получим

$$Q = \frac{U_{C, \text{рез}}}{U_{\Sigma, \text{рез}}}. \quad (10)$$

Формула (10) показывает, что добротность контура может быть найдена по измеренным значениям напряжений на контуре и на конденсаторе при резонансе. Зная добротность контура и ёмкость C , можно рассчитать R_Σ по формуле (7), а затем определить r_L .

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость индуктивности L и сопротивления r_L катушки от глубины погружения сердечника (рис. 1)

и определить резонансные характеристики контура: добротность Q , сопротивление контура R_Σ , параметры катушки L и r_L (рис. 2).

I. Закон Ома в цепи переменного тока

1. Убедитесь, что автотрансформатор отключён от сети (тумблер 1 в положении «Выкл»), а положение регулятора 3 соответствует минимальному напряжению (крайнее левое). Переключатель мощности 2 установите в положение 500 Вт.

2. Соберите схему согласно рис. 1. Выходное напряжение снимите с клемм 0–127 В. Реостат $R_1 \approx 100$ Ом подключите без движка. Правила подключения ваттметра смотрите в описании экспериментальной установки.

3. Установите рабочие пределы измерительных приборов: амперметр — 2,5 А, вольтметры — 150 В, ваттметр — 25 Вт; переключатель катушки напряжений U — на 100 В, штепсель токовой катушки I — на 0,25 А.

4. Указатель положения сердечника катушки L установите на отметку $x = 5$ мм (в этом положении сердечник почти полностью введён в катушку). При меньших значениях x ток в цепи практически отсутствует.

5. Включите автотрансформатор (тумблер 1) и, вращая ручку 3, установите на вольтметре автотрансформатора напряжение ≈ 127 В.

6. Перемещая сердечник шагами по $2 \div 3$ мм, снимите зависимости тока I , напряжений U_R , U_L , U_{R+L} и мощности P_L от координаты сердечника x . Включите в серию среднее положение сердечника.

II. Резонанс напряжений

7. Убедитесь, что автотрансформатор отключён от сети (тумблер 1 в положении «Выкл»), а регулятор 3 установлен на минимальное напряжение. Переключатель мощности 2 установите в положение 200 Вт. Соберите схему согласно рис. 2. Выходное напряжение снимите с клемм 0–70 В. Последовательно с постоянным сопротивлением $R_2 \approx 5$ Ом соедините катушку и магазин ёмкостей.

8. Установите рабочие пределы измерительных приборов: амперметр — 5 А, вольтметр V_C — 300 В, вольтметр V_Σ — 75 (150) В.

9. Поставьте указатель перемещения сердечника в среднее положение. Установите начальное значение ёмкости $C = 20$ мкФ.

10. Включите автотрансформатор в сеть. Регулятором 3 установите на вольтметре автотрансформатора напряжение около 30 В.

11. Меняя ёмкость и наблюдая за изменением эллипса на экране ЭО, настройте контур в резонанс с частотой сети. Убедитесь, что при резонансе ток в цепи максимален.

12. Как можно точнее измерьте резонансный ток I и резонансные напряжения на ёмкости — $U_{C, \text{рез}}$ и на контуре — $U_{\Sigma, \text{рез}}$.

Оцените на месте добротность контура по формуле (10).

13. Запишите резонансное значение ёмкости C , координату положения сердечника при резонансе, величину дополнительного сопротивления R_2 , сопротивление реостата R_1 и характеристики приборов.

14. Уберите входное напряжение до нуля, отключите автотрансформатор от сети и разберите схему. Сердечник катушки оставьте в среднем (резонансном) положении.

15. Не изменяя положения сердечника, сначала измерьте омическое сопротивление витков катушки с помощью омметра, а затем — L и r_L с помощью моста переменного тока.

III. Обработка результатов

16. По результатам измерений P_L и I вычислите значения r_L по формуле (5), а затем определите L (см. (3)). Частота сети $\nu_0 = 50$ Гц.

Постройте на одном листе графики зависимостей L и r_L от положения сердечника и определите по ним значения L и r_L , соответствующие среднему (резонансному) положению сердечника.

17. Для среднего положения сердечника постройте векторную диаграмму напряжений: треугольник по трём сторонам при горизонтальном расположении U_R (рис. 2.7).

Отложите на диаграмме активную ($U_{L, \text{акт}}$) и реактивную ($U_{L, \text{реакт}}$) составляющие напряжения на катушке и рассчитайте по ним значения L и r_L .

Определите по диаграмме $\cos \theta$ — сдвиг фаз между током и напряжением на катушке — и сравните с расчётом по формуле (5).

18. С помощью векторной диаграммы по теореме косинусов выразите мощность P_L , выделяемую на катушке, через напряжения U_R , U_L , U_{R+L} и сопротивление R_1 (метод трёх вольтметров).

Рассчитайте этим методом величину P_L для среднего положения сердечника и сравните с показаниями ваттметра.

19. Рассчитайте активное сопротивление катушки r_L через ток и напряжение на контуре (см. (9) и (8)).

20. Рассчитайте L и r_L через добротность Q (см. (10), (6), (7) и (8)).

21. Занесите результаты в таблицу:

Т а б л и ц а 1

	Мост Е7–	График	Вект.диагр.	$f(I_{\text{рез}}, U_{\Sigma, \text{рез}})$	$f(Q)$
r_L					
L				—	

Сравните величины L и r_L , определённые разными способами

22. Оцените погрешности. Подумайте о причинах расхождения результатов.

Контрольные вопросы

1. Почему показание вольтметра V_{R+L} не равно сумме показаний вольтметров V_R и V_L ? В нашем случае $V_{R+L} < V_R + V_L$. Может ли неравенство иметь другой знак?

2. Почему при резонансе в схеме на рис. 2 эллипс на экране осциллографа вырождается в прямую?

3. Из чего складывается активное сопротивление катушки с сердечником?

4. Поясните принцип работы ваттметра.

5. Выполняется ли условие квазистационарности токов в используемой схеме? Почему?

6. На какой частоте гудит катушка?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. — Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 129, 130.

2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 220, 227, 228.

Работа 3.2.3

Резонанс токов

Цель работы: изучение параллельной цепи переменного тока, наблюдение резонанса токов.

В работе используются: лабораторный автотрансформатор (ЛАТР), разделительный понижающий трансформатор, ёмкость, дроссель с переменной индуктивностью, три амперметра, вольтметр, реостат, электронный осциллограф, омметр, мост переменного тока.

В работе изучается параллельный контур, одна из ветвей которого содержит индуктивность L , другая — ёмкость C (см. рис. 2.9). Через r_L обозначено активное сопротивление катушки, которое включает в себя как чисто омическое сопротивление витков катушки, так и сопротивление, связанное с потерями энергии при перемагничивании сердечника катушки. Активным сопротивлением ёмкостной ветви контура можно пренебречь, т. к. используемый в работе конденсатор обладает малыми потерями.

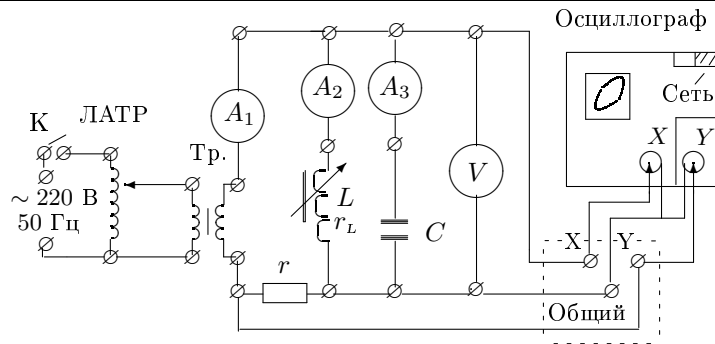


Рис. 1. Схема для исследования резонанса токов

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Напряжение от сети (220 В, 50 Гц) с помощью ЛАТРа через понижающий трансформатор Тр. подается на параллельный контур, содержащий конденсатор ($C = 120$ мкФ) и катушку, индуктивность которой зависит от глубины погружения сердечника. Полный ток в цепи измеряется с помощью многопредельного амперметра A_1 ; для измерения токов в L - и C -ветвях используются два одинаковых амперметра A_2 и A_3 ; напряжение на контуре контролируется электронным вольтметром V . Последовательно с контуром включен резистор r — реостат с полным сопротивлением $\simeq 100$ Ом.

Для наблюдения за сдвигом фаз между полным током и напряжением на контуре используется осциллограф. Сигнал, пропорциональный току, снимается с резистора r и подается на вход Y осциллографа. На вход X подается напряжение непосредственно с контура. При наличии сдвига фаз между этими напряжениями на экране виден эллипс, а при нулевом сдвиге фаз эллипс вырождается в прямую.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается снять при постоянном напряжении U зависимости токов I_L , I_C и полного тока I от индуктивности катушки (глубины погружения сердечника), а также определить резонансные характеристики контура: полное сопротивление $R_{\text{рез}}$, добротность Q , активное сопротивление r_L и индуктивность катушки $L_{\text{рез}}$.

1. Соберите схему согласно рис. 1. Для амперметров A_2 и A_3 установите пределы измерения — 1 А, для A_1 — 0,5 А. Убедитесь, что реостат r включен на максимальное сопротивление. Полностью введите сердечник в катушку. По шкале на корпусе катушки это соответствует минимальному делению.

2. Установите движок ЛАТРа в положение, соответствующее минимуму выходного напряжения (крайнее левое). Включите в сеть ЛАТР, катодный вольтметр и осциллограф.

Плавным поворотом движка ЛАТРа установите напряжение на контуре (по электронному вольтметру) $V = 10$ В.

3. Выдвигая сердечник дросселя и поддерживая с помощью ЛАТРа постоянное напряжение, определите диапазон перемещения сердечника, внутри которого общий ток I в контуре не превышает 0,5 А.

Не следует менять пределы измерения на амперметрах в течение всей серии.

4. Подбрав рабочий диапазон, снимите зависимости I , I_L и I_C от координаты сердечника ($U = \text{const}$).

Вблизи резонанса полный ток I мал и по шкале 0,5 А измеряется неточно, но для наблюдения за общим ходом изменений это несущественно.

Отметьте, при каких токах эллипс на экране осциллографа вырождается в прямую.

5. Верните систему в положение резонанса (минимум полного тока в цепи) и, убрав напряжение до нуля, переключите амперметр A_1 на предел измерений 0,1 А.

6. Как можно точнее измерьте резонансные значения трёх токов и напряжение и убедитесь с помощью осциллографа, что полное сопротивление цепи чисто активное.

Оцените на месте добротность контура по формуле (2.66).

Для измерения r_L оставьте сердечник в резонансном положении.

7. Убрав напряжение до нуля, отключите ЛАТР от сети и разберите схему.

8. Измерьте сопротивление витков катушки с помощью омметра.

9. Измерьте активное сопротивление катушки r_L и резонансное значение индуктивности L с помощью моста переменного тока. Укажите тип моста (потери на перемагничивание зависят от рабочей частоты моста).

Обработка результатов

1. Постройте на одном графике зависимости токов I , I_L и I_C от положения сердечника: $I = f(x)$ (x — отсчёт по шкале в мм).

2. Рассчитайте добротность контура Q через токи (см. (2.66)), а резонансное сопротивление $R_{\text{рез}}$ — через полный ток и напряжение (см. (2.62) и (2.65)).

3. Рассчитайте $L_{\text{рез}}$ через ёмкость C и частоту ω_0 ($\nu_0 = 50$ Гц), а r_L — через ёмкость и добротность (см. (2.61)).

- Рассчитайте индуктивность $L_{\text{рез}}$ через U и $I_{L, \text{рез}}$ (см. (2.63)).
- Постройте в масштабе векторную диаграмму токов при резонансе: треугольник по трём сторонам при вертикальном векторе $I_{C, \text{рез}}$ (рис. 2.10). Отложите на этой диаграмме напряжение на катушке $U_L = U_C$ и постройте активную ($U_{L, \text{акт}}$) и реактивную ($U_{L, \text{реакт}}$) составляющие напряжения на катушке. Рассчитайте по ним r_L и $L_{\text{рез}}$.
- Сравните резонансные значения $L_{\text{рез}}$ и r_L , определённые разными способами:

Т а б л и ц а 1

	Мост Е7–	Омметр	$f(U_{\text{рез}}, I_{L, \text{рез}})$	$f(Q)$	Вект.диагр.
r_L		—	—		
L					

- Оцените погрешности. Подумайте о причинах расхождения результатов.

Контрольные вопросы

- Приведите все известные Вам определения резонанса.
- Как установить наличие резонанса в цепи? Перечислите все известные Вам признаки.
- Получите формулу, связывающую добротность и сопротивления.
- Какие причины приводят к потерям энергии в контуре?
- Зависят ли потери энергии от частоты тока?
- Получите формулу, связывающую $R_{\text{рез}}$ и r_L .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 126, 127, 129, 130.
- Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 245–250, 254–256.

Работа 3.2.4

Свободные колебания в электрическом контуре

Цель работы: исследование свободных колебаний в колебательном контуре.

В работе используются: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, индуктивность, электронный осциллограф, универсальный мост.

Исследуемый колебательный контур состоит из индуктивности L , ёмкости C и резистора R (рис. 2.1). Конденсатор контура заряжается

короткими одиночными импульсами, после каждого из которых в контуре возникают свободные затухающие колебания. Подав напряжение с конденсатора на осциллограф, можно по картине, возникающей на экране осциллографа, определить период колебаний в контуре, исследовать затухание колебаний и определить основные параметры колебательного контура.

Картину колебаний можно представить не только в координатах (U, t) (рис. 2.2), но и в координатах (U, \dot{U}) , или, как говорят, на фазовой плоскости. В этих координатах кривая незатухающих колебаний ($\gamma = 0$) имеет вид эллипса (или окружности — при одинаковых амплитудах U и \dot{U}), а картина реальных колебаний изображается сворачивающейся спиралью. Доказательство этих утверждений мы предоставляем читателю.

Схема подключения осциллографа для изучения колебаний на фазовой плоскости представлена на рис. 1. На вертикальный вход осциллографа подаётся напряжение U_C с конденсатора, а на горизонтальный — напряжение с резистора U_R ($U_R \sim I \sim dq/dt \sim dU_C/dt$).

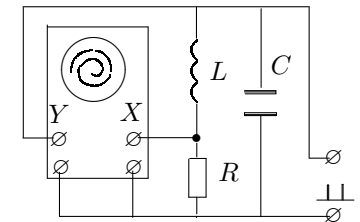


Рис. 1. Схема установки для наблюдения затухающих колебаний на фазовой плоскости

Экспериментальная установка. На рис. 2 приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре, содержащем постоянную индуктивность L и переменные ёмкость C и сопротивление R . Колебания наблюдаются на экране осциллографа.

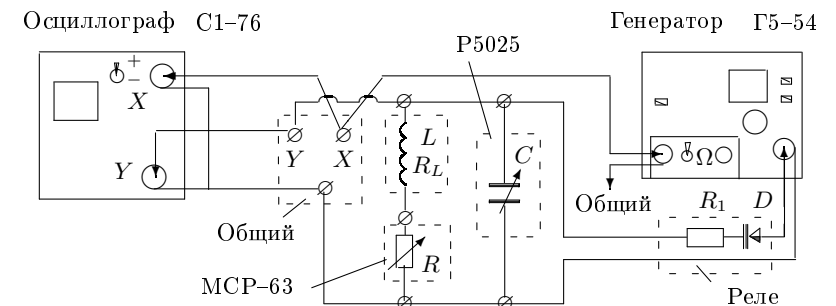


Рис. 2. Схема установки для исследования свободных колебаний

Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов Г5–54. С выхода генератора по коаксиальному ка-

белю импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке (или на выходе генератора). Реле содержит диодный тиристор¹ D и ограничительный резистор R_1 .

Импульсы заряжают конденсатор C . После каждого импульса генератор отключается от колебательного контура, и в контуре возникают свободные затухающие колебания. Входное сопротивление осциллографа велико ($\simeq 1$ МОм), так что его влиянием на контур можно пренебречь. Для получения устойчивой картины затухающих колебаний используется режим ждущей развёртки с синхронизацией внешними импульсами, поступающими с выхода «синхроимпульсы» генератора.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость периода свободных колебаний контура от ёмкости, зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления, определить критическое сопротивление и добротность контура.

I. Подготовка приборов к работе

1. Соберите схему согласно рис. 2. Выход генератора через реле подключите к клеммам «1» и «2'» магазина ёмкостей. В этом случае верхним рядом курбелей (ручек) можно менять ёмкость в интервале $0 \div 1$ мкФ. Показания курбелей суммируются.

2. Ручкой «АМПЛ» генератора импульсов установите на вольтметре напряжение чуть больше 30 В. При этом должны быть нажаты кнопки « $\times 1$ », « \square » и «запуск». Ручку регулировки амплитуды синхроимпульсов «АМПЛ» поставьте в крайнее правое положение. Полярность синхроимпульсов генератора (тумблер « Ω ») должна быть согласована с полярностью синхронизации осциллографа (тумблер « \pm ») — оба тумблера вверх или оба вниз. Длительность импульсов подбирается с помощью подвижных шкал (чёрная и белая) и вертикального ряда кнопок (множителей). При нажатой чёрной кнопке отсчёт ведётся по чёрной шкале с умножением на коэффициент, указанный около нажатой кнопки; при нажатой белой кнопке — соответственно по белой шкале. Частота повторения импульсов устанавливается аналогично. Установите длительность импульсов ~ 5 мкс; а частоту повторения импульсов $\nu_0 = 100$ Гц ($T_0 = 0,01$ с). Рычаг «Синхронизация» осциллографа установите в положение «Внешн», рычаг переключения развёртки — в положение «1».

¹ В схеме используется тиристор без управляющего электрода — полупроводниковый ключ, сопротивление которого зависит от напряжения на нём. При напряжениях выше порогового тиристор открывается, а при любом напряжении другого знака — закрывается. Благодаря этому сопротивление генератора не влияет на процессы в колебательном контуре.

II. Измерение периодов

3. Установите на магазине сопротивлений величину $R = 0$; на магазине ёмкостей — величину $C = 0,02$ мкФ.

4. Прокалибруйте горизонтальную ось осциллографа по известному периоду повторения импульсов: для этого

а) подберите частоту развёртки осциллографа, при которой расстояние x_0 между импульсами, поступающими с генератора ($T_0 = 0,01$ с), занимает почти весь экран;

б) измерив на экране расстояние x , которое занимают несколько полных периодов n , рассчитайте период колебаний контура: $T = T_0 x / (n x_0)$. Малые расстояния можно увеличить дискретным переключателем чувствительности канала «X».

Изменяя ёмкость от 0,02 мкФ до 0,9 мкФ и периодически проверяя величину x_0 , проведите измерения периодов ($8 \div 10$ значений).

III. Критическое сопротивление и декремент затухания

5. Приняв $L = 200$ мГн, рассчитайте ёмкость C , при которой собственная частота колебаний контура $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ составляет 5 кГц. Для выбранных значений L и C рассчитайте критическое сопротивление контура $R_{кр}$ по формуле (2.26).

6. Установите на магазине ёмкость, близкую к рассчитанной. Увеличивая сопротивление R от нуля до $R_{кр}$, наблюдайте картину затухающих колебаний на экране осциллографа. Зафиксируйте сопротивление магазина, при котором колебательный режим переходит в апериодический. Найденное экспериментально значение $R_{кр}$ может отличаться от рассчитанного, т. к. величина L задана приближённо.

7. Установите сопротивление $R \simeq 0,1R_{кр}$ (эсп.). Получите на экране картину затухающих колебаний. Для расчёта логарифмического декремента затухания Θ по формуле (2.30) измерьте амплитуды, разделённые целым числом периодов n (рис. 2.2).

Точность измерений повысится, если сместить горизонтальную ось симметрии сигнала в нижнюю часть экрана. Расчёт будет тем точнее, чем больше отличаются друг от друга измеряемые амплитуды, а минимальная не должна быть меньше $5 \div 6$ мм.

8. Повторите измерения п. 7 для $6 \div 8$ значений R , лежащих в интервале $(0,1 \div 0,3) \cdot R_{кр}$.

IV. Колебания на фазовой плоскости

9. Для наблюдения затухающих колебаний на фазовой плоскости подайте на вход «X» осциллографа напряжение с магазина сопротивлений;

для этого достаточно отсоединить вход «X» осциллографа от клеммы «синхроимпульсы» генератора и соединить его с точкой, расположенной между катушкой L и магазином R .

Поставьте рычаг переключения развёртки осциллографа в положение «X».

При том же значении C , что и в п. 6, наблюдайте за изменением спирали при увеличении сопротивления от $0,1 \cdot R_{\text{кр}}$ до $0,3 \cdot R_{\text{кр}}$.

Для определения Θ измерьте радиусы витков спирали, разделённые целым числом периодов n , для одного-двух значений R на каждом краю рабочего диапазона.

10. Измерьте индуктивность L и омическое сопротивление катушки R_L с помощью моста переменного тока.

V. Обработка результатов

11. Рассчитайте экспериментальные значения периодов по результатам измерений (п. 4) и теоретические по формуле (2.21). Постройте график $T_{\text{эсп}} = f(T_{\text{теор}})$.

12. Рассчитайте значения Θ (п. 8) и $R_{\text{конт}}$ (сопротивление контура состоит из сопротивления магазина R и омического сопротивления катушки R_L).

Постройте график в координатах $1/\Theta^2 = f(1/R_{\text{конт}}^2)$. Определите критическое сопротивление $R_{\text{кр}}$ по наклону прямой. Приняв обозначения: $1/\Theta^2 = Y$, $1/R_{\text{конт}}^2 = X$, можно с помощью равенств (2.7), (2.19), (2.26) и (2.29) показать, что

$$R_{\text{кр}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta Y}{\Delta X}}. \quad (1)$$

13. Рассчитайте $R_{\text{кр}}$ по формуле (2.26) и сравните результаты: теоретический, графический и экспериментальный (п. 6).

14. Рассчитайте добротность контура для максимального и минимального значений Θ , используя равенства (2.30) и (2.31), и сравните с расчётом Q через параметры контура R , L и C (см. (2.28)).

15. Рассчитайте величину Θ по спирали и сравните с результатом п. 12.

Контрольные вопросы

1. Что называется собственной частотой, добротностью, логарифмическим декрементом затухания колебательного контура?
2. Какая плоскость называется фазовой плоскостью колебаний?
3. Как определить логарифмический декремент затухания по картине колебаний в фазовой плоскости?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 122–124.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 207–210.

Работа 3.2.5

Вынужденные колебания в электрическом контуре

Цель работы: исследование вынужденных колебаний и процессов их установления.

В работе используются: генератор звуковой частоты, осциллограф, вольтметр, частотомер, ёмкость, индуктивность, магазин сопротивлений, универсальный мост.

В работе исследуются колебания, возникающие в электрическом колебательном контуре под воздействием внешней ЭДС, гармонически изменяющейся во времени.

При подключении к контуру внешнего источника (рис. 1) в нём возникают колебания, которые можно представить как суперпозицию двух синусоид (см. 2.52): первая — с частотой собственных колебаний контура ω и амплитудой, экспоненциально убывающей со временем; вторая — с частотой внешнего источника Ω и постоянной амплитудой. Со временем собственные колебания затухают, и в контуре устанавливаются вынужденные колебания. Амплитуда этих колебаний максимальна при совпадении частоты Ω внешнего сигнала с собственной частотой контура ω_0 . Это явление называют **резонансом**. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты внешнего напряжения носит название **резонансной кривой** (рис. 2.8).

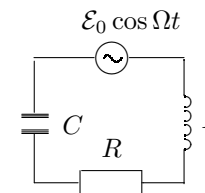


Рис. 1.
Последовательный колебательный контур

А. Резонансная кривая колебательного контура

Для экспериментального исследования резонансной кривой тока в последовательном колебательном контуре (рис. 1) можно снять зависимость напряжения на резисторе R от частоты при постоянной амплитуде выходного напряжения генератора. Но при этом мы должны быть

уверены, что выходной импеданс генератора много меньше импеданса контура даже при резонансе.

Чтобы исключить влияние выходного импеданса генератора на процессы, происходящие в контуре, в нашей установке используется схема, представленная на рис. 2: синусоидальный сигнал с генератора подаётся на параллельный колебательный контур через небольшую разделительную ёмкость C_1 (рис. 2). Напряжение с ёмкости контура C поступает на вход осциллографа. Зависимость этого напряжения от частоты генератора (резонансная кривая) будет практически совпадать с резонансной кривой для последовательного контура (рис. 1) если импедансы возбуждающей и измеряющей цепей намного превосходят импеданс самого контура вблизи резонанса $Z_{\text{рез}} \approx L/(RC)$.

Выходной импеданс генератора иногда бывает низким, поэтому большим импедансом должна обладать разделительная ёмкость C_1 ; входное сопротивление осциллографа достаточно велико: $R_{\text{зо}} \approx 1 \text{ МОм}$. Таким образом, исследуемый контур слабо связан с внешней цепью, если выполнены условия:

$$\frac{1}{\omega C_1} \gg |Z|_{\text{рез}} = \frac{L}{RC}, \quad R_{\text{зо}} \gg \frac{L}{RC}. \quad (1)$$

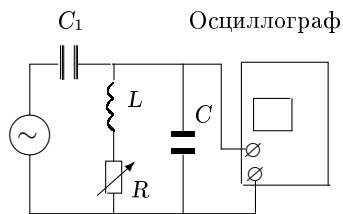


Рис. 2. Схема установки для исследования вынужденных колебаний

При выполнении первого из условий (1) полный ток через контур зависит только от сопротивления разделительной ёмкости C_1 и не зависит от параметров контура, поэтому при небольшом удалении от резонансной частоты полный ток в контуре остаётся практически неизменным. А так как сопротивление $Z_{\text{рез}}$ параллельного контура в резонансе максимально, то и напряжение на ёмкости (неизменный ток, умноженный на максимальное сопротивление) тоже максимально при резонансе. Таким образом, резонансная кривая в нашем контуре будет выглядеть так же, как в последовательном: максимум амплитуды при резонансе. Ширина резонансной кривой определяет важную характеристику контура — *добротность* (см. 2.57).

Б. Процессы установления и затухания колебаний в контуре

Добротность контура может быть определена и другими способами,

например, по скорости нарастания амплитуды вынужденных колебаний при резонансе или по скорости затухания свободных колебаний.

Нарастание и затухание колебаний (рис. 3) можно наблюдать на экране осциллографа, если на контур подаются цуги — отрезки синусоиды, разделённые интервалами, в течение которых сигнал отсутствует. Чем выше добротность, тем медленнее нарастают и медленнее затухают колебания в контуре. Количественные оценки можно сделать, если определить логарифмический декремент затухания по скорости нарастания или затухания колебаний (см. (2.30) и (2.73)). В условиях резонанса огибающая затухающих колебаний — это перевёрнутая огибающая нарастающего участка. При расчёте логарифмического декремента по затуханию нет необходимости использовать амплитуду установившихся колебаний U_0 , которая в контуре с высокой добротностью иногда не успевает установиться за время продолжительности цуга.

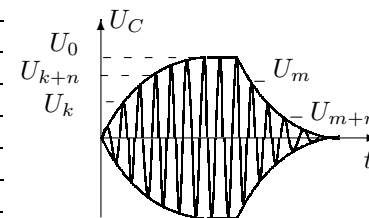


Рис. 3. Нарастание и затухание вынужденных колебаний

Экспериментальная установка. Схема установки для исследования вынужденных колебаний приведена на рис. 4. Колебательный контур состоит из ёмкости $C = 0,1 \text{ мкФ}$, индуктивности $L = 100 \text{ мГн}$ и переменного сопротивления R .

Синусоидальное напряжение от звукового генератора проходит через частотомер, позволяющий измерять рабочую частоту с высокой точностью. В корпус частотомера вмонтирован генератор цугов — электронное реле, разрезающее синусоиду на периодически повторяющиеся цуги — отрезки синусоиды, содержащие 32 или 40 периодов колебаний.

После частотомера через небольшую ёмкость $C_1 \approx 600 \text{ пкФ}$ сигнал поступает на клеммы, смонтированные на отдельной панельке. При подключении контура к клеммам «⊥» (земля) и «Непр» на контур подаётся непрерывный сигнал — синусоида; если контур подключён к клеммам «⊥» и «Цуги» — на контур поступают отрезки синусоиды.

Для наблюдения за процессом колебаний напряжение с ёмкости подаётся на вход осциллографа. Чтобы картина на экране была устойчивой, частота развёртки осциллографа принудительно синхронизируется с частотой повторения цугов. Для этого на генератор развёртки ЭО подаются следующие с частотой повторения цугов управляющие импульсы, которые вырабатываются в блоке электронного реле (клемма «Синхр»,

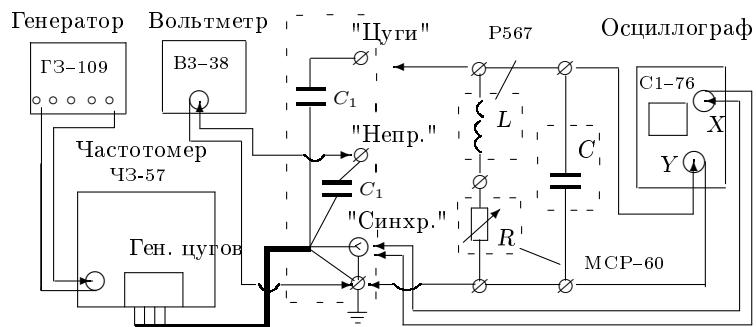


Рис. 4. Схема экспериментальной установки для исследования вынужденных колебаний

смонтированная на панельке). Для измерений напряжения на ёмкости используется электронный вольтметр.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при двух значениях сопротивления магазина ($R = 0$ и 100 Ом) исследовать резонансные кривые и определить по ним добротность контура; затем рассчитать добротность, определив логарифмический декремент затухания при нарастании и при затухании колебаний.

I. Подготовка приборов к работе

1. Соберите схему согласно рис. 4 и подключите контур к клеммам « \perp » и «Непр».
2. Включите приборы в сеть. Установите частоту выходного сигнала генератора $\nu \approx 10^3$ Гц: ручка «ЧАСТОТА ПЛАВНО» — на отметке $150 \div 200$, «МНОЖИТЕЛЬ ЧАСТОТЫ» — 10, «РЕГУЛИРОВКА НАПРЯЖЕНИЯ» — в среднем положении, тумблер слева от лимба — в положении « \sim » (синусоида).

Для измерения частоты в автоматическом режиме подготовьте частотомер: нажмите нижнюю кнопку левого вертикального ряда (автоматический режим), кнопку «ЧАСТОТА» правого вертикального ряда (режим измерения частоты), кнопку « 10^3 » верхнего горизонтального ряда (точность измерения частоты — 0,1%).

Рычаг «Синхронизация» осциллографа установите в положение «Внешн», рычаг переключения развёртки — в положение «1».

Чтобы проверить работоспособность источника питания, отключите магазин сопротивлений от панельки и подключите вход «Y» ЭО к

клемме «Непр» или к клемме «Цуги». Увидев на экране непрерывную синусоиду или цуги, можно вернуться к схеме на рис. 4.

3. Выведите до нуля сопротивление R магазина. Установите на магазине индуктивностей значение $L = 100$ мГн (убедитесь, что включена только крайняя левая декада).

II. Исследование резонансных кривых

4. Рассчитайте резонансную частоту контура $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$. Изменяя частоту генератора вблизи резонансной и наблюдая за синусоидой на экране ЭО, убедитесь, что в резонансе амплитуда колебаний максимальна. Подберите частоту развёртки осциллографа и амплитуду синхронизации, при которых картина неподвижна.

С помощью переключателя пределов шкалы вольтметра и ручки регулировки выходного напряжения генератора подберите условия, при которых стрелка вольтметра при резонансе отклоняется на всю шкалу.

Меняя частоту генератора в обе стороны от резонансной, снимите зависимость показаний вольтметра U от показаний частотомера ν . Расчёт добротности ведётся на уровне 0,7 от резонансной амплитуды, поэтому измерения следует вести до тех пор, пока амплитуда сигнала упадёт до величины $\approx (0,3 \div 0,4)$ от резонансной.

5. Установите на магазине сопротивлений значение $R = 100$ Ом и повторите измерения п. 4. Закончив, отключите вольтметр от сети.

III. Процессы установления и затухания колебаний

6. Подключите контур к клемме «Цуги» (и « \perp »). Выведите до нуля сопротивление магазина.
7. Установите на генераторе резонансную частоту. Подберите частоту развёртки ЭО, при которой на экране укладывается один цуг колебаний.

Убедитесь, что огибающая затухающих колебаний — это перевёрнутая огибающая нарастающего участка. Если они заметно отличаются (искажения может внести реле), следует уменьшить амплитуду сигнала с генератора.

8. Для расчёта добротности по скорости нарастания амплитуды измерьте амплитуды двух колебаний, разделённых целым числом периодов n , и амплитуду установившихся колебаний (см. рис. 2.12). Можно увеличить амплитуду, сместив горизонтальную ось симметрии цуга в нижнюю часть экрана. Расчёт будет тем точнее, чем больше отличаются друг от друга все три амплитуды, а минимальная не должна быть меньше $6 \div 8$ мм.

Перед началом измерений загрубите усилитель вертикального входа ЭО и уточните положение оси X — начала отсчёта амплитуды.

9. Для определения добротности по скорости *затухания* измерьте две амплитуды, разделённые целым числом периодов (см. рис. 3).

10. Повторите измерения пп. 8 и 9 для $R = 100$ Ом.

11. Сместите частоту генератора с резонансного значения и получите на экране картину биений. Зарисуйте и объясните её.

12. Отключите приборы от сети и разберите схему.

13. Измерьте активное сопротивление R_L магазина индуктивностей с помощью моста переменного тока. Сравните измеренное значение R_L с величиной, указанной на правой стенке магазина.

IV. Обработка результатов




14. Постройте на одном графике резонансные кривые в координатах $U/U_0 = f(\nu/\nu_0)$, где U_0 — напряжение при резонансной частоте ν_0 .

Определите добротность по формуле (2.57). Сравните теоретическое и экспериментальное значения резонансной частоты.

15. Рассчитайте добротность контура по скорости нарастания и затухания колебаний (см. (2.30), (2.31) и (2.73)).

16. Рассчитайте теоретическое значение добротности через параметры контура L , C и R (см. (2.28)).

17. Сведите результаты определения Q в таблицу:

R Ом	$R_{\text{конт}}$				$f(LCR)$
0					
100					

Контрольные вопросы

1. Выведите формулу (2.57).
2. Найдите частное решение уравнения (2.44), не переходя к комплексным величинам. (Указание: решение (2.44) следует искать в виде $A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t$.)
3. Получите все равенства (2.28), определяющие добротность контура. В чём состоит физический смысл добротности?
4. В каких случаях можно говорить, что колебательный контур слабо связан с другими элементами схемы?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 124, 127.
2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 221, 222, 210.

Работа 3.2.6

Исследование гальванометра

Цель работы: изучение работы высокочувствительного зеркального гальванометра магнитоэлектрической системы в режимах измерения постоянного тока и электрического заряда.

В работе используются: зеркальный гальванометр с осветителем и шкалой, источник постоянного напряжения, делитель напряжения, магазин сопротивлений, эталонный конденсатор, вольтметр, переключатель, ключи, линейка.

Баллистическим гальванометром называют электроизмерительный прибор магнитоэлектрической системы, отличающийся высокой чувствительностью к току и сравнительно большим периодом колебаний подвижной системы (рамки).

Главной частью баллистического гальванометра является подвешенная на вертикальной нити рамка, помещённая в поле постоянного магнита. Вырез цилиндрической формы в полюсах магнита и ферромагнитный цилиндр на оси системы делают поле в зазоре радиальным (рис. 1). Скреплённое с рамкой зеркальце служит для измерения угла поворота рамки. К рамке прикреплён полый цилиндр, который сильно увеличивает момент инерции и, следовательно, период колебаний подвижной системы, не очень её утяжеляя. Магнит и подвижная система заключены в защитный кожух. В баллистических гальванометрах применяют сильные постоянные магниты и рамки с большим количеством витков, подвешенные на тонких нитях с малой упругостью.

Баллистический гальванометр позволяет измерять как постоянный ток (стационарный режим), так и заряд, протекший через рамку за некоторое время (баллистический режим). В баллистическом режиме гальванометр может работать, если время протекания заряда много меньше периода собственных колебаний подвижной рамки. Поэтому период колебаний рамки делают большим ($5 \div 15$ с). Это время учитывает реакцию экспериментатора, которому надо успеть сделать отсчёт максимального отклонения рамки.

Уравнение движения подвижной системы. На помещённую в магнитное поле обтекаемую током рамку гальванометра действуют следующие моменты сил: момент закрученной нити, момент магнитных сил и тормозящий момент, зависящий от сил сопротивления воздуха и от вихревых токов, вызывающих электромагнитное торможение. Рассмотрим каждый из этих моментов в отдельности.

Механический момент M_1 упругих сил нити пропорционален углу поворота рамки

$$M_1 = -D\varphi, \quad (1)$$

где D — модуль кручения нити, а φ — угол поворота рамки от положения равновесия.

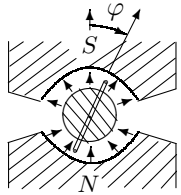


Рис. 1. Рамка с током в магнитном поле

где S — площадь одного витка рамки.

Тормозящий момент складывается из моментов сил электромагнитного торможения и сил трения о воздух. В рамке, движущейся в магнитном поле с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, наводится ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BSN\dot{\varphi},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий рамку. Пренебрегая самоиндукцией рамки, можно считать, что эта ЭДС вызывает ток индукции $I_{\text{инд}} = -BSN\dot{\varphi}/R_{\Sigma}$. Здесь R_{Σ} — полное сопротивление цепи, состоящее из сопротивления рамки R_0 и сопротивления внешнего участка цепи R : $R_{\Sigma} = R_0 + R$. Тормозящий момент

$$M_3 = BSNI_{\text{инд}} = -\frac{(BSN)^2}{R_{\Sigma}}\dot{\varphi}. \quad (3)$$

Обычно этот момент значительно превосходит момент сил трения рамки о воздух, которым мы и пренебрежём для простоты расчёта.

Уравнение движения рамки имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = \Sigma M,$$

где J — момент инерции подвижной системы, а ΣM — сумма моментов всех сил, действующих на рамку; подставляя (1), (2) и (3), получим

$$J\ddot{\varphi} + \frac{(BSN)^2}{R_{\Sigma}}\dot{\varphi} + D\varphi = BSNI.$$

Разделим обе части уравнения на J и введём обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{(BSN)^2}{JR_{\Sigma}} &= 2\gamma \\ \frac{D}{J} &= \omega_0^2 \\ \frac{BSN}{J} &= K \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Уравнение движения рамки примет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = KI. \quad (5)$$

Величина γ называется коэффициентом затухания подвижной системы гальванометра, ω_0 — собственной частотой колебаний рамки.

Следует отметить, что ток I в уравнении (5) определяется величиной ЭДС \mathcal{E} внешнего источника, к которому подключён гальванометр: $I = \mathcal{E}/R_{\Sigma}$, а влияние индукционного тока, тормозящего движение рамки, отражает слагаемое, пропорциональное $\dot{\varphi}$.

Режим измерения постоянного тока. Если через рамку пропускать постоянный ток (достаточно долго, чтобы затухли колебания подвижной системы), то в уравнении (5) можно положить $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$, и угол поворота определится формулой

$$\varphi = \frac{K}{\omega_0^2}I = \frac{BSN}{D}I = \frac{I}{C_I}.$$

Величина C_I называется динамической постоянной гальванометра:

$$C_I = \frac{I}{\varphi} = \frac{D}{BSN}.$$

Свободные колебания рамки. Исследуем свободное движение рамки (т. е. движение в отсутствие внешних источников тока, когда $I = 0$). Предположим, что выполнены следующие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0. \quad (6)$$

При этом уравнение (5) примет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) полностью аналогично уравнению (2.8) Приложения. Исследование решений (2.8) подробно проведено во введении к разделу. Применим полученные результаты для анализа движения рамки. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\varphi = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (8)$$

где A_1 и A_2 нужно выбрать так, чтобы удовлетворить начальным условиям. Здесь возможны следующие случаи.

1. $\gamma < \omega_0$ (колебательный режим).

Решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям (6), имеет в этом случае вид

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t, \quad (9)$$

где

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \quad (10)$$

Движение рамки имеет колебательный характер и затухает со временем.

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{J} - \frac{(BSN)^4}{(2JR_\Sigma)^2}}}. \quad (11)$$

Если затухание мало, $\gamma \ll \omega_0$ ($\omega \simeq \omega_0$), то движение рамки близко к синусоидальному:

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (12)$$

2. $\gamma = \omega_0$ (критический режим). Решение уравнения (7) в этом случае имеет вид

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t e^{-\gamma t}. \quad (13)$$

Движение не имеет колебательного характера: отклонённая подвижная система после отброса почти экспоненциально приближается к нулю.

3. Затухание велико, $\gamma > \omega_0$ (случай переуспокоенного гальванометра). Решение (7) в этом случае имеет вид

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\varkappa} e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \varkappa t, \quad (14)$$

где

$$\varkappa^2 = \gamma^2 - \omega_0^2.$$

Движение остаётся аperiодическим, однако подвижная система приближается к равновесию медленнее, чем в критическом режиме.

Режим измерения заряда. Как уже было отмечено, период свободных колебаний баллистического гальванометра благодаря искусственному увеличению момента инерции рамки оказывается очень большим (порядка десяти секунд). Если пропустить через рамку короткий импульс тока, то можно считать, что весь ток успевает пройти при неотклонённом положении рамки. Рамка, однако, при этом получает толчок, в результате которого возникает движение, описываемое уравнением свободных колебаний (7) при начальных условиях (6).

Для вычисления скорости $\dot{\varphi}_0$, полученной в результате толчка, умножим уравнение (5) на dt и проинтегрируем его по времени от 0 до τ — момента окончания токового импульса:

$$\int_0^\tau \ddot{\varphi} dt + 2\gamma \int_0^\tau \dot{\varphi} dt + \omega_0^2 \int_0^\tau \varphi dt = K \int_0^\tau I dt. \quad (15)$$

Рассмотрим первое слагаемое этого равенства:

$$\int_0^\tau \ddot{\varphi} dt = \dot{\varphi} \Big|_0^\tau = \dot{\varphi}(\tau). \quad (16)$$

Второе и третье слагаемые пренебрежимо малы:

$$2\gamma \int_0^\tau \dot{\varphi} dt = 2\gamma \varphi \Big|_0^\tau \approx 0, \quad \omega_0^2 \int_0^\tau \varphi dt \approx 0, \quad (17)$$

поскольку, согласно принятому условию, к моменту времени τ рамка практически не сдвигается из положения равновесия.

$$K \int_0^\tau I dt = Kq,$$

где q — полный электрический заряд, прошедший через рамку за время импульса. Строго говоря, заряд q определяется не только током I , вызванным внешней ЭДС \mathcal{E} , но и током индукции, возникающим при

движении рамки, но в наших условиях, согласно (17), вкладом индукционного тока можно пренебречь.

Итак, уравнение (15) сводится к следующему:

$$\dot{\varphi}(\tau) = Kq. \quad (18)$$

Таким образом, при пропускании коротких импульсов тока через баллистический гальванометр начальная скорость движения рамки пропорциональна полному электрическому заряду, прошедшему через рамку за всё время импульса. Подставляя выражение (18) в решения (9), (13) или (14), легко увидеть, что наибольший угол, на который отклоняется рамка, также пропорционален q .

Величина $C_Q = q/\varphi_{\max}$ называется **баллистической постоянной** гальванометра. Баллистическая постоянная наряду с динамической является важнейшей характеристикой гальванометра, но в отличие от динамической она существенно зависит от режима работы гальванометра (от сопротивления цепи).

Выбирая оптимальный режим работы, приходится одновременно исходить из двух противоречивых требований: желания получить максимальную чувствительность гальванометра к заряду и стремления по возможности сократить время, затрачиваемое на измерения.

Расчёт показывает, что максимальный отброс достигается при полном отсутствии затухания (тормозящий индукционный ток отсутствует при обрыве в цепи):

$$\varphi_{\max \text{ св}} = \frac{\dot{\varphi}(\tau)}{\omega_0} = \frac{Kq}{\omega_0}. \quad (19)$$

В этом случае, однако, возникшие в результате отброса колебания рамки не будут успокаиваться, и прибор не скоро сможет быть использован для повторных измерений. Поэтому обычно заботятся о том, чтобы затухание гальванометра не было слишком малым. Кроме того, отметим что затухание приводит к тому, что зайчик начинает вести себя более спокойно и слабее реагирует на посторонние электрические и механические импульсы.

Обычно удобнее всего работать в режиме, близком к критическому. При этом обеспечивается быстрое затухание колебаний, и чувствительность прибора достаточно велика.

Как следует из уравнения (13), в случае критического затухания

$$\varphi_{\max \text{ кр}} = \frac{Kq}{\omega_0 e}. \quad (20)$$

Таким образом, в критическом режиме максимальное отклонение зайчика в e раз меньше, чем в режиме свободных колебаний. Отсюда, в

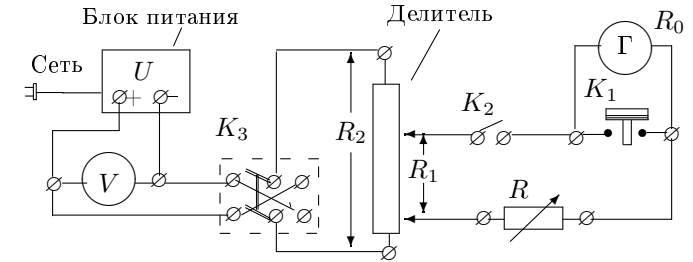


Рис. 2. Схема установки для работы гальванометра в стационарном режиме

частности, следует, что отношение баллистических постоянных

$$\frac{C_{Q \text{ кр}}}{C_{Q \text{ св}}} = e.$$

А. Определение динамической постоянной

Экспериментальная установка. Схема для исследования гальванометра в стационарном режиме представлена на рис. 2. Постоянное напряжение $U \simeq 1,5$ В снимается с блока питания и измеряется вольтметром V . Ключ K_3 позволяет менять направление тока через гальванометр Γ , делитель напряжения — менять величину тока в широких пределах. Ключ K_2 служит для включения гальванометра, кнопка K_1 — для его успокоения. Магазин сопротивлений R позволяет менять режим работы гальванометра от колебательного до аperiodического.

При малых R_1 сила тока, протекающего через гальванометр может быть вычислена по очевидной формуле:

$$I = U_0 \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{R + R_0}, \quad (21)$$

где U_0 — показания вольтметра, R_1/R_2 — положение делителя, R — сопротивление магазина, R_0 — внутреннее сопротивление гальванометра.

Угол отклонения рамки от положения равновесия измеряется с помощью осветителя, зеркальца, укрепленного на рамке, и шкалы, на которую отбрасывается луч света от зеркальца. Координата x светового пятна на шкале связана с углом отклонения рамки формулой

$$x = a \operatorname{tg}(2\varphi),$$

где a — расстояние от шкалы до зеркальца. При малых углах можно считать, что $\varphi = x/2a$. Динамическую постоянную

$$C_I = \frac{I}{\varphi} = \frac{2aI}{x}, \quad (22)$$

как правило, выражают в единицах $\left[\frac{A}{\text{мм/м}}\right]$ (ток I измеряется в амперах, x — в мм, a — в метрах).

Б. Определение критического сопротивления гальванометра

Измерение критического сопротивления гальванометра можно выполнить с помощью той же цепи (рис. 2).

При больших R свободное движение рамки имеет колебательный характер. С уменьшением R затухание увеличивается (см. (4)), и колебательный режим переходит в аperiodический.

Скорость затухания колебаний принято характеризовать декрементом затухания Δ , равным отношению углов двух последовательных отклонений в одну сторону. С помощью (9) находим

$$\Delta = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\gamma T},$$

где T — период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (23)$$

Вместо декремента затухания Δ можно рассматривать логарифмический декремент затухания Θ :

$$\Theta = \ln \Delta = \gamma T = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}. \quad (24)$$

Измеряя зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления внешней цепи, можно найти $R_{\text{кр}}$, т. е. значение R , при котором $\Theta \rightarrow \infty$. Измерения логарифмического декремента при сильном затухании затруднены, поэтому исследуем зависимость Θ от R . Подставляя в (24) значения T из (23), ω из (10), γ и ω_0 из (4), получим

$$\Theta = \gamma T = 2\pi \frac{\gamma}{\omega} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi R_3}{\sqrt{(R_0 + R)^2 - R_3^2}}, \quad (25)$$

где введено обозначение

$$R_3 = \frac{(BSN)^2}{2\sqrt{JD}} = R_0 + R_{\text{кр}}. \quad (26)$$

После простого преобразования равенства (25) получим

$$\frac{1}{\Theta^2} = \frac{(R_0 + R)^2}{4\pi^2 R_3^2} - \frac{1}{4\pi^2}. \quad (27)$$

Последнее уравнение, представленное на графике в координатах $X = (R_0 + R)^2$, $Y = 1/\Theta^2$, имеет вид прямой, угол наклона которой позволяет рассчитать критическое сопротивление:

$$R_{\text{кр}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Delta X}{\Delta Y}} - R_0. \quad (28)$$

В. Определение баллистической постоянной и критического сопротивления гальванометра, работающего в баллистическом режиме

Для изучения работы гальванометра в режиме измерения заряда используется схема, представленная на рис. 3.

Система ключей устроена так, что нормально ключ K_2 замкнут, а ключи K_3 и K_4 разомкнуты. При нажатии на кнопку K_0 сначала размыкается ключ K_2 , затем замыкается K_3 и через некоторое время — K_4 .

При нормальном положении кнопки K_0 конденсатор C заряжается до напряжения

$$U_C = \frac{R_1}{R_2} U_0.$$

Заряд конденсатора равен

$$q = CU_C = \frac{R_1}{R_2} U_0 C. \quad (29)$$

При нажатии на ключ K_0 конденсатор отключается от источника постоянного напряжения (размыкается ключ K_2) и подключается к гальванометру (замыкается ключ K_3).

Ёмкость конденсатора выбрана так, что к моменту замыкания ключа K_4 весь заряд успевает пройти через гальванометр, и рамка получает начальную скорость $\dot{\varphi}(\tau)$ (см. (18)). При этом можно считать, что отклонение рамки, происходящее за время, протекающее между замыканием ключей K_3 и K_4 , равно нулю.

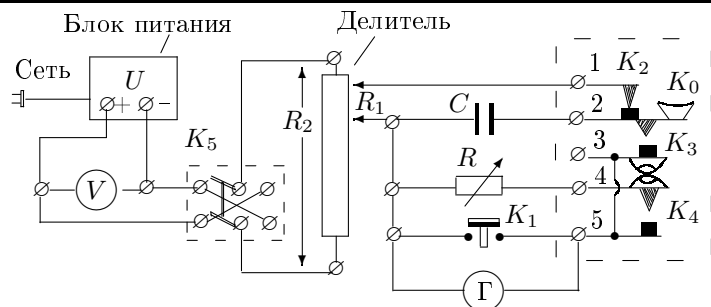


Рис. 3. Схема установки для определения баллистической постоянной

При замыкании ключа K_4 гальванометр шунтируется внешним сопротивлением R , и, в зависимости от величины этого сопротивления, движение рамки описывается одним из уравнений (12), (13) или (14).

Первый отброс зайчика l_{\max} после нажатия на кнопку K_0 зависит от сопротивления внешней цепи, подключённой к гальванометру. Для определения $R_{\text{кр}}$ используется то обстоятельство, что в критическом режиме максимальное отклонение зайчика в e раз меньше, чем у гальванометра без затухания (см. (19) и (20)).

Следует помнить, что наблюдать колебания рамки при полном отсутствии затухания, конечно, невозможно, так как даже при разомкнутой внешней цепи ($R = \infty$) остаётся трение в подвеске и трение рамки о воздух. Величину максимального отклонения гальванометра без затухания φ_0 можно, однако, рассчитать, если при разомкнутой цепи измерены максимальное отклонение рамки φ_1 и логарифмический декремент затухания Θ_0 .

Из уравнений (9) и (24) следует, что при $\gamma \ll \omega_0$

$$\varphi_0 = \varphi_1 \cdot e^{\Theta_0/4}. \quad (30)$$

Баллистическая постоянная гальванометра $C_{Q \text{ кр}} \left[\frac{K}{\text{мм/м}} \right]$ определяется при критическом сопротивлении ($R = R_{\text{кр}}$):

$$C_{Q \text{ кр}} = \frac{q}{\varphi_{\max \text{ кр}}} = 2a \frac{R_1}{R_2} \frac{U_0 C}{l_{\max \text{ кр}}}, \quad (31)$$

где $l_{\max \text{ кр}}$ — величина первого отброса в критическом режиме, выраженная в делениях шкалы (мм), a — расстояние от зеркала до шкалы, выраженное в метрах, произведение $U_0 C$ — заряд, выраженный в кулонах.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается определить динамическую постоянную, критическое сопротивление и оценить линейность шкалы гальванометра, работающего в стационарном (токовом) режиме; определить критическое сопротивление и баллистическую постоянную гальванометра, работающего в баллистическом режиме (режиме измерения заряда).

I. Подготовка приборов к работе

1. Настройте осветитель гальванометра: для этого перемещая штатив со шкалой вдоль луча, добейтесь появления на шкале чёткой вертикальной риски. Перемещая штатив (или шкалу) перпендикулярно лучу, совместите риску с нулевым делением шкалы. Настроив, временно отключите осветитель от сети.
2. Установите делитель на небольшое выходное напряжение ($\frac{R_1}{R_2} \simeq \frac{1}{5000}$ или $\frac{1}{2000}$), а сопротивление магазина установите близким к максимальному ($R \simeq 50 \text{ кОм}$).
3. Соберите электрическую цепь согласно рис. 2 (кнопка K_1 вмонтирована в блок питания!).
4. При разомкнутых ключах K_2 и K_3 включите в сеть блок питания и, убедившись, что шкала вольтметра V выбрана правильно, замкните ключ K_3 .
5. Включите осветитель гальванометра.
6. Замкните ключ K_2 и, не меняя делителя, подберите сопротивление магазина, при котором зайчик отклоняется почти на всю шкалу.

II. Определение динамической постоянной

7. Снимите зависимость отклонения зайчика x от сопротивления магазина R , увеличивая сопротивление магазина, но не меняя делителя. Запишите показания вольтметра U_0 , положение делителя R_1/R_2 , величину R_2 и внутреннее сопротивление гальванометра R_0 , указанное на установке.

III. Определение критического сопротивления

8. В схеме, собранной по рис. 2, вновь установите такое значение R , при котором зайчик отклоняется почти на всю шкалу.
9. Разомкните ключ K_2 и наблюдайте свободные колебания рамки. Для быстрого торможения рамки замыкайте ключ K_1 в момент прохождения зайчика через ноль. Измерьте два последовательных отклонения зайчика в одну сторону для расчёта логарифмического декремента затухания Θ_0 разомкнутого гальванометра (см. (24)).

10. Измерьте период T_0 свободных колебаний рамки (приблизённо).
11. Снова замкните ключ K_2 и убедитесь, что зайчик на краю шкалы. Теперь разомкните ключ K_3 . Колебания рамки затухнут быстрее, так как тормозящий движение ток увеличился с уменьшением сопротивления цепи.
12. Подберите *наибольшее* сопротивление магазина R , при котором при размыкании ключа K_3 зайчик не переходит за нулевое значение (при этом для большей точности каждый раз следует подбирать положение делителя так, чтобы в стационарном положении зайчик отклонялся почти на всю шкалу). Это наибольшее сопротивление близко к критическому сопротивлению цепи $R_{кр}$.
13. Установите сопротивление магазина $R \simeq 3 R_{кр}$ (близкое целое) и подберите делитель так, чтобы в стационарном режиме зайчик отклонялся почти на всю шкалу. Для расчёта Θ измерьте два последовательных отклонения зайчика в одну сторону после размыкания ключа K_3 .
14. Повторите измерения п. 13 для других R , постепенно увеличивая сопротивление магазина до $10R_{кр}$ (в интервале $(3 \div 6)R_{кр}$ точки должны лежать почаще).

IV. Баллистический режим

15. Соберите схему по рис. 3. Установите на магазине сопротивление $R = 50$ кОм. Включите в сеть блок питания и замкните ключ K_5 .
16. Для измерения первого отброса зайчика в режиме свободных колебаний ($R = \infty$) разомкните цепь R , отсоединив одну из клемм от магазина.

Подберите делитель так, чтобы при замыкании ключа K_0 первый отброс l_{\max} соответствовал отклонению зайчика почти на всю шкалу (ключ K_0 держите замкнутым, когда считываете результат!).

17. Вновь подключите магазин R . Не меняя положения делителя, снимите зависимость первого отброса от величины R .

В критическом режиме первый отброс в ϵ раз меньше, чем в режиме свободных колебаний. Поэтому уменьшайте R до тех пор, пока первый отброс уменьшится до $1/3 \div 1/4$ от максимальной величины.

18. Запишите положение делителя R_1/R_2 и значение ёмкости C . Измерьте расстояние a от шкалы до зеркальца гальванометра.
19. Разберите схему.

V. Обработка результатов

20. Рассчитайте токи I по формуле (21) и постройте график $I = f(x)$. Оцените линейность шкалы гальванометра. По наклону прямой рассчитайте динамическую постоянную C_I [А/(мм/м)] по формуле (22).

21. Рассчитайте логарифмический декремент затухания Θ_0 разомкнутого гальванометра по формуле (24).
22. Постройте график $1/\Theta^2 = f[(R + R_0)^2]$ и по наклону прямой (в области малых R) рассчитайте критическое сопротивление по формуле (28).
23. Постройте график $l_{\max} = f[(R_0 + R)^{-1}]$. Определите по графику критическое сопротивление гальванометра (с учётом (30)).
24. Сравните значения $R_{кр}$, определённые подбором (п. 12) и по графикам для стационарного и баллистического режимов.
25. Рассчитайте баллистическую постоянную в критическом режиме $C_{Q_{кр}}$ [К/(мм/м)] по формуле (31).
26. Сравните время релаксации $t = R_0 C$ и период свободных колебаний гальванометра T_0 .

Контрольные вопросы

1. Дайте определение динамической постоянной гальванометра. От чего она зависит и в каких единицах указывается в паспорте гальванометра?
2. Какие режимы движения рамки возможны при работе гальванометра в стационарном режиме? В каком из этих режимов удобно проводить измерения постоянного тока?
3. Как изменяется коэффициент затухания подвижной системы гальванометра при увеличении омического сопротивления его цепи?
4. Почему рамка гальванометра быстро успокаивается при замыкании ключа K_1 (см. рис. 2)?
5. Зачем в полюсах магнита гальванометра делают вырез цилиндрической формы? (рис. 1)
6. В чём сущность баллистического режима работы гальванометра? Дайте определение баллистической постоянной гальванометра.
7. При каких условиях первый отброс гальванометра, работающего в баллистическом режиме, максимален?
8. Выведите формулу (30).
9. При значениях $R > 10R_{кр}$ возможно отклонение графика $\frac{1}{\Theta^2} = f[(R_0 + R)^2]$ от прямой. Что следует учесть для объяснения этого отклонения?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983, §§ 124, 125.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977, §§ 56, 209, 210.

НОСИТЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА В ВАКУУМЕ, МЕТАЛЛАХ И ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Электрический ток представляет собой направленный перенос зарядов. Микрочастицы, осуществляющие этот перенос, называют **носителями тока**. В простейшем случае (ток в вакуумном диоде, ионный пучок в масс-спектрометре, и т. д.) носителями тока являются заряженные частицы, движущиеся в свободном от вещества пространстве. Чаще всего такими частицами являются электроны — элементарные частицы с известными значениями заряда и массы.

Однако понятие **носители тока в веществе** не является таким простым и наглядным. Хотя в металлах и полупроводниках перенос заряда происходит вследствие перемещения всё тех же электронов, их движение уже не является движением свободных частиц, как в вакууме. Теперь электроны движутся в сильном периодическом поле, образованном ионами кристаллической решётки, и взаимодействуют между собой, причём это движение и это взаимодействие подчиняются законам квантовой механики. По этим законам получается, что такое движение можно по-прежнему интерпретировать как движение свободных заряженных частиц, но масса этих частиц, называемая **эффективной массой**, не совпадает с массой свободного электрона. Более того, в полупроводниках и в некоторых металлах простые законы движения получаются только в том случае, если вместо электронов ввести фиктивные частицы — так называемые **дырки**. Оказывается, что в электрических и магнитных полях дырки движутся так же, как двигались бы положительно заряженные частицы с зарядом, численно равным заряду электрона, и с некоторой **эффективной массой** (не равной массе электрона).

Таким образом, в физике металлов и полупроводников в качестве носителей тока рассматривают квазичастицы, не существующие в природе отдельно от рассматриваемого вещества. Заряд этих носителей чис-

ленно точно равен заряду электрона и может быть как отрицательным, так и положительным. В первом случае они по-прежнему называются электронами (хотя их масса, как уже говорилось выше, не равна массе электрона), во втором — дырками. В полупроводниках присутствуют оба типа этих носителей, в большинстве металлов имеются только отрицательные носители, причём по классической теории электропроводности в качестве таковых рассматривают обычные свободные электроны.

1. Определение элементарного заряда

Первые точные измерения элементарного заряда были выполнены Робертом Милликеном. Идея этих опытов достаточно проста. Если элементарный заряд действительно существует, то величина заряда q любого тела может принимать только дискретную последовательность значений:

$$q = 0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e, \pm 4e, \dots, \pm ne, \dots,$$

где e — элементарный заряд (*абсолютная* величина заряда электрона).

В опыте Милликаена измеряется электрический заряд капелек масла микроскопических размеров, несущих всего несколько элементарных зарядов. Сравнивая между собой заряды капель, можно убедиться в том, что все они кратны одному и тому же числу, которое и равно, очевидно, заряду электрона.

Измерение заряда капель производится путём исследования их движения в электрическом поле. В расположенный горизонтально плоский конденсатор через отверстие в верхней пластине впрыскиваются мелкие капельки масла, получаемые с помощью специального распылителя. На пластины конденсатора подаётся постоянное напряжение (несколько киловольт). В ходе опыта это напряжение можно изменять. При распылении капельки масла вследствие трения о воздух приобретают случайный по величине и знаку электрический заряд. Попадая в конденсатор, капельки масла движутся в воздухе, опускаясь под действием силы тяжести или поднимаясь под действием электрического поля. Время t_0 опускания капли и время её обратного подъёма t легко измерить с необходимой точностью. Оказывается, что именно к измерению этих двух интервалов времени и сводится измерение заряда капли.

Разумеется, дискретность заряда разных капель и, следовательно, величина элементарного заряда, то есть заряд электрона, могут быть обнаружены только в том случае, если абсолютная ошибка в измерении заряда капли будет существенно меньше самого элементарного заряда. В опытах Милликаена необходимая точность вполне может быть обеспечена в условиях лабораторного практикума.

2. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях

Рассмотрим несколько примеров движения электронов в вакууме под действием электрического и магнитного полей. Такие условия движения реализуются, например, в электронных вакуумных приборах, таких, как электронно-лучевая трубка или вакуумный диод.

Эти относительно несложные и наглядные примеры позволят нам понять, как можно измерить такую важную характеристику заряженной частицы, как отношение её заряда к её массе e/m (удельный заряд частицы).

2.1. Движение электрона в однородном магнитном поле

Как известно, на заряд q , движущийся со скоростью \mathbf{v} в магнитном поле \mathbf{B} , действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Пусть электрон движется с некоторой скоростью \mathbf{v} в однородном магнитном поле, индукция которого \mathbf{B} перпендикулярна направлению скорости. На движущийся электрон действует сила

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.1)$$

где e — абсолютная величина заряда электрона. Эта сила перпендикулярна скорости движения и не изменяет поэтому её абсолютной величины. Траектория движения электрона в этом случае является окружностью. Такое движение частицы называется циклотронным вращением. Вычислим радиус R этой окружности, называемый ларморовским радиусом электрона, и угловую скорость циклотронного вращения ω_c — так называемую циклотронную частоту.

Сила F является центростремительной силой, поэтому

$$m \frac{v^2}{R} = evB,$$

откуда

$$R = \frac{v}{\omega_c}, \quad (3.2)$$

где

$$\omega_c = \frac{eB}{m}$$

— циклотронная частота электрона. Важно заметить, что циклотронная частота не зависит от энергии частицы, так что в однородном магнитном поле все электроны, находящиеся в рассматриваемом объёме, вращаются с одинаковой частотой.

Скорость движения электрона можно найти, зная разность потенциалов V , пройденную электроном:

$$\frac{mv^2}{2} = eV,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 6 \cdot 10^5 \sqrt{V} \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3.3)$$

Пусть теперь электрон движется в магнитном поле под некоторым углом α к вектору индукции. Скорость электрона \mathbf{v} можно разложить на две составляющие, одна из которых перпендикулярна, а другая параллельна магнитному полю:

$$v_{\perp} = v \sin \alpha, \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha.$$

Параллельная составляющая скорости не вызывает появления силы Лоренца, поэтому проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B} , по-прежнему представляет собой окружность с ларморовским радиусом, определяемым поперечной составляющей скорости:

$$R = \frac{mv_{\perp}}{eB}. \quad (3.4)$$

В направлении поля \mathbf{B} на электрон не действуют никакие силы, следовательно, в этом направлении электрон движется равномерно со скоростью v_{\parallel} . Траектория электрона представляет собой винтовую линию. Найдём расстояние L , которое проходит электрон в направлении вдоль поля за один оборот (шаг винтовой линии). Как нетрудно видеть, время одного оборота T_c , называемое циклотронным периодом, равно: $T_c = 2\pi R/v_{\perp}$. Заменяя R/v_{\perp} с помощью (3.4), найдём

$$T_c = \frac{2\pi m}{eB}. \quad (3.5)$$

За это время электрон проходит вдоль магнитного поля расстояние

$$L = v_{\parallel} T_c = \frac{2\pi v \cos \alpha}{(e/m)B}. \quad (3.6)$$

Нас будет интересовать главным образом случай, когда углы невелики, т.е. $\cos \alpha \approx 1$:

$$L \approx \frac{2\pi v}{(e/m)B}. \quad (3.7)$$

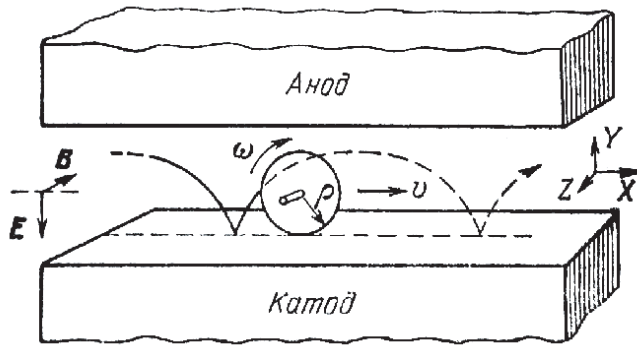


Рис. 3.1. Движение заряда в скрещенных полях

Таким образом, расстояние L не зависит от угла α (для малых углов), так что все электроны, вышедшие из одной точки, после одного оборота вновь соберутся в одной точке (сфокусируются). Как следует из (3.7), индукция поля B , при которой точка фокусировки отстоит от точки вылета на расстоянии L , зависит от величины e/m — удельного заряда электрона. Обозначим через $B_{\text{ф}}$ индукцию магнитного поля, при которой наступает фокусировка. Используя (3.3) и (3.7), выразим удельный заряд электрона e/m через $B_{\text{ф}}$:

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{L^2 B_{\text{ф}}^2}. \quad (3.8)$$

Эта формула положена в основу экспериментального измерения удельного заряда электрона по методу магнитной фокусировки.

2.2. Движение электрона в скрещенных электрическом и магнитном полях

В так называемом методе магнетрона отношение e/m измеряется на основе исследования движения электрона в скрещенных электрическом и магнитном полях, перпендикулярных друг другу. Название метода связано с тем, что такая конфигурация электрического и магнитного полей реализуется в магнетронах — генераторах электромагнитных колебаний сверхвысоких частот.

Для уяснения идеи метода магнетрона, рассмотрим вначале движение заряда в «плоском магнетроне», который можно представить себе в виде плоского конденсатора, помещённого в магнитное поле так, что $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ (рис. 3.1). При этом отрицательная пластина конденсатора играет

роль катода, положительная соответственно анода. Если бы магнитного поля не было, то все электроны, вылетевшие без начальной скорости из катода такого плоского диода, попадали бы на анод. При наличии магнитного поля траектории электронов искривляются, вследствие чего при достаточно большом магнитном поле ни один электрон не достигнет анода. Для заданного напряжения между катодом и анодом существует некоторое критическое значение магнитной индукции $B_{\text{кр}}$, при котором траектории касаются поверхности анода. Если $B < B_{\text{кр}}$, то все электроны достигают анода и ток через магнетрон имеет то же значение, что и без магнитного поля. Если же $B > B_{\text{кр}}$, то электроны не достигают анода и ток через лампу равен нулю.

Рассчитаем это критическое значение индукции магнитного поля. Уравнения движения электрона в нашем случае имеет вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = ev_y B, \quad (3.9)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = eE - ev_x B \quad (3.10)$$

при начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$, $v_x(0) = v_y(0) = 0$.

Непосредственной подстановкой несложно убедиться в том, что решением системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями является уравнение циклоиды (в параметрической форме):

$$x = vt - R \sin \omega t, \quad y = R(1 - \cos \omega t), \quad (3.11)$$

где $v = \frac{E}{B}$, $R = \frac{v}{\omega} = \frac{Em}{eB^2}$.

Касание анода происходит при $2R = d$ (d — расстояние между анодом и катодом). Этому значению соответствует критическое поле

$$B_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{2V}}{d\sqrt{e/m}}. \quad (3.12)$$

Из последней формулы находим удельный заряд:

$$\frac{e}{m} = \frac{2V}{d^2 B_{\text{кр}}^2}. \quad (3.13)$$

Эта формула позволяет вычислить e/m , если при заданном значении напряжения на аноде V найти такое значение магнитного поля, при превышении которого ток в магнетроне отсутствует.

2.3. Электрический ток в вакуумном диоде

Электрический ток в вакуумном диоде представляет собой упорядоченное движение электронов, испускаемых накаливаемым катодом. Явление испускания электронов поверхностью твёрдого тела или жидкости называется **электронной эмиссией**. Существует несколько видов электронной эмиссии. В частности, в случае испускания электронов поверхностями нагретых тел эмиссия называется **термоэлектронной**.

Одним из ключевых понятий, лежащих в основе объяснения явления электронной эмиссии, является понятие **работы выхода**. Под работой выхода понимают работу, которую необходимо совершить для удаления электрона из твёрдого вещества в вакуум в состояние с равной нулю кинетической энергией. В случае термоэлектронной эмиссии работа выхода совершается за счёт кинетической энергии электронов, которой они обладают внутри тела. У чистых металлов работа выхода составляет несколько электрон-вольт.

При повышении температуры металла увеличивается энергия теплового движения электронов, количество быстрых электронов и заметное их количество сможет преодолеть задерживающее электрическое поле и выйти из металла. Если приложить электрическое поле, направленное к поверхности металла, то оно будет увлекать вышедшие электроны и через вакуум потечёт электрический ток. Этот ток называется **термоэлектронным**.

При холодном катоде ток через диод при подаче на анод положительного потенциала практически отсутствует. Если же нагреть катод, то в диоде возникает заметный ток. Ток прекращается при изменении полярности батареи. Это как раз и указывает на то, что носителями тока в диоде являются отрицательно заряженные частицы, а именно электроны.

Если бы все электроны, вылетающие из поверхности катода, попадали на анод, то сила термоэлектронного тока I не зависела бы от величины приложенного напряжения V . На самом деле это не так. С возрастанием напряжения ток растёт. Однако возрастание идёт не пропорционально V , так что закон Ома для вакуумного диода не выполняется. При достижении определённого напряжения дальнейшее нарастание тока практически прекращается. Ток достигает предельного значения, называемого током насыщения. Величина тока насыщения определяется количеством электронов, которое способно выйти из поверхности катода в единицу времени и, следовательно, растёт с ростом температуры. Если электрическое поле настолько сильное, что способно отвести все эмитированные электроны, то дальнейшее увеличение

напряжения уже не приводит к увеличению термоэлектронного тока. Этим объясняется явление насыщения тока.

Нелинейная зависимость тока от напряжения объясняется тем, что в пространстве между катодом и анодом образуется отрицательный пространственный заряд, изменяющий распределение потенциала в диоде.

Допустим, что диод плоский, то есть его электроды представимы в виде двух параллельных плоскостей (расстояние между электродами много меньше их площади). Направим ось X перпендикулярно к поверхности катода в сторону анода, совместив начало координат с поверхностью катода. В этой модели задача стала одномерной — все величины являются функциями только координаты x . Потенциал электрического поля φ удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.14)$$

где $\rho(x)$ — плотность электрического заряда. Плотность тока $j = \rho v$. Пренебрегая столкновениями электронов, их скорость можно определить из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi.$$

Начальными тепловыми скоростями, с которыми вылетают электроны с поверхности катода, здесь пренебрегается, а потенциал катода принимается равным нулю. Исключив из этих соотношений плотность электронов и скорость, приходим к уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \sqrt{\frac{m}{2e\varphi}} j. \quad (3.15)$$

Для однозначного решения этого дифференциального уравнения второго порядка помимо условия $\varphi(0) = 0$ необходимо ещё одно граничное условие. Если сопоставить уравнения (3.14) и (3.15), то можно сделать вывод об обращении плотности заряда на катоде в бесконечность. Точка $x = 0$ является особой точкой уравнения (3.15), в которой оно теряет смысл. Это связано с тем, что мы пренебрегли тепловыми скоростями на катоде, приняв их равными нулю. Оказывается, что в этой модели плотность тока через диод получается конечной, только если напряжённость поля у катода равна нулю. Это условие означает, что поле возникающего вблизи катода пространственного заряда полностью экранирует электрическое поле, создаваемое разностью потенциалов между анодом и катодом. Таким образом, получаем второе граничное условие

в виде

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

Теперь задача о распределении потенциала становится однозначной и приводит к решению

$$j = \frac{4\varepsilon_0}{9x^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} \varphi^{3/2}.$$

Так как $\varphi(d) = V$, где d — расстояние между электродами, то для зависимости тока от напряжения получаем

$$I = \frac{4\varepsilon_0 S}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} V^{3/2},$$

где S — площадь катода. Мы получили зависимость тока через плоский диод от приложенного к нему напряжения, известную как «закон трёх вторых» для плоского диода. Оказывается, что не только для плоского вакуумного диода, а и для вакуумного диода с электродами любой другой геометрии ток подчиняется «закону степени трёх вторых».

Полученная формула подсказывает очевидную процедуру измерения удельного заряда электрона. Для этого достаточно по результатам эксперимента построить график зависимости тока от напряжения в степени трёх вторых, который должен представлять собой прямую линию, проходящую через начало координат. Угол наклона этой прямой линии пропорционален (с известным коэффициентом) квадратному корню из e/m — искомой величины удельного заряда электрона.

3. Свободные носители заряда в металлах и полупроводниках

3.1. Зонная модель

Проводимость большинства твёрдых тел связана с движением электронов. Электроны входят в состав атомов всех тел, однако одни тела не проводят электрический ток (диэлектрики), а другие являются хорошими его проводниками. Причина различия заключается в особенностях энергетического состояния внешних электронов атомов в этих веществах.

При объединении атомов в твёрдое тело (кристалл) состояние внешних электронов существенно меняется: эти электроны теряют связь со «своим» атомом и теперь принадлежат всему кристаллу в целом. Каждому уровню энергии электрона одиночного атома соответствует в кристалле группа близких по энергии уровней (разрешённая зона),

в которой число уровней равно числу мест на соответствующем атомном уровне, умноженному на число атомов в кристалле. Число уровней, объединившихся в зону, при слиянии не меняется. Оно определяет максимальное число электронов, которое может «поместиться» в зоне (в силу принципа Паули).

Если одна из энергетических зон до конца заполнена электронами, а следующая зона совершенно пуста, то слабое внешнее электрическое поле не может изменить состояния электронов. Вещество с таким заполнением зон является диэлектриком. Верхняя из заполненных зон называется валентной зоной.

Положение меняется, если в кристалле имеется зона, частично заполненная электронами. В этом случае внешнее электрическое поле может изменить распределение электронов по уровням энергии и создать упорядоченное движение электрических зарядов. Частично заполненная зона называется зоной проводимости. Частично заполненная электронами зона имеется у всех твёрдых проводников электрического тока; в том числе её имеют все металлы.

Если ширина запрещённой зоны относительно невелика, тепловое движение перебрасывает часть электронов из валентной зоны в свободную — зону проводимости. При этом в зоне проводимости появляются электроны, а в валентной зоне — свободные места — дырки. Электроны в зоне проводимости и дырки валентной зоны участвуют в переносе заряда. Такие вещества называются полупроводниками. Обычно к полупроводникам относят материалы с шириной запрещённой зоны $\Delta E \lesssim 1,5 - 2$ эВ. Число носителей тока в полупроводниках экспоненциально увеличивается с повышением температуры.

Рассматривая коллективное движение электронов почти заполненной зоны, полезно мысленно заполнить свободные места воображаемыми парами, состоящими из электронов с одинаковыми по величине положительным и отрицательным зарядами. Обычные отрицательные заряженные электроны заполняют теперь все уровни и, следовательно, не могут принимать участия в проводимости. Они образуют структуру, характерную для изоляторов. Проводимость связана только с введенными нами «электронами», обладающими положительным зарядом. Такие «электроны» носят название дырок. При рассмотрении явлений, происходящих в металлах с почти заполненной валентной зоной, удобно представлять себе дело так, как если бы проводниками тока были не настоящие электроны, а положительно заряженные дырки. В этом случае говорят о дырочном типе проводимости.

Электронным типом проводимости обладает большинство чистых металлов. Однако в ряде металлов (бериллий, кадмий и некоторые дру-

гие) основными носителями электрического тока являются дырки. Это связано с особенностями их зонной структуры.

Рассмотрим прохождение тока в рамках модели свободных электронов.

При наложении внешнего электрического поля \mathbf{E} электроны начинают ускоряться. Однако после некоторого «свободного пробега» происходит соударение с решёткой, электрон теряет набранную энергию, и процесс ускорения начинается заново. Соударения с решёткой, подобно вязкому трению, приводят к тому, что результирующее движение электрона можно описать некоторой средней скоростью $\langle \mathbf{v} \rangle$, пропорциональной внешнему полю:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = -b\mathbf{E}. \quad (3.16)$$

Введённая здесь величина b называется подвижностью. В определённых пределах изменения температуры, напряжённости поля и его частоты эта характеристика вещества остаётся постоянной и приводится в справочниках. Для положительно заряженных носителей тока в формуле (3.16), очевидно, стоит знак «плюс».

При установившемся движении средняя сила, действующая на электроны со стороны кристаллической решётки, равна внешней силе $-eE$ и направлена в противоположную сторону. Поэтому действие кристаллической решётки на движение электронов в среднем эквивалентно силе трения, пропорциональной скорости:

$$F_{\text{тр}} = -\frac{e}{b} \langle \mathbf{v} \rangle. \quad (3.17)$$

Если концентрация электронов равна n , величина плотности тока определится очевидным соотношением

$$\mathbf{j} = en \langle \mathbf{v} \rangle = enb\mathbf{E}. \quad (3.18)$$

Таким образом, выполняется закон Ома — величина плотности тока \mathbf{j} пропорциональна напряжённости поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.19)$$

Сравнивая (3.18) и (3.19), получаем выражение для проводимости

$$\sigma = enb. \quad (3.20)$$

Химически чистые полупроводники обладают проводимостью, которая связана с небольшим числом электронов в зоне проводимости и

таким же числом дырок в валентной зоне. Такая проводимость называется *собственной* — она не связана с примесями. Добавление небольшого количества специально подобранных примесей (так называемое *легирование*) может существенно увеличить проводимость полупроводников или даже создать ощутимую проводимость при комнатной температуре в веществах с запрещённой зоной, ширина которой заметно превышает 2 эВ. Такое происходит, когда атомы примеси имеют энергетические уровни в запрещённой зоне основного материала.

Если заполненные примесные уровни расположены вблизи потолка запрещённой зоны, находящиеся на этих уровнях электроны легко переходят в зону проводимости. Наоборот, на свободные уровни у дна зоны проводимости легко переходят электроны валентной зоны с образованием в этой зоне дополнительного количества дырок. В обоих случаях число переносчиков заряда увеличивается, и проводимость возрастает. В первом случае говорят о полупроводниках *электронного*, или *n -типа*, а во втором — о полупроводниках *дырочного*, или *p -типа*. В общем случае в процессе электрической проводимости участвуют как электроны, так и дырки. Удельная электрическая проводимость полупроводника при этом равна

$$\sigma = e(nb_e + pb_p), \quad (3.21)$$

где n и p — концентрации электронов и дырок, а b_e и b_p — их подвижности. В случае *примесной проводимости* один тип носителей обычно существенно преобладает над другим и в формуле (3.21) можно пренебречь одним из слагаемых.

3.2. Эффект Холла в металлах и полупроводниках

Формула (3.20) показывает, что исследование электрической проводимости проводников позволяет определить произведение nb . Как мы увидим ниже, исследование эффекта Холла позволяет находить плотность носителей n , после чего можно найти и их подвижность b . Таким образом, одновременное исследование электрической проводимости и эффекта Холла позволяет экспериментально находить важнейшие параметры, определяющие состояние электронов в металлах и полупроводниках. Эффект Холла позволяет также определить преобладающий тип проводимости — электронный или дырочный.

Суть эффекта Холла состоит в следующем. Пусть через однородную пластину металла вдоль оси x течёт ток I (рис. 3.2).

Если эту пластину поместить в магнитное поле, направленное по оси y , то между гранями А и Б появляется разность потенциалов. В самом деле, на электрон, движущийся со скоростью $\langle \mathbf{v} \rangle$ в электромагнит-

ном поле, действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F}_\text{л} = -e\mathbf{E} - e\langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}, \quad (3.22)$$

где, как и выше, e — абсолютная величина заряда электрона, \mathbf{E} — напряжённость электрического поля, \mathbf{B} — индукция магнитного поля. В нашем случае сила, обусловленная вторым слагаемым, направлена вдоль оси z :

$$F_B = e |\langle v_x \rangle| B.$$

Здесь $|\langle v_x \rangle|$ — абсолютная величина дрейфовой скорости электронов вдоль оси x , возникающая под действием внешнего электрического поля.

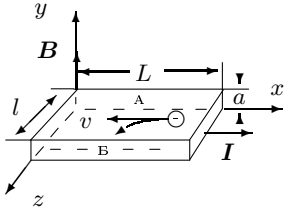


Рис. 3.2. Образец с током в магнитном поле

Под действием этой силы электроны отклоняются к грани Б, заряжая её отрицательно (для простоты рассматриваем только один тип носителей). На грани А накапливаются нескомпенсированные положительные заряды. Это приводит к возникновению электрического поля E_z , направленного от А к Б, которое действует на электроны с силой $F_E = eE_z$, направленной против силы F_B . В установившемся режиме сила F_E уравнивает силу F_B , и накопление электрических зарядов на боковых гранях пластины прекращается. Из условия равновесия $F_B = F_E$ найдём

$$E_z = |\langle v_x \rangle| B. \quad (3.23)$$

Поле E_z даёт вклад в общее поле \mathbf{E} , в котором движутся электроны. С полем E_z связана разность потенциалов U_{AB} между гранями А и Б:

$$U_{AB} = -E_z l = -|\langle v_x \rangle| B l. \quad (3.24)$$

В этом и состоит эффект Холла. Второе слагаемое в силе Лоренца (3.22), с которым связан эффект, часто называют «холловским».

Замечая, что сила тока

$$I = ne |\langle v_x \rangle| l \cdot a, \quad (3.25)$$

и объединяя (3.23) и (3.25), найдём ЭДС Холла:

$$\mathcal{E}_x = U_{AB} = -\frac{IB}{nea} = -R_x \cdot \frac{IB}{a}. \quad (3.26)$$

Константа R_x называется постоянной Холла. Как видно из (3.26),

$$R_x = \frac{1}{ne}. \quad (3.27)$$

В полупроводниках, когда вклад в проводимость обусловлен и электронами и дырками, выражение для постоянной Холла имеет более сложный вид:

$$R_x = \frac{nb_e^2 - pb_p^2}{e(nb_e + pb_p)^2}.$$

Если основной вклад в эффект вносит один из носителей, то для постоянной Холла можно пользоваться выражением (3.27). Измеряя величину R_x , можно с помощью (3.27) найти концентрацию носителей тока n , а по знаку возникающей между гранями А и Б разности потенциалов установить характер проводимости — электронный или дырочный.

3.3. Магнетосопротивление

Рассмотрим теперь влияние внешнего магнитного поля на электрическое сопротивление проводников. Это явление носит название **магнетосопротивления**. При комнатной температуре увеличение сопротивления в магнитном поле сильнее всего проявляется в полупроводниках.

Уравнение, описывающее движение носителей тока при одновременном наложении электрического и магнитного полей, имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} + \mathbf{F}_\text{тр} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Усредним это равенство по всем носителям, находящимся в рассматриваемом элементе объёма, и заменим $\mathbf{F}_\text{тр}$ в соответствии с (3.17):

$$m \frac{d\langle \mathbf{v} \rangle}{dt} = -e \left(\mathbf{E} + \frac{\langle \mathbf{v} \rangle}{b} \right) - e\langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}.$$

Нас будет интересовать только установившееся движение, т. е. движение со скоростью дрейфа $\langle \mathbf{v} \rangle$, неизменной во времени. Приравняв левую часть нашего равенства нулю и сократив на e , найдём

$$\mathbf{E} + \frac{\langle \mathbf{v} \rangle}{b} + \langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B} = 0. \quad (3.28)$$

Входящее в формулу (3.28) поле \mathbf{E} , как отмечалось выше, есть полное внешнее поле, которое складывается из приложенного поля и поля, появляющегося вследствие эффекта Холла.

В дальнейшем мы будем всегда считать, что магнитное поле \mathbf{B} однородно. Выберем направление этого поля за направление оси y (рис. 3.2). Пусть на рассматриваемом участке полупроводника внешнее электрическое поле направлено по оси x , а поля нескомпенсированных зарядов отсутствуют. Распишем для этого случая уравнение (3.28) для всех трёх декартовых координат:

$$\begin{aligned} E_x + \frac{\langle v_x \rangle}{b} - \langle v_z \rangle B_y &= 0; \\ \frac{\langle v_y \rangle}{b} &= 0; \\ \frac{\langle v_z \rangle}{b} + \langle v_x \rangle B_y &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Из третьей и второй строк (3.29) имеем

$$\langle v_y \rangle = 0; \quad \langle v_z \rangle = -\langle v_x \rangle B_y b. \quad (3.30)$$

Подставляя полученное значение $\langle v_z \rangle$ в первую строку (3.29), найдём

$$\langle v_x \rangle = -\frac{bE_x}{1 + (bB_y)^2}. \quad (3.31)$$

Здесь b — подвижность электронов в отсутствие магнитного поля.

Исследуем полученное решение. Первое из равенств (3.30) показывает, что движения носителей тока вдоль магнитного поля не возникает. Сравнивая формулы (3.31) и (3.16), находим, что в присутствии магнитного поля подвижность электронов уменьшается. Согласно (3.20) подвижность однозначно связана с проводимостью. В присутствии магнитного поля \mathbf{B} удельное сопротивление ρ_b равно

$$\rho_b = \frac{1}{\sigma_b} = \frac{1}{enb} [1 + (bB)^2] = \rho_0 [1 + (bB)^2], \quad (3.32)$$

где ρ_0 — удельное сопротивление без поля. Относительное увеличение удельного сопротивления

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\rho_b - \rho_0}{\rho_0} = (bB)^2. \quad (3.33)$$

Отношение $\Delta\rho/\rho_0$ называют магнетосопротивлением. Из (3.33) видно, что измерение магнетосопротивления позволяет определить подвижность носителей тока в полупроводнике.

Второе из равенств (3.30) показывает, что при наложении магнитного поля, кроме составляющей скорости $\langle v_x \rangle$, направленной против электрического поля, появляется поперечная составляющая $\langle v_z \rangle$ и соответственно ток вдоль оси z .

При выводе формул (3.29) из уравнения (3.28) составляющая электрического поля вдоль оси z была положена равной нулю ($E_z = 0$). Однако это не всегда так. Рассмотрим, например, случай, когда образец имеет форму пластинки (рис. 3.2). Движение электронов вдоль оси z не может происходить беспрепятственно. Начавшееся при включении магнитного поля перемещение электрических зарядов вдоль оси z приводит к появлению пространственных зарядов на боковых гранях пластинки и, следовательно, к появлению электрического поля, направленного по оси z — к появлению ЭДС Холла, которая препятствует дальнейшему перемещению электронов вдоль оси z . Формула (3.32) в этом случае должна быть заменена другим соотношением, имеющим, вообще говоря, сложный вид из-за того, что возникающее поле неоднородно. Сопротивление образца при этом зависит не только от магнитного поля, но и от формы образца — возникает геометрический резистивный эффект.

Простые условия для исследования магнетосопротивления возникают в том случае, если проводник имеет форму диска, электрическое поле приложено между его центром и периферией, а магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости диска, как это изображено на рис. 3.3 (диск Корбино). Основная составляющая тока I_r (замещающая ток I_x) направлена при этом по радиусу, а протеканию тока I_φ (замещающего ток I_z) ничто не мешает. Формула (3.32) при этом полностью применима.

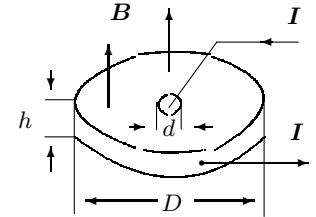


Рис. 3.3. Диск Корбино

Магнетосопротивление $\Delta\rho/\rho_0$ может быть выражено через сопротивление диска или напряжение U на нём при постоянной температуре:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\Delta U}{U_0}. \quad (3.34)$$

Сопротивление диска R_0 в наших условиях определяется формулой

$$R_0 = \frac{\rho_0}{2\pi h} \ln \frac{D}{d}, \quad (3.35)$$

где D , d , и h — параметры диска (см. рис. 3.3). Вывод последней формулы предоставляем читателю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 86, 95, 98, 100.

Работа 3.3.1

Измерение удельного заряда электрона методами магнитной фокусировки и магнетрона

Цель работы: определение отношения заряда электрона к его массе методом магнитной фокусировки и методом магнетрона.

А. Метод магнитной фокусировки

В работе используются: электронно-лучевая трубка и блок питания к ней; соленоид; реостат; амперметр постоянного тока; электростатический вольтметр; милливeberметр; ключи.

Теоретическая часть работы изложена во введении к разделу в пункте 2.1.

Идея опыта заключается в следующем. Электронно-лучевая трубка, вынутая из осциллографа, помещается в длинный соленоид, создающий магнитное поле, направленное вдоль оси трубки. Электроны вылетают из электронной пушки трубки практически с одинаковыми продольными скоростями v_{\parallel} . Небольшое напряжение, подаваемое на отклоняющие пластины, изменяет только поперечную составляющую скорости. Это означает, что все электроны в магнитном поле будут двигаться по спиралям с одним и тем же шагом L и, следовательно, электроны будут встречаться вновь, пересекая ось пучка на расстояниях L , $2L$ и т. д. В этих точках сечение пучка будет наименьшим, т. е. в них электронный пучок будет фокусироваться. Следовательно, при изменении магнитного поля изображение пучка на экране будет периодически стягиваться в ярко светящееся пятнышко. Если расстояние от пушки до экрана l , то пучок сфокусируется на экране при условии

$$l = nL, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots,$$

или

$$l = \frac{2\pi v_{\parallel}}{(e/m)B_{\Phi}} n.$$

Выразив в этой формуле скорость электронов через ускоряющее напряжение, получаем выражение для удельного заряда через измеряемые физические величины:

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 V}{l^2} \left(\frac{n^2}{B_{\Phi}^2} \right). \quad (1)$$

Экспериментальная установка. Основной частью установки является электронный осциллограф С1-1, трубка которого вынута и установлена в длинном соленоиде, создающим магнитное поле. Напряжение на отклоняющие пластины и питание подводятся к трубке многожильным кабелем.

Пучок электронов, вылетающих из катода с разными скоростями (энергия электрона $\approx 0,1$ эВ), ускоряется анодным напряжением ≈ 1 кВ. После прохождения двух диафрагм из пучка выделяются электроны с практически одинаковой продольной скоростью v_{\parallel} . Небольшое переменное напряжение, поступающее с клеммы «Контрольный сигнал» осциллографа на отклоняющие пластины, изменяет только поперечную составляющую скорости. Угол α отклонения пучка от оси трубки, таким образом, зависит от времени, и электроны прочерчивают на экране трубки светящуюся линию. При увеличении магнитного поля линия на экране сокращается, постепенно стягиваясь в точку, а затем снова удлиняется. Второе прохождение через фокус происходит в том случае, когда электроны на пути от катода к экрану описывают два витка спирали, третье — при трёх витках.

Анодное напряжение, определяющее продольную скорость электронов, измеряется электростатическим киловольтметром.

Магнитное поле в соленоиде создаётся постоянным током (рис. 1), сила которого регулируется переменным сопротивлением R и измеряется амперметром A . Ключ K служит для изменения направления поля в соленоиде.

Величина магнитного поля определяется с помощью измерительной катушки, подключённой к милливeberметру. Этот прибор измеряет изменение магнитного потока, пронизывающего измерительную катушку,



Рис. 1. Схема измерений по методу магнитной фокусировки

которая намотана на один каркас с соленоидом. Описание милливеберметра и правила работы с ним приведены на с. 138.

На точность результатов может влиять внешнее магнитное поле, особенно продольное. Оно не вызывает размытия фокуса, но изменяет величину фокусирующего поля. Присутствие внешнего магнитного поля проще всего обнаружить с помощью переполюсовки соленоида: при изменении направления поля показания милливеберметра будут отличаться, но их полусумма не зависит от наличия постоянного продольного поля.

Измерение магнитного поля с помощью милливеберметра обычно производится в предварительных опытах: при отключении ключа К устанавливается связь между силой тока, протекавшего через соленоид, и индукцией магнитного поля в соленоиде. По измеренным значениям строится калибровочный график, который используется при обработке результатов основных измерений для пересчёта от тока к индукции магнитного поля.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается определить значения магнитных полей, при которых происходит фокусировка электронного пучка, и по результатам измерений рассчитать e/m .

1. Прокалибруйте электромагнит — определите связь между индукцией B магнитного поля и током I через обмотки магнита. Для этого с помощью милливеберметра снимите зависимость магнитного потока $\Phi = BSN$, пронизывающего пробную катушку, находящуюся в магнитном поле, от тока I . Значение SN (произведение площади сечения пробной катушки на число витков в ней) указано на установке.

Проведите измерения магнитного потока Φ при двух направлениях тока через обмотку.

2. Включите осциллограф и подайте напряжение с клеммы «Контрольный сигнал» на вертикальный (или горизонтальный) вход усилителя. На экране появится светящаяся линия.

3. Установите минимальный ток через соленоид и, постепенно увеличивая его, найдите значение тока I_{Φ} , при котором линия первый раз стягивается в точку. Продолжая увеличивать ток, снимите зависимость I_{Φ} от порядкового номера фокуса n .

4. Повторите измерения $I_{\Phi} = f(n)$ для другого направления магнитного поля.

5. Запишите ускоряющее напряжение V , величины L и SN , указанные на установке, и характеристики приборов.

Обработка результатов

1. Постройте график $B_{\Phi} = f(I)$.
2. По графику $B_{\Phi} = f(I)$ определите усреднённые значения B_{Φ} для каждого фокуса и постройте график зависимости $B_{\Phi} = f(n)$. Используйте наклон графика для расчёта e/m с помощью формулы (1).
3. Оцените погрешности и сравните результат с табличным.

Б. Измерение e/m методом магнетрона

В работе используются: электронная лампа с цилиндрическим анодом; универсальный стабилизированный источник постоянного и переменного напряжений; соленоид; миллиамперметр; амперметр и вольтметр постоянного тока.

В настоящей работе отношение e/m для электрона определяется с помощью метода, получившего название «метод магнетрона». Это название связано с тем, что применяемая в работе конфигурация электрического и магнитного полей напоминает конфигурацию полей в магнетронах — генераторах электромагнитных колебаний сверхвысоких частот.

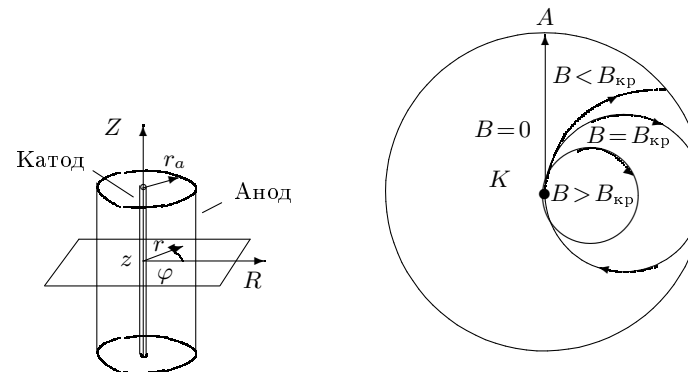


Рис. 2. Схема устройства двухэлектродной лампы

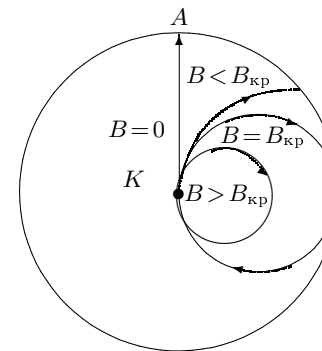


Рис. 3. Траектории электронов, вылетающих из катода, при разных значениях индукции магнитного поля

Движение электронов в этом случае происходит в кольцевом пространстве, заключённом между катодом и анодом двухэлектродной электронной лампы (рис. 2). Нить накала лампы (катод) располагается вдоль оси цилиндрического анода, так что электрическое поле между катодом и анодом имеет радиальное направление. Лампа помещается

внутри соленоида, создающего магнитное поле, параллельное оси лампы. Движение электронов в такой лампе рассмотрено в приложении к работе.

Рассмотрим траектории электронов, вылетевших из катода, более подробно. Пусть потенциал анода равен V_a . В отсутствие магнитного поля (рис. 3) электрон движется прямолинейно по радиусу. При слабом поле траектории несколько искривляются, но электроны всё же попадают на анод. При некотором критическом значении индукции магнитного поля $B_{кр}$ траектории искривляются настолько, что только касаются анода. Наконец, при $B > B_{кр}$ электроны вообще не попадают на анод и возвращаются к катоду. Величину $B_{кр}$ нетрудно найти по выведенной в приложении формуле (П.10), заметив, что в этом случае радиальная скорость электрона \dot{r} при $r = r_a$ (при радиусе анода) обращается в нуль:

$$V_a = \frac{eB_{кр}^2 r_a^2}{8m}. \quad (2)$$

Преобразуя (2), найдём

$$\frac{e}{m} = \frac{8V_a}{B_{кр}^2 r_a^2}. \quad (3)$$

Формула (3) позволяет вычислять e/m , если при заданном V_a найдено такое значение магнитного поля (или, наоборот, при заданном B такое значение V_a), при котором электроны перестают попадать на анод.

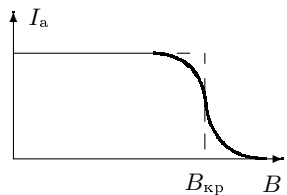


Рис. 4. Зависимость анодного тока от индукции магнитного поля в соленоиде

До сих пор мы рассматривали идеальный случай, когда при $B < B_{кр}$ все электроны без исключения попадают на анод, а при $B > B_{кр}$ все они возвращаются на катод, не достигнув анода. Анодный ток I_a с увеличением магнитного поля изменялся бы при этом так, как это изображено на рис. 4 штриховой линией. В реальных условиях невозможно обеспечить полную коаксиальность анода и катода, вектор индукции магнитного поля всегда несколько наклонён по отношению к катоду, магнитное поле не вполне однородно и т. д. Все эти причины приводят к сглаживанию кривой на рис. 4 и она приобретает вид сплошной линии на рис. 4. В хорошо собранной установке перелом функции $I_a = f(B)$ остаётся, однако, достаточно резким и с успехом может быть использован для измерения e/m .

Все эти причины приводят к сглаживанию кривой на рис. 4 и она приобретает вид сплошной линии на рис. 4. В хорошо собранной установке перелом функции $I_a = f(B)$ остаётся, однако, достаточно резким и с успехом может быть использован для измерения e/m .

Экспериментальная установка. Схема установки изображена на рис. 5. Двухэлектродная лампа Л с цилиндрическим анодом специ-

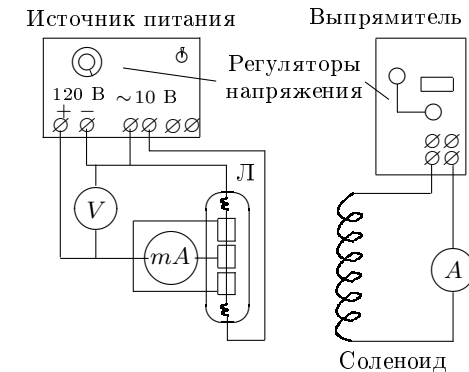


Рис. 5. Схема измерительной установки

ально изготовлена из немагнитных материалов. Анод лампы состоит из трёх металлических (нержавеющая сталь) цилиндров одинакового диаметра. Два крайних цилиндра электрически изолированы от среднего небольшими зазорами и используются для устранения краевых эффектов на торцах среднего цилиндра, ток с которого используется при измерениях. В качестве катода используется тонкая (диаметром 50 мкм) хорошо натянутая вольфрамовая проволока, расположенная по оси всех трёх цилиндров анодной системы. Катод лампы разогревается переменным током, отбираемым от стабилизированного источника питания. С этого источника на анод лампы подаётся постоянное напряжение (0–120 В), регулируемое с помощью потенциометра и измеряемое вольтметром V .

Лампа закреплена в соленоиде. Ток, проходящий через соленоид, подаётся с выпрямителя и измеряется амперметром A . Индукция магнитного поля в соленоиде рассчитывается по току, протекающему через обмотку соленоида. Коэффициент пропорциональности между ними указан на установке.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость анодного тока от тока, протекающего через соленоид, при различных напряжениях на аноде лампы и по результатам измерений рассчитать удельный заряд электрона.

1. Установите на аноде лампы потенциал $V_a = 60$ В. Снимите зависимость анодного тока I_a от индукции магнитного поля в соленоиде (от тока I_m через соленоид). В области резкого изменения тока точки должны лежать чаще (рис. 4)

- Снимите аналогичные зависимости $I_a = f(I_m)$ для 5–6 фиксированных значений V_a в диапазоне 60–120 В.
- Запишите параметры установки и характеристики приборов.

Обработка результатов

- Используйте полученные результаты для построения семейства кривых $I_a(B)$. Для каждого значения V_a определите по графику критическое значение индукции магнитного поля $B_{кр}$.
- Постройте график зависимости $B_{кр}^2$ от V_a . По угловому коэффициенту полученной прямой определите удельный заряд электрона e/m . Сравните результат с табличным.

Контрольные вопросы

- Нарисуйте и объясните схемы измерения удельного заряда электрона методом магнитной фокусировки и методом магнетрона.
- Объясните принцип действия электронно-лучевой трубки осциллографа.
- Объясните принцип работы милливеберметра.
- Почему в методе магнетрона используется анод из трёх цилиндров, а не из одного?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983, §§ 86, 89.
- Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977, §§ 181–184.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Движение электрона в магнетроне

Рассмотрим траекторию электронов, движущихся в лампе под действием электрического и магнитного полей. Для вычислений воспользуемся цилиндрической системой координат, т. е. будем характеризовать положение точки расстоянием от оси цилиндра r , полярным углом φ и смещением вдоль оси z (рис. 2). Рассмотрим сначала силы, действующие на электрон со стороны электрического поля. Напряжённость электрического поля в цилиндрическом конденсаторе имеет только радиальную компоненту $E_r = -E$. Поэтому сила, действующая на электрон в таком поле, направлена по радиусу, так что

$$F_r^{\text{эл}} = eE, \quad F_z^{\text{эл}} = F_\varphi^{\text{эл}} = 0. \quad (\text{П.1})$$

Рассмотрим теперь силы, действующие на электрон со стороны магнитного поля. Поскольку магнитное поле в нашем случае направлено по оси z , для проекции силы на ось z имеем

$$F_z^{\text{маг}} = 0. \quad (\text{П.2})$$

Остальные две составляющие силы найдём с помощью формулы Лоренца. Как нетрудно убедиться,

$$F_\varphi^{\text{маг}} = ev_r B, \quad F_r^{\text{маг}} = -ev_\varphi B. \quad (\text{П.3})$$

Из простых кинематических соображений ясно, что

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} = r \frac{d\varphi}{dt}. \quad (\text{П.4})$$

Как видно из формул (П.1) и (П.2), ни магнитные, ни электрические силы, действующие на электрон, не имеют составляющих по оси z . Движение вдоль оси z является равномерным.

Движение в плоскости (r, φ) удобно описывать с помощью уравнения моментов. Для проекции на ось z имеем

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (\text{П.5})$$

где L_z — момент импульса электрона относительно оси z , равный, как известно, $mr^2\dot{\varphi}$. Величина M_z равна rF_φ . С помощью (П.3) и (П.5) найдём

$$M_z = erv_r B. \quad (\text{П.6})$$

Подставляя (П.4) и (П.6) в (П.5), найдём

$$\frac{d}{dt} (mr^2\dot{\varphi}) = eBr \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}eB \frac{d(r^2)}{dt}. \quad (\text{П.7})$$

Интегрируя уравнение (П.7), получаем

$$r^2\dot{\varphi} + A = \frac{eBr^2}{2m}, \quad (\text{П.8})$$

где A — постоянная интегрирования, которую следует определить из начальных условий. В начале движения радиус r равен радиусу катода, т. е. очень мал. Правая часть (П.8) поэтому тоже очень мала. Электроны вылетают из катода с небольшой скоростью, так что $r^2\dot{\varphi}$ в начальный момент также мало. С хорошей точностью можно поэтому полагать $A = 0$. Наше уравнение приобретает при этом простой вид:

$$\dot{\varphi} = \frac{eB}{2m}. \quad (\text{П.9})$$

Рассмотрим теперь движение электрона по радиусу. Работа сил электрического поля, совершаемая при перемещении электрона от катода до точки с потенциалом V , равна $W = eV$. Магнитное поле никакой работы не производит. Найденная работа должна быть поэтому равна кинетической энергии электрона (начальной скоростью электрона мы снова пренебрегаем):

$$eV = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\varphi^2).$$

С помощью (П.4) и (П.9) найдём

$$eV = \frac{m}{2} \left[\dot{r}^2 + \left(\frac{reB}{2m} \right)^2 \right]. \quad (\text{П.10})$$

Уравнение (П.10) полностью определяет радиальное движение электрона.

Работа 3.3.2

Исследование вольт-амперной характеристики вакуумного диода

Цель работы: определение удельного заряда электрона на основе закона «трёх вторых».

В работе используются: радиолампа с цилиндрическим анодом; амперметр; многопредельные микроамперметр и вольтметр постоянного тока; стабилизированные источники постоянного тока и постоянного напряжения.

В работе исследуется зависимость прямого тока, проходящего через вакуумный диод, от напряжения на нём (положительная ветвь вольт-амперной характеристики). Наибольший физический интерес представляет та область положительного напряжения на диоде, в которой пространственный заряд (электронное облако) существенно влияет на распределение электрического поля между катодом и анодом. В этой области ток диода меньше тока эмиссии катода из-за того, что электрическое поле пространственного заряда препятствует движению электронов, испущенных катодом, и часть их возвращается на катод. Как будет показано ниже, в этом случае величина тока пропорциональна напряжению на диоде в степени $3/2$:

$$I \propto V^{3/2}$$

(«закон трёх вторых»). Коэффициент пропорциональности в этой формуле зависит от удельного заряда электрона (отношения заряда электрона к его массе). Цель работы состоит в измерении удельного заряда электрона из вольт-амперной характеристики диода в области, описываемой «законом трёх вторых».

Рассмотрим прохождение электрического тока через вакуумный диод. Будем считать, что его катод имеет форму нити с радиусом r_k , а анод — форму полого цилиндра с радиусом r_a (рис. 1). Между катодом и анодом приложена разность потенциалов V_a .

Для простоты примем, что потенциал катода равен нулю, а потенциал анода равен V_a . Ток в лампе переносится электронами, испускаемыми раскалённым катодом. Будем считать, что длина диода намного превосходит его радиальные размеры, так что электрическое поле можно считать чисто радиальным.

Движение электронов в лампе происходит под действием электрического поля, распределение которого в свою очередь зависит от плотности электронного облака. Нас будет интересовать задача о стационарном (не меняющемся с течением времени) распределении потенциала и зарядов. Будем также считать, что вследствие симметрии задачи потенциал электрического поля не зависит ни от координаты z , ни от угла φ и является функцией одного радиуса r .

Распределение потенциала внутри диода определяется уравнением Пуассона, которое в цилиндрической системе координат имеет вид (как уже сказано, полагаем $\partial V/\partial z = \partial V/\partial \varphi = 0$):

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}, \quad (1)$$

где $\rho(r)$ — плотность электрического заряда. Двумя сечениями, перпендикулярными оси z , вырежем в диоде слой толщиной l . Плотность заряда $\rho(r)$ связана с током I , протекающим через этот слой, очевидной формулой

$$I = -2\pi r \rho(r) v(r) l, \quad (2)$$

где $v(r)$ — скорость электронов на радиусе r . В стационарном случае I не зависит от r . Таким образом,

$$I = \text{const}. \quad (3)$$

Скорость электронов определяется разностью потенциалов, которую они прошли, и скоростью их вылета из катода. Этой последней скоростью мы будем пренебрегать. Ошибка, связанная с указанным предположением, тем меньше, чем выше V_a (при малых напряжениях она может оказаться существенной). Тогда

$$\frac{mv^2(r)}{2} = eV(r). \quad (4)$$

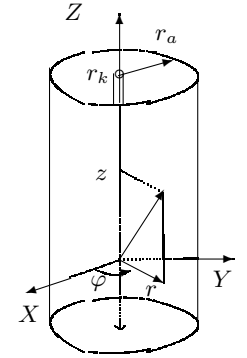


Рис. 1. Схема расположения электродов в диоде

В формуле (4) m — масса, e — абсолютная величина заряда электрона.

Исключая v и ρ из уравнений (1), (2) и (4), найдём

$$r \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{dV}{dr} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 l} \sqrt{\frac{m}{2eV}}. \quad (5)$$

Мы пришли, таким образом, к дифференциальному уравнению второго порядка, из которого следует определить V . Это уравнение может быть решено, если заданы граничные условия, т. е. значения потенциала на катоде и на аноде. Дополнительная трудность состоит в том, что неизвестен ток I , зависящий от V и входящий в правую часть (5), и, таким образом, не полностью определено само уравнение.

Вместо того чтобы задавать величину тока I , можно наложить на потенциал ещё одно условие, например, задавать не только потенциал анода, но и производную dV/dr на катоде. Обычно полагают

$$\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_k} = 0. \quad (6)$$

Производная $dV/dr = -E_r$, где E_r — радиальная компонента напряжённости электрического поля. Наше предположение означает, таким образом, что вблизи катода пространственный заряд электронов полностью экранирует электрическое поле, создаваемое анодной разностью потенциалов. В электронных лампах при нормальных рабочих режимах электрическое поле обращается в нуль не на самом катоде, а на расстоянии 0,01–0,1 мм от него. В нашем случае этим расстоянием можно пренебречь. Условие (6) и пренебрежение начальной скоростью вылетающих с катода электронов не вполне точны и вносятся для упрощения задачи.

Уравнение (5) является нелинейным дифференциальным уравнением. Его решение не может быть найдено простыми методами. Пусть, однако, мы нашли решение этого уравнения при некотором $V_a = V_{a0}$ и пусть при этом ток оказался равным $I = I_0$. Покажем, что в этом случае можно найти решение (5) и при любом другом значении потенциала V_a . Если I_0 и $V_{a0}(r)$ являются решением задачи при напряжении V_{a0} , то выражения

$$I = I_0 \left(\frac{V_a}{V_{a0}} \right)^{3/2}, \quad V(r) = V_{a0}(r) \frac{V_a}{V_{a0}} \quad (7)$$

являются искомыми решениями уравнения (5) при потенциале V_a . В са-

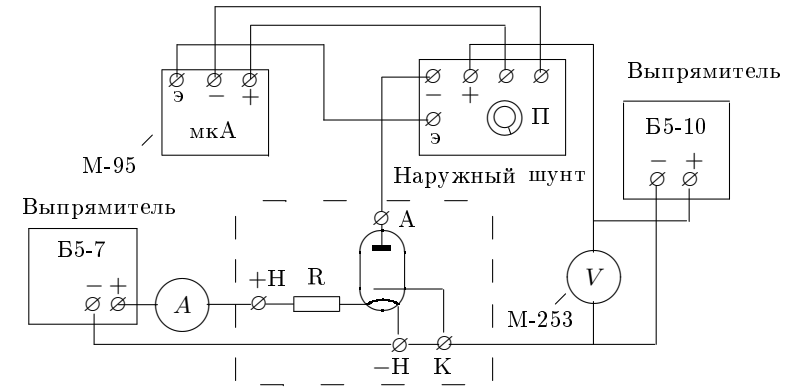


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

мом деле, подставляя (7) в (5), найдём

$$r \frac{V_a}{V_{a0}} \frac{d^2 V_{a0}(r)}{dr^2} + \frac{V_a}{V_{a0}} \frac{dV_{a0}(r)}{dr} = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 l} \left(\frac{V_a}{V_{a0}} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{m}{2eV_{a0}(r)V_a/V_{a0}}}.$$

Сокращая это уравнение на V_a/V_{a0} , придём к уравнению

$$r \frac{d^2 V_{a0}(r)}{dr^2} + \frac{dV_{a0}(r)}{dr} = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 l} \sqrt{\frac{m}{2eV_{a0}(r)}},$$

которое, конечно, выполняется, так как по предположению I_0 и $V_{a0}(r)$ являются решениями (5).

Формула (7) представляет собой содержание «закона трёх вторых», утверждающего, что ток в вакуумном диоде пропорционален напряжению на нём в степени $3/2$. Этот закон справедлив при любой — а не только при цилиндрической — геометрии электродов, если ток не слишком велик (т. е. пока условие (6) нарушается не слишком сильно).

В общем случае решение уравнения (5), удовлетворяющее условию (6), записывается обычно в виде

$$I = \frac{8\sqrt{2}\pi\epsilon_0 l}{9} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{1}{r_a \beta^2} V^{3/2}, \quad (8)$$

где β^2 — функция от r_a/r_k , которая может быть задана бесконечным рядом или графиком. То обстоятельство, что I пропорционально $V^{3/2}$, уже обсуждалось. Линейный характер связи между I и $\sqrt{e/m}$ очевиден из рассмотрения правой части (5). Численный коэффициент при $V^{3/2}$ выбран так, чтобы $r_a/r_k \rightarrow \infty$ при $\beta^2 \rightarrow 1$.

Экспериментальная установка. Исследования проводятся на диоде 2Ц2С с косвенным накалом. Радиус его катода $r_k = 0,9$ мм, радиус анода $r_a = 9,5$ мм, коэффициент $\beta^2 = 0,98$. Полная высота анода и катода составляет около 20 мм, однако эмиссия электронов происходит только с центральной части катода, покрытой оксидным слоем. Высота этого слоя $l = 9$ мм. Поскольку рабочая часть катода достаточно удалена от его торцов, электрическое поле в этой части с хорошей точностью можно считать радиальным.

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 2. Для подогрева катода используется стабилизированный выпрямитель Б5-7, а в качестве анодного источника — выпрямитель Б5-10. В цепь накала включены амперметр A и предохранительное сопротивление R . Анодное напряжение измеряется вольтметром (многопредельным гальванометром М-253), а анодный ток — миллиамперметром (микроамперметром М-95 с наружным шунтом). Наружный шунт позволяет изменять пределы измерений тока от 10 мкА до 10 мА.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать вольт-амперные характеристики диода при различных токах накала и по результатам измерений определить удельный заряд электрона.

1. Ознакомьтесь с экспериментальной установкой, изображённой на рис. 2.
2. Используя наружный шунт, установите предел измерения миллиамперметра 10 мкА.
3. Установите предел измерения вольтметра 7,5 В.
4. Регулятором выпрямителя цепи накала установите ток накала 1,3 А.
5. Регулятором выпрямителя анодной цепи установите анодное напряжение $V_a = 0,5$ В.
6. Исследуйте вольт-амперные характеристики диода в диапазоне от 0 до 50 В. В процессе измерений следите за постоянством тока накала. В диапазоне от 0 до 6 В изменяйте напряжение шагами по 0,5 В, в диапазоне от 6 до 10 В — шагами по 1 В, а в диапазоне от 10 до 50 В — шагами по 5 В.
7. Повторите измерения при токах накала 1,4; 1,5 и 1,6 А.

Обработка результатов

1. По результатам эксперимента постройте графики зависимости $I_a = f(V_a^{3/2})$. Определите интервалы значений V_a , на которых графики имеют вид прямых линий. Найдите наклон прямолинейных участков характеристик и используйте его для вычисления e/m электрона.

2. В тех же координатах на другом рисунке постройте участок вольт-амперной характеристики в диапазоне анодных напряжений от 0 до 10 В. Почему вольт-амперная характеристика на этом участке нелинейна?

Контрольные вопросы

1. Нарисуйте качественные графики распределения потенциала $V(r)$ между катодом и анодом: а) при нулевой разности потенциалов между катодом и анодом; б) при большой разности потенциалов (режим насыщения тока диода). Объясните эти распределения.
2. Качественно изобразите зависимость тока диода от напряжения на аноде в области от отрицательных напряжений V_a до больших положительных. Покажите на этом графике участок напряжений, при которых выполняется «закон трёх вторых». Чем объясняются отклонения от этого закона при малых и больших напряжениях на аноде?
3. Как влияет ток накала катода на ток диода при неизменном напряжении на аноде? Приводит ли это к погрешности измерения e/m ?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983, § 100–102.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977, § 157.

Работа 3.3.3

Опыт Милликена

Цель работы: измерение элементарного заряда методом масляных капель.

В работе используются: плоский конденсатор в защитном кожухе, осветитель, измерительный микроскоп, электростатический вольтметр, электронный секундомер, переключатель напряжения, пульверизатор с маслом.

В работе используются: плоский конденсатор в защитном кожухе, осветитель, измерительный микроскоп, электростатический вольтметр, электронный секундомер, переключатель напряжения, пульверизатор с маслом.

Идея опыта очень проста. Если элементарный заряд действительно существует, то заряд q любого тела может принимать только дискретную последовательность значений:

$$q = 0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e, \dots \pm ne, \dots, \quad (1)$$

где e — элементарный заряд. В предлагаемом опыте измеряется заряд небольших капелек масла, несущих всего несколько элементарных зарядов. Сравнивая между собой заряды капель, можно убедиться, что все они по модулю кратны одному и тому же числу, которое равно, очевидно, элементарному заряду.

Для измерения заряда капель будем исследовать их движение в вертикальном электрическом поле.

Движение заряженной капли в электрическом поле зависит как от электрических сил, так и от массы капли. Масса капли может быть определена по скорости её падения в отсутствие поля.

Рассмотрим свободное падение капли. Уравнение её движения при падении имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_{\text{тр}}, \quad (2)$$

где m — масса капли, v — её скорость, g — ускорение свободного падения, а $F_{\text{тр}}$ — сила вязкого трения капли в воздухе, которая для сферической капли определяется формулой Стокса:

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r v = kv. \quad (3)$$

Здесь r — радиус капли, η — коэффициент вязкости воздуха, $k = 6\pi\eta r$. Подставляя (3) в (2), получим

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (4)$$

Можно убедиться, что при нулевой начальной скорости решение этого уравнения имеет вид

$$v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}). \quad (5)$$

Установившееся значение скорости равно

$$v_{\text{уст}} = \frac{mg}{k} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3 g}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{\rho}{\eta} g r^2, \quad (6)$$

где ρ — плотность масла. Заметим, что (6) может быть немедленно получено из (4), если положить $dv/dt = 0$.

Как следует из (5), установление скорости происходит с постоянной времени

$$\tau = \frac{m}{k} = \frac{2}{9} \frac{\rho}{\eta} r^2. \quad (7)$$

Время установления скорости, таким образом, быстро падает с уменьшением радиуса капли r . Для мелких капель оно столь мало, что движение капли всегда можно считать равномерным. Выражение (6) в этом случае позволяет определить радиус капли, зная скорость её падения. Обозначая через h путь, пройденный каплей за время t_0 , найдём

$$r = \sqrt{\frac{9\eta h}{2\rho g t_0}}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь движение капли при наличии электрического поля плоского конденсатора, пластины которого расположены горизонтально. Напряжённость поля E в конденсаторе равна

$$E = \frac{V}{l}, \quad (9)$$

где l — расстояние между пластинами, а V — разность потенциалов между ними.

Нас будет интересовать случай, когда под действием электрического поля капля поднимается. Уравнение движения при этом примет вид

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{qV}{l} - mg - kv, \quad (10)$$

где q — заряд капли. Появление в правой части постоянного слагаемого не изменяет постоянной времени τ . Для определения установившейся скорости мы можем снова положить левую часть (10) равной нулю.

Измерим время t подъёма капли на начальную высоту. Используя равенства (4), (8) и (10), найдём, что заряд капли равен

$$q = 9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3 h^3}{g\rho}} \cdot \frac{l(t_0 + t)}{V t_0^{3/2} t}. \quad (11)$$

Вывод формулы (11) предоставляем читателю.

Экспериментальная установка. Схема установки представлена на рис. 1. Масло разбрызгивается пульверизатором. Капли масла попадают в конденсатор C через небольшое отверстие в верхней пластине. При этом часть из них вследствие трения о воздух приобретает случайный по абсолютной величине и знаку электрический заряд.

Напряжение на пластины подаётся с регулируемого выпрямителя и измеряется вольтметром V . Ключ K позволяет менять направление поля в конденсаторе, чтобы можно было работать как с отрицательно,

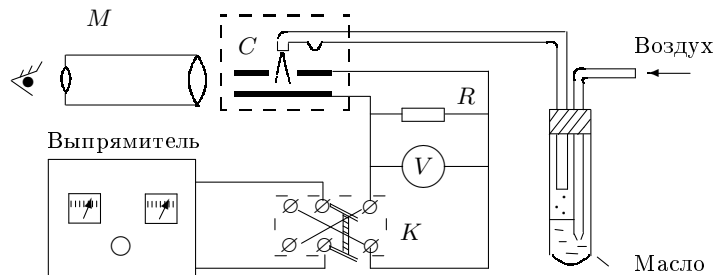


Рис. 1. Схема экспериментальной установки для измерения заряда электрона

так и с положительно заряженными каплями. При размыкании ключа K конденсатор разряжается через дополнительное сопротивление $R \approx 10 \text{ МОм}$.

Время отсчитывается по электронному секундомеру.

Естественно, что слабые электрические силы, действующие на каплю, несущую всего один или несколько электронных зарядов, способны существенно изменить её движение только в том случае, если сама она очень мала. Опыт производится поэтому с мелкими каплями, наблюдение за которыми возможно только с помощью микроскопа.

В фокальной плоскости окуляра измерительного микроскопа M виден ряд горизонтальных линий, расстояние между которыми было предварительно определено с помощью объектного микрометра. Наблюдая за перемещением капли между линиями, нетрудно определить путь, пройденный каплей. Время t_0 свободного падения капли от одной выбранной линии до другой и время t её обратного подъёма, происходящего под действием сил электрического поля, измеряется электронным секундомером.

Из постановки опыта очевидно, что дискретность заряда может быть обнаружена лишь в том случае, если ошибка δq в измерении заряда капли существенно меньше абсолютной величины заряда электрона e . Допустимая относительная ошибка опыта $\delta q/q$ должна быть поэтому много меньше $e/q = 1/n$, где n — заряд капли, выраженный в числе зарядов электрона. Этому условию тем легче удовлетворить, чем меньше число n . В нашем случае трудно определить q с точностью лучше 5%. Заряд капли должен поэтому быть существенно меньше 20 зарядов электрона — лучше всего, если он не превосходит пяти электронных зарядов.

Из всех величин, входящих в формулу (11), на опыте измеряются только t_0 , t , и V . От точности определения этих величин зависит в

основном ошибка измерения q . Из формулы (11) можно найти

$$\frac{\sigma_q}{q} = \sqrt{\frac{\sigma_V^2}{V^2} + \frac{\sigma_t^2 t_0^2}{t^2 (t_0 + t)^2} + \frac{\sigma_{t_0}^2}{4t_0^2} \left(\frac{3t + t_0}{t + t_0} \right)^2}. \quad (12)$$

При $t \approx t_0$ эта формула приобретает вид

$$\frac{\sigma_q}{q} = \sqrt{\frac{\sigma_V^2}{V^2} + \frac{\sigma_t^2}{4t_0^2} + \frac{\sigma_{t_0}^2}{t_0^2}}. \quad (13)$$

В условиях нашей работы наибольшее влияние на точность эксперимента оказывают два последних стоящих под корнем члена. Ошибка измерения времени t_0 и t при визуальном наблюдении капель не может быть сделана меньше 0,1–0,2 секунды. Погрешность в измерении q будет поэтому тем меньше, чем большие значения принимают t_0 и t . Для увеличения t_0 и t можно было бы увеличить расстояние, проходимое каплями, но это сильно усложнило бы экспериментальную установку. Удобнее идти в другом направлении — работать с медленно движущимися каплями, т.е. с каплями малого веса. Время падения t_0 таких капель достаточно велико. Чтобы время подъёма t было также достаточно большим, нужно использовать не очень большие разности потенциалов V .

Заметим, что выбор слишком маленьких капель приводит к снижению точности измерений. Броуновское движение малых капель оказывает существенное влияние на их движение и способно заметно исказить картину их падения и подъёма. Маленькие капли могут испаряться, так что их размеры во время наблюдения могут уменьшаться. При малых скоростях движения делаются особенно опасными конвекционные потоки воздуха, которые возникают при неоднородном нагреве установки (происходящем, например, от осветителя камеры). Практически в наших условиях удобно выбирать $t_0 \approx t \approx 10$ –30 секунд.

Для капель очень малого размера формула Стокса не вполне применима. Использование формулы Стокса без поправок, впрочем, в наших условиях приводит к искажению значений q и e не более чем на 10% и почти не мешает обнаружению дискретности электрического заряда. Мы рекомендуем поэтому не вводить в формулу никаких поправок.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается по измерениям времени свободного падения заряженных капель и времени их подъёма в электрическом поле определить заряд электрона.

1. Перед началом работы оцените с помощью формулы (11) величину напряжения V , которое нужно для подъёма капль, несущих от 1 до 5 зарядов электрона на высоту $h = 1$ мм, задав $t_0 \approx t = 20$ с. Если для подъёма капль потребуются меньшие напряжения, то соответствующие капль слишком сильно заряжены и для эксперимента непригодны.

При вычислениях потребуются значения некоторых величин: расстояние между пластинами $l = 0,725$ см, плотность масла $\rho = 0,898$ г/см³; коэффициент внутреннего трения воздуха $\eta = 1,83 \cdot 10^{-4}$ Пуаз (СГС) или $1,83 \cdot 10^{-5}$ Па·с (СИ).

2. Включите осветитель. При этом падающий в камеру свет направлен под углом к оси микроскопа и в объектив не попадает. Поле зрения микроскопа остаётся поэтому тёмным. Капли масла рассеивают свет и кажутся светящимися точками на темном фоне.

Не включая электрическое поле, **слегка** надавите на грушу пульверизатора и наблюдайте за движением облачка масляных капль в поле зрения микроскопа (изображение перевёрнуто).

3. Настройте окуляр микроскопа на резкое изображение делений окулярной шкалы. Затем сфокусируйте объектив на появившиеся в рабочем пространстве капль.

4. Наблюдая за движением капль, следует выбирать капль, время падения которых на $h = 1$ мм лежит в пределах 10–30 секунд, и научиться отличать их от более крупных, непригодных для работы. Цена деления окулярной шкалы указана на установке.

В условиях нашей установки регулировкой и коммутацией напряжения занята одна рука наблюдателя. Вторая рука управляет секундомером. Запись результатов измерений (t_0 , t и V) ведёт второй экспериментатор. Наблюдатель быстро устаёт, поэтому рекомендуется периодически меняться местами.

Для уменьшения ошибок в определении t_0 и t нужно для пуска и остановки секундомера использовать один и тот же признак — всегда нажимать головку секундомера либо в тот момент, когда капль скрывается за линией шкалы, либо, наоборот, когда она появляется из-за линии. Рекомендуется следить за каплями, не отрываясь от окуляра микроскопа, так как в противном случае легко её потерять из виду, и весь эксперимент придётся повторить.

5. В начале опыта следует позволить каплям свободно падать 5–10 секунд при выключенном электрическом поле для того, чтобы наиболее крупные капль успели упасть на нижнюю пластину.

Из оставшихся в поле зрения капль выберите одну и произведите с ней серию измерений, наблюдая её падение под действием силы тяжести и подъём под действием электрического поля. Серия должна

состоять из 5–10 измерений t_0 и такого же числа измерений t для одной капль.

6. Необходимо проделать не менее 15 таких серий измерений (для 15 различных капль), каждый раз регистрируя величину V . При этом нужно иметь в виду, что заряд капль может измениться во время наблюдений; в последнем случае для одной капль получится несколько значений q .

Изменение заряда капль может произойти при её подъёме в электрическом поле. Вычисленное с помощью (11) значение заряда будет в этом случае соответствовать некоторому среднему из величины заряда капль в начале и в конце опыта. Соответствующий результат непригоден для обработки и только запутывает опыт. Нужно поэтому стараться вовремя отбросить все случаи, когда перезарядка капль произошла во время её подъёма. Это можно сделать, внимательно наблюдая за движением капль и отбрасывая опыты, в которых капль изменила скорость подъёма во время измерения.

7. Для оценки точности измерений «подвесьте» одну из капль в электрическом поле. Определите соответствующее напряжение, отключите его и измерьте время падения капль на расстояние 2–3-х делений шкалы. Поменяв полярность напряжения, верните капль на прежнее место и снова подвесьте её. Снова запишите напряжение. Повторите процедуру для одной капль несколько раз и на месте оцените из этого опыта заряд капль по формуле (11), полагая время подъёма $t = \infty$. По разбросу результатов (ΔV и Δt) оцените точность измерения заряда этой капль.

Обработка результатов

1. Для всех исследованных капль рассчитайте значения q , отложите их на горизонтальной числовой оси и найдите для них общий наибольший делитель. Этот наибольший делитель, вообще говоря, может оказаться равным e , $2e$, $3e$ и т. д. Однако, чем больше значений q было измерено на опыте, тем меньше вероятность получить в качестве делителя число, отличное от e . Найденное значение e приведите в системе единиц СИ и в системе СГС.

2. Оцените время релаксации $\tau = v_{\text{уст}}/g$ и расстояние s , которое прошла бы капль за это время с установившейся скоростью:

$$s = v_{\text{уст}} \tau = \frac{1}{g} \left(\frac{h}{t_0} \right)^2.$$

Контрольные вопросы

1. Почему не следует выбирать капли слишком большого и слишком маленького размера?
2. Какие напряжения соответствуют оптимальным условиям опыта? Приведите расчёты (см. п. 1).
3. Нарисуйте график зависимости скорости капли в поле силы тяжести от времени и укажите на нём время и путь релаксации.
4. Зная параметры установки, оцените ёмкость конденсатора C и время его разрядки через сопротивление R (площадь пластин $\approx 20 \text{ см}^2$).
- 5* Какие ещё способы измерения заряда электрона вам известны?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. Гл. V, § 90.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. Гл. XVII, § 178.

Работа 3.3.4

Эффект Холла в полупроводниках

Цель работы: измерение подвижности и концентрации носителей заряда в полупроводниках.

В работе используются: электромагнит с источником питания, амперметр, миллиамперметр, милливеберметр, реостат, цифровой вольтметр, источник питания (1,5 В), образцы легированного германия.

Элементарная теория свободных носителей заряда в металлах и полупроводниках изложена во введении к разделу.

Экспериментальная установка. Электрическая схема установки для измерения ЭДС Холла представлена на рис. 1.

В зазоре электромагнита (рис. 1а) создаётся постоянное магнитное поле, величину которого можно менять с помощью регулятора R_1 источника питания электромагнита. Ток питания электромагнита измеряется амперметром A_1 . Разъём K_1 позволяет менять направление тока в обмотках электромагнита.

Градуировка магнита проводится при помощи милливеберметра. Описание милливеберметра и правила работы с ним приведены на с. 138.

Образец из легированного германия, смонтированный в специальном держателе (рис. 1б), подключается к источнику питания ($\approx 1,5 \text{ В}$).

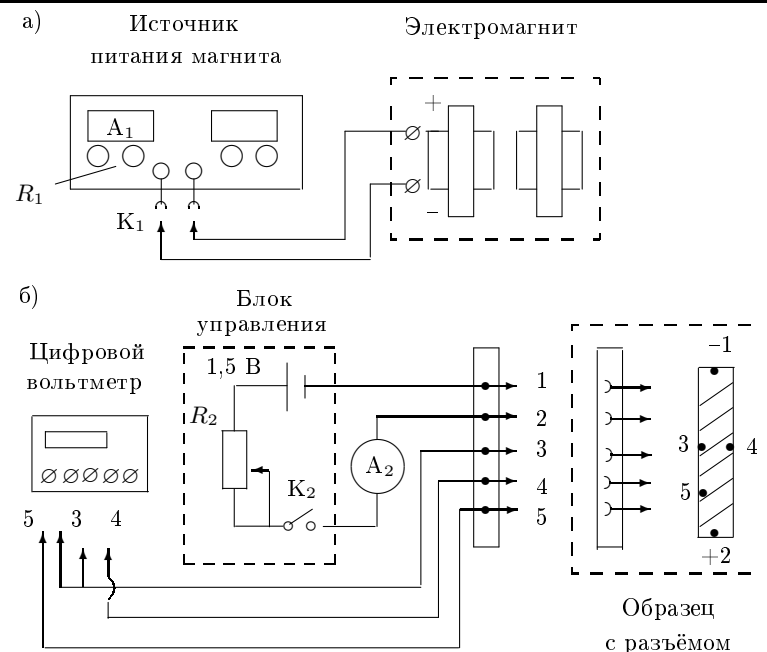


Рис. 1. Схема установки для исследования эффекта Холла в полупроводниках

При замыкании ключа K_2 вдоль длинной стороны образца течёт ток, величина которого регулируется реостатом R_2 и измеряется миллиамперметром A_2 .

В образце с током, помещённом в зазор электромагнита, между контактами 3 и 4 возникает разность потенциалов U_{34} , которая измеряется с помощью цифрового вольтметра.

Иногда контакты 3 и 4 вследствие неточности подпайки не лежат на одной эквипотенциали, и тогда напряжение между ними связано не только с эффектом Холла, но и с омическим падением напряжения, вызванным протеканием основного тока через образец. Измеряемая разность потенциалов при одном направлении магнитного поля равна сумме ЭДС Холла и омического падения напряжения, а при другом — их разности. В этом случае ЭДС Холла \mathcal{E}_x может быть определена как половина алгебраической разности показаний вольтметра, полученных для двух противоположных направлений магнитного поля в зазоре. Знак измеряемого напряжения высвечивается на цифровом табло вольтметра.

Можно исключить влияние омического падения напряжения иначе, если при каждом токе через образец измерять напряжение между точками 3 и 4 в отсутствие магнитного поля. При фиксированном токе через образец это дополнительное к ЭДС Холла напряжение U_0 остаётся неизменным. От него следует (с учётом знака) отсчитывать величину ЭДС Холла:

$$\mathcal{E}_x = U_{34} \pm U_0. \quad (1)$$

При таком способе измерения нет необходимости проводить повторные измерения с противоположным направлением магнитного поля.

По знаку \mathcal{E}_x можно определить характер проводимости — электронный или дырочный. Для этого необходимо знать направление тока в образце и направление магнитного поля.

Измерив ток I в образце и напряжение U_{35} между контактами 3 и 5 в отсутствие магнитного поля, можно, зная параметры образца, рассчитать проводимость материала образца по формуле

$$\sigma = \frac{I L_{35}}{U_{35} a l}, \quad (2)$$

где L_{35} — расстояние между контактами 3 и 5, a — толщина образца, l — его ширина.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость ЭДС Холла от величины магнитного поля при различных токах через образец для определения константы Холла; определить знак носителей заряда и проводимость материала образца.

1. Подготовьте приборы к работе.
2. Проверьте работу цепи питания образца. Ток через образец не должен превышать 1 мА.
3. Проверьте работу цепи магнита. Определите диапазон изменения тока через магнит.
4. Прокалибруйте электромагнит — определите связь между индукцией B магнитного поля в зазоре электромагнита и током I_m через обмотки магнита. Для этого с помощью милливольтметра снимите зависимость магнитного потока Φ , пронизывающего пробную катушку, находящуюся в зазоре, от тока I_m ($\Phi = BSN$). Значение SN (произведение площади сечения контура катушки на число витков в ней) указано на держателе катушки.
5. Проведите измерение ЭДС Холла. Для этого вставьте образец в зазор выключенного электромагнита и определите напряжение U_0 между

холловскими контактами 3 и 4 при минимальном токе через образец ($\approx 0,2$ мА). Это напряжение U_0 вызвано несовершенством контактов 3, 4 и при фиксированном токе через образец остаётся неизменным. Значение U_0 с учётом знака следует принять за нулевое.

Включите электромагнит и снимите зависимость напряжения U_{34} от тока I_m через обмотки магнита при фиксированном токе через образец.

Проведите измерения $U_{34} = f(I_m)$ при постоянном токе через образец для 6–8 его значений в интервале 0,2–1 мА. При каждом новом значении тока через образец величина U_0 будет иметь своё значение.

При максимальном токе через образец (≈ 1 мА) проведите измерения $U = f(I_m)$ при другом направлении магнитного поля.

6. Определите знак носителей в образце. Для этого необходимо знать направление тока через образец, направление магнитного поля и знак ЭДС Холла.

Направление тока в образце показано знаками «+» и «–» на рис. 1. Направление тока в обмотках электромагнита при установке разъёма K_1 в положение I показано стрелкой на торце магнита.

Зарисуйте в тетради образец. Укажите на рисунке направления тока, магнитного поля и отклонение носителей. По знаку (\pm) на клеммах цифрового вольтметра определите характер проводимости.

7. Для определения удельной проводимости удалите держатель с образцом из зазора. Подключите к клеммам « H_x » и « L_x » вольтметра потенциальные концы 3 и 5. Измерьте падение напряжения между ними при токе через образец 1 мА.

8. Запишите характеристики приборов и параметры образца L_{35} , a , l , указанные на держателе.

Обработка результатов

1. Постройте график зависимости $B = f(I_m)$.
2. Рассчитайте ЭДС Холла по формуле (1) и постройте на одном листе семейство характеристик $\mathcal{E}_x = f(B)$ при разных значениях тока I через образец. Определите угловые коэффициенты $k(I) = \Delta \mathcal{E} / \Delta B$ полученных прямых.

Постройте график $k = f(I)$. Рассчитайте угловой коэффициент прямой и по формуле (3.26) Приложения определите величину постоянной Холла R_H . Рассчитайте концентрацию n носителей тока в образце по формуле (3.27).

Оцените погрешность результата и сравните результат с табличным.

3. Рассчитайте удельную проводимость σ материала образца по формуле (2).

Используя найденные значения концентрации n и проводимости σ , с помощью формулы (3.20) вычислите подвижность b носителей тока в общепринятых для этой величины внесистемных единицах: размерность напряжённости электрического поля $[E] = [U/L] = \text{В/см}$, размерность скорости $[v] = \text{см/с}$, поэтому размерность подвижности $[b] = \text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

Оцените погрешности и сравните результаты с табличными.

Контрольные вопросы

1. Какие вещества называют диэлектриками, проводниками, полупроводниками? Чем объясняется различие их электрических свойств? Как зависит от температуры проводимость металлов и полупроводников?
2. Дайте определение константы Холла. Как зависит константа Холла от температуры у металлов и полупроводников?
3. Зависит ли результат измерения константы Холла от геометрии образца?
4. Как устроен милливеберметр? Зависят ли его показания от сопротивления измерительной катушки? Каким должно быть это сопротивление по сравнению с сопротивлением катушки прибора: большим или маленьким?
5. Получите выражение константы Холла для материалов с двумя типами носителей. При выводе используйте условие равенства нулю поперечного тока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество — М.: Наука, 1983. §§ 98, 100.
2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1983. Гл. 4, §§ 4–6; Гл. 6, § 9 (Берклеевский курс физики. Т. II).

Работа 3.3.5

Эффект Холла в металлах

Цель работы: измерение подвижности и концентрации носителей заряда в металлах.

В работе используются: электромагнит с источником питания, источник постоянного тока, микровольтметр Ф116/1, амперметры, милливеберметр, образцы из меди, серебра и цинка.

Элементарная теория свободных носителей заряда в металлах и полупроводниках изложена во введении к разделу.

Экспериментальная установка. Электрическая схема установки для измерения ЭДС Холла представлена на рис. 1.

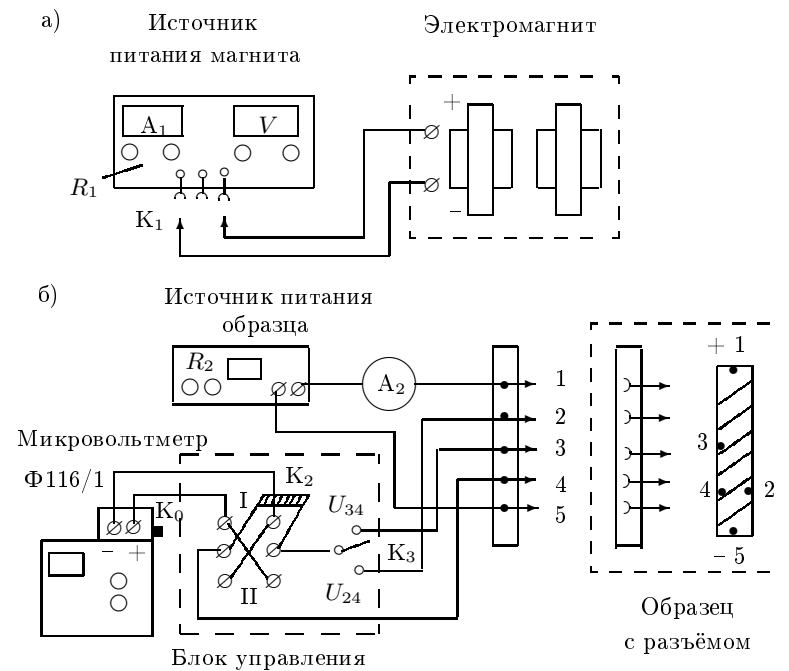


Рис. 1. Схема установки для исследования эффекта Холла в металлах

В зазоре электромагнита (рис. 1а) создаётся постоянное магнитное поле, величину которого можно менять с помощью источника питания электромагнита. Разъём K_1 позволяет менять направление тока в обмотках электромагнита. Ток питания электромагнита измеряется амперметром A_1 .

Градуировка магнита проводится с помощью милливеберметра. Описание милливеберметра и правила работы с ним приведены на с. 138.

Металлические образцы в форме тонких пластинок, смонтированные в специальных держателях, подключаются к блоку питания через разъём (рис. 1б). Ток через образец регулируется реостатом R_2 и измеряется амперметром A_2 .

Для измерений ЭДС Холла используется микровольтметр Ф116/1, в котором высокая чувствительность по напряжению сочетается с малой величиной тока, потребляемого измерительной схемой: минимальный предел измерения напряжения составляет 1,5 мкВ, а потребляемый ток — всего 10^{-8} А.

В образце с током, помещённом в зазор электромагнита, между контактами 2 и 4 возникает холловская разность потенциалов, которая измеряется с помощью микровольтметра, если переключатель K_3 подключён к точке 2 образца. При подключении K_3 к точке 3 микровольтметр измеряет омическое падение напряжения U_{34} , вызванное основным током через образец. При нейтральном положении ключа входная цепь микровольтметра разомкнута.

Ключ K_2 позволяет менять полярность напряжения, поступающего на вход микровольтметра.

Иногда контакты 2 и 4 вследствие неточности подпайки не лежат на одной эквипотенциали, и тогда напряжение между ними связано не только с эффектом Холла, но и с омическим падением напряжения, вызванным протеканием основного тока через образец. Измеряемая разность потенциалов при одном направлении магнитного поля равна сумме ЭДС Холла и омического падения напряжения, а при другом — их разности. В этом случае ЭДС Холла \mathcal{E}_x может быть определена как половина алгебраической разности показаний вольтметра, полученных для двух противоположных направлений магнитного поля в зазоре.

Можно исключить влияние омического падения напряжения иначе, если при каждом токе через образец измерять напряжение U_0 между точками 2 и 4 в отсутствие магнитного поля. При фиксированном токе через образец это дополнительное к ЭДС Холла напряжение остаётся неизменным. От него следует (с учётом знака) отсчитывать величину ЭДС Холла:

$$\mathcal{E}_x = U_{24} \pm U_0. \quad (1)$$

При таком способе измерения нет необходимости проводить повторные измерения с противоположным направлением магнитного поля.

По знаку \mathcal{E}_x можно определить характер проводимости — электронный или дырочный. Для этого необходимо знать направление тока в образце и направление магнитного поля.

Измерив ток I в образце и напряжение U_{34} между контактами 3 и 4 в отсутствие магнитного поля, можно, зная параметры образца, рассчитать проводимость материала образца по очевидной формуле:

$$\sigma = \frac{I L_{34}}{U_{34} a l}, \quad (2)$$

где L_{34} — расстояние между контактами 3 и 4, a — толщина образца, l — его ширина.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость ЭДС Холла от ве-

личины магнитного поля при различных токах через образец для определения константы Холла; определить знак носителей заряда и проводимость различных металлических образцов.

1. Подготовьте приборы к работе.

2. Проверьте работу цепи питания образца. Для этого подключите к разъёму блока управления один из образцов — медный или серебряный. Убедитесь, что ток через образец можно изменять от 0,5 до 1,2 А.

3. Проверьте работу цепи магнита. Установите разъём K_1 в положение I и определите диапазон изменения тока через электромагнит.

4. Прокалибруйте электромагнит. Для этого вставьте в зазор электромагнита пробную катушку милливеберметра и исследуйте зависимость магнитного потока Φ , пронизывающего пробную катушку, от тока I_m через обмотки магнита ($\Phi = BSN$). Значение SN (площадь сечения пробной катушки на число витков в ней) указано на держателе катушки.

Проведите измерения магнитного потока для 6–8 значений тока через электромагнит.

5. Проведите измерение ЭДС Холла. Для этого вставьте образец в зазор выключенного электромагнита и определите напряжение U_0 между холловскими контактами 2 и 4 при минимальном токе через образец ($\approx 0,5$ А). Это напряжение U_0 вызвано несовершенством контактов 2, 4 и при фиксированном токе через образец остаётся неизменным. Значение U_0 с учётом знака следует принять за нулевое.

Включите электромагнит и снимите зависимость напряжения U_{24} от тока I_m через обмотки магнита при фиксированном токе через образец. Измерения следует проводить при **медленном** увеличении магнитного поля. Резкие изменения магнитного поля наводят ЭДС индукции в подводящих проводах и вызывают большие отклонения стрелки микровольтметра.

Повторите измерения $U = f(I_m)$ при постоянном токе через образец для 5–6 его значений в интервале 0,5 – 1,2 А. При каждом новом значении тока через образец величина U_0 будет иметь своё значение.

При максимальном токе через образец проведите измерения $U = f(I_m)$ при другом направлении магнитного поля.

Для образца из цинка снимите зависимость $U = f(I_m)$ при одном значении тока через образец ($I \approx 1$ А).

6. Определите знак носителей в образце. Для этого необходимо знать направление тока через образец, направление магнитного поля и знак ЭДС Холла. Направление тока в образце показано знаками «+» и «-» на рис. 1. Направление тока в обмотках электромагнита при установке разъёма K_1 в положение I показано стрелкой на торце магнита.

Напомним, что знак потенциала, соответствующий точкам 2 или 4, можно определить по рис. 1.

Зарисуйте в тетради образец. Укажите на рисунке направление тока, магнитного поля (положение разъёма K_1) и знак потенциала, соответствующий клемме 4 (положение ключа K_2 при отклонении стрелки вольтметра вправо).

Определите знак носителей заряда для каждого из двух образцов.

7. Определите удельную проводимость образца. Для этого удалите держатель с образцом из зазора. Установите переключатель микровольтметра «ПРЕДЕЛЫ ИЗМЕРЕНИЯ» на 750 мкВ. Ключ K_3 поставьте в положение U_{34} .

При токе через образец ~ 1 А измерьте падение напряжения между контактами 3 и 4 для каждого из двух образцов.

8. Запишите характеристики приборов и параметры образцов L_{34} a , l , указанные на держателях.

Обработка результатов

1. Рассчитайте индукцию магнитного поля B для каждого значения тока и постройте график зависимости $B = f(I_M)$.

2. Рассчитайте ЭДС Холла по формуле (1) и постройте на одном листе семейство характеристик $\mathcal{E}_x = f(B)$ при разных значениях тока I через образец (для меди или серебра). Определите угловые коэффициенты $k(I) = \Delta \mathcal{E} / \Delta B$ полученных прямых.

Постройте график $k = f(I)$. Рассчитайте угловой коэффициент прямой и по формуле (3.26) определите величину постоянной Холла R_x .

Для цинка изобразите на графике зависимость $\mathcal{E}_x = f(B)$ и по наклону прямой рассчитайте постоянную Холла.

Для обоих образцов рассчитайте концентрацию n носителей тока по формуле (3.27).

Оцените погрешности и сравните результаты с табличными.

3. Рассчитайте удельную проводимость σ материала образцов по формуле (2).

Используя найденные значения концентрации n и проводимости σ , с помощью формулы (3.20) рассчитайте подвижность b носителей тока в общепринятых для этой величины внесистемных единицах: размерность напряжённости электрического поля $[E] = [U/L] = \text{В/см}$, размерность скорости $[v] = \text{см/с}$, поэтому размерность подвижности $[b] = \text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

Оцените погрешности и сравните результаты с табличными.

Контрольные вопросы

1. Какие вещества называют диэлектриками, проводниками, полупроводниками? Чем объясняется различие их электрических свойств? Как зависит от температуры проводимость металлов и полупроводников?
2. Дайте определение константы Холла. Как зависит константа Холла от температуры у металлов и полупроводников?
3. Зависит ли результат измерения константы Холла от геометрии образца?
4. Как устроен милливеберметр? Зависят ли его показания от сопротивления измерительной катушки? Каким должно быть это сопротивление по сравнению с сопротивлением рамки прибора: большим или маленьким?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество — М.: Наука, 1983. §§ 98, 100.
2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1983. Гл. 4, §§ 4–6; Гл. 6, § 9 (Берклеевский курс физики. Т. II).

Работа 3.3.6

Влияние магнитного поля на проводимость полупроводников

Цель работы: измерение магнетосопротивления полупроводниковых образцов различной формы.

В работе используются: электромагнит, милливеберметр, цифровой вольтметр, амперметр, миллиамперметр, реостат, образцы монокристаллического антимонида индия (InSb) n -типа.

Элементарная теория свободных носителей заряда в металлах и полупроводниках изложена во введении.

Экспериментальная установка. Схема установки для исследования магнетосопротивления полупроводников и геометрического резистивного эффекта представлена на рис. 1.

В зазоре электромагнита (рис. 1а) создаётся постоянное магнитное поле. Ток питания магнита подаётся от сети ($=120$ В), регулируется реостатом R_1 и измеряется амперметром A_1 .

Магнитная индукция в зазоре измеряется при помощи милливеберметра. Описание милливеберметра и правила работы с ним приведены на с. 138.

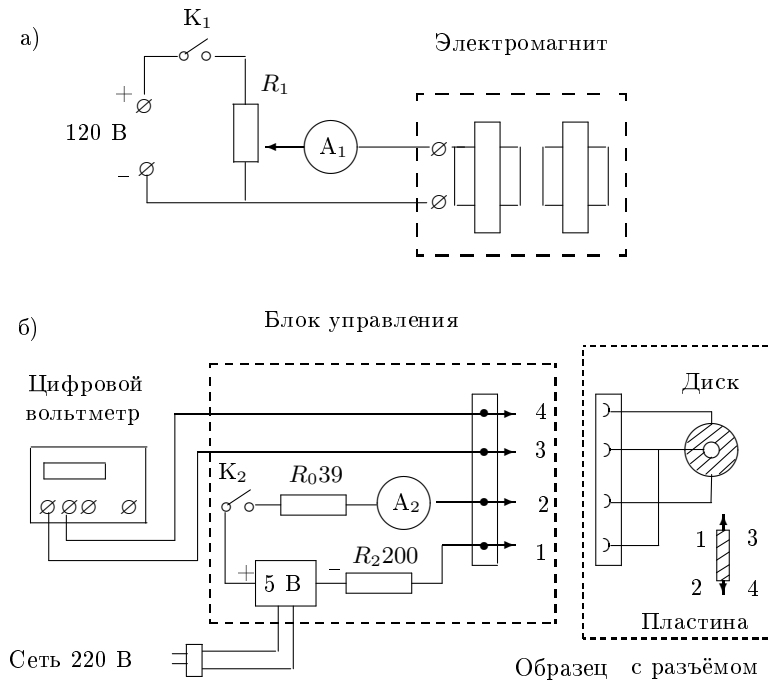


Рис. 1. Схема установки для исследования влияния магнитного поля на проводимость полупроводников

Образец в форме кольца (диск Корбино) или пластинки, смонтированный в специальном держателе, подключается к источнику постоянного напряжения 5 В. При замыкании ключа K_2 сквозь образец течёт ток, величина которого измеряется миллиамперметром A_2 и регулируется реостатом R_2 . Балластное сопротивление R_0 ограничивает ток через образец. Измеряемое напряжение подаётся на вход цифрового вольтметра.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при постоянном токе через образец исследовать зависимость напряжения на образце от величины магнитного поля и от ориентации образца в магнитном поле; по результатам измерений рассчитать подвижность электронов, удельное сопротивление материала образца и концентрацию электронов.

1. Подготовьте приборы к работе.
2. Концы от точек 3 и 4 разъёма подсоедините к клеммам вольтметра.

3. Присоедините диск Корбино через разъём к цепи питания. Определите диапазон изменения силы тока через образец.
4. Определите диапазон изменения силы тока через электромагнит и подберите подходящий предел измерений амперметра A_1 .
5. Прокалибруйте электромагнит — с помощью милливексметра исследуйте зависимость индукции B магнитного поля в зазоре от тока I_M через обмотки магнита. Для расчёта индукции измерьте поток Φ вектора магнитной индукции, который пронизывает пробную катушку, находящуюся в зазоре ($\Phi = BSN$). Значение SN (площадь сечения контура катушки на число витков в ней) указано на держателе катушки.
6. Проведите измерения магнитного потока для 6–8 значений тока I_M через электромагнит.
7. Исследуйте магнетосопротивление образцов. Для этого вставьте диск в зазор выключенного электромагнита и установите ток через образец $I_0 = 25$ мА. Измерьте падение напряжения U_0 на образце.
8. Включите электромагнит и снимите зависимость напряжения U на образце от тока I_M через обмотки магнита при фиксированном токе $I_0 = 25$ мА через образец.
9. Проверьте, что результат измерения не зависит от направления магнитного поля.
10. Вместо диска Корбино подключите к измерительной цепи образец, имеющий форму пластинки. Поместите образец в зазор выключенного электромагнита и измерьте падение напряжения U_0 на образце при токе через образец 10 мА.
11. Включите электромагнит и снимите зависимость напряжения U на образце от тока через магнит при постоянном токе $I = 10$ мА. При измерениях длинная сторона образца должна быть направлена поперёк поля, а средняя (ширина) в одной серии опытов располагается вдоль, а в другой — поперёк поля.
12. Запишите размеры диска и характеристики приборов.

Обработка результатов

1. Рассчитайте индукцию магнитного поля и постройте график зависимости $B = f(I_M)$.
2. На одном листе постройте графики для всех трёх серий, отложив по оси X величину B^2 , а по оси Y — $(U - U_0)/U_0$.
3. По наклону прямолинейного участка графика для диска Корбино рассчитайте с помощью формул (3.33) и (3.34) подвижность носителей.
4. Вычислив сопротивление диска в отсутствие магнитного поля и зная геометрические размеры образца, рассчитайте удельное сопротивление материала образца ρ_0 по формуле (3.35).

С помощью формулы (3.20) найдите концентрацию носителей тока.

5. Оцените погрешности и сравните результаты с табличными.

Контрольные вопросы

1. Исследуйте уравнения движения электронов в прямоугольной пластинке. Зависит ли сопротивление пластинки от индукции магнитного поля?
2. Поясните качественно (без формул), почему сопротивление образца зависит от магнитного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество — М.: Наука, 1983. §§ 98, 100.
2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1983. Гл. 4, §§ 4–6; Гл. 6, § 9 (Берклеевский курс физики. Т. II).

МИЛЛИВЕБЕРМЕТР

А. Устройство и принцип действия

Милливеберметр (флюксметр) служит для измерения постоянного во времени магнитного потока. Это прибор магнитоэлектрической системы, работающий в баллистическом режиме: рамка с током вращается в поле постоянного магнита; отклонение рамки пропорционально заряду, если через неё пропускается короткий импульс тока. От обычных гальванометров постоянного тока милливеберметр отличается тем, что на его рамку не действуют никакие упругие силы, поэтому его подвижная часть находится в безразличном равновесии.

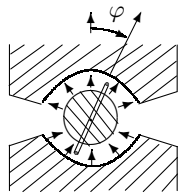


Рис. М.1. Рамка в магнитном поле

В цепь рамки прибора включается наружная измерительная (пробная) катушка. При изменении магнитного потока, пронизывающего эту катушку, в ней возникает ЭДС индукции, и по цепи рамки течёт индукционный ток. При этом отклонение рамки, независимо от её начального положения, пропорционально изменению магнитного потока $\Delta\Phi$ и может служить для его измерения.

Рассмотрим работу милливеберметра. Уравнение вращательного движения рамки имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = M, \quad (\text{М.1})$$

где J — момент инерции рамки милливеберметра, φ — угол её поворота (рис. М.1). Момент сил M определяется путём умножения силы $F = IlNB_0$, действующей на каждую из продольных сторон рамки

(направленных вдоль оси вращения), на удвоенное плечо, т.е. на поперечный размер рамки a , здесь I — сила тока в рамке, l — длина продольной стороны, N — число витков намотанного на рамку провода, B_0 — индукция поля постоянного магнита милливеберметра. Поле магнита радиально, это обеспечивает равномерность шкалы прибора. Таким образом,

$$J\ddot{\varphi} = ISNB_0,$$

где $S = la$ — площадь рамки. Введя обозначение $K = SNB_0$, получим

$$J\ddot{\varphi} = KI. \quad (\text{М.2})$$

Вычислим теперь ток I . Этот ток генерируется под действием как внешней ЭДС индукции $\mathcal{E}_к$, возникающей в измерительной катушке, так и внутренней $\mathcal{E}_р$, возникающей в рамке при её движении в магнитном поле:

$$RI = \mathcal{E}_к + \mathcal{E}_р, \quad (\text{М.3})$$

где R — полное сопротивление цепи рамки.

Внешняя ЭДС $\mathcal{E}_к$ наводится в измерительной катушке при изменении проходящего сквозь неё магнитного потока Φ :

$$\mathcal{E}_к = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{М.4})$$

а $\mathcal{E}_р$ возникает в продольных сторонах рамки при их движении в поле постоянного магнита со скоростью $v = \dot{\varphi}a/2$:

$$\mathcal{E}_р = -SNB_0\dot{\varphi} = -K\dot{\varphi}. \quad (\text{М.5})$$

Подставим (М.3) – (М.5) в (М.2), и уравнение движения рамки принимает вид

$$\frac{JR}{K^2}\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = -\frac{1}{K}\dot{\Phi}. \quad (\text{М.6})$$

Проинтегрируем это уравнение по времени:

$$\frac{JR}{K^2}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + (\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{1}{K}(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (\text{М.7})$$

Для измерения магнитного потока с помощью милливеберметра можно:

- а) вынести измерительную катушку из области измеряемого в область нулевого поля;
- б) оставив катушку в поле неподвижной, отключить измеряемое поле.

В любом из этих вариантов скорость изменения потока $\dot{\Phi}$ в начале и в конце опыта равна нулю. В начале опыта рамка милливеберметра не движется, так что $\dot{\varphi}_1 = 0$. Покажем, что и $\dot{\varphi}_2 = 0$.

В самом деле, при $\dot{\Phi} = 0$ в уравнении (М.6) пропадает правая часть. В отсутствие внешних сил рамка рано или поздно должна остановиться вследствие действия сил электромагнитного торможения. Можно найти закон движения при торможении, решив дифференциальное уравнение (М.6):

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(0) \exp\left(-\frac{K^2}{JR}t\right), \quad (\text{М.8})$$

где $\dot{\varphi}(0)$ — начальная угловая скорость рамки. При больших t угловая скорость $\dot{\varphi}$ оказывается экспоненциально мала, т. е. $\dot{\varphi}_2 \rightarrow 0$.

Подставляя $\dot{\varphi}_1 = 0$ и $\dot{\varphi}_2 = 0$ в (М.7), найдём

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{K}(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (\text{М.9})$$

Таким образом, *угол отклонения рамки милливеберметра пропорционален изменению магнитного потока, пронизывающего измерительную катушку*. Коэффициент пропорциональности выбирается так, что шкала прибора градуируется в милливеберах. Разделив поток на площадь и число витков измерительной (пробной) катушки, мы определим индукцию B внешнего магнитного поля.



Рис. М.2. Схема прибора

Обратим внимание на структуру формулы (М.8). Время t , в течение которого затухает движение рамки, должно быть небольшим, т.к. рамка находится в безразличном равновесии и склонна дрейфовать. Самопроизвольное перемещение стрелки искажает результаты измерений. Из (М.8) видно, что время успокоения прибора падает с уменьшением R , поэтому *милливеберметр работает правильно лишь при замыкании его рамки на достаточно малое сопротивление*.

Допустимая величина сопротивления измерительной катушки указана на приборе.

Принципиальная схема милливеберметра изображена на рис. М.2. Так как прибор не имеет противодействующего механического момента, стрелка его после измерения не возвращается к начальному положению. Для установки стрелки на нужную отметку служит электромагнитный *корректор* — вторая магнитная система, состоящая из постоянного магнита и сердечника с обмоткой. Когда ручка переключателя

находится в положении «Корректор», обмотка корректора замкнута на рамку прибора, в которой в момент поворота ручки корректора (вследствие пересечения силовых линий магнита корректора) возникает ток. Изменяя направление и угол поворота ручки корректора, можно установить стрелку прибора на любом делении шкалы.

При положении ручки переключателя на отметке «Арретир» рамка прибора замкнута накоротко, и подвижная система прибора находится в сильно успокоенном режиме.

В положении «Измерение» прибор готов к работе.

Б. Правила работы

І. Общие указания

1. Для измерения магнитного потока подключённая к прибору измерительная катушка помещается в магнитное поле перпендикулярно ему.
2. Для исключения погрешности от паралакса отсчёт показаний следует проводить так, чтобы изображение стрелки в зеркале шкалы совпадало с самой стрелкой.

ІІ. Измерение магнитного потока

1. Поставьте переключатель в положение «Корректор» и поворотом рукоятки корректора установите начальное положение стрелки, удобное для измерений.

Если ручка корректора дошла до упора, а стрелка сместилась недостаточно, поверните рукоятку корректора в обратную сторону до упора, а затем снова поворачивайте её, пока стрелка не встанет на нужное деление.

2. Поставьте переключатель в положение «Измерение». Заметьте начальное положение стрелки (вся шкала — 10 дел. — 10 мВб).

Измените магнитный поток сквозь катушку до нуля и заметьте новое положение стрелки. Разность показаний определяет магнитный поток.

Изменять магнитный поток рекомендуется одним из способов:

- а) быстро удаляя пробную катушку из области действия магнитного поля на расстояние, где магнитный поток практически равен нулю (рекомендуется);
- б) выключая магнитное поле, если катушка закреплена жёстко.

Не рекомендуется переполусовывать магнит для измерений поля, т. к. при этом часто ломаются переключатели.

Величина SN , необходимая для расчёта индукции поля, указана на пробной катушке.

3. По окончании работы следует заарретировать прибор — поставить переключатель в положение «Арретир».

4. Не реже одного раза в месяц рекомендуется проверять состояние приборов по образцовому прибору.

Один раз в два года, а также после каждого ремонта, приборы должны проверяться в местном отделении Комитета стандартов, мер и измерительных приборов.

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

1. Диа- и парамагнетики

Одной из основных макроскопических характеристик веществ, которая используется для описания их магнитных свойств, является **вектор намагниченности** \mathbf{M} — суммарный магнитный момент единичного объёма вещества. В ряде веществ между намагниченностью \mathbf{M} и напряжённостью магнитного поля \mathbf{H} имеет место линейная зависимость:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad (4.1)$$

где скалярная величина χ — **магнитная восприимчивость** единичного объёма вещества. Вещества с отрицательной магнитной восприимчивостью ($\chi < 0$) называют **диамагнетиками**, а вещества с $\chi > 0$ принадлежат к классу **парамагнетиков**.

Магнитные свойства твёрдых тел определяются поведением электронов, входящих в состав атомов и молекул, из которых состоят эти тела. Движение атомных электронов может быть количественно описано только с помощью квантовой механики, хотя ряд правильных выводов может быть сделан на основе классических соображений.

При внесении любого тела в магнитное поле в электронной оболочке каждого его атома в силу закона электромагнитной индукции возникают индуцированные токи, т. е. добавочное круговое движение электронов, обусловленное прецессией электронных орбит относительно направления внешнего магнитного поля. Эти токи создают индуцированный магнитный момент, направленный противоположно внешнему магнитному полю. Это — проявление общезначимого принципа Ле-Шателье–Брауна, согласно которому *всякая равновесная система при слабом внешнем воздействии ведёт себя так, чтобы уменьшить последствия этого воздействия* (в электромагнетизме это называют **правилом Ленца**).

Связанная с диамагнетизмом отрицательная намагничённость обычно невелика ($\chi \simeq 10^{-8} \div 10^{-4}$). В отсутствие внешнего поля атом (молекула) чистого диамагнетика не обладает магнитным моментом: магнитные моменты электронов в атомах (молекулах) диамагнетиков взаимно скомпенсированы. В частности, это имеет место в атомах и молекулах с целиком заполненными оболочками: в атомах инертных газов, в молекулах водорода, азота.

Рассмотрим одну из электронных орбит атома. Пусть электрон с зарядом $-e$ и массой m_e движется со скоростью v по круговой орбите радиуса r , а его орбитальный момент количества движения \mathbf{L} лежит в плоскости рис. 4.1 и направлен под углом θ к некоторой оси z . С моментом импульса \mathbf{L} связан орбитальный магнитный момент $\boldsymbol{\mu}_L$, который направлен в противоположную сторону, поскольку заряд электрона отрицательный. При включении магнитного поля с индукцией \mathbf{B} , направленной вдоль оси z , на атом начинает действовать механический момент

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\mu}_L \times \mathbf{B},$$

который перпендикулярен плоскости рис. 4.1 и направлен от нас. Уравнение движения атома будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\mu}_L \times \mathbf{B}.$$

Аналогичное хорошо известное в механике уравнение описывает угловую прецессию волчка. В нашем случае это уравнение описывает прецессию электронной орбиты с угловой частотой

$$\Omega_L = \frac{\mu_L B}{L}$$

и направленной вдоль магнитного поля. Поскольку $L = m_e v r$, а $\mu_L = \frac{1}{2} e v r$, то

$$\Omega_L = \frac{e}{2m_e} B.$$

Эта частота называется ларморовой угловой частотой. Следует отметить, что ни направление, ни величина ларморовой угловой частоты не зависят от угла θ .

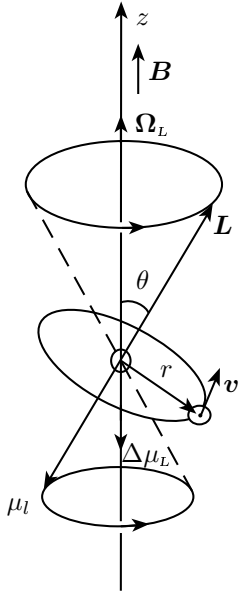


Рис. 4.1. Прецессия электронной «орбиты» в магнитном поле

Прецессия электронной орбиты приводит к дополнительному вращению электрона вокруг поля \mathbf{B} , налагающемуся на его орбитальное движение. Это дополнительное движение эквивалентно замкнутому току Δi в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{B} :

$$\Delta i = -\frac{e\Omega_L}{2\pi} = -\frac{e^2}{4\pi m_e} B.$$

Этот ток создаёт магнитный момент

$$\Delta \mu_L = \Delta i \cdot S = -\frac{e^2 S}{4\pi m_e} B = -\frac{\mu_0 e^2 S}{4\pi m_e} H,$$

где S — площадь контура, который описывает электрон в результате прецессии вокруг поля \mathbf{B} . Если рассматривать сферически-симметричное распределение заряда электрона, то расчёт показывает, что $S = \frac{2}{3}\pi \langle r^2 \rangle$, где $\langle r^2 \rangle$ — средний квадрат расстояния электрона от ядра. Поэтому

$$\Delta \mu_L = -\frac{\mu_0 e^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} H.$$

Появление этого момента и приводит к намагничиванию вещества в направлении, противоположном полю, т. е. к диамагнетизму. Магнитный момент атома, содержащего Z электронов, находится суммированием магнитных моментов отдельных электронов:

$$\mu_{\text{ат}} = -\frac{\mu_0 e^2 H}{6m_e} \sum_{i=1}^Z \langle r_i^2 \rangle.$$

Сумму можно заменить произведением $Z \langle a^2 \rangle$, где $\langle a^2 \rangle$ — средний квадрат расстояния электронов от ядра. Тогда

$$\mu_{\text{ат}} = -\frac{\mu_0 e^2 \langle a^2 \rangle Z}{6m_e} H.$$

Умножив полученное выражение на число атомов n в единице объёма, получим намагничённость M :

$$M = n\mu_{\text{ат}} = -\frac{\mu_0 e^2 \langle a^2 \rangle nZ}{6m_e} H.$$

Магнитная восприимчивость

$$\chi = \frac{M}{H} = -\frac{\mu_0 e^2 \langle a^2 \rangle nZ}{6m_e}.$$

Положив $a \approx 10^{-10}$ м, $n \approx 5 \cdot 10^{28}$ м $^{-3}$, получим, что

$$\chi \approx -10^{-6} Z.$$

Эта оценка находится в хорошем согласии с экспериментальными результатами.

Из полученного выражения для магнитной восприимчивости диамагнетиков следует, что она не зависит ни от температуры, ни от величины напряжённости поля и растёт пропорционально порядковому номеру элемента.

Диамагнитный эффект свойствен всем веществам (независимо от того, имелся ли у атома собственный магнитный момент или нет и как он был ориентирован), однако у некоторых веществ он перекрывается более сильным *парамагнитным* эффектом. В отличие от диамагнетизма парамагнетизм характерен для веществ, частицы которых (атомы, ионы, молекулы) обладают собственным магнитным моментом в отсутствие внешнего магнитного поля. Этот магнитный момент обусловлен как движением электронов в оболочке атома (орбитальный магнитный момент), так и наличием собственных магнитных моментов у электронов и ядер (спиновый магнитный момент). Например, в кристаллах медного купороса (CuSO_4) содержатся ионы меди, у которых электроны на внутренних оболочках имеют суммарный магнитный момент, не равный нулю. Изолированный атом меди имеет нечётное число электронов (29). На внешней оболочке $4s$ имеется всего один электрон, и именно его магнитный момент является магнитным моментом атома меди. Поэтому пары меди, как и пары натрия, являются парамагнетиками. Однако при переходе в твёрдое состояние (в процессе кристаллизации) атомы меди теряют этот электрон, он уходит от своего атома и уже принадлежит всему кристаллу. «Застывшие» в узлах решётки ионы меди уже не имеют магнитного момента и поэтому не обладают парамагнитным эффектом. Обобществлённые электроны (электроны проводимости) образуют электронный газ, который является парамагнетиком, поскольку состоит из частиц, обладающих собственным магнитным моментом. Такой парамагнетизм называют *парамагнетизмом Паули*. Но медь является диамагнетиком, и это означает, что диамагнетизм ионов меди преобладает над парамагнетизмом свободных электронов.

Отличительной особенностью парамагнетиков является их слабая намагниченность во внешнем магнитном поле при комнатной температуре. В отсутствие магнитного поля энергия диполь-дипольного взаимодействия между двумя соседними магнитными моментами атомов с межатомным расстоянием $\sim 5 \cdot 10^{-8}$ см составляет $\sim 10^{-5}$ эВ, а энергия

теплового движения на атом $\sim 7,5 \cdot 10^{-2}$ эВ. Такое превосходство тепловой энергии приводит к равномерному пространственному распределению магнитных моментов, а следовательно, к отсутствию намагниченности у парамагнетиков. Но когда начинает действовать внешнее магнитное поле, оно выстраивает магнитные моменты так, что магнитных моментов, направленных по полю, становится больше, чем направленных против поля, и с ростом поля намагниченность парамагнетиков растёт по закону (4.1). Магнитная восприимчивость парамагнетиков всегда положительна, а по величине $\chi \sim 10^{-6} \div 10^{-4}$ (система СИ).

Найдём температурную зависимость магнитной восприимчивости парамагнетика. Пусть среднее число атомов в единице объёма равно N , а абсолютная величина магнитного момента атома μ_B . В магнитном поле с индукцией B энергия магнитного диполя, составляющего с направлением поля угол α ,

$$U = -\mu_B B \cos \alpha.$$

Используя распределение Больцмана, запишем число атомов из единичного объёма, магнитные моменты которых направлены под углами от α до $\alpha + d\alpha$ в малом телесном угле $d\Omega = 2\pi \sin \alpha d\alpha$ (рис. 4.2):

$$dN = N_0 \exp\left(\frac{\mu_B B \cos \alpha}{kT}\right) 2\pi \sin \alpha d\alpha,$$

где N_0 — нормировочная константа. Полное число атомов в единице объёма

$$N = 2\pi N_0 \int_0^\pi e^{\frac{\mu_B B \cos \alpha}{kT}} \sin \alpha d\alpha. \quad (4.2)$$

Поскольку проекция магнитного момента атома на направление поля равна $\mu_B \cos \alpha$, то суммарный магнитный момент всех атомов единицы объёма будет равен

$$M = 2\pi N_0 \int_0^\pi \mu_B \cos \alpha \exp\left(\frac{\mu_B B \cos \alpha}{kT}\right) \sin \alpha d\alpha. \quad (4.3)$$

Магнитный момент электрона $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24}$ А·м 2 (магнетон Бора). В магнитном поле с $B = 1,0$ Тл магнитная энергия $\mu_B B \sim 10^{-4}$ эВ. Поэтому в не слишком больших полях и не слишком

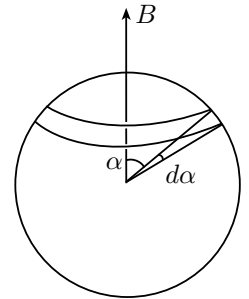


Рис. 4.2

низких температурах показатель экспоненты много меньше единицы. В этом приближении из совместного решения (4.2) и (4.3) получим, что намагниченность

$$M \approx \frac{\mu_B^2 B N}{3kT} = \frac{\mu_B^2 \mu_0 N}{3kT} H.$$

Магнитная восприимчивость

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{\mu_B^2 \mu_0 N}{3kT} \sim \frac{1}{T}.$$

Температурная зависимость восприимчивости парамагнетиков вида $1/T$ называется законом Кюри.

В очень сильных полях, когда магнитная энергия внутриатомного диполя сравнима с тепловой ($B \simeq 10^3$ Тл при комнатной температуре), все магнитные моменты в парамагнетике могут ориентироваться по полю — наступает магнитное насыщение.

В случае парамагнетизма свободных электронов, образующих электронный газ в металлах, не все электроны могут участвовать в переориентировке своих магнитных моментов, а только небольшая часть, которая пропорциональна тепловой энергии kT (квантовый эффект). Поэтому у некоторых металлов парамагнетизм не зависит от температуры.

2. Ферромагнетизм

Помимо диа- и парамагнетиков, которые слабо реагируют на внешнее магнитное поле, в природе существуют вещества, способные сильно намагничиваться даже в небольших магнитных полях. Такие вещества относят к классу **ферромагнетиков**. Это — железо, никель, кобальт, гадолиний и многочисленные сплавы этих металлов между собой и с другими металлами. Ферромагнитными свойствами обладают некоторые сплавы элементов, которые порознь не являются ферромагнитными (например, сплавы меди и марганца), и ряд неметаллических веществ (ферриты).

Зависимость намагниченности M от напряжённости магнитного поля H у всех ферромагнетиков оказывается нелинейной, поскольку магнитная восприимчивость χ у ферромагнетиков не является константой и зависит от H . Если у диа- и парамагнетиков χ составляет всего $10^{-8} \div 10^{-3}$, то у ферромагнетиков магнитная восприимчивость достигает значений $10^4 \div 10^5$. Кроме того, у ферромагнетиков (особенно монокристаллических) наиболее ярко проявляется тензорный характер магнитной восприимчивости χ , обусловленный анизотропией вещества.

Степень намагничивания ферромагнитного вещества можно характеризовать не только вектором намагниченности \mathbf{M} , но и вектором магнитной индукции \mathbf{B} в данном веществе:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

При $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} = \mu_0 \mu \mathbf{H}. \quad (4.4)$$

Величина $\mu = 1 + \chi$ носит название магнитной проницаемости вещества. Если у диа- и парамагнетиков μ отличается от единицы всего на сотые доли процента, то у ферромагнетиков μ практически совпадает с χ (в системе СИ).

Отметим, что в системе СГС, где $\mathbf{B} = (1 + 4\pi\chi)\mathbf{H}$, χ в 4π раз меньше, чем в системе СИ.

Обратимся теперь к природе ферромагнетизма. Атомы ферромагнетиков так же, как и атомы парамагнетиков, обладают собственными магнитными моментами даже в отсутствие внешнего магнитного поля. На этом их сходство и заканчивается, а главное отличие состоит в степени магнитной упорядоченности магнитных диполей. В случае парамагнетика мы имеем дело с полностью разупорядоченной системой магнитных диполей (энергия диполь-дипольного взаимодействия мала по сравнению с энергией теплового движения). В отсутствие внешнего магнитного поля ферромагнитный образец разбит на области спонтанной однородной намагниченности, называемые **доменами**. Это — макроскопические области размером порядка нескольких микрометров, в которых все магнитные моменты атомов выстроены в одном направлении, т. е. внутри домена мы имеем полную магнитную упорядоченность атомов. В 1928 г. независимо В. Гейзенбергом и Я.И. Френкелем было высказано предположение, что силы, заставляющие магнитные моменты атомов ориентироваться сонаправлено, имеют электростатическую природу. Они возникают в результате **обменного взаимодействия** электронов внутренних недостроенных оболочек, как, например, в атомах группы Fe. Обменное взаимодействие между атомами ферромагнетика имеет квантово-механическую природу и в настоящее время ещё не до конца изучено.

Помимо обменных (близодействующих) сил между атомами действуют дальнедействующие силы магнитного диполь-дипольного взаимодействия. Энергия такого взаимодействия будет минимальна при антипараллельном расположении магнитных моментов соседних атомов. Поэтому при определённом поперечном (перпендикулярном магнитному моменту) размере домена оказывается энергетически выгодно

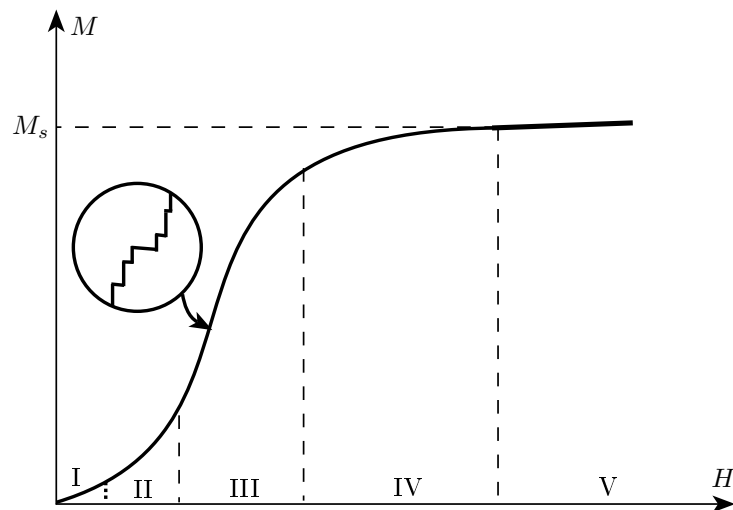


Рис. 4.3. Начальная кривая намагничивания ферромагнетика

иметь соседний домен с противоположно направленным магнитным моментом.

В результате конкуренции этих двух типов взаимодействий достаточно большой ферромагнитный образец разбивается на многочисленное количество доменов. Между доменами существуют переходные слои (в железе их толщина $\sim 10^{-5}$ см), в которых направление магнитного момента атомов плавно переходит от направления в одном домене к направлению в соседнем. Такие слои называют «стенками Блоха».

Суммарный магнитный момент ферромагнитного образца в отсутствие внешнего магнитного поля неоднозначен: его величина и направление зависят от предыстории образца. В одних случаях он равен нулю (полностью размагниченный образец), а в другом случае он может иметь очень большое значение (например, постоянный магнит).

Если ферромагнетик, находящийся в состоянии полного размагничивания ($M = 0$), намагничивать в медленно нарастающем магнитном поле, то мы получим зависимость $M(H)$, которую называют **начальной кривой намагничивания**. Эту кривую обычно разделяют на пять условных участков (рис. 4.3). Участок I — область обратимого намагничивания, где $M = \chi_0 H$. В этой области происходят процессы упругого смещения границ доменов: увеличивается размер тех доменов, магнитный момент которых близок к направлению магнитного поля, и уменьша-

ются размеры доменов с противоположным направлением магнитного момента. Участок II характеризуется квадратичной зависимостью M от H . В этой области также идёт процесс смещения границ, но одновременно как обратимый, так и необратимый. Область максимальной скорости роста намагниченности (III) соответствует необратимым смещениям «стенок Блоха»: им приходится преодолевать «препятствия» в виде примесей, дислокаций и дефектов кристаллической решётки. Когда стенка наталкивается на такое препятствие, она останавливается и держится, пока поле не достигнет определённого значения, при котором она внезапно срывается. Таким образом, движение доменной стенки приобретает скачкообразный характер (скачки Баркгаузена).

Фрагмент кривой намагничивания в этой области в увеличенном масштабе показан на рис. 4.3. Скачкообразное движение стенок приводит к быстрому изменению намагниченности образца, что вызывает появление вихревых токов, а следовательно, диссипацию энергии. Выделение тепла внутри образца и приводит к необратимому движению доменных стенок.

В достаточно сильных полях движение стенок прекращается и энергетически выгодным становится поворот магнитных моментов тех оставшихся доменов, у которых магнитный момент не совпадает с направлением поля (область IV). И, наконец, при некотором значении поля (участок V) все магнитные моменты выстраиваются по полю — намагниченность образца достигает насыщения.

Магнитные и другие физические свойства ферромагнетиков существенным образом зависят от температуры. Например, намагниченность насыщения M_s имеет наибольшее значение при $T = 0$ ($M_s(0)$) и монотонно уменьшается до нуля при температуре Θ , которую называют **ферромагнитной точкой Кюри** (рис. 4.4). Выше Θ тепловое движение разупорядочивает магнитную структуру доменов и ферромагнетик переходит в парамагнитное состояние. В отсутствие внешнего магнитного поля переход ферромагнетик-парамагнетик является фазовым переходом II рода.

Мы уже знаем, что для парамагнетиков зависимость магнитной восприимчивости от температуры имеет вид закона Кюри ($\chi \sim 1/T$). Аналогичная зависимость восприимчивости ферромагнетиков от темпера-

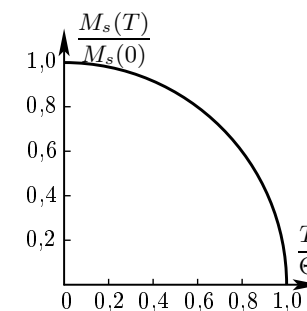


Рис. 4.4. Зависимость намагниченности насыщения ферромагнетика от температуры

туры при температурах выше Θ описывается законом Кюри–Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - \Theta_p},$$

где C — постоянная Кюри, а Θ_p — парамагнитная температура Кюри (как правило $\Theta_p > \Theta$).

На практике магнитные свойства ферромагнетиков обычно изучают путём измерения зависимости индукции магнитного поля \mathbf{B} от напряжённости магнитного поля \mathbf{H} в веществе ($\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$). Исследование образца, естественно, начинают с полностью размагниченного состояния ($\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{B} = 0$). Если теперь монотонно увеличивать напряжённость поля \mathbf{H} , то изменение \mathbf{B} происходит по известной нам начальной кривой намагничивания (кривая OA на рис. 4.5).

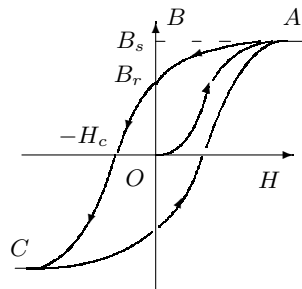


Рис. 4.5. Начальная кривая намагничивания и кривая гистерезиса

Эта кривая практически совпадает с кривой намагничивания на рис. 4.3, поскольку вклад в \mathbf{B} намагниченности \mathbf{M} существенно больше, чем \mathbf{H} . Скорость подъёма кривой OA характеризуется дифференциальной магнитной проницаемостью

$$\mu_{\text{диф}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}.$$

Дифференциальная магнитная проницаемость обычного железа с ростом \mathbf{H} сначала увеличивается, а затем начинает резко падать, приближаясь к единице

при насыщении. Дойдя до некоторой точки A , лежащей достаточно далеко в области насыщения (здесь B_s — индукция насыщения)¹, начнём уменьшать напряжённость поля \mathbf{H} .

Обратный путь не идёт по начальной кривой, а проходит выше неё. При $\mathbf{H} = 0$ в образце сохраняется некоторое намагничивание. Величина B_r , достигаемая в точке $\mathbf{H} = 0$ при возвращении из состояния насыщения, носит название остаточной индукции². Значение $B = 0$ достигается лишь при некотором отрицательном значении $\mathbf{H} = -H_c$. Величина H_c называется коэрцитивной силой³. Среди ферромагнетиков принято различать магнитожёсткие (с $H_c > 10^3$ А/м) и магнитомягкие материалы.

¹ s — saturated (англ.) — насыщенный

² r — remained (англ.) — оставшийся

³ c — coercive (англ.) — принудительный

В точке C наступает насыщение для намагничивания в противоположную сторону.

Постараемся теперь вернуться в точку A . Магнитное состояние вещества характеризуется теперь точками кривой CA , лежащими ниже начальной кривой намагничивания. Строго говоря, кривая не пройдёт и через точку A , а окажется ниже неё. Вновь уменьшая магнитное поле, мы пройдем поэтому по кривой, расположенной ниже кривой AC , не попадём в точку C и начнём движение к A по некоторому новому пути. Магнитные циклы, таким образом, обычно оказываются незамкнутыми. Многократно проходя один и тот же цикл, образец приближается к предельному замкнутому циклу (кривой гистерезиса), не зависящему от начального состояния. Описанная картина наиболее отчётливо проявляется в тех случаях, когда образец не доводится до насыщения. При заходе в область насыщения намагничивание зависит главным образом от \mathbf{H} и лишь в очень слабой степени от истории образца. Предельные циклы устанавливаются при этом сразу (т. е. при однократном прохождении цикла) или почти сразу. В соответствии с этим на рис. 4.5 не сделано различия между частным циклом и предельным.

Можно показать, что площадь петли гистерезиса пропорциональна энергии, теряемой в единице объёма вещества за время цикла:

$$w = \oint H dB.$$

3. Размагничивающий фактор

Когда мы говорим о кривой намагничивания $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ какого-то ферромагнитного материала, то речь идёт о локальной связи между индукцией и величиной магнитного поля внутри этого вещества. Подчёркнём, что в зависимости $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ имеется в виду не внешнее магнитное поле, а именно поле внутри данного материала. На практике для снятия петли гистерезиса мы обычно помещаем во внешнее однородное магнитное поле ферромагнитный образец, имеющий конечные размеры. Однородная намагниченность по всему объёму образца будет иметь место только для образцов, имеющих форму эллипсоидов вращения, в частности, для шара, для очень тонкой пластинки и для тонкого и длинного цилиндра. Во всех этих случаях величина магнитного поля внутри образца будет меньше внешнего магнитного поля. Рассмотрим в качестве примера образец, имеющий форму цилиндра длиной l и диаметром d ($d \ll l$).

Пусть ось симметрии цилиндра направлена вдоль внешнего магнитного поля величиной H_0 . Цилиндр будет практически однородно намагничён с некоторой намагниченностью M . Найдём величину индук-

ции магнитного поля на оси цилиндра в точке, равноудаленной от его торцов. С одной стороны, используя связь между \mathbf{B} , \mathbf{M} и \mathbf{H} , можно записать

$$B_{\text{вн}} = \mu_0(H_{\text{вн}} + M), \quad (4.5)$$

где $H_{\text{вн}}$ — величина поля внутри образца. С другой стороны, намагниченный цилиндр можно рассматривать как цилиндрическую поверхность диаметра d с однородным кольцевым поверхностным током плотностью:

$$j = M.$$

Эти молекулярные токи создают собственное магнитное поле, которое по направлению совпадает с внешним полем H_0 , а по величине равно⁴:

$$H_{\text{мол}} = \frac{Ml}{\sqrt{l^2 + d^2}}.$$

Индукцию магнитного поля найдём как суперпозицию внешнего поля и поля молекулярных токов:

$$B_{\text{вн}} = \mu_0 \left(H_0 + \frac{Ml}{\sqrt{l^2 + d^2}} \right). \quad (4.6)$$

Приравнявая (4.5) и (4.6), получим

$$H_0 + \frac{Ml}{\sqrt{l^2 + d^2}} = H_{\text{вн}} + M.$$

Разность между внешним и внутренним полями называют размагничивающим полем:

$$H_{\text{разм}} = H_0 - H_{\text{вн}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{l}\right)^2}} \right) M = N_p M.$$

Коэффициент пропорциональности между размагничивающим полем и намагниченностью образца обозначают через N_p и называют размагничивающим фактором или коэффициентом размагничивания. Его величина зависит только от геометрических размеров образца и может изменяться в пределах от 0 до 1.

Полученное выражение для N_p цилиндра с параметрами $d/l \ll 1$ всё равно остаётся приближённым выражением, хотя и с достаточно

хорошим приближением. А вот точные значения размагничивающего фактора могут быть рассчитаны только в отдельных частных случаях:

1) бесконечно длинный цилиндр с конечным размером диаметра: в случае продольного внешнего магнитного поля $N_p = 0$, в случае поперечного — $N_p = 1/2$;

2) для шара $N_p = 1/3$;

3) в случае *бесконечно* тонкой пластинки при поперечном внешнем магнитном поле $N_p = 1$, а при продольном — $N_p = 0$.

В лабораторных условиях для исследования зависимости $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ ферромагнитных материалов обычно используют образцы тороидальной формы. Если на тор намотать равномерную намагничивающую обмотку (рис. 4.6), то поле H внутри тора на окружности радиуса R будет пропорционально току I в обмотке, а его величину можно рассчитать по теореме о циркуляции вектора \mathbf{H} :

$$H = \frac{IN_0}{2\pi R}, \quad (4.7)$$

где N_0 — число витков намагничивающей обмотки.

Напряжённость магнитного поля в тороидальном образце зависит от R , поэтому при $r \ll R$ мы будем иметь достаточно однородную намагниченность образца.

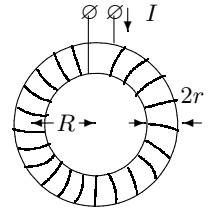


Рис. 4.6. Тороидальный образец с намагничивающей обмоткой

4. Измерение напряжённости магнитного поля в образцах

Рассмотрим ферромагнитный образец, имеющий форму тора с поперечным разрезом (рис. 4.7).

Пусть ширина разреза δ существенно меньше радиуса сечения тора r , который в свою очередь мал по сравнению со средним радиусом тора R . Обозначим через N_0 число витков намагничивающей обмотки и через I — силу намагничивающего тока. Пусть H_1 — напряжённость магнитного поля в образце, а H_2 — в зазоре. По теореме о циркуляции вектора \mathbf{H} имеем

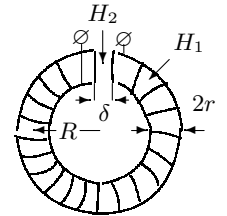


Рис. 4.7. Тороидальная катушка с разрезом

$$\oint H dl = H_1(2\pi R - \delta) + H_2\delta = N_0 I. \quad (4.8)$$

⁴ См. [4]. Задача № 5.5.

Чтобы найти из этой формулы H_1 и H_2 , нужно установить связь между ними. Для этого используем непрерывность нормальных составляющих вектора магнитной индукции B на границах разреза. Замечая, что в образце $B_1 = \mu_0 \mu H_1$, а в зазоре $B_2 = \mu_0 H_2$, и приравняв B_1 и B_2 , найдём, что $\mu H_1 = H_2$. Заменяя с помощью этой формулы H_2 в формуле (4.8), получим

$$H_1 = \frac{N_0 I}{2\pi R + (\mu - 1)\delta}, \quad (4.9)$$

и, следовательно,

$$H_2 = \frac{N_0 I \mu}{2\pi R + (\mu - 1)\delta}. \quad (4.10)$$

Из этих формул следует ряд важных выводов. Отметим, прежде всего, что напряжённости поля в образце и в зазоре (при $\mu = \text{const}$) пропорциональны силе намагничивающего тока. После того как установлена величина коэффициента пропорциональности, измерение напряжённости может быть заменено измерением тока.

В образце без зазора, когда $\delta = 0$,

$$H = \frac{N_0 I}{2\pi R}. \quad (4.11)$$

При наличии даже небольшого зазора второе слагаемое в знаменателе (4.9) существенно превосходит первое из-за большой величины μ . В этом случае также нетрудно определить напряжённость поля в воздушном зазоре. В самом деле, пренебрегая первым слагаемым в знаменателе (4.10) по сравнению со вторым и заменяя единицей коэффициент $(\mu - 1)/\mu$, найдём, что в достаточно больших зазорах (т.е. почти всегда)

$$H_2 = \frac{N_0 I}{\delta}. \quad (4.12)$$

Как следует из формулы (4.12), размеры магнитного ярма (части магнитной цепи, заполненной веществом с большим μ) практически не сказываются на напряжённости магнитного поля в зазоре. Мало сказывается на ней и форма ярма. Поэтому ярма электромагнитов — устройств, предназначенных для создания больших магнитных полей в воздушных зазорах, — могут иметь самые разные формы.

Воздушные зазоры электромагнитов можно использовать для исследования ферромагнитных образцов.

5. Измерение индукции в образце

Одним из самых удобных и надёжных методов измерения индукции B является метод, основанный на законе электромагнитной индукции. Электродвижущая сила, возникающая в контуре при изменении пронизывающего контур магнитного потока $\Phi(B)$, равна

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}. \quad (4.13)$$

Так как магнитный поток $\Phi(B)$ равен произведению индукции B на площадь образца, формула (4.13) позволяет определить производную от индукции B . Чтобы измерить саму величину B , необходимо иметь в составе аппаратуры интегрирующий прибор. В качестве последнего чаще всего применяют милливеберметр (работа 3.4.1) или баллистический гальванометр, отклонение стрелки которого при определённых условиях пропорционально интегралу от протекшего через него тока (работа 3.4.4), или интегрирующую RC -цепочку (работа 3.4.5).

6. Измерение магнитной восприимчивости диамагнетиков и парамагнетиков

Магнитная восприимчивость тел может быть определена методом измерения сил, которые действуют на тела в магнитном поле. Существуют два классических метода таких измерений: метод Фарадея и метод Гюи. В методе Фарадея исследуемые образцы, имеющие форму маленьких шариков, помещаются в область сильно неоднородного магнитного поля и измеряется сила, действующая на образец. При этом для расчёта магнитной восприимчивости необходимо знать величину градиента магнитного поля в месте расположения образца. В методе Гюи используется тонкий и длинный стержень, один из концов которого помещают в зазор электромагнита (обычно в область однородного поля), а другой конец — вне зазора, где величиной магнитного поля можно пренебречь. Закон изменения поля — от максимального до нулевого — в этом случае несуществен.

Для геометрии нашего эксперимента детальный расчёт магнитного поля при наличии в зазоре стержня достаточно сложен. Те или иные приближения в расчёте могут привести к значительным погрешностям в определении изменения энергии системы при виртуальном перемещении стержня и соответственно в значении действующей на стержень силы.

С другой стороны, поскольку отличие B от $\mu_0 H$ (определяемое величиной χ) для всех изучаемых нами образцов не превышает 0,1%, поля

в стержне и в зазоре также могут отличаться не более, чем на 0,1%, что позволяет пренебречь этим отличием в прямом расчёте намагниченности стержня и через неё действующей на стержень силы.

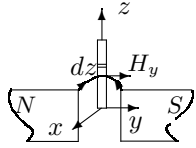


Рис. 4.8.
Расположение
образца в зазоре
электромагнита

Найдём выражение для магнитной силы, действующей на тонкий цилиндрический стержень, расположенный между полюсами электромагнита (рис. 4.8). Пусть площадь поперечного сечения образца равна s , его магнитная восприимчивость — χ , а поле в зазоре равно H .

Воспользуемся общим выражением для силы, действующей на магнитный диполь с магнитным моментом \mathbf{m} во внешнем поле:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \nabla) \mathbf{B}.$$

Нас интересует магнитная сила, действующая на образец вдоль оси z :

$$F_z = m_x \frac{dB_z}{dx} + m_y \frac{dB_z}{dy} + m_z \frac{dB_z}{dz}.$$

Выберем бесконечно малый объём стержня $dV = s dz$, где dz — малый элемент длины цилиндра на произвольной высоте z . Магнитный момент такого элемента объёма $dm_y = \chi H_y s dz$. Поскольку $dm_x = dm_z = 0$, то магнитная сила равна

$$dF_z = \chi H_y s \frac{dB_z}{dy} dz.$$

Так как в образце отсутствуют токи проводимости и токи смещения, то $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, а

$$\frac{dB_z}{dy} = \frac{dB_y}{dz}.$$

После замены производной в выражении для dF_z окончательно получим

$$dF_z = \chi H_y s dB_y = \chi \frac{B_y}{\mu_0 \mu} s dB_y = \frac{\chi}{2\mu_0 \mu} s d(B_y)^2.$$

Полагая, что у верхнего конца стержня $B_y = 0$, а у нижнего $B_y = B$, после интегрирования по длине стержня получим

$$F_z = \int_B^0 \frac{\chi s}{2\mu_0 \mu} d(B_y^2) = -\frac{\chi}{2\mu_0 \mu} s B^2. \quad (4.14)$$

Если $\chi > 0$ (парамагнетик) — стержень втягивается в зазор, если меньше (диамагнетик) — выталкивается из него.

По смыслу вывода B в формуле (4.14) — поле в образце. Если приравнять его измеренному нами полю в зазоре, можно пользоваться (4.14) в качестве расчётной формулы.

Полагая равными в стержне и в зазоре векторы \mathbf{H} , придём к соотношению

$$F = \frac{\chi}{2\mu_0} s B^2. \quad (4.15)$$

Напомним, что при переходе через границу раздела сред сохраняются нормальная составляющая вектора \mathbf{B} и тангенциальная составляющая вектора \mathbf{H} . Поэтому точная величина силы лежит где-то между значениями, определяемыми формулами (4.14) и (4.15), отличие между которыми лежит за пределами точности эксперимента.

Формулы (4.14) и (4.15) совпадают, если пренебречь отличием μ от единицы. Поэтому в качестве окончательной принимаем формулу (4.15). Эта формула может быть получена также из энергетических соображений (см. работу 3.4.1).

Подчеркнём ещё раз, что все эти приближения справедливы только для случая $|\chi| \ll 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. Гл. 3, §§ 74–79.
2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977. Гл. 11.
3. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. I. — М.: Физматлит, 2001. Ч. 2, гл. V, §§ 5.2, 5.3.
4. *Сборник задач по общему курсу физики.* Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В.А. Овчинкина — М.: Физматкнига, 2004.

Работа 3.4.1

Диа- и парамагнетики

Цель работы: измерение магнитной восприимчивости диа- и парамагнитного образцов.

В работе используются: электромагнит, аналитические весы, миллиберметр, амперметр постоянного тока, реостаты, образцы.

Магнитная восприимчивость тел может быть определена методом измерения сил, которые действуют на тела в магнитном поле. Существуют два классических метода таких измерений: *метод Фарадея* и

метод Гюи. В методе Фарадея исследуемые образцы, имеющие форму маленьких шариков, помещаются в область сильно неоднородного магнитного поля и измеряется сила, действующая на образец. При этом для расчёта магнитной восприимчивости необходимо знать величину градиента магнитного поля в месте расположения образца. В методе Гюи используется тонкий и длинный стержень, один из концов которого помещают в зазор электромагнита (обычно в область однородного поля), а другой конец — вне зазора, где величиной магнитного поля можно пренебречь. Закон изменения поля — от максимального до нулевого — в этом случае несуществен.

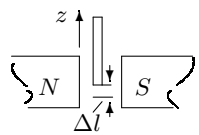


Рис. 1. Расположение образца в зазоре электромагнита

Найдём выражение для магнитной силы, действующей на такой образец (рис. 1). Пусть площадь образца равна s , его магнитная проницаемость — μ , а поле в зазоре равно B .

Воспользуемся для расчёта энергетическими соображениями. Магнитная сила может быть вычислена как производная от магнитной энергии по перемещению. Из теории известно (см. [1]), что эту производную следует брать со знаком минус, когда образец находится в поле постоянного магнита, или со знаком плюс, как в нашем случае, когда поле в зазоре создаётся электромагнитом, ток I в обмотках которого поддерживается постоянным.

При смещении образца на расстояние Δl вниз магнитная сила, действующая на него, равна

$$F = \left(\frac{\Delta W_m}{\Delta l} \right)_I, \quad (1)$$

где ΔW_m — изменение магнитной энергии системы при постоянном токе в обмотке электромагнита и, следовательно, при постоянной величине магнитного поля в зазоре.

Магнитная энергия рассчитывается по формуле

$$W_m = \frac{1}{2} \int HB dV = \frac{1}{2\mu_0} \int \frac{B^2}{\mu} dV, \quad (2)$$

где интеграл распространён на всё пространство. При смещении образца магнитная энергия меняется только в области зазора (в объёме площади s и высоты Δl), а около верхнего конца стержня остаётся неизменной, поскольку магнитного поля там практически нет. Принимая поле внутри стержня равным измеренному нами полю в зазоре B , получим

$$\Delta W_m = \frac{1}{2\mu_0} \frac{B^2}{\mu} s \Delta l - \frac{1}{2\mu_0} B^2 s \Delta l = \frac{1-\mu}{2\mu_0\mu} B^2 s \Delta l = -\frac{\chi}{2\mu_0\mu} B^2 s \Delta l.$$

Следовательно, на образец действует сила

$$F = -\frac{\chi}{2\mu_0\mu} B^2 s. \quad (3)$$

Знак силы, действующей на образец, зависит от знака χ : образцы из парамагнитных материалов ($\chi > 0$) втягиваются в зазор электромагнита, а диамагнитные образцы ($\chi < 0$) выталкиваются из него.

Пренебрегая отличием μ от единицы, получаем окончательно расчётную формулу в виде

$$F = -\frac{\chi B^2 s}{2\mu_0}. \quad (4)$$

Измерив силу, действующую на образец в магнитном поле B , можно рассчитать магнитную восприимчивость образца.

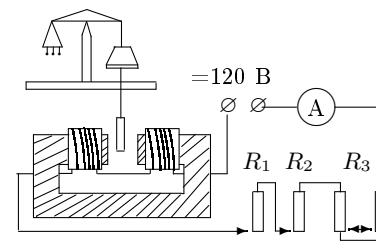


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

Экспериментальная установка. Схема установки изображена на рис. 2. Магнитное поле с максимальной индукцией $\simeq 1,5$ Тл создаётся в зазоре электромагнита, питаемого постоянным током. Диаметр полюсов существенно превосходит ширину зазора, поэтому поле в средней части зазора достаточно однородно. Величина тока, проходящего через обмотки электромагнита, регулируется при помощи трёх реостатов R_1 , R_2 и R_3 и измеряется многопредельным амперметром А. Тонкая проволока высокоомных реостатов не рассчитана на большой ток, поэтому регулировку более низкоомными реостатами следует проводить только при **полностью** выведенных высокоомных реостатах.

Градуировка электромагнита (связь между индукцией магнитного поля B в зазоре электромагнита и силой тока I в его обмотках) производится при помощи милливеберметра (описание милливеберметра и правила работы с ним приведены на с. 138).

При измерениях образцы поочерёдно подвешиваются к аналитическим весам так, что один конец образца оказывается в зазоре электромагнита, а другой — вне зазора, где индукцией магнитного поля можно

пренебречь. При помощи аналитических весов определяется перегрузка $\Delta P = F$ — сила, действующая на образец со стороны магнитного поля.

Как уже отмечалось, силы, действующие на диа- и парамагнитные образцы, очень малы. Небольшие примеси ферромагнетиков (сотые доли процента железа или никеля) способны кардинально изменить результат опыта, поэтому образцы были специально отобраны.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость силы, действующей на образец, размещённый в зазоре электромагнита, от величины поля в зазоре и по результатам измерений рассчитать магнитную восприимчивость меди и алюминия.

1. Проверьте работу цепи питания электромагнита. Оцените диапазон изменения тока I через обмотки.
2. Прокалибруйте электромагнит. Для этого с помощью миллиамперметра снимите зависимость магнитного потока Φ , пронизывающего пробную катушку, находящуюся в зазоре, от тока I ($\Phi = BSN$). Значение SN (произведение площади сечения пробной катушки на число витков в ней) указано на установке.

Включать и отключать электромагнит следует только при минимальном токе.

3. Убедитесь, что весы арретированы¹.

Весы следует арретировать перед каждым изменением тока.

4. Измерьте силы, действующие на образец в магнитном поле. Для этого, не включая электромагнит, подвесьте к весам один из образцов. Установите на весах примерное значение массы образца (масса, диаметр и максимальное значение перегрузки для каждого образца указаны на установке). Освободите весы и добейтесь точного равновесия весов.

Арретируйте весы. Установите минимальное значение тока и проведите измерение равновесного значения массы.

Повторите измерения $m = f(T)$ для 6–8 других значений тока.

5. Повторите измерения п. 4 для другого образца.

¹ Арретир (фр. arreter — фиксировать) — приспособление для закрепления чувствительного элемента измерительного прибора в нерабочем состоянии.

Обработка результатов

1. Рассчитайте поле B и постройте градуировочную кривую для электромагнита: $B = f(I)$.
2. Постройте на одном листе графики $|\Delta P| = f(B^2)$ для меди и алюминия.
3. По наклонам полученных прямых рассчитайте величину χ с помощью формулы (4).
4. Оцените погрешности измерений и сравните результаты с табличными значениями.

Контрольные вопросы

1. Объясните суть метода измерения магнитной восприимчивости.
2. Напишите выражения для магнитной силы, действующей на образец, помещённый в неоднородное магнитное поле.
3. Как можно убедиться в однородности или неоднородности магнитного поля в зазоре электромагнита?
4. Как проверить экспериментально, влияет ли намагниченность весов на результаты измерения магнитной восприимчивости?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 61, 75–77.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. Гл. XI, §§ 109, 117, 118.
3. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы Физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. II, гл. 5, § 5.2.

Работа 3.4.2

Закон Кюри–Вейсса

Цель работы: изучение температурной зависимости магнитной восприимчивости ферромагнетика выше точки Кюри.

В работе используются: катушка самоиндукции с образцом из гадолиния, термостат, частотомер, цифровой вольтметр, LC-автогенератор, термopара медь-константан.

Вещества с отличными от нуля атомными магнитными моментами обладают парамагнитными свойствами. Внешнее магнитное поле ориентирует магнитные моменты, которые в отсутствие поля располагались в пространстве хаотичным образом.

При повышении температуры T возрастает дезориентирующее действие теплового движения частиц, и магнитная восприимчивость парамагнетиков убывает, в простейшем случае (в постоянном магнитном поле) — по закону Кюри:

$$\chi = \frac{C}{T}, \quad (1)$$

где C — постоянная Кюри.

Для парамагнитных веществ, которые при понижении температуры становятся ферромагнитными, формула (1) должна быть видоизменена. Эта формула показывает, что температура $T = 0$ является особой точкой температурной кривой, в которой χ неограниченно возрастает.

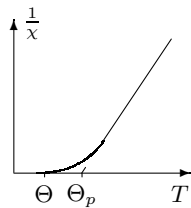


Рис. 1. Зависимость обратной величины магнитной восприимчивости от температуры

При $T \rightarrow 0$ тепловое движение всё меньше препятствует магнитным моментам атомов ориентироваться в одном направлении при сколь угодно слабом внешнем поле. В ферромагнетиках — под влиянием обменных сил — это происходит при понижении температуры не до абсолютного нуля, а до температуры Кюри Θ . Оказывается, что у ферромагнетиков закон Кюри должен быть заменён законом Кюри–Вейсса:

$$\chi \sim \frac{1}{T - \Theta_p}, \quad (2)$$

где Θ_p — температура, близкая к температуре

Кюри.

Эта формула хорошо описывает поведение ферромагнитных веществ после их перехода в парамагнитную фазу при заметном удалении температуры от Θ , но недостаточно точна при $T \approx \Theta$.

Иногда для уточнения формулы (2) вводят вместо одной две температуры Кюри, одна из которых описывает точку фазового перехода — ферромагнитная точка Кюри Θ , а другая является параметром в формуле (2) — парамагнитная точка Кюри — Θ_p (рис. 1).

В нашей работе изучается температурная зависимость $\chi(T)$ гадолиния при температурах выше точки Кюри. Выбор материала определяется тем, что его точка Кюри лежит в интервале комнатных температур.

Экспериментальная установка. Схема установки для проверки закона Кюри–Вейсса показана на рис. 2. Исследуемый ферромагнитный образец (гадолиний) расположен внутри пустотелой катушки самоиндукции, которая служит индуктивностью колебательного контура, входящего в состав LC -автогенератора. Автогенератор собран на полевом транзисторе КП-103 и смонтирован в виде отдельного блока.

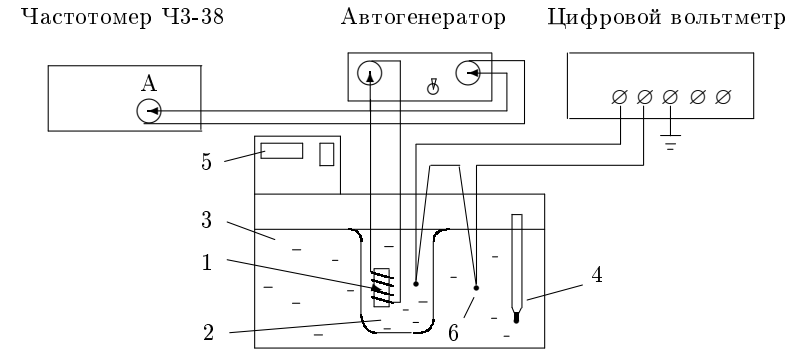


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

Гадолиний является хорошим проводником электрического тока, а рабочая частота генератора достаточно велика (~ 50 кГц), поэтому для уменьшения вихревых токов образец изготовлен из мелких кусочков размером около 0,5 мм. Катушка 1 с образцом помещена в стеклянный сосуд 2, залитый трансформаторным маслом. Масло предохраняет образец от окисления и способствует ухудшению электрического контакта между отдельными частичками образца. Кроме того, оно улучшает тепловой контакт между образцом и термостатируемой (рабочей) жидкостью 3 в термостате. Ртутный термометр 4 используется для приближённой оценки температуры. Температура образца регулируется с помощью термостата.

Магнитная восприимчивость образца χ определяется по изменению самоиндукции катушки. Обозначив через L самоиндукцию катушки с образцом и через L_0 — её самоиндукцию в отсутствие образца, получим

$$(L - L_0) \sim \chi. \quad (3)$$

При изменении самоиндукции образца меняется период колебаний автогенератора:

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (4)$$

где C — ёмкость контура автогенератора.

Период колебаний в отсутствие образца определяется самоиндукцией пустой катушки:

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{L_0C}. \quad (5)$$

Из (4) и (5) имеем

$$(L - L_0) \sim (\tau^2 - \tau_0^2).$$

Таким образом,

$$\chi \sim (\tau^2 - \tau_0^2). \quad (6)$$

Из формул (2) и (6) следует, что закон Кюри–Вейсса справедлив, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{\chi} \sim (T - \Theta_p) \sim \frac{1}{(\tau^2 - \tau_0^2)}. \quad (7)$$

Измерения проводятся в интервале температур от 14 °С до 40 °С. С целью экономии времени следует начинать измерения с низких температур.

Для охлаждения образца используется холодная водопроводная вода, циркулирующая вокруг сосуда с рабочей жидкостью (дистиллированной водой); рабочая жидкость постоянно перемешивается.

Величина стабилизируемой температуры задаётся на дисплее 5 термостата. Для нагрева служит внутренний электронагреватель, не показанный на рисунке. Когда температура рабочей жидкости в сосуде приближается к заданной, непрерывный режим работы нагревателя автоматически переходит в импульсный (нагреватель то включается, то выключается) — начинается процесс стабилизации температуры.

Температура исследуемого образца всегда несколько отличается от температуры дистиллированной воды в сосуде. После того как вода достигла заданной температуры, идёт медленный процесс выравнивания температур образца и воды. Разность их температур контролируется с помощью медно-константановой термопары 6 и цифрового вольтметра. Один из спаев термопары находится в тепловом контакте с образцом, а другой погружён в воду. Концы термопары подключены к цифровому вольтметру. Чувствительность термопары указана на установке. Рекомендуется измерять период колебаний автогенератора в тот момент, когда указанная разность температур становится меньше 0,5 °С (более точному измерению температур мешают паразитные ЭДС, возникающие в цепи термопары).

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость периода колебаний автогенератора от температуры сердечника катушки и по результатам измерений определить парамагнитную точку Кюри гадолиния.

1. Подготовьте приборы к работе.
2. Оцените допустимую ЭДС термопары, если допустимая разность температур образца и рабочей жидкости $\Delta T = 0,5$ °С, а постоянная термопары $k = 24$ град/мВ;

3. Исследуйте зависимость периода колебаний LC -генератора от температуры образца, отмечая период колебаний τ по частотомеру, а температуру T — по показаниям дисплея и цифровому вольтметру (ΔU с учётом знака). Термопара подключена так, что при знаке «+» на табло вольтметра температура образца выше температуры рабочей жидкости.

Проведите измерения в диапазоне от 14 °С до 40 °С через 2 °С.

Запишите период колебаний τ_0 без образца, указанный на установке.

4. Закончив измерения, охладите термостат, руководствуясь техническим описанием.

Обработка результатов

1. Рассчитайте температуру T образца с учётом показаний термопары. Постройте график зависимости $1/(\tau^2 - \tau_0^2) = f(T)$. Экстраполируя полученную прямую к оси абсцисс, определите парамагнитную точку Кюри Θ_p для гадолиния.
2. Оцените погрешности эксперимента и сравните результат с табличным.

Контрольные вопросы

1. Как объяснить явления пара- и диамагнетизма с молекулярной точки зрения?
2. Чем отличаются пара- и ферромагнетики в отсутствие магнитного поля?
3. Сформулируйте общий физический принцип, объясняющий явление диамагнетизма.
4. Качественно изобразите на одном графике $B(H)$ для пара-, диа- и ферромагнетика.
- 5* Какой вклад в магнитную восприимчивость образца вносит проводимость гадолиния? Как связан этот вклад с размером крупинок, частотой и удельной проводимостью? Зависит ли этот вклад от температуры? Оцените этот вклад для крупинок размером 0,5 мм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 74, 79.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 110, 111, 119.

Работа 3.4.3

Точка Кюри

Цель работы: определение точки Кюри ферромагнетиков по температурным зависимостям магнитной проницаемости и сопротивления.

В работе используются: трансформатор, катушки, амперметры, вольтметры, реостаты, трубчатая печь, цифровой вольтметр, термодатчики, образцы.

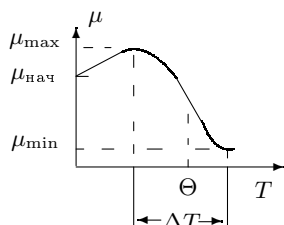


Рис. 1. Зависимость магнитной проницаемости от температуры образца

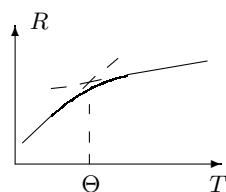


Рис. 2. Зависимость сопротивления от температуры образца

В первой части работы исследуется изменение начальной магнитной проницаемости ферромагнетика вблизи точки Кюри Θ (закон Гопкинсона — рис. 1), во второй — зависимость сопротивления образца от температуры (фазовый переход II-го рода — рис. 2).

Известно, что в ферромагнетике при определённой температуре, называемой *точкой Кюри*, исчезает спонтанная намагниченность материала. Это сопровождается изменением ряда физических свойств ферромагнетика: теплоёмкости, теплопроводности, электропроводности, магнитной восприимчивости и проницаемости; исчезает эффект магнитоstriction. Поэтому, нагревая ферромагнитный образец и наблюдая за изменением его физических свойств, можно определить точку Кюри ферромагнетика.

А. Определение точки Кюри по изменению магнитной проницаемости

Экспериментальная установка, представленная на рис. 3, состоит из намагничивающей катушки L , питаемой переменным током, и измерительной катушки L_1 , замкнутой через диод D на микроампер-

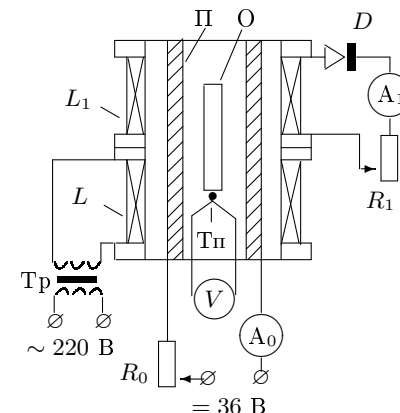


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для исследования $\mu(T)$

метр A_1 . При прохождении переменного тока через катушку L в катушке L_1 возникает индукционный ток I_1 . Величину тока можно регулировать реостатом R_1 .

Внутри обеих катушек находится небольшая трубчатая печь Π , в которую помещается образец O . Печь нагревается бифилярной обмоткой, подключённой к источнику постоянного напряжения 36 В. Ток нагрева печи I_0 можно регулировать реостатом R_0 и контролировать амперметром A_0 .

Нагрев катушек L и L_1 может изменить их сопротивления и сказаться на показаниях микроамперметра. Для уменьшения вредного нагрева в зазор между печкой и катушками вдувается воздух с помощью вентилятора. Напряжение питания вентилятора — 36 В.

Температура внутри печи измеряется с помощью термопары T_p , соединённой с милливольтметром V . По показаниям милливольтметра можно с помощью графика чувствительности термопары, приведённого на установке, определить перепад температур на концах термопары, а затем, зная комнатную температуру, найти температуру образца.

При неизменных прочих условиях ток индукции I_1 зависит только от магнитной проницаемости образца, помещённого в печь, т. е. $I_1 = f(\mu)$. Это утверждение легко проверить, сняв зависимость тока I_1 от температуры печи, когда в ней нет образца, и с ферромагнитным образцом. В первом случае ток практически не зависит от температуры печи, а во втором — изменение тока будет значительным вблизи точки Кюри (рис. 1). При температуре выше точки Кюри показания микроамперметра будут такими же, как и в отсутствие образца.

Точка Кюри соответствует середине участка с максимальным наклоном касательной к кривой; рабочий диапазон ΔT должен быть несколько шире.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается снять зависимость тока индукции от температуры и рассчитать точку Кюри для двух образцов. В работе исследуются стержни из никеля и феррита.

1. Перед началом работы с помощью графика чувствительности термопары рассчитайте предельно допустимую разность потенциалов, если известно, что температура образца не должна превышать 400°C .
2. Поместив ферромагнитный стержень в катушку, включите трансформатор Тр в сеть на 220 В. Образец следует опустить до упора, под которым расположена термопара.
3. С помощью потенциометра R_1 установите в цепи катушки L_1 ток I_1 , вызывающий отклонение стрелки микроамперметра примерно на $3/4$ шкалы.
4. Установите реостат R_0 в среднее положение и подключите печь к источнику 36 В. Тумблером, расположенным под катушками, включите вентилятор.
5. Подберите режим, удобный для определения точки Кюри: чтобы быстрее пройти от комнатной температуры до начала рабочего участка ΔT (рис. 1), установите максимальный ток нагрева печи ($I_0 \approx 5\text{ А}$) с помощью реостата R_0 . Заметив начало спада тока индукции, уменьшите ток нагрева вдвое. Оцените границы рабочего диапазона термопары $\Delta U (\sim \Delta T)$ и интервал резкого изменения тока ΔI_1 . Максимальный ток I_1 должен быть близок к концу шкалы.

Не перегревайте катушку! (см. п. 1).

Подберите ток нагрева I_0 так, чтобы время одной серии (нагрев или охлаждение внутри рабочего диапазона ΔU) составляло 2–3 мин. В течение одной серии не следует менять чувствительность микроамперметра (R_1) и ток нагрева печи (R_0), т. к. это влияет на величину тока индукции I_1 .

Проведите предварительные измерения: при фиксированном токе нагрева I_0 регистрируйте I_1 и U (дел). Полезно отметить время начала и окончания записи, чтобы оценить продолжительность одной серии.

6. Выбрав режим работы, снимите зависимость тока индукции I_1 от термо-ЭДС U при постоянном токе I_0 ; в области резкого изменения

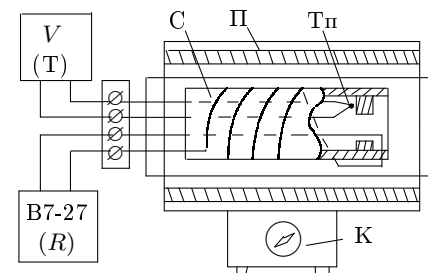


Рис. 4. Схема экспериментальной установки для исследования $R(T)$

тока I_1 точки должны лежать почаще. Проведите измерения при нагревании и охлаждении образца.

7. Повторите пп. 2–6 для второго образца.
8. Охладив катушку, отключите печь и ток намагничивания.

Обработка результатов

1. Постройте графики $I_1 = f[U(\text{дел})]$, не пересчитывая каждую точку в $\Delta T^\circ\text{C}$. Определите точку Кюри как температуру средней точки участка кривой с максимальным наклоном касательной (в единицах U дел).

Для выбранной точки пересчитайте U (дел) сначала в милливольты ($150\text{ дел} = 45\text{ мВ}$), а затем по графику чувствительности термопары — в $\Delta T^\circ\text{C}$. Зная комнатную температуру, определите температуру Кюри Θ .

2. Оцените погрешность и сравните результат с табличным.

Б. Определение точки Кюри по изменению сопротивления

Экспериментальная установка для исследования зависимости омического сопротивления ферромагнетика от температуры представлена на рис. 4. Никелевая спираль C , намотанная на фарфоровую трубку, заключена в керамическую трубку и помещена в трубчатую печь $П$. Нагрев печи регулируется переключателем $К$. Температура фарфоровой трубки (спирали) контролируется термопарой $Тп$, подключённой к милливольтметру V , прокалиброванному в градусах. Сопротивление спирали измеряется цифровым вольтметром $В7-27$.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается снять зависимость сопротивления никелевой спирали от температуры и определить точку Кюри.

1. Включите в сеть цифровой вольтметр. Измерьте сопротивление никелевой спирали при комнатной температуре ($R \simeq 10 \text{ Ом}$).
2. Включите печь в сеть на 220 В и поставьте переключатель К в среднее положение.
3. Измеряйте сопротивление R и температуру спирали T через каждые 20 градусов, не останавливая нагрева. При температуре образца $> 200 \text{ }^\circ\text{C}$ мощность нагрева следует увеличить.

Дойдя до предельной температуры ($T_{\max} = 450 \text{ }^\circ\text{C}$), отключите нагрев и проведите измерения при охлаждении образца до $100 \text{ }^\circ\text{C}$.

Обработка результатов

1. Постройте графики $R = f(T)$. По изменению температурного коэффициента сопротивления (пересечению касательных к прямолинейным участкам графика $R = f(T)$) найдите точку Кюри (рис. 2).
2. Градуировка милливольтметра соответствует термопаре железо-константан. Если в установке используется медь-константан, сделайте пересчёт точки Кюри Θ , используя графики чувствительности обеих термопар (не забудьте учесть комнатную температуру — обычно $\approx 20 \text{ }^\circ\text{C}$).
3. Оцените погрешности и сравните результат с табличным.

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются атомы пара- и диамагнетиков по магнитным характеристикам в отсутствие магнитного поля?
2. Как изменяются характеристики вещества при фазовых переходах первого и второго рода?
- 3* Какие два конкурирующих взаимодействия между атомами характерны для ферромагнитного вещества?
- 4* На одном графике качественно изобразите начальные кривые намагничивания $B(H)$ для ферромагнетика при трёх температурах: комнатной, более высокой и температуре выше точки Кюри. Укажите на оси H , где лежит область, соответствующая условиям настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 74, 79.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. Гл. XI, §§ 110, 111, 119.

Работа 3.4.4

Петля гистерезиса (статический метод)

Цель работы: исследование кривых намагничивания ферромагнетиков с помощью баллистического гальванометра.

В работе используются: генератор тока с блоком питания, тороид, соленоид, баллистический гальванометр с осветителем и шкалой, амперметры, магазин сопротивлений, лабораторный автотрансформатор (ЛАТР), разделительный трансформатор.

Магнитная индукция B и напряжённость магнитного поля H в ферромагнитном материале неоднозначно связаны между собой: индукция зависит не только от напряжённости, но и от предыстории образца. Связь между индукцией и напряжённостью поля типичного ферромагнетика иллюстрирует рис. 1. Если к размагниченному образцу начинают прикладывать магнитное поле, то его намагничивание следует кривой $OACD$, выходящей из начала координат. Эту кривую называют **основной кривой намагничивания**.

Индукция B в образце состоит из индукции, связанной с намагничивающим полем H , и индукции, создаваемой самим намагнитенным образцом. В системе СИ эта связь имеет вид

$$B = \mu_0(H + M), \quad (1)$$

где M — *намагниченность* — магнитный момент единичного объёма образца, а μ_0 — магнитная постоянная. Кривая $OACD$, изображающая зависимость $B(H)$, практически совпадает с зависимостью $M(H)$, поскольку второй член в выражении (1) — в малых полях — существенно превосходит первый. В точке C намагниченность M достигает насыщения, и дальнейшее медленное увеличение индукции происходит в основном вследствие роста H .

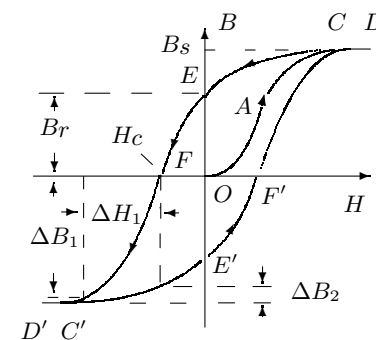


Рис. 1. Петля гистерезиса ферромагнетика

Намагнитим образец до насыщения — до точки D . Соответствующее значение индукции B_s называют **индукцией насыщения**. При уменьшении поля H до нуля зависимость $B(H)$ имеет вид кривой DCE , и при нулевом поле индукция имеет конечное — ненулевое — значение. Это **остаточная индукция** B_r . Чтобы размагнитить образец, то есть перевести его в состояние F , необходимо приложить «обратное» магнитное поле H_c , которое называют **коэрцитивной силой**.

Замкнутая кривая $DEFD'E'F'D$, возникающая при циклическом перемагничивании образца, намагниченного до насыщения, называется **предельной петлёй гистерезиса**.

В работе исследуются ферромагнитные образцы тороидальной формы.

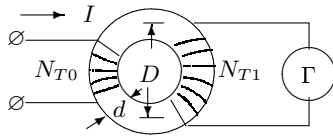


Рис. 2. Схема для измерения индукционного тока (или заряда)

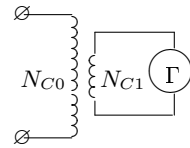


Рис. 3. Схема для калибровки гальванометра

Изложим коротко суть метода. На тороидальный сердечник (рис. 2) равномерно намотана *намагничивающая* обмотка с числом витков N_{T0} , а поверх неё — измерительная обмотка с числом витков N_{T1} .

Если быстро изменить ток в намагничивающей обмотке, то в измерительной обмотке возникает ЭДС индукции. Ток, вызванный этой ЭДС, течёт через гальванометр Γ , который работает в баллистическом (импульсном) режиме, то есть реагирует на полный заряд, протекший через катушку гальванометра (подробнее баллистический режим описан в работе 2.2.6).

Напряжённость поля H в сердечнике пропорциональна току I в первичной обмотке N_{T0} , а изменение магнитной индукции B — заряду, протекающему через гальванометр при изменении тока намагничивания. Таким образом, измеряя токи, текущие через обмотку N_{T0} , и суммируя отклонения гальванометра, подключённого к обмотке N_{T1} , можно рассчитать зависимость $B(H)$ для материала сердечника.

Рассмотрим подробнее, как выразить B и H через параметры, измеряемые в эксперименте. Напряжённость магнитного поля H в тороиде зависит от тока, текущего в намагничивающей обмотке:

$$H = \frac{N_{T0}}{\pi D} I, \quad (2)$$

где D — средний диаметр тора.

Пусть в намагничивающей обмотке ток скачкообразно изменился на величину ΔI . При этом меняется поле H в тороиде: $\Delta H \sim \Delta I$.

Изменение поля ΔH приводит к изменению потока магнитной индукции Φ в сердечнике, и в измерительной обмотке сечения S_T с числом витков N_{T1} возникает ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -S_T N_{T1} \frac{dB}{dt}.$$

Через гальванометр Γ протекает импульс тока; первый отброс зайчика гальванометра, работающего в баллистическом режиме, пропорционален величине прошедшего через гальванометр заряда q :

$$\varphi = \frac{q}{b}.$$

Коэффициент пропорциональности b называют **баллистической постоянной гальванометра**.

Свяжем отклонение зайчика φ с изменением магнитной индукции ΔB :

$$|\varphi| = \frac{q}{b} = \frac{1}{b} \int I dt = \frac{1}{bR} \int \mathcal{E} dt = \frac{S_T N_{T1}}{bR} \Delta B, \quad (3)$$

где R — полное сопротивление измерительной цепи тороида, S_T — площадь поперечного сечения сердечника: $S_T = \pi d_T^2/4$.

Баллистическую постоянную b можно определить, если провести аналогичные измерения, взяв вместо тороида с сердечником пустотелый соленоид с числом витков N_{C0} , на который намотана короткая измерительная катушка с числом витков N_{C1} (рис. 3). В длинном соленоиде (практически достаточно, чтобы его длина превышала 6 диаметров: $l_C > 6d_C$) поле H можно рассчитать так же, как для тороида (см. (2)); B и H в соленоиде связаны линейно, поэтому связь между изменением тока ΔI_1 в обмотке N_{C0} и изменением магнитной индукции ΔB_C имеет простой вид:

$$\Delta B_C = \frac{\mu_0 N_{C0}}{l_C} \Delta I_1. \quad (4)$$

Изменение магнитной индукции в соленоиде связано с отклонением φ_1 зайчика гальванометра формулой, аналогичной формуле (3):

$$\varphi_1 = \frac{S_C N_{C1}}{bR_1} \Delta B_C. \quad (5)$$

Здесь R_1 — полное сопротивление измерительной цепи соленоида, S_C — площадь поперечного сечения соленоида: $S_C = \pi d_C^2/4$.

Таким образом, выражения (3), (4) и (5) позволяют, исключив баллистическую постоянную b , установить связь между отклонением зайчика в делениях Δx ($\Delta x \sim \varphi$) и изменением магнитной индукции $\Delta x \sim B$ в сердечнике тороида:

$$\Delta B \text{ [T]} = \mu_0 \left(\frac{dC}{dT} \right)^2 \frac{R}{R_1} \frac{N_{C0}}{N_{T1}} \frac{N_{C1}}{l_C} \Delta I_1 \frac{\Delta x}{\Delta x_1}. \quad (6)$$

Строго говоря, величина b — это не константа. Она зависит не только от параметров гальванометра, но и от сопротивления цепи, к которой подключён гальванометр, поэтому формула (6) справедлива, если полные сопротивления измерительных цепей тороида и соленоида одинаковы: $R = R_1$.

Экспериментальная установка. Схема для исследования петли гистерезиса представлена на рис. 4. К блоку питания (источнику постоянного напряжения) подключён специальный генератор, позволяющий скачками менять токи в намагничивающей обмотке. Одинаковые скачки ΔI ($\sim \Delta H$) вызовут разные отклонения Δx ($\sim \Delta B$) на участках FD' и $D'E'$: на рис. 1 скачок ΔH_1 может дать и ΔB_1 и ΔB_2 . Поэтому генератор меняет ток неравномерно: большими скачками вблизи насыщения и малыми вблизи нуля.

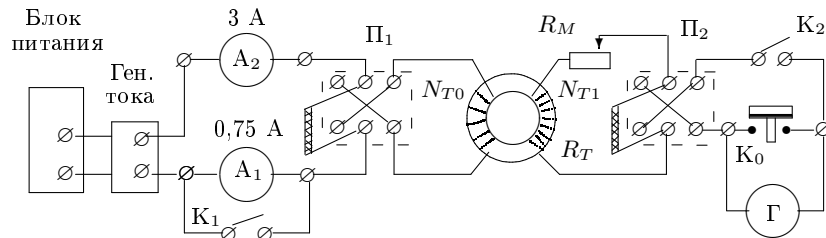


Рис. 4. Схема установки для исследования петли гистерезиса

Ток в намагничивающей обмотке измеряется амперметром A_1 с пределом 0,75 А при малых токах или амперметром A_2 с пределом 3 А в области насыщения. При токах больше 0,75 А амперметр A_1 должен быть закорочен: ключ K_1 замкнут. (Сопротивление амперметра мало и сравнимо с сопротивлением ключа, поэтому показания амперметра A_1 не падают до нуля даже при замкнутом ключе.) Переключатель Π_1 позволяет менять направление тока в первичной обмотке.

Чувствительность гальванометра Γ во вторичной цепи можно менять с помощью магазина сопротивлений R_M . Ключ K_2 предохраняет

гальванометр от перегрузок и замыкается только (!) на время измерения отклонений зайчика. Ключ K_0 служит для мгновенной остановки зайчика (короткое замыкание гальванометра). Переключателем Π_2 можно изменять направление тока через гальванометр.

Схема на рис. 5 отличается от схемы на рис. 4 только тем, что вместо тороида подключён калибровочный соленоид.

Сопротивления измерительных цепей тороида ($R = R_T + R_M + R_0$) и соленоида ($R_1 = R_C + R'_M + R_0$) должны быть одинаковы [см. замечание после формулы (6)].

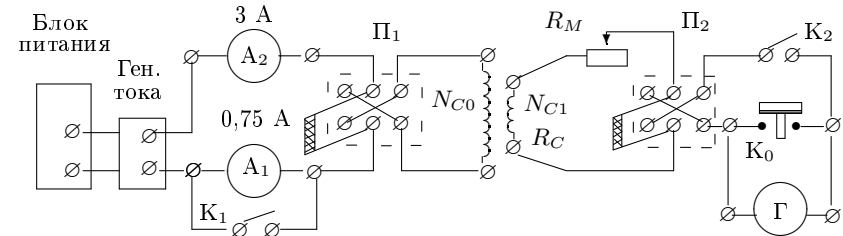


Рис. 5. Схема установки для калибровки гальванометра

Сопротивление тороида $R_T \ll R_0$ — сопротивления гальванометра, поэтому сопротивления магазина в схеме с тороидом и соленоидом отличаются на величину сопротивления соленоида R_C : $R_M = R_C + R'_M$.

Чтобы снять начальную кривую намагничивания, нужно размагнитить сердечник. Для этого тороид подключается к цепи переменного тока (рис. 6). При уменьшении амплитуды тока через намагничивающую обмотку от тока насыщения до нуля характеристики сердечника B и H «пробегают» за секунду 50 петель всё меньшей площади и в итоге приходят в нулевую точку.

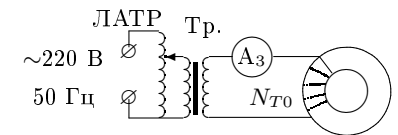


Рис. 6. Схема установки для размагничивания образца

Исследование петли. Измерения начинаются с максимального тока (точка C на рис. 1). Переключая тумблер генератора, следует фиксировать ток, соответствующий каждому положению тумблера, и отклонение зайчика Δx , соответствующее каждому щелчку тумблера. При токах $< 0,75$ А размыканием ключа K_1 подключается амперметр A_1 . Дойдя до нулевого тока (точка E), следует при размыкании ключа Π_1 зафиксировать последний отброс гальванометра вблизи точки E . Следующий отброс — при замыкании ключа Π_1 . Ток вблизи нуля меняется

мало, но скачки Δx обычно заметны. Это соответствует вертикальным участкам петли.

Поменяв направление тока в обмотке N_{T0} переключателем Π_1 , следует, увеличивая ток, пройти участок EC' до насыщения другого знака. В точке C' переключателем Π_2 следует поменять направление тока в обмотке N_{T1} , чтобы при движении по правой ветви петли зайчик отклонялся в ту же сторону. В точке E' при нулевом токе ещё раз ключом Π_1 изменяется направление тока в первичной обмотке, чтобы пройти участок $E'F'C$. Таким образом, измеряя шаг за шагом отклонения зайчика при изменениях тока, нужно пройти всю петлю гистерезиса.

Нельзя при замкнутом ключе K_2 менять ток сразу на несколько щелчков тумблера или отключать ключ Π_1 при больших токах, так как при резком изменении тока можно повредить гальванометр.

При движении по петле ток должен меняться строго монотонно. Если случайно пропущен один отброс зайчика, нельзя вернуться назад на один шаг — это приведёт к искажению петли. Следует при разомкнутом ключе K_2 вернуться к насыщению и начать обход петли сначала. При нарушении монотонности в измерении начальной кривой намагничивания образец снова надо размагничивать, а для предельной петли достаточно вернуться к насыщению. Вот почему измерения начинают с предельной петли.

ЗАДАНИЕ

В работе исследуются начальная (основная) кривая намагничивания и предельная петля гистерезиса для образцов тороидальной формы, изготовленных из чистого железа или стали.

1. Соберите схему согласно рис. 4.
2. Не подключая гальванометра, проверьте работу цепи первичной обмотки. Определите диапазон изменения тока.
3. Чувствительность гальванометра, при которой зайчик не зашкаливает, можно подобрать, меняя сопротивление магазина R_M . Установите начальное значение $R_M > R_C$ — сопротивления соленоида. Значения R_M и R_C указаны на установке.

Включите осветитель гальванометра. Шкалу можно установить так, чтобы нулевое положение зайчика было недалеко от края шкалы.

Внимательно перечитайте раздел «Исследование петли».

4. Замкните ключ K_2 . Сначала, не проводя записей, наблюдайте за отклонениями зайчика при каждом щелчке тумблера.

Аккуратно обойдите всю петлю, чтобы убедиться, что зайчик нигде не выходит за пределы шкалы. Как правило, самые большие скачки Δx происходят на участках EF и $E'F'$.

Если зайчик вышел за пределы шкалы — разомкните ключ K_2 и, увеличив сопротивление R_M , начните обход петли сначала.

Если зашкаливания не произошло и максимальное отклонение Δx близко к концу шкалы — приступайте к измерениям.

5. Измерение предельной петли начните с максимального тока намагничивания. Фиксируйте величину тока I , соответствующую каждой позиции тумблера генератора (I , а не ΔI), и скачки Δx , соответствующие каждому щелчку.

6. Для калибровки гальванометра соберите схему согласно рис. 5. Уменьшите на магазине сопротивлений значение R_M на величину R_C : $R'_M = R_M - R_C$. Установите тумблер генератора тока на максимум и, замкнув ключ Π_1 , запишите значение тока I_{\max} . Подключите гальванометр (ключ K_2). Размыкая ключ Π_1 , измерьте отклонение гальванометра Δx_1 , возникшее при изменении тока $\Delta I_1 = I_{\max}$. Формула (6) позволяет выразить изменение магнитной индукции через отношение $\Delta I_1 / (\Delta x_1)$ и величину Δx .

7. Начальную кривую намагничивания (участок OAC на рис. 1) можно снять по той же схеме (рис. 4), если предварительно размагнитить тороид в цепи переменного тока. Для этого соберите схему, изображённую на рис. 6. Включите ЛАТР в сеть и установите ток, соответствующий насыщению (участок CD на рис. 1). Ручкой ЛАТРа медленно (за 5–10 с) уменьшайте ток до нуля. Образец размагничен.

8. Вновь подсоедините тороид к цепи, изображённой на рис. 4, и снимите начальную кривую намагничивания.

9. Запишите параметры установки: R_M и R'_M — для контроля; сопротивление гальванометра R_0 ; размеры тороида: $d_T = 1$ см, $D = 10$ см. Количество витков тороида и параметры соленоида указаны на установке.

Обработка результатов

1. Используя формулы (2) и (6), получите зависимости

$$H(A/м) = f_1[I(A)] \quad \text{и} \quad \Delta B(\text{Тл}) = f_2[\Delta x(\text{мм})].$$

2. Постройте петлю гистерезиса $B = f(H)$. Для выбора масштаба просуммируйте все скачки ΔB (или Δx) по левой части петли и все скачки по правой части. Убедитесь, что суммы совпадают.

Построение удобно начать с максимального значения H (точка C или C' на рис. 1). Переход к следующему значению H соответствует первому скачку ΔB и т. д. Отложив все ΔB по одной стороне петли и дойдя до насыщения, постройте вторую сторону таким же образом.

Найдите середину петли и проведите ось $H(I)$.

3. Постройте начальную кривую намагничивания на том же графике.
4. Определите по графику коэрцитивную силу H_c и индукцию насыщения B_s . Сравните результаты с табличными.
5. Определите максимальное значение дифференциальной магнитной проницаемости $\mu_{\text{диф}}$ для начальной кривой намагничивания:

$$\mu_{\text{диф}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}.$$

6. Оцените погрешности. Сведите результаты в таблицу:

	Эксперим.	Табличн.
$H_c \frac{\text{А}}{\text{м}}$		
$B_s \text{ Т}$		
$\mu_{\text{диф}}$		

Контрольные вопросы

1. Почему рекомендуется начинать обход петли с насыщения образца?
2. Получите выражение, связывающее отклонение рамки гальванометра и изменение индукции образца. При каких условиях справедливо это соотношение?
3. Пользуясь теоремой о циркуляции, получите формулу для напряжённости магнитного поля в длинном соленоиде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 74, 79.
2. *Калашников С. Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 110, 111, 118, 119.
3. *Кингсеп А. С., Локшин Г. Р., Ольхов О. А.* Основы Физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. II, гл. 5, § 5.3.

Работа 3.4.5

Петля гистерезиса (динамический метод)

Цель работы: изучение петель гистерезиса ферромагнитных материалов с помощью осциллографа.

В работе используются: автотрансформатор, понижающий трансформатор, интегрирующая цепочка, амперметр, вольтметр, электронный осциллограф, делитель напряжения, тороидальные образцы с двумя обмотками.

Ферромагнитные материалы часто применяются в трансформаторах, дросселях, машинах переменного тока, то есть в устройствах, где они подвергаются периодическому перемагничиванию. Изучение магнитных характеристик ферромагнетиков в переменных полях представляет поэтому большой практический интерес. Основные характеристики ферромагнетиков — их коэрцитивная сила, магнитная проницаемость, мощность, рассеиваемая в виде тепла при перемагничивании, и т. д. — зависят от частоты перемагничивающего поля. В настоящей работе кривые гистерезиса ферромагнитных материалов изучаются в поле частоты 50 Гц с помощью электронного осциллографа.

Измерение магнитной индукции в образцах. Магнитную индукцию удобно определять с помощью ЭДС, возникающей при изменении магнитного потока Φ в катушке, намотанной на образец:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Пусть катушка плотно охватывает образец, и индукция \mathbf{B} в образце однородна. В этом случае

$$\Phi = BSN_{\text{и}}, \quad (2)$$

где $N_{\text{и}}$ — число витков в измерительной катушке, а S — площадь витка. Подставляя это значение Φ в формулу (1), после интегрирования найдём

$$|B| = \frac{1}{SN_{\text{и}}} \int \mathcal{E} dt. \quad (3)$$

Таким образом, для определения B нужно проинтегрировать сигнал, наведённый меняющимся магнитным полем на измерительную катушку, намотанную на образец.

Для интегрирования сигнала применяют разного рода интегрирующие схемы. Простейшая из них состоит из соединённых последовательно резистора R и конденсатора C (рис. 1) и выполняет своё назначение, если сопротивление R резистора заметно превышает сопротивление конденсатора (если выходной сигнал много меньше входного: $U_{\text{вых}} \ll U_{\text{вх}}$).

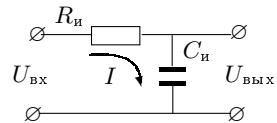


Рис. 1. Интегрирующая ячейка — RC-цепочка

В самом деле, при выполнении этого условия ток в цепи пропорционален входному напряжению: $I \simeq U_{\text{вх}}/R$, а напряжение на ёмкости C

$$U_{\text{вых}} = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int I dt \simeq \frac{1}{RC} \int U_{\text{вх}} dt. \quad (4)$$

Этот вывод тем ближе к истине, чем больше постоянная времени $\tau = RC$ превосходит характерное время процесса (например, его период). Для синусоидальных напряжений

$$U_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{вх}}}{RC\Omega}, \quad (5)$$

где Ω — частота сигнала.

Обозначив параметры интегрирующей ячейки через $R_{\text{и}}$ и $C_{\text{и}}$, выразим индукцию B с помощью формул (3) и (4) через $U_{\text{вых}}$ — напряжение на ёмкости интегрирующей ячейки:

$$|B| = \frac{1}{SN_{\text{и}}} \int \mathcal{E} dt = \frac{1}{SN_{\text{и}}} \int U_{\text{вх}} dt = \frac{R_{\text{и}}C_{\text{и}}}{SN_{\text{и}}} U_{\text{вых}}. \quad (6)$$

Экспериментальная установка. Схема установки изображена на рис. 2. Напряжение сети (220 В, 50 Гц) с помощью регулировочного автотрансформатора Ат через разделительный понижающий трансформатор Тр подаётся на намагничивающую обмотку N_0 исследуемого образца.

Действующее значение переменного тока в обмотке N_0 измеряется амперметром А. Последовательно с амперметром включено сопротивление R_0 , напряжение с которого подаётся на вход X электронного осциллографа (ЭО). Это напряжение пропорционально току в обмотке N_0 , а следовательно, и напряжённости H магнитного поля в образце.

Для измерения магнитной индукции B с измерительной обмотки $N_{\text{и}}$ на вход RC-цепочки подаётся напряжение $U_{\text{и}}$ ($U_{\text{вх}}$), пропорциональное согласно (6) производной \dot{B} , а с интегрирующей ёмкости $C_{\text{и}}$ снимается напряжение U_C ($U_{\text{вых}}$), пропорциональное величине B , и подаётся на вход Y осциллографа.

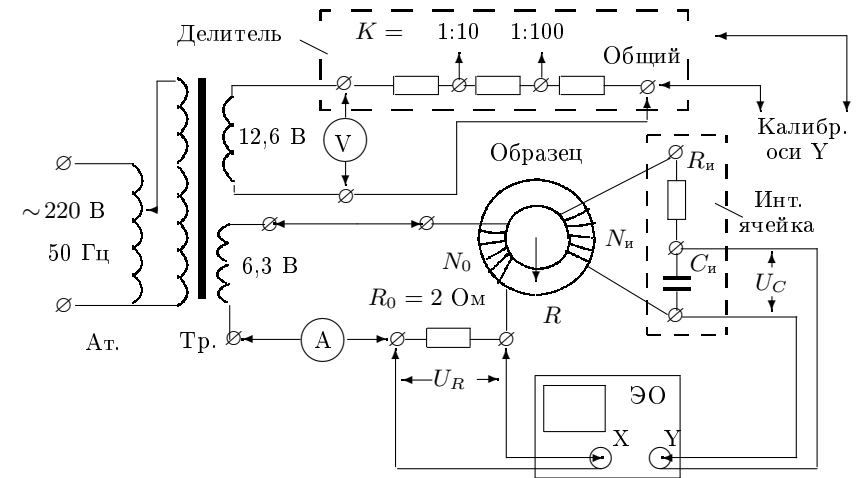


Рис. 2. Схема установки для исследования намагничивания образцов

Замкнутая кривая, возникающая на экране, воспроизводит в некотором масштабе (различном для осей X и Y) петлю гистерезиса. Чтобы придать этой кривой количественный смысл, необходимо установить масштабы изображения, т. е. провести калибровку каналов X и Y ЭО. Для этого, во-первых, надо узнать, каким напряжениям (или токам) соответствуют амплитуды сигналов, видимых на экране, и, во-вторых, каким значениям B и H соответствуют эти напряжения (или токи).

Измерение напряжения с помощью осциллографа. Исследуемый сигнал подаётся на вход X ; величина сигнала характеризуется длиной $2x$ горизонтальной черты, наблюдаемой на экране (x — отклонение от нуля — амплитуда сигнала).

Если известна чувствительность усилителя K_x в вольтах на деление шкалы экрана, то удвоенная амплитуда напряжения определяется произведением

$$2U_{x,0} = 2x \cdot K_x.$$

Напряжение, подаваемое на ось Y , измеряется аналогично:

$$2U_{y,0} = 2y \cdot K_y,$$

где y — отклонение от нуля в делениях шкалы, K_y — чувствительность усилителя в В/дел.

Наличие в схеме амперметра и вольтметра позволяет провести калибровку усилителей ЭО, т. е. проверить значения коэффициентов K_x

и K_y , (или определить их, если ручки плавной регулировки усиления при измерениях не были установлены на максимум).

Калибровка горизонтальной оси ЭО проводится при закороченной обмотке N_0 . Эта обмотка с помещённым в неё ферромагнитным образцом является нелинейным элементом, так что ток в ней не имеет синусоидальной формы, и это не позволяет связать амплитуду тока с показаниями амперметра.

При закороченной обмотке N_0 амперметр А измеряет эффективное значение синусоидального тока $I_{эфф}$, текущего через известное сопротивление R_0 . Сигнал с этого сопротивления подаётся на вход X ЭО. Измерив $2x$ — длину горизонтальной прямой на экране, можно рассчитать m_x — чувствительность канала X :

$$m_x = \frac{2R_0\sqrt{2}I_{эфф}}{2x} \frac{\text{В}}{\text{дел}}. \quad (7)$$

Калибровка вертикальной оси проводится с помощью сигнала, снимаемого через делитель напряжения с обмотки 12,6 В понижающего трансформатора (рис. 2). Вольтметр V измеряет напряжение $U_{эфф}$ на обмотке. Часть этого напряжения снимается с делителя с коэффициентом деления K и подаётся на вход Y ЭО (вместо напряжения U_C на рис. 2).

Измерив $2y$ — длину вертикальной прямой на экране, можно рассчитать чувствительность канала Y :

$$m_y = \frac{2\sqrt{2}KU_{эфф}}{2y} \frac{\text{В}}{\text{дел}}. \quad (8)$$

При калибровке канала Y тороид должен быть отключён, так как синусоидальный ток нагрузки в первичной обмотке N_0 тороида приводит к искажению формы кривой напряжения и на обмотке трансформатора, питающей делитель.

Калибровку осей осциллографа можно использовать для построения кривой гистерезиса в координатах B и H . Значения H рассчитываются по теореме о циркуляции [см. (4.7)], значения B — по формуле (6).

Постоянную времени RC -цепочки можно определить экспериментально. С обмотки 6,3 В на вход интегрирующей цепочки подаётся синусоидальное напряжение $U_{вх}$. На вход Y осциллографа поочерёдно подаются сигналы со входа ($U_{вх}$) и выхода ($U_{вых} = U_C$) RC -цепочки. Измерив амплитуды этих сигналов с помощью осциллографа, можно рассчитать постоянную времени $\tau = RC$. Как следует из формулы (5),

$$RC = \frac{U_{вх}}{\Omega U_{вых}}. \quad (9)$$

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при помощи ЭО исследовать предельные петли гистерезиса и начальные кривые намагничивания для нескольких ферромагнитных образцов; определить магнитные характеристики материалов, чувствительность каналов X и Y осциллографа и постоянную времени τ интегрирующей цепочки.

1. Для наблюдения петли гистерезиса на экране ЭО соберите схему согласно рис. 2. Подготовьте приборы к работе.

2. Подберите ток питания в намагничивающей обмотке и коэффициенты усиления ЭО так, чтобы предельная петля гистерезиса занимала большую часть экрана.

Зарисуйте на кальку предельную петлю и оси координат; отметьте на осях деления шкалы. Укажите (на кальке!) материал образца, значения коэффициентов усиления K_x и K_y , ток $I_{эфф}$ в намагничивающей обмотке, параметры тороида.

3. Снимите начальную кривую намагничивания: плавно уменьшая ток намагничивания до нуля, отмечайте на кальке вершины наблюдаемых частных петель. Эти вершины лежат на начальной кривой намагничивания.

4. Восстановите предельную петлю. Измерьте на экране (это точнее, чем по кальке) двойные амплитуды для коэрцитивной силы $[2x(c)]$ и индукции насыщения $[2y(s)]$. Запишите соответствующие значения K_x и K_y .

5. Повторите измерения пп. 2–4 для двух других катушек.

6. Прокалибруйте горизонтальную ось ЭО. Для этого отключите намагничивающую обмотку N_0 от цепи и снимите зависимость $2x[\text{дел}] = f(I_{эфф})$.

7. Для калибровки вертикальной оси ЭО подключите вольтметр к обмотке 12,6 В (рис. 2).

Не меняя коэффициента K_y , выберите напряжение U при котором стрелка вольтметра отклоняется почти на всю шкалу; затем подайте на Y -вход ЭО напряжение с делителя, подобрав коэффициент K делителя так, чтобы вертикальная прямая $2y$ занимала почти весь экран. Запишите значения $2y$, U , k и k_y .

Повторите калибровку для всех K_y , которые использовались при исследовании петель.

8. Определите τ — постоянную времени RC -цепочки [см. (9)]. Для этого разберите цепь тороида и подайте на вход RC -цепочки синусоидальное напряжение с обмотки 6,3 В трансформатора.

Подключите Y -вход ЭО ко входу интегрирующей цепочки, отключите X -вход ЭО и выберите ток, при котором вертикальная прямая

занимает большую часть экрана. Определите входное напряжение на RC — цепочке: $U_{\text{вх}} = 2y \cdot K_y$.

Не меняя тока, переключите Y -вход ЭО к интегрирующей ёмкости и аналогичным образом определите напряжение $U_{\text{вых}}$ на выходе интегрирующей ячейки.

Рассчитайте на месте постоянную времени $\tau = RC$ по формуле (9) и сравните с расчётом через параметры $R_{\text{и}}$ и $C_{\text{и}}$, указанные на установке.

9. Запишите параметры RC -цепочки, амперметра, вольтметра и значение R_0 .

Обработка результатов

1. Рассчитайте чувствительность канала X по формуле (7) и сравните с величиной K_x , использованной при калибровке.

2. Рассчитайте чувствительность канала Y по формуле (8) и сравните с величиной K_y , указанной на ЭО.

3. Сравните экспериментальное значение τ с расчётом через параметры $R_{\text{и}}$ и $C_{\text{и}}$, указанные на установке. Проверьте условие $R \gg 1/(\Omega C)$.

4. Рассчитайте напряжённости поля H в тороиде по формуле (4.7), приняв $I = \sqrt{2}I_{\text{эф}}$.

Постройте график $H = f(x)$ и рассчитайте наклон калибровочной прямой

$$\alpha = \frac{\Delta H}{\Delta x} \frac{[\text{А/м}]}{\text{дел}}.$$

5. Рассчитайте коэрцитивную силу H_c , используя измеренное значение $2x(c)$ (с учётом рабочего и калибровочного коэффициентов K_x).

Рассчитайте B_s по формуле (6), взяв значения $R_{\text{и}}$ и $C_{\text{и}}$, указанные на установке. При этом $U_{\text{вых}} = U_C = y(s) \cdot K_y$.

6. Укажите на кальках масштабы для предельных петель: H [А/м] на одно деление возьмите из графика $H = f(x)$ (с учётом калибровочного и рабочего коэффициентов усиления ЭО); B [Т] на одно деление рассчитайте по формуле (6), взяв вместо $U_{\text{вых}}$ соответствующие значения K_y .

7. Оцените максимальные значения $\mu_{\text{диф}}$ по основным кривым намагничивания.

8. Оцените погрешности. Сведите результаты в таблицу:

Ампл.	Fe-Ni	Fe-Si	Феррит
H_c А/м	$\frac{\text{экс.}}{\text{табл.}}$		
B_s Тл			
$\mu_{\text{диф}}$			

Контрольные вопросы

1. При какой форме образцов, помещённых в однородное магнитное поле, их намагниченность постоянна по всему объёму?
2. Почему для наблюдения петли гистерезиса используются образцы в виде тора, а не в виде стержня?
3. Почему при калибровке горизонтальной оси осциллографа необходимо отключать намагничивающую обмотку?
- 4*. Оцените погрешность, которая возникает при измерении индукции B , если измерительная катушка неплотно надета на образец; например, если образец занимает всего половину охватываемой ею площади.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 74, 79.
2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 110, 111, 119.
3. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы Физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. II, гл. 5, § 5.3.

Работа 3.4.6

Параметрический резонанс

Цель работы: изучение параметрических колебаний в электрической цепи.

В работе используются: параметрон (две тороидальных катушки, резисторы, интегрирующая цепочка, конденсаторы), генератор звуковых частот, реостат, сглаживающий дроссель, магазин ёмкостей, магазин сопротивлений, вольтметр, миллиамперметр, осциллограф.

Колебания в резонансном контуре можно возбуждать не только питающей контур от внешнего источника, но и периодически меняя параметры контура.

Если периодически изменять ёмкость конденсатора или самоиндукцию катушки, входящих в состав колебательного контура, то при определённых условиях в контуре возбуждаются незатухающие электрические колебания. Такой способ возбуждения называется *параметрическим*, поскольку колебания возникают не под действием внешней ЭДС, а вследствие изменения параметров контура.

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из последовательно соединённых ёмкости C , индуктивности L и сопротивления R . В силу

неизбежных внешних влияний и тепловых флуктуаций в контуре всегда имеют место небольшие колебания с частотой ω_0 , которая при малых потерях зависит только от реактивных параметров L и C :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1)$$

При этом средняя полная энергия W , запасённая в контуре, остаётся постоянной; происходит лишь её периодическая перекачка с частотой $2\omega_0$ из электрической

$$W_{\text{э}} = \frac{q^2}{2C}$$

в магнитную

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2}$$

и обратно. Здесь q — заряд на обкладках конденсатора, I — ток в катушке индуктивности. Полную энергию системы можно изменить, если скачком поменять величину L (или C).

Рассмотрим, как изменяется энергия контура при быстром уменьшении L (например, растяжении катушки) в тот момент, когда ток в катушке максимален. Сумма падений напряжения на элементах контура равна ЭДС самоиндукции:

$$RI + \frac{q}{C} = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

Проинтегрируем это уравнение по времени за очень короткий промежуток Δt ($\Delta t \ll 1/\omega_0$), в течение которого изменяется индуктивность. Два первых интеграла при этом будут близки к нулю, поэтому можно считать, что магнитный поток Φ в катушке в течение этого времени не изменяется:

$$\Delta\Phi = \Delta(LI) = 0$$

или

$$\Phi = LI = \text{const}. \quad (2)$$

Уменьшение индуктивности в тот момент, когда ток в контуре максимален, ведёт к увеличению тока и магнитной энергии в катушке:

$$\Delta W_{\text{м}} = \Delta \left(\frac{\Phi^2}{2L} \right) = -(LI)^2 \frac{\Delta L}{2L^2} = -\frac{I^2}{2} \Delta L.$$

Если теперь через четверть периода вернуть индуктивность к прежнему значению — энергия системы не изменится, так как ток в этот

момент равен нулю. Ещё через четверть периода опять уменьшим L — снова возрастёт энергия. Процесс увеличения энергии системы за счёт работы внешних сил называют накачкой. Заметим, что индуктивность при этом меняется с частотой, вдвое превосходящей собственную частоту контура.

Энергия, которую получает контур за период,

$$2W_{\text{м}} = I_{\text{max}}^2 \Delta L,$$

должна превышать потери на активном сопротивлении, составляющие

$$W_R = RI_{\text{эф}}^2 T.$$

При выполнении условия $2W_{\text{м}} > W_R$ или $\Delta L > RT/2$ амплитуда колебаний в контуре возрастает с каждым периодом. С увеличением амплитуды всё более возрастает роль нелинейной зависимости $B(H)$, что ограничивает возрастание амплитуды. Поэтому со временем в контуре устанавливаются колебания максимально возможной постоянной амплитуды. Это явление называют **параметрическим резонансом**.

То, что амплитуда установившихся колебаний определяется именно нелинейностью, а не потерями, является принципиальным отличием параметрических колебаний от обычного резонанса.

Раскачка колебаний возможна при изменении C или L по любому периодическому закону с частотами $\Omega_{\text{н}}$, для которых справедливо соотношение

$$\frac{\omega_0}{\Omega_{\text{н}}} = \frac{n}{2},$$

где n — целое число (1, 2, ...). Наиболее эффективная раскачка имеет место при $n = 1$, когда частота накачки ($\Omega_{\text{н}}$) равна частоте колебаний энергии $W_{\text{э}}$ и $W_{\text{м}}$ ($2\omega_0$).

В том случае, когда индуктивность изменяется по синусоидальному закону, условие возбуждения колебаний имеет вид

$$\Delta L > \frac{2RT}{\pi}. \quad (3)$$

Величиной индуктивности можно управлять электрически. Рассмотрим качественно, как это делается.

На рис. 1 показана зависимость $B(H)$ в ферромагнитном сердечнике — петля гистерезиса. Индуктивность L катушки, намотанной на такой сердечник, связана с индукцией B . Меняя поле H , можно выбрать такую рабочую точку на петле, вблизи которой зависимость $B(H)$ обладает наиболее ярко выраженной нелинейностью. На рис. 1 это точка A .

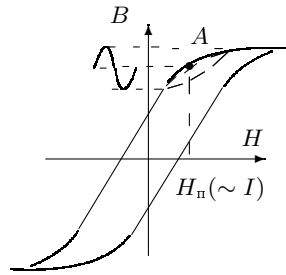


Рис. 1. Полная и частная петли гистерезиса

Соответствующее подмагничивающее поле H_n задаётся **постоянным** током, проходящим через дополнительную (подмагничивающую) обмотку. Вблизи точки A особенно резко изменяется дифференциальная магнитная проницаемость:

$$\mu_{\text{диф}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}. \quad (4)$$

Небольшие колебания величины B вокруг рабочей точки можно создать, подав на вторую подмагничивающую обмотку **переменный** ток подмагничивания. Магнитная проницаемость $\mu_{\text{диф}}$, а с ней индуктивность L , будут меняться с той же частотой, что и переменная составляющая подмагничивающего тока (из-за нелинейности $B(H)$ в кривой $\mu(t)$ присутствуют также колебания с кратными частотами, не представляющие для нас интереса). Если изменения индуктивности достаточно велики, то в контуре возбуждаются незатухающие колебания, частота которых вдвое меньше частоты изменения параметров контура (в нашем случае — частоты изменения индуктивности, то есть частоты подмагничивания). Такое соотношение частот служит отличительным признаком параметрических колебаний.

Экспериментальная установка. Для изучения параметрических колебаний используется «параметрон» — установка с нелинейной индуктивностью, схема которой представлена на рис. 2. «Параметрон» включает в себя две тороидальных катушки, интегрирующую ячейку r_0, C_0 , резисторы r_1 и r_2 , ключи K_1 и K_2 и колебательный контур. Колебательный контур состоит из двух последовательно соединённых индуктивностей L_1 и L_2 , ёмкости C и сопротивлений R_m и r_2 . На рисунке контур заключён в пунктирную рамку.

Обе катушки L_1 и L_2 с одинаковым числом витков n_1 намотаны на одинаковые тороидальные ферромагнитные сердечники. Длина каждого сердечника — l , сечение — S , магнитная проницаемость — μ . С помощью теоремы о циркуляции можно показать, что общая индуктивность катушек

$$L = 2\mu_0\mu \frac{n_1^2 S}{l}. \quad (5)$$

Постоянный ток подмагничивания от источника постоянного напряжения 36 В проходит через две последовательно соединённые обмотки

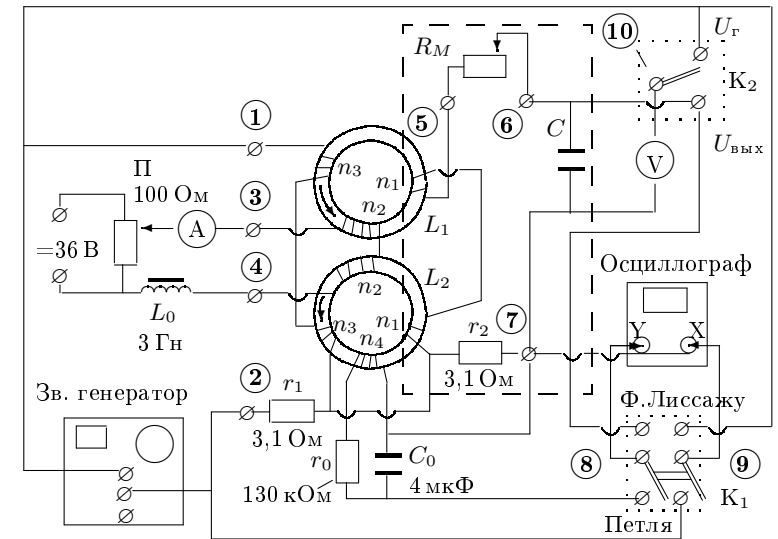


Рис. 2. Схема установки

с числом витков n_2 . Ток регулируется потенциометром P . Индуктивность $L_0 = 3 \text{ Гн}$ поставлена для того, чтобы увеличить сопротивление цепи переменному току. Переменный ток в этой цепи практически отсутствует, постоянный измеряется амперметром A .

Переменный ток подмагничивания, создаваемый генератором звуковых частот, проходит через последовательно соединённые обмотки n_3 . Обмотка n_4 имеется всего на одном из сердечников. Она служит для измерения полного магнитного потока, проходящего через сердечник. Обмотки n_1 соединены так, что возникающие в них ЭДС имеют противоположные знаки, поэтому в колебательном контуре не возникают токи, имеющие частоту звукового генератора.

Для измерения напряжений в схему включён вольтметр переменного тока. При переключении ключа K_2 в верхнее положение вольтметр измеряет напряжение U_r на выходе генератора, при переключении в нижнее — выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ на ёмкости C .

Осциллограф позволяет наблюдать петлю гистерезиса, фиксировать момент возникновения и срыва параметрических колебаний и определять их частоту с помощью фигур Лиссажу.

При верхнем положении ключа K_1 на вход X осциллографа подаётся падение напряжения между точками 1 и 7, практически равное напряжению U_{3r} на генераторе (падением напряжения на резисторах r_1

и r_2 можно пренебречь, поскольку оно мало по сравнению с U_{3r}). На вход Y подаётся напряжение с ёмкости C колебательного контура. По фигурам Лиссажу, возникающим на экране, можно сравнить частоту накачки (частоту генератора) с частотой колебаний контура.

При нижнем положении ключа K_1 на вход Y подаётся напряжение U_Y с ёмкости C_0 . Эта ёмкость входит в состав интегрирующей цепочки $r_0 C_0$, подключённой к обмотке n_4 . ЭДС индукции, возникающая в обмотке n_4 , пропорциональна dB/dt :

$$U_4 = n_4 S \frac{dB}{dt}.$$

Параметры интегрирующей цепочки подобраны так, что сопротивление r_0 заметно превышает сопротивление обмотки n_4 и сопротивление ёмкости:

$$r_0 \gg \frac{1}{\omega_0 C_0}.$$

При этом условии ток в цепочке пропорционален dB/dt :

$$I_0 = \frac{U_4}{r_0} = \frac{n_4 S}{r_0} \frac{dB}{dt},$$

а напряжение U_Y на конденсаторе C_0 пропорционально B :

$$U_Y = \frac{1}{C_0} \int I_0 dt = \frac{1}{r_0 C_0} \int U_4 dt = \frac{n_4 S}{r_0 C_0} B. \quad (6)$$

На вход X осциллографа подаётся сумма падений напряжения на резисторах r_1 и r_2 . Напряжение, возникающее на r_1 , пропорционально току, протекающему через обмотки n_3 от генератора. В отсутствие параметрических колебаний через r_2 ток не течёт, и на вход X подаётся напряжение U_X , пропорциональное переменному току подмагничивания I , которым определяется поле H в сердечнике:

$$H = \frac{n_3 I}{l}.$$

Следовательно,

$$U_X = I r_1 = \frac{l r_1}{n_3} H. \quad (7)$$

Таким образом, в отсутствие параметрических колебаний на экране появляется кривая гистерезиса ферромагнитного сердечника. При возникновении колебаний в контуре через r_2 начинает проходить ток, кривая

резко искажается и для измерений непригодна. Но искажение петли позволяет отметить момент возникновения параметрических колебаний и даёт возможность измерить параметры петли при подходе к моменту самовозбуждения.

Зарисовав с экрана на кальку петлю гистерезиса, соответствующую границе возбуждения параметрических колебаний, можно экспериментально проверить справедливость формулы (3) — условия самовозбуждения. Из (5) и (4) следует:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L_{\max} - L_{\min} = 2 \frac{\mu_0 n_1^2 S}{l} (\mu_{\max} - \mu_{\min}) = \\ &= 2 \frac{n_1^2 S}{l} \left[\left(\frac{dB}{dH} \right)_{\max} - \left(\frac{dB}{dH} \right)_{\min} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Производные dB/dH следует взять из чертежа, проведя касательные к кривой $B(H)$ слева и справа от излома петли. Для расчёта масштабов выразим B и H через напряжения U_Y и U_X . Подставляя (6) и (7) в (8), получим

$$\Delta L = 2 r_0 C_0 r_1 \frac{n_1^2}{n_3 n_4} \left[\left(\frac{\Delta U_Y}{\Delta U_X} \right)_{\max} - \left(\frac{\Delta U_Y}{\Delta U_X} \right)_{\min} \right]. \quad (9)$$

В нашей установке $n_1 = n_3 = n_4$, так что $\frac{n_1^2}{n_3 n_4} = 1$. Параметры r_0 , C_0 и r_1 приведены на схеме.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается с помощью фигур Лиссажу найти критическое сопротивление и определить частоту параметрических колебаний контура; с помощью кривых гистерезиса определить критическое сопротивление и проверить условие самовозбуждения; по кривой зависимости напряжения на конденсаторе от частоты определить резонансную частоту и индуктивность колебательного контура.

1. Соберите схему согласно рис. 3. Сравните схему, изображённую на рис. 3, со схемой на рис. 2. Подготовьте приборы к работе.
2. Установите ёмкость $C = 100$ мкФ, сопротивление магазина $R_m = 0$. Поставьте движок потенциометра, регулирующего постоянный ток подмагничивания, на минимум выходного напряжения. Включите питание = 36 В и установите постоянный ток $I \simeq 80$ мА.

Переменный ток подмагничивания установите с помощью генератора: частота $\nu = 150$ Гц; выходное напряжение на вольтметре генератора $U_{3r} = 15$ В.

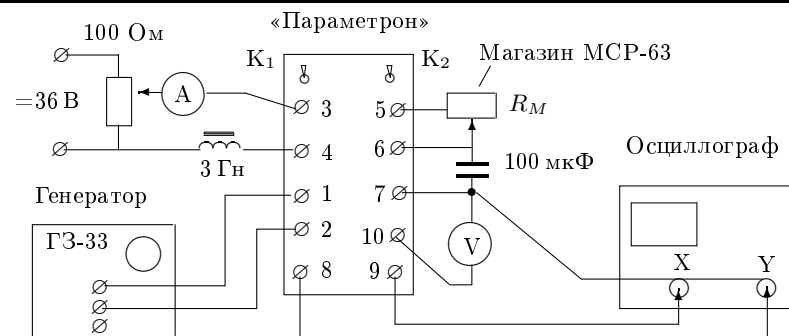


Рис. 3. Блок-схема установки

3. Для наблюдения параметрических колебаний поставьте ключ K_1 в положение «Фигура Лиссажу». Увеличивая постоянный ток подмагничивания, определите момент возникновения параметрических колебаний (при $U_{зг} = 15$ В) по появлению на экране ЭО фигуры Лиссажу, имеющей одно самопересечение (рис. 4а).

Оцените интервал ΔI , внутри которого эти колебания существуют. Используя показания генератора, определите по виду фигуры Лиссажу частоту параметрических колебаний.

4. Убедитесь в том, что Вы наблюдаете именно параметрические колебания, внося в контур дополнительное затухание — увеличивая сопротивление магазина R_M . Колебания, возбуждаемые внешним источником, при увеличении затухания постепенно уменьшаются по амплитуде, в то время как параметрические колебания при критическом сопротивлении $R_{кр}$ срываются.

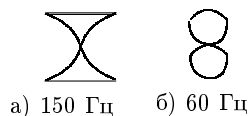


Рис. 4. Фигуры Лиссажу при отношении частот 1:2 (масштабы разные)

5. Определите $R_{кр}$ для токов: $I_1 = 100$ мА и $I_2 = 160$ мА. Увеличивая сопротивление магазина, следите за постоянством напряжения на генераторе ($U_{зг} = 15$ В).

6. При фиксированных значениях: $I = 160$ мА, $U_{зг} = 15$ В, $R_M = 0$ — проследите, как изменяется фигура Лиссажу при уменьшении частоты от 150 до 50 Гц. Определите резонансную частоту и частоту срыва колебаний.

7. Для наблюдения петли гистерезиса переключите ключ K_1 в положение «Петля». Снова задайте параметры: $I = 160$ мА, $R_M = 0$, $n = 150$ Гц, $U_{зг} = 15$ В. Подберите чувствительность осциллографа так, чтобы на экране была видна петля гистерезиса в удобном масштабе.

При наличии параметрических колебаний петля гистерезиса имеет сложную форму. Увеличьте сопротивление R_M до критического. В этом случае параметрические колебания срываются и на экране видна частная петля (на рис. 1 она выделена пунктиром).

Чтобы увидеть форму полной петли, уберите сопротивление R_M и ток I до нуля. При увеличении напряжения $U_{зг}$ до 20–25 В полная петля становится предельной.

8. Увеличивая постоянный ток, проследите, как меняется форма петли в момент возникновения и срыва параметрических колебаний, как перемещается частная петля.

9. Для тока $I = 160$ мА, $U_{зг} = 15$ В определите $R_{кр}$, выводя параметрон на самую границу колебаний.

10. При сопротивлении чуть больше критического зарисуйте петлю. Для этого установите ручки плавной регулировки усиления по каналам X и Y в крайнее правое положение (до щелчка), тогда цифры возле дискретных переключателей усиления задают масштабы изображения K_X и K_Y в мВ/дел.

Подберите коэффициенты усиления так, чтобы петля занимала практически весь экран. Зарисуйте на кальку петлю, оси координат, деления шкалы и запишите на ней рабочие параметры схемы и коэффициенты K_X и K_Y .

11. Исследуйте зависимость выходного напряжения параметрона от частоты. Для этого уменьшите сопротивление магазина до нуля и поставьте ключ K_2 в положение « $U_{вых}$ ». Снимите зависимость напряжения на ёмкости C колебательного контура $U_{вых} = f(\nu)$, уменьшая частоту от 150 Гц до срыва колебаний. Напряжение $U_{зг} = 15$ В и ток $I = 160$ мА следует поддерживать постоянными.

Обработка результатов

1. Определите по рисунку петли максимальный и минимальный наклоны касательных ($\Delta U_Y / \Delta U_X$) и рассчитайте величину ΔL по формуле (9).

Проверьте справедливость условия (3). Полное сопротивление контура включает в себя сопротивление магазина и сопротивление параметрона между точками 5 и 7, указанное на установке.

2. Постройте график $U_{вых} = f(\nu)$ и определите по нему резонансную частоту контура ν_0 . Рассчитайте индуктивность контура ($\Omega^2 = 1/LC$, $\Omega = 2\pi\nu_0$) и проверьте справедливость условия (3) на этой частоте, полагая $\Delta L \simeq L$.

Контрольные вопросы

1. Получите условие возбуждения колебаний (3), когда индуктивность меняется по гармоническому закону:

$$L = L_0[1 - m \sin(2\omega_0 t)].$$

Напишите закон изменения тока, возбуждаемого в контуре.

2. Почему в нашем случае индуктивность пропорциональна дифференциальной магнитной проницаемости?

3. Нарисуйте качественный график зависимости $\mu_{\text{диф}}$ от величины подмагничивающего тока для петли гистерезиса, изображённой на рис. 1.

4. На каких ещё частотах (в принципе) могут возбуждаться колебания в контуре параметрона при больших изменениях индуктивности?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество — М.: Наука, 1983. Гл. III, § 74; гл. X, §§ 122, 123, 127, 135.
2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977. § 226.
3. *Кингсен А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы Физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. III, гл. 3, § 3.1.
- 4* *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959. Гл. III, § 9.

Раздел V

ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД. ПЛАЗМА

1. Введение

Как известно, вещество может находиться в трёх фазовых состояниях — твёрдом, жидком и газообразном, причём эти состояния последовательно сменяются по мере возрастания температуры. Если и дальше нагревать газ, то сначала молекулы распадаются на атомы, а затем и атомы распадаются на электроны и ионы, так что газ становится ионизованным, представляя собой смесь из свободных электронов и ионов, а также нейтральных частиц. Если степень ионизации газа, под которой принято понимать отношение числа ионизованных атомов к их полному числу, достаточно велика, то такой сильно ионизованный газ может обладать качественно новыми свойствами по сравнению с обычным газом. Прежде всего такой газ обладает высокой электропроводностью и поэтому, в противоположность нейтральному газу, сильно взаимодействует с электрическим и магнитным полями. Кроме того, заряженные частицы в таком газе стремятся распределиться в пространстве таким образом, чтобы установилась локальная квазинейтральность, то есть равенство концентраций положительных и отрицательных частиц, нарушаемое тепловыми флуктуациями только в микроскопических масштабах. Такое состояние ионизованного газа называется **плазмой**. Более точное определение этого понятия будет дано далее. Плазму называют также четвёртым состоянием вещества.

Первое описание газовой плазмы дал И. Ленгмюр (1923 г.), исследуя электрический разряд в газе низкого давления (тлеющий разряд). Он назвал плазмой «ярко светящийся газ, состоящий из электронов, ионов разных сортов и нейтральных атомов и молекул». Он же ввёл сам термин — плазма (от греческого глагола, обозначающего «разрыхляться», «расползаться») — и основные параметры, характеризующие плазму: плотности составляющих её частиц — электронов — n_e , ионов — n_i и нейтральных частиц — n_0 , их температуры — соответственно T_e , T_i , T_0 .

Очевидно, что свечение плазмы, являющееся следствием непрерывно идущей рекомбинации электронов и ионов в нейтральные атомы, сопровождается выделением энергии и уменьшением концентрации электронов и ионов. Стационарное состояние плазмы, которое мы только и будем исследовать, может существовать лишь при наличии непрерывно действующего источника ионизации. Им может быть электрический разряд в газе (газоразрядная плазма), происходящий в постоянном электрическом поле (обычный газовый разряд, дуга и т. д.) или в высокочастотном поле (индукционные катушки, запитанные током высокой частоты электроды и т. д.). Плазма может образовываться и при термической ионизации газа, если газовая среда поддерживается при достаточно высокой температуре (звёзды, пламя газовой горелки). Плазма образуется в фокальной области мощных лазерных установок и при многих других условиях.

Степень ионизации плазмы обычно невелика. В тлеющем газовом разряде (люминесцентные лампы) плотность электронов составляет примерно 10^9 см^{-3} , а плотность нейтральных молекул $\sim 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Лишь внутри звёзд и в специальных установках, используемых для исследования проблем, связанных с управляемым термоядерным синтезом, относительное число атомов, находящихся в ионизированном состоянии, приближается к единице (полностью ионизованная плазма). Мощность, подводимая к таким установкам, измеряется мегаваттами.

Плазма исследуется также в связи с проблемой создания магнитогидродинамических генераторов — преобразователей механической энергии движущегося в магнитном поле проводящего газа в электрическую энергию.

Ещё одно важное направление использования плазмы — применение её для проведения химических реакций, которые в горячей сильно ионизованной газовой среде происходят очень быстро и эффективно.

Температура плазмы, как правило, измеряется не в градусах, а в электрон-вольтах ($1 \text{ эВ} \approx 11\,600 \text{ К}$). При расчётах плазменных явлений обычно используется система СГС.

Стационарное (не меняющееся со временем) состояние плазмы может быть равновесным или неравновесным. В первом случае компоненты плазмы (электроны и ионы) имеют одну и ту же температуру, а во втором — разную. При достаточно больших давлениях (звёзды, пламя газовой горелки) между компонентами плазмы может успевать установиться тепловое равновесие. При малых давлениях ($\lambda \geq d$, где λ — длина свободного пробега, а d — характерный размер занятой плазмой области) тепловое равновесие устанавливаться не успевает. Так, в тлеющем газовом разряде мы обычно имеем дело с «горячими» электронами

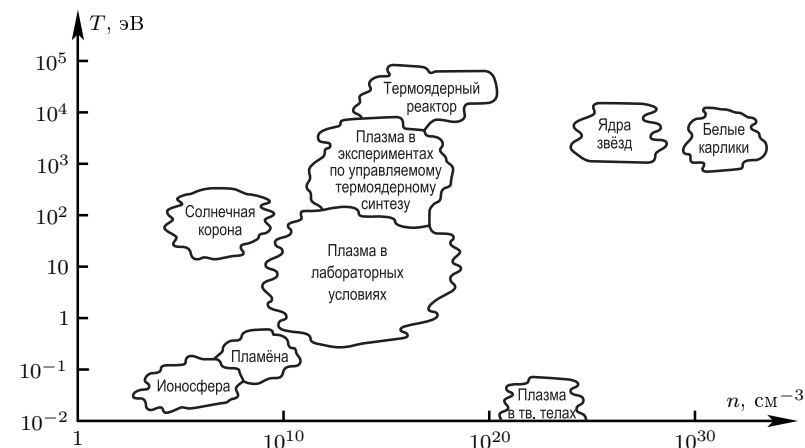


Рис. 5.1. Различные типы плазмы в лаборатории и природе

и «холодными» ионами. Электроны быстро ускоряются электрическим полем и почти не теряют энергии при соударении с тяжёлыми ионами и атомами газа, а также при столкновении со стенками газоразрядной трубки. Наоборот, ионы быстро отдают полученную от поля энергию нейтральным атомам газа и атомам стенок, поскольку массы их близки. В результате реализуются условия, при которых электроны характеризуются одной — более высокой, а ионы — другой, более низкой температурой.

Большой интерес представляет плазма, существующая в атмосфере Земли и планет, а также в космосе. Атмосферная плазма создаётся ультрафиолетовым излучением Солнца. Электроны плазмы захватываются магнитным полем Земли (движутся вокруг и вдоль силовых линий магнитного поля) и образуют радиационные пояса на расстояниях тысяч километров от поверхности Земли. Широко известны также плазменные проводящие слои Хевисайда, обеспечивающие дальнюю радиосвязь на коротких волнах.

Свойствами, характерными для газовой плазмы, обладают и некоторые другие среды, называемые по этой причине плазмоподобными средами, или просто плазмами: в этом смысле термин *плазма* встречается в научной литературе во множественном числе. В качестве примеров различных плазм можно назвать плазму металлов, электронно-дырочную плазму полупроводников, нуклонную плазму атомного ядра и т. д. Различные типы плазм, встречающихся как в лабораторных условиях, так и в природе, можно достаточно наглядно представить

на плоскости параметров: температура плазмы — плотность числа частиц (рис. 5.1). Под температурой плазмы в каждом конкретном случае понимают температуру тех заряженных частиц, которые определяют плазменные свойства рассматриваемой среды: в большинстве случаев это электроны.

2. Некоторые свойства плазмы

Как уже говорилось выше, определяющим свойством плазмы является её квазинейтральность. Это означает, что во всяком сколь угодно большом объёме заряды ионов и электронов всегда компенсируют или почти компенсируют друг друга. Если хотя бы на некоторое время это оказывается не так, то возникают сильные электрические поля, которые перемещают электроны и ионы и восстанавливают квазинейтральность плазмы.

Оценим размер области, внутри которой могут существовать заметные электрические поля. Рассмотрим пространство вокруг иона, имеющего положительный заряд и поэтому притягивающего электроны, поле которых противоположно по знаку полю иона. Ион «экранируется» электронами, так что его поле убывает с увеличением расстояния r не по закону $1/r^2$, а существенно сильнее. Если бы не тепловое движение электронов, то они так «облепили» бы ион, что его поле было бы полностью скомпенсировано (точнее, произошла бы рекомбинация). Тепловое движение мешает такой компенсации. Рассчитаем этот эффект.

Как известно, электрическое поле E и плотность электрического заряда ρ в однородной среде связаны между собой соотношением

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (5.1)$$

Переходя от напряжённости поля \mathbf{E} к электрическому потенциалу φ с помощью обычного соотношения

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (5.2)$$

найдем

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad (5.3)$$

где Δ — оператор Лапласа. Поле заряда сферически симметрично, поэтому в сферической системе координат оно зависит только от радиуса. Оператор Лапласа в этом случае принимает простую форму:

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}.$$

Имеем поэтому

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = -4\pi\rho. \quad (5.4)$$

В силу большой инерционности ионов по сравнению с электронами ($M \gg m_e$) далее мы будем считать ионы вообще бесконечно тяжёлыми, то есть неподвижными, что, как показывают точные расчёты, не меняет ответа по порядку величины.

Распределение электронов, а значит, и их пространственного заряда ρ_e подчиняется формуле Больцмана:

$$\rho_e = -ne \cdot e^{e\varphi/kT_e}. \quad (5.5)$$

При написании (5.5) считалось, что плотность электронов на достаточном удалении от заряда (при $\varphi = 0$) равна n . Числом e обозначена абсолютная величина заряда электрона, так что его заряд равен $-e$.

В соответствии со сделанным предположением ионы неподвижны. Их пространственный заряд ρ_i поэтому всюду одинаков и равен своему значению в области $\varphi = 0$, где он равен и противоположен по знаку пространственному заряду электронов. Таким образом,

$$\rho_i = ne \quad (5.6)$$

(плазма вдали от источника кулоновского поля квазинейтральна). Подставляя (5.5) и (5.6) в (5.4), найдём

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = -4\pi ne \left[1 - e^{e\varphi/kT_e} \right]. \quad (5.7)$$

Это уравнение нелинейно и в аналитическом виде не решается. Решение может быть найдено, если

$$\frac{e\varphi}{kT_e} \ll 1. \quad (5.8)$$

В этом случае экспоненту можно разложить в ряд и уравнение (5.7) становится линейным:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r_D^2} \varphi, \quad (5.9)$$

где введено обозначение

$$r_D = \sqrt{\frac{kT_e}{4\pi ne^2}} = 743 \sqrt{\frac{T_e \text{ (эВ)}}{n \text{ (см}^{-3}\text{)}}} \text{ (см)}. \quad (5.10)$$

Нетрудно убедиться путём подстановки, что решение уравнения (5.9) имеет вид

$$\varphi = \frac{Ze}{r} e^{-r/r_D}. \quad (5.11)$$

Это решение правильно ведёт себя около иона (где $\varphi \sim Ze/r$) и обращается в нуль на бесконечности. Мы нашли, следовательно, искомое решение задачи. Оно показывает, что вследствие экранирующего действия электронов поле иона убывает с расстоянием экспоненциально с характерной длиной, равной r_D — дебаевскому радиусу экранирования (радиус Дебая, дебаевская длина). Дебай ввёл понятие радиуса экранирования, рассматривая поле иона в жидком электролите.

Плазму можно считать почти нейтральной (квазинейтральной) в областях, размеры которых существенно превосходят дебаевскую длину. При $T = 10^4$ К (≈ 1 эВ) и $n = 10^9$ см $^{-3}$ $r_D \approx 1,6 \cdot 10^{-2}$ см.

Теперь можно дать количественное определение понятия плазма.

Плазмой называется ионизованный газ, дебаевский радиус которого r_D существенно меньше характерного размера l объёма, занимаемого этим газом, то есть

$$\sqrt{\frac{kT_e}{4\pi n e^2}} \ll l.$$

Это определение также принадлежит Ленгмюру.

Ещё одним важным параметром плазмы является число заряженных частиц (в среднем) в дебаевской сфере (сфера с радиусом, равным r_D). Применённый при выводе дебаевского радиуса статистический подход (распределение Больцмана) предполагает, что частиц должно быть много. Число частиц N_D в дебаевской сфере можно оценить с помощью формулы (5.10), подставляя в неё вместо истинного среднее число частиц (эти величины мало различаются):

$$N_D \approx n \frac{4}{3} \pi r_D^3 \approx 0,1 \frac{(kT_e)^{3/2}}{n^{1/2} e^3}. \quad (5.12)$$

Для плазмы газового разряда это число оказывается порядка 10^4 , т. е. очень велико.

Заметим, что требование, чтобы число частиц в дебаевской сфере было велико по сравнению с единицей, эквивалентно условию, что потенциальная энергия взаимодействия двух заряженных частиц в плазме существенно меньше их тепловой энергии, то есть что плазма является газом, причём идеальным.

Другой важнейшей характеристикой плазмы является плазменная или ленгмюровская частота, выражение для которой и её смысл можно получить из следующих соображений. Выделим в плазме объём в виде параллелепипеда, изображённого на рис. 5.2. Сместим все электроны на расстояние x относительно ионов (ионы занимают объём, изображённый сплошными, а электроны — пунктирными линиями). Пусть плотность электронов (и ионов) равна n ; ионы для простоты будем считать однозарядными. Легко видеть, что в результате такого смещения на гранях параллелепипеда возникнут поверхностные заряды:

$$\sigma = nex. \quad (5.13)$$

Вследствие этого появится электрическое поле:

$$E = 4\pi\sigma = 4\pi nex. \quad (5.14)$$

Это поле действует на электроны, придавая им ускорение, равное

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{eE}{m} = -\frac{4\pi ne^2}{m}x. \quad (5.15)$$

Уравнение (5.15) определяет плазменную (ленгмюровскую) частоту коллективных колебаний электронов:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m}} = 5,65 \cdot 10^4 \sqrt{n \text{ (см}^{-3}\text{)}}. \quad (5.16)$$

Плазменная частота задает естественный масштаб времени для плазмы: это — время отклика на флуктуацию плотности заряда в плазме. Учитывая это, дебаевский радиус экранирования можно интерпретировать следующим образом. Пусть какая-то группа электронов получила направленную скорость, равную тепловой: $v = \sqrt{kT_e/m_e}$. При этом, как легко можно убедиться, обращаясь к формулам (5.16), (5.10), за время, равное ω_p^{-1} , эта группа электронов пройдёт в направлении полученной скорости до полной остановки расстояние, как раз равное дебаевской длине, то есть

$$r_D = \frac{v}{\omega_p}. \quad (5.17)$$

Таким образом, дебаевская длина — это амплитуда ленгмюровских колебаний плазмы, возбуждаемых тепловыми флуктуациями. Эта амплитуда и является масштабом нарушения квазинейтральности плазмы в отсутствие внешнего поля.

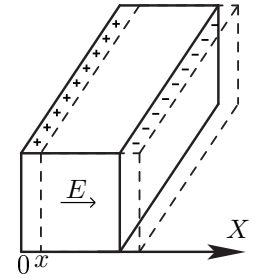


Рис. 5.2

Как следует из (5.16), плазменная частота определяется только плотностью электронов (и универсальными постоянными). Можно строго доказать, что она не зависит от величины и формы рассматриваемого объёма и является, таким образом, локальной характеристикой плазмы. Плазменная частота является не единственной — но важнейшей — характерной частотой плазмы. Она определяет коллективное движение электронов относительно ионов.

В заключение этого пункта сделаем следующее замечание. Формула для дебаевского радиуса (5.10) не учитывает движение ионов. Если считать, что ионы тоже распределяются в поле пробного заряда по Больцману с температурой T_i , то в приближении $e\varphi \leq kT_i$, вместо формулы (5.10) получим

$$r_D = \sqrt{\frac{k}{4\pi n e^2} \frac{T_e T_i}{T_e + T_i}}, \quad (5.18)$$

то есть вместо T_e в формулу для дебаевского радиуса войдёт приведённая температура. В частности, при $T_e = T_i$ в знаменателе под корнем появляется двойка, а при $T_e \gg T_i$, что имеет место для плазмы газового разряда (тлеющего), в формуле (5.10) вместо T_e будет стоять T_i .

3. Газовый разряд

Под термином «газовый разряд» обычно понимают все явления и процессы, связанные с протеканием электрического тока через газ.

Само название *разряд* произошло от названия медленно протекающего процесса потери заряда заряженными металлическими телами, расположенными на подставке из изолятора, что наблюдалось ещё в XVI веке. Позднее Кулон экспериментально доказал, что заряд стекает с проводника через воздух, а не через подставку из изолятора, то есть по современной терминологии имеет место газовый разряд. Разряд при низких давлениях воздуха (порядка 1 мбар) открыл и исследовал Фарадей — этот разряд стал известен как *тлеющий*. В конце XIX века исследование проводимости разреженных газов привело Дж.Дж. Томсона к открытию первой элементарной частицы — электрона, а дальнейшие исследования физики газового разряда во многом послужили экспериментальной основой атомной и квантовой физики.

Основателем физики собственно газового разряда считается ученик Дж.Дж. Томсона Таунсенд, создавший в начале XX века теорию пробоя газа и установивший закономерности ионизации. Следующий принципиальный вклад в физику газового разряда был внесён Ленгмюром, который вместе с Тонксом в 1928 году, исследуя газовый разряд низкого давления, ввёл такое фундаментальное понятие физики, как плазма,

о чём уже говорилось выше, а также развил методы исследования плазмы, в частности, метод зондов.

Современная физика термин *газовый разряд* трактует в более широком смысле. Это — не только процесс протекания тока через газ, но и любой процесс возникновения ионизации газа под действием приложенного электрического поля. При этом поле может быть не только постоянным во времени, но и быстропеременным — высокочастотным (ВЧ-разряд, мегагерцы), сверхвысокочастотным (СВЧ-разряд, гигагерцы) и даже оптического диапазона (оптический разряд). В последнее время был открыт пучково-плазменный разряд (ППР), загорающийся при прохождении электронного пучка через газ малой плотности вследствие возникновения в такой системе плазменных колебаний СВЧ-диапазона. Термины *гореть*, *зажигание* получили распространение потому, что при возникновении достаточно сильной ионизации газ светится.

Разряды в постоянном поле разделяют на *несамостоятельные* и *самостоятельные*. Дело в том, что при нормальных условиях газы состоят в основном только из электрически нейтральных атомов и молекул и, по сути, являются диэлектриками, то есть изоляторами, поэтому через них не может проходить сколько-нибудь заметный электрический ток. Проводниками могут быть только хоть в какой-то мере ионизованные газы, то есть газы, содержащие свободные заряды — носители тока. В газах это — положительные и отрицательные ионы и электроны. Ионы в газах могут возникать в результате действия различных ионизаторов, например, ультрафиолетового излучения или рентгеновских лучей, космического излучения, лучей радиоактивных загрязнений, столкновений атомов газа с электронами и другими частицами, энергия которых превышает потенциал ионизации атомов газа.

Предположим, что ионы в газовом проводнике создаются исключительно внешним ионизатором. Тогда при прекращении действия этого ионизатора ток и, следовательно, разряд прекращаются. Такой разряд называется *несамостоятельным*.

Типичная кривая, отображающая связь между током через газовый промежуток и напряжением на нём — так называемая *вольт-амперная характеристика* (ВАХ) — для самостоятельного разряда показана на рис. 5.3. С повышением напряжения на газовом промежутке ток сначала возрастает (кривая ОА), а потом достигает насыщения и остаётся практически постоянным (участок АВ), что соответствует полному вытягиванию на электроды зарядов, создаваемых внешним ионизатором.

При дальнейшем повышении напряжения ток снова начинает возрастать (участок ВВ). Это значит, что имеющиеся ионы, и прежде всего электроны, за период между двумя последовательными столкновения-

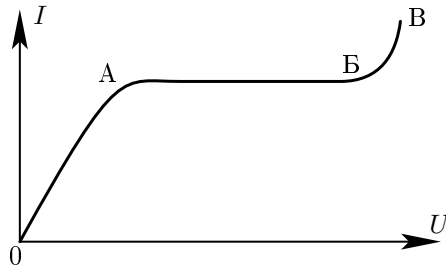


Рис. 5.3. Вольт-амперная характеристика несамостоятельного газового разряда

ми набирают такую энергию, что возникнет столкновительная ионизация, то есть рождение новых, *вторичных ионов*. При этом возникают и развиваются электронные лавины. Итак, мы будем иметь дело с *размножением*, или усилением, часто называемым *газовым усилением*. При каком значении поля наступит размножение, зависит от давления газа и энергии, необходимой для ионизации данной молекулы (потенциала ионизации). В результате усиления концентрация ионов возрастает до величины, которая линейно или даже более сильно зависит от первичной ионизации. При этом разряд остаётся несамостоятельным.

Однако в достаточно сильном электрическом поле проводимость газа может возрасти скачком — возникает *пробой*. Соответствующее напряжение на газовом промежутке называется *напряжением пробоя*, или *напряжением зажигания*. Если после возникновения пробоя убрать внешний ионизатор, то разряд не прекращается. Разряд перешёл в *режим самостоятельного разряда*: теперь ионизация поддерживается процессами в самом разряде.

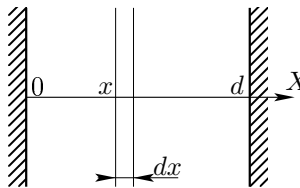


Рис. 5.4. К выводу критерия Таунсенда

Как уже было сказано, первая модель перехода несамостоятельного разряда в самостоятельный была предложена Таунсендом. Следуя Таунсенду, введём коэффициент объёмной ионизации α , численно равный количеству электронно-ионных пар, образуемых одним электроном на единице длины пути. По смыслу ясно, что этот коэффициент зависит от давления (возрастает с увеличением числа соударений, то есть с давлением) и от напряжённости электрического поля E (возрастает с полем).

Рассмотрим, как происходит ионизация в газовом промежутке между плоскими электродами — катодом и анодом (рис. 5.4). На рассто-

янии x от катода в слое толщины dx один электрон создаёт αdx пар ионов. Если со стороны катода в этот слой втекает электронный ток I_e , то в слое он возрастёт на величину $dI_e = I_e \alpha dx$. Интегрирование этого уравнения в предположении, что α не зависит от x (то есть поле не зависит от x , что верно только при малых токах, когда нет объёмных зарядов), даёт

$$I_e(x) = I_e(0)e^{\alpha x},$$

где $I_e(0)$ — электронный ток, втекающий с катода в газовый промежуток. Можно видеть, что на аноде, то есть при $x = d$, он возрастает в $e^{\alpha d}$ раз. Например, при $\alpha = 3 \text{ см}^{-1}$ и $d = 3 \text{ см}$ ток возрастёт приблизительно на 4 порядка. Это и есть режим газового усиления, то есть размножения электронно-ионных пар вследствие развития электронных лавин. Однако при этом разряд ещё не обязательно переходит в режим самостоятельного. Например, если ток $I_e(0)$ создаётся только внешним ионизатором, то при его выключении прекращается и ток через промежуток. Чтобы разряд не прекращался, нужно, чтобы ток $I_e(0)$ поддерживался самим разрядом, то есть чтобы образовалась положительная обратная связь. Такая связь может установиться только через поток частиц, движущихся из разряда в обратном направлении, к катоду. В модели Таунсенда это — положительные ионы и фотоны. Далее будем учитывать только положительные ионы.

Полный ток через любое поперечное сечение разряда $x = \text{const}$ один и тот же и складывается из тока, переносимого электронами, и тока, переносимого движущимися навстречу им положительными ионами. Следовательно, полный ток на аноде равен чисто электронному току $I_e(d)$, а ионный ток на катоде $I_i(0)$ равен

$$I_i(0) = I_e(d) - I_e(0) = I_e(0)(e^{\alpha d} - 1).$$

Пусть теперь каждый пришедший на катод ион выбивает из катода в среднем γ вторичных электронов (γ — коэффициент вторичной ионно-электронной эмиссии, $\gamma = 10^{-1} - 10^{-3}$). Тогда из катода пойдёт ток этих вторичных электронов I_2 :

$$I_2 = \gamma I_i(0) = \gamma I_e(0)(e^{\alpha d} - 1),$$

а полный электронный ток из катода будет складываться из тока I_1 , образуемого внешним ионизатором, и тока вторичных электронов I_2 :

$$I_e(0) = I_1 + I_2 = I_1 + \gamma I_e(0)(e^{\alpha d} - 1),$$

так что

$$I_e(0) = \frac{I_1}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}.$$

Таким образом, полный ток через газовый промежуток I_i , равный электронному току через анод, будет равен

$$I_i = I_e(d) = I_e(0)e^{\alpha d} = \frac{I_1 e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}.$$

С повышением напряжения на газовом промежутке, то есть с ростом электрического поля, растут коэффициенты α и γ , и ток возрастает. Разряд тем не менее остаётся несамостоятельным, так как при выключении внешнего ионизатора ($I_1 = 0$) ток обращается в нуль. Однако при достижении некоторого значения поля знаменатель этого выражения обратится в нуль, а ток — в бесконечность при любом сколь угодно малом значении I_1 , так что внешний ионизатор можно вообще убрать. Это и есть переход от несамостоятельного разряда к самостоятельному, или наступление пробоя, а его условие — критерий Таунсенда, следовательно, имеет вид

$$\gamma(e^{\alpha d} - 1) = 1.$$

Величина

$$\mu \equiv \gamma(e^{\alpha d} - 1)$$

называется коэффициентом воспроизводства, поскольку она показывает, сколько электронов воспроизводится на катоде в результате прохождения через разряд одного электрона, вышедшего с катода.

Зная функции $\gamma(E)$ и $\alpha(E)$, из этого условия можно определить пробивающее поле, пробивное напряжение или, в случае разряда, потенциал зажигания U_z . Эта теория хорошо подтверждает экспериментально установленный закон Пашена, согласно которому потенциал зажигания зависит только от произведения давления на длину разрядного промежутка, причём эта зависимость имеет минимум (рис. 5.5). Таким образом, для заданного давления имеется такая длина разрядного промежутка, при которой потенциал зажигания и соответствующее ему поле минимальны. Напомним, что в модели Таунсенда поле в промежутке однородно и не искажается объёмными зарядами, что верно только для разряда с очень маленьким током. Такой самостоятельный разряд известен как **тёмный таунсендовский разряд**. Описанный процесс пробоя также называют таунсендовским. В газах высокого давления (больше атмосферного) и при больших длинах промежутков реализуется другой механизм пробоя — **стримерный**, или **искровой**, а возникающий в результате такого пробоя нестационарный разряд известен как **искровой**. Примером такого разряда является молния.

В широком смысле термин **электрический пробой** означает превращение изолятора в проводник в результате приложения к нему достаточно

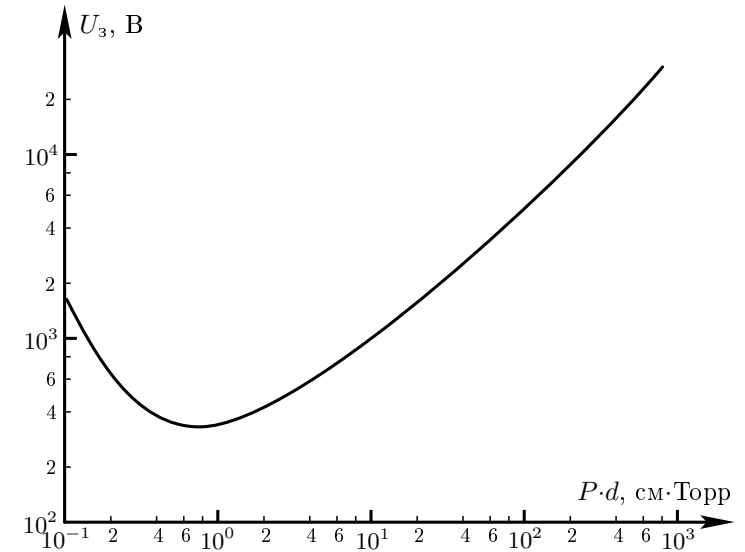


Рис. 5.5. Зависимость потенциала зажигания U_z от произведения давления P на длину d разрядного промежутка (кривая Пашена) для воздуха

сильного поля. Для газа это означает переход в ионизованное состояние. При этом возрастание тока приводит к ещё большему возрастанию концентрации ионов, что приводит к возрастанию проводимости и, следовательно, к понижению напряжения, необходимого для поддержания такого тока. Если ввести понятие **дифференциальное сопротивление** как производную по току от напряжения, то в этом случае возникает новое явление — **отрицательное дифференциальное сопротивление**. Напомним, что для проводников, подчиняющихся закону Ома, например металлов, дифференциальное сопротивление просто равно обычному сопротивлению и всегда положительно.

Будем и далее характеризовать электрические свойства газового промежутка, заключённого между двумя помещёнными в газ электродами, вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Так принято делать всегда в случае нелинейной зависимости тока через проводящий элемент от приложенного напряжения.

Экспериментально ВАХ газового проводника — например, промежутка между двумя электродами, помещёнными в стеклянную трубку, заполненную газом, — снимают с помощью схемы, представленной на рис. 5.6. Цепь содержит источник постоянного напряжения \mathcal{E} , величина

ну которого можно изменять в пределах примерно от 100 В до нескольких кВ, и переменное сопротивление R , называемое балластным, или нагрузочным. Это сопротивление необходимо для ограничения тока в цепи и стабилизации разряда на участках с отрицательным дифференциальным сопротивлением. Дело в том, что на этих участках разряд неустойчив и ток имеет тенденцию неограниченно нарастать. Можно показать, что для устойчивости разряда сумма отрицательного и положительного сопротивлений такой цепи должна быть положительной, то есть в точке пересечения с ВАХ нагрузочная прямая должна иметь больший наклон, чем участок кривой ВАХ (рис. 5.7).

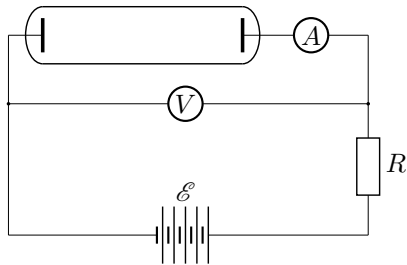


Рис. 5.6. Схема для снятия ВАХ газового промежутка

Цепь содержит также токоизмерительный прибор A и вольтметр V , измеряющий напряжение U между электродами.

С помощью схемы рис. 5.6 можно получить любой возможный режим протекания тока через исследуемый газовый проводник. Действительно, на плоскости (U, I) такой режим определяется точкой пересечения ВАХ, то есть кривой $U(I)$, с нагрузочной прямой $U = \mathcal{E} - RI$. Меняя \mathcal{E} и R , можно получить любую точку

ВАХ. При этом устойчивость тока на участке ВАХ с отрицательным наклоном можно обеспечить выбором достаточно большого сопротивления R .

Вид ВАХ для конкретного газового проводника зависит от ряда условий, прежде всего от давления газа. На рис. 5.7 представлена полученная экспериментально с помощью схемы рис. 5.6 ВАХ разряда в неоне при давлении 1,3 мбар между плоскими медными электродами площади 10 см^2 , расположенными на расстоянии 50 см, а также типичная нагрузочная прямая. Поскольку здесь нет специального внешнего ионизатора (внешняя ионизация создаётся только естественным радиоактивным излучением и космическими лучами), начальный участок характеристики самостоятельного разряда (участок OA на рис. 5.3) соответствует столь малым токам, что на графике его не удастся изобразить. Характеристика начинается сразу с участка AB , соответствующего току насыщения (участок AB на рис. 5.3) и режиму газового усиления. В точке B происходит пробой и начинается самостоятельный разряд, который на всём горизонтальном участке характеристики $BГ$ соответствует тёмному таунсендовскому разряду.

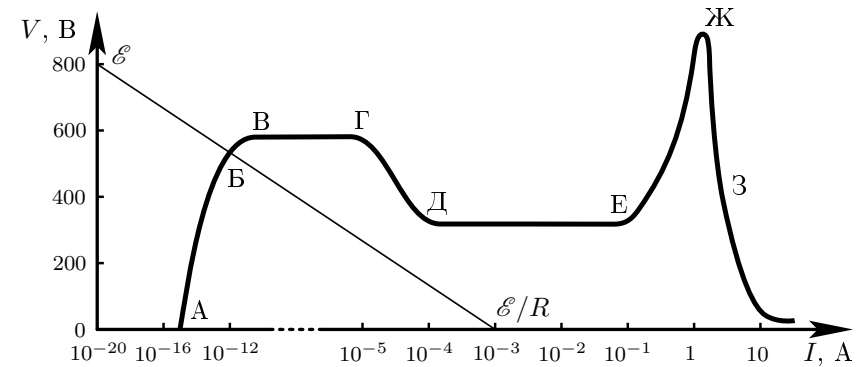


Рис. 5.7. ВАХ разряда в неоне при давлении 1,3 мбар и нагрузочная прямая

Участок характеристики ГДЕЖ соответствует тлеющему разряду, причём его падающая часть ГД называется поднормальным тлеющим разрядом, горизонтальная часть ДЕ — нормальным тлеющим разрядом и остальная часть ЕЖ — аномальным тлеющим разрядом. Далее идёт падающий участок ЖЗ, который можно получить при маленьких сопротивлениях и сильноточных источниках напряжения. Он соответствует переходу к дуговому разряду. Заметим, что при больших давлениях газа (атмосферном и больше) после пробоя сразу устанавливается дуговой разряд.

Как уже говорилось выше, отличительной характеристикой таунсендовского разряда является однородность поля по длине промежутка, что обусловлено малостью тока и отсутствием объёмных зарядов. Однако при большом токе разряда поле перераспределяется после пробоя и почти полностью сосредотачивается у катода. Это обусловлено образованием у катода положительного объёмного заряда за счёт ионного тока (электронный ток у катода мал по сравнению с ионным). Кроме того, остальная часть газового промежутка переходит в состояние с высокой электропроводностью — образуется так называемый положительный столб, замыкающий электрическую цепь. Таким образом, почти всё приложенное поле сосредоточено у катода на участке, занятом объёмным зарядом. Следовательно, на этом участке, называемом катодным слоем, падает почти всё приложенное к электродам напряжение — так называемое катодное падение потенциала. Оно примерно равно минимальному напряжению пробоя для промежутка, длина которого равна толщине катодного слоя. Тем самым реализуются условия для самоподдержания разряда (критерий Таунсенда) при гораздо меньших напряжениях, чем при однородном поле на всей длине газового

промежутка. Этот разряд, отличающийся от таунсендовского не только значительно большим током, но и главным образом существенной неоднородностью приложенного поля — наличием катодного падения потенциала — и называется тлеющим разрядом. Именно этим разрядом мы будем заниматься далее.

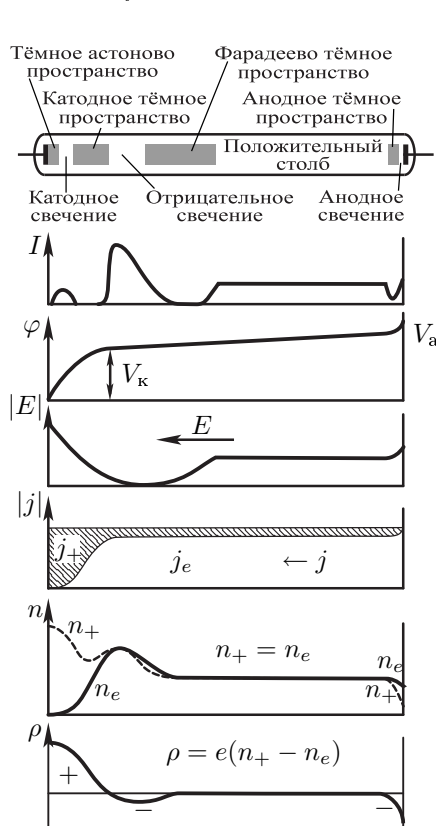


Рис. 5.8. Структура тлеющего разряда и распределение по длине основных характеризующих его величин

ево пространство. За ним начинается светящийся положительный столб, заканчивающийся у анода темным анодным пространством, переходящим на аноде в узкий слой анодного свечения.

Как правило, самой яркой бывает область отрицательного свечения, имеющего для воздуха голубоватый цвет, за что разряд и получил своё название — тлеющий.

На рис. 5.8 представлена качественная картина тлеющего разряда в длинной стеклянной трубке, а также приведены зависимости основных величин, характеризующих разряд, от продольной координаты. Это интенсивность свечения, потенциал и напряжённость электрического поля, электронный и ионный токи, электронная и ионная плотности и полная плотность объёмного заряда.

Видно, что разряд состоит из ряда чередующихся светлых и тёмных поперечных полос. Поскольку все процессы в разряде связаны со столкновениями электронов с атомами газа, расстояния от катода до этих полос определяются числом укладываемых на них длин пробега электронов. Поэтому характерные размеры полос увеличиваются с уменьшением давления. Непосредственно к катоду прилегает узкое астоново пространство, затем идёт слой катодного свечения, а затем — тёмное катодное пространство. Далее следует область отрицательного свечения, переходящая в тёмное фарадеево пространство.

Качественно распределение свечения по длине разряда объясняется следующим образом.

Электроны, выбиваемые из катода приходящими на него ионами, имеют энергию, недостаточную для возбуждения атомов. Поэтому слой у катода — тёмный (астоново пространство). Далее электроны набирают достаточную для этого энергию, и возникает первый светящийся слой, катодное свечение. Затем энергия электронов становится настолько большой, что они в основном ионизуют, а не возбуждают атомы. Так образуется тёмное катодное пространство, в котором происходит основное размножение электронов и ионов. Рождающиеся ионы движутся к катоду, создавая большой положительный объёмный заряд. В конце тёмного катодного пространства поля уже почти нет, оно перехвачено объёмным зарядом, зато образовалось очень много движущихся к аноду сравнительно медленных электронов, которые снова возбуждают атомы. Так начинается область отрицательного свечения. Далее электроны растрачивают свою энергию (поле слабое) и возбуждение прекращается, а свечение переходит в тёмное фарадеево пространство.

В фарадеевом пространстве поле медленно нарастает до своего значения в положительном столбе, который можно рассматривать просто как участок омического проводника с электронной проводимостью. Поскольку здесь непрерывно происходят столкновения электронов с атомами, происходит их возбуждение, и положительный столб испускает свечение. У анода ионов нет, электроны образуют отрицательный объёмный заряд, создаётся небольшое анодное падение потенциала, в котором электроны набирают энергию и вызывают анодное свечение.

Все зависимости, показанные на рис. 5.8, подтверждают приведённое объяснение. Самым важным здесь является наличие зоны положительного объёмного заряда и области сильного электрического поля у катода. Это и есть катодный слой, он простирается от катода до начала области отрицательного свечения. Как уже говорилось выше, катодный слой — самая важная часть тлеющего разряда, без него разряд существовать не может. Толщина катодного слоя и величина катодного падения потенциала автоматически устанавливаются таким образом, чтобы выполнялись критерии самоподдержания разряда при минимуме затрат энергии: это — минимальное для такого размера напряжение, примерно равное минимальному напряжению зажигания по кривой Пашена. Это означает, что на создание одной электронно-ионной пары затрачивается минимальная энергия (равная так называемой константе Столетова).

Особым свойством самоорганизации обладает нормальный тлеющий разряд, то есть разряд, напряжение на котором при возрастании тока

практически не меняется (горизонтальный участок ВАХ на рис. 5.7). В нём ток может возрасти только за счёт возрастания площади катодного пятна, а плотность тока остаётся неизменной. Качественно это можно объяснить тем, что поскольку напряжение на катодном слое и его толщина задаются условием минимума на кривой Пашена, они почти не меняются при заданном давлении газа. Следовательно, должна оставаться постоянной и плотность тока.

При полном заполнении катода дальнейшее увеличение тока будет возможно только за счёт повышения интенсивности ионизации газа, что возможно только при повышении напряжения. Разряд при этом переходит в режим аномального тлеющего разряда (участок ЕЖ на ВАХ). В аномальном разряде плотность тока выше, чем в нормальном.

Как это можно видеть на нижней кривой рис. 5.8, описывающей распределение объёмного заряда, между катодным слоем и анодом образуется длинная (если трубка длинная) электронейтральная область, большая часть которой называется положительным столбом. На рис. 5.8 также видно, что в положительном столбе плотность электронов равна плотности ионов, ток в основном переносится электронами, а вызывающее ток электрическое поле однородно по длине, как это имеет место в обычном омическом проводнике. В соответствии со сказанным выше, такое состояние газа называется *плазмой*. Положительный столб тлеющего газового разряда представляет собой пример *низкотемпературной слабоионизированной неравновесной плазмы*, поддерживаемой электрическим полем.

Состояние плазмы в положительном столбе совершенно не зависит от процессов в приэлектродных областях, а определяется только процессами внутри него. Рождение и гибель электронов проходят на фоне их дрейфового движения от катода к аноду. Потери электронов в столбе (за счёт диффузии к стенкам трубки, а также рекомбинации в объёме) должны компенсироваться ионизацией. И всё-таки большая часть электронов, достигающих анода, поступает в столб извне (из катодного слоя), как это происходит при токе через обычный проводник.

В нормальном тлеющем разряде в случае, когда потери электронов обусловлены диффузией, ВАХ положительного столба может быть падающей. В этом случае падающей будет и ВАХ всего разряда, что подтверждает эксперимент: при увеличении тока напряжение на разрядном промежутке не остаётся постоянным, как это должно быть для нормального тлеющего разряда, а уменьшается.

Это объясняется нагревом газа. В центральной области газ нагревается сильнее, его концентрация понижается, длина пробега электронов возрастает и они получают возможность набирать энергию, необходи-

мую для ионизации, при меньшем поле, чем до нагрева. Следовательно, напряжение, необходимое для поддержания такого тока, понижается.

Случайные локальные перегревы, а также другие процессы, приводящие к появлению отрицательного дифференциального сопротивления, могут быть причиной развития различных *неустойчивостей*. Механизм, типа описанного выше, может вызвать стягивание разряда в токовый шнур (*контракция*). Этим объясняется переход аномального разряда в дуговой: катодное пятно уменьшается настолько, что катод в этом месте накаляется и начинается термоэмиссия. Другие неустойчивости ведут к образованию в положительном столбе поперечных слоёв, или *страт*, которые, как правило, движутся в продольном направлении.

4. Высокочастотный нагрев плазмы

Ионизацию в плазме можно создать и с помощью высокочастотного электромагнитного поля. Существуют различные способы введения высокочастотного поля в разрядный объём. Один из них основан на электромагнитной индукции: через катушку-соленоид, в которую вставлена диэлектрическая (например, стеклянная) газоразрядная камера, пропускается ток высокой частоты, и внутри катушки индуцируется вихревое электрическое поле. Силовые линии этого поля, а вместе с ними и линии тока в газоразрядной камере образуют замкнутые круговые линии. Такой разряд называется *кольцевым*, *индукционным* или *разрядом Н-типа*, что указывает на определяющую роль магнитного поля.

Другой способ возбуждения заключается в том, что высокочастотное напряжение подаётся на электроды, которые могут непосредственно соприкасаться с разрядной плазмой или быть изолированы от неё диэлектриками (стенками разрядной камеры). Система двух электродов ведёт себя по отношению к переменному напряжению как конденсатор, поэтому такие разряды называются *ёмкостными* или *разрядами Е-типа*.

Высокочастотные разряды успешно используются в технике. Индукционные разряды применяются в безэлектродных генераторах плотной низкотемпературной плазмы (в *плазмотронах*), применяемых, например, для плазмохимического производства чистых веществ. Разряды ёмкостного типа применяются в мощных газоразрядных лазерах.

Исследуем электрический пробой в высокочастотном поле. Начнём с исследования движения электрона при низком давлении газа, когда столкновения с молекулами происходят редко. Движение электрона в однородном переменном электрическом поле описывается уравнением

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_0 \sin \omega t,$$

где E_0 — амплитуда электрического поля. Интегрируя это уравнение, получим

$$v = v_0 + \frac{eE_0}{\omega m_e} \cos \omega t,$$

где v_0 — скорость электрона в момент $t = 0$.

Мы видим, что скорость электрона периодически увеличивается и уменьшается, но в среднем энергии от поля электрон не получает. Так обстоит дело, пока вакуум достаточно высок. При увеличении давления всё чаще происходят соударения электронов с молекулами газа, однако медленные электроны не могут ионизировать молекулы и соударяются с ними упруго.

Чтобы понять, как возникает пробой, исследуем, что происходит при упругом соударении электрона с молекулами газа. Как уже отмечалось, при таких соударениях электрон почти не теряет кинетической энергии, однако направление его скорости претерпевает существенные изменения и может вновь совпасть с изменившимся направлением электрического поля. В этом случае электрон при дальнейшем движении не возвращает полю энергию, а вновь её получает. Часть электронов может поэтому заметно ускоряться высокочастотным полем. Увеличение энергии электрона продолжается до тех пор, пока она не станет достаточной для ионизации газа. Затем процесс повторяется: при упругих столкновениях с молекулами газа часть электронов в электрическом поле ускоряется, вследствие чего происходят новые акты ионизации. Таким образом, в газе накапливаются электроны и ионы. По мере увеличения их концентрации возрастает роль процессов рекомбинации. В результате действия этих двух факторов — ионизации и рекомбинации — устанавливается стационарная плазма. Её концентрация и температура зависят от сорта газа, его давления, а также от частоты и амплитуды высокочастотного поля.

5. Электропроводность плазмы

Приложим к плазме электрическое поле с напряжённостью \mathbf{E} . Под его действием приходят в движение как электроны, так и ионы. Действующие на них силы мало отличаются друг от друга, а массы различаются очень сильно. Основными носителями тока являются поэтому электроны. Свободно двигаясь на пути свободного пробега, электроны

приобретают направленную (дрейфовую) скорость. После очередного соударения скорость электрона может иметь самые разные направления, так что среднее значение этой скорости в начале пробега близко к нулю. В конце пробега оно равно

$$\mathbf{v}_{\text{кон}} = -\frac{e\lambda}{m_e \langle v_e \rangle} \mathbf{E},$$

где λ — длина свободного пробега, а $\langle v_e \rangle$ — тепловая скорость электрона, по сравнению с которой дрейфовая скорость обычно мала. Среднее значение дрейфовой скорости равно поэтому половине $v_{\text{кон}}$:

$$v_{\text{др}} = \frac{e\lambda E}{2m_e \langle v_e \rangle}. \quad (5.19)$$

Средняя тепловая скорость $\langle v_e \rangle$ определяется из обычной формулы:

$$\langle v_e \rangle = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}. \quad (5.20)$$

Объединяя эти формулы, найдём

$$\mathbf{v}_{\text{др}} = -b\mathbf{E}, \quad (5.21)$$

где подвижность электронов b равна

$$b = \frac{e\lambda}{2\sqrt{8m_e kT_e/\pi}}. \quad (5.22)$$

Электропроводность плазмы σ определяется совместным дрейфовым движением всех электронов, так что

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{n_e e v_{\text{др}}}{E} = n_e b = \frac{e^2 \lambda n_e}{2\sqrt{8m_e kT_e/\pi}}. \quad (5.23)$$

Полученная формула показывает, что электропроводность плазмы пропорциональна концентрации электронов и уменьшается с ростом температуры плазмы. Длина свободного пробега λ в слабоионизированной плазме определяется не столько плотностью электронов n_e , сколько плотностью газа.

6. Одиночный зонд

Распределение электрического потенциала в плазме обычно изучают с помощью зондов — небольших проводников, вводимых в плазму.

Как уже говорилось выше, метод зондов был разработан Ленгмюром в начале двадцатых годов XX века.

Рассмотрим явления, происходящие при внесении в плазму уединённого проводника — зонда. Пусть электрический потенциал зонда вначале равен потенциалу той точки плазмы, в которую будет помещён зонд. Поступающие на зонд токи электронов и ионов в этом случае равны

$$I_{e0} = \frac{n \langle v_e \rangle}{4} eS, \quad (5.24)$$

$$I_{i0} = \frac{n \langle v_i \rangle}{4} eS, \quad (5.25)$$

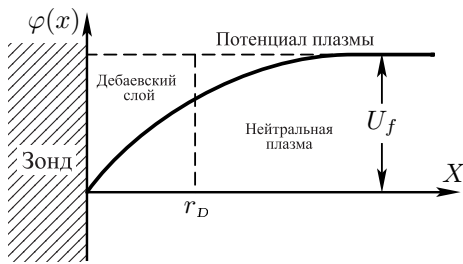


Рис. 5.9. Распределение потенциала в окрестности зонда

где $\langle v_e \rangle$ и $\langle v_i \rangle$ — средние скорости электронов и ионов, S — площадь зонда, n — плотность электронов и ионов (которые в силу квазинейтральности плазмы равны или почти равны друг другу). Множитель $\frac{1}{4}n \langle v \rangle$, согласно кинетической теории, определяет число ударов в секунду о единицу поверхности. Так как скорости электронов существенно превосходят скорости ионов, то $I_{e0} \gg I_{i0}$, так что

зонд заряжается до некоторого отрицательного равновесного или, как обычно говорят, *плавающего* потенциала $-U_f$. При плавающем потенциале количество попадающих на зонд ионов и электронов уравнивается, так как до него могут доходить лишь наиболее быстрые электроны и практически все ионы. Зонд, таким образом, приобретает отрицательный заряд. Вокруг него образуется область положительного пространственного заряда (её ширина по порядку величины равна дебаевскому радиусу), экранирующего плазму от зонда (рис. 5.9).

При установлении равновесия ионный ток мало меняется и в первом приближении по-прежнему определяется формулой (5.25)¹, а выражение для электронного тока приобретает вид

$$I_e = I_0 \exp\left(-\frac{eU_f}{kT_e}\right), \quad (5.26)$$

¹ Как мы увидим ниже, эта формула при $U \approx -U_f$ на самом деле нуждается в поправках.

которое для плоских электродов следует из распределения Больцмана.

Возникновение «дебаевского слоя» вокруг зонда вносит некоторую неопределённость в величину S : становится неясно, какая площадь должна подставляться в формулы — площадь зонда или площадь поверхности этого слоя. При больших зондах указанное различие несущественно, а при малых может оказаться важным.

Оценим величину плавающего потенциала. При равновесии электронный и ионный токи равны друг другу:

$$\frac{1}{4}n \langle v_i \rangle eS = \frac{1}{4}n \langle v_e \rangle eS \cdot \exp\left(-\frac{eU_f}{kT_e}\right),$$

откуда

$$eU_f = kT_e \ln \frac{\langle v_e \rangle}{\langle v_i \rangle} = \frac{1}{2}kT_e \ln \frac{T_e m_i}{T_i m_e}. \quad (5.27)$$

В газовом разряде $kT_e \approx 1$ эВ, а $kT_i \approx \frac{1}{40}$ эВ (комнатная температура). Положим для оценки $m_i = 10^4 m_e$. Тогда

$$eU_f \approx 6,5 \text{ эВ}. \quad (5.28)$$

Формулу (5.27) нельзя считать надёжной. При её выводе было сделано плохо оправданное предположение, что движение ионов близко к тепловому. Это справедливо вдали от дебаевского слоя, но не около него и тем более не в нём, так как при приближении к зонду дрейфовая скорость ионов быстро начинает превышать тепловую. Формула для величины ионного тока при этом должна быть изменена. Тем не менее для грубых оценок она может быть использована.

Рис. 5.9 иллюстрирует картину распределения потенциала вокруг зонда.

7. Исследование плазмы с помощью одиночных зондов

При исследовании плазмы с помощью зондов на них подаются напряжения и исследуются вольт-амперные характеристики (ВАХ). Схема опытов изображена на рис. 5.10, на котором изображены два погружённых в плазму электрода и источник ЭДС, создающий между ними регулируемую разность потенциалов. Пусть контактирующая с плазмой поверхность одного электрода существенно меньше, чем у другого. Электрод с малой поверхностью будем называть зондом, а электрод с большой поверхностью — опорным электродом. Рассмотрим, как зависит ток I_z в цепи зонда от потенциала зонда U_z относительно опорного электрода.

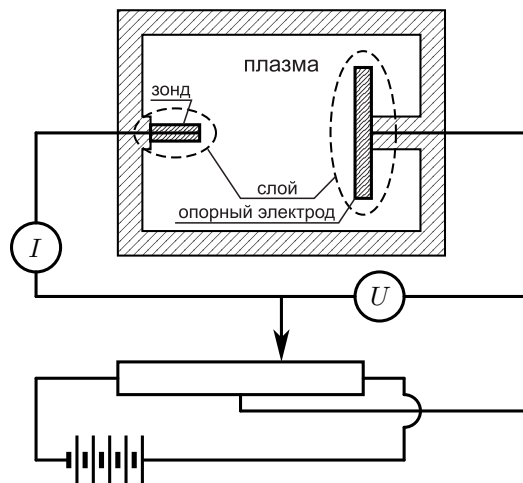


Рис. 5.10. К исследованию плазмы с помощью одиночного зонда

Рассмотрим вначале случай, когда плазма эквипотенциальна. Пусть движок потенциометра (рис. 5.10) установлен так, что зонд и опорный электрод соединены накоротко. Ясно, что в этом случае они представляют собой один электрод сложной формы, внесённый в плазму. Зарядившись отрицательно, они принимают относительно плазмы потенциал, равный плавающему потенциалу, т. е. $-U_f$. Полный ток на каждый электрод равен нулю, значит, электронный ток равен ионному.

Если плазма не эквипотенциальна, то ток зонда обращается в нуль лишь в том случае, если потенциалы зонда и опорного электрода смещены на величину U_f относительно потенциалов соответствующих участков плазмы. Необходимая для этого разность потенциалов между зондом и опорным электродом равна разности потенциалов между соответствующими участками плазмы. Измеряя потенциал зонда относительно опорного электрода (при нулевом токе), можно исследовать распределение потенциала в плазме.

Сведения о температуре и плотности зарядов в плазме получают, снимая вольт-амперную характеристику зонда. Начнём перемещать движок потенциометра (рис. 5.10), т. е. подавать на зонд некоторый потенциал. Через плазму и по внешней цепи начинает проходить ток, так как баланс между электронным и ионным током нарушается. При этом токи, проходящие через зонд и опорный электрод, конечно, равны друг другу, а плотности тока различны, так как площади электро-

дов существенно различаются. Плотность тока, идущего через опорный электрод, из-за большой площади последнего всегда очень мала, и, следовательно, его потенциал относительно плазмы практически всегда равен $-U_f$. При небольшом размере зонда наибольшая плотность тока возникает около него, так что практически всё падение напряжения приходится на дебаевский слой, окружающий зонд.

Зависимость зондового тока I_z от величины U_z имеет вид, показанный на рис. 5.11 (мы снова рассматриваем эквипотенциальную плазму). Эта кривая носит название зондовой характеристики. При $U_z < 0$ весь ионный ток, приходящий на границу дебаевского слоя, достигает зонда. Ионный ток равен, следовательно, своему максимальному значению, или, как говорят, ионному току насыщения $I_{ин}$. При увеличении (по абсолютной величине) потенциала зонда электронный ток уменьшается и, наконец, прекращается. Весь ток зонда является в этом случае ионным током. На первый взгляд, величина тока при этом не должна зависеть от потенциала зонда. На самом деле это не так, поскольку при изменении потенциала изменяется площадь поверхности дебаевского слоя и изменяются скорости ионов, которые быстро увеличиваются при перемещении из плазмы к электроду — от тепловых значений до значений, определяемых величиной потенциала. Поэтому с увеличением потенциала зонда (при смещении движка потенциометра влево на рис. 5.10) ток зонда возрастает, хотя и не очень сильно.

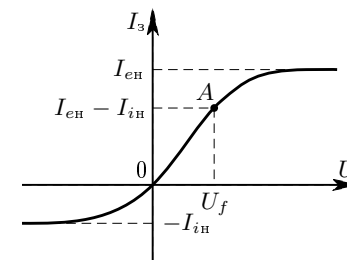


Рис. 5.11. Вольт-амперная характеристика одиночного зонда

На правой ветви характеристики (при $U_z > 0$) потенциал зонда превышает потенциал опорного электрода, но вначале (вплоть до точки A) остаётся ниже потенциала плазмы. При этом ионный ток на зонд не меняется (вернее, слабо меняется), а электронный ток возрастает. В точке A, т. е. при $U_z = U_f$, слой пространственного заряда (дебаевский слой) исчезает и оба тока — электронный и ионный — подходят к зонду беспрепятственно. При этом электронный ток, конечно, существенно превосходит ионный, поскольку плотности электронов и ионов близки друг к другу, а тепловые скорости существенно различаются.

При дальнейшем увеличении U_z ионный ток подавляется, а ток электронов не изменяется и остаётся равным тепловому (на самом деле, медленно возрастает по тем же причинам, по которым изменяется ионный ток насыщения).

Участок характеристики, расположенный влево от точки A , носит название **ионной** ветви (ионный ток равен току насыщения), а участок вправо от точки A называется **электронной** ветвью вольт-амперной характеристики (электронный ток равен току насыщения).

Оценим величину электронного и ионного тока насыщения. Электронный ток насыщения определяется формулами (5.24), (5.20):

$$I_{en} = \frac{1}{4} neS \langle v_e \rangle \approx \frac{1}{4} neS \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}. \quad (5.29)$$

Ионный ток насыщения по аналогичной формуле оценивать не следует, поскольку скорости ионов в окрестности зонда определяются не температурой плазмы, а разностью потенциалов между плазмой и зондом:

$$v_i \approx \sqrt{\frac{2eU}{m_i}}. \quad (5.30)$$

Опыт показывает, что вместо формулы (5.29) для вычисления этого тока лучше применять полуэмпирическую формулу, предложенную Бомом:

$$I_{in} = 0,4 neS \sqrt{\frac{2kT_e}{m_i}}. \quad (5.31)$$

Структуру этой формулы нетрудно понять, замечая, что, согласно (5.27), U_f пропорционально T_e . (Логарифмической зависимостью U_f от T_e и T_i при оценках следует пренебрегать.) Численный коэффициент в формуле (5.31) требует более подробных расчётов.

Вид выражения (5.31), в которое входят температура электронов и масса ионов, характерна для многих явлений в плазме. Внешние поля приводят к быстрому перемещению электронов и к существенно более медленному движению ионов. Значительное перемещение электронов относительно ионов, однако, невозможно, так как оно нарушило бы квазинейтральность плазмы. Движение плазмы определяется поэтому массой ионов. В то же время перемещение электронов существенно зависит как от приложенных полей, так и от электронной температуры. Процессы, которые определяются параметрами, одни из которых характерны для электронов (в нашем случае T_e), а другие — для ионов (в рассматриваемой формуле — m_i), обычно называются **амбиполярными**.

При измерениях с помощью одиночного зонда в качестве опорного электрода часто используется анод газоразрядной трубки. Мы уже отмечали, что падение напряжения в положительном столбе разряда невелико, поэтому разности потенциалов, возникающие между анодом

и зондом, также оказываются небольшими и легко доступны измерениям. Одиночные зонды используются для исследования распределения потенциала в плазме, для измерения электронной температуры и плотности электронов. Ещё лучше делать это с помощью двойных зондов.

8. Двойной зонд

Двойным зондом называется система, состоящая из двух одинаковых зондов, расположенных на небольшом расстоянии друг от друга. Между зондами создаётся разность потенциалов, которая по величине много меньше плавающего потенциала U_f . При этом оба зонда имеют относительно плазмы близкий к плавающему отрицательный потенциал, т. е. находятся на ионной ветви вольт-амперной характеристики.

При отсутствии разности потенциалов ток между зондами равен нулю. Рассчитаем величину тока, проходящего через двойной зонд вблизи точки $I = 0$. При небольших разностях потенциалов ионные токи на оба зонда равны ионному току насыщения и компенсируют друг друга. Величина результирующего тока целиком связана с различием в электронных токах. Пусть потенциал на первом зонде равен

$$U_1 = -U_f + \Delta U_1, \quad (5.32)$$

а на втором

$$U_2 = -U_f + \Delta U_2. \quad (5.33)$$

По предположению ΔU_1 и ΔU_2 меньше U_f . Напряжение U между зондами равно

$$U = U_2 - U_1 = \Delta U_2 - \Delta U_1. \quad (5.34)$$

Найдём ток, приходящий на первый электрод:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{in} + I_{e1} = I_{in} - \frac{1}{4} neS \langle v_e \rangle \cdot \exp \left[\frac{e(-U_f + \Delta U_1)}{kT_e} \right] = \\ &= I_{in} - \left\{ \frac{1}{4} neS \langle v_e \rangle \exp \left(-\frac{eU_f}{kT_e} \right) \right\} \exp \left(\frac{e\Delta U_1}{kT_e} \right). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что при $\Delta U_1 = 0$ (при $U_1 = U_f$) электронный и ионный ток компенсируют друг друга. Это означает, что заключённый в фигурные скобки множитель равен I_{in} . Имеем поэтому

$$I_1 = I_{in} \left[1 - \exp \left(\frac{e\Delta U_1}{kT_e} \right) \right]. \quad (5.35)$$

Аналогично

$$I_2 = I_{\text{ин}} \left[1 - \exp \left(\frac{e \Delta U_2}{k T_e} \right) \right]. \quad (5.36)$$

Заметим также, что зонды 1 и 2 соединены последовательно и через них проходит один и тот же ток I , но в разном направлении. Положим

$$I_1 = -I_2 = I. \quad (5.37)$$

Выразим ΔU_1 и ΔU_2 из (5.35) и (5.36) и заменим входящие в эти выражения I_1 и I_2 через I с помощью (5.37):

$$\Delta U_1 = \frac{k T_e}{e} \ln \left(1 - \frac{I}{I_{\text{ин}}} \right), \quad (5.38)$$

$$\Delta U_2 = \frac{k T_e}{e} \ln \left(1 + \frac{I}{I_{\text{ин}}} \right). \quad (5.39)$$

Вычитая второе равенство из первого, найдём

$$U = \Delta U_1 - \Delta U_2 = \frac{k T_e}{e} \ln \frac{1 - I/I_{\text{ин}}}{1 + I/I_{\text{ин}}}. \quad (5.40)$$

Разрешая это равенство относительно I , найдём

$$I = I_{\text{ин}} \operatorname{th} \frac{eU}{2kT_e}. \quad (5.41)$$

Эта формула может служить для определения температуры электронов по форме вольт-амперной характеристики двойного зонда.

Наблюдаемая на опыте зависимость тока от напряжения изображена на рис. 5.12. Эта кривая отличается от (5.41) наклоном асимптот в области больших $|U|$. Этот наклон уже обсуждался в конце пункта 7. Наклон асимптот в первом приближении является линейным. Поэтому вместо (5.41) лучше писать

$$I = I_{\text{ин}} \operatorname{th} \frac{eU}{2kT_e} + AU, \quad (5.42)$$

где A — некоторая константа, величина которой может быть найдена из опыта.

Графики типа рис. 5.12 проще всего обрабатывать следующим образом. Сначала находится $I_{\text{ин}}$ из пересечения асимптот с осью $U = 0$. Затем, по наклону асимптот, находится величина A . После этого из (5.42) нетрудно определить T_e . Дифференцируя эту формулу по U в точке $U = 0$ и принимая во внимание, что при малых аргументах $\operatorname{th} \alpha \approx \alpha$, а при малых наклонах кривой насыщения $A \rightarrow 0$, найдём

$$kT_e = \frac{1}{2} \frac{e I_{\text{ин}}}{\left. \frac{dI}{dU} \right|_{U=0}}. \quad (5.43)$$

Концентрацию плазмы n можно найти из формулы (5.31). Как это уже ясно из сказанного, двойные зонды удобно применять для измерения электронной температуры и концентрации электронов в плазме.

Контрольные вопросы

1. При каких условиях возникает газовый разряд? От каких параметров газа зависит потенциал зажигания газового разряда?
2. Пользуясь кривой Пашена (рис. 5.5), определите напряжённость электрического поля, при котором происходит пробой воздуха при атмосферном давлении.
3. Что такое дебаевский радиус экранирования?
4. Дайте определение понятия *плазма*.
5. Почему потенциал зонда, погружённого в плазму и отключённого от источника питания, оказывается отличным от потенциала окружающей плазмы?
6. Чем определяется величина зондового тока насыщения?
7. Чем определяется температура электронов и ионов в плазме?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. Гл. IX.
2. Арцимович Л.А. Что каждый физик должен знать о плазме. — М.: Атомиздат, 1976.
3. Райзер Ю.П. Физика газового разряда: Учебное пособие. — М.: Наука, 1987.
4. Кингсеп А.С. Элементы физики плазмы: Учебно-методическое пособие. — М.: МФТИ, 1985.
- 5* Физика и технология источников ионов / Под ред. Я. Брауна; пер. с англ. под ред. Е.С. Машковой. — М.: Мир, 1998.

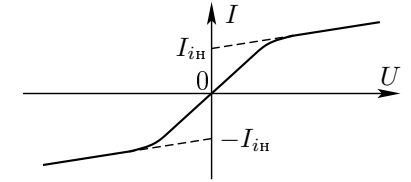


Рис. 5.12. Вольт-амперная характеристика двойного зонда

Работа 3.5.1

Изучение плазмы газового разряда в неоне

Цель работы: изучение вольт-амперной характеристики тлеющего разряда; изучение свойств плазмы методом зондовых характеристик.

В работе используются: стеклянная газоразрядная трубка, наполненная изотопом неона, высоковольтный источник питания, источник питания постоянного тока, делитель напряжения, резистор, потенциометр, амперметры, вольтметры, переключатели.

Экспериментальная установка. Схема установки для исследования плазмы газового разряда в неоне представлена на рис. 1. Стеклянная газоразрядная трубка имеет холодный (ненакаливаемый) полый катод, три анода и геттерный узел — стеклянный баллон, на внутреннюю поверхность которого напылена газопоглощающая плёнка (геттер). Трубка наполнена изотопом неона ^{22}Ne при давлении 2 мм рт. ст. Катод и один из анодов (I или II) с помощью переключателя Π_1 подключаются через балластный резистор R_6 (≈ 450 кОм) к регулируемому высоковольтному источнику питания (ВИП) с выходным напряжением до 3 кВ.

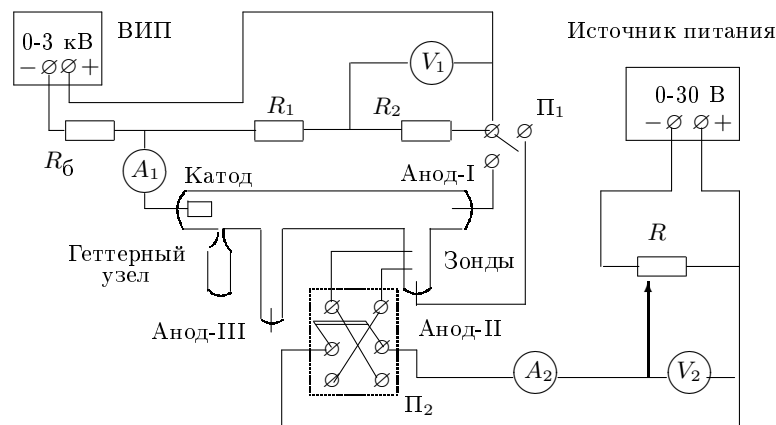


Рис. 1. Схема установки для исследования газового разряда

При подключении к ВИП анода-I между ним и катодом возникает газовый разряд. Ток разряда измеряется миллиамперметром A_1 , а падение напряжения на разрядной трубке — цифровым вольтметром V_1

(В7-38), подключённым к трубке через высокоомный (25 МОм) делитель напряжения с коэффициентом $(R_1 + R_2)/R_2 = 10$.

При подключении к ВИП анода-II разряд возникает в пространстве между катодом и анодом-II, где находится двойной зонд, используемый для диагностики плазмы положительного столба. Зонды изготовлены из молибденовой проволоки диаметром $d = 0,2$ мм и имеют длину $l = 5,2$ мм. Они подключены к источнику питания (0–30 В) через потенциометр R . Переключатель Π_2 позволяет изменять полярность напряжения на зондах. Величина напряжения на зондах изменяется с помощью дискретного переключателя «V» выходного напряжения источника питания и потенциометра R , а измеряется вольтметром V_2 . Для измерения зондового тока используется микроамперметр A_2 .

Анод-III в нашей работе не используется.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается снять вольт-амперную характеристику тлеющего разряда и зондовые характеристики при разных токах разряда и по результатам измерений рассчитать концентрацию и температуру электронов в плазме, степень ионизации, плазменную частоту и дебаевский радиус экранирования.

1. Снимите вольт-амперную характеристику разряда. Для этого: установите переключатель Π_1 в положение «Анод-I»; ручку регулировки выходного напряжения ВИП — на минимум; включите ВИП в сеть. Плавное увеличение выходного напряжения ВИП, определите напряжение зажигания разряда, затем снимите зависимость напряжения U_1 на разрядной трубке от протекающего через неё тока I_p . Ток разряда измените в диапазоне 0,5–5 мА.

2. Снимите зондовые характеристики. Для этого уменьшите напряжение ВИП до нуля, переведите переключатель Π_1 в положение «Анод-II» и плавно увеличивайте напряжение ВИП до возникновения разряда. Установите разрядный ток $I_p = 1$ мА. Включите источник питания постоянного тока Б5-47 и снимите вольт-амперную характеристику двойного зонда $I = f(U)$. Повторите измерения при другой полярности (переключатель Π_2).

Повторите измерения зондовых характеристик при токах разряда, равных 2, 3, 4 и 5 мА.

Обработка результатов

1. Постройте вольт-амперную характеристику разряда $U_1 = f(I_p)$.
2. Постройте семейство зондовых характеристик $I = f(U)$ на одном листе.

3. По зондовым характеристикам определите температуру T_e электронов по формуле (5.43): ток $I_{\text{ин}}$ найдите из пересечения асимптоты к току насыщения с осью $U = 0$ (см. рис. 5.12); $(dI/dU)|_{U=0}$ — наклон характеристики $I = f(U)$ в точке $U = 0$, $I = 0$; взяв ΔU в вольтах и приняв заряд электрона $e = 1$, рассчитайте энергию («температуру») электронов (kT_e) в электрон-вольтах.

4. Полагая концентрацию электронов n_e равной концентрации ионов n_i , определите её из формулы (5.31):

$$I_{\text{ин}} = 0,4n_e e S \sqrt{\frac{2kT_e}{m_i}}.$$

Здесь $S = \pi \cdot d \cdot l$ — площадь поверхности зонда; значения d и l приведены в описании экспериментальной установки; $m_i = 22 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}$ г — масса иона неона.

5. Постройте графики $T_e = f(I_p)$, $n_e = f(I_p)$.

6. Рассчитайте плазменную частоту колебаний электронов по формуле (5.16):

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}.$$

7. Рассчитайте дебаевский радиус r_D по формуле (5.18), которая в случае $T_e \gg T_i$ принимает в системе СИ вид

$$r_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T_i}{n e^2}},$$

полагая температуру ионов равной комнатной: $T_i \simeq 300$ К.

8. Оцените среднее число ионов в дебаевской сфере по формуле (5.12).

9. Оцените степень ионизации плазмы α (долю ионизованных атомов).

Работа 3.5.2

Индукционный газовый разряд

Цель работы: изучение свойств плазмы методом зондовых характеристик.

В работе используются: газоразрядная трубка с высокочастотным (ВЧ)-генератором, источник постоянного тока, генератор звуковой частоты (ЗГ), осциллограф, форвакуумный насос, вакуумметр, натекатель, вакуумный кран.

Газоразрядную плазму можно получить, используя электрические разряды в переменных высокочастотных (ВЧ) полях. Существуют различные способы введения ВЧ-поля в разрядный объём. Один из них основан на использовании электромагнитной индукции: через катушку-соленоид, в которую вставлена диэлектрическая газоразрядная камера, пропускается ток высокой частоты, и внутри катушки индуцируется вихревое электрическое поле. Силовые линии этого поля, а вместе с ними линии разрядного тока, представляют собой замкнутые окружности. Такой разряд называется кольцевым, индукционным или разрядом H -типа, что указывает на определяющую роль магнитного поля. Именно такой способ возбуждения газового разряда используется в нашей установке.

Экспериментальная установка. Схема установки представлена на рис. 1. Заполненная газом диэлектрическая камера представляет собой цилиндрическую стеклянную трубку диаметром 15 мм и длиной 100 мм, на одном из торцов которой впаяны две молибденовые проволоочки (зонды) диаметром $d = 0,5$ мм и длиной $l = 10$ мм, расположенные на расстоянии 5 мм друг от друга. Другой конец трубки не запаян. Он служит для откачки и для заполнения камеры газом. Трубка вставлена в катушку индуктивности колебательного контура ВЧ-генератора, работающего на частоте 10 МГц. Камера откачивается форвакуумным насосом и с помощью натекателя заполняется воздухом до давления $2 \cdot 10^{-1}$ – $2 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. Давление контролируется вакуумметром (термопарным манометром).

На зонды поступает синусоидальное напряжение от звукового генератора ЗГ. Это же напряжение через делитель (1:10) подаётся на вход X осциллографа. Напряжение, пропорциональное току, текущему через плазму, подаётся на вход Y с сопротивления 200 кОм. Две катушки, подключённые к зондам, не пропускают на осциллограф высокочастотный сигнал. На экране осциллографа наблюдается кривая,

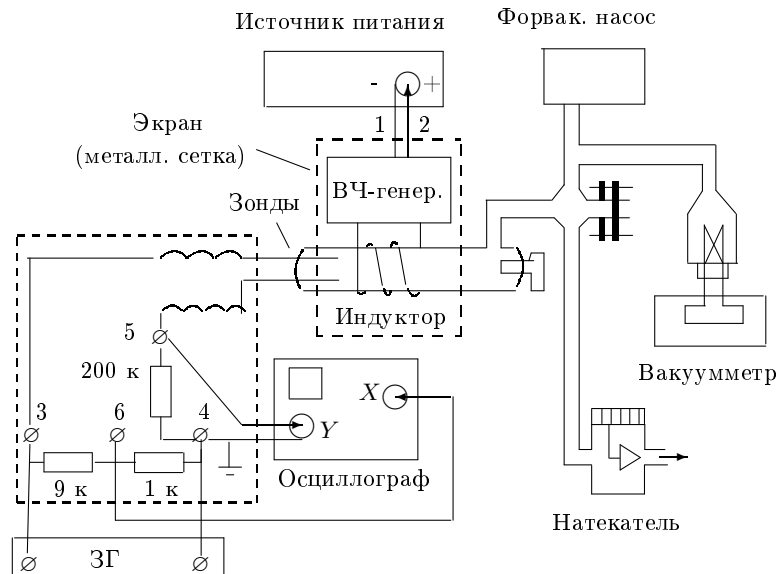


Рис. 1. Схема установки для исследования газового разряда

представляющая собой вольт-амперную характеристику двойного зонда (см. рис. 5.7). Следует отметить, что на некоторых частотах в измерительной цепи могут возникать фазовые сдвиги, и характеристика зондов приобретает вид петли. Такие частоты для измерений непригодны.

Для получения абсолютных значений тока и напряжения необходимо прокалибровать оси X и Y осциллографа по известному напряжению.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при различных давлениях газа в трубке получить зондовые вольт-амперные характеристики на экране осциллографа и рассчитать с их помощью температуру и концентрацию электронов в плазме, степень ионизации, плазменную частоту и дебаевский радиус экранирования.

I. Подготовка приборов к работе

1. Соберите схему для измерений согласно рис. 1.
2. Включите форвакуумный насос и вакуумметр. Откачайте трубку до давления $\sim 2 \cdot 10^{-1}$ мм рт. ст. Давление регулируется с помощью натекающего (микроvented) при постоянной откачке.

3. Включите источник питания ВЧ-генератора и проследите за разрядом в трубке: после зажигания разряд должен устойчиво гореть по всей трубке, включая область расположения зондов.

4. Включите осциллограф и звуковой генератор. Подайте на зонды переменное напряжение от звукового генератора (рабочее значение частоты около 20 Гц, напряжение ~ 20 В).

На экране осциллографа должна появиться кривая, похожая на теоретическую зависимость, изображённую на рис. 5.12.

Если на кривой не наблюдаются области насыщения, следует увеличить выходное напряжение ЗГ. Если вместо кривой на экране возникает петля, следует изменить частоту ЗГ.

5. Посмотрите, как ведёт себя разряд, насколько он устойчив при изменении давления в диапазоне $2 \cdot 10^{-1}$ – $2 \cdot 10^{-2}$. Отметьте, в какой области давлений наблюдаемая кривая соответствует теоретической.

II. Измерения

6. Получите на экране осциллографа вольт-амперную характеристику зондов, соответствующую рис. 5.7.

Убедитесь, что ручка плавной регулировки усиления по оси Y выведена вправо до щелчка (при таком положении ручки чувствительность канала K_Y указана возле дискретного переключателя усиления). Регулируя напряжение звукового генератора, добейтесь того, чтобы кривая занимала почти весь экран. Зарисуйте кривую с экрана на кальку. Укажите на кальке показания вакуумметра и чувствительность осциллографа по оси Y .

7. Для калибровки оси X в В/см (не трогать ручки усиления по X !) уберите дискретным переключателем усиление по оси Y и измерьте в см сигнал, поступающий на X с клеммы 6.

Затем подайте тот же сигнал на прокалиброванный вход Y (переключите вход Y осциллографа с клеммы 5 на 6), подберите положение дискретного переключателя по оси Y и измерьте отклик на сигнал по оси Y в см.

8. Повторите измерения п. 6 для 3–4-х давлений внутри интервала, выбранного Вами в п. 5.

При изменении чувствительности по оси X повторите калибровку оси X (п. 7).

III. Обработка результатов

1. Для каждой кривой пересчитайте масштаб по оси Y из В/см в А/см, зная сопротивление, с которого сигнал, пропорциональный зондовому току, подавался на ось Y осциллографа.

2. Рассчитайте масштаб по оси X в В/см с учётом делителя в блоке X (1:10) и калибровки (п. 7).

3. По зондовым характеристикам определите температуру T_e электронов по формуле (5.43): ток I_{in} найдите из пересечения асимптоты к току насыщения с осью $U = 0$ (см. рис. 5.12); $(dI/dU)|_{U=0}$ — наклон характеристики $I = f(U)$ в точке $U = 0$, $I = 0$; взяв ΔU в вольтах и приняв заряд электрона $e = 1$, определите энергию («температуру») электронов kT_e в электрон-вольтах.

4. Концентрацию электронов n_e определите из формулы (5.31), в которую вместо n следует подставить n_e :

$$I_{in} = 0,4n_e e S \sqrt{\frac{2kT_e}{m_i}}.$$

Здесь $S = \pi \cdot d \cdot l$ — площадь поверхности зонда; значения d и l приведены в описании экспериментальной установки; $m_i = 14 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24}$ г — масса иона азота.

5. Рассчитайте плазменную частоту колебаний электронов:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}.$$

6. Рассчитайте дебаевский радиус r_D экранирования по формуле (5.18), приняв температуру ионов равной комнатной: $T_i \approx 300$ К.

Оцените среднее число ионов в дебаевской сфере по формуле (5.12).

7. Оцените степень ионизации плазмы (долю ионизованных атомов α).

Работа 3.5.3

Релаксационные колебания

Цель работы: изучение вольт-амперной характеристики нормального тлеющего разряда; исследование релаксационного генератора на стабилитроне.

В работе используются: стабилитрон СГ-2 (газонаполненный диод) на монтажной панели, амперметр, вольтметр, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, источник питания, осциллограф (ЭО), генератор звуковой частоты (ЗГ).

Колебательные системы, как правило, имеют два накопителя энергии, между которыми происходит её перекачка. В контуре, содержащем

конденсатор и катушку индуктивности, электрическая энергия переходит в магнитную и обратно.

Встречаются, однако, колебательные системы, содержащие всего один накопитель энергии. Рассмотрим в качестве примера электрическую цепь, содержащую конденсатор и сопротивление без самоиндукции. Разряд конденсатора через сопротивление представляет собой аperiодический процесс. Разряду, однако, можно придать периодический характер, возобновляя заряд конденсатора через постоянные промежутки времени. Колебания в этом случае являются совокупностью двух аperiодических процессов — процесса зарядки конденсатора и процесса его разрядки. Такие колебания называются релаксационными.

В нашей установке роль «ключа», обеспечивающего попеременную зарядку и разрядку конденсатора, играет газоразрядный диод. Зависимость тока от напряжения для газоразрядной лампы не подчиняется закону Ома и характеризуется рядом особенностей (рис. 1). При малых напряжениях лампа практически не пропускает тока (см. участок ОАВ на рис. 5.3 и 5.7). Ток в лампе возникает только в том случае, если разность потенциалов на её электродах достигает напряжения зажигания V_1 . При этом скачком устанавливается конечная сила тока I_1 — в лампе возникает нормальный тлеющий разряд. При дальнейшем незначительном увеличении напряжения сила тока заметно возрастает по закону, близкому к линейному. Нормальный тлеющий разряд — стабилизатор напряжения, отсюда второе название лампы — стабилвольт.

Если начать уменьшать напряжение на горячей лампе, то при напряжении, равном V_1 , лампа ещё не гаснет, и сила тока продолжает уменьшаться. Лампа перестанет пропускать ток лишь при напряжении гашения V_2 , которое обычно существенно меньше V_1 . Сила тока при этом скачком падает от значения I_2 ($I_2 < I_1$) до нуля.

Характеристика, изображённая на рис. 1, несколько идеализирована. У реальной лампы зависимость $I(V)$ не вполне линейна.

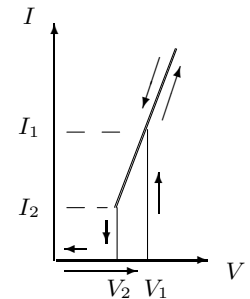


Рис. 1. Вольт-амперная характеристика стабилитрона с последовательно включённым резистором

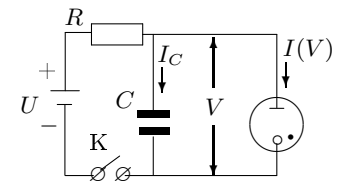


Рис. 2. Принципиальная схема релаксационного генератора

При $V > V_1$ графики, соответствующие возрастанию и убыванию напряжения, не всегда совпадают. Эти отличия, впрочем, носят второстепенный характер и для нашей задачи несущественны.

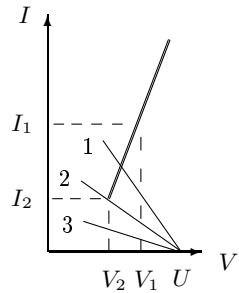


Рис. 3. Режимы работы релаксационного генератора

$dV/dt = 0$, ток через лампу равен

$$I_{ст} = \frac{U - V}{R}. \quad (2)$$

Равенство (2) может быть представлено графически (рис. 3).

При разных R графики имеют вид прямых, пересекающихся в точке $V = U$, $I = 0$. Область, где эти нагрузочные прямые пересекают вольт-амперную характеристику лампы, соответствует стационарному режиму — при малых R (прямая 1) лампа горит постоянно, колебания отсутствуют. Прямая 2, проходящая через точку (I_2, V_2) , соответствует критическому сопротивлению

$$R_{кр} = \frac{U - V_2}{I_2}. \quad (3)$$

При сопротивлении $R > R_{кр}$ нагрузочная прямая 3 не пересекает характеристику лампы, поэтому стационарный режим невозможен. В этом случае в системе устанавливаются колебания.

Рассмотрим, как происходит колебательный процесс. Пусть в начале опыта ключ K разомкнут (рис. 2) и $V = 0$. Замкнём ключ. Конденсатор C начинает заряжаться через сопротивление R , напряжение на нём увеличивается (рис. 4). Как только оно достигнет напряжения зажигания V_1 , лампа начинает проводить ток, причём прохождение тока сопровождается разрядкой конденсатора. В самом деле, батарея U , подключённая через большое сопротивление R , не может поддерживать необходимую для горения лампы величину тока. Во время горения

Рассмотрим схему релаксационного генератора, представленную на рис. 2. Пусть напряжение батареи U больше напряжения зажигания V_1 . В обозначениях, принятых на схеме, справедливо уравнение

$$I_C + I(V) = \frac{U - V}{R}$$

или

$$C \frac{dV}{dt} + I(V) = \frac{U - V}{R}. \quad (1)$$

В стационарном режиме работы, когда напряжение V на конденсаторе постоянно и

лампы конденсатор разряжается, и когда напряжение на нём достигнет потенциала гашения, лампа перестанет проводить ток, а конденсатор вновь начнёт заряжаться. Возникают релаксационные колебания с амплитудой, равной $(V_1 - V_2)$.

Рассчитаем период колебаний. Полное время одного периода колебаний T состоит из суммы времени зарядки τ_3 и времени разрядки τ_p , но если сопротивление R существенно превосходит сопротивление зажжённой лампы, то $\tau_3 \gg \tau_p$ и $T \approx \tau_3$ (этим случаем мы и ограничимся).

Во время зарядки конденсатора лампа не горит ($I(V) = 0$), и уравнение (1) приобретает вид

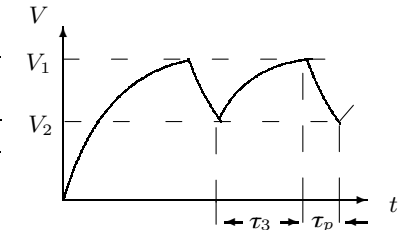


Рис. 4. Осциллограмма релаксационных колебаний

$$RC \frac{dV}{dt} = U - V. \quad (4)$$

Будем отсчитывать время с момента гашения лампы, так что $V = V_2$ при $t = 0$ (рис. 4). Решив уравнение (4), найдём

$$V = U - (U - V_2)e^{-t/RC}. \quad (5)$$

В момент зажигания $t = \tau_3$, $V = V_1$, поэтому

$$V_1 = U - (U - V_2)e^{-\tau_3/RC}. \quad (6)$$

Из уравнений (5) и (6) нетрудно найти период колебаний:

$$T \approx \tau_3 = RC \ln \frac{U - V_2}{U - V_1}. \quad (7)$$

Развитая выше теория является приближённой. Ряд принятых при расчётах упрощающих предположений оговорен в тексте. Следует иметь в виду, что мы полностью пренебрегли паразитными ёмкостями и индуктивностями схемы. Не рассматривались также процессы развития разряда и деионизация при гашении. Поэтому теория справедлива лишь в тех случаях, когда в схеме установлена достаточно большая ёмкость и когда период колебаний существенно больше времени развития разряда и времени деионизации (практически $\gg 10^{-5}$ с). Кроме того, потенциал гашения V_2 , взятый из статической вольт-амперной характеристики, может отличаться от потенциала гашения лампы, работающей в динамическом режиме релаксационных колебаний.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается снять вольт-амперную характеристику стабилитрона и познакомиться с работой релаксационного генератора: определить критическое сопротивление, исследовать зависимость периода колебаний от сопротивления при фиксированной ёмкости и от ёмкости при фиксированном сопротивлении.

I. Характеристика стабилитрона

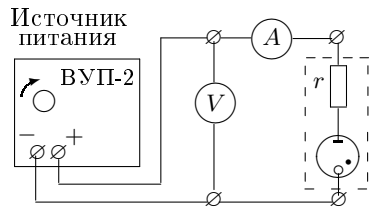


Рис. 5. Схема установки для изучения характеристик стабилитрона

1. Соберите схему, изображённую на рис. 5. Добавочное сопротивление r подпаяно между ножкой лампы и соответствующей клеммой для того, чтобы предохранить стабилитрон от перегорания. Это сопротивление остаётся включённым при всех измерениях. Запишите величину r , указанную на панели лампы.

2. Установите регулятор источника питания на минимум напряжения и включите источник в сеть.

3. Снимите вольт-амперную характеристику стабилитрона с сопротивлением r при возрастании и убывании напряжения. При этом как можно точнее определите потенциалы зажигания и гашения V_1 и V_2 и соответствующие токи I_1 и I_2 .

II. Осциллограммы релаксационных колебаний

4. Соберите релаксационный генератор согласно рис. 6.

5. Установите на магазине ёмкостей значение $C = 0,05$ мкФ, а на магазине сопротивлений $R = 900$ кОм.

6. Включите в сеть осциллограф, звуковой генератор и источник питания и установите напряжение $U \approx 1,2 V_1$.

7. Подберите частоту развёртки ЭО, при которой на экране видна картина пилообразных колебаний (рис. 4).

8. Получив пилу на экране, оцените соотношение между временем зарядки τ_z и временем разрядки τ_p . Зарисуйте картину колебаний.

9. Уменьшая сопротивление магазина, определите $R_{кр}$, при котором пропадают колебания, и сравните его с величиной, рассчитанной по формуле (3). Это сравнение полезно сделать в процессе работы и подумать о причинах расхождения результатов.

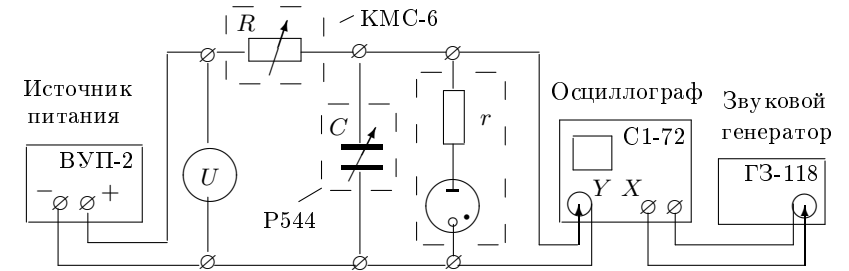


Рис. 6. Схема установки для исследования релаксационных колебаний

Убедитесь, что колебания пропадают не только при уменьшении R при постоянном U , но и при увеличении U при постоянном R , когда это R не слишком превышает $R_{кр}$.

III. Фигуры Лиссажу и частота колебаний

10. Восстановите исходные параметры релаксационного генератора: $C = 5 \cdot 10^{-2}$ мкФ, $R = 900$ кОм, $U \approx 1,2 \cdot V_1$. Подайте сигнал с генератора на вход X осциллографа. Меняя частоту ЗГ, получите на экране фигуру Лиссажу без самопересечений, соответствующую отношению частот 1:1.

11. Не меняя параметров релаксационного генератора, уменьшите частоту ЗГ вдвое (втрое) и получите фигуры Лиссажу при соотношении частот 2:1 (3:1). Зарисуйте эти кривые в тетрадь.

Получите и зарисуйте фигуры Лиссажу при увеличении частоты ЗГ в два и три раза (1:2 и 1:3).

12. При любом целом значении R из интервала (2–4) $R_{кр}$ снимите с помощью фигур Лиссажу 1:1 зависимость частоты колебаний ν от ёмкости C , меняя величину ёмкости в пределах от $5 \cdot 10^{-2}$ до $5 \cdot 10^{-3}$ мкФ.

Напряжение U , необходимое для расчёта теоретического значения периода по формуле (7), следует поддерживать постоянным.

13. Проведите серию измерений $\nu = f(R)$ при постоянной ёмкости $C = 5 \cdot 10^{-2}$, меняя величину R от максимального значения до критического.

IV. Обработка результатов

1. Постройте графики $I = f(V)$ для системы, состоящей из стабилитрона и дополнительного сопротивления r (по результатам измерений) и для стабилитрона без сопротивления r (вычитая падение напряжения на сопротивлении r при каждом токе). Сравните относительные изменения тока и напряжения на стабилитроне.

2. Рассчитав экспериментальные и теоретические значения периодов, постройте графики $T_{\text{эксп}} = f(C)$ и $T_{\text{теор}} = f(C)$ на одном листе.

На другом листе постройте графики $T_{\text{эксп}}$ и $T_{\text{теор}} = f(R)$.

3. Если наклоны теоретической и экспериментальной прямых заметно отличаются, рассчитайте из экспериментальной прямой динамический потенциал гашения. Потенциалы зажигания можно считать одинаковыми.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются релаксационными?
2. От каких параметров газа зависит напряжение зажигания стабилвольта?
3. Почему напряжение гашения существенно меньше напряжения зажигания?
4. Как по вольт-амперной характеристике стабилвольта и известным параметрам генератора найти ток в лампе в стационарном режиме?
5. Что такое критическое сопротивление релаксационного генератора? От чего оно зависит?
6. Почему критическое сопротивление зависит от величины напряжения U на входе генератора? Рассмотрите рис. 3.
7. Почему при малой ёмкости колебания не возникают (лампа не гаснет) даже при $R > R_{\text{кр}}$? Оцените «малость» ёмкости, сравнив время релаксации и время деионизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. § 134.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1974. § 244.
3. Горелик Г.С. Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959. Гл. IV, § 6.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1. Физический смысл спектрального разложения

Латинское слово «spectrum» является синонимом слова «изображение». Ньютон пользовался этим словом для выражения «цветное изображение». Вот цитата из его знаменитого трактата «Оптика»: «Я поместил в очень тёмной комнате у круглого отверстия, около трети дюйма шириной, в ставне окна стеклянную призму, благодаря чему пучок солнечного света, входящего в это отверстие, мог преломляться вверх к противоположной стене комнаты и образовать там цветное изображение (спектр) солнца». Так начинается доказательство его знаменитого утверждения: «Солнечный свет состоит из лучей различной преломляемости».

Значительно позднее слово «спектр» приобрело в науке ещё и другой смысл.

Рассмотрим функцию вида

$$f(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2) + \dots + A_N \cos(\omega_N t - \alpha_N),$$

или в более короткой записи

$$f(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t - \alpha_n),$$

где A_n , ω_n , α_n — постоянные величины. Множество пар (ω_1, A_1) , (ω_2, A_2) , ..., (ω_n, A_n) называется спектром функции $f(t)$. N может быть конечным или бесконечным.

«Спектр функции» — понятие математическое. Между математическим и физическим понятием спектра существует тесная связь: характер спектра как реально существующей цветной картины (спектра

в физическом смысле) определяется характером спектра (в математическом смысле) — функции, описывающей световую волну, падающую на призму. Установление этой связи составляет содержание одного из важнейших утверждений универсального учения о колебаниях и волнах самой различной физической природы (оптических, акустических, электрических и пр.).

В чём, например, физический смысл открытия Ньютона? Действительно ли солнечный свет состоит из лучей различной преломляемости?

На этот вопрос можно услышать такой ответ: «С помощью своих опытов с призмой Ньютон доказал, что солнечный свет состоит из монохроматических (синусоидальных) волн различного цвета».

Абсурдность этого ответа очевидна. Нелепо думать, что в солнечном свете в самом деле есть монохроматические волны различного цвета. Солнечный свет — это хаотический процесс, в котором изменение электромагнитного поля происходит беспорядочным образом. Суть проблемы разъяснил Л.И. Мандельштам.

Рассмотрим для примера амплитудно-модулированное колебание

$$f(t) = (a + 2b \cos \Omega t) \cos \omega t,$$

здесь Ω — частота модуляции, ω — «несущая» частота, a и b — постоянные величины. Можно видеть, что

$$(a + 2b \cos \Omega t) \cos \omega t = b \cos(\omega - \Omega)t + a \cos \omega t + b \cos(\omega + \Omega)t.$$

Что реально существует? Левая или правая часть этого тождества?

Если мы принимаем этот сигнал с помощью радиоприёмника, мы не сможем сказать, что реально на самом деле: издает ли в радиостудии скрипач звук на частоте Ω или работают три генератора на частотах $\omega - \Omega$, ω , $\omega + \Omega$. Однако, если нас интересует, как действует амплитудно-модулированное колебание на набор остро настроенных колебательных контуров, наиболее целесообразным является представление, даваемое правой частью тождества. Здесь целесообразно говорить, что наше колебание состоит из трёх синусоидальных колебаний.

Так в чём же истинное содержание опыта Ньютона? В том, что призма есть спектральный прибор, что она физически выделяет синусоидальные составляющие, физически осуществляет спектральное разложение света.

Опыты Ньютона показывают, что солнечный свет действительно несинусоидален, и позволяют узнать, каков именно спектр солнечного света. Из опытов Ньютона мы узнаем, что он является весьма широким сплошным спектром, в котором содержатся интенсивные слагаемые всех видимых цветов, цветов радуги.

2. Спектральный анализ линейных систем

2.1. Периодические сигналы

В физике широко используется разложение сложных сигналов на гармонические колебания различных частот ω . Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов в математике называется *разложением в ряд Фурье*. Непериодические сигналы представляются в виде *интеграла Фурье*.

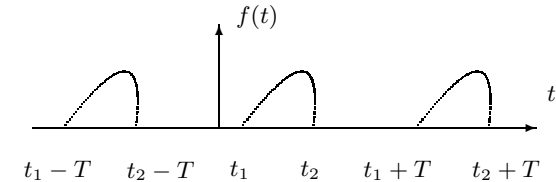


Рис. 6.1. График периодической функции с периодом повторения T

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = 2\pi/T$, где T — период повторения (рис. 6.1). Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)], \quad (6.1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (6.2)$$

Здесь $a_0/2$ — постоянная составляющая (среднее значение) функции $f(t)$; a_n и b_n — коэффициенты косинусных и синусных членов разложения. Они определяются выражениями

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt; \quad (6.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \quad (6.4)$$

Точку начала интегрирования t_1 можно выбрать произвольно.

В тех случаях, когда сигнал чётен относительно $t = 0$, так что $f(t) = f(-t)$, в тригонометрической записи остаются только косинусные члены, т.к. все коэффициенты b_n обращаются в нуль. Для нечётной относительно $t = 0$ функции, наоборот, в нуль обращаются коэффициенты a_n , и ряд состоит только из синусных членов.

Амплитуда A_n и фаза ψ_n n -й гармоники выражаются через коэффициенты a_n и b_n следующим образом:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}. \quad (6.5)$$

Представим выражение (6.2) в комплексной форме. Для этого заменим косинусы экспонентами в соответствии с формулой

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Подстановка даёт

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t} \right).$$

Введём комплексные амплитуды \hat{A}_n и \hat{A}_{-n} :

$$\hat{A}_n = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \hat{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \hat{A}_0 = a_0. \quad (6.6)$$

Разложение $f(t)$ приобретает вид

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{A}_n e^{in\Omega_1 t}. \quad (6.7)$$

Таким образом, введение отрицательных частот (типа $-n\Omega_1$) позволяет записать разложение Фурье особенно простым образом. Формулы (6.6) обеспечивают действительность суммы (6.7): каждой частоте $k\Omega_1$ соответствуют в (6.2) — один член ($n = k$), а в (6.7) — два члена ($n = k$ и $n = -k$). Формулы (6.6) позволяют переходить от действительного разложения (6.2) к комплексному (6.7) и обратно.

Для расчёта комплексных амплитуд A_n не обязательно пользоваться формулами (6.6). Умножим левую и правую части (6.7) на $e^{-ik\Omega_1 t}$ и проинтегрируем полученное равенство по времени на отрезке, равном одному периоду, например, от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi/\Omega_1$. В правой части

обратятся в нуль все члены, кроме одного, соответствующего $n = k$. Этот член даёт $A_k T/2$. Имеем поэтому

$$\hat{A}_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt. \quad (6.8)$$

Как мы видим, спектр любой периодической функции состоит из набора гармонических колебаний с дискретными частотами: $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1, \dots$ и постоянной составляющей, которую можно рассматривать как колебание с нулевой частотой ($0 \cdot \Omega_1$). Такой спектр называют **линейчатым** или **дискретным**.

2.2. Непериодический сигнал

Пусть непериодический сигнал $f(t)$ действует в конечном временном интервале $t_1 < t < t_2$. Превратим функцию $f(t)$ в периодическую путём повторения её с произвольным периодом $T > (t_2 - t_1)$. Для этой новой функции применимо разложение в ряд Фурье. В соответствии с формулами (6.3) — (6.4) абсолютная величина коэффициентов a_n и b_n обратно пропорциональна T , поэтому устремляя T к бесконечности, в пределе получим бесконечно малые амплитуды гармонических составляющих. Количество составляющих, входящих в ряд Фурье, будет при этом бесконечно большим, так как при $T \rightarrow \infty$ частота $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 0$. Другими словами, расстояние между спектральными линиями, равное частоте Ω_1 , становится бесконечно малым, и спектр из дискретного переходит в сплошной.

Выразим это теперь на языке математики. Воспользуемся комплексной формулой ряда Фурье (6.7) и подставим вместо A_n выражение (6.8).

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-in\Omega_1 t} dt \right] e^{in\Omega_1 t} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-in\Omega_1 t} dt \right] e^{in\Omega_1 t} \cdot \Omega_1. \end{aligned}$$

При записи второго выражения использована связь $T = 2\pi/\Omega_1$.

При $T \rightarrow \infty$ частота Ω_1 превращается в $d\Omega$, $n\Omega_1$ — в текущую частоту Ω , а операция суммирования — в операцию интегрирования. В

результате получаем двойной интеграл Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i\Omega t} dt \right] e^{i\Omega t} d\Omega.$$

Внутренний интеграл обозначим

$$\hat{F}(\Omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-i\Omega t} dt.$$

$\hat{F}(\Omega)$ называется *спектральной плотностью* или *спектральной характеристикой* функции $f(t)$.

Сравнивая полученное выражение с (6.8) для комплексной амплитуды соответствующей гармоники ($\Omega = \Omega_n$) той же самой функции, но уже периодической, получим

$$2\hat{F}(\Omega_n) = T \cdot \hat{A}_n = 2\pi \frac{\hat{A}_n}{\Omega_1}.$$

Поскольку Ω_1 — это полоса частот, отделяющая соседние спектральные линии дискретного спектра, то $\hat{F}(\Omega)$ имеет смысл *плотности амплитуд*.

Из вышеприведённого соотношения следует важный вывод: *огibaющая сплошного спектра* (модуль спектральной плотности) *непериодической функции* и *огibaющая линейчатого спектра той же периодической функции совпадают по форме и отличаются только масштабом*.

2.3. Примеры спектров периодических функций

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

А. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (рис. 6.2) с амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $\Omega_1 = 2\pi/T$, где T — период повторения импульсов.

Найдём среднее значение (постоянную составляющую). Согласно формуле (6.3)

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}.$$

Коэффициенты при косинусных составляющих равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (6.9)$$

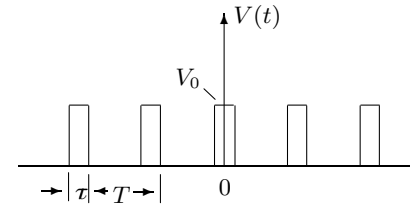


Рис. 6.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

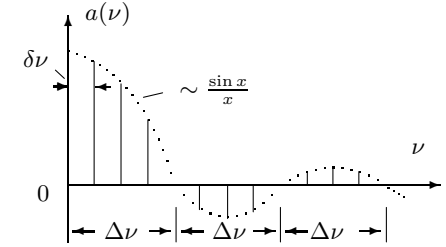


Рис. 6.3. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Поскольку наша функция чётная, все коэффициенты синусоидальных гармоник $b_n = 0$. Спектр a_n последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 6.3. Амплитуды гармоник A_n ($A_n = |a_n|$) меняются по закону $|\sin x/x|$.

На рис. 6.3 изображён случай, когда T кратно τ . Назовём *шириной спектра* $\Delta\omega$ (или $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$) расстояние от главного максимума ($\omega = 0$) до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться, при $n = 2\pi/\tau\Omega_1$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6.10)$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов $\Delta\nu$ и Δt является частным случаем *соотношения неопределённости* в квантовой механике. Несовместимость острой локализации волнового процесса во времени с узким спектром частот — явление широко известное в радиотехнике. Ширина селективной настройки $\Delta\nu$ радиоприёмника ограничивает приём радиосигналов длительностью $t < 1/\Delta\nu$.

Б. Периодическая последовательность цугов гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T (рис. 6.4).

Функция $f(t)$ снова является чётной относительно $t = 0$. Коэффициент при n -й гармонике согласно формуле (6.3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt =$$

$$= V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right). \quad (6.11)$$

Зависимость (6.11) для случая, когда T/τ равно целому числу, представлена на рис. 6.5. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и спектр пугов (см. рис. 6.3 и 6.5), мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину ω_0 .

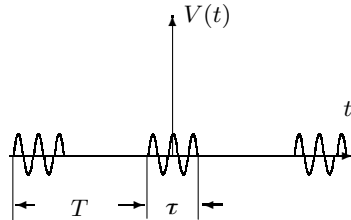


Рис. 6.4. Периодическая последовательность пугов

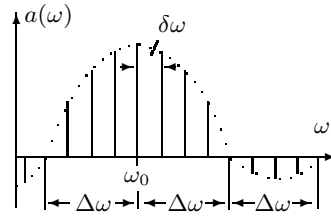


Рис. 6.5. Спектр периодической последовательности пугов

В. Амплитудно-модулированные колебания. Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$) (рис. 6.6):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t. \quad (6.12)$$

Коэффициент m называют глубиной модуляции. При $m < 1$ амплитуда колебаний меняется от минимальной $A_{\min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{\max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}. \quad (6.13)$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (6.12) можно найти спектр амплитудно-модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) =$$

$$= A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (6.14)$$

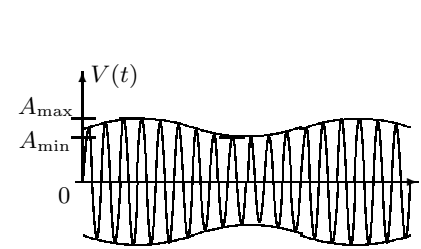


Рис. 6.6. Гармонические колебания, модулированные по амплитуде

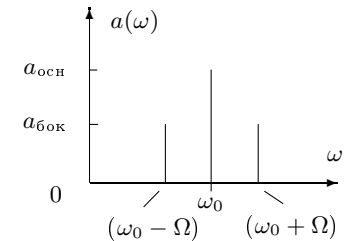


Рис. 6.7. Спектр синусоидальных колебаний, модулированных по амплитуде

Спектр таких колебаний содержит три составляющих — основную компоненту и две боковых (рис. 6.7). Первое слагаемое в правой части (6.14) представляет собой исходное немодулированное колебание с *основной (несущей) частотой* ω_0 и амплитудой $a_{\text{осн}} = A_0$. Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$. Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного колебания: $a_{\text{бок}} = A_0 m/2$. Начальные фазы всех трёх колебаний одинаковы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество — М.: Наука, 1983. § 128.
2. *Крауфорд Ф.* Берклевский курс физики. Т. III. Волны. — М.: Наука, 1976. § 6.4.

Работа 3.6.1

Спектральный анализ электрических сигналов

Цель работы: изучение спектрального состава периодических электрических сигналов.

В работе используются: анализатор спектра, генератор прямоугольных импульсов, генератор сигналов специальной формы, осциллограф.

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности пугов и амплитудно-модулированных

гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью промышленного анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.

Принцип работы спектроанализатора. Для исследования спектров в работе используется гетеродинный анализатор спектра типа СК4-56. Упрощённая структурная схема, поясняющая последовательный супергетеродинный метод спектрального анализа внешнего сигнала, изображена на рис. 1.

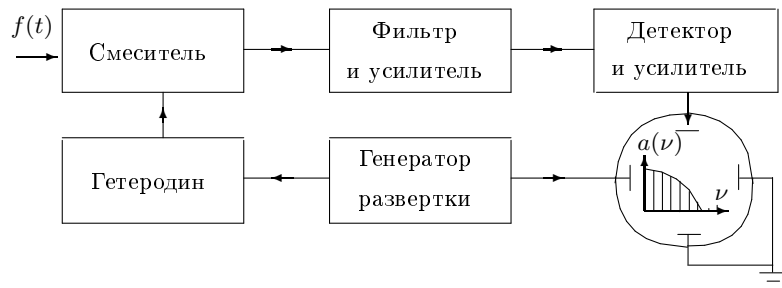


Рис. 1. Структурная схема анализатора спектра

Восстановление спектрального состава входного сигнала $f(t)$ происходит периодически с некоторым заданным периодом. Это время является периодом повторения пилообразного напряжения, которое вырабатывается генератором развертки. Линейно нарастающее во времени напряжение с генератора развертки подается на гетеродин, который генерирует переменное напряжение с частотой пропорциональной этому напряжению, но с постоянной амплитудой. При изменении пилообразного напряжения от нуля до некоторого максимального значения частота сигналов, вырабатываемых гетеродином, изменяется в пределах от 128 до 188 кГц. Исследуемый сигнал $f(t)$ и переменное напряжение с гетеродина одновременно поступают на смеситель. При нелинейном сложении этих колебаний на выходе смесителя возникают сигналы суммарной и разностной частоты. Для анализа используется только разностный сигнал. Смещение частот исследуемого сигнала и частоты гетеродина лежит в основе большинства современных радиоприёмных устройств — супергетеродинов.

Со смесителя сигнал поступает на фильтр, который настроен на частоту 128 кГц. Таким образом мы «извлекаем» из спектра входного сигнала $f(t)$ переменное напряжение с частотой равной разности частот гетеродина и фильтра. За время, равное периоду повторения пилообразного напряжения, фильтр пропускает колебания с частотами от нуля

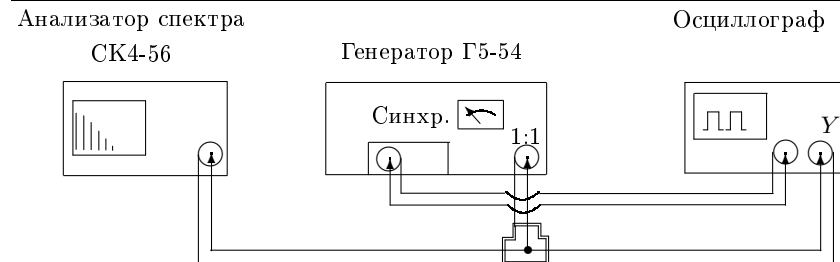


Рис. 2. Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

до 60 кГц. Затем эти колебания детектируются, усиливаются и подаются на вертикальный вход электронно-лучевой трубки (ЭЛТ). Одновременно сигнал с генератора развертки поступает на горизонтальный вход ЭЛТ. На экране анализатора возникает, таким образом, график, изображающий зависимость амплитуды гармоник от частоты, т.е. *фурье-спектр* исследуемого сигнала.

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Экспериментальная установка. Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов представлена на рис. 2. Сигнал с выхода генератора прямоугольных импульсов Г5-54 подается на вход анализатора спектра и одновременно — на вход Y осциллографа. С генератора импульсов на осциллограф подается также сигнал синхронизации, запускающий ждущую развертку осциллографа. При этом на экране осциллографа можно наблюдать саму последовательность прямоугольных импульсов, а на экране ЭЛТ анализатора спектра — распределение амплитуд спектральных составляющих этой последовательности.

В наблюдаемом спектре отсутствует информация об амплитуде нулевой гармоники, т.е. о величине постоянной составляющей; её местоположение (начало отсчёта шкалы частот) отмечено небольшим вертикальным выбросом.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении исследуется зависимость ширины спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов от длительности отдельного импульса.

1. Соберите схему согласно рис. 2 и подготовьте приборы к работе, следуя техническому описанию, расположенному на установке.

2. Установите на анализаторе спектра режим работы с однократной развёрткой и получите на экране спектр импульсов с параметрами $f_{\text{повт}} = 10^3$ Гц; $\tau = 25$ мкс; частотный масштаб $m_x = 5$ кГц/дел.

Проанализируйте, как меняется спектр ($\Delta\nu$ и $\delta\nu$ на рис. 6.3): а) при увеличении τ вдвое при неизменном $f_{\text{повт}} = 1$ кГц; б) при увеличении $f_{\text{повт}}$ вдвое при неизменном $\tau = 25$ мкс.

Опишите результаты или зарисуйте в тетрадь качественную картину.

3. Проведите измерения зависимости ширины спектра от длительности импульса $\Delta\nu(\tau)$ при увеличении τ от 25 до 200 мкс при $f_{\text{повт}} = 1$ кГц.

4. Скопируйте на кальку огибающие спектров с параметрами: $f_{\text{повт}} = 1$ кГц, $m_x = 5$ кГц/дел, а) $\tau = 50$ мкс, б) $\tau = 100$ мкс. Запишите на кальках эти параметры и приложите кальки к отчёту.

5. Постройте график $\Delta\nu(1/\tau)$ и по его наклону убедитесь в справедливости соотношения неопределённостей.

Б. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Экспериментальная установка. Исследование спектра периодически чередующихся цугов гармонических колебаний проводится по схеме, изображённой на рис. 3. Генератор Г6-34 вырабатывает синусоидальные колебания высокой частоты. На вход АМ (амплитудная модуляция) этого генератора подаются прямоугольные импульсы с генератора Г5-54, а на выходе мы получаем высокочастотные модулированные колебания в виде отдельных кусков синусоиды — *цугов*. Эти цуги с выхода генератора Г6-34 поступают на вход спектроанализатора и одновременно на вход Y осциллографа. Сигнал синхронизации подаётся на вход X осциллографа с генератора импульсов.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении исследуется зависимость расстояния между ближайшими спектральными компонентами от частоты повторения цугов.

1. Соберите схему, изображённую на рис. 3, и подготовьте приборы к работе, руководствуясь техническим описанием.

2. Установите частоту несущей $\nu_0 = 25$ кГц и проанализируйте, как изменяется вид спектра: а) при увеличении длительности импульса вдвое ($\tau = 50, 100$ мкс для $f_{\text{повт}} = 1$ кГц); б) при изменении частоты несущей: $\nu_0 = 25, 10$ или 40 кГц.

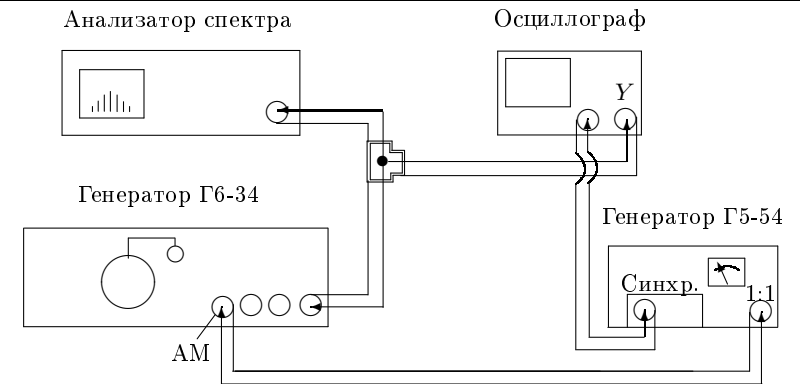


Рис. 3. Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

Опишите результаты эксперимента или зарисуйте качественную картину в тетради.

3. При фиксированной длительности импульсов $\tau = 50$ мкс исследуйте зависимость расстояния $\delta\nu$ между соседними спектральными компонентами от периода T (частоты повторения импульсов $f_{\text{повт}}$ в диапазоне 1–8 кГц).

4. Скопируйте на кальку спектры цугов с параметрами: $\tau = 100$ мкс, $m_x = 5$ кГц/дел; а) $f_{\text{повт}} = 1$ кГц; б) $f_{\text{повт}} = 2$ кГц.

Запишите на кальках эти параметры и приложите кальки к отчёту.

5. Постройте график $\delta\nu(f_{\text{повт}})$ и по его наклону убедитесь в справедливости соотношения неопределённости.

6. Сравните зарисованные на кальку спектры:

а) прямоугольных импульсов при одинаковых периодах и разных длительностях импульса τ ;

б) цугов при одинаковых τ и разных периодах;

в) цугов и прямоугольных импульсов при одинаковых значениях τ и T .

В. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Экспериментальная установка. Схема для исследования амплитудно-модулированного сигнала представлена на рис. 4. Модуляционный генератор встроен в левую часть генератора сигналов Г6-34. Синусоидальный сигнал с частотой модуляции $f_{\text{мод}} = 1$ кГц подаётся с модуляционного генератора на вход АМ (амплитудная модуляция) генератора, вырабатывающего синусоидальный сигнал высокой частоты

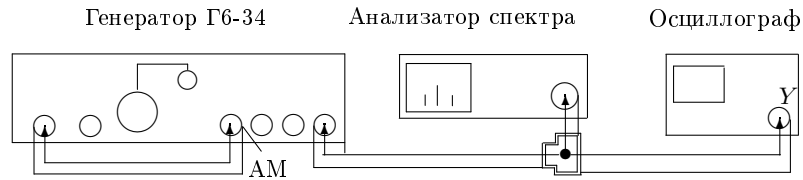


Рис. 4. Схема для исследования спектра высокочастотного гармонического сигнала, промодулированного по амплитуде низкочастотным гармоническим сигналом

(частота несущей $\nu_0 = 25$ кГц). Амплитудно-модулированный сигнал с основного выхода генератора поступает на осциллограф и на анализатор спектра.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении исследуется зависимость отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции, который определяется с помощью осциллографа.

1. Соберите схему, изображённую на рис. 4 и подготовьте приборы к работе, следуя техническому описанию.
2. Изменяя глубину модуляции, исследуйте зависимость отношения амплитуды боковой линии спектра к амплитуде основной линии ($a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$) от глубины модуляции m ; для расчёта глубины модуляции m по формуле (6.13) измеряйте максимальную $2A_{\text{max}}$ и минимальную $2A_{\text{min}}$ амплитуды сигнала на экране осциллографа (см. рис. 6.6 и 6.7).
3. При 100% глубине модуляции ($A_{\text{min}} = 0$) посмотрите, как меняется спектр при увеличении частоты модулирующего сигнала.
4. Постройте график отношения $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$ в зависимости от m . Определите угол наклона графика и сравните с рассчитанным с помощью формулы (6.14).

Контрольные вопросы

1. Нарисуйте спектры $F(\omega)$:
 - а) бесконечно длинной синусоиды;
 - б) синусоиды конечной длины;
 - в) периодической последовательности цугов;
 - г) периодической последовательности прямоугольных импульсов;
 - д) одного цуга;
 - е) одного прямоугольного импульса.
2. Как изменится спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, если убрать каждый второй импульс? Как выглядит спектр, если повторять эту процедуру, пока не останется один импульс?

3. Найдите спектр синусоидальных колебаний, модулированных по фазе:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t + m \cos \Omega t),$$

считая $m \ll 1$.

Сравните со спектром синусоиды, модулированной по амплитуде.

Работа 3.6.2

Синтез гармонических сигналов

Цель работы: изучение возможности синтеза периодических электрических сигналов при ограниченном наборе спектральных компонент.

В работе используются: генератор гармонических сигналов Г6-1, источник питания, осциллограф.

Сколь угодно сложный электрический сигнал $V(t)$ может быть разложен на более простые сигналы. В радиотехнике широко используется разложение сигнала $V(t)$ на совокупность гармонических сигналов различных частот ω . Функция $F(\omega)$, описывающая зависимость амплитуд отдельных гармоник от частоты, называется *амплитудной спектральной характеристикой* сигнала $V(t)$. Представление сложного периодического сигнала в виде суммы дискретных гармонических сигналов в математике называется *разложением в ряд Фурье (прямое преобразование Фурье)*.

Зная спектральный состав $F(\omega)$ периодической последовательности некоторого импульса $V(t)$, мы можем осуществить *обратное преобразование Фурье*: сложив отдельные гармоники со своими амплитудами и фазами, получить необходимую последовательность импульсов. Степень совпадения полученного сигнала с $V(t)$ определяется количеством синтезированных гармоник: чем их больше, тем лучше совпадение.

Рассмотрим конкретные примеры периодических функций, которые будут предметом исследования в нашей работе.

1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (рис. 1). Амплитуда импульсов равна V_0 , длительность отдельного импульса — τ , частота повторения $f_{\text{повт}} = 1/T$, где T — период повторения. Отношение $T/\tau = 7$.

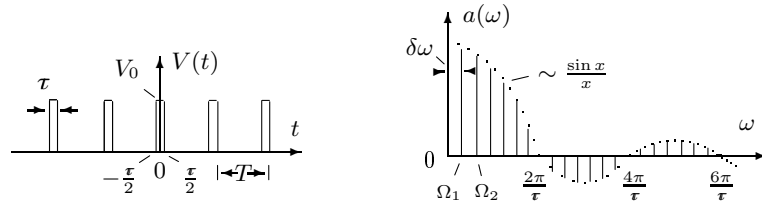


Рис. 1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Рис. 2. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Применяя формулы (6.1) — (6.4), найдём среднее значение (постоянную составляющую):

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}.$$

Амплитуды косинусных составляющих равны:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (1)$$

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник $b_n = 0$. В этом случае $A_n = a_n$, а начальная фаза колебаний $\psi_n = 0$ в области частот

$$\frac{4\pi n}{\tau} < \Omega_n < \frac{2\pi(2n+1)}{\tau} \quad (2)$$

или $\psi_n = \pi$ в области

$$\frac{2\pi(2n+1)}{\tau} < \Omega_n < \frac{2\pi(2n+2)}{\tau}, \quad (3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ Спектральное распределение амплитуд дискретных гармоник для бесконечной последовательности прямоугольных импульсов при отношении $T/\tau = 7$ представлено на рис. 2. «Отрицательные» амплитуды на рисунке соответствуют тем гармоникам, фаза которых $\psi_n = \pi$.

II. Периодическая последовательность треугольных импульсов с отношением $T/\tau = 3,5$ (рис. 3).

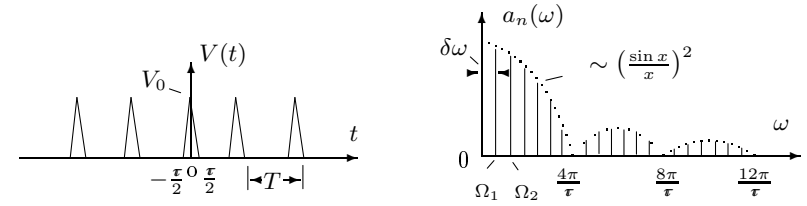


Рис. 3. Периодическая последовательность треугольных импульсов

Рис. 4. Спектр периодической последовательности треугольных импульсов ($T/\tau = 3,5$)

Амплитуды в спектре последовательности треугольных импульсов меняются по закону

$$|A_n| = \frac{V_0 \tau}{2T} \left(\frac{\sin[\pi n \tau / (2T)]}{\pi n \tau / (2T)} \right)^2. \quad (4)$$

Фаза n -й гармоники $\psi_n = 0$ в области частот

$$\frac{8\pi n}{\tau} < \Omega_n < \frac{4\pi(2n+1)}{\tau} \quad (5)$$

или $\psi_n = \pi$ в области

$$\frac{4\pi(2n+1)}{\tau} < \Omega_n < \frac{4\pi(2n+2)}{\tau}. \quad (6)$$

Модуль спектральной плотности $|a_n(\omega)| = |A_n|$ для такой функции представлен на рис. 4.

Экспериментальная установка. Основным элементом экспериментальной установки является генератор гармонических сигналов Гб-1, который генерирует одновременно основной сигнал (на выбранной частоте) и пять гармоник, кратных основному сигналу и синхронных с ним. Например, если частота основного сигнала (1-я гармоника) составляет 1 кГц, то частоты остальных пяти гармоник — 2 кГц, 3 кГц, 4 кГц, 5 кГц и 6 кГц. Все 6 гармоник могут складываться при помощи электронного сумматора, на выходе которого образуется сигнал сложной формы. Этот сигнал с выхода генератора подаётся на вход Y осциллографа, на экране которого можно наблюдать (в режиме непрерывной развёртки) периодическую последовательность синтезированных сигналов. Технические данные генератора и порядок работы с ним изложены в отдельном техническом описании, расположенном на установке.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается подобрать амплитуды синусоидальных колебаний с кратными частотами, сумма которых даёт периодическую последовательность прямоугольных или треугольных импульсов.

I. Синтез последовательности прямоугольных импульсов

1. Прочтите техническое описание (ТО) генератора Г6-1.
 2. Включите в сеть блок питания генератора. За время прогрева генератора рассчитайте относительные значения амплитуд первых шести гармоник в спектре периодической последовательности прямоугольных импульсов с отношением $T/\tau = 7$: нулевая гармоника (постоянная составляющая) не используется; первая гармоника соответствует основному сигналу генератора; приняв амплитудное значение первой гармоники за единицу, относительные амплитудные значения (a_n/a_1) остальных пяти гармоник рассчитайте по формуле (1). Амплитуда седьмой гармоники в наших условиях (при $T/\tau = 7$) равна нулю. Значения синусов, необходимые для вычислений, приведены в таблице:

n	1	2	3	4	5	6
α_n	$\pi/7$	$2\pi/7$	$3\pi/7$	$4\pi/7$	$5\pi/7$	$6\pi/7$
$\sin \alpha_n$	0,434	0,782	0,975	0,975	0,782	0,434
$a_n \sim \frac{\sin \alpha_n}{n}$						
$\frac{a_n}{a_1}$	1					

3. Установите частоту первой гармоники — 10 кГц (см. ТО, I) и откалибруйте (уравняйте) напряжения гармоник.
 4. Включите в сеть осциллограф и проведите регулировку фазы гармоник. С помощью осциллографа установите рассчитанные Вами относительные амплитуды гармоник.
 5. Последовательно увеличивая число гармоник, копируйте на кальку сигнал, возникающий на экране осциллографа. По результирующей осциллограмме, соответствующей сумме всех шести гармоник, определите отношение T/τ и сравните его с теоретическим значением.

II. Синтез последовательности треугольных импульсов

6. Рассчитайте с помощью формулы (4) относительные амплитуды гармоник в спектре периодической последовательности треугольных импульсов с отношением $T/\tau = 3,5$. Для этого возведите в квадрат относительные амплитудные значения гармоник для спектра прямоугольных импульсов (см. п. 2).
 7. Установите относительные амплитуды гармоник.

8. Получите осциллограмму от всех шести гармоник и скопируйте её на кальку. Определите отношение T/τ и сравните его с теоретическим.
 9. Закончив упражнение с реальным генератором, переходите к компьютерному варианту работы (см. дополнительное описание).

Контрольные вопросы

- Нарисуйте спектры $F(\omega)$:
 - бесконечно длинной синусоиды;
 - синусоиды конечной длины;
 - периодической последовательности цугов;
 - периодической последовательности прямоугольных импульсов;
 - одного цуга;
 - одного прямоугольного импульса.
- Как изменится спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, если убрать каждый второй импульс? Как выглядит спектр, если повторять эту процедуру, пока не останется один импульс?
- Найдите спектр синусоидальных колебаний, модулированных по фазе:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega t + m \cos \Omega t),$$

считая $m \ll 1$.

Сравните со спектром синусоиды, модулированной по амплитуде.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Р а з д е л I. Измерение электрических и магнитных полей	3
О системах единиц в классической электродинамике	3
Работа 3.1.1. Магнитометр	18
Работа 3.1.2. Абсолютный вольтметр	23
Р а з д е л II. Электрические колебания	29
Свободные колебания	30
Вынужденные колебания. Метод комплексных амплитуд	36
Вынужденные колебания. Резонанс	41
Процесс установления колебаний	47
Работа 3.2.1. Сдвиг фаз в цепи переменного тока	50
Работа 3.2.2. Резонанс напряжений	57
Работа 3.2.3. Резонанс токов	63
Работа 3.2.4. Свободные колебания в электрическом контуре	66
Работа 3.2.5. Вынужденные колебания в электрическом контуре	71
Работа 3.2.6. Исследование гальванометра	77
Р а з д е л III. Носители электрического тока в вакууме, металлах и полупроводниках	90
Определение элементарного заряда	91
Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях	92
Движение электрона в однородном магнитном поле	92
Движение электрона в скрещенных электрическом и магнитном полях	94
Электрический ток в вакуумном диоде	96
Свободные носители заряда в металлах и полупроводниках	98

ОГЛАВЛЕНИЕ

259

Зонная модель	98
Эффект Холла в металлах и полупроводниках	101
Магнетосопротивление	103
Работа 3.3.1. Измерение удельного заряда электрона методами магнитной фокусировки и магнетрона	106
Работа 3.3.2. Исследование вольт-амперной характеристики вакуумного диода	114
Работа 3.3.3. Опыт Милликена	119
Работа 3.3.4. Эффект Холла в полупроводниках	126
Работа 3.3.5. Эффект Холла в металлах	130
Работа 3.3.6. Влияние магнитного поля на проводимость полупроводников	135
Р а з д е л IV. Магнитные свойства вещества	143
Диа- и парамагнетики	143
Ферромагнетизм	148
Размагничивающий фактор	153
Измерение напряжённости магнитного поля в образцах	155
Измерение индукции в образце	157
Измерение магнитной восприимчивости диамагнетиков и парамагнетиков	157
Работа 3.4.1. Диа- и парамагнетики	159
Работа 3.4.2. Закон Кюри–Вейсса	163
Работа 3.4.3. Точка Кюри	168
Работа 3.4.4. Петля гистерезиса (статический метод)	173
Работа 3.4.5. Петля гистерезиса (динамический метод)	181
Работа 3.4.6. Параметрический резонанс	187
Р а з д е л V. Газовый разряд. Плазма	197
Введение	197
Некоторые свойства плазмы	200
Газовый разряд	204
Высокочастотный нагрев плазмы	215
Электропроводность плазмы	216

Одиночный зонд	217
Исследование плазмы с помощью одиночных зондов	219
Двойной зонд	223
Работа 3.5.1. Изучение плазмы газового разряда в неоне.....	226
Работа 3.5.2. Индукционный газовый разряд.....	229
Работа 3.5.3. Релаксационные колебания	232
 Р а з д е л VI. Спектральный анализ и синтез	
электрических сигналов	239
Физический смысл спектрального разложения	239
Спектральный анализ линейных систем	241
Периодические сигналы	241
Непериодический сигнал	243
Примеры спектров периодических функций	244
Работа 3.6.1. Спектральный анализ электрических сигналов.....	247
Работа 3.6.2. Синтез гармонических сигналов	253