Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

И с с л е д о в а т е л ь с к а я   р а б о т а

по курсу общей физики
на тему:
«Сферические аберрации»

Работу выполнил:
Баринов Леонид
(группа Б02-827)

Долгопрудный
2020

1 Аннотация

В работе будет рассмотрена сферическая аберрация на одной линзе и на паре центрированных линз, будут подобраны параметры, которые минимизируют сферическую аберрацию в обоих случаях с помощью моделирования в «Wolfram Mathematica». Из дифракционной оценки будет получено возможное оптимальное положение экрана.

2 Теоретические сведения

Аберрации оптической системы — это ошибки или дефекты изображения в реальной оптической системе, вызываемые отклонением лучей от того направления, по которому они должны были бы идти в идеальной оптической системе.

Сферическая аберрация (рис. 1) возникает из-за несовпадения фокусов для лучей света, проходящих на разных расстояниях от оптической оси и приводит к нарушению гомоцентричности пучков лучей от точечного источника, без нарушения симметрии строения этих пучков.

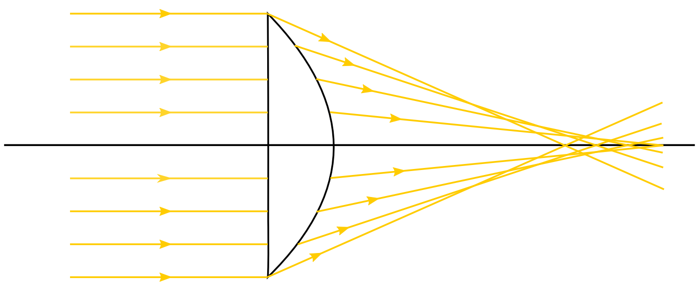

Рис. 1. Сферическая аберрация

Фокусное расстояние линзы определяется через радиусы сферических поверхностей, ее ограничивающих:

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (1)$$

Для исследования аберраций рассмотрим преломление луча на сферической поверхности.

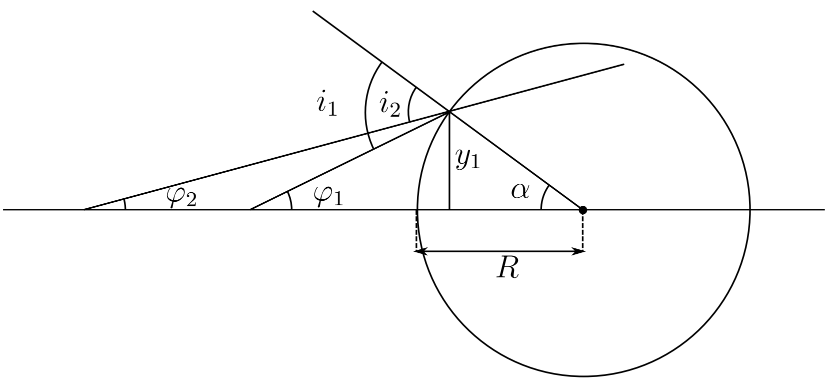

Рис. 2. Преломление луча на сферической поверхности

Исходя из рисунка запишем соотношения:

$$\begin{aligned} i_1 &= \varphi_1 + \alpha = \varphi_1 + \arcsin\frac{y_1}{R} \\ i_2 &= \varphi_2 + \alpha = \varphi_2 + \arcsin\frac{y_1}{R} \end{aligned} \tag{2}$$

Воспользуемся законом Снеллиуса

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \tag{3}$$

и выразим φ_2 из (2) через φ_1, n_1, n_2, R и y_1.

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\left(\varphi_1 + \arcsin\frac{y_1}{R}\right)\right) - \arcsin\frac{y_1}{R} \tag{4}$$

Рассуждения для следующего преломления аналогичны, меняется только знак R и φ. Знаки перед R и φ ставятся согласно *рис. 3*.

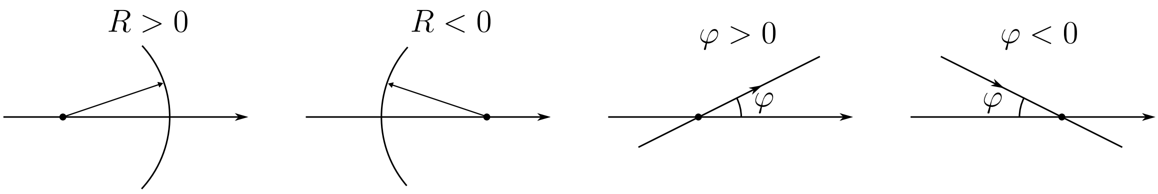

Рис. 3. Расстановка знаков перед R и φ

Для определения продольной X и поперечной Y компонент сферической аберрации поместим объект в двойной фокус собирающей линзы. По формуле тонкой линзы следует, что изображение также будет в $2F$, однако это выполняется только в параксиальном приближении, это хорошо видно на *рис. 4*.

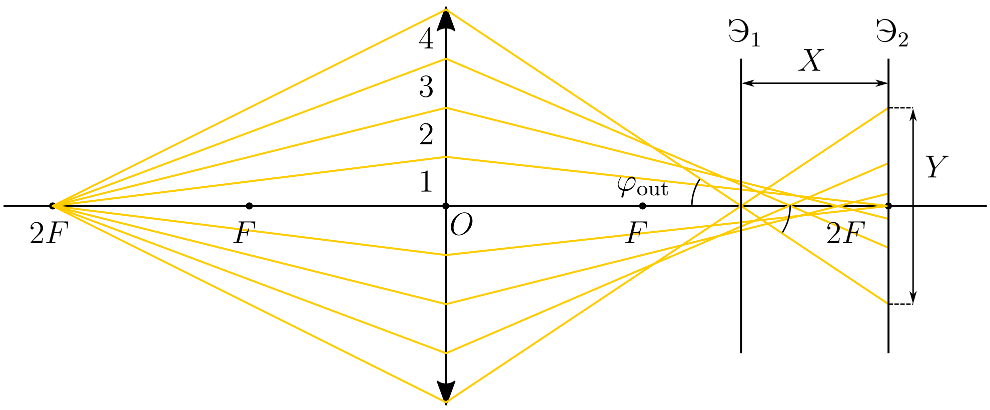

Рис. 4. Продольная X и поперечная Y компоненты сферической аберрации

Значения X и Y находим по углу φ_{out} между крайним преломленным лучом и главной оптической осью. H — высота линзы.

$$\begin{aligned} X &= 2F - H/2 \operatorname{ctg}\varphi_{\text{out}} \\ Y &= 2F \operatorname{tg}\varphi_{\text{out}} - H/2 \end{aligned} \tag{5}$$

Поставим задачу наилучшего положения экрана Э между положениями $Э_1$ и $Э_2$. Для этого разобьем половину линзы на N частей (на *рис. 4* $N = 4$). Положение $Э_1$ получается из пересечения крайними лучами главной оптической оси. Положение $Э_2$ получается из пересечения лучами, которые попадают на границу 1 области линзы, главной оптической оси. Критерием наилучшего положения будем считать интенсивность и радиус кружка изображения каждой зоны N.

Рассчитаем интенсивность каждого кружка и его радиус. Выразим телесный угол Ω_n, под которым видна n зона

$$\Omega_n = \frac{\pi(y_n^2 + y_{n-1}^2)}{(2F)^2 + y_n^2} \tag{6}$$

y_n — расстояние от центра линзы O до окончания n-ой зоны, y_{n-1} — расстояние от центра линзы O до окончания $n-1$-ой зоны.

Рассчитаем какая часть энергии ω_n в единицу времени содержится в выделенном телесном угле Ω_n:

$$\omega_n = \omega_0 \frac{\Omega_n}{4\pi} = \frac{\omega_0}{4} \cdot \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{(2F)^2 + y_n^2} \tag{7}$$

ω_0 — суммарная энергия, попадающая на линзу в единицу времени.

Выразим интенсивность I_n:

$$I_n = \frac{\omega_n}{\pi(Y_n^2 - Y_{n-1}^2)} = \frac{\omega_0}{4\pi} \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{(2F)^2 + y_n^2} \cdot \frac{1}{Y_n^2 - Y_{n-1}^2} \tag{8}$$

Y_n — радиус n-ой зоны, получаемой на экране в положении $Э_2$, Y_{n-1} — радиус $n-1$-ой зоны, получаемой на экране в положении $Э_2$.

Радиус y_n можно выразить через H и N:

$$y_n = \frac{H}{2N} n$$

Перепишем выражение $y_n^2 - y_{n-1}^2$:

$$y_n^2 - y_{n-1}^2 = \left(\frac{H}{2N}\right)^2 (n^2 - (n-1)^2) = \left(\frac{H}{2N}\right)^2 (2n+1)$$

Перепишем (8):

$$I_n = \frac{\omega_0}{16\pi F^2} \left(\frac{H}{2N}\right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{D}{4NF} n\right)^2} \cdot \frac{2n+1}{Y_n^2 - Y_{n-1}^2} \tag{9}$$

Константу в формуле (9) обозначим за I_0:

$$I_0 = \frac{\omega_0}{16\pi F^2} \left(\frac{H}{2}\right)^2$$

В итоге формула (9) принимает вид:

$$I_n = I_0 \frac{1}{N^2 + \left(\frac{Dn}{4F}\right)^2} \cdot \frac{2n+1}{Y_n^2 - Y_{n-1}^2} \tag{10}$$

При этом Y_n соответствует величине поперечной компоненты сферической аберрации для n-ой зоны, которую можно вычислить по формуле (5), заменяя в этой формуле угол φ_{out} на угол φ_2 в формуле (4).

Отметим, что формула (10) получена для положения экрана $Э_2$. Получить зависимость интенсивности для произвольного положения экрана между $Э_1$ и $Э_2$ достаточно затруднительно из-за нетривиального пересечения зон (это хорошо видно при положении экрана $Э_1$ на *рис. 4*), однако радиус пятна получить возможно. Для этого необходимо выбрать зону, имеющую максимальный радиус при данном положении экрана. Например, для $Э_1$ на *рис. 4* это будет вторая зона.

Для определения наилучшего положения экрана воспользуемся дифракционными соображениями. То есть потребуем, чтобы размер пятна был определен исходя из дифракционной оценки:

$$D = \frac{\lambda}{H} \cdot 2F \tag{11}$$

При этом под радиусом пятна будем понимать именно радиус того пятна, в котором интенсивность наибольшая, т.е. не будем учитывать лучи, которые уже пересеклись на главной оптической оси, а затем попали на экран.

Будем помещать экран в положения, где лучи от какой-нибудь зоны пересекли главную оптическую ось, таких положений будет N. Из прямоугольного треугольника, образованного главной оптической осью, осью линзы и лучом от k зоны легко выразить расстояние от положения экрана $Э_2$:

$$X_k = 2F - H/2 \operatorname{ctg} \varphi_k \tag{12}$$

где φ_k — угол между главной оптической осью и лучом от k зоны.

Для оценки радиуса пятна будем использовать все зоны, которые меньше k. Возьмем зону l, $l < k$, и оценим радиус пятна, создаваемый этой зоной:

$$z_l^k = (X_k - X_l) \operatorname{tg} \varphi_l \tag{13}$$

Получив набор значений z_l^k, нам необходимо выбрать максимум по всем значениям l. Это и будет являться радиусом пятна z_k в положении экрана X_k.

Затем остается лишь подобрать такое значение z_k, которое будет максимально близко к нашей дифракционной оценке D.

3 Моделирование в Wolfram Mathematica

В первой визуализации ставится задача минимизации поперечной компоненты сферической аберрации при заданном фокусном расстоянии линзы F_0 и ее высоты H. Строится график зависимости поперечной компоненты сферической аберрации X от радиуса кривизны одной из поверхностей. Так как фокусное расстояние линзы задано, то кривизна второй поверхности определяется по формуле (1) *(рис. 5)*.

Из графиков видно, что при увеличении отношения F_0/H минимальное значение поперечной компоненты сферической аберрации уменьшается, при уменьшении F_0/H — увеличивается. При стремлении n к ∞ X стремится к 0.

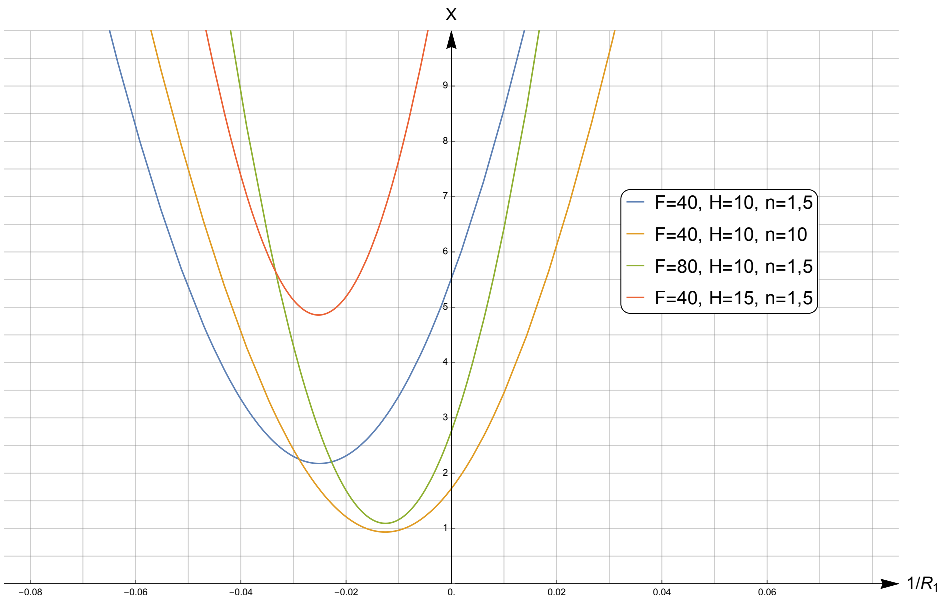

Рис. 5. Зависимость продольной компоненты сферической аберрации X от радиуса кривизны одной из поверхностей линзы $1/R_1$ при различных значениях фокусного расстояния F_0, высоты линзы H и показателя преломления материала линзы n

Целью второй визуализации ставится проверка правила «4П» — «плоской поверхностью к плоской волне плохо» для плоско-выпуклой линзы. Для этого нужно взять $\varphi_2 = 0$ *(рис. 2)* и заменить $2F$ на F в формуле (5). В *таблице 1* значения для продольной и поперечной аберрации при $F_0 = 40$, $H = 10$ и $n = 1{,}5$. В первом случае плоская волна падает на плоскую поверхность, во втором случае — на сферическую поверхность.

$X_1 = 2{,}259$	$X_2 = 1{,}164$
$Y_1 = 0{,}299$	$Y_2 = 0{,}150$

Таблица 1. Значения для продольной и поперечной аберрации при $F_0 = 40$, $H = 10$ и $n = 1{,}5$

Хорошо видно, что данное правило позволяет значительно уменьшить сферическую аберрацию.

В следующей демонстрации рассматривается пара линз одинаковой высоты H, плотно прижатых друг к другу (линзы собирающие). Наша задача получить оптическую систему с минимальной продольной компонентой сферической аберрации с заданным фокусным расстоянием F_0, варьируя радиусы линз. Показатели преломления n_1 и n_2 не подбирались, так как X минимальна при наибольших возможных значениях n_1 и n_2. На *рис. 6* изображен график зависимости продольной компоненты сферической аберрации системы линз X_Σ от первой кривизны второй линзы $1/R_3$. На графике представлено минимальное значение $X_\Sigma \approx 0{,}751$, при $1/R_1 \approx -0{,}009$; $1/R_2 \approx 0{,}016$; $1/R_3 \approx -0{,}016$; $1/R_4 \approx -0{,}004$; $F_0 = 40$; $H = 10$; $n_1 = n_2 = 1{,}5$.

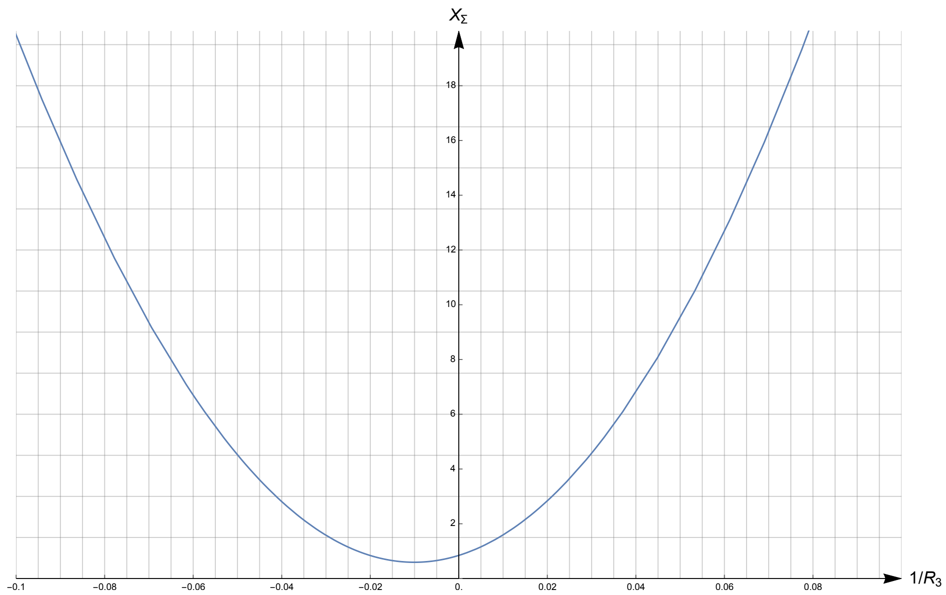

Рис. 6. График зависимости продольной компоненты сферической аберрации системы линз X_Σ от первой кривизны второй линзы $1/R_3$

Из полученного значения $X_\Sigma \approx 0{,}751$ видно, что с помощью двух линз можно значительно снизить сферическую аберрацию по сравнению с одной линзой. Для одной линзы значение составляет $X = 2{,}175$

В следующей демонстрации исследуется распределение интенсивности внутри кружка-изображения от каждой из зон на *рис. 4* в положении экрана Э$_2$. Интенсивность кружка определяется насыщенностью цвета: чем более яркий кружок, тем больше его интенсивность. На графиках представлена зависимость интенсивности I и зависимость радиуса пятна R от номера зоны N.

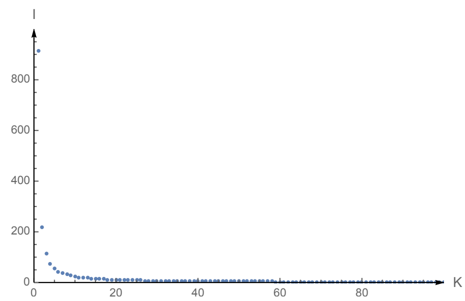

Рис. 7. График зависимости интенсивности I от номера зоны N

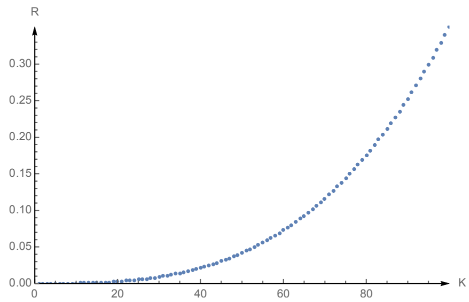

Рис. 8. График зависимости радиуса пятна R от номера зоны N

Так как интенсивность кружков резко падает *(рис. 7)*, а их радиус быстро растет *(рис. 8)*, то в реальности мы увидим не более 3-5 кружков, в которых интенсивность максимальна.

Рис. 9. Визуализация зависимости интенсивности I и радиуса пятна R от номера кружка N. На рисунке представлено 5 зон из 100 при положении экрана $Э_2$ на *рис. 4*

Рис. 10. Визуализация зависимости интенсивности I и радиуса пятна R от номера кружка N. На рисунке представлено 10 зон из 100 при положении экрана $Э_2$ на *рис. 4*

Вернемся к вопросу об оптимальном положении экрана. В последней демонстрации берется значении длины волны из видимого диапазона, исходя из этого значения по формуле (11) определяется дифракционная оценка и находится оптимальное значение z_k и X_k по формулам (12) и (13).

Построим график зависимости радиуса «яркого» пятна от k. При этом $k = 1$ соответствует положению экрана $Э_2$, а $k = 100$ — положению $Э_1$. Красной точкой отметим оптимальное положение.

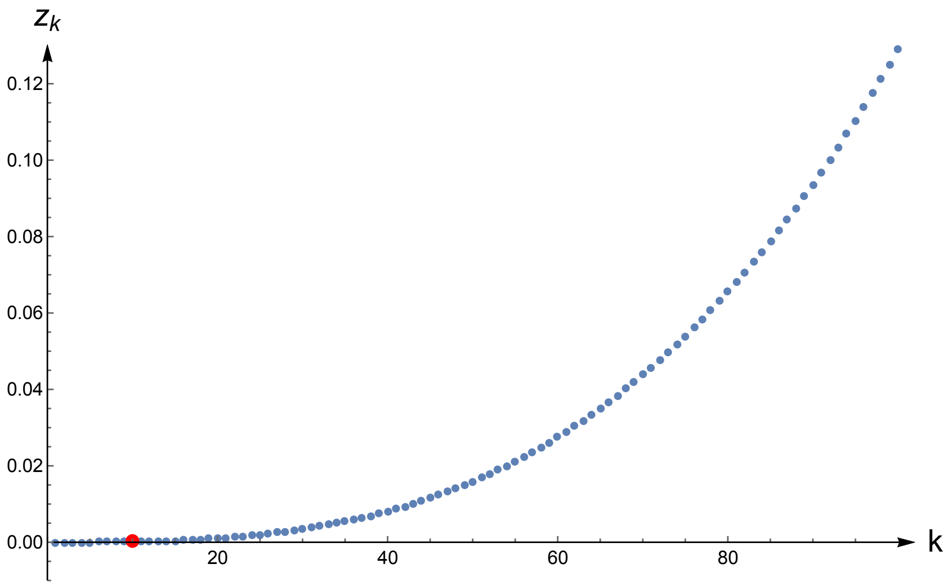

Рис. 11. Зависимость радиуса пятна z_k от положения экрана, определяемого пересечение k-ого луча и главной оптической оси

Для видимого диапазона оптимальное значение $k = 10 \div 12$, при этом радиус пятна $z_k = (4{,}5 \pm 1{,}2)$ мкм

С помощью последней программы можно также оценить количество пятен в предыдущей демонстрации, которые соответствуют нашей дифракционной оценке D. Получится порядка 16 зон.

4 Обсуждение результатов и выводы

В работе была исследована сферическая аберрация при прохождении света через собирающую линзу *(рис. 5)*. Были рассмотрены параметры, влияющие на величину продольной компоненты сферической аберрации X. При увеличении отношения F_0/H минимальное значение поперечной компоненты сферической аберрации уменьшается, при увеличении F_0/H — увеличивается. При неограниченном увеличении показателя преломления n X стремится к 0. По заданному значению F_0 и $1/R_1$ программа определяет величину $1/R_2$ так, чтобы X было минимально.

Было проверено правило «4П» — «плоской поверхностью к плоской волне плохо» для плоско-выпуклой линзы. Правило хорошо подтверждается, при этом величина аберрации в среднем уменьшается в 2 раза (*Таблица 1)*.

Рассмотрена сферическая аберрация на паре собирающих линз, плотно прижатых друг к другу *(рис. 6)*. При правильном подборе радиусов линз можно значительно уменьшить сферическую аберрацию по сравнению с одной линзой. В работе продольная компонента уменьшилась с $X = 2{,}175$ до $X_\Sigma = 0{,}751$. Программе задается фокусное расстояние системы F_0 и она подбирает оптимальные кривизны обеих линз. При этом форма линз, которую можно восстановить по значениям $1/R_1 < 0$, $1/R_2 > 0, 1/R_3 < 0, 1/R_4 < 0$, подобранным программой, совпадет с формой, предлагаемой во втором издании книги «*Lens Design Fundamentals*», *Rudolf Kingslake, R. Barry Johnson* (иллюстрация с 185 страницы).

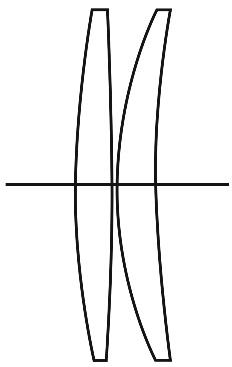

Рис. 12. A two-lins minimum aberration system

На *рис. 4* геометрическая оптика предсказывает нам, что экран нужно ставить в двойной фокус $Э_2$. Однако при таком расположении экрана из *рис. 10* видно, что максимальная интенсивность света сосредоточена в очень маленьком кружке, размер которого меньше дифракционной оценки D.

При движении экрана можно подобрать оптимальное положение радиуса пятна *(рис. 12)*. При этом получается, что наибольший вклад в интенсивность дают всего лишь 12 зон из 100.