Лабораторная работа 1.3.1 по курсу
"Общая физика"

Определение модуля Юнга на основе исследования деформаций растяжения и изгиба

Баринов Леонид

09.11.2018

1 Аннотация

В работе будет экспериментально получена зависимость между напряжением и деформацией для двух простеших напряженных состояний упругих тел: одноосного растяжения и чистого изгиба; по результатам измерений будет определен модуль Юнга и его погрешность.

2 Теоритические сведения

На Рис. 1а показана балка, деформированная под действием силы P, приложенной поссредине между опопрами А и Б. Со стороны опор на балку в точках А и Б действуют силы $P/2$. Деформация балки происходит таким образом, что продольные слои в верзней ее части оказываются сжатыми, а в нижней – растянутыми. Можно считать, что абсолютные величины напряжений по слоям растут пропорционально расстоянию от середней линнии балки, как показано стрелками на Рис. 1б для выделенного элемента балки. Так как средняя часть элемента не напряжена, то длина средней линии элемента dl_0 при деформации не меняется (так же, как длина средней линии всей балки). Такое напряженное состояние балки называется чистым изгибом. Считаема, что напряжения в слоях связаны с их деформацией законом Гука:

$$\sigma = E\frac{dl - dl_0}{dl_0} \tag{1}$$

В выделенном на рис. 1в элементе балки наклон средней линии на ее длине dl_0 меняется от α до $\alpha - d\alpha$. Длину дуги можно выразить через радиус ее кривизны R:

$$dl_0 = -Rd\alpha \tag{2}$$

Знак минус здесь потому, что R мы считаем положительным, а угол наклона средней линии балки в вырбранных на Рис. 1а координатах уменьшается по длине балки (как это показано на Рис. 1в). Если $y(x)$ – зависимость, описывающая форму средней линии балки в выбранной системе координат x, y, то угол наклона средней линии определяется выражением

$$\frac{dy(x)}{dx} = \operatorname{tg}\alpha \tag{3}$$

Длину средней линии малого элемента балки можно выразить следующим образом (см. Рис. 1г):

$$dl_0 = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{4}$$

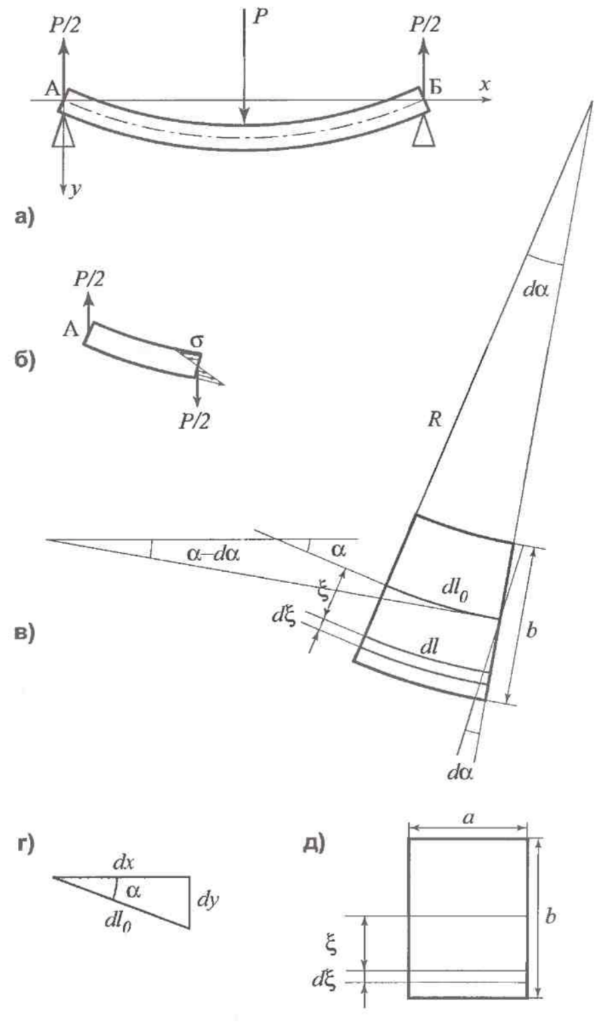

Рис. 1: Изгиб балки

Из этого же треугольника

$$\frac{dx}{dl_0} = \cos\alpha \tag{5}$$

Дифференцируя (3) по x и пользуясь (2), получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = \left(\frac{dl_0}{dx}\right)^2 \frac{d\alpha}{dl_0}\frac{dl_0}{dx} = -\left(\frac{dl_0}{dx}\right)^3 \frac{1}{R} \tag{6}$$

Отсюда и из (4) следует

$$\frac{1}{R} = -\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \tag{7}$$

Напряжение в продольном слое, находящемся на расстоянии ξ от средней линии балки (см. Рис. 1в) и описываемое формулой (1), можно представить следующим образом:

$$\sigma = E\frac{dl - dl_0}{dl_0} = \frac{E}{R}\xi \tag{8}$$

Здесь использовано соотношение, следующее из подобия тругольников наРис. 1в:

$$\frac{dl - dl_0}{\xi} = \frac{dl_0}{R} \tag{9}$$

Сумма сил упругости, действующих в сечении балки, равна нулю, поэтому их суммарный момент не зависит от положения точки, относительно которой огн вычисляется. Выберем эту точку на средней линии балки. Получаем:

$$M = \int\limits_{-b/2}^{b/2} \xi\sigma dS = \frac{E}{R}\int\limits_{-b/2}^{b/2} \xi^2 dS = \frac{E}{R}I \tag{10}$$

где $dS = as\xi$, a – ширина, b – высота поперечного сечения балки (см. Рис 1д). I называют моментом инерции поперечного сечения балки относительно оси, проходящей через срденюю линию балки. Из Рис. 3б видно, что для части балки (от $x = 0$ до x) равновесие обеспечивается равенством сил, приложенных в точке опоры и в рассамтриваемом сечении, а также равенством моментов этих сил и момента, определяемого формулой (10).

Равенсто моментов дает

$$\frac{El}{R} = \frac{xP}{2} \tag{11}$$

Теперь, используя (7), можно написать уравнение, определяющее форму средней линии балки:

$$y'' = -(1 + y'^2)^{3/2}\frac{P}{2EI}x \tag{12}$$

При малых прогибах

$$y'^2 \ll 1 \tag{13}$$

В этом случае из (12) следует

$$y'' = -\frac{P}{2EI}x \tag{14}$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$y' = -\frac{P}{4EI}x^2 + C \tag{15}$$

Здесь C – постоянная, которая определяется из условия симметрии прогиба $y' = 0$ при $x = l/2$. Из (15) следует

$$y' = -\frac{P}{4EI}\left(x^2 - \frac{l^2}{4}\right) \tag{16}$$

Интегрируя еще раз и учитывая, что при $x = 0$ также и $y = 0$, получаем уравнение средней линии балки:

$$y = \frac{Px}{48EI}(3l^2 - 4x^2) \tag{17}$$

Максимальный прогиб балки, который определяется величиной y при $x = l/2$, равен

$$y_{max} = \frac{Pl^3}{48EI} \tag{18}$$

В случае прямоугольного сечения балки

$$I = \int\limits_{-b/2}^{b/2} \xi^2 dS = a\int\limits_{-b/2}^{b/2} \xi^2 d\xi = \frac{ab^3}{12} \tag{19}$$

Из (18) и (19) для модуля Юнга получаем

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3 y_{max}} \tag{20}$$

3 Оборудование и инструментальные погрешности

В первой части работы производим растяжение проволки, и это соответсвует случаю одноосного напряженного состояния, описываемого формулой

$$\sigma = E\varepsilon$$

σ - напряжение
E - модуль Юнга
Во второй части работы измерения производят при изгибе балки, которую иногда будем называть бруском, а иногда – стержнем. Связь между прогибом балки и величиной силы, приложенной посредине между точками опор балки, может быть выражена через модуль Юнга. Это позволяет по измерениям приложенных сил и прогиба определить модуль

Юнга.
Установка 1
Диаметр проволки:

$$d = 0,46\text{мм}$$

Длина рычага:

$$r = 15\text{мм}$$

Расстояние от шкалы до зеркала:

$$h = 138\text{см}$$

$$\sigma_h = 0,5\text{см}$$

Длина проволки:

$$l = 176\text{см}$$

$$\sigma_l = 0,5\text{см}$$

Установка 2
Расстояние между ребрами призм А и Б

$$l_{\text{АБ}} = 50\text{см}$$

$$\sigma_{l_{\text{АБ}}} = 0,1\text{см}$$

Погрешность измерения штангенциркулем:

$$\sigma = 0,1\text{мм}$$

4 Эксперементальные установки

4.1 Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволки

Для определения модуля Юнга используется прибор Лермантова, схема которого изображена на Рис. 2. Верхний конец проволоки П, изготовленной из исследуемого материала, прикреплен к консоли К, а нижний – к цилиндру, которым оканчивается шарнирный кронштейн Ш. На этот же цилиндр опирается рычаг r, связанный с зеркальцем З. Таким образом, удлинение проволоки можно измерить по углу поворота зеркальца.

Натяжение проволоки можно менять, перекладывая грузы с площадки М на площадку О и наоборот. Такая система позволяет исключить влияние деформации кронштейна К на точность изерений, так как нагрузка на нем все время остается постоянной.

При проведении эксперимента следует иметь в виду, что проволока П при отсутствии нагрузки всегда несколько изогнута, что не может не сказываться на результатах, особенно при небольших нагрузках. Проволока вначале не столько растягивается, сколько распрямляется.

Выведем формулу, связывающую число делений по шкале n, расстояние h от шкалы до зеркальца, длину рычага r и удлинение проволоки Δl

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta l}{r}$$

φ - угол поворота зеркальца

$$\operatorname{tg}2\varphi = \frac{\Delta n}{n}$$

Δn - расстояние между делениями, соответствующие повороту зеркальца на φ и начальной нагрузке В силу малости φ $\operatorname{tg}2\varphi \approx 2\operatorname{tg}\varphi$

$$2\frac{\Delta l}{r} = \frac{\Delta n}{h}$$

$$\Delta l = \frac{\Delta n r}{2h}$$

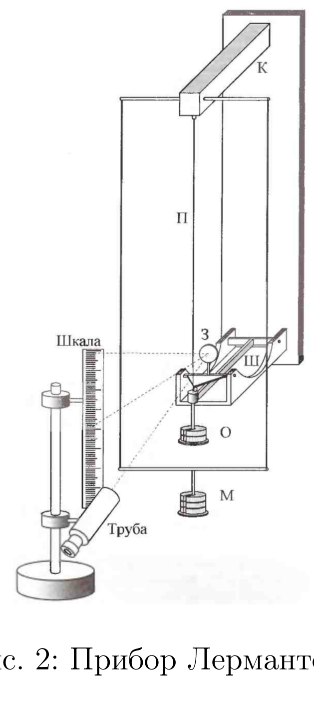

Рис. 2: Прибор Лермантова

4.2 Определение модуля Юнга по измерениям изгиба балки

Экспериментальная установка состоит из прочной стойки с опорными призмами А и Б (Рис. 3). На ребра призм опирается исследуемный стержень (балка) В. В середине стержня на призме Д подвешена площадка П с грузами. Измерять стрелу прогиба можно с помощью индикатора И, укрепляемого на отдельной штанге. Полный оборот большой стрелки индикатора соответсвует 1 мм и одному делению малого цифирблата

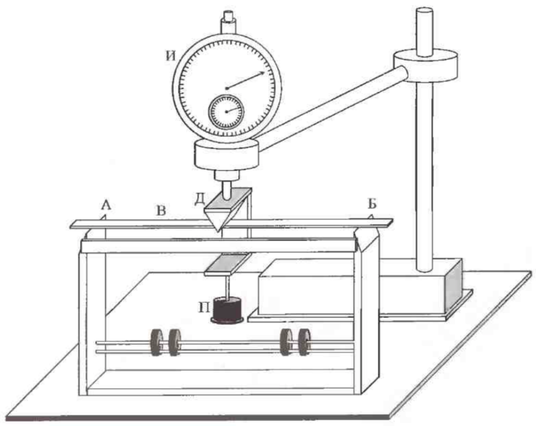

Рис. 3: Схема установки для измерения модуля Юнга

Модуль Юнга E материала стержня связан со стрелой прогиба $y_m ax$ (то есть с перемещением середины стержня) соотношением

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3 y_{max}} \tag{21}$$

Здесь P – нагрузка, вызывающая прогиб стержня, l -расстояние между призмами А и Б, a и b – ширина и высота сечения стержня.

5 Результаты измерений и обработка результатов

5.1 Определение модуля Юнга по измерениям растяжения проволки

Вычислим площадь поперечного сечения проволки:

$$S = \frac{1}{4}\pi d^2 = 0,17\text{мм}^2$$

Снимем зависимость удлинения проволки (число делений n по шкале) от массы грузов m при увелечении и уменьшении нагрузки. Без штриха указано удлинение проволки при нагрузки, со штрихом при разгрузке. $\Delta x, \Delta l, \sigma_{\Delta_l}$ указаны в мм По данным Таблицы 1 построим график зави-

m, г	P, H	Δx_1	$\Delta x_1'$	Δx_2,	$\Delta x_2'$	Δx_3	$\Delta x_3'$	Δl	σ_{Δ_l}
503,3	5,033	261	259	257	256	257	256	0	0
985,8	9,858	294	293	291	291	291	291	0,1857	0,0037
1489,3	14,893	341	340	338	339	338	338	0,4420	0,0051
1952,9	19,529	395	393	392	392	391	392	0,7328	0,0049
2408,2	24,082	453	451	451	450	450	450	1,0498	0,0049

Таблица 1: Зависимость удлинения проволоки от массы грузов

симости удлинения проволоки Δl от нагрузки P. Аппроксимируем последние четыре точки, так как при малых нагрузках удлинение проволоки определяется не растяжением, а выпрямлением.

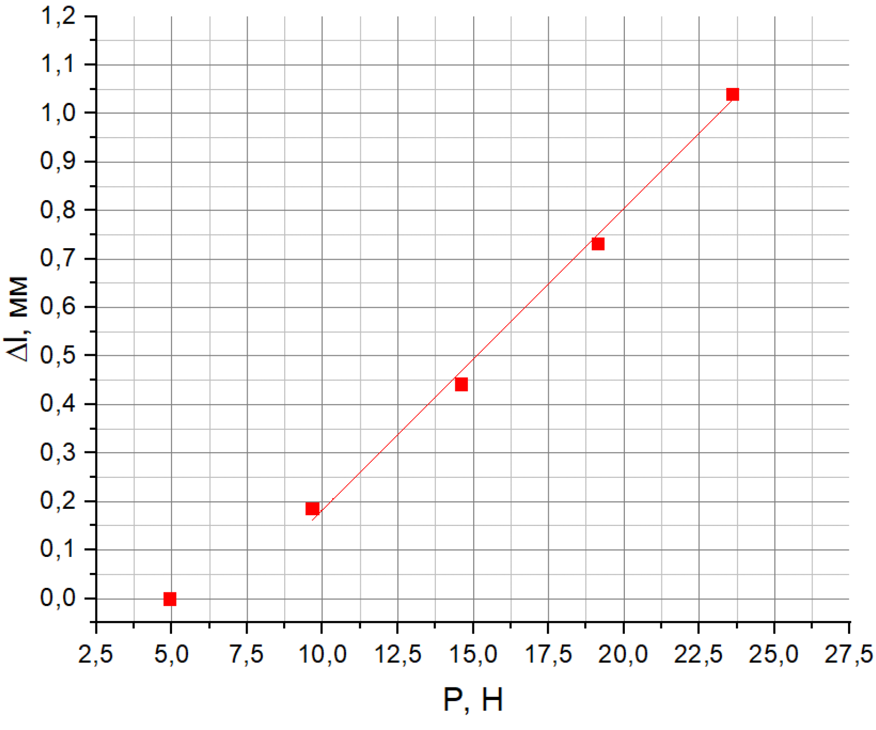

Рис. 4: Зависимость удлинения проволоки Δl от нагрузки P

По наклону графика определим жесткость проволоки k

$$k = (16111 \pm 1048)\frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

Определим модуль Юнга по формуле:

$$E = \frac{kl_0}{S} = 16,7 \cdot 10^{10}\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

Погрешность модуля Юнга приблизительно равна погрешности жесткости k, так как погрешность длины проволоки l пренебрижимо мала

$$\sigma_E = 1 \cdot 10^{10}\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$$

5.2 Определение модуля Юнга по измерениям изгиба балки

Определим ширину a и толщину b металлической и двух деревянных балок. Результаты занесем в Таблицы 2, 3, 4 соответсвенно.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a, см	2,15	2,17	2,15	2,17	2,16	2,15	2,16	2,15	2,15	2,17
b, см	0,4	0,4	0,39	0,4	0,41	0,4	0,4	0,39	0,4	0,4

Таблица 2: Ширина a и толщина b металлической балки

$$a_{\text{ср}_1} = (2,158 \pm 0,01)\text{см}$$

$$b_{\text{ср}_1} = (0,040 \pm 0,01)\text{см}$$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a, см	2	2,03	2,06	2,04	2,02	2,04	2,04	2,02	2,03	2,06
b, см	1,1	1,1	1,12	1,08	1,06	1,06	1,06	1,04	1,04	1

Таблица 3: Ширина a и толщина b первой деревянной балки

$$a_{\text{ср}_2} = (2,03 \pm 0,02)\text{см}$$

$$b_{\text{ср}_2} = (1,07 \pm 0,03)\text{см}$$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a, см	2,03	2,04	2,05	2,04	2,02	1,97	2,06	2,01	2,05	2,04
b, см	1,02	1,05	1,02	1,03	1,02	1,03	1,03	1,05	1,04	1,04

Таблица 4: Ширина a и толщина b второй деревянной балки

$$a_{\text{ср}_3} = (2,03 \pm 0,01)\text{см}$$

$$b_{\text{ср}_3} = (1,03 \pm 0,01)\text{см}$$

Снимаем зависимость стрелы прогиба x_{max} от велечины нагрузки P для всех трех баллок. Результаты заносим в Таблицы 5, 6, 7 соответсвенно. x_{max} соответсвует нагрузке, x'_{max} – разгрузке. y_{max}, y'_{max} – пермещение середины стержня при нагрузке и разгрузке.

m, г	P, H	x_{max}, мм	y_{max}, мм	x'_{max}, мм	y'_{max}, мм
0	0	5,76	0	5,74	0
497,3	0,487354	4,63	1,13	4,5	1,24
965,2	0,945896	3,41	2,35	3,36	2,38
1476,2	1,446676	2,35	3,41	2,19	3,55
1943,8	1,904924	1,23	4,53	1,3	4,44
2405,6	2,357488	0,19	5,57	0,19	5,55

Таблица 5: Зависимость стрелы прогиба от величины нагрузки для металлической балки

m, г	P, H	x_{max}, мм	y_{max}, мм	x'_{max}, мм	y'_{max}, мм
0	0	4,88	0	4,79	0
497,3	0,487354	4,14	0,74	4,00	0,79
965,2	0,945896	3,55	1,33	3,36	1,43
1476,2	1,446676	2,92	1,96	2,83	1,96
1943,8	1,904924	2,34	2,54	2,15	2,64
2405,6	2,357488	1,72	3,16	1,70	3,09

Таблица 6: Зависимость стрелы прогиба от величины нагрузки для первой деревянной балки

m, г	P, H	x_{max}, мм	y_{max}, мм	x'_{max}, мм	y'_{max}, мм
0	0	4,68	0	4,68	0
497,3	0,487354	4,03	0,65	3,97	0,71
965,2	0,945896	3,42	1,26	3,36	1,32
1476,2	1,446676	2,79	1,89	2,75	1,93
1943,8	1,904924	2,35	2,33	2,19	2,49
2405,6	2,357488	1,86	2,82	1,86	2,82

Таблица 7: Зависимость стрелы прогиба от величины нагрузки для второй деревянной балки

По данным Таблиц 5, 6, 7 построим 6 графиков (Рис. 5, 6 для металлической балки, Рис 7, 8 для первой деревянной балки, Рис 9, 10 для второй деревянной балки) "нагрузка-прогиб"

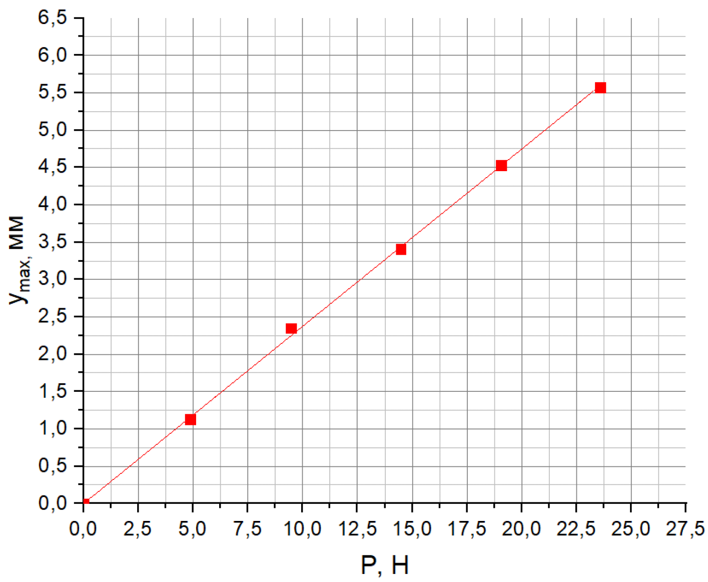

Рис. 5: Зависимость перемещения середины стержня при нагрузке металлической балки

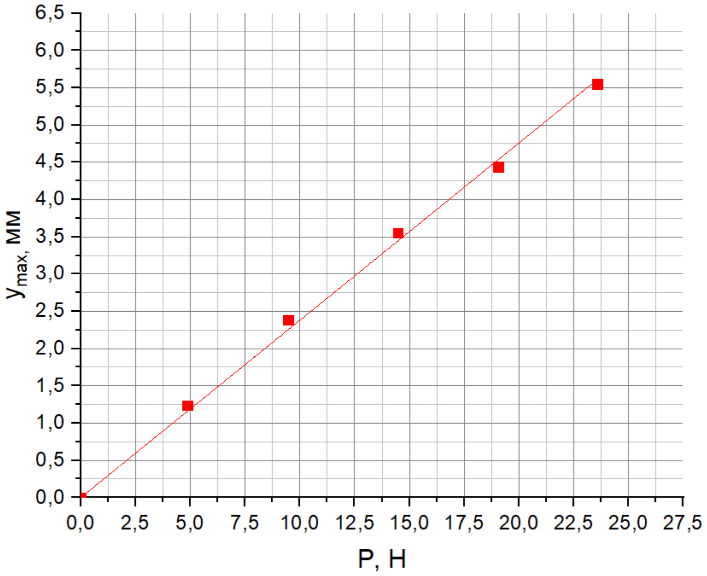

Рис. 6: Зависимость перемещения середины стержня при разгрузке металлической балки

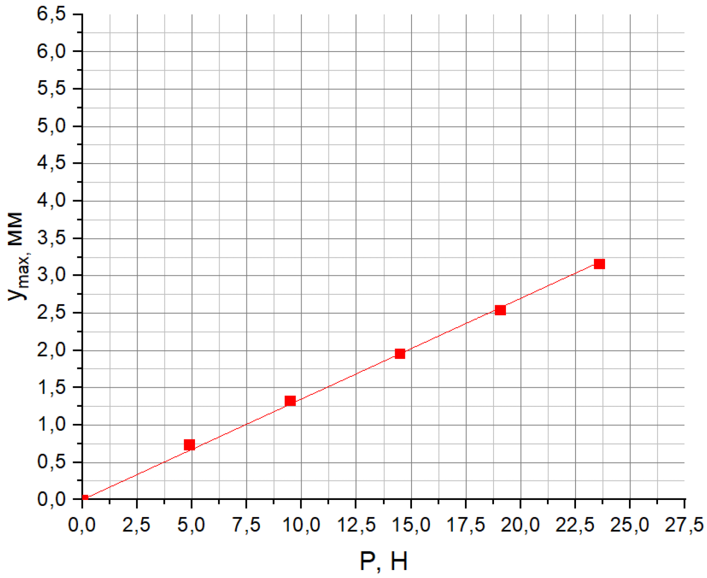

Рис. 7: Зависимость перемещения середины стержня при нагрузке первой деревянной балки

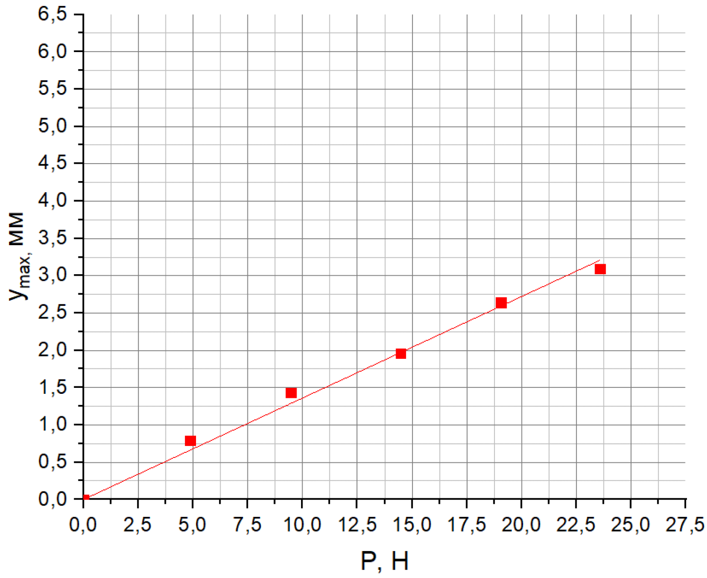

Рис. 8: Зависимость перемещения середины стержня при разгрузке первой деревянной балки

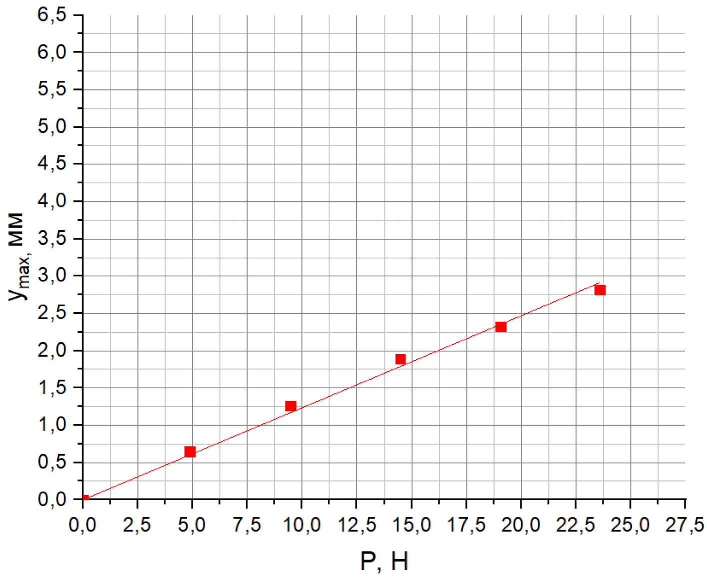

Рис. 9: Зависимость перемещения середины стержня при нагрузке второй деревянной балки

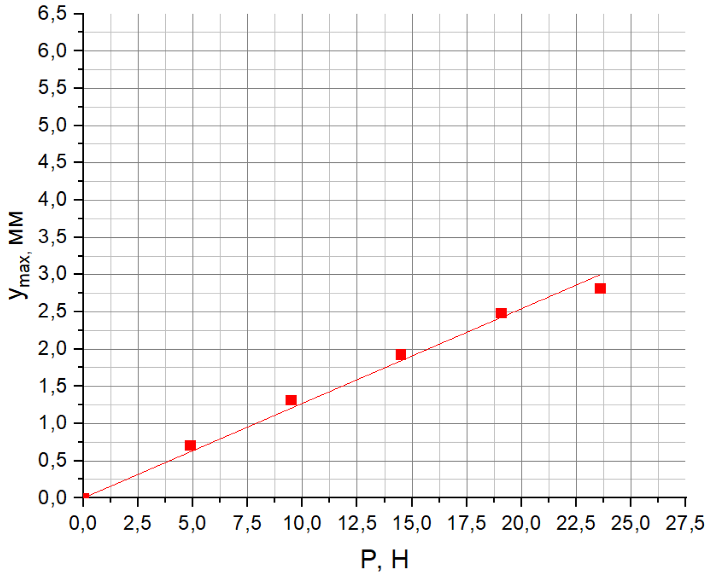

Рис. 10: Зависимость перемещения середины стержня при разгрузке второй деревянной балки

Переворачиваем балки таким образом, чтобы при напряжении она изгибалась в противоположную сторону и повторяем измерения. Результаты заносим в Таблицы 8, 9, 10.

m, г	P, H	x_{max}, мм	y_{max}, мм	x'_{max}, мм	y'_{max}, мм
0	0	5,87	0	5,85	0
497,3	0,487	4,69	1,18	4,63	1,22
965,2	0,946	3,57	2,3	3,48	2,37
1476,2	1,447	2,25	3,62	2,24	3,61
1943,8	1,905	1,15	4,72	1,11	4,74
2405,6	2,357	0,17	5,7	0,17	5,68

Таблица 8: Зависимость стрелы прогиба от величины нагрузки для металлической балки (перевернутой)

m, г	P, H	x_{max}, мм	y_{max}, мм	x'_{max}, мм	y'_{max}, мм
0	0	6,52	0	6,13	0
497,3	0,487	5,85	0,67	5,42	0,71
965,2	0,946	4,97	1,55	4,72	1,41
1476,2	1,447	4,15	2,37	3,99	2,14
1943,8	1,905	3,35	3,17	3,35	2,78
2405,6	2,457	2,64	3,88	2,64	3,49

Таблица 9: Зависимость стрелы прогиба от величины нагрузки для первой деревянной балки(перевернутой)

m, г	P, H	x_{max}, мм	y_{max}, мм	x'_{max}, мм	y'_{max}, мм
0	0	4,34	0	4,31	0
497,3	0,487	3,69	0,65	3,6	0,71
965,2	0,946	3,1	1,24	3,01	1,3
1476,2	1,447	2,44	1,9	2,38	1,93
1943,8	1,905	1,96	2,38	1,9	2,41
2405,6	2,457	1,53	2,81	1,53	2,78

Таблица 10: Зависимость стрелы прогиба от величины нагрузки для второй деревянной балки(перевернутой)

Сместим призму Д на 2-3мм от точки, принятой за середину балки и измерим стрелу прогиба. Результат занесем в Таблицу 11.

m, г	P, H	x_{max}, мм	y_{max}, мм	x'_{max}, мм	y'_{max}, мм
0	0	7,8	0	7,76	0
497,3	0,487354	7,19	0,61	7,1	0,66
965,2	0,945896	6,63	1,17	6,48	1,28
1476,2	1,446676	5,9	1,9	5,78	1,98
1943,8	1,904924	5,29	2,51	5,21	2,55
2405,6	2,357488	4,86	2,94	4,86	2,9

Таблица 11: Зависимость стрелы прогиба от величины нагрузки для первой деревянной балки(смещенной на 2-3мм)

Посчитаем модуль Юнга с помощью графиков (Рис. 5-10) и формулы (20)

$$E_{\text{мет}} = (96,1 \pm 1,1)\text{ГПа}$$

$$E_{\text{дер}_1} = (9,5 \pm 0,9)\text{ГПа}$$

$$E_{\text{дер}_2} = (11,0 \pm 0,5)\text{ГПа}$$

6 Обсуждение результатов и выводы

В работе был определен модуль Юнга с помщью графика зависимости между удлинением проволки и нагрузки на нее для одноосного растяжения проволоки:

$$E = (167 \pm 11)\text{ГПа}$$

Значение Модулю Юнга для стали, полученное в эксперименте соответсвует табличному.

Также был определен модуль Юнга с помщью зависимостм стрелы прогиба от величины нагрузки на балку из исследумего материала.

$$E_{\text{мет}} = (96,1 \pm 1,1)\text{ГПа}$$

Значение Модулю Юнга для латуни, полученное в эксперименте соответсвует табличному.

$$E_{\text{дер}_1} = (9,5 \pm 0,9)\text{ГПа}$$

$$E_{\text{дер}_2} = (11,0 \pm 0,5)\text{ГПа}$$

Значение Модулю Юнга для дерева, полученное в эксперименте соответсвует табличному (предположительно балка была из сосны).

Из сравнения результатов в Таблицах 5, 6, 7 с результатами в Таблицах 8, 9, 10 следует, что при перевороте металлической балки смещение середины балки при соответсующих нагрузках почти не изменяется; при перевороте деревянных баллок изменения более заметны в виду формы балки.

Из сравнения результатов в Таблце 6 с результатами в Таблице 11 следует, что при смещении балки на 2-3 мм пермещения середин балок для одинаковых нагрузок приблизительно равны.