

Лабораторный журнал 1.4.5 по курсу  
"Общая физика"

**Изучение колебаний струны**

Баринов Леонид

26.10.2018

# 1 Цель работы

Изучение поперечных стоячих волн на струне; определение собственных частот колебаний струны; исследование зависимости скорости распространения поперечных волн на струне в зависимости от её натяжения.

## 2 Теоритические данные

### 2.1 Введение

Второй закон Ньютона для вертикального движения элемента струны:

$$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 \quad (1)$$

$T_1$  и  $T_2$  - силы натяжения, действующие на элемент струны, возникающие при отклонении от равновесия и направленные по касательной к струне

Скорость распространения волн на струне:

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \quad (2)$$

Уравнение свободных малых поперечных колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

Уравнение (3) называют волновым уравнением. Кроме волн на струне, оно может описывать волновые процессы в самых разных системах, в том числе волны в сплошных средах(звук), электромагнитные волны и т. д.

### 2.2 Бегущие волны

Решение дифференциального уравнения в частных производных (3) представимо в виде суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями  $\pm u$ :

$$y(x, t) = y_1(x - ut) + y_2(x + ut), \quad (4)$$

где  $u$  – скорость распространения волны (2),  $y_1$  и  $y_2$  – произвольные функции, вид которых в конкретной задаче определяется из начальных и граничных условий.

Особый интерес представляет случай гармонических волн:

$$y(x, t) = a \cos[k(x-ut)] + b \cos[k(x+ut)] = a \cos(\omega t - kx) + b \cos(\omega t + kx) \quad (5)$$

Выражение (5) представляет собой суперпозицию двух гармонических волн, бегущих навстречу друг другу со скоростью

$$u = \frac{\omega}{k} = \nu \lambda \quad (6)$$

Их *длина волны*  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , *частота*  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ . Величина  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  называется волновым числом или пространственной частотой волны. Заметим, что формула (2) означает, что скорость  $u$  распространения поперечных волн на струне зависит только от силы натяжения струны  $T$  и ее погонной плотности  $\rho_l$ .

## 2.3 Собственные колебания струны. Стоячие волны

Функция, описывающая стоячие волны:

$$y(x, t) = 2a \sin kx \cdot \sin \omega t \quad (7)$$

Видно, что стоячая волна может быть получена как сумма (интерференция) двух гармонических бегущих волн, имеющих равную амплитуду и движущихся навстречу друг другу.

Как видно из (7), точки струны, в которых  $\sin kx = 0$ , в любой момент времени неподвижны. Такие точки называются узлами. Остальные точки совершают в вертикальной плоскости гармонические колебания с частотой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{u}{\lambda}$$

Амплитуда колебаний распределена вдоль струны по гармоническому закону:  $y_0(x) = 2a \sin kx$ . В точках, где  $\sin kx = 1$ , амплитуда колебаний максимальна – они называются пучностями. Между двумя соседними узлами все участки струны колеблются в фазу (их скорости имеют одинаковое направление), а при переходе через узел фаза колебаний меняется на  $\pi$  вследствие изменения знака  $\sin kx$ .

Используя второе граничное условие  $y(L, t) = 0$  (точки крепления струны должны быть узлами стоячей волны), найдем условие образования стоячих волн на струне:  $y(x, t) = 2a \sin kL \cdot \sin \omega t = 0$ , откуда

$$\sin kL = 0 \rightarrow kL = n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{N}$$

Таким образом, стоячие волны на струне с закрепленными концами могут образовываться только если на длине струны укладывается целое число полуволн:

$$L = \frac{\lambda_n}{2}n \quad (8)$$

Поскольку длина волны однозначно связана с ее частотой, струна может колебаться только с определенными частотами:

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}, n \in \mathbb{N} \quad (9)$$

Набор (спектр) разрешенных частот  $\nu_n$  называют собственными частотами колебаний струны. Режим колебаний соответствующий каждой из частот  $\nu_n$ , называется собственной (или нормальной) модой колебаний. Произвольное колебание струны может быть представлено в виде суперпозиции ее собственных колебаний. Наименьшая частота  $\nu_1$  называется также основным тоном (или первой гармоникой), а остальные ( $\nu_2 = 2\nu_1, \nu_3 = 3\nu_1, \dots$ ) - обертонами (высшими гармониками). Термин "гармоника иногда употребляется в общем смысле – как элементарная составляющая сложного гармонического колебания.

На Рис. 1 показана картина стоячих волн для  $n = 1, 2, 3$ . Заметим, что число  $n$  определяет число пучностей (но не узлов!) колеблющейся струны.

Таким образом спектр собственных частот струны определен ее погонной плотностью  $\rho_l$ , силой натяжения  $T$  и длиной струны  $L$  (отдельно отметим, что собственные частоты не зависят от модуля Юнга материала струны).

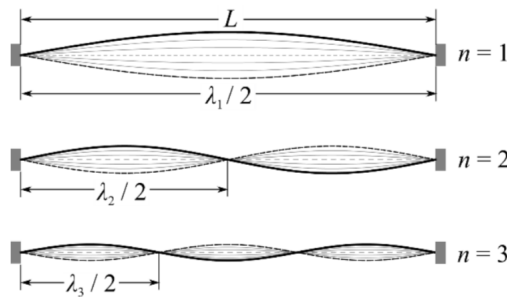


Рис. 1: Стоячие волны (собственные моды колебаний струны) для  $n = 1, 2, 3$

## 2.4 Возбуждение колебаний струны

При колебаниях реальной струны всегда имеет место потеря энергии (часть теряется вследствие трения о воздух, другая часть уходит через неидеально закрепленные концы струны и т. д.). Поддержание незатухающих колебаний в струне может осуществляться точечным источником, в качестве которого в данной работе использует электромагнитный вибратор. При этом возникает необходимость переноса энергии от источника по всей струне.

Рассмотрим вопрос о передаче энергии по струне. В стоячей волне поток энергии вдоль струны отсутствует – колебательная энергия, заключенная в отрезке струны между двумя соседними узлами, не транспортируется в другие части струны. В каждом таком отрезке происходит периодическое (дважды за период) превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. Передача энергии между различными участками струны возможно только благодаря бегущим волнам, которые, однако, в рассмотренной выше идеальной модели струны не возникают. Парадокс снимается, если учесть, что из-за потерь энергии при отражении волны от концов не происходит полной компенсации падающей и отраженной волны, поэтому к стоячей волне на струне добавляется малая бегущая компонента – именно она служит "разносчиком" энергии по всей системе.

Для эффективной раскачки колебаний используется явление резонанса – вынуждающая частота  $\nu$  должна совпадать с одной из собственных частот струны  $\nu_n$  (см. (9)). Когда потери энергии в точности компенсируются энергией, поступающей от вибратора, колебания струны становятся стационарными и на ней можно наблюдать стоячие волны. Если потери энергии за период малы по сравнению с запасом колебательной энергии в струне, то искажение стоячих волн бегущей волной не существенно — наложение бегущей волны малой амплитуды на стоячую визуально приводит к незначительному «размытию» узлов. Для достижения максимального эффекта от вибратора, его следует располагать вблизи узловой точки. Это можно показать из следующих элементарных соображений. Пусть вибратор, размещённый в точке  $x_0$ , способен раскачать соответствующий элемент струны до амплитуды  $a$ . Если частота вибратора близка к резонансной (т.е. собственной), то как следует из (7), амплитуда колебаний струны в пучности будет равна  $2a = \frac{A}{\sin kx_0}$ . Таким образом, максимальная раскачка струны достигается, если значение  $\sin kx_0$  устремить к нулю, что и соответствует положениям узлов (из идеализированной модели струны следует, что при размещении вибратора в узле амплитуда колебаний устремится к бесконечности, однако в реальности

она ограничивается силами трения и нелинейными эффектами).

Заметим также, что при наблюдении стоячих волн важно, чтобы колебания происходили в одной (вертикальной) плоскости, т. е. были поляризованы. Кроме того, важно, чтобы колебания струны проходили с малой амплитудой, поскольку при сильном возбуждении нарушаются условия применимости волнового уравнения (3), и в опыте наблюдаются искажения, связанные с нелинейными эффектами.

### 3 Экспериментальная установка:

Схема установки приведена на Рис. 1. Стальная гитарная струна 1 закрепляется в горизонтальном положении между двумя стойками с зажимами 2 и 3, расположенными на массивной станине 4. Один конец струны закреплен в зажиме 2 неподвижно. К противоположному концу струны, перекинутому через блок, прикреплена платформа с грузами 5, создающими натяжение струны. Зажим 3 можно передвигать по станине, устанавливая требуемую длину струны. Возбуждение и регистрация колебаний струны осуществляются с помощью электромагнитных датчиков (вибраторов), расположенных на станине под струной. Электромагнитный датчик 6 подключен к звуковому генератору 7 и служит для возбуждения колебаний струны, частота которых измеряется с помощью частотомера 10 (в некоторых установках частотер встроен в генератор). Колебания струны регистрируются с помощью электромагнитного датчика 8, сигнал которого передается на вход осциллографа 9. Разъемы, через которые датчики с помощью кабелей соединяются с генератором и осциллографом, расположены на корпусе станины.

#### 3.1 Измерения с помощью осциллографа

Для регистрации колебаний струны в работе используется электронный осциллограф, соединенный с электромагнитным датчиком 8. Он позволяет регистрировать колебания в случаях, когда это невозможно сделать визуально. Также с помощью осциллографа можно измерять амплитуду возбуждения и форму сигнала, что дает возможность установить, является ли режим возбуждения стоячих волн линейным, иными словами, имеет ли место прямая пропорциональность между силой возбуждения и амплитудой колебаний струны, и не возникает ли отклонений от закона (7).

Контролировать величину и форму сигнала колебаний струны на экране осциллографа можно несколькими способами: в одноканальном и

двухканальном режимах работы осциллографа – по временной равертке сигналов, а также в режиме сложения двух взаимно перпендикулярных сигналов – основного и опорного

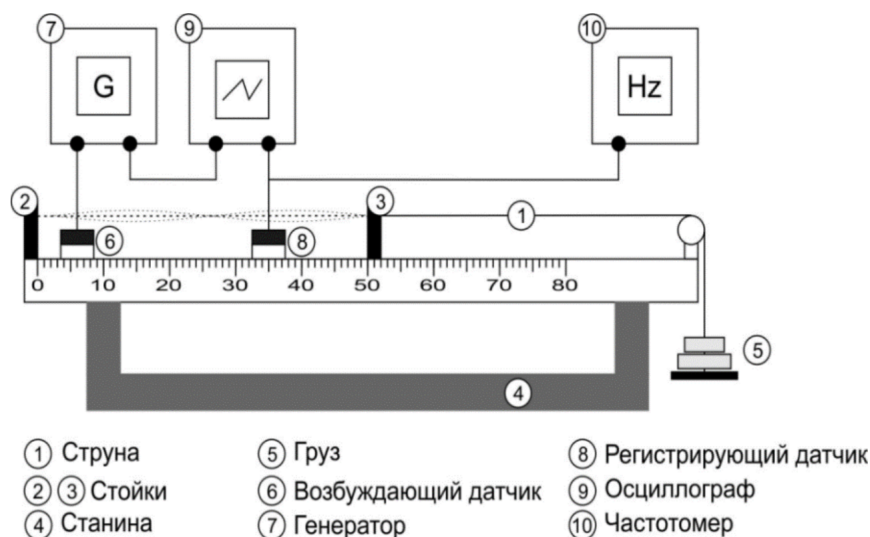


Рис. 2: Экспериментальная установка

При возбуждении стоячей волны на экране осциллографа в режиме развертки должен появиться сигнал синусоидальной формы. При чрезмерном возбуждении вид синусоиды искажается, что свидетельствует об отклонении от линейного режима. В двухканальном режиме осциллографа можно сравнить опорный (подаваемый одновременно на возбуждатель колебаний 6 и канал CH1 осциллографа) и основной (снимаемый с датчика 8) сигналы — в отсутствие нелинейных искажений они должны совпадать. Кроме того, в режиме сложения сигналов (X-Y) на экране должен прорисовываться эллипс правильной формы.

Дополнительным критерием того, что частота гармоника определена верно, является симметричность «резонансной кривой» — амплитудно-частотной характеристики системы (Рис. 5). А именно, при подходе к резонансной частоте со стороны как высоких, так и со стороны низких частот, максимум сигнала наблюдается при одном и том же значении частоты.

## 4 Ход работы

### 4.1 Визуальное наблюдение стоячих волн

- Освободите зажим струны на стойке 3, установите длину струны  $L = 50\text{ см}$ . Натяните струну, поставив на платформу грузы ( $F \approx 1\text{ кг}$ ) (учтите вес платформы и крепежа). Осторожно зажмите струну в стойке, не деформируя струну. Возбуждающий датчик 6 должен располагаться рядом с неподвижной стойкой 2, т.е. вблизи узла стоячей волны.
- Проведите предварительные расчёты. Оцените скорость распространения волн по формуле (2), используя табличное значение плотности стали ( $\rho_{\text{ст}} = 7,8 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ ) и приняв диаметр струны равным  $d \approx 0,3\text{ мм}$ . Для заданных значений длины струны и силы натяжения рассчитайте частоту основной гармоники  $\nu_1$  согласно (9).

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \approx 67,3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}}$$

- Включите в сеть звуковой генератор и частотомер. Установите на генераторе тип сигнала — синусоидальный, частоту основной гармоники  $\nu_1$  и максимальную амплитуду напряжения. При этом сигнал с выхода генератора должен быть подан на возбуждающий датчик 6 (проверьте правильность со-единения проводов!).
- Медленно меняя частоту звукового генератора в диапазоне  $\nu = \nu_1 \pm 5\text{ Гц}$ , добейтесь возбуждения стоячей волны на основной гармонике (одна пучность). Если при колебаниях струна касается регистрирующего датчика 8, осторожно сдвиньте датчик по скамье в сторону подвижного зажима струны 3. Определите частоту первой гармоники по частотомеру.
- Увеличив частоту в 2 раза, получите картину стоячих волн на второй гармонике, а затем и на более высоких гармониках. Обычно визуально удастся наблюдать до 5-7 гармоник. Запишите значения частот стоячих волн, которые удастся пронаблюдать.



## 4.2 Регистрация стоячих волн с помощью осциллографа

- Визуально настройте струну на основной гармонике, не меняя нагрузку струны и её длину. Установите регистрирующий датчик 8 в центре под струной (в пучности стоячей волны). Уменьшите уровень выходного сигнала генератора так, чтобы при колебаниях струна не касалась датчика. Проверьте правильность соединения проводов. Сигнал колебаний струны с регистрирующего датчика 8 (основной сигнал) подается на вход канала CH2(Y) осциллографа. На вход канала CH1(X) подается опорный сигнал с генератора на частоте возбуждения струны.
- Включите осциллограф в сеть и проверьте его настройку. Для наблюдения колебаний струны в одноканальном режиме переключатель режима работы MODE блока вертикального отклонения должен стоять в положении CH2; тумблер режима работы канала Y — в положение AC; на блоке синхронизации установите SOURCE — CH2. Установите такие значения коэффициента усиления канала Y (VOLTS/DIV); постоянную времени развертки (TIME/DIV) и уровень синхронизации (LEVEL), чтобы на экране было удобно наблюдать форму сигнала.

Подстройте частоту  $\nu$  генератора так, чтобы амплитуда сигнала была максимальна. Добейтесь отсутствия нелинейных искажений, уменьшая уровень возбуждения (амплитуду напряжения генератора) и подстраивая при этом частоту так, чтобы она соответствовала максимуму сигнала. Запишите окончательное значение частоты основной гармоники  $\nu_1$ .

- Проведите измерение частот не менее 5 нечетных ( $n = 1, 3, 5, 7, 9$ ) гармоник стоячих волн при длине струны 50 см и массе грузов  $\approx 1$  кг. Для наблюдения нечетных гармоник регистрирующий датчик следует размещать в центре под струной (как для основной гармоники).
- Измерьте частоты четных ( $n = 2, 4, \dots$ ) гармоник. Для этого осторожно смещайте регистрирующий датчик 8 по станине в предварительно рассчитанные положения пучностей. Во избежание взаимного влияния («резонирования») датчиков регистрирующий датчик следует сдвигать в сторону подвижного зажима струны 3.

- Проведите опыты пп. 8 и 9 не менее, чем для пяти различных натяжений струны. При изменении нагрузки следует ослабить зажим струны в стойке 3, положить груз на чашку и вновь осторожно зажать струну.

Максимальная нагрузка — не выше 3,5 кг!

- Благодаря высокой добротности струны, возможно возбуждение её колебаний при кратных частотах генератора, меньших, чем  $\nu_1$ . Для наблюдения явления переключите осциллограф в режим (X-Y) и настройте установку на наблюдение основной гармоник. Затем уменьшите частоту возбуждения в два раза, установив на генераторе  $\nu = \nu_1/2$ . На экране осциллографа должна наблюдаться фигура Лиссажу с одним самопересечением. Зарисуйте (или сфотографируйте) наблюдаемую фигуру. Постарайтесь объяснить явление.
- Определите добротность  $Q$  струны как колебательной системы, измерив её амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) вблизи одной из резонансных частот (в качестве таковых рекомендуется выбрать 1 или 3) для нескольких натяжений струны (по указанию преподавателя).

Для расчётов воспользуйтесь известным из теории колебаний результатом: добротность колебательной системы связана с резонансной частотой  $\nu_{\text{рез}}$  и шириной резонансной кривой  $\Delta\nu$  соотношением

$$Q = \frac{\nu_{\text{рез}}}{\Delta\nu}$$

где ширина резонансной кривой  $\Delta\nu$  измеряется на уровне амплитуды, составляющей 0,7 от амплитуды в резонансе (Рис. 3)

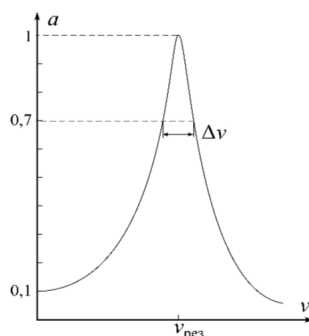


Рис. 3: АЧХ вынужденных колебаний (линейный режим возбуждения)

## 5 Измерение и обработка дынных

№	1	2	3	4	5	6
$m$						

Таблица 1: измерение массы грузиков

$n$	1	2	3	4	5	6
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						

Таблица 2: Измерение частоты для  $n$  количества полуволи при натяжении струны  $T_1$

$n$	1	2	3	4	5	6
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						

Таблица 3: Измерение частоты для  $n$  количества полуволи при натяжении струны  $T_2$

$n$	1	2	3	4	5	6
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						

Таблица 4: Измерение частоты для  $n$  количества полувольт при натяжении струны  $T_3$

$n$	1	2	3	4	5	6
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						

Таблица 5: Измерение частоты для  $n$  количества полувольт при натяжении струны  $T_4$

$n$	1	2	3	4	5	6
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						

Таблица 6: Измерение частоты для  $n$  количества полувольт при натяжении струны  $T_5$

$n$	1	2	3	4	5	6
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						
$f, \Gamma_{\Pi}$						

Таблица 7: Измерение частоты для  $n$  количества полувольт при натяжении струны  $T_6$