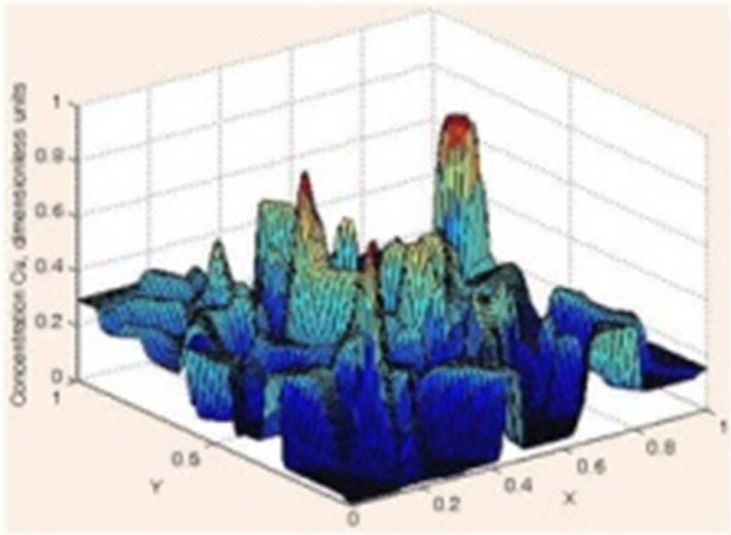


Комп'ютерне моделювання задач прикладної математики

Динамічні системи.

Лекція 8

Система – множина відокремлених з середовища та взаємодіючих з ним та між собою елементів

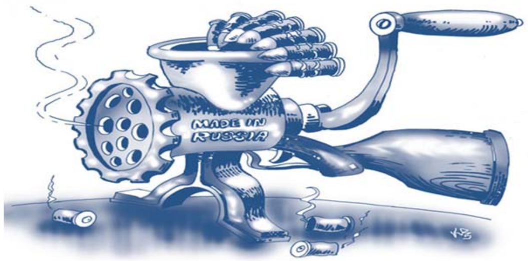
Важливі принципи для розуміння концепції системи:

- Система виокремлюється з середовища своїми властивостями. Системи бувають відкриті та ізольовані.
- Система володіє множиною станів, які відповідають її різноманітним властивостям, що описуються набором параметрів.
- Структура системи є більш консервативною характеристикою системи, аніж її стан.
- Система має ієрархічну будову.
- Домінування ролі цілого над частиною, складного над простим.
- Ціле більше за суму своїх частин.
- Система володіє структурою з визначеним розміщенням та зв'язками її складових частин.
- Властивості системи як цілого визначаються не тільки властивостями її окремих частин, а також і властивостями структури системи в цілому.
- Серед множини параметрів системи є головні,від яких залежить існування системи.
- Гомеостаз системи зберігає головні життєво важливі параметри в процесі її адаптації до зовнішніх умов, чим підтримує існування самої системи.

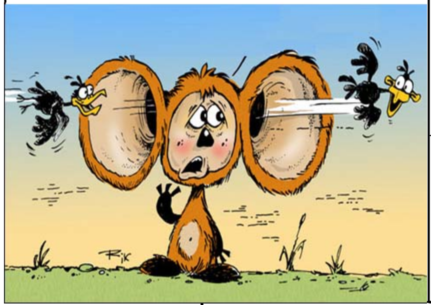
Види динамічних систем

Консервативні

Дисипативні



Відкриті (активні)



Ізольовані

Інтегровні (оборотні)

Неінтегровні (еволюційні)

«Життя було б значно кращим, якби проходило у зворотньому напрямку»

Живі (біологічні)

Інші (фізичні.,хімічні., економічні, соціальні,…)

Динамічна система це будь-який об’єкт, чи процес (фізичний, хімічний, біологічний, обчислювальний,інформаційний, тощо), для якого у кожний момент часу визначено поняття стану як сукупності певної кількості параметрів та задано закон зміни цих параметрів у часі .

Отож, для описання системи слід вказати значення $\mathbf{u_1, u_2, \ldots, u_n}$ у деякий момент часу $\mathbf{t = t_0}$ та закон їхньої еволюції

$$\frac{du_i}{dt} = \dot{u} = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, t) \qquad \frac{du_i}{dt} + D_i \Delta u_i = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, t)$$

Консервативні системи

$$F = m\ddot{x}$$

$$\int F dx = \int \frac{d}{dt}(m\dot{x})\, dx = $$

$$= \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

Рівняння руху динамічних систем на основі 2-го закону Ньютона виконується у кожній точці досліджуваної області.

Вибір енергії головним параметром системи дає змогу замінити другу похідну на квадрат першої.

Отож є сенс у переході від поточкового розгляду до аналізу системи в цілому

Динамічні моделі у цьому випадку будуються на різних принципах:

- H = T + V = const
- мінімуму потенціальної енергії $F_i = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dV}{dt} = 0$
- віртуальних переміщень

$$F_S = 0 \quad \Rightarrow \quad F_S \delta r_S \Rightarrow \sum_s F_S \delta r_S = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W = 0, \quad s = 1, \ldots, n$$

Принцип Даламбера:

Повна робота ефективних сил на оборотних сумісних зі зв'язками віртуальних переміщеннях довільної динамічної системи дорівнює нулю.

Успіх розв'язування більшості задач механіки забезпечується вдалим вибором системи координат. Застосування узагальнених координат спрощує (автоматизує) врахування внутрішніх зв'язків у системі (відцентрові сили, сила Коріоліса).

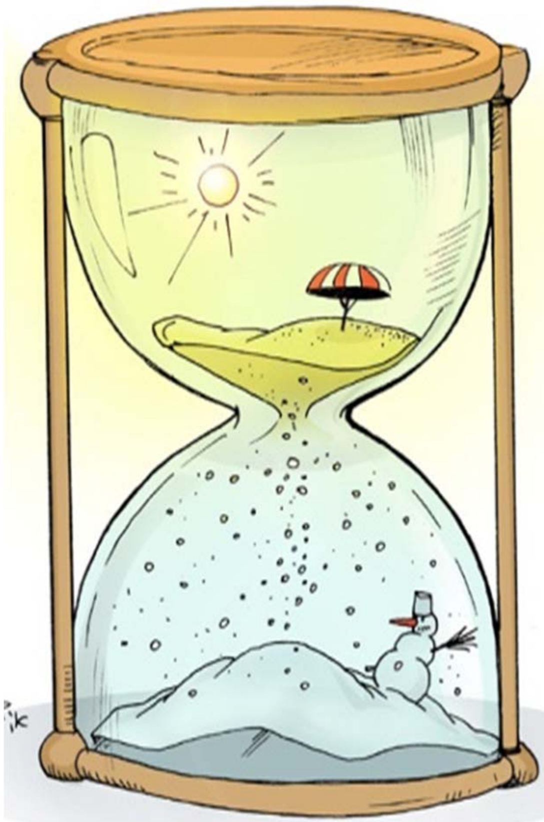
Лагранжева механіка. Аналітична механіка.

Узагальнені імпульси. Принцип Гамільтона.

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = \frac{\partial H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})}{\partial x_i}$$

Інтегровні (оборотні) системи

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$



Фундаментальні закони класичної механіки Ньютона є симетричними (інваріантними) відносно часу – формальна заміна **t** на **-t** у рівняннях руху не призводить до протиріч.

Подальші етапи розвитку фізики – електродинаміка, квантова механіка, теорія відносності показали, що й інші фундаментальні закони природи є оборотними щодо часу.

Як альтетнативу пошуку традиційних розв'язків (інтегралів) математичних моделей у вигляді аналітичних функцій часто шукають функції (перші інтеграли), що постійні упродовж цих розв'язків.

$$F_1 = c_1 = \text{const}, \ldots F_n = c_n = \text{const}$$

За наявності повного набору перших інтегралів система вважається інтегровною, оскільки знаходження самих розв'язків є (???) вже більш простою задачею.

Неінтегровні (еволюційні) системи

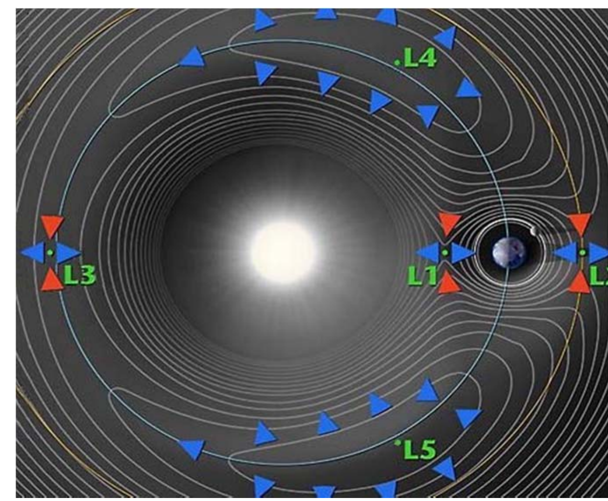
Якщо мене ніхто про це не питає, то я знаю, что таке час

У «Сповіді» Августина (354-430),

Не рахувати треба дні, а зважувати

Пліній Старший Рим,

Задача про рух трьох тіл у загальному випадку розв’язку не має



Точки Лагранжа

Ціле = Σ Частин + необоротність

Дисипативні системи

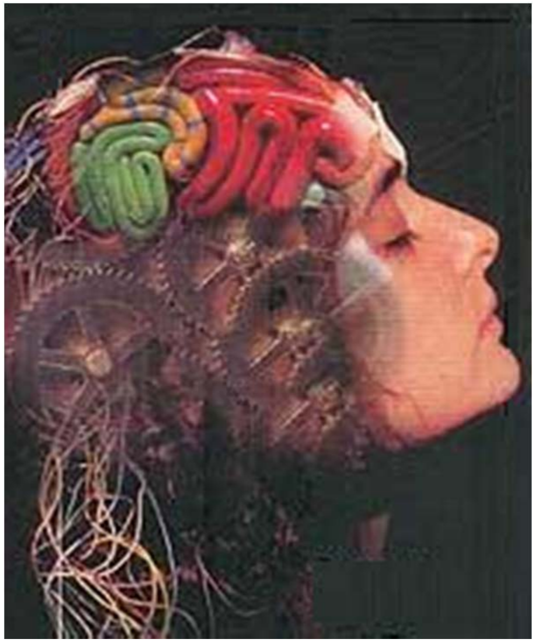
Повна енергія системи змінюється у часі.

Ізольовані системи.

В умовах ізоляції за наявності дисипації будь-яка система прямує і, рано, чи пізно, прийде до рівноважного стану.

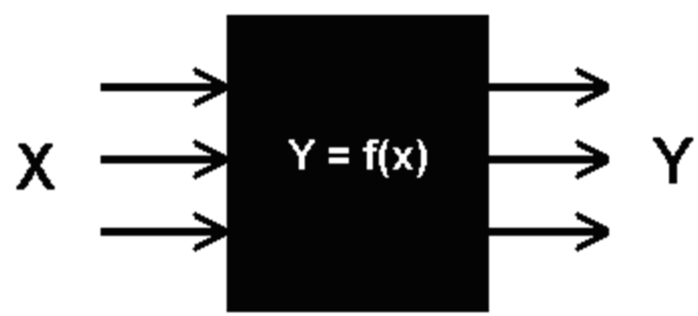
Відкриті (активні) системи.

Нелінійні системи.

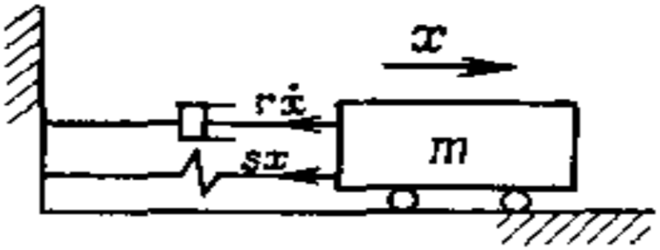


- Не володіють властивістю суперпозиції
- Описуються нелінійними диференціальними рівняннями
- Володіють множиною “рівноправних” розв’язків
- Властивості та параметри залежать від поточного стану системи

Чорний ящик.
Керуючі параметри. Параметри порядку.

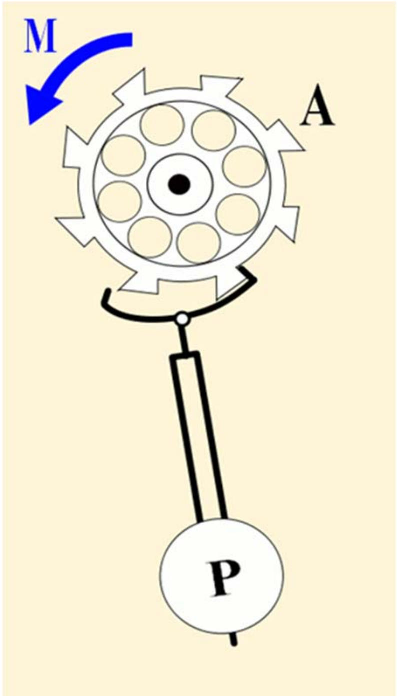


Коливні системи.



$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = F(x,t)$$

Якщо права частина рівняння явно не залежить від часу то система називається автономною.



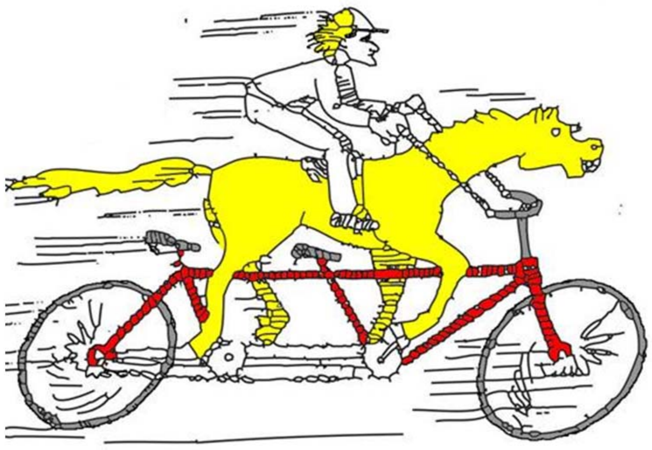
Хаотичні коливання – це неупорядковані неперіодичні рухи в абсолютно детермінованих системах, які поводять себе випадковим чином без наявності випадкових параметрів.

Автоколивні системи

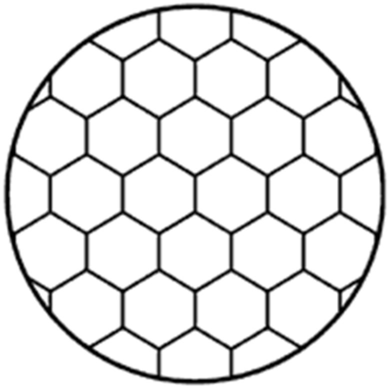
Дисипативні системи, які здатні виконувати незатухаючі коливання без періодичних зовнішніх впливів називаються автоколивними.

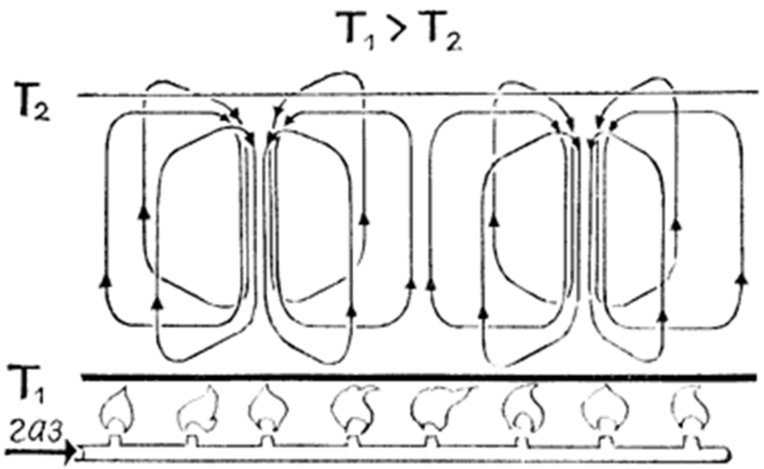
Нерівноважні системи.

Людвиг Больцман назвав XIX століття століттям Дарвіна



Відкриті системи, через які прокачується енергія, здатні як завгодно довго бути у нерівноважному стані.
Чим далі система від стану рівноваги, тим більші шанси у неї на самоорганізацію.



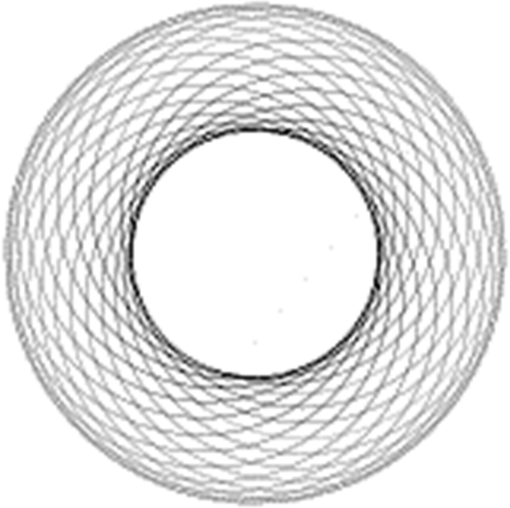


Типи розв’язків

Рівновага

Періодичні розв’язки

Квазіперіодичність



Хаотичні рухи

Динамічні системи

Частіше за все оператор еволюції динамічної системи, який визначаєїїматематичну модель, задають у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР).

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1,\ldots,x_N,\boldsymbol{\mu}),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1,\ldots,x_N,\boldsymbol{\mu}),$$

$$\ldots$$

$$\frac{dx_N}{dt} = F_N(x_1,\ldots,x_N,\boldsymbol{\mu}).$$

Величини $x_1, x_2, \ldots, x_N$ - змінні системи,

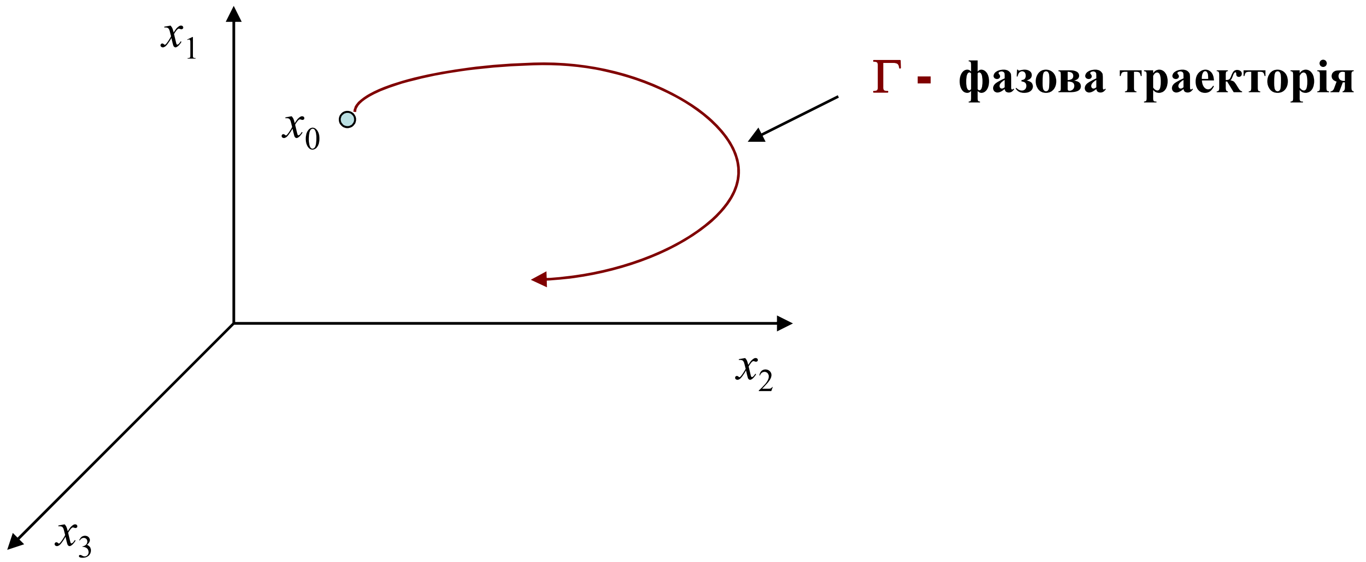
$\boldsymbol{\mu}$ - вектор керуючих параметрів,

$F_1, F_2, \ldots, F_N$ – деякі функції.

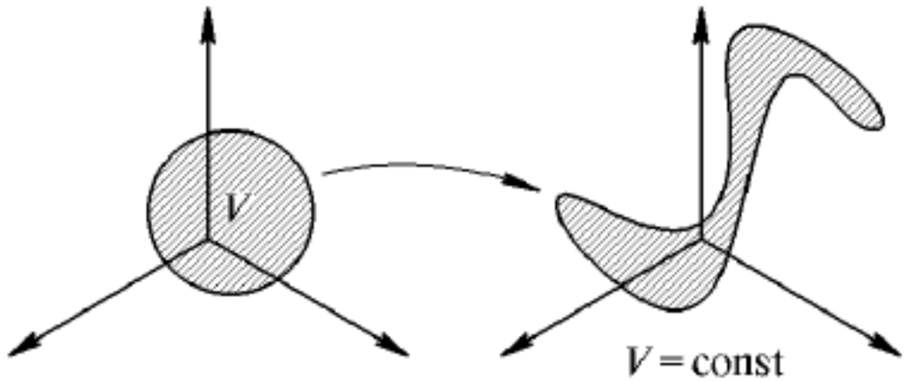
Якщо роглядати величини x_1, x_2, ..., x_N як координати точки x в N-вимірному просторі, то отримуємо наглядне геометричне представлення стану динамічноїсистеми у вигляді цієї точки.

Дана точка називається *відображаючою* або **фазовою точкою,** величини x_1, x_2, ..., x_N - **фазовими координатами** точки або **фазовими змінними** системи, а простір станів – **фазовим простором** системи. Зміні стану системи у часі відповідає рух фазової точки вздовж певної лінії, яка називається **фазовою траєкторією.**

Праві частини динамічних рівнянь: F_1, F_2, …, F_N визначають швикість руху відображаючої точки в N-вимірному фазовому просторі.

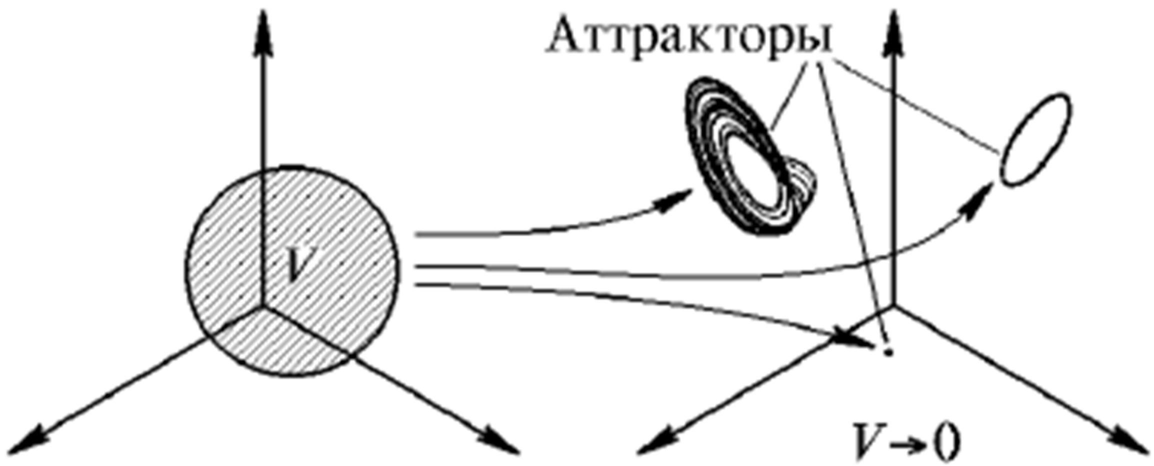


Консервативні системи Гамільтонові системи

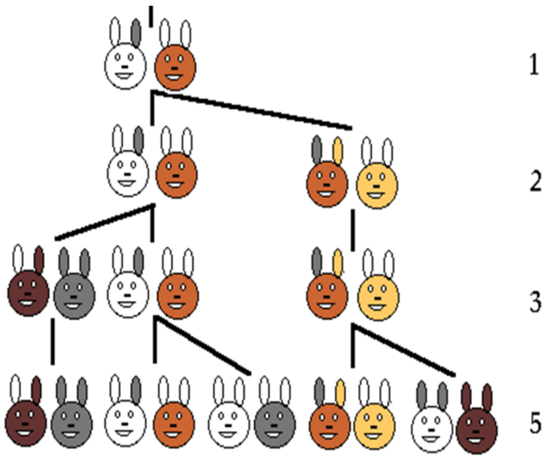


а

Дисипативні системи



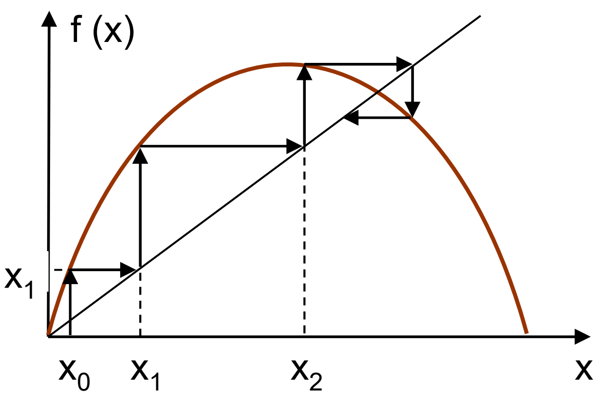
б



Часткові похідні → Звичайні диф р-ня → Відображення → Символьна динаміка

Еволюція динамічних систем не завжди є гладкою у часі. Зокрема, описання чисельності біологічної популяції з допомогою апарату диференціальних рівнянь має зрозумілі труднощі.

Ряд Фібоначчі $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $(1,1,2,3,5,8,....)$

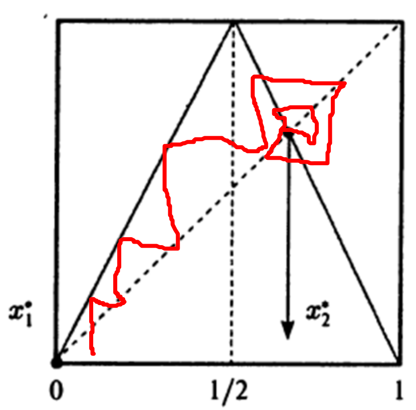


$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k})$$

Еволюцію моделей виду $x_{n+1} = f(x_n)$

зручно відображати на діаграмі Ламерея взаємодії графіка функції відображення і бісектриси прямого кута

Трикутне (кусково-лінійне) відображення



$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}; \\ 2(1-x), & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

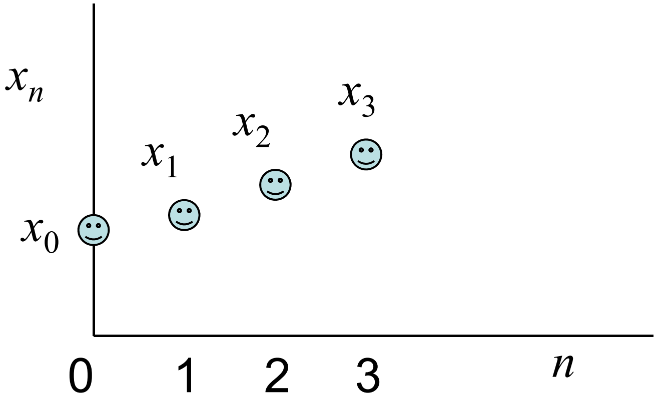
$$2(1 - x_2^*) = x_2^*,$$

$$x_2^* = \frac{2}{3}.$$

Дискретні системи

У загальному вигляді систему с дискретним часом можна записати у вигляді де-якого рекурентного співвідношення:

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{\mu}).$$



x – вектор координат стану;

n – дискретний час;

F(***x***) – вектор-функція з компонентами f_i, i=1,2,…, N, чи **функція послідовності,** яка задає закон перетворення з попередньої величини $\boldsymbol{x}_n$ у наступну $\boldsymbol{x}_{n+1}$;

$\boldsymbol{\mu}$ - вектор керуючих параметрів системи.

Для одномірного випадку рівняння приймає вигляд:

$$x_{n+1} = f(x_n, \mu).$$

$\boldsymbol{x}_0$ – початковий стан системи при $n = 0$.
Послідовність точок $\boldsymbol{x}_n$ (x_0, x_1, x_2, …, x_n) представляє **дискретну фазову траекторію відображення.**

Під **розмірністю дискретної системы** $\boldsymbol{N}$ розуміють кількість незалежних змінних стану (розмірність вектору стану $\boldsymbol{x}$). Як і для систем з неперервним часом, вона відповідає кількості рівнянь.

Фазова траекторія відображення може складатися з однієї точки $\boldsymbol{x}^*$, що називається **нерухомою точкою відображення** $\boldsymbol{F}$. Для неї виконується наступна умова:

$$\boldsymbol{x^* = F(x^*)}.$$

Якщо траекторія замкнена і складається з m точок $\boldsymbol{x}^*_i$, $i = 1,2,\ldots, m$, для яких виконується умова

$$\boldsymbol{x}^*_{n+m} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_n): \quad \boldsymbol{x}^*_2 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_1),\ \boldsymbol{x}^*_3 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_2),\ \ldots,\ \boldsymbol{x}^*_1 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_m),$$

то множину точок $\boldsymbol{x}^*_1, \boldsymbol{x}^*_2, \ldots, \boldsymbol{x}^*_m$ називають ***циклом відображення періоду m*** або ***нерухомими точками кратності m.*** Для них можна також записати:

$$\boldsymbol{x}^*_1 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_m) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{F}\ldots\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*_1)\ldots)) = \boldsymbol{F}^{(m)}(\boldsymbol{x}^*_1).$$

Нерухома точка відображення є циклом періоду 1 (коли $m = 1$).

Квазіперіодичні та хаотичні траєкторії відображення представляють собою незамкнені послідовності точок, які ніколи не вертаються точно у свої попередні положення.

Зв’язок між неперервними та дискретними моделями

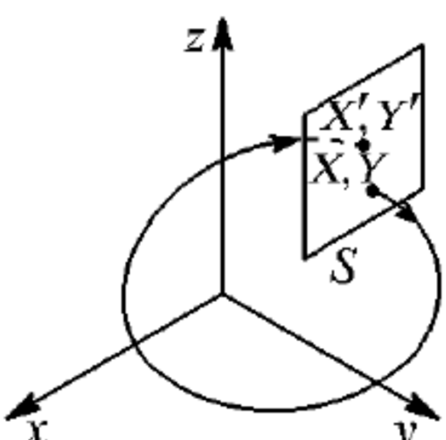
Тонка гра між неперервним та дискретним складає структуру нашого світу.

В.І.Арнольд

Зворотні відображення послідовновсті можуть бути безпосередньо пов’язані з потоковими системами, що задаються ЗДР. Для того, щоб від потокової системи перейти до відображення з дискретним часом, треба увести перетинаючу поверхню *S* (у багатовимірному випадку – гіперповерхню), так, щоб всі фазові траєкторії перетиналися з нею «строго трансверсально». Якщо розглядати точки перетину траєкторій з поверхнею *S* при русі в одному напрямку, то потік породжує в *S* отображення послідовності, яку називається ***відображенням Пуанкаре.***

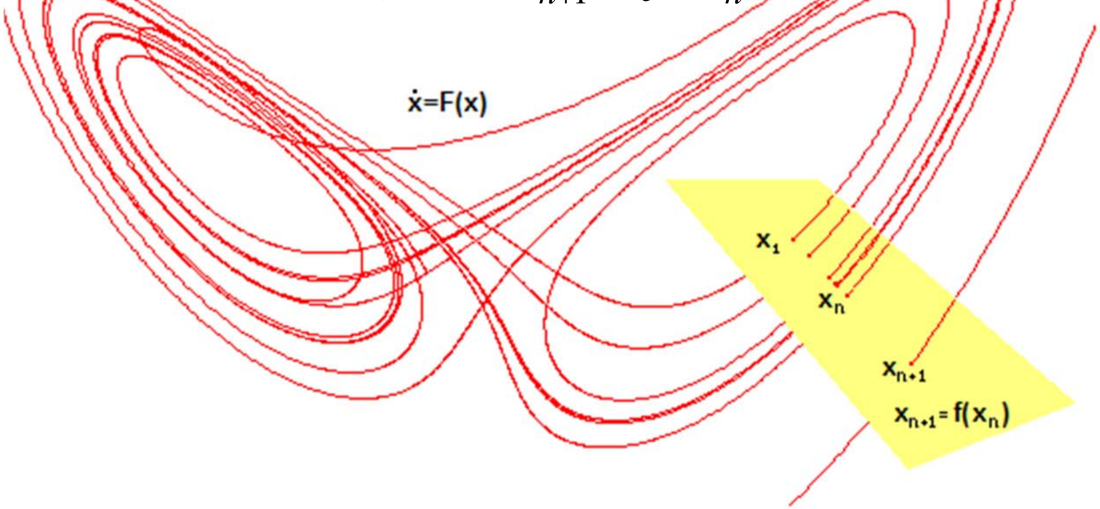
Отримуємо певне відображення перетинаючої поверхні в себе:

$$X' = F_1(X, Y), \quad Y' = F_2(X, Y).$$



Має існувати зв’язок між

$$\dot{x} = F(x) \quad i \quad x_{n+1} = f(x_n)$$



Відображення Пуанкаре

Дискретні відображення

Результат завершення перехідного етапу еволюції дискретних відображень:

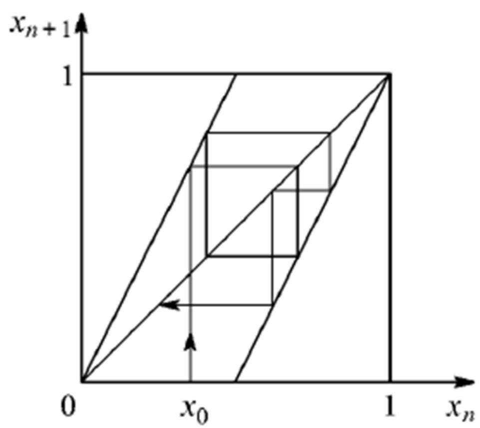
- Нерухома точка $X = f(X)$ $\left|\frac{df}{dx}\right| < 1$
- Цикл
- Динамічний хаос

Искусственно сконструированные модели динамических систем, демонстрирующие режим детерминированного хаоса

Відображення «зуб пилки». Оператор еволюції даного відображення заданий наступним правилом визнпчення нового стану за попереднім:

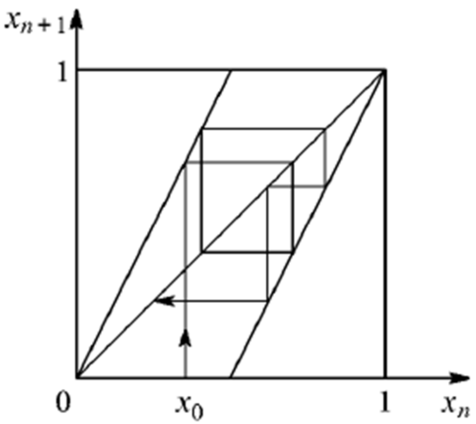
$$x_{n+1} = 2x_n \, mod \, 1$$

Операція *mod* 1 визначає, що береться лише дробова частина числа.



Ітераційна діаграма (діаграма Ламерея), яка ілюструє динаміку на декількох перших кроках дискретного часу при старті з початкового стану x_0.

Відображення «Зуб пилки»



$$x_{n+1} = 2x_n \, mod \, 1$$

Нехай у якості початкового стану обрано деяке число x_0, яке належить до інтервалу від 0 до 1. Запишемо це число у двійковій системі числення:

$$x_0 = 0{,}01011010001010011001010...$$

Далі, один крок еволюції у часі відповідно до рівняння відображення складається у тому, що послідовність нулів та одиниць зсувається ліворуч на одну позицію, й цифра, що з'являється ліворуч від коми, викидається. Маємо:

$$x_0 = 0{,}01011010001010011001010...$$

$$x_1 = 0{,}1011010001010011001010...$$

$$x_2 = 0{,}011010001010011001010...$$

$$x_3 = 0{,}11010001010011001010...$$

Наявність цифри 0 чи 1 на першій позиції після коми показує, в якій половині одиничного інтервалу – лівій чи правій знаходиться динамічна змінна x_n в даний момент.

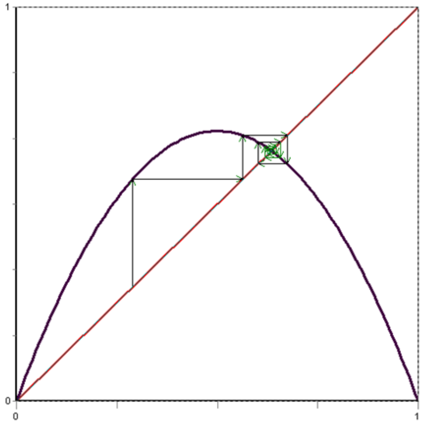
Логістичне відображення (Ферхюльста)

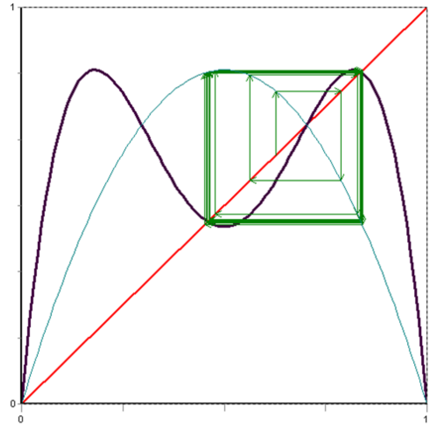
Одновимірне квадратичне відображення, що задається наступним чином:

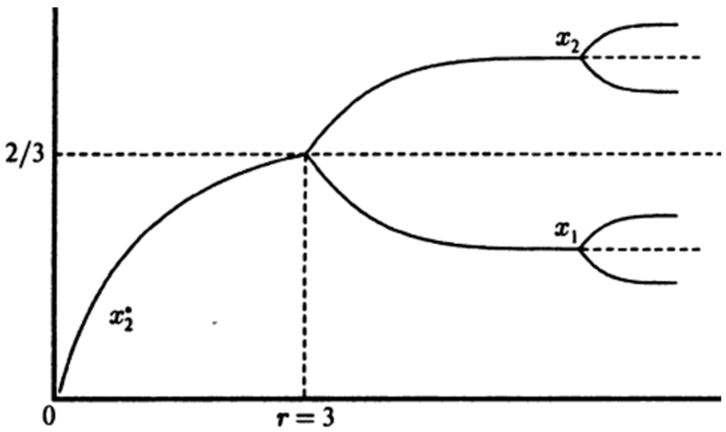
$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n),$$

де λ – керуючий параметр, а x_n належить інтервалу [0, 1]. Дане відображення було уведено ще в 1845 г. П. Ферхюльстом для опису динаміки популяцій в замкнутому середовищі. Відносна чисельність x_{n+1} в $(n + 1)$-й році пропорційна чисельності популяції у попередній рік (x_n приймає значення від 0 до 1 та відображає чисельність популяції в n-му році), а також вільної частини життєвого простору, яка пропорційна $(1 - x_n)$. Параметр λ характеризує швидкість росту популяції.

М. Фейгенбаум встановив, що при збільшенні параметра λ в даному відображенні має месце послідовність біфуркацій подвоєння періоду, що приводить до виникнення досить складної поведінки, яка стає хаотичною при великих λ.





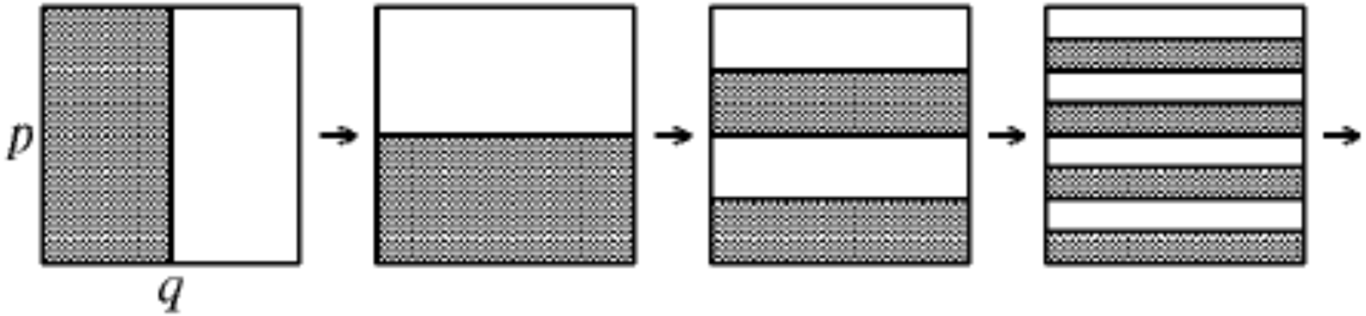


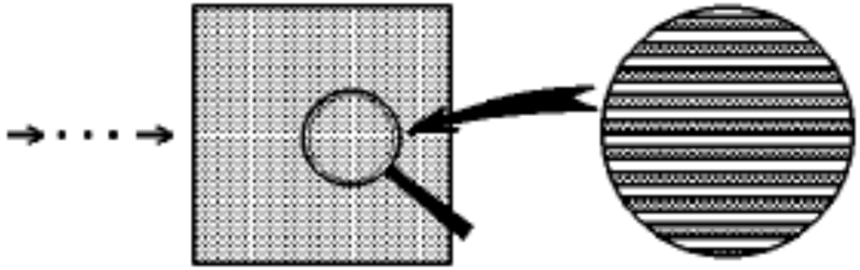
Відображення пекаря

Відображення пекаря будується на основі динаміки типу зміщення Бернулі на множині послідовностей нескінченних в обидва боки. Відповідно, динаміка нового відображення буде описуватися двома змінними:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = \dfrac{y}{2} \end{cases} \quad \text{для} \quad x \le \frac{1}{2}, \qquad \begin{cases} x' = 2x - 1 \\ y' = \dfrac{1+y}{2} \end{cases} \quad \text{для} \quad x > \frac{1}{2}.$$

Для представлення дії двовимірного відображення в наглядній геометричній формі розглянемо одиничний квадрат у площині (x,y). Розділемо його навпіл.

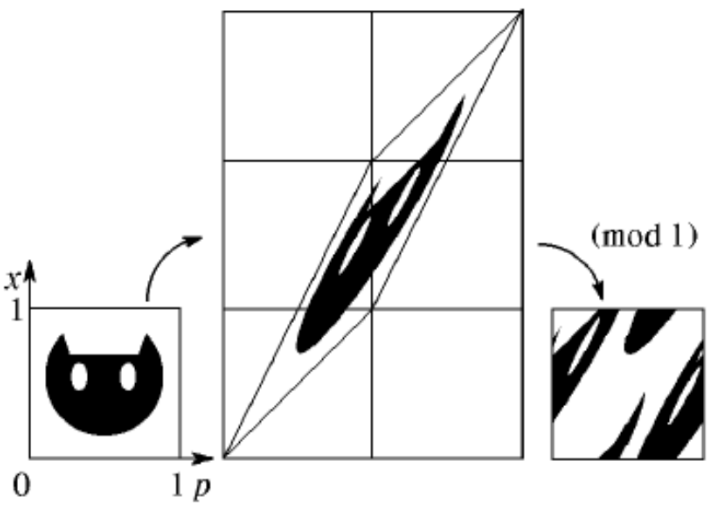


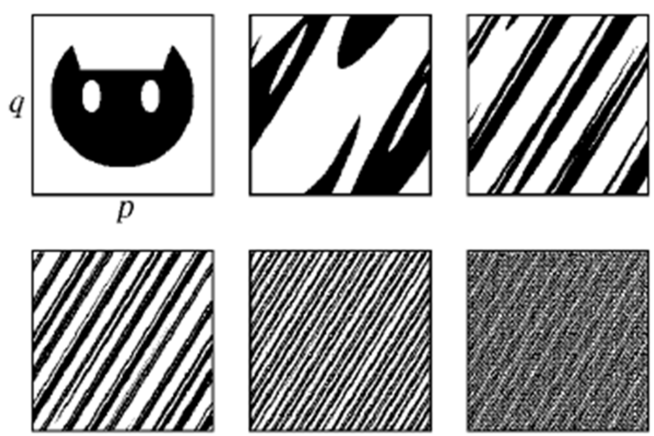


Відображення «кіт Арнольда»

$$\begin{cases} p' = p + x \pmod 1, \\ x' = p + 2x \pmod 1, \end{cases}$$

В.І. Арнольд використав для ілюстрації дію відображення зображення кота.





Геометрично перший крок процедури лежить в лінійному перетворенні координат, а наступний – в переносі елементів картинки, щи вийшли за рамки одиничного квадрату, назад в нього.

При ітераціях цього відображення зафарбована область (зображення кота) витягується вздовж одного напрямку на кожному кроці та стискається вздовж другого напрямку. Після досить великої кількості ітерацій зображення кота перетворюється на надзвичайно вузьку смугу, витягнуту вздовж одного напрямку. В результаті картина виглядає як набір великої кількості вузьких чорних і білих смужок, що чергуються, в які перетворилися, відповідно, безліч точок, що належать зображенню кота, і доповнення цієї множини: чорна і біла «рідини» виявляються добре перемішаними.

Атрактори.

Атра́ктор (від англ. *attract* - притягувати) — множина станів (точок фазового простору) динамічної системи, до якої вона прямує з часом.

Атра́ктор (філософ.) — найменша множина, до якої все прямує.

Нехай у фазовому просторі R^n існує деяка область G_1 що містить підобласть G_0. Області G_1 та G_0 задовільняють наступним вимогам:

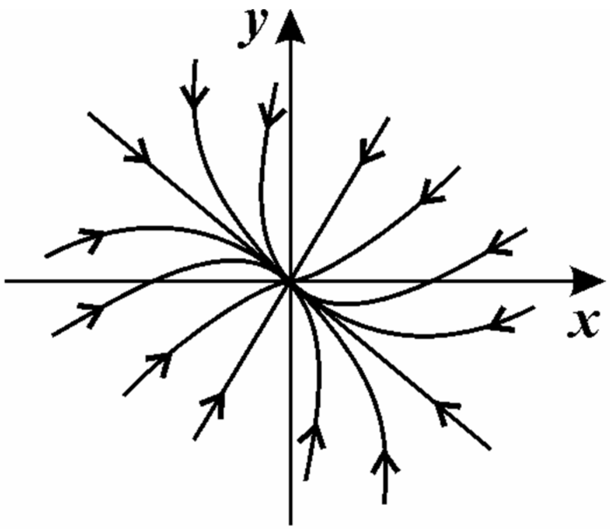
- ✓ для довільних початкових умов $x_i(0) \in G_1$ при $t \to \infty$ всі фазові траекторії досягають G_0
- ✓ область G_0 є мінімальною компактною підмножиною фазового простору
- ✓ якщо фазова траєторія у якийсь момент часу належить G_0, то вона йому належить в усі наступні моменти часу

G_0 називається атрактором динамічної системи, а G_1 – областю (басейном) його притягування:

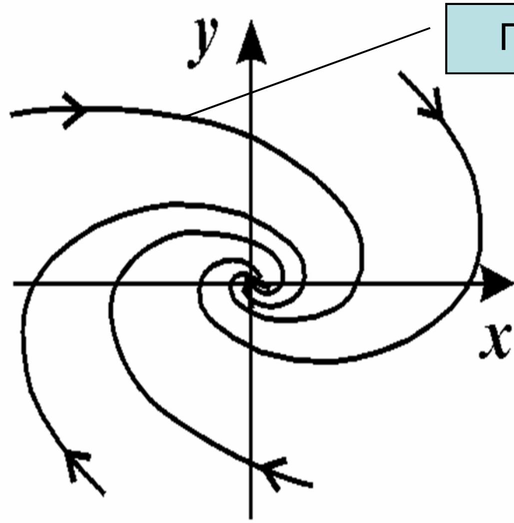
Регулярні атрактори.

Точка притягування (N ≥ 1).	Граничний цикл (N ≥ 2).

Перехідний процес



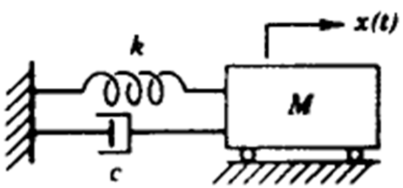
Стійкий вузол



Стійкий фокус

граничний цикл.

Регулярні атрактори є асимтотично стійкими та мають цілочисельну розмірність, що співпадає з метричною.



$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$$

$$\gamma = \frac{c}{2m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Періодичні коливання у лінійних системах із затуханням є вимушеними.

$$\Omega \to \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} - \textit{резонанс}$$

Нелінійні системи.

З фізичної точки зору зростання будь-якого параметра системи не може відбуватись до безмежності. Обмеженість енергетичних ресурсів рано чи пізно змусить це зростання зупинитись.

$$f(x) = kx - bx^3$$

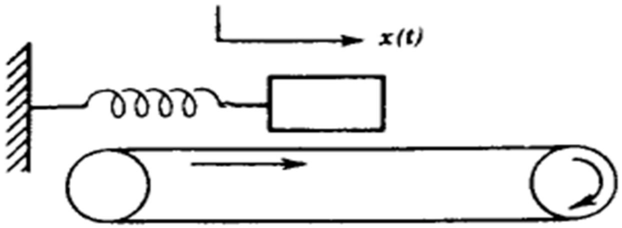
$$\textit{для} \quad x << 1 \quad kx >> bx^3 \quad \textit{отож} \quad f(x) \cong kx$$

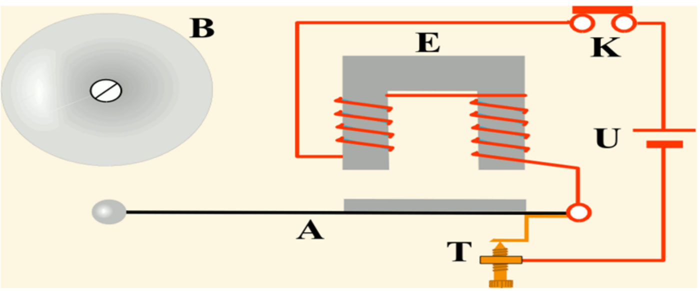
Нехай *f(x)* описує деяке збудження системи. Спочатку воно лінійно наростає, а потім швидко спадає до нуля. Якщо до збудження система була у стійкому рівноважному стані, то з часом вона до нього знову релаксує.

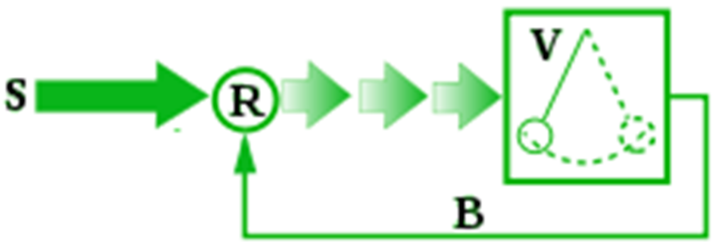
Якщо ж стартова точка системи є станом нестійкої рівноваги, то після збудження і слідуючого за ним повернення у початковий окіл рівноваги нестійкість знову почне викидати траєкторію за межі околу. Отож саме за рахунок нелінійності та нестійкості у системі реалізується режим періодичних коливань.

У системах з одним ступенем вільності (двовимірний ФП) в силу єдиності розв'язку коливальний режим може реалізовуватись виключно на граничному циклі.

Автоколивання.







Практично важливий клас нелінійних коливань утворюють самозбуджувані коливання без затухання в дисипативній динамічній системі, котрі виникають унаслідок внутрішних її властивостей, підтримуються неперіодичним зовнішним джерелом енергії та не залежать від початкоих умов. (Листок, струна, орган, турбулентність, флаттер, …).

Математичним образом автоколивань є граничний цикл Пуанкаре.

$$\ddot{x} - \gamma\dot{x}(1 - x^2) + x = 0$$

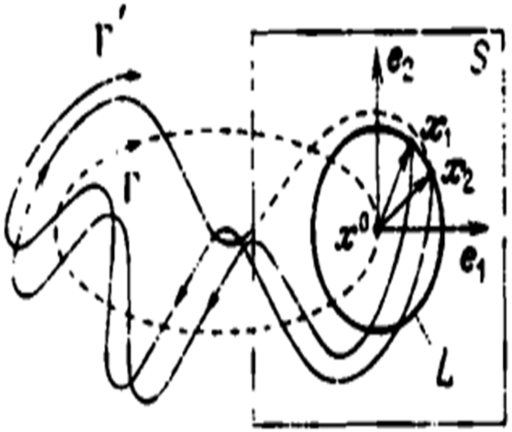
Від’ємне тертя – джерело енергії

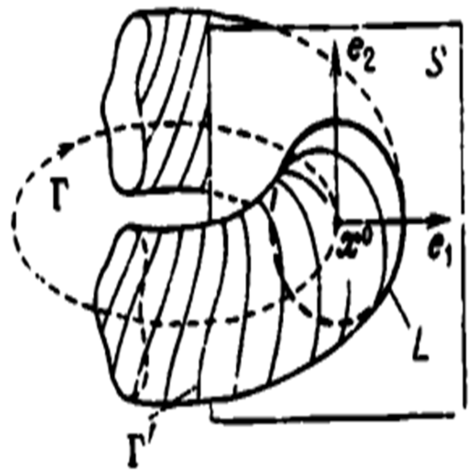
Зворотній зв’язок – нелінійне затухання

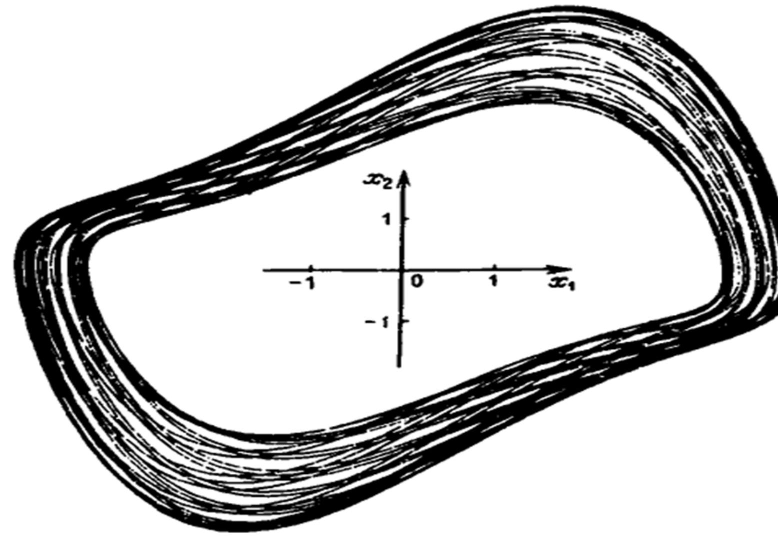
Більш складною є задача з вимушуючою періодичною силою. Наприклад, у системі Ван дер Поля:

$$\ddot{x} - \gamma\dot{x}(1 - \beta x^2) + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega_1 t$$

При зростанні $\omega_0 - \omega_1$ захоплений періодичний розв’язок стає нестійким і за умови ірраціонального співвідношення між цими частотами з’являється новий тип руху – комбінаційні коливання, що отримали назву квазіперіодичних.







хАос і ХаОс

Випадкові рухи – умови і причини, що рух викликають є невідомими.

Хаотичні рухи – детеремінізовні задачі із заданими силами та параметрами.

Нелінійне диференціальне рівняння може мати обмежений неперіодичний розв’язок з хаотичною поведінкою навіть за умови, що рівняння не містить випадкових параметрів.

Джерелом хаосу є сильна нелінійність

Хаотична динаміка розвивається в рамках певної структури

ДИВНІ (нерегулярні, хаотичні) атрактори (N ≥ 3).

Тип руху	Атрактор
Рівновага	Точка
Періодичний	Граничний цикл
Квазіперіодичний	Поверхня (тор)
ХАОС	???

Перемішування.

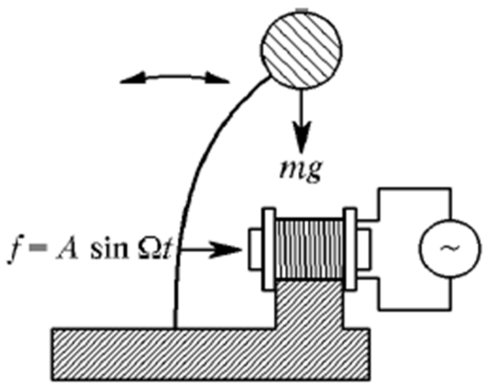
Нестійкість експоненціально збільшує початкове збурення системи системи. У той же час через втрати енергії фазовий об'єм нелінійних дисипативних систем з часом прямує до нуля. Де компроміс ???

Фазовий об'єм в нелінійних дисипативних системах може збільшуватися в одних напрямках і одночасно зменшуватися в інших з превалюванням (у середньому) останніх.

Дивний атрактор є математичним образом "ідеального" хаосу, який задовіль-няє певним математичним вимогам.

Осцилятор Дуффінга або осцилятор Уєди

Розглянемо відому модель «осцилятор Уєди». Прикладом може слугувати механічний пристрій, показаний на рисунку.



Шарик закріплено на встановленій вертикально пружній пластині, причому коефіцієнт пружності підібрано так, що при малих кутах відхилення вертаюча сила пружності точно компенсує відхиляючий момент сили тяжіння.

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = Asin(\omega t)$$

При малій амплітуді *A* частота коливань співпадає з частотою зовнішнього впливу, а при збільшенні цього параметра можна спостерігати більш складну динамічну поведінку, включаючи перехід до хаосу. Оскільки функція *sin* непарна, система характеризується симетрією та інваріантна відносно одночасної заміни $x \to - x$, $t \to t + \pi/\Omega$. Тому завжди реалізується одна з двох можливостей:

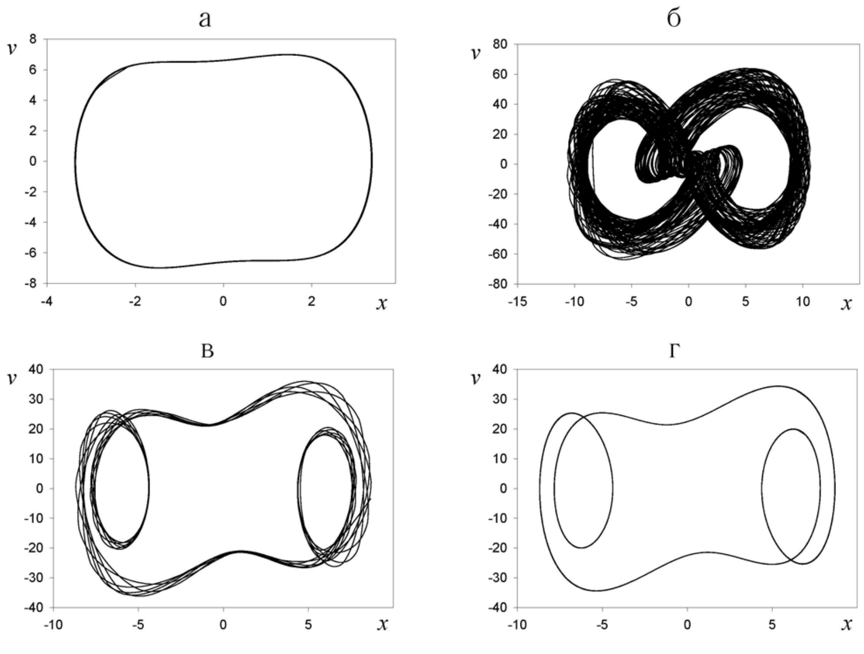
1) атрактор має симетрією відносно вказаної заміни;

2) атрактор не має симетрії, проте має симетричного партнера, тобто в залежності від початкових умов в системі будуть виникати два різних режими, які переходять один в інший при перетворенні симетрії.

Осцилятор Дуффінга або осцилятор Уєди

Чисельний аналіз моделі можна виконати за допомогою модифікованого методу Ейлера, для застосування якого дана система зводиться до двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -v - x^3 + A\sin(\omega t) \end{cases}$$

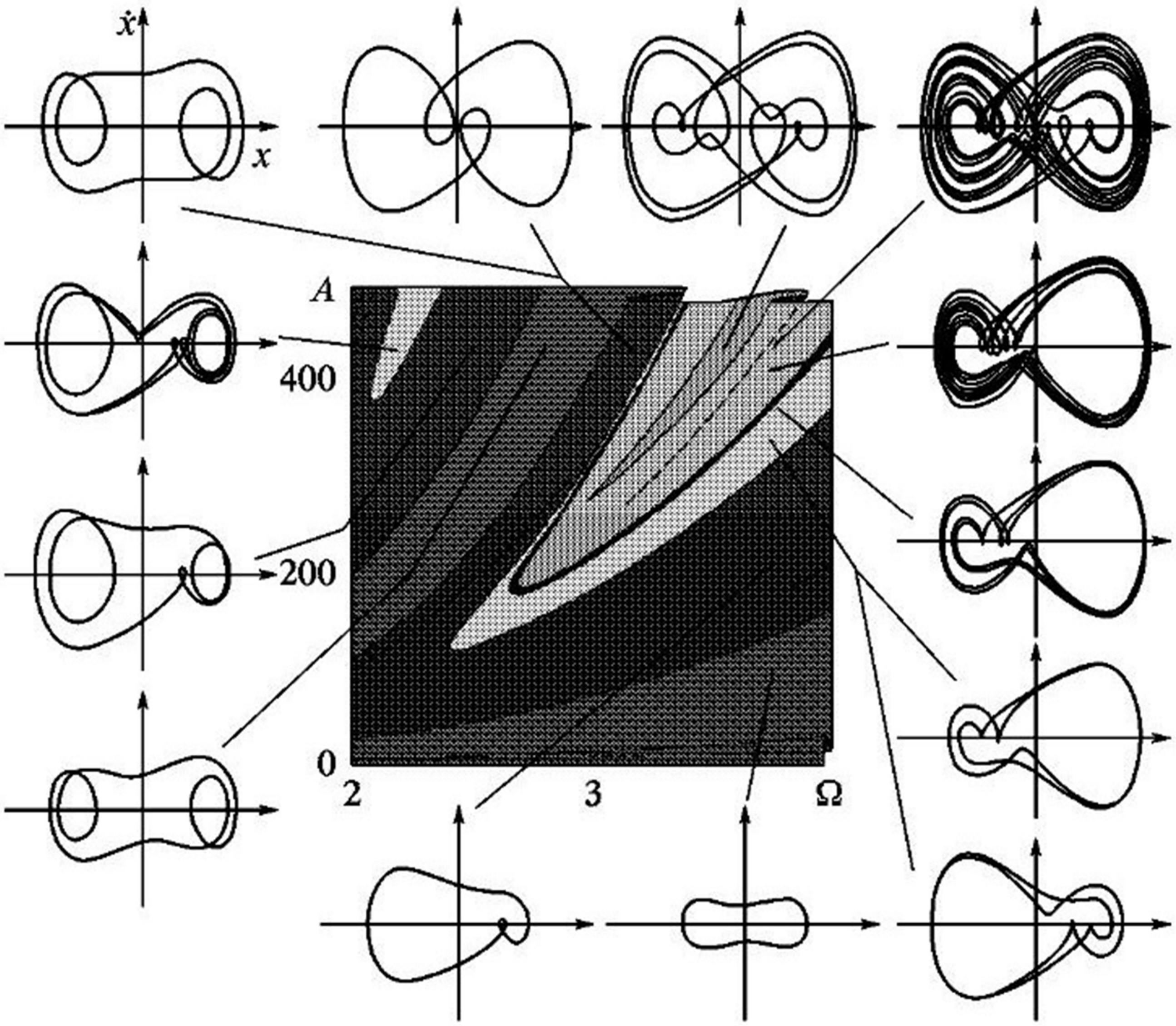


(а) A = 10, ω = 2.5 (тип даних — double); (б) A = 300, ω = 3 (тип даних — double); (в) A = 300, ω = 2.5 (тип даних — float); (б) A = 300, ω = 2.5 (тип даних — double). Перехідний режим t ∈ [0..100] опущено

На рисунку показана частина результатів, що були отримані, що дають уявлення про динаміку системи при різних значеннях A та ω. У результаті проведеного моделювання встановлено, що при малих амплітудах єдиним атрактором є замкнута крива — симетричний цикл періоду 1. При збільшенні амплітуди спостерігається біфуркація втрати симетрії. Вона полягає в тому, що симетричний цикл стає нестійким і виникає два цикли атрактори. Далі на базі кожного з асиметричних циклів спостерігається каскад біфуркацій подвоєння періоду, що завершується переходом до хаосу.

Осцилятор Дуффінга або осцилятор Уєди

Карта динамічних режимів



Дякую за увагу