

# ГРАФОВІ ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ

## Кореляційний аналіз даних

Сумський державний університет

# Кореляція

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

До цього аналіз даних проводився за певною ознакою. Але для багатьох дослідів важливим є аналіз взаємозв'язків однієї або декількох ознак (чи пов'язана зміна однієї ознаки зі зміною іншої).

Існує дві категорії зв'язків

- функціональний
- кореляційний або статистичний

# Кореляція

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

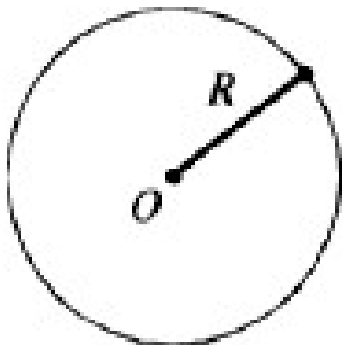
## Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

## Функціональний зв'язок



$$C = 2\pi R$$

## Кореляційний (або статистичний) зв'язок

Чисельному значенню однієї змінної відповідає багато значень іншої змінної.

Наприклад, при закупівлі нового обладнання ( встановленні нового програмного забезпечення) кількість (або якість) продукції повинна збільшуватися.

Але як саме вона залежить від кожного конкретного випадку?

Кількість або сорт мінерального добрива впливає на врожайність, але це не означає, що конкретному добриву буде відповідати певна кількість врожаю.

**Функціональний зв'язок має місце у кожному конкретному досліді**

**Кореляційний зв'язок характерний лише в середньому для всієї сукупності спостережень**

**Кореляційні зв'язки - це імовірнісні зміни, які можна вивчати тільки на показних вибірках методами математичної статистики.**

**Кореляційна залежність - це зміни, які вносять значення однієї ознаки в ймовірність появи різних значень іншої ознаки.**

# Кореляція

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

## Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

**Кореляційний аналіз застосовується для кількісної оцінки взаємозв'язку двох наборів даних, представлених в безрозмірному вигляді.**

x	3	2	4	5	6	7	8	9	10	11
y	9	7	12	15	17	19	21	23,4	25,6	27,8

Кореляційний аналіз дає можливість встановити, чи асоційовані набори даних по величині.

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Коефіцієнт кореляції, завжди позначається латинською літерою  $r$ , використовується для визначення наявності взаємозв'язку між двома властивостями.

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

Зв'язок між ознаками (за шкалою Чеддока) може бути сильним, середнім і слабким. Тісноту зв'язку визначають за величиною коефіцієнта кореляції, який може приймати значення від -1 до +1 включно.



# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

$r$	0,1-0,3	0,3-0,5	0,5-0,7	0,7-0,9	0,9-1,0
Зв'язок	слабкий	середній		сильний	
Сила зв'язку	слабкий	помірний	помітний	високий	вельми високий

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Якщо  $r = 1$  або  $r = -1$ , то між випадковими величинами  $X$  і  $Y$  існує лінійна функціональна залежність ( $Y = K * X + A$ ).

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Якщо  $r = 1$  або  $r = -1$ , то між випадковими величинами  $X$  і  $Y$  існує лінійна функціональна залежність ( $Y = K * X + A$ ).

У проміжних випадках ( $-1 < r < 1$ ) точки, що відповідають значенням  $X$  і  $Y$  потрапляють в область, обмежену деяким еліпсом.

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Якщо  $r = 1$  або  $r = -1$ , то між випадковими величинами  $X$  і  $Y$  існує лінійна функціональна залежність ( $Y = K * X + A$ ).

У проміжних випадках ( $-1 < r < 1$ ) точки, що відповідають значенням  $X$  і  $Y$  потрапляють в область, обмежену деяким еліпсом.

Тут слід звернути увагу на те, що лінія, вздовж якої групуються точки, може бути не тільки прямою, а мати будь-яку іншу форму: парабола, гіпербола і т. д. У цих випадках треба розглядати так звану, нелінійну (або криволінійну) кореляцію.

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Завдання кореляційного аналізу зводиться

- до встановлення напрямку (позитивний чи негативний) і форми (лінійної, нелінійної) зв'язку між змінними ознаками,
- до вимірювання тісноти зв'язку,
- до перевірки рівня значущості отриманих коефіцієнтів кореляції.

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

У напрямку кореляційний зв'язок може бути

- позитивним ("прямим")
- негативним ("зворотнім")

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

У напрямку кореляційний зв'язок може бути

- позитивним ("прямим")
- негативним ("зворотнім")

При позитивній прямолінійній кореляції більш високим значенням однієї ознаки відповідають більш високі значення іншої, а більш низьким значенням однієї ознаки – низькі значення іншої.

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

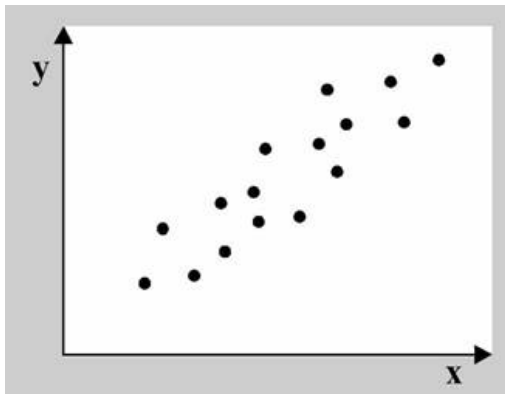
Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

## Позитивний зв'язок



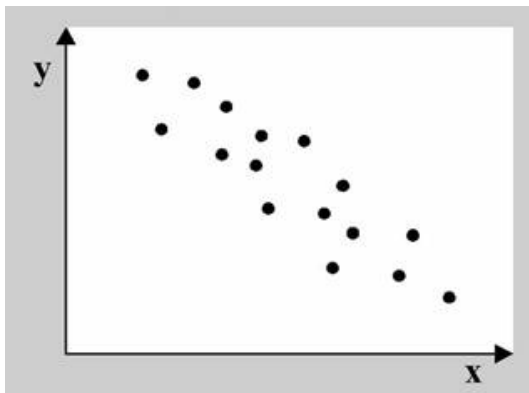
При позитивній кореляції коефіцієнт кореляції має позитивний знак



# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

При негативній кореляції співвідношення зворотні

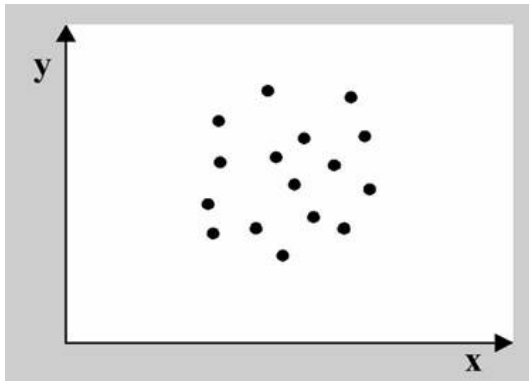


При негативній кореляції коефіцієнт кореляції має негативний знак

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

## Відсутність кореляції



Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

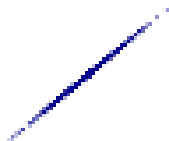
Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

# Коефіцієнт кореляції

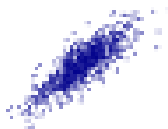
Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

## Приклади кореляції

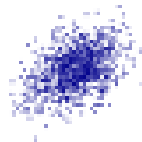
1



0.8



0.4



Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

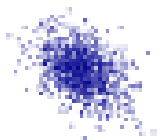
Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

# Коефіцієнт кореляції

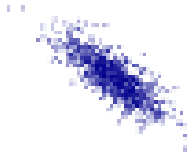
Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

## Приклади кореляції

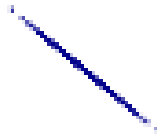
-0.4



-0.8



-1



Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

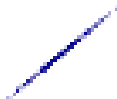
Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

## Приклади кореляції

1



1



1



Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

## Приклади кореляції

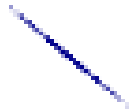
-1



-1



-1



Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

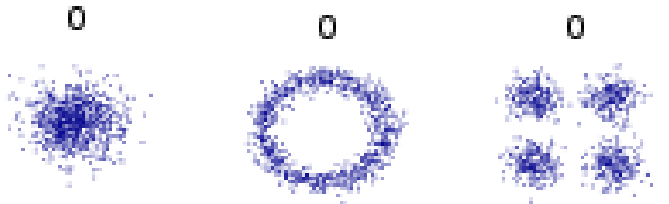
Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

## Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Коефіцієнт  
кореляції

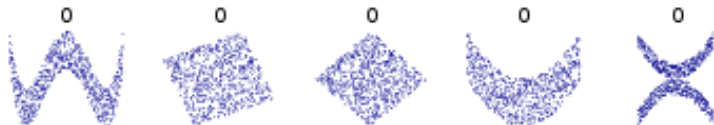
## Приклади кореляції



# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

## Приклади кореляції



Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції



# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

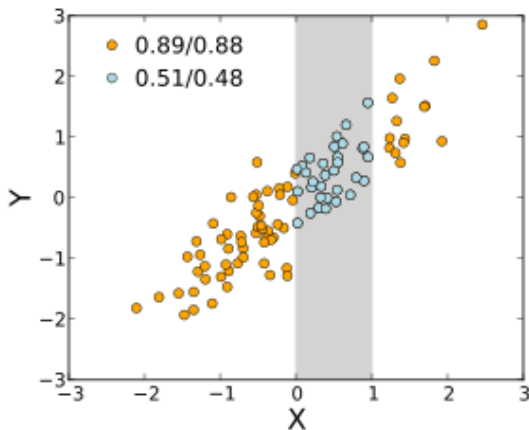
Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Коефіцієнт кореляції для всього діапазона даних і для окремого інтервалу



# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Але коефіцієнт кореляції, як загальний статистичний показник, не може замінити візуальний огляд даних.

Наприклад, набір з чотирьох різних пар змінних, які мають однакове середнє значення (7.5), дисперсію (4.12), коефіцієнт кореляції (0,816) і лінія регресії ( $y = 3 + 0.5x$ ).

Проте розподіл даних дуже відрізняється.

# Коефіцієнт кореляції

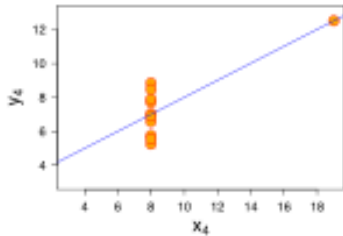
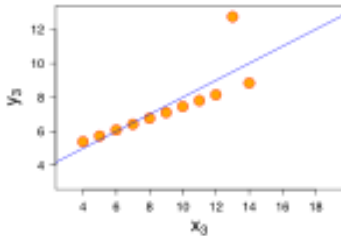
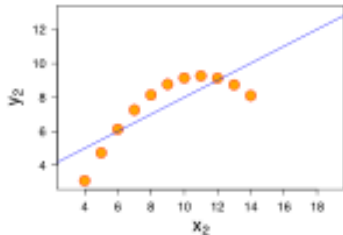
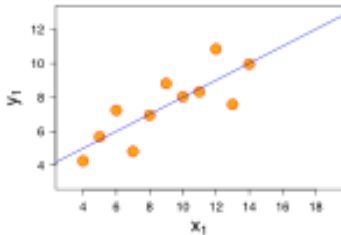
Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції



# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

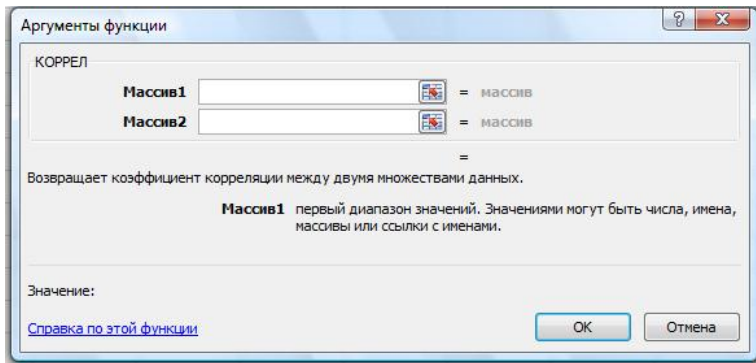
Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

В програмі Excel для обчислення коефіцієнта кореляції застосовується функції КОРРЕЛ.



Кореляційний аналіз застосовується, якщо для кожного суб'єкта є більше двох змінних вимірювань.

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

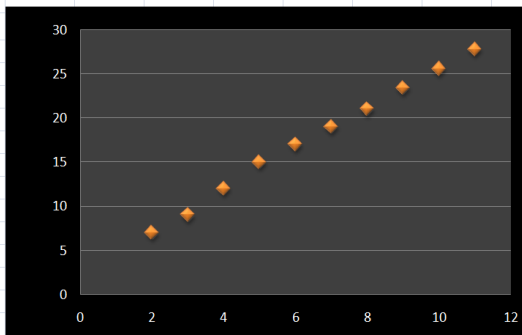
Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

x	y
3	9
2	7
4	12
5	15
6	17
7	19
8	21
9	23,4
10	25,6
11	27,8

$r = 0,99836$



# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

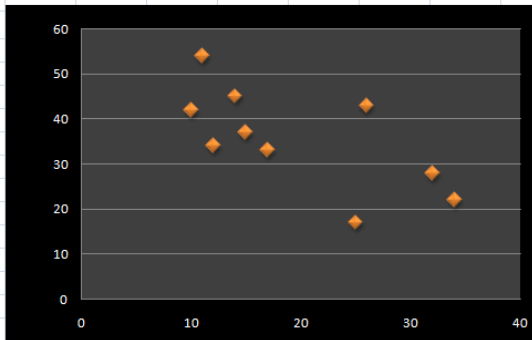
Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

x	y
14	45
12	34
15	37
34	22
26	43
11	54
25	17
32	28
17	33
10	42

$r = -0,6734$



# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

## Етапи кореляційного аналізу

- постановка задачі і вибір ознак;
- збір інформації та її первинна обробка (групування даних, виключення аномальних спостережень, перевірка нормальності одномірного розподілу);
- попередня характеристика взаємозв'язків (аналітичні групування даних, графіки);
- усунення взаємозалежності факторів та уточнення набору показників шляхом розрахунку парних коефіцієнтів кореляції;
- дослідження факторної залежності і перевірка її значущості;
- оцінка результатів аналізу і підготовка рекомендацій щодо їх практичного використання

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Лінійний коефіцієнт кореляції Браве-Пірсона

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left( \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right) \left( \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \right)}}$$

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції



# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

## Кореляційна решітка

$y \backslash x$	4000—4499	4500—4999	5000—5499	5500—5999	6000—6499	6500—6999	7000—7499	7500—7999	8000—8499	$f_y$
4,3—4,4	1	2	1				2			6
4,1—4,2	3	5								8
3,9—4,0	7	7	1		1	1				17
3,7—3,8	7	6	6	5						24
3,5—3,6	3	2	7	6	1					19
3,3—3,4	1	3	2	4	1	2	1	1	2	17
3,1—3,2			3	1	1	1			1	7
2,9—3,0	1					1				2
$f_x$	23	25	20	16	4	5	3	1	3	100

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

## Кореляційна решітка

будується при великій кількості даних (наприклад  $n = 100$ ).

На двох сторонах квадрату (зверху по горизонталі) і зліва по вертикалі записують значення класів обох рядів.

Дані при вивченні ознак треба внести у відповідні клітинки решітки, що відповідають одразу двом ознакам.

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Щоб вважати отриманий коефіцієнт кореляції достовірним, він повинен перевищувати табличне значення.

Як і для критерія  $\chi^2$  таблиця побудована для різних рівнів значущості (за стовбчиками) та степеней свободи.

$$df = n - 2$$

# Коефіцієнт кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

<i>df</i>	<i>P</i>	
	0,05	0,01
5	0,75	0,87
6	0,71	0,83
7	0,67	0,80
8	0,63	0,77
9	0,60	0,74
10	0,58	0,71
11	0,55	0,68
12	0,53	0,66
13	0,51	0,64
14	0,50	0,62
15	0,48	0,61
16	0,47	0,59
17	0,46	0,58
18	0,44	0,56
19	0,43	0,55
20	0,42	0,54

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

## Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Метод рангової кореляції Спірмена дозволяє визначити тісноту (силу) і напрям кореляційного зв'язок між двома ознаками або двома профілями (ієрархіями) ознак.

$$r_{xy}^S = 1 - \frac{6 \cdot \sum (d_x - d_y)^2}{n \cdot (n^2 - 1)},$$

де  $d_x$ ,  $d_y$  – ранги показників  $x$ ,  $y$ ;  $n$  – кількість кореляційних пар.

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Для підрахунку рангової кореляції Спірмена необхідно розташувати двома рядами значення, які можуть бути проранжовані. Спочатку показники ранжуються окремо по кожній з ознак. Як правило, меншому значенню ознаки нараховується менший ранг.

За кожною змінною має бути представлено не менше 5 спостережень.

В ідеалі обидва кореляційні ряди повинні представляти собою дві послідовності неоднакових значень.

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

<b>x</b>	<b>55</b>	<b>45</b>	<b>43</b>	<b>47</b>	<b>47</b>	<b>51</b>	<b>48</b>	<b>60</b>	<b>53</b>	<b>50</b>
<b>y</b>	<b>26</b>	<b>20</b>	<b>25</b>	<b>22</b>	<b>27</b>	<b>28</b>	<b>16</b>	<b>15</b>	<b>18</b>	<b>24</b>

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

x	d_x		y	d_y
43	1		15	1
45	2		16	2
46	3		18	3
47	4		20	4
48	5		22	5
50	6		24	6
51	7		25	7
53	8		26	8
55	9		27	9
60	10		28	10



# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

x	d_x	y	d_y
55	9	26	9
45	2	20	4
43	1	25	7
46	3	22	5
47	4	27	8
51	7	28	10
48	5	16	2
60	10	15	1
53	8	18	3
50	6	24	6

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

x	d_x	y	d_y
55	9	26	9
45	2	20	4
43	1	25	7
47	3,5	22	5
47	3,5	27	8
51	7	28	10
48	5	16	2
60	10	15	1
53	8	18	3
50	6	24	6

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

$$r_{xy}^S = 1 - \frac{6 \cdot \sum (d_x - d_y)^2}{n \cdot (n^2 - 1)},$$

$$r_{xy}^S = 1 - \frac{6 \cdot 186,5}{10 \cdot 99} = 1 - \frac{1119}{990} \approx 1 - 1,13 \approx -0,13$$

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Коефіцієнт рангової кореляції також має межі 1 і -1.

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена обчислюється значно простіше, ніж коефіцієнт кореляції Брава-Пірсона при одних і тих же вихідних даних, оскільки при обчисленні використовуються ранги, що представляють собою зазвичай цілі числа.

Потім, обчисливши значення, необхідно визначити достовірність знайденого коефіцієнта кореляції, порівнявши його фактичне значення з табличним.

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Якщо

$$r_{\Phi} \geq r_{st}$$

то можна говорити про те, що між ознаками спостерігається достовірна взаємозв'язок.

Якщо

$$r_{\Phi} < r_{st}$$

то між ознаками спостерігається недостовірний кореляційний взаємозв'язок.

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

Достовірність коефіцієнта рангової кореляції теж можна оцінювати за допомогою таблиці для звичайного коефіцієнта кореляції але для  $n > 8$ .

# Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

<i>df</i>	<i>P</i>	
	0,05	0,01
5	0,75	0,87
6	0,71	0,83
7	0,67	0,80
8	0,63	0,77
9	0,60	0,74
10	0,58	0,71
11	0,55	0,68
12	0,53	0,66
13	0,51	0,64
14	0,50	0,62
15	0,48	0,61
16	0,47	0,59
17	0,46	0,58
18	0,44	0,56
19	0,43	0,55
20	0,42	0,54

$$df = n - 2$$

# Коефіцієнт множинної кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

x	y	z
2,5	3,8	11,4
2,2	6,1	12,3
2,1	6,7	12,9
2,4	6,8	13,4
2,7	7,2	14,2
2,2	7,4	14,5
5,6	8,5	12,9
4,5	8,8	15,6
4,7	7,6	15,2
3,5	8,2	16,4
3,8	6,4	17,8
3,5	9,4	16,9



# Коефіцієнт множинної кореляції

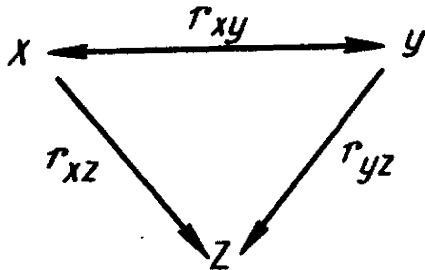
Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції



# Коефіцієнт множинної кореляції

Імовірнісні  
основи  
обробки  
даних

Кореляція

Коефіцієнт  
кореляції

Коефіцієнт  
рангової  
кореляції  
Спірмена

Коефіцієнт  
множинної  
кореляції

$$r_{xy \cdot z} = \frac{r_{xy} - r_{xz} \cdot r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xz}^2)(1 - r_{yz}^2)}}$$

$$r_{xz \cdot y} = \frac{r_{xz} - r_{xy} \cdot r_{zy}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{zy}^2)}},$$

$$r_{zy \cdot x} = \frac{r_{zy} - r_{zx} \cdot r_{yx}}{\sqrt{(1 - r_{zx}^2)(1 - r_{yx}^2)}}$$