Знаходження оптимального керування з повним зворотнім зв'язком в задачі про швидкодію

1^0. Постановка задачі

Нехай поведінка *моделі об'єкта керування* описується рівнянням

$$\dot{\vec{x}}(t) = f\left(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)\right). \tag{1}$$

У цьому рівнянні

$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор стану системи (вектор фазових змінних);

$\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ – вектор управління;

t – час;

$T = [t_0, t_1]$ – проміжок часу функціонування системи;

$U \subseteq R^q$ – множина допустимих значень керування;

$\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{u}) = \left(f_1(t, \vec{x}, \vec{u}), f_2(t, \vec{x}, \vec{u}), ..., f_n(t, \vec{x}, \vec{u}) \right)^T$.

а *критерій якості* визначається виразом

$$I(\vec{x}, \vec{u}) = \int_{t_0}^{t_1} f^{\circ}\left(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)\right) dt + \psi\left(t_1, \vec{x}(t_1)\right) \to \inf , \tag{2}$$

Разом з моментом початку процесу задамо *початкову умову*

$$\vec{x}(t_0) = x_0,\ \vec{x}(t_1) = x_1 \tag{3}$$

Множина U_n допустимих керувань з повним зворотнім зв'язком (позиційних керувань) утворюють функції $\vec{u}(t, x)$: $T \times R^n \to U$, які для довільних початкових станів породжують відповідні пари $d = \left(x(\cdot), u(\cdot)\right) \in D(t_0, x_0)$, де програмне керування $u(\cdot) \in U_0$, а $\forall t \in T$ $u(t) = \vec{u}\left(t, x(t)\right)$. Функція $\vec{u}^*\left(t, x(t)\right) \in U_n$ називається *оптимальним керуванням з повним зворотнім зв'язком.*

2^0. Рівняння Беллмана.

Введемо функцію Беллмана - $\mu\left(x(t), t\right)$. За означенням це є функція, яка в точці $\left(\vec{x}(t), t\right)$ $t_0 \le t \le t_1$ дорівнює найменшому значенню функціоналу

$$I_t\left(\vec{x},\vec{u}\right)=\int\limits_t^{t_1} f^{\circ}\left(\vec{x}\left(t\right),\vec{u}\left(t\right)\right)dt+\psi\left(t_1,\vec{x}\left(t_1\right)\right) \tag{4}$$

для усіх припустимих процесів з початковим станом $\vec{x}(t)=\xi$. Тобто

$$\mu\left(\xi,t\right)=\min_{\substack{u(t)\in U\\(t_0\le t\le t_1)}}\left(\int\limits_t^{t_1} f^{\circ}\left(\vec{x}\left(t\right),\vec{u}\left(t\right)\right)dt+\psi\left(\vec{x}\left(t_1\right),t_1\right)\right). \tag{5}$$

Тоді при $\xi=x_0$ і $t=t_0$, отримаємо величину $\mu\left(x_0,t_0\right)$, що визначає найменше значення функціоналу в (2).

Вважається, що $\forall\xi$ фазового простору та довільного моменту часу $t\in\left[t_0,t_1\right]$ існує оптимальна траєкторія з початковою умовою $\vec{x}\left(t\right)=\xi$. Таким чином функція $\mu\left(x\left(t\right),t\right)$ визначена всюди на множині $\left(\vec{x}(t),t\right)\in R^n\times\left(t_0,t_1\right)$

В задачі (1)-(3) (з закріпленими границями) функція Беллмана залежить лише від фазових змінних у кожен момент часу і не залежить від часу у явному вигляді, тобто: $\mu=\mu\left(\vec{x}\left(t\right)\right)$. Дійсно, за означенням

$$\mu\left(\vec{x}\left(t\right),t\right)=\int\limits_t^{t_1} f^{\circ}\left(\vec{x}^*\left(t\right),\vec{u}^*\left(t\right)\right)dt+\psi\left(\vec{x}^*\left(t_1\right)\right)$$

Але згідно властивостям автономного процесу: значення інтегралу

$$\int\limits_t^{t_1} f^{\circ}\left(\vec{x}^*\left(t\right),\vec{u}^*\left(t\right)\right)dt+\psi\left(\vec{x}^*\left(t_1\right)\right)$$

при фіксованих $x^*(t)$ і $u^*\left(t\right)$ залежить лише від довжини t_1-t інтервалу інтегрування, який можна визначити з автономної системи (1), по відомим значенням $x^*\left(t\right)$ та $x^*\left(t_1\right)$ на траєкторії. А це означає, що t_1-t є функція від цих двох точок, а функція Беллмана μ явно не залежить від часу.

Для задачі (1), (2), (3), де час t_1 невідомий, а відомий стан системи на початку керування, та на правому кінці, **рівняння Беллмана** має вигляд:

$$\min_{u(\tau)\in U}\left[f^0\left(x^*\left(\tau\right),u\left(\tau\right)\right)+\left(grad\,\mu,\,\vec{f}\left(x^*\left(\tau\right),u\left(\tau\right)\right)\right)\right]=0 \tag{6}$$

або

$$\min_{u(\tau)\in U}\left[f^0\left(x^*\left(\tau\right),u\left(\tau\right)\right)+\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial\mu}{\partial x_i}\right|_{\left(x^*(\tau),\tau\right)} f_i\left(x^*\left(\tau\right),u\left(\tau\right)\right)\right]=0 \tag{6′}$$

Приклад

Знайти оптимальне за швидкодією керування з повним зворотнім зв'язком $u^*(\cdot)$ та відповідну йому оптимальну траєкторію $x^*(\cdot)$ системи:

$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - 8;$

$\dot{x}_2(t) = u(t), \quad |u(t)| \le 1, \quad 0 \le t \le T,$

і час T, затрачений на перехід із початкового стану $x_1(0) = 6,\ x_2(0) = 4$ у початок координат.

Розв'язання:

Сформулюємо проблему у формі задачі мінімізації функціоналу: функціонал якості тут може бути заданий двома способами:

або $T \to \min$ (задача Майєра за класифікацією типів задач оптимального керування)

$$\text{або } I = \int_0^T dt \to \min \text{ (задача Лагранжа)},$$

де момент закінчення процесу керування T не заданий і підлягає визначенню. У даному прикладі вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ має 2 координати x_1 та x_2, відповідні швидкості зміни фазових замінних: $\dot{x}_1 = f_1(t, x, u) = x_2 - 8,\ \dot{x}_2 = f_2(t, x, u) = u,$ і підінтегральний вираз функціоналу якості (в задачі Лагранжа) $f^\circ(t, x, u) = 1,$ термінальна частина функціоналу якості $\psi(t_1, x(t_1)) \equiv 0, \quad t_1 = T,$ граничні умови на лівому кінці $x_1(0) = 6,\ x_2(0) = 4$, на правому кінці $x_1(T) = 0,\ x_2(T) = 0$.

Розв'язується задача Лагранжа.

1) Рівняння Беллмана для цієї проблеми має вигляд (6′):

$$\min_{|u|\le 1}\left[1 + \frac{\partial \mu}{\partial x_1}(x_2 - 8) + \frac{\partial \mu}{\partial x_2}u\right] = 0 \text{ або } \min_{|u|\le 1}\left[\frac{\partial \mu}{\partial x_1}(x_2 - 8) + \frac{\partial \mu}{\partial x_2}u\right] = -1, \tag{12}$$

а гранична умова для функції Беллмана така:

$$\mu\left(\vec{x}\left(T\right),T\right)=\psi\left(\vec{x}\left(T\right),T\right)=0 \tag{13}$$

Будемо вважати, що функція μ неперервна та має неперервні частинні похідні за змінними x_1 та x_2. Оскільки з постанови задачі виконання цих умов не слідує, то подальший розв'язок має евристичний характер.

2) Знайдемо вираз оптимального керування $u^*\left(t\right)$ через функцію Беллмана. з рівняння (12), мінімального значення вираз в дужках набуває за умови, що

$$u^* = -sign\frac{\partial\mu}{\partial x_2} \tag{14}$$

З урахуванням (14) рівняння Беллмана (12) набуває вигляду:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\left(x_2-8\right)-\frac{\partial\mu}{\partial x_2}sign\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)+1=0 \text{ або } \frac{\partial\mu}{\partial x_1}\left(x_2-8\right)-\left|\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right|+1=0 \tag{15}$$

Згідно (14) оптимальне керування u^* може набувати значення 1 і -1.

3) Розглянемо на фазовій площині область L_{-1}, що відповідає керуванню $u^* = -1$. $\left(\frac{\partial\mu}{\partial x_2}>0\right)$Рівняння Беллмана (15) тут має вигляд

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_1}\left(x_2-8\right)-\frac{\partial\mu}{\partial x_2}+1=0 \tag{16}$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (16) будемо шукати у неявному вигляді $V\left(\mu,x_1,x_2\right)=0$. Використовуючи правило диференціювання функції заданої неявно, знаходимо похідні від функції Беллмана за фазовими змінними:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial\mu}},\ \frac{\partial\mu}{\partial x_2}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_2}}{\frac{\partial V}{\partial\mu}} \tag{17}$$

Підставимо (17) в (16), отримаємо

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}\left(x_2-8\right)-\frac{\partial V}{\partial x_2}-\frac{\partial V}{\partial\mu}=0 \tag{18}$$

Запишемо рівняння характеристик до рівняння (18)

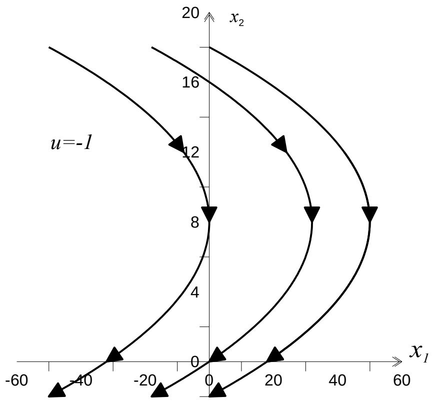
$$\frac{dx_1}{(x_2-8)}=\frac{dx_2}{-1}=\frac{d\mu}{-1} \tag{19}$$

Звідси знаходимо розв’язки системи 2-ох рівнянь з відокремлюванними змінними:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{x_2-8}=\dfrac{dx_2}{-1},\\ \dfrac{dx_2}{-1}=\dfrac{d\mu}{-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1+\dfrac{(x_2-8)^2}{2}=C_1\\ \mu-x_2=C_2\end{cases} \tag{20}$$

На фазовій площині (x_1,x_2) побудуємо графіки множин фазових траєкторій, що відповідають $u^*=-1$

$x_1+\dfrac{(x_2-8)^2}{2}=C_1$ - це множина парабол, вершини яких розташовані на прямій $x_2=8$ в точках $(C,8)$ на фазовій площині (x_1,x_2). Напрям руху вздовж парабол у часі визначається рівнянням $\dot{x}_2(t)=u^*(t)=-1<0$, тобто рух відбувається у напрямку зменшення x_2. Зобразимо це на фазовій площині:



Серед множини цих парабол, знайдемо ту яка приводить у початок координат, тобто у точку $x_1(T)=0,\ x_2(T)=0$ з урахуванням умови (13) $\mu(\vec{x}(T),T)=0$. За цих умов у рівняннях (20) маємо $C_1=32\ \ C_2=0$. Таким чином, щоб досягти мети керування (перевести систему у початок координат) за допомогою керування $u^*=-1$ необхідно рухатися на фазовій площині вздовж параболи: $(x_1-32)=-\dfrac{(x_2-8)^2}{2}$, $x_2\geq 0$ (на графіку ділянка середньої лініі, що лежить вище осі x_1), при цьому $\mu=x_2$.

$\left(x_1 - 32\right) = -\dfrac{\left(x_2 - 8\right)^2}{2}, \; x_2 \geq 0$ -ділянка лінії перемикання .

Розв'язки системи (20) дають два перші інтеграли рівняння (18):

$$\begin{cases} \phi_1\left(x_1, x_2\right) = x_1 + \dfrac{\left(x_2 - 8\right)^2}{2} \\ \phi_2\left(x_1, x_2\right) = \mu - x_2 \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння (18) можна записати у вигляді:

$$\Phi\left(x_1 + \frac{\left(x_2 - 8\right)^2}{2}; \mu - x_2 \right) = 0 \tag{21}$$

де $\Phi\left(\phi_1, \phi_2\right)$ - довільна неперервно діференційовна функція. Припустимо, що рівняння (21) можна розв'язати відносно другого аргументу у вигляді $\phi_2 = H\left(\phi_1\right)$. Тоді можна записати:

$$\mu = x_2 + H\left(x_1 + \frac{\left(x_2 - 8\right)^2}{2} \right) \tag{22}$$

тобто отримали вигляд виразу для функції Беллмана в області L_{-1}.

4) Аналогічно пп.3 розглянемо на фазовій площині область L_1, що відповідає керуванню $u^* = 1$ $\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial x_2} < 0 \right)$. Рівняння Беллмана (15) тут має вигляд

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_1}\left(x_2 - 8\right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} + 1 = 0 \tag{23}$$

Розв'язок неоднорідного рівняння (23) будемо шукати у неявному вигляді $V\left(\mu, x_1, x_2\right) = 0$. Використовуючи правило диференціювання функції заданої неявно, знаходимо похідні від функції Беллмана за фазовими змінними:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial \mu}}, \; \frac{\partial \mu}{\partial x_2} = -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial V}{\partial \mu}} \tag{24}$$

Підставимо (24) в (23), отримаємо

$$\frac{\partial V}{\partial x_1}\left(x_2-8\right)+\frac{\partial V}{\partial x_2}-\frac{\partial V}{\partial \mu}=0 \tag{25}$$

Запишемо рівняння характеристик до рівняння (25)

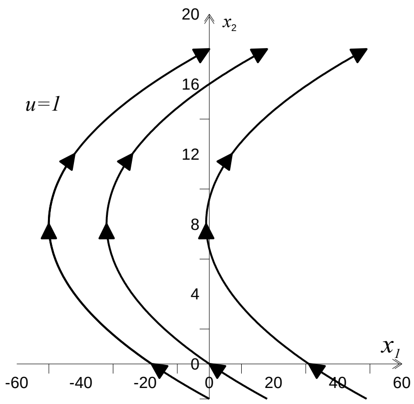
$$\frac{dx_1}{\left(x_2-8\right)}=\frac{dx_2}{1}=\frac{d\mu}{-1} \tag{26}$$

Звідси знаходимо розв'язки системи 2-ох рівнянь з відокремлюванними змінними:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{x_2-8}=\dfrac{dx_2}{1},\\ \dfrac{dx_2}{1}=\dfrac{d\mu}{-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1-\dfrac{\left(x_2-8\right)^2}{2}=C_1\\ \mu+x_2=C_2\end{cases} \tag{27}$$

На фазовій площині $\left(x_1,x_2\right)$ побудуємо графіки множин фазових траєкторій, що відповідають $u^*=1$

$x_1-\dfrac{\left(x_2-8\right)^2}{2}=C_1$- це множина парабол, вершини яких розташовані на прямій $x_2=8$ в точках $\left(C,8\right)$ на фазовій площині $\left(x_1,x_2\right)$. Напрям руху вздовж парабол у часі визначається рівнянням $\dot{x}_2\left(t\right)=u^*\left(t\right)=1>0$, тобто рух відбувається у напрямку збільшення x_2. Зобразимо це на фазовій площині:



Серед множини цих парабол, знайдемо ту яка приводить у початок координат, тобто у точку $x_1\left(T\right)=0,\ \ x_2\left(T\right)=0$ з урахуванням умови (13) $\mu\left(\vec{x}\left(T\right),T\right)=0$. За цих умов у рівняннях (20) маємо $C_1=-32\ \ C_2=0$. Таким чином, щоб досягти мети керування (перевести систему у початок координат) за допомогою керування $u^*=1$ необхідно рухатися на фазовій площині вздовж параболи: $\left(x_1+32\right)=\frac{\left(x_2-8\right)^2}{2}$, $x_2\le 0$ (на графіку ділянка середньої лінії, що лежить нижче осі x_1), при цьому $\mu=-x_2$.

$\left(x_1+32\right)=\frac{\left(x_2-8\right)^2}{2}$, $x_2\le 0$ -ділянка лінії перемикання .

Розв’язки системи (27) дають два перші інтеграли рівняння (25):

$$\begin{cases}\phi_3\left(x_1,x_2\right)=x_1-\frac{\left(x_2-8\right)^2}{2}\\ \phi_4\left(x_1,x_2\right)=\mu+x_2\end{cases}$$

Загальний розв’язок рівняння (25) можна записати у вигляді:

$$\Omega\left(x_1-\frac{\left(x_2-8\right)^2}{2};\mu+x_2\right)=0 \qquad (28)$$

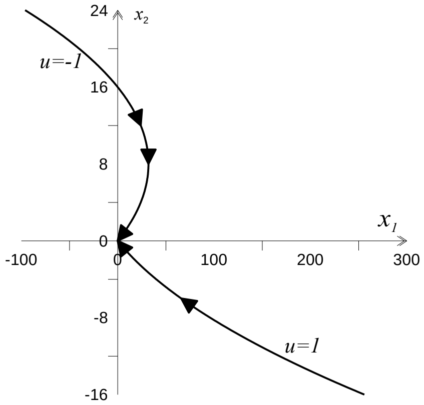
де $\Omega\left(\phi_3,\phi_4\right)$ - довільна неперервно діференційовна функція. Припустимо, що рівняння (28) можна розв’язати відносно другого аргументу у вигляді $\phi_4=H\left(\phi_3\right)$. Тоді можна записати:

$$\mu=-x_2+\Theta\left(x_1-\frac{\left(x_2-8\right)^2}{2}\right) \qquad (29)$$

тобто отримали вигляд виразу для функції Беллмана в області L_1.

5) Зробимо висновок з попередніх досліджень пп.3, 4 щодо лінії перемикання та вигляду оптимального керування в данному випадку.

Лінія перемикання виглядає так:



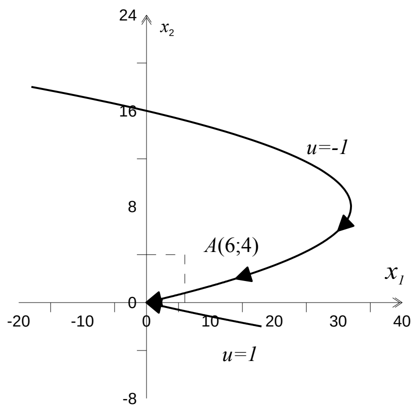
Для того щоб знайти остаточно тип керування, необхідно проаналізувати місце де знаходиться система у початковий момент:

– якщо у початковий момент система знаходиться в одній з точок лінії перемикання, тоді керування є стала величина (або $u^*=1$, або $u^*=-1$);

– якщо початкова умова така, що точка лежить вище лінії перемикання, тоді керування має вигляд: $u^*=\begin{cases}-1, & 0\le t<\tau;\\ 1, & \tau\le t\le T\end{cases}$;

– якщо початкова умова така, що точка лежить нижче лінії перемикання, тоді керування має вигляд: $u^*=\begin{cases}1, & 0\le t<\tau;\\ -1, & \tau\le t\le T.\end{cases}$

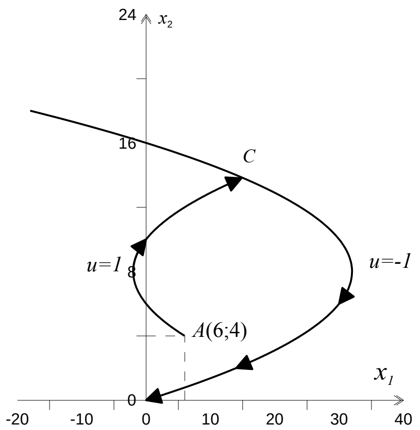
В нашому випадку $x_1(0)=6$, $x_2(0)=4$ точка $A(6,4)$ знаходиться нижче лінії перемикання



і тому

$$u^*=\begin{cases}1, & 0\le t<\tau;\\ -1, & \tau\le t\le T.\end{cases}$$

Тобто, спочатку точку А за час τ необхідно перевести на лінію керування за допомогою керування $u^*=1$, а потім система досягне початку координат по лінії керування:



6) Знайдемо тепер розв'язок рівняння Беллмана з урахуванням типу керування , та відомостей про лінію перемикання.

Керування має вигляд:

$$u^* = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \tau; \\ -1, & \tau \le t \le T. \end{cases}$$

На кінцевому інтервалі керування $u^* = -1$ необхідно рухатися на фазовій площині вздовж параболи: $(x_1 - 32) = -\frac{(x_2 - 8)^2}{2}$, $x_2 \ge 0$, при цьому $\mu = x_2$.

В точці C маємо перехід з керування $u^* = 1$ на $u^* = -1$. Тобто в точці C:

$$x_1 = 32 - \frac{(x_2 - 8)^2}{2}, \ \mu = x_2$$

Врахуємо це в (27) , знайдемо явний вигляд розв'язку рівняння Беллмана (25)

$$\begin{cases} x_1 - \frac{(x_2 - 8)^2}{2} = C_1 \\ \mu + x_2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 - (x_2 - 8)^2 = C_1 \\ 2x_2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{C_2}{2} - 8 \right)^2 = 32 - C_1$$

враховуючи вирази для C_1, C_2, маємо

$$\left(\frac{\mu + x_2}{2} - 8 \right)^2 = 32 - x_1 + \frac{(x_2 - 8)^2}{2} \Rightarrow \mu = 16 - x_2 + 2\sqrt{32 - x_1 + \frac{(x_2 - 8)^2}{2}}$$

Таким чином функція Беллмана така:

$$\mu = 16 - x_2 + 2\sqrt{32 - x_1 + \frac{(x_2 - 8)^2}{2}}$$

7) Знайдемо час T за який система з початкового стану перейде у початок координат та час τ - точку перемикання керування.

За своїм змістом функція μ при $x_1(0)=6$, $x_2(0)=4$ дає значення функціоналу якості, що мінімізується, тобто

$$T=\mu\left(x_1(0),x_2(0)\right)=16-4+2\sqrt{32-6+\frac{(4-8)^2}{2}}=12+2\sqrt{34}$$

Щоб знайти час τ - точку перемикання керування, використовуємо функцію Беллмана на ділянці від точки C до початку координат. Значення функції Беллмана в точці C - це час за який система найшвидше перейде з точки C у початок координат, тобто $\mu\left(x_{1C},x_{2C}\right)=T-\tau\Rightarrow\tau=T-\mu\left(x_{1C},x_{2C}\right)$.

На ділянці від точки перемикання C до початку координат, система рухається вздовж лінії перемикання, що відповідає керуванню $u^*=-1$, $\mu=x_2$. Тобто достатньо знати координату x_2 точки C. Знайдемо її як точку перетину лінії $x_1-\frac{(x_2-8)^2}{2}=-2$ (що відповідає керуванню $u^*=1$ та проходить через точку $A(6,4)$, тобто в (27) $C_1=-2$), та лінії перемикання $x_1=32-\frac{(x_2-8)^2}{2}$:

$$\begin{cases}x_1=\frac{(x_2-8)^2}{2}-2,\\ x_1=32-\frac{(x_2-8)^2}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{(x_2-8)^2}{2}-2=32-\frac{(x_2-8)^2}{2}\Rightarrow(x_2-8)^2=34\Rightarrow x_2=8+\sqrt{34}$$

Додатне значення кореня в останньому виразі взято з геометричних міркувань: координата x_{2C} це є більше значення з двох коренів рівняння $(x_2-8)^2=34$.

Тепер можемо визначити час τ:

$$\tau=T-\mu\left(x_{1C},x_{2C}\right)=T-x_{2C}=12+2\sqrt{34}-8-\sqrt{34}=4+\sqrt{34}.$$

8) Знайдемо фазові змінні, як функції часу з рівнянь руху:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - 8; \\ \dot{x}_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \tau; \\ -1, & \tau < t \le T. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \begin{cases} \dfrac{(t + C_1 - 8)^2}{2} + D_1, & 0 \le t \le \tau; \\ -\dfrac{(t + C_2 + 8)^2}{2} + D_2, & \tau < t \le T. \end{cases} \\ x_2(t) = \begin{cases} t + C_1, \; 0 \le t \le \tau; \\ -(t + C_2), \quad \tau < t \le T. \end{cases} \end{cases}$$

Врахуємо граничні умови:

$$x_1(0) = 6, \Rightarrow \frac{(C_1 - 8)^2}{2} + D_1 = 6$$

$$x_1(T) = 0, \Rightarrow \frac{(T + C_2 + 8)^2}{2} = D_2$$

$$x_2(0) = 4, \Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow D_1 = 6 - 8 = -2;$$

$$x_2(T) = 0 \Rightarrow T + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -T \Rightarrow D_2 = 32.$$

Таким чином, з урахуванням значень T та τ, отримуємо остаточно оптимальний керований процесс:

$$u^* = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 4 + \sqrt{34}; \\ -1, & 4 + \sqrt{34} \le t \le 12 + 2\sqrt{34}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-4)^2}{2} - 2, \; 0 \le t \le 4 + \sqrt{34}; \\ -\dfrac{\left(t - 4 - 2\sqrt{34}\right)^2}{2} + 32, \quad 4 + \sqrt{34} < t \le 12 + 2\sqrt{34}. \end{cases} \\ x_2(t) = \begin{cases} t + 4, \; 0 \le t \le 4 + \sqrt{34}; \\ -\left(t - \left(12 + 2\sqrt{34}\right)\right), \quad 4 + \sqrt{34} < t \le 12 + 2\sqrt{34}. \end{cases} \end{cases}$$