МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# Методические указания к самостоятельным работам

# Теория принятия решений в условиях информационных конфликтов

Ставрополь, 2017

## Методы многокритериальной оптимизации

## Тема 2. Принятие решений в условиях определенности

### Практическая работа 1 Исследование задачи принятия решения в условиях определенности методом иерархии

### Теоретическое обоснование

Напомним, что в теории принятия решений используются "разумные" процедуры выбора наилучшей из нескольких возможных альтернатив. Доброкачественность выбранного решения зависит от качества данных, используемых при описании ситуации, в которой принимается решение. С этой точки зрения процесс принятия решений может принадлежать к одному из четырех возможных условий:

1. Принятие решений в условиях определенности, когда данные известны точно;
2. Принятие решений в условиях риска, когда данные можно описать с помощью вероятностных распределений;
3. Принятие решений в условиях неопределенности, когда данным нельзя приписать относительные веса (весовые коэффициенты), которые представляли бы степень их значимости в процессе принятия решений;
4. Принятие решений в условиях конфликта, когда цели среды и решаемой среды противоречивы (противоположные).

По существу, в условиях определенности, данные надежно определены, в условиях неопределенности они не определены. Принятие решений в условиях риска, следовательно, представляет "промежуточный" случай.

Модели линейного программирования являются примером принятия решений в условиях определенности. Эти модели применимы лишь в тех случаях, когда альтернативные решения можно связать между собой точными линейными функциями. На этом занятии рассматривается иной подход к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений. Этот подход известен как метод анализа иерархий.

### Сущность метода анализа иерархий

Перед тем как изучить процедурные детали метода иерархий, рассмотрим общую схему решения задачи принятия решений в рассматриваемых условиях на конкретном примере, который демонстрирует способ, с помощью которого оцениваются различные альтернативные решения.

**Пример 1.** Миша Петров – выпускник средней школы, желает поступить с равными возможностями в университеты: А, В и С.

С целью выбора университета Миша сформулировал два основных критерия:

- местонахождение университета;
- академическая репутация.

Будучи отличным учеником, он оценивает академическую репутацию университета в пять раз выше, чем его местонахождение. Это приводит к тому, что репутации университета приписывается вес примерно 83%, а его местонахождению — 17%.

Проведенный анализ дает следующие оценки:

| Критерии | Наименование университета | | |
|---|---|---|---|
| | A | B | C |
| Местонахождение,% | 12,9 | 27,7 | 59,4 |
| Репутация,% | 54,5 | 27,3 | 18,2 |

Далее Миша использует системный анализ (сущность его Вы уже знаете) для оценки трех университетов с точки зрения их местонахождения и репутации.

Структура задачи принятия решений приведена на рис. 1. Задача имеет единственный иерархический уровень с двумя критериями (местонахождение и репутация) и три альтернативных решения (университеты A, B и C).

- Университет A: 0.17 x 0.129 + 0.83 x 0.545 = 0.4743.
- Университет B: 0.17 x 0.277+ 0.83 x 0.273 = 0.2737.
- Университет C: 0.17 x 0.594 + 0.83 x 0.182 = 0.2520.

На основе этих вычислений университет A получает наивысший комбинированный вес и, следовательно, является наиболее оптимальным выбором Миши.

Общая структура метода анализа иерархий может включать несколько иерархических уровней со своими критериями. Предположим в следующем примере, что сестра-близнец Миши Маша также желала бы поступить в один из этих трех университетов. Однако их родители ставят условие, что дети должны учиться в одном университете, тогда они смогут пользоваться одним автомобилем.

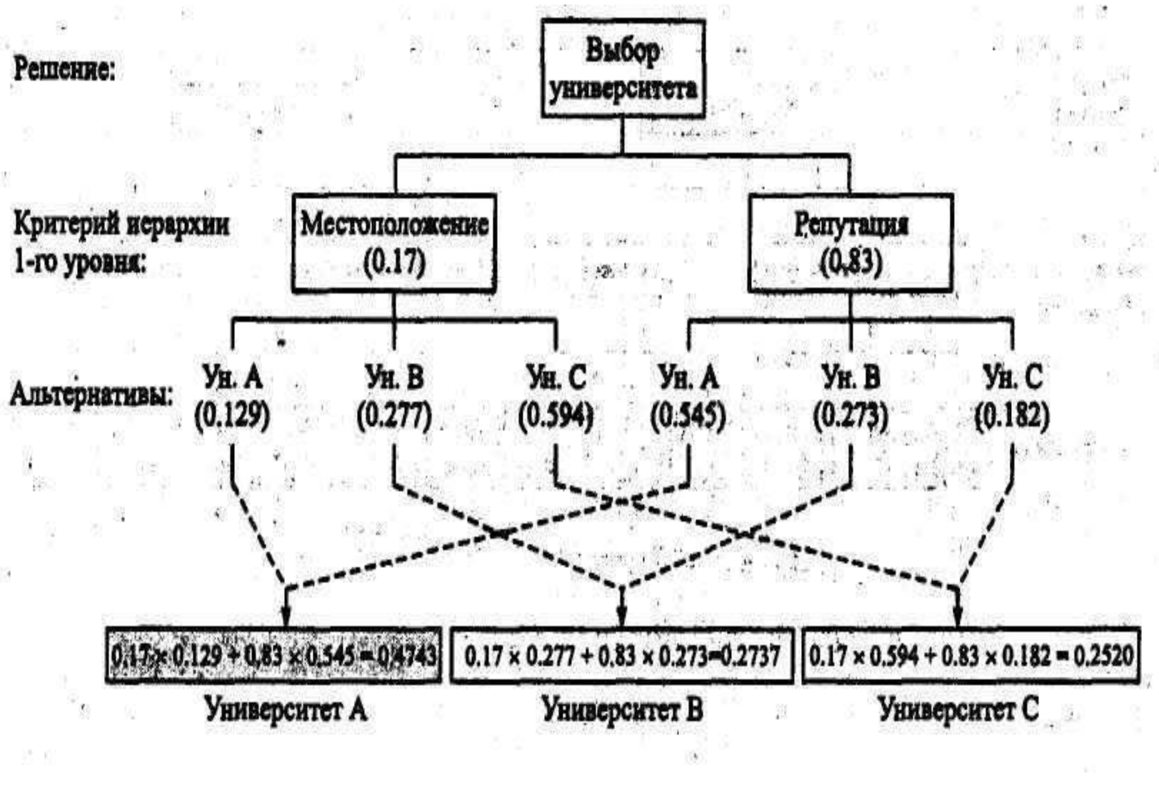



**Рис.1. Оценка трех университетов основана на вычислении комбинированного весового коэффициента для каждого из них.**

На рис. 2 приведена структура задачи выбора решения, которая теперь включает два иерархических уровня со своими критериями. Величины ***p*** и ***q*** (предположительно равные) на первом иерархическом уровне представляют собой **весовые коэффициенты**, которые приписываются точке зрения Мише и Маше относительно процесса выбора, соответственно. Второй иерархический уровень

использует веса ($p1$, $p2$) и ($q1$, $q\ 2$) для отображения индивидуальных точек зрения детей относительно критериев местонахождения и академической репутации каждого университета. Остальная часть структуры принятия решения может быть интерпретирована аналогично предыдущему примеру.

Заметим, что

- $p+q=1, p1+p2=1, q1+q2=1,$
- $p11+p12+p13=1, p21+p22+p23=1,$
- $q11+q12+q13=1, q21+q22+q23=1$

Определение комбинированного веса для университета А, представленное на рис. 2, демонстрирует, каким образом вычисляются эти показатели.

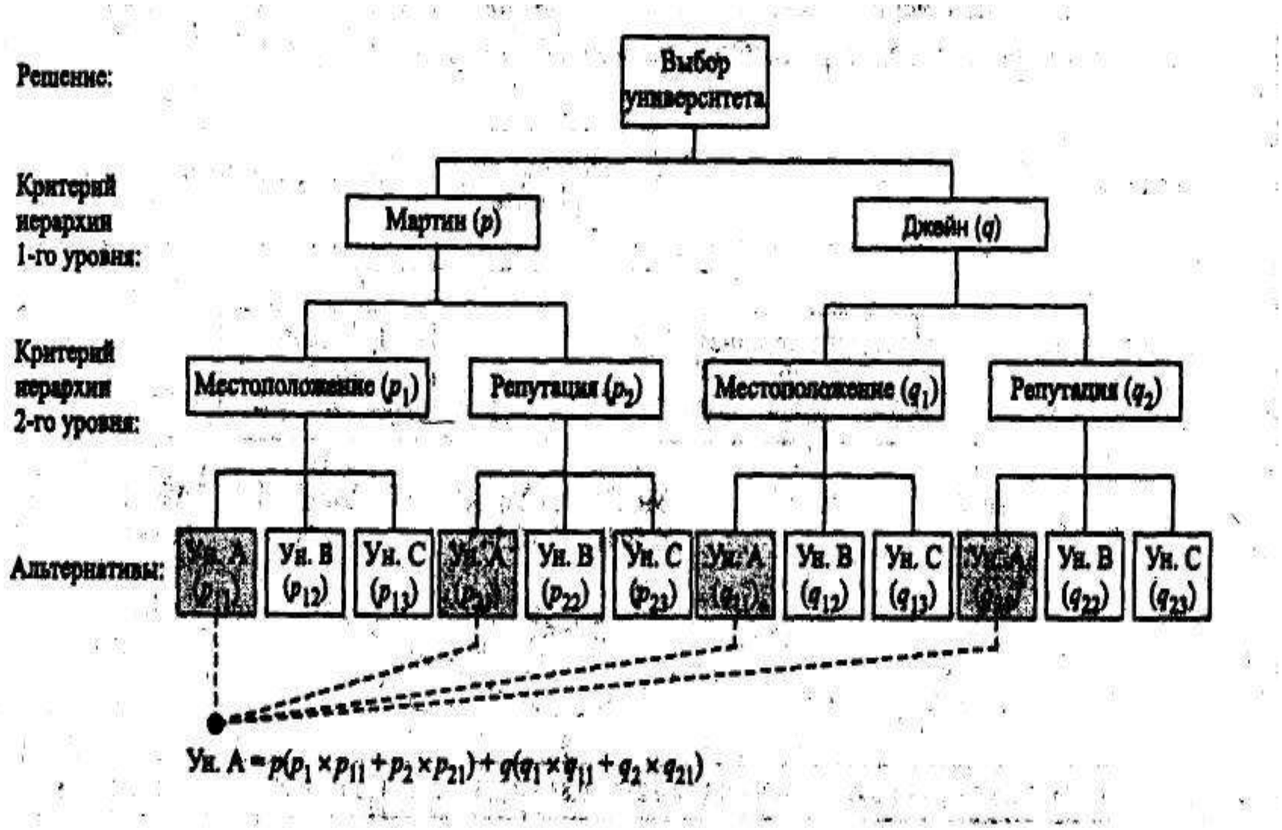



**Рис. 2. Структура двухуровневой задачи принятия решения**

### 2. Определение весовых коэффициентов.

Сложность метода анализа иерархий заключается в определении относительных весовых коэффициентов (таких, какие использованы в примере 1.) для оценки альтернативных решений. Если имеется *n* критериев на заданном уровне иерархии, соответствующая процедура создает матрицу **А** размерности nxn и, именуемую *матрицей парных сравнений*, которая отражает суждение лица, принимающего решение, относительно важности разных критериев. Парное сравнение выполняется таким образом, что критерий в строке $i$ ($i = 1, 2, ..., n$) оценивается относительно каждого из критериев, представленных $n$ столбцами. Обозначим через $a_{ij}$, элемент матрицы **A**, находящийся на пересечении $i$-и строки $j$-го столбца. В соответствии с методом анализа иерархий для описания упомянутых оценок используются целые числа от 1 до 9. При этом $a_{ij} = 1$ означает, что $i$-й и $j$-й критерии одинаково важны, $a_{ij} = 5$ отражает мнение, что $i$-и критерий значительно важнее, чем $j$-й, а $a_{ij} = 9$ указывает, что $i$-й критерий чрезвычайно важнее $j$-го. Другие промежуточные значения между 1 и 9 интерпретируются аналогично. Согласованность таких обозначений обеспечивается следующим условием: если $a_{ij} = k$, то автоматически $a_{ji} = 1/k$. Кроме того, все диагональные элементы $a_{ij}$ матрицы A должны быть равны 1, так как они выражают оценку критерия относительно самих себя.

Покажем, как определяется матрица сравнения A для задачи выбора Михаила из примера 1. Начнем с главного иерархического уровня, который имеет дело с критериями академической репутации университета и его местонахождения. С точки зрения Миши академическая репутация университета значительно важнее его местонахождения. Следовательно, он приписывает элементу $a_{12}$ матрицы A значение 5, т.е. $a_{12} = 5$. Это автоматически предполагает, что $a_{ji} = 1/5$. Обозначив через R и L, критерии репутации университета и его местонахождения, можно записать матрицу сравнения следующим образом.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ R \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Относительные веса критериев R и L могут быть определены путем деления элементов каждого столбца на сумму элементов этого же столбца. Следовательно, для нормализации матрицы A делим элементы первого столбца на величину 1+1/5=1.2, элементы второго - на величину 5 + 1 = 6. Искомые относительные веса $w_R$ и $w_L$ критериев вычисляются теперь в виде средних значений элементов соответствующих строк нормализованной матрицы A. Следовательно,

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \\ R \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.83 & 0.83 \\ 0.17 & 0.17 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \textbf{Средние значения элементов строк} \\ w_R = (0.83+0.83)/2 = 0.83, \\ w_L = (0.17+0.17)/2 = 0.17. \end{array}$$

В результате вычислений получили $w_R = 0.83$ и $w_L = 0.17$, т.е. те веса, которые показаны на рис. 1. Столбцы матрицы N одинаковы, что имеет место лишь в случае, когда ЛПР, проявляет идеальную согласованность в определении элементов матрицы A.

**Задание для СР**

**Определить относительные веса альтернативных решений?**

Относительные веса альтернативных решения, соответствующих университетам A, B и C, вычисляются в пределах каждого критерия R и L с использованием следующих двух матриц сравнения.

$$\mathbf{A}_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

Сумма элементов столбцов $= [1.83,\ 3.67,\ 5.5]$.

$$\mathbf{A}_L = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

Сумма элементов столбцов $= [8,\ 3.5,\ 1.7]$.

Элементы матриц $A_R$ и $A_L$ Определены на основе суждений Миши, касающихся относительной важности трех университетов.

При делении элементов каждого столбца матриц $A_R$ и $A_L$ на сумму элементов этих же столбцов получаем следующие нормализованные матрицы.

$$\mathbf{N}_R = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.545 & 0.545 & 0.545 \\ 0.273 & 0.273 & 0.273 \\ 0.182 & 0.182 & 0.182 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{l} \text{Средние значения элементов строк} \\ w_{RA} = (0.545+0.545+0.545)/3 = 0.545, \\ w_{RB} = (0.273+0.273+0.273)/3 = 0.273, \\ w_{RC} = (0.182+0.182+0.182)/3 = 0.182, \end{array}$$

Величины $(w_{RA}, w_{RB}, w_{RC}) = (0.545, 0.273, 0.182)$ дают соответствующие веса для университетов A, B и C с точки зрения академической репутации. Аналогично величины $(w_{LA}, w_{LB}, w_{LC}) = (0.129, 0.277, 0.594)$ являются относительными весами, касающимися местонахождения университетов.

$$\mathbf{N}_L = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.125 & 0.143 & 0.118 \\ 0.250 & 0.286 & 0.294 \\ 0.625 & 0.571 & 0.588 \end{bmatrix} \end{array}, \quad \begin{array}{l} \text{Средние значения элементов строк} \\ w_{LA} = (0.125+0.143+0.118)/3 = 0.129, \\ w_{LB} = (0.250+0.286+0.294)/3 = 0.277, \\ w_{LC} = (0.625+0.571+0.588)/3 = 0.594. \end{array}$$

## Методы принятия решений

### Тема 2. Принятие решений в условиях определенности

### Практическая работа 1 Исследование задачи принятия решения в условиях определенности методом иерархии Методика определения весовых коэффициентов

Сложность метода анализа иерархий заключается в определении относительных весовых коэффициентов (таких, какие использованы в примере 1.) для оценки альтернативных решений. Если имеется *n* критериев на заданном уровне иерархии, соответствующая процедура создает матрицу **A** размерности nxn и, именуемую *матрицей парных сравнений*, которая отражает суждение лица, принимающего решение, относительно важности разных критериев. Парное сравнение выполня-ется таким образом, что критерий в строке *i* (*i* = 1, 2, ..., *n*) оценивается относительно каждого из критериев, представленных *n* столбцами.

Обозначим через $a_{ij}$, элемент матрицы **A**, находящийся на пересечении *i*-и строки *j*-го столбца. В соответствии с методом анализа иерархий для описания упомянутых оценок используются целые числа от 1 до 9. При этом $a_{ij} = 1$ означает, что *i*-й и *j*-й критерии одинаково важны, $a_{ij} = 5$ отражает мнение, что *i*-и критерий значительно важнее, чем *j*-й, а $a_{ij} = 9$ указывает, что *i*-й критерий чрезвычайно важнее *j*-го. Другие промежуточные значения между 1 и 9 интерпретируются аналогично. Согласованность таких обозначений обеспечивается следующим условием: если $a_{ij} = k$, то автоматически $a_{ji} = 1/k$. Кроме того, все диагональные элементы $a_{ij}$ матрицы A должны быть равны 1, так как они выражают оценку критерия относительно самих себя.

Покажем, как определяется матрица сравнения A для задачи выбора Михаила из примера 1. Начнем с главного иерархического уровня, который имеет дело с критериями академической репутации университета и его местонахождения. С точки зрения Миши академическая репутация университета значительно важнее его местонахождения. Следовательно, он приписывает элементу $a_{12}$ матрицы A значение 5, т.е. $a_{12} = 5$. Это автоматически предполагает, что $a_{ji} = 1/5$. Обозначив через R и L, критерии репутации университета и его местонахождения, можно записать матрицу сравнения следующим образом.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ R \\ L \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} R & L \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Относительные веса критериев R и L могут быть определены путем деления элементов каждого столбца на сумму элементов этого же столбца. Следовательно, для нормализации матрицы A делим элементы первого столбца на величину 1+1/5=1.2, элементы второго - на величину 5 + 1 = 6. Искомые относительные веса $w_R$ и $w_L$ критериев вычисляются теперь в виде средних значений элементов соответствующих строк нормализованной матрицы A. Следовательно,

## Методы многокритериальной оптимизации

### Тема 2. Принятие решений в условиях определенности

### Практическая работа 2 Решение задачи принятия решения в условиях определенности методом иерархии

**Задание №1.** Отдел кадров фирмы сузил поиск будущего сотрудника до трех кандидатур: Саша (С), Дима (Д) и Макс (М). Конечный отбор основан на трех критериях: собеседование (Б), опыт работы (О) и рекомендации (Р). Отдел кадров использует матрицу А (приведенную ниже) для сравнения трех критериев. После проведенного собеседования с тремя претендентами, сбора данных, относящихся к опыту их работы и рекомендациям, построены матрицы АБ, АО, АР. Какого из трех кандидатов следует принять на работу? Оценить согласованность данных.

$$A = \begin{array}{c} \\ A \\ I \\ D \end{array} \begin{array}{ccc} A & I & D \\ \hline 1 & 2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/5 \\ 4 & 5 & 1 \end{array},$$

$$AD = \begin{array}{c} \\ N \\ A \\ I \end{array} \begin{array}{ccc} N & A & D \\ \hline 1 & 1/2 & 1 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}.$$

$$AA = \begin{array}{c} \\ N \\ A \\ I \end{array} \begin{array}{ccc} N & I & D \\ \hline 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 1/5 \\ 1/4 & 5 & 1 \end{array},$$

$$AI = \begin{array}{c} \\ N \\ A \\ I \end{array} \begin{array}{ccc} N & I & D \\ \hline 1 & 1/3 & 2 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 \end{array},$$

## Методы принятия решений

## Тема 2. Принятие решений в условиях определенности

### Практическая работа 2 Исследование задачи принятия решения в условиях определенности методом иерархии.

### Методика проверки согласованности матрицы сравнений.

В примере 2 мы отмечали, что все столбцы нормализованных матриц N и $N_R$ идентичны, а столбцы матрицы $N_L$ таковыми не являются. Одинаковые столбцы указывают на то, что результирующие относительные веса сохраняют одно и то же значение независимо от того, как выполняется сравнение. В этом случае говорят, что исходные матрицы сравнения A и $A_R$ являются согласованными. Следовательно, матрица $A_L$, не является таковой.

Согласованность означает , что решение будет согласовано с определениями парных сравнений критериев или альтернатив. С математической точки зрения согласованность матрицы A означает, что $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$ для всех *i, j, k*.

Например, в матрице $A_R$ из примера 2 элементы $a_{13}$ = 3 и $a_{12}a_{23}$ =2x3/2=3. Свойство согласованности требует линейной зависимости столбцов (и строк) матрицы A. В частности, столбцы любой матрицы сравнений размерностью 2x2 являются зависимыми, и, следовательно, такая матрица всегда является согласованной. Не все матрицы сравнений являются согласованными. Действительно, принимая во внимание, что такие матрицы строятся на основе человеческих суждений, можно ожидать некоторую степень несогласованности, и к ней следует относиться терпимо при условии, что она не выходит за определенные "допустимые" рамки.

*Чтобы выяснить, является ли уровень согласованности "допустимым",* необходимо определить соответствующую количественную меру для матрицы сравнений A. В примере 2 мы видели, что идеально согласованная матрица A порождает нормализованную матрицу N, в которой все столбцы одинаковы.

$$N=\begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что матрица сравнений A может быть получена из матрицы N путем деления элементов *i*-го столбца на *w*, (это процесс, обратный к нахождению матрицы *N* из *A*). Итак, получаем следующее.

# Методы многокритериальной оптимизации

## Тема 1. Принятие решений в условиях определенности

### Практическая работа 2 Проверка согласованности матрицы сравнений при исследовании задачи принятия решения в условиях определенности методом иерархии

#### Теоретическое обоснование

На занятии 1 отмечено, что все столбцы нормализованных матриц N и $N_R$ идентичны, а столбцы матрицы $N_L$ таковыми не являются. Одинаковые столбцы указывают на то, что результирующие относительные веса сохраняют одно и то же значение независимо от того, как выполняется сравнение. В этом случае говорят, что исходные матрицы сравнения A и $A_R$ являются согласованными. Следовательно, матрица $A_L$, не является таковой.

Согласованность означает, что решение будет согласовано с определениями парных сравнений критериев или альтернатив. С математической точки зрения согласованность матрицы A означает, что $a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$ для всех *i, j, k*.

Например, в матрице $A_R$ из примера 2 элементы $a_{13}$ = 3 и $a_{12}a_{23}$ =2x3/2=3. Свойство согласованности требует линейной зависимости столбцов (и строк) матрицы A. В частности, столбцы любой матрицы сравнений размерностью 2x2 являются зависимыми, и, следовательно, такая матрица всегда является согласованной. Не все матрицы сравнений являются согласованными. Действительно, принимая во внимание, что такие матрицы строятся на основе человеческих суждений, можно ожидать некоторую степень несогласованности, и к ней следует относиться терпимо при условии, что она не выходит за определенные "допустимые" рамки.

*Чтобы выяснить, являются ли уровень согласованности "допустимым",* необходимо определить соответствующую количественную меру для матрицы сравнений A. В примере 2 мы видели, что идеально согласованная матрица A порождает нормализованную матрицу N, в которой все столбцы одинаковы.

$$N=\begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{bmatrix}$$

Отсюда следует, что матрица сравнений A может быть получена из матрицы N путем деления элементов *i*-го столбца на *w*, (это процесс, обратный к нахождению матрицы *N* из *A*). Итак, получаем следующее.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & 1 & \dots & w_2/w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

## Методы принятия решений

## Тема 2. Методы принятия решений в условиях определенности

### Тематический теоретический раздел 1 Решение задач принятия решений методами математического линейного программирования

### 1.1. Общая постановка задачи линейного программирования

В общем виде оптимизационная задача записывается следующим Образом:

$$Z = F(x) \to \max(\min),\ X \in U, \qquad (1.1.1)$$

где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $U$ – область допустимых значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$; $F(X)$ – целевая функция.

Для того чтобы решить задачу оптимизации, достаточно найти ее оптимальное решение $X^*$, т.е. указать $X^* \in U$ такое, что $F(X^*) = F(X)(F(X^*) \le F(X))$ при любом $X \in U$.

Оптимизационная задача является неразрешимой, если она не имеет оптимального решения. В частности, задача максимизации будет неразрешима, если целевая функция *F(X)* не ограничена сверху на допустимом множестве *U*.

Методы решения оптимизационных задач зависят как от вида целевой функции *F(X)*, так и от строения допустимого множества *U*. Целевая функция в задаче, как правило, является функцией *n* переменных. Методы решения таких задач называют **методами математического программирования**.

В математическом программировании выделяют следующие основные задачи в зависимости от вида целевой функции *F(X)* и от области *U:*

• задачи линейного программирования (ЗЛП), если *F(X)* и ограничения линейны;

• задачи целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП), если ставится условие целочисленности переменных $x_1, x_2, ..., x_n$;

• задачи нелинейного программирования, если форма *F(X)* носит нелинейный характер.

Задача линейного программирования имеет вид

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \qquad (1.1.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = k+1, k+2, ..., m,\ k \le m, \qquad (1.1.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = 1,2,..., k, \qquad (1.1.4)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,..., n, \qquad (1.1.5)$$

# Методы принятия решений

## Тема 2. Методы принятия решений в условиях определенности

## Тематический теоретический раздел 2 Решение задач принятия решений методами математического нелинейного программирования

### 2.1. Постановка задачи нелинейного программирования

Нелинейное программирование – это математический аппарат для поиска экстремума нелинейных функций при наличии ограничений.

В общем виде задача нелинейного программирования (НП) записывается так:

$$\text{найти } \min f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2.1.1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ &g_2(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \\ &\dots \\ &g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

где $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – нелинейные функции переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Условие $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ можно заменить на два: $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$ и $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0$.

В отличие от линейного программирования для нелинейного программирования отсутствуют универсальные методы решения типа симплекс-метода. Это связано с тем, что допустимое множество решений $R(x_1, x_2, ..., x_n)$, определяемое условиями (2.1.2), в общем случае не является выпуклым, а, кроме того, даже в случае выпуклости $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ множество его крайних точек не будет конечным.

В связи с указанными обстоятельствами методы нелинейного программирования разрабатываются лишь под специальные классы задач.

Решение задачи нелинейного программирования состоит в определении оптимального плана (вектора) $x^* \in X$ ($X \cup R^n$) такого, что $f(x^*) \le f(x)$ на множестве $X$ векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если множество $X$ выпукло и функция/выпукла на $X$, то задача (2.1.1), (2.1.2) является задачей выпуклого программирования (ВП).

Если $f$ – выпуклая функция, то $(-f)$ называется вогнутой функцией. При этом $x^*$ – точка минимума $f$ является точкой максимума $(-f)$ и наоборот.

Рассмотрим свойства выпуклых функций.

1. Если $\forall g_i(x)$ в (2) выпуклы, то $X$ – выпуклое множество.
2. Сумма выпуклых функций является выпуклой функцией.

3. Если выпуклая функция $f$ имеет в точке $x^0$ локальный минимум, то этот минимум является и глобальным.

# Методы принятия решений

## Тема 2. Методы принятия решений в условиях определенности

### Тематический теоретический раздел 3 Решение задач принятия решений методами математического динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, позволяющий быстро находить оптимальное решение в случае, когда анализируемая ситуация не содержит факторов неопределенности, но имеется большое количество вариантов поведения, приносящих различные результаты, среди которых необходимо выбрать наилучший. Динамическое программирование подходит к решению некоторого класса задач путем их разложения на части, небольшие и менее сложные задачи. В принципе, задачи такого рода могут быть решены путем перебора всех возможных вариантов и выбора среди них наилучшего, однако часто такой перебор весьма затруднителен. В этих случаях процесс принятия оптимального решения может быть разбит на шаги (этапы) и исследован с помощью метода динамического программирования.

Решение задач методами динамического программирования проводится на основе сформулированного Р.Э. Беллманом принципа оптимальности: оптимальное поведение обладает тем свойством, что каким бы ни было первоначальное состояние системы и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения [8, 18].

Таким образом, планирование каждого шага должно проводиться с учетом общей выгоды, получаемой по завершении всего процесса, что и позволяет оптимизировать конечный результат по выбранному критерию.

Вместе с тем динамическое программирование не является универсальным методом решения. Практически каждая задача, решаемая этим методом, характеризуется своими особенностями и требует проведения поиска наиболее приемлемой совокупности методов для ее решения. Кроме того, большие объемы и трудоемкость решения многошаговых задач, имеющих множество состояний, приводят к необходимости отбора задач малой размерности либо использования сжатой информации.

Динамическое программирование применяется для решения таких задач, как: распределение дефицитных капитальных вложений между новыми направлениями их использования; разработка правил управления спросом или запасами; разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; составления календарных планов текущего и капитального ремонтов оборудования и его замены; поиск кратчайших расстояний на транспортной

# Методы принятия решений

## Тема 1. Принятие решений в условиях определенности

### Исследование задачи принятия решения в условиях определенности методом иерархии

**Задание №1.** Отдел кадров фирмы сузил поиск будущего сотрудника до трех кандидатур: Саша (С), Дима (Д) и Макс (М). Конечный отбор основан на трех критериях: собеседование (Б), опыт работы (О) и рекомендации (Р). Отдел кадров использует матрицу А (приведенную ниже) для сравнения трех критериев. После проведенного собеседования с тремя претендентами, сбора данных, относящихся к опыту их работы и рекомендациям, построены матрицы АБ, АО, АР. Какого из трех кандидатов следует принять на работу? Оцените согласованность данных.

$$A = \begin{array}{c} \\ Б \\ О \\ Р \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Б & О & Р \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{5} \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_Б = \begin{array}{c} \\ С \\ Д \\ М \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} С & Д & М \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A_О = \begin{array}{c} \\ С \\ Д \\ М \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} С & Д & М \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Задание №2**. Ксения и
покупают новый дом. Рас
В и С. Супруги согласов
дома: площадь зеленой лу
работы (Б), а также разр
приведѐнные ниже. Необ
порядке их приоритета
согласованности каждой м

# Методы принятия решений

## Тема 2. Методы принятия решений в условиях определенности

**Задание на выполнение контрольной работы**

ДКЗ 2. Решение задачи принятия решения методами линейного программирования ДКЗ 3. Принятие решения в транспортных задачах

ДКЗ 4. Решение задачи принятия решения методом дискретного программирования ДКЗ 5. Решение задачи принятия решения методами нелинейного программирования

ДКЗ 6. Решение задачи принятия решения методом динамического программирования

## Варианты заданий для домашней контрольной работы

### 1. Варианты заданий для решения задачи принятие решений методами линейного программирования

Запишите экономико-математическую модель для следующих задач.

**1.** Известно, что содержание трех питательных веществ А, В и С в рационе должно быть не менее 80, 60 и 30 единиц соответственно. Указанные питательные вещества содержат три вида продуктов. Содержание единиц питательных веществ в одном килограмме каждого из видов продуктов приведено в таблице.

| *Питательные вещества* | *Количество единиц питательных веществ* | | |
|---|---|---|---|
| | I | II | III |
| A | 1 | 4 | 3 |
| B | 2 | 4 | 2 |
| C | 2 | 1 | 3 |
| *Цена 1 кг продукта* | 10 | 12 | 8 |

Определите дневной рацион, обеспечивающий получение необходимого количества питательных веществ, при минимальных денежных затратах.

**2.** Торговое предприятие реализует 4 группы товаров (A, B, C и D). Нормы затрат ресурсов на каждый тип товаров, лимиты ресурсов, а также доход на единицу каждой продукции заданы в таблице. Определить плановый объем продаж и структуру товарооборота так, чтобы доход торгового предприятия был максимален.

| *Виды ресурсов* | *Норма затрат ресурсов на 1 ед. товара* | *Лимит* |
|---|---|---|

## Методы принятия решений

### Тема 2. Методы принятия решений в условиях определенности

### Лекция 3. Сущность решения задачи принятия решения в условиях определенности методом иерархии

Напомним, что в теории принятия решений используются "разумные" процедуры выбора наилучшей из нескольких возможных альтернатив. Доброкачественность выбранного решения зависит от качества данных, используемых при описании ситуации, в которой принимается решение. С этой точки зрения процесс принятия решений может принадлежать к одному из четырех возможных условий:

1. Принятие решений в условиях определенности, когда данные известны
точно;

2. Принятие решений в условиях риска, когда данные можно описать с помощью вероятностных распределений;

3. Принятие решений в условиях неопределенности, когда данным нельзя приписать относительные веса (весовые коэффициенты), которые представляли бы степень их значимости в процессе принятия решений;

4. Принятие решений в условиях конфликта, когда цели среды и решаемой среды противоречивы (противоположные).

По существу, в условиях определенности, данные надежно определены, в условиях неопределенности они не определены. Принятие решений в условиях риска, следовательно, представляет "промежуточный" случай.

Модели линейного программирования являются примером принятия решений в условиях определенности. Эти модели применимы лишь в тех случаях, когда альтернативные решения можно связать между собой точными линейными функциями. На этом занятии рассматривается иной подход к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений. Этот подход известен как метод анализа иерархий.

#### Сущность метода анализа иерархий

Перед тем как изучить процедурные детали метода иерархий, рассмотрим общую схему решения задачи принятия решений в рассматриваемых условиях на конкретном примере, который демонстрирует способ, с помощью которого оцениваются различные альтернативные решения.

**Пример 1.** Миша Петров – выпускник средней школы, желает поступить с равными возможностями в университеты: A, B и C.

С целью выбора университета Миша сформулировал два основных критерия:

- местонахождение университета;
- академическая репутация

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# Методические указания к лабораторным работам

# Теория принятия решений в условиях информационных конфлик

Ставрополь, 2017

# Л А БО РАТО Р Н А Я РАБОТА № 1

Решение однокритериальных задач принятия решений методами линейного программирования

***Общие сведения***

## Цель работы

- Научиться решать однокритериальные задачи принятия решений методами линейного программирования;
- Научиться использовать надстройку «Поиск решения» программного пакета MS Office Excel для решения однокритериальных задач теории принятия решений.

## План выполнения

1. Изучить теоретическую часть;
2. Получить задание преподавателя;
3. Выполнить задания 1 и 2:
   3.1. Построить математическую модель проблемы в виде задачи линейного программирования;
   3.2. Решить задачу с использованием надстройки Поиск решения пакета MS Excel;
   3.3. Произвести анализ чувствительности решения с использованием сценариев;
4. Составить отчёт по лабораторной работе. Отчёт должен иметь следующую структуру:
   4.1. Титульный лист, который должен содержать следующую информацию:
      4.1.1. Название университета и кафедры, ответственной за дисциплину;
      4.1.2. Заголовок — номер и название лабораторной работы;
      4.1.3. Подзаголовок — номер варианта и номера задач;
      4.1.4. ФИО и должности студента и преподавателя;
      4.1.5. «г. Санкт-Петербург, 2012 год»;
   4.2. Отчёт о решении задания 1, содержащий следующее информационное наполнение:
      4.2.1. Формулировка индивидуального задания;
      4.2.2. Математическая модель и краткое пояснение к её построению;
      4.2.3. Снимок экрана монитора, содержащий табличную модель задачи;
      4.2.4. Снимки отчетов по результатам, устойчивости и пределам;

4.2.5. Вывод по лабораторной работе, содержащий снимок отчета по сценариям с содержательными пояснениями к ним;

4.3. Отчёт о решении задания 2, содержащий информационное наполнение, аналогичное отчёту о решении задания 1.

## *Теоретическая часть*

Процесс принятия управленческого решения с использованием методов линейного программирования можно представить как последовательность выполнения следующих действий (этапов выработки решения).

— **Анализ ситуации и формализация исходной проблемы.** На этом этапе требуется найти всю релевантную информацию, формализовать проблему, сформулировать цели, которые необходимо достичь в результате решения проблемы, определить возможные решения проблемы и факторы, влияющие на решение проблемы. Часто результат этого этапа представляется в виде формальной модели проблемы на естественном языке, в которой собраны воедино цели, решения и факторы и где бы присутствовала основа для формализации отношений между ними.

— **Построение математической модели**, т. е. формализация модели условий задачи с использованием математического аппарата.

— **Анализ математической модели и получение математического решения проблемы.** Анализируется построенная математическая модель, проверяется адекватность модели и находится решение математической задачи, вытекающей из этой модели. Так как в рамках этапа, как правило, используются известные и апробированные алгоритмы решения математических задач, этот этап часто является наиболее простым из всех этапов процесса принятия решения.

— **Анализ математического решения проблемы и формирование управленческого решения.** На этом этапе анализируется чувствительность полученного математического решения к изменению входящих условий. На основе этого математического решения формируется управленческое решение.

После принятия решения, это решение исполняется.

## Анализ ситуации и формализация исходной проблемы

Рассмотрим первый этап процесса принятия решения: анализ проблемы и формализация исходной проблемы. Этот этап можно рассматривать как первую стадию перехода от реального мира к компьютерному представлению проблемы.

На этом этапе требуется формализовать проблему, сформулировать цели, которые необходимо достичь в результате решения проблемы, т.е. осуществить постановку проблемы. Достижение такой цели реализуется в виде следующих задач:

- максимально четко сформулировать проблему;
- сформулировать цели, которые должны быть достигнуты в результате реализации найденного решения;
- указать результат, который будет считаться решением проблемы (решение должно гарантировать достижение целей);
- выявить и описать возможности достижения целей;
- выявить и описать факторы, от которых может зависеть решение проблемы;
- выявить и описать ограничения, препятствующие достижению целей;
- описать возможные альтернативные способы решения проблемы.

Перечисленные пункты и составляют формализованную модель проблемы. Таким образом, формализованная модель — это четкое описание проблемы, в котором необходимо обособленно выделить перечисленные пункты.

Допустим некоторый завод электроники «Limited Electro», в связи с изменившейся конъюнктурой рынка хочет разработать новый производственный план для выпуска LED дисплеев новой диагонали 46” и 51”, не затрагивая пока производство прочей продукции. Предположим, что «Limited Electro» имеет месячный цикл производства, и, таким образом, нужно определить, сколько в месяц следует производить дисплеев 46” и сколько — 51”. На первый взгляд ответ кажется очевидным: максимум с учетом производственных возможностей. Итак, это обозначим как первую цель — увеличить до максимума производство как продукции 46”, так и продукции 51”. Допустим, производственные мощности позволяют выпускать в месяц суммарно 500 ед. дисплеев обоих типов. Это является первым ограничением — общее количество дисплеев типов 46” и 51” не должно превышать 500 шт.

Как видно, первую цель достичь можно, однако проблема остается ещё не достаточно формализованной, поскольку дает неоднозначное решение и не учитывает других ограничений и факторов. Всякое производство должно приносить прибыль, и это утверждение даёт возможность поставить вторую цель — производственный план должен приносить максимальную прибыль. Пусть одна ед. дисплея типа 46” приносит в среднем 2000 руб. прибыли, а одна ед. дисплея типа 51” — 2500 руб. Здесь величины удельной прибыли (т.е. прибыли на одну ед. дисплея) являются факторами, которые влияют на конечную цель.

В примере было сделано большое упрощение реальной ситуации, т. к. удельная прибыль любого производимого изделия зависит от многих факторов (конъюнктура рынка, стоимость исходных материалов, себестоимость производства, уровень рентабельности и пр.) и не является величиной постоянной, даже на протяжении относительно небольшого временного промежутка. Тем более сложно предсказать и трудоемко подсчитать ее значение на будущий продолжительный период времени. Можно только оценить будущую удельную прибыль, но только с определенной степенью точности. Пусть во взятом примере получены оценки будущей удельной прибыли производства дисплеев типа 46”: от 1500 до 2300 руб., а дисплеев типа 51”: от 2100 до 3000 руб. Приведенные выше величины удельных прибылей 2000 и 2500 руб. являются наиболее вероятными ожидаемыми значениями. Далее именно эти величины примем за значения удельных прибылей, а возможные последствия от их неточного задания будут рассмотрены при проведении анализа полученного решения.

Очевидно, что для достижения второй цели надо производить только дисплеи типа 51” и забыть о дисплеях типа 46”. Однако отдел маркетинга требует, чтобы дисплеи типа 46” производилось не менее 200 ед. в месяц, поскольку есть договоры на такое количество, а дисплеи типа 51” нельзя производить более 150 ед., поскольку большее количество трудно реализовать. Итак, имеется еще два ограничения: произведенное количество дисплеев 46” должно быть не меньше 200 ед., а дисплеев 51” — не более 150 ед.

При таких ограничениях даже специалист без особых способностей может составить план: производить 350 ед. дисплеев 46” и 150 ед. дисплеев 51”. Этот план учитывает только ограничения по производственным мощностям и маркетинговые ограничения. Но для производства любой продукции нужны еще исходные материалы. Пусть на изготовление дисплеев 46” и 51” необходимо сырье трех видов согласно приведённым данным (см. Таблица 1).

**Таблица 1. Затраты сырья на производство дисплеев**

| | Дисплеи 46”, ед. | Дисплеи 51”, ед. | Месячный запас, ед. |
|---|---|---|---|
| Сырье 1 | 50 | 100 | 50000 |
| Сырье 2 | 70 | 80 | 30000 |
| Сырье 3 | 40 | 70 | 25000 |

В таблице показано, сколько и какого сырья необходимо для производства одной ед. дисплея 46” и одной ед. дисплея 51”, а также величины месячных запасов каждого сырья. Очевидно, что общее количество сырья, используемого для производства дисплеев, не должно превышать их месячные запасы. Таким образом, имеем еще три ограничения — по одному для каждого типа сырья. С учетом этих ограничений производственный план уже подсчитать сложнее.

При формулировании последнего ограничения было сделано еще одно существенное упрощение реальной ситуации — действительный процесс производства зависит не только от наличия исходных материалов, необходимых для создания конечного продукта, но и от многих других факторов: наличия достаточных производственных мощностей, наличия рабочей силы, периодичности поступления исходных материалов, качества этих материалов и т.п. Здесь эти факторы опущены, оставлены только ограничения на сырье трех видов. При этом сделано еще одно неявное допущение, что другие компоненты, необходимые для производства дисплеев, имеются в достаточном количестве и не влияют на объемы производства.

Итак, вот что имеется после произведённого анализа проблемы:

— **Постановка проблемы:** разработать план производства дисплеев, который максимизировал бы прибыль с учетом всех видов ограничений.
— **Цель:** максимизировать прибыль.
— **Решение:** количество ед. дисплеев типов 46” и 51”, производимых в месяц.
— **Факторы, влияющие на решение:** значения удельной прибыли каждого типа дисплеев; предельное общее количество производимых дисплеев; предельное количество производимых дисплеев для каждого из типов (маркетинговые ограничения); значения количества сырья, необходимых для производства одной ед. дисплея каждого типа; значения количества запасов сырья. *Всего 14 факторов*.
— **Факторы, влияющие на прибыль:** все перечисленные факторы, кроме значений количества сырья, необходимого для производства одной ед. изделия. (Предположим, что проект дисплея предприятие изменить не может).
— **Ограничения:** на предельное общее количество производимых дисплеев; на предельные количества производимых дисплеев для каждого типа в отдельности; на предельные количества используемого сырья. *Всего 6 ограничений*.

Факторы, влияющие на прибыль, были выделены отдельно, чтобы в дальнейшем по этим факторам провести анализ чувствительности решения.

Следует сделать одно дополнительное замечание: для постановки в примере из-за простоты исходной проблемы можно сформулировать множество различных целей. Например: составить производственный план, который бы минимизировал себестоимость продукции; максимизировать прибыль и одновременно минимизировать использование каких-то исходных материалов, которые являются дорогими или дефицитными. При этом в зависимости от сформулированных целей могут выделяться разные факторы, влияющие на эти цели, и могут формироваться разные ограничения. Во взятом примере ограничимся сформулированной целью *максимизации прибыли*.

## Построение математической модели

Построение математической модели подразумевает перевод формализованной модели, построенной на предыдущем этапе, на язык математических отношений. Математическая модель должна содержать три основных компонента:

1. **Переменные**, значения которых необходимо вычислить — это переменные решения из формальной модели.
2. **Целевая функция** — это цель, записанная математически в виде функции от переменных. Обязательно указывается, что необходимо сделать с этой функцией для решения проблемы: найти ее максимум, минимум или конкретное заданное значение.
3. **Ограничения** — записанные математически ограничения из формальной модели.

Если определены переменные, то построение целевой функции и ограничений обычно не вызывает затруднений, поскольку на предыдущем этапе и цель и ограничения уже формулировались с привязкой к переменным решения.

Для приведённого примера обозначим через $x_1$ и $x_2$ переменные, которые определяют месячные объемы производства дисплеев (в единицах) типа 46” и 51” соответственно. Напомним, что 1 ед. дисплеев 46” приносит прибыль 2000 руб., а 1 ед. дисплеев 51” — 2500 руб. Тогда суммарная прибыль $z$ при производстве $x_1$ ед. дисплеев 46” и $x_2$ ед. дисплеев 51” будет рассчитываться по (1).

$$z(x_1, x_2) = 2000 * x_1 + 2500 * x_2 \text{ (руб.)} \qquad (1).$$

Приведённая функция z и является целевой функцией, которую необходимо максимизировать.

Теперь запишем ограничения. Первое ограничение говорит о том, что суммарный объем производства дисплеев обоих типов не должен превышать 500 шт. Это ограничение записывается как (2).

$$x_1 + x_2 \leq 500 \qquad (2).$$

Маркетинговые ограничения записываются как (3) и (4).

$x_1 \geq 200$ (3),

$x_2 \leq 150$ (4).

Теперь требуется записать ограничения на сырье. Напомним, что сырья 1 на производство 1 дисплея 46” расходуется 50 ед. и 100 ед. на производство 1 дисплея 51”. Таким образом, всего на производство $x_1$, ед. дисплеев 46” и $x_2$ ед. дисплеев 51” потребуется $50*x_1 + 100*x_2$ ед. сырья 1. Эта величина не должна превышать 50000 единиц. Т.о. получается ограничение (5).

$50*x_1 + 100*x_2 \leq 50000$ (5).

Подобным способом получаем еще два ограничения на сырье 2 — (6), и сырье 3 — (7).

$70*x_1 + 80*x_2 \leq 30000$ (6),

$40*x_1 + 70*x_2 \leq 25000$ (7).

Еще одним неявным ограничением является то, что переменные $x_1$ и $x_2$ должны быть неотрицательными, так как объёмы производства не могут быть физически отрицательными. Это ограничение называется условием неотрицательности переменных. Однако следует заметить, что условие неотрицательности для переменной $x_1$ излишне, поскольку уже имеется перекрывающее ограничение $x_1 \geq 200$. Т.о. имеем ещё одно ограничение (8).

$x_2 \geq 0$ (2).

Обратите особое внимание на то, что масштабы всех переменных и параметров должны быть согласованы. В приведённом примере нет необходимости приводить переменные, но во множестве случаев это является необходимым.

Обычно ограничение записывают таким образом, чтобы в левой части неравенства находилось выражение с переменными, а в правой части неравенства находились только числа. Тогда левую часть неравенства называют функцией ограничения.

Окончательно математическая модель нашей проблемы запишется следующим образом:

*максимизировать* $z = 2000*x_1 + 2500*x_2$ *при выполнении ограничений*

$x_1 + x_2 \leq$

$500, x_1 \geq$

$200, x_2 \leq$

$150, x_2 \geq 0,$

$50*x_1 + 100*x_2 \leq 50000,$

$70*x_1 + 80*x_2 \leq 30000,$

$40*x_1 + 70*x_2 \leq 25000.$

Любое решение, т.е. пара значений переменных $x_1$ и $x_2$, удовлетворяющее всем ограничениям модели, называется допустимым. В примере решение $x_1 = 200$ и $x_2 = 150$ будет допустимым, поскольку не нарушает ни одного ограничения, включая условия неотрицательности. Чтобы проверить допустимость, необходимо подставить значения $x_1 = 200$ и $x_2 = 150$ в левые части ограничений, выполнить вычисления и проверить, что ни одно неравенство не нарушается. Значение целевой функции при этом решении будет равно z = 2000*200 + 2500*150 = 775 000 (руб.).

Итак, математическая модель построена, осталось найти решение модели. Для выполнения этой задачи в настоящей работе предлагается использовать программный пакет MS Office Excel и его надстройку «Поиск решения».

## Анализ математической модели и получение математического решения проблемы

### Построение табличной модели

Прежде чем приступить к выполнению вычислений в MS Office Excel (далее **Excel**), необходимо перевести построенную математическую модель на рабочий лист Excel. Для этого следует определить, в каких ячейках будут располагаться переменные решения, записать в нужные ячейки формулы, по которым будут вычисляться целевая функция и функции ограничений (левые части ограничений), надо записать в отдельные ячейки значения правых частей ограничений. Всю эту совокупность значений и формул, записанных на рабочем листе Excel, назовем табличной моделью.

Для табличных моделей задач оптимизации не существует общепринятых правил построения. Однако можно выделить некоторые рекомендации, которые облегчат дальнейшее применение средства «Поиск решения»:

- Значения переменных требуется располагать в отдельных ячейках и группировать в отдельный блок ячеек.
- Каждому ограничению требуется отводить отдельную строку или столбец таблицы. Ограничения требуется группировать в отдельный блок ячеек.
- Предпочтительно, чтобы ячейки, содержащие переменные и значение целевой функции, а также все ограничения, имели заголовки.
- Коэффициенты целевой функции должны храниться в отдельной строке, располагаясь непосредственно под или над соответствующими переменными; формула для вычисления целевой функции должна находиться в соседней ячейке.

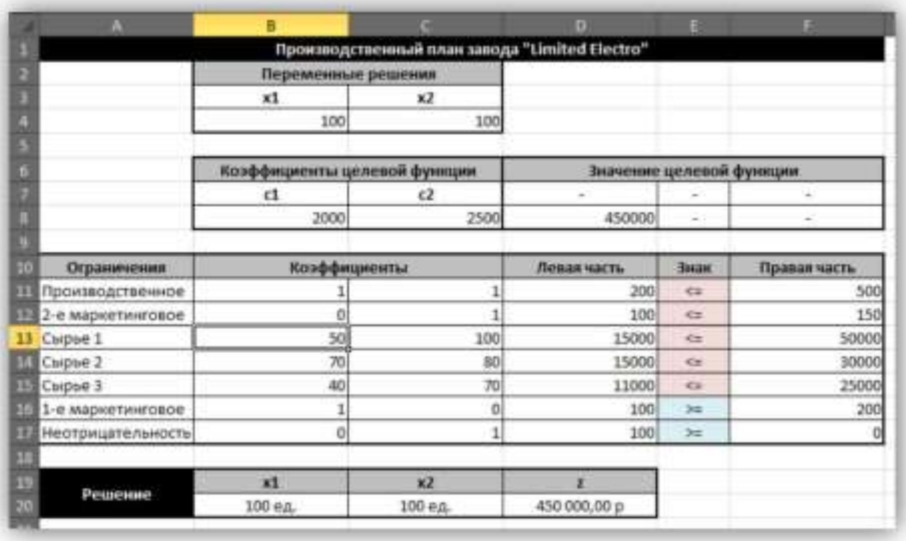
- В каждой строке ограничений за ячейками, содержащими коэффициенты данного ограничения, следует ячейка, в которую записывается вычисленное значение функции ограничения (значение левой части ограничения). За ней может следовать ячейка, в которой стоит соответствующий знак неравенства или равенства ограничения, а затем ячейка, содержащая значение правой части ограничения. Желательно, чтобы правые части ограничений были константами, а не формулами. Дополнительно можно иметь ячейку, в которой вычислена разность между значениями левой и правой частей неравенства.
- Условия неотрицательности переменных решения не обязательно включать в табличную модель. Как правило, они опускаются и указываются непосредственно в диалоговом окне средства «Поиск решения».

В результате выполнения этих рекомендаций все основные коэффициенты модели содержатся в отдельных ячейках, поэтому их легко изменять, не меняя формул модели. Благодаря группированию упрощается работа со средством «Поиск решения», поскольку для указания переменных или ограничений можно использовать диапазоны ячеек, т.е. задавать переменные и ограничения группой, а не по отдельности. Наличие заголовков сделает понятной эту табличную модель не только вам, но и прочим пользователям.

Пример табличной модели для рассматриваемого примера отображает Рисунок 1. Здесь значения переменных решения записаны в ячейках *B4* и *C4* с соответствующими заголовками в ячейках *B3* и *C3*. Изначально введены произвольные значения переменных. Коэффициенты, стоящие перед переменными в формуле целевой функции, записаны в ячейки *B8* и *C8*, а само значение целевой функции вычисляется в ячейке *D8* (соответствующие заголовки записаны над этими ячейками). Ниже в диапазоне *B11:C17* записаны коэффициенты функций ограничений, в диапазоне *D11:D17* вычисляются значения левых частей ограничений, в диапазоне *E11:E17* записаны знаки неравенств ограничений, а в диапазоне *F11:F17* — значения правых частей ограничений. Внизу, наконец, в строке 20 справа от заголовка «Решение» повторены значения переменных и целевой функции.

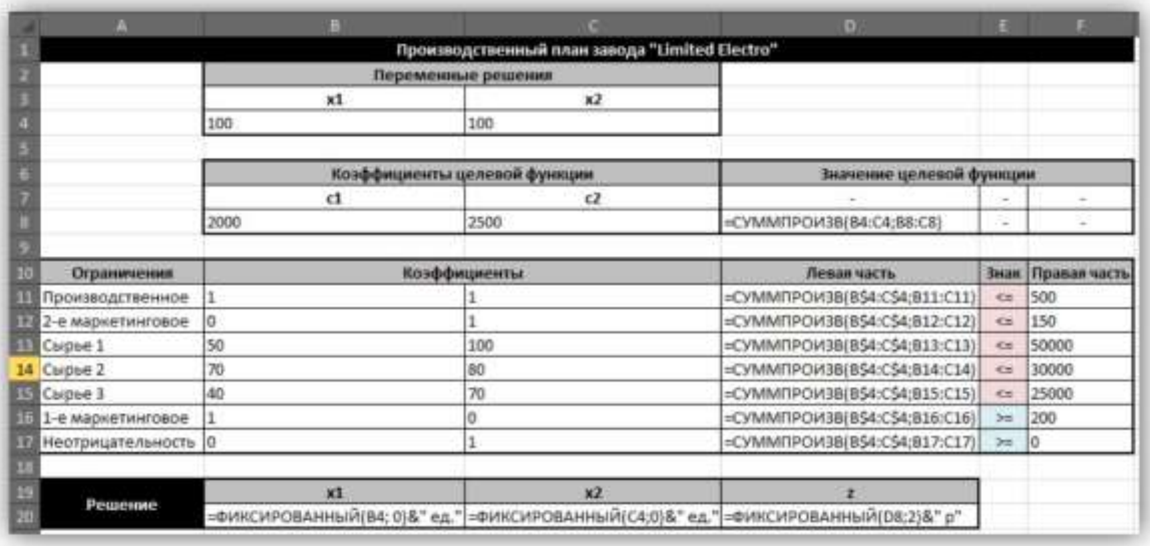
Формулы, по которым выполняются все вычисления на данном рабочем листе, содержит Рисунок 2. Для вычисления линейных функций используется функция *СУММПРОИЗВ(массив1;массив2)*, которая суммирует попарные произведения элементов двух диапазонов, заданных аргументами функции *массив1* и *массив2*. Например, формула *=СУММПРОИЗВ($B4:$C4;B8:C8)*, вычисляющая значение целевой функции в ячейке *D8*, эквивалентна такой формуле: *=B4*B8+C4*C8*. Абсолютные ссылки, которые вводятся с использованием символа «$»,

*\$B4:\$C4* на диапазон *B4:C4*, содержащий значения переменных $x_1$ и $x_2$, сделаны для того, чтобы можно было скопировать эту формулу из ячейки *D8* в ячейки *D11:D17* для вычисления левых частей неравенств, где также участвуют значения переменных решения.



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Производственный план завода "Limited Electro" | | | | | |
| 2 | | Переменные решения | | | | |
| 3 | | x1 | x2 | | | |
| 4 | | 100 | 100 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | Коэффициенты целевой функции | | Значение целевой функции | | |
| 7 | | c1 | c2 | - | - | - |
| 8 | | 2000 | 2500 | 450000 | - | - |
| 9 | | | | | | |
| 10 | Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Знак | Правая часть |
| 11 | Производственное | 1 | 1 | 200 | <= | 500 |
| 12 | 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 100 | <= | 150 |
| 13 | Сырье 1 | 50 | 100 | 15000 | <= | 50000 |
| 14 | Сырье 2 | 70 | 80 | 15000 | <= | 30000 |
| 15 | Сырье 3 | 40 | 70 | 11000 | <= | 25000 |
| 16 | 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 100 | >= | 200 |
| 17 | Неотрицательность | 0 | 1 | 100 | >= | 0 |
| 18 | | | | | | |
| 19 | Решение | x1 | x2 | z | | |
| 20 | | 100 ед. | 100 ед. | 450 000,00 р | | |

**Рисунок 1. Табличная модель для вычисления производственного плана завода «Limited Electro»**



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Производственный план завода "Limited Electro" | | | | | |
| 2 | | Переменные решения | | | | |
| 3 | | x1 | x2 | | | |
| 4 | | 100 | 100 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | Коэффициенты целевой функции | | Значение целевой функции | | |
| 7 | | c1 | c2 | - | - | - |
| 8 | | 2000 | 2500 | =СУММПРОИЗВ(B4:C4;B8:C8) | - | - |
| 9 | | | | | | |
| 10 | Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Знак | Правая часть |
| 11 | Производственное | 1 | 1 | =СУММПРОИЗВ(B$4:C$4;B11:C11) | <= | 500 |
| 12 | 2-е маркетинговое | 0 | 1 | =СУММПРОИЗВ(B$4:C$4;B12:C12) | <= | 150 |
| 13 | Сырье 1 | 50 | 100 | =СУММПРОИЗВ(B$4:C$4;B13:C13) | <= | 50000 |
| 14 | Сырье 2 | 70 | 80 | =СУММПРОИЗВ(B$4:C$4;B14:C14) | <= | 30000 |
| 15 | Сырье 3 | 40 | 70 | =СУММПРОИЗВ(B$4:C$4;B15:C15) | <= | 25000 |
| 16 | 1-е маркетинговое | 1 | 0 | =СУММПРОИЗВ(B$4:C$4;B16:C16) | >= | 200 |
| 17 | Неотрицательность | 0 | 1 | =СУММПРОИЗВ(B$4:C$4;B17:C17) | >= | 0 |
| 18 | | | | | | |
| 19 | Решение | x1 | x2 | z | | |
| 20 | | =ФИКСИРОВАННЫЙ(B4; 0)&" ед." | =ФИКСИРОВАННЫЙ(C4;0)&" ед." | =ФИКСИРОВАННЫЙ(D8;2)&" р" | | |

**Рисунок 2. Формулы табличной модели**

Левые части ограничений, поскольку это линейные функции, также вычисляются с помощью функции *СУММПРОИЗВ*. Даже если это простые ограничения типа $x_2 \leq 150$, которые здесь представляются как $0*x_1 + 1*x_2 \leq 150$ (2-е маркетинговое ограничение, Рисунок 2).

Требуется обратить внимание на то, что ограничения сгруппированы по типу неравенств — сначала идут ограничения типа <=, а затем типа >=. Последовательность расположения групп не существенна, однако существенно само наличие групп однотипных ограничений, что позволит в дальнейшем использовать эту группировку в средстве «Поиск решения» для более удобного использования. Знаки неравенств в диапазоне *E11:E17* вставлены только для информативности ограничений для пользователя модели, а средство «Поиск решения» их не использует. Средство «Поиск решения» использует при построении отчётов заголовки строк, содержащих ограничения. Поэтому рекомендуется давать более содержательные заголовки, даже чем те, что содержит Рисунок 1 в ячейках *A11:A17*. Например, можно использовать следующие заголовки: Ограничение на объем производства, Маркетинговое ограничение продаж и т.п. С другой стороны, заголовки не являются обязательным элементом табличной модели, однако их отсутствие приводит к потере информативности модели для её пользователей.

**Использование средства «Поиск решения»**

После того, как была построена и проверена табличная модель, необходимо её решить. Для этого и используется надстройка Excel «Поиск решения». Соответствующая надстройке область меню «Анализ» должна располагаться в меню «Сервис» в (или в меню «Данные» в MS Office 2007 и выше) (см. Рисунок 3).

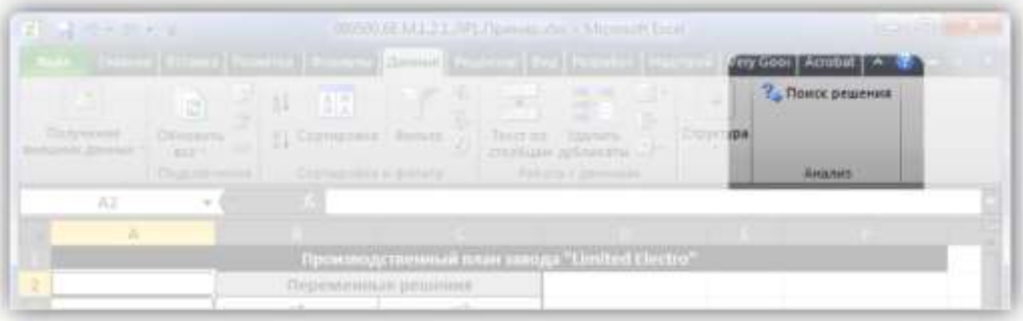



**Рисунок 3. Панель «Анализ» и кнопка «Поиск решения»**

Если указанные элементы меню не найдены, требуется подключить надстройку. Для ее подключения выполните команду Сервис->Надстройки (или Файл->Параметры->Надстройки в MS Office 2007 и выше) и в открывшемся диалоговом окне Надстройки в списке Доступные надстройки установите флажок «Поиск решения».

Покажем общую схему применения средства «Поиск решения» для решения задач линейного программирования.

Для применения средства «Поиск решения» требуется выполнить следующие шаги (предполагается, что до первого шага на листе Excel создана и проверена табличная модель):

1. Выберите команду «Поиск решения».
2. В открывшемся диалоговом окне «Поиск решения» укажите данные, необходимые для поиска оптимального решения (см. Рисунок 4).

2.1. В поле «Оптимизировать целевую функцию» введите адрес ячейки, содержащей значение целевой функции. Для модели из примера в это поле следует ввести *D8*.

2.2. Параметр «До» позволяет задать тип оптимизации. В данном случае необходимо максимизировать значение целевой функции, т.е. выбрать переключатель «Максимум».

2.3. Поле «Изменяя ячейки переменных» позволяет указать ячейки, в которых содержатся переменные модели. В рассматриваемом примере требуется ввести диапазон *B4:C4*.

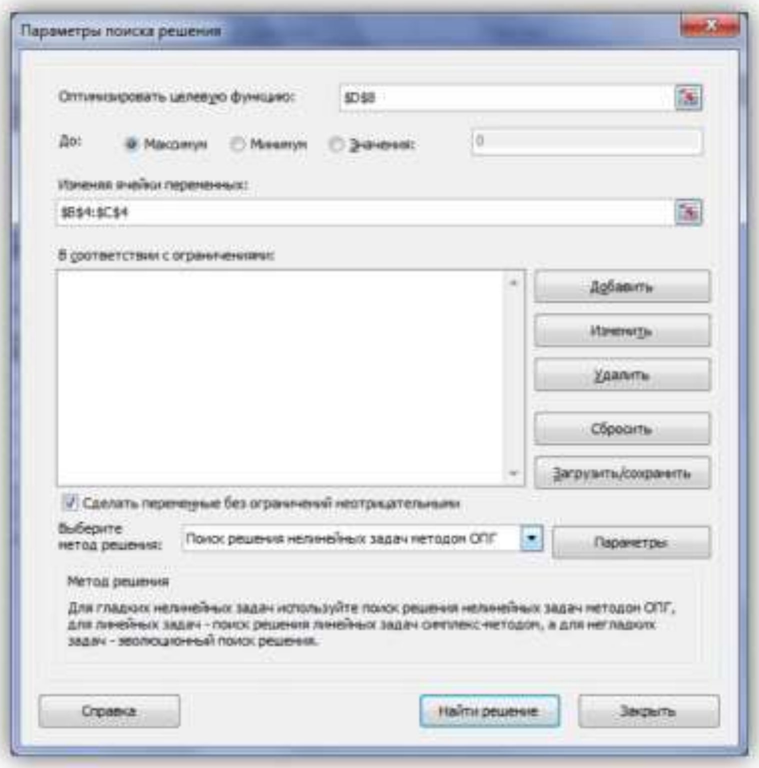



**Рисунок 4. Задание параметров для поиска решения**

3. Далее задайте ограничения в области «В соответствии с ограничениями», используя кнопку «Добавить». Для рассматриваемого примера требуется ввести два элемента ограничений, как показывают Рисунок 5 и Рисунок 6.
4. 

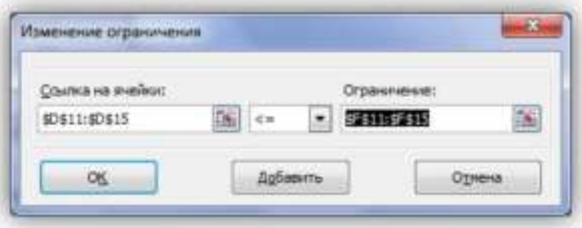



**Рисунок 5. Задание первой группы ограничений**


**Рисунок 6. Задание второй группы ограничений**

4. После задания ограничений следует задать метод решения «Поиск решения линейных задач симплекс-методом» в поле «Выберите метод решения» (см. Рисунок 7).

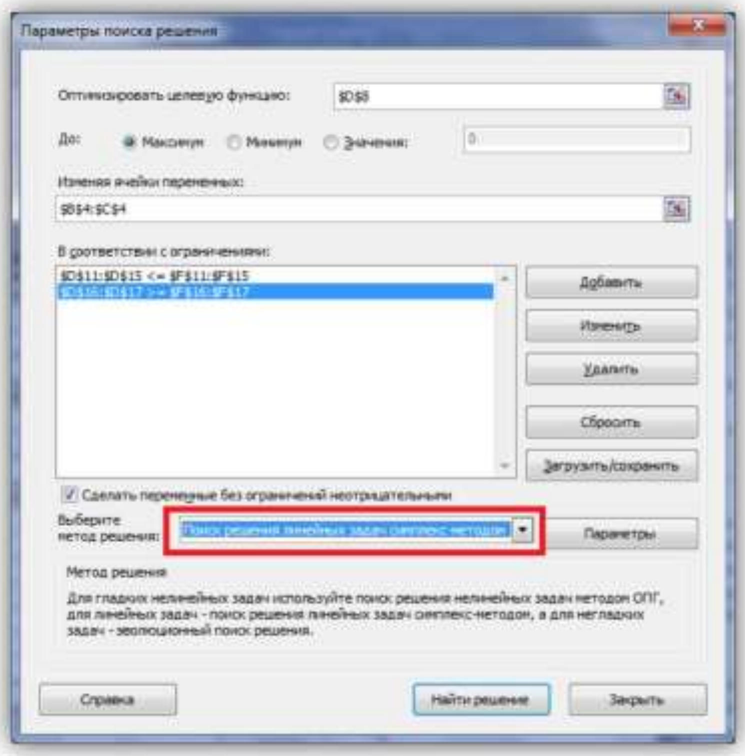



**Рисунок 7. Выбор метода решения**

5. Далее требуется в диалоговом окне Параметры, которое открывается после нажатия кнопки «Параметры» диалогового окна «Поиск решения», задать дополнительные условия для поиска решения (см. Рисунок 8):
   5.1. Параметры «Максимальное время (в секундах)»=100, «Число итераций»=100, «Точность ограничения»= 0,000001.
   5.2. Установить флажок «Использовать автоматическое масштабирование».
   5.3. Если хотите проследить каждую итерацию процесса вычисления, установите флажок «Показывать результаты итераций». Если хотите

сразу получить результат вычислений, не устанавливайте этот флажок.

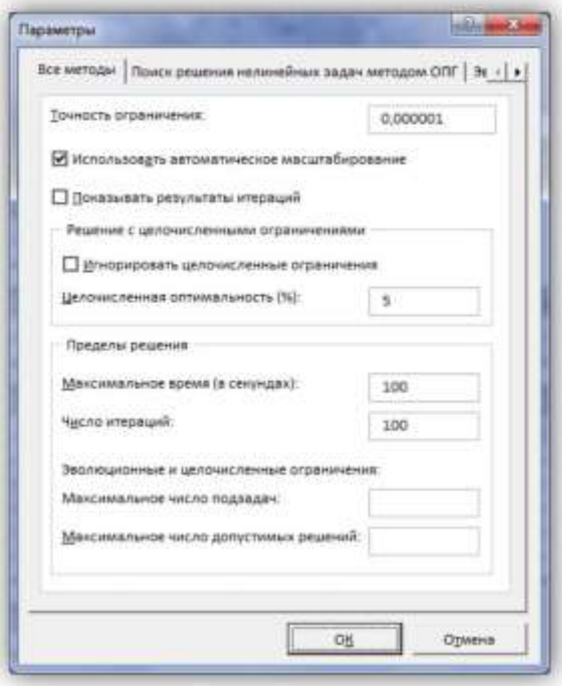



**Рисунок 8. Параметры поиска решения**

5.4. Все прочие параметры предназначены для настройки решений с использованием методов решения нелинейных задач и эволюционного поиска.

6. Нажмите кнопку «Найти решение».
7. После окончания работы «Поиск решения» выведет на экран диалоговое окно «Результаты поиска решения» (см. Рисунок 9), в котором можно указать дальнейшие действия. Выберите все отчёты для их дальнейшего построения и нажмите кнопку «ОК».

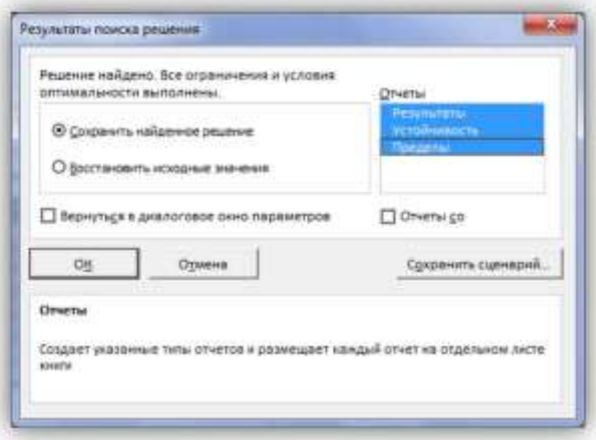
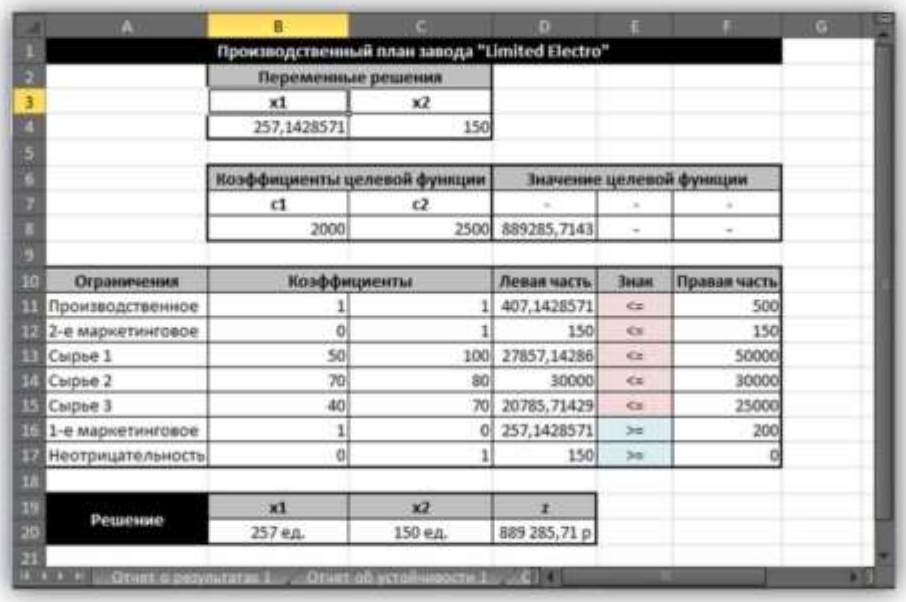



**Рисунок 9. Успешное завершение решения задачи.**

Диалоговое окно «Результаты поиска решения» сообщает о завершении поиска. Если оптимальное решение найдено, в диалоговом окне «Результаты поиска решения» должно отобразиться сообщение

«Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». Если получено такое сообщение, можно или сохранить найденное решение, выбрав соответствующий параметр, или отбросить его, выбрав параметр «Восстановить исходные значения». Существует возможность также получить три типа отчетов о решении. Каждый отчет выводится на новый лист рабочей книги.

В рассматриваемом примере решение найдено (см. Рисунок 10): надо производить 257 единиц дисплеев типа 46” и 150 единиц дисплеев типа 51”, при этом будет получена прибыль в размере 889 285,17 руб. В диалоговом окне Результаты поиска решения мы также указали, что надо создать отчеты.



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Производственный план завода "Limited Electro" | | | | | |
| 2 | | Переменные решения | | | | |
| 3 | | x1 | x2 | | | |
| 4 | | 257,1428571 | 150 | | | |
| 6 | | Коэффициенты целевой функции | | Значение целевой функции | | |
| 7 | | c1 | c2 | - | - | - |
| 8 | | 2000 | 2500 | 889285,7143 | - | - |
| 10 | Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Знак | Правая часть |
| 11 | Производственное | 1 | 1 | 407,1428571 | <= | 500 |
| 12 | 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 150 | <= | 150 |
| 13 | Сырье 1 | 50 | 100 | 27857,14286 | <= | 50000 |
| 14 | Сырье 2 | 70 | 80 | 30000 | <= | 30000 |
| 15 | Сырье 3 | 40 | 70 | 20785,71429 | <= | 25000 |
| 16 | 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 257,1428571 | >= | 200 |
| 17 | Неотрицательность | 0 | 1 | 150 | >= | 0 |
| 19 | Решение | x1 | x2 | z | | |
| 20 | | 257 ед. | 150 ед. | 889 285,71 р | | |

**Рисунок 10. Решение линейной модели для завода «Limited Electro»**

## Анализ математического решения проблемы и формирование управленческого решения

На этом этапе требуется на основе полученного с использованием «Поиска решений» решения математической модели найти решение реальной проблемы. В процессе построения модели были сделаны различные допущения, упрощающие реальную ситуацию, в результате чего появилась возможность формализовать модель. Зависимости, зафиксированные в модели, лишь приближенно отображают реальные зависимости между факторами и переменными решения и объективной целью. Знания факторов, влияющих на цель, являются неполными, а значения факторов — приближенные. В соответствие с последним встаёт вопрос: если реальные значения параметров отличаются от тех, которые заложены в модели, то изменится ли решение, и если да, то на сколько изменится?

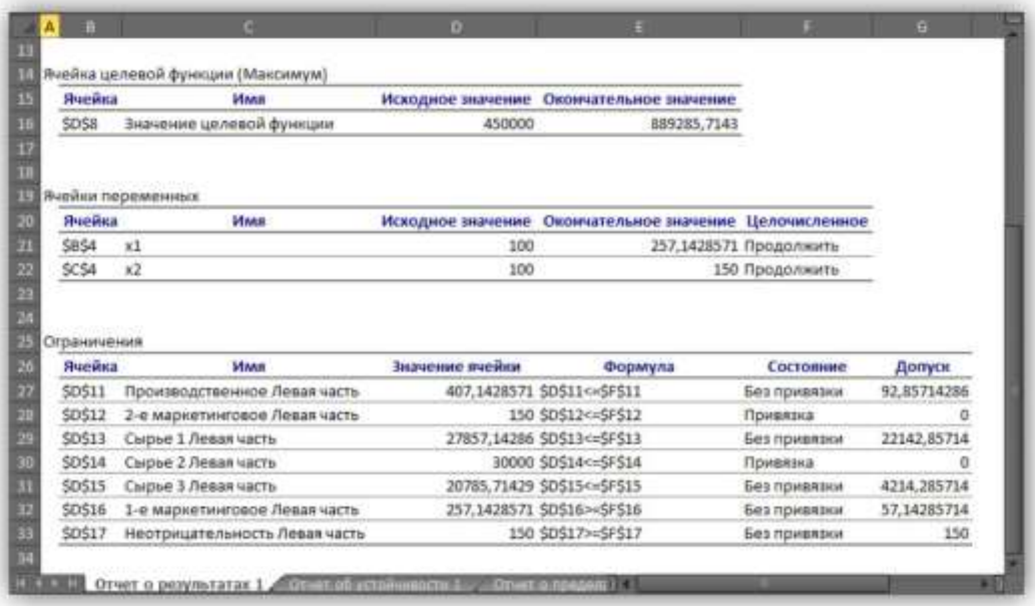
На подобные вопросы призван дать ответ анализ полученного решения, корректно называемый анализом чувствительности решения. Анализ чувствительности проводится после получения оптимального решения математической модели и дает информацию, которую нужно использовать при принятии решения в реальной ситуации.

Анализ чувствительности позволяет ответить на следующие вопросы:

- В каких пределах могут изменяться параметры модели так, чтобы сохранилось полученное решение?
- Какие ограничения связанные (т.е. влияют на целевую функцию), а какие ограничения не влияют на решение?
- Если изменить значения правых частей связанных ограничений, то насколько может измениться значение целевой функции?
- Если значение какой-то переменной решения равно нулю, то при каких условиях она может принять положительное значение? (Вопрос весьма актуален для моделей производства.)

## Знакомство с отчётами

Средство «Поиск решения» может генерировать три вида отчетов: «Результаты» (см. Рисунок 11), «Устойчивость» (см. Рисунок 12) и «Пределы» (см. Рисунок 13). Перечисленные виды отчётов по своей форме специфичны, «Поиск решения» создает их только для линейных моделей. Для прочих методов решения задач состав отчётов может быть иным или отчёты могут иметь другой вид. Рассмотрим применение отчетов для выполнения анализа чувствительности линейных моделей.



Ячейка целевой функции (Максимум)

| Ячейка | Имя | Исходное значение | Окончательное значение |
|---|---|---|---|
| $D$8 | Значение целевой функции | 450000 | 889285,7143 |

Ячейки переменных

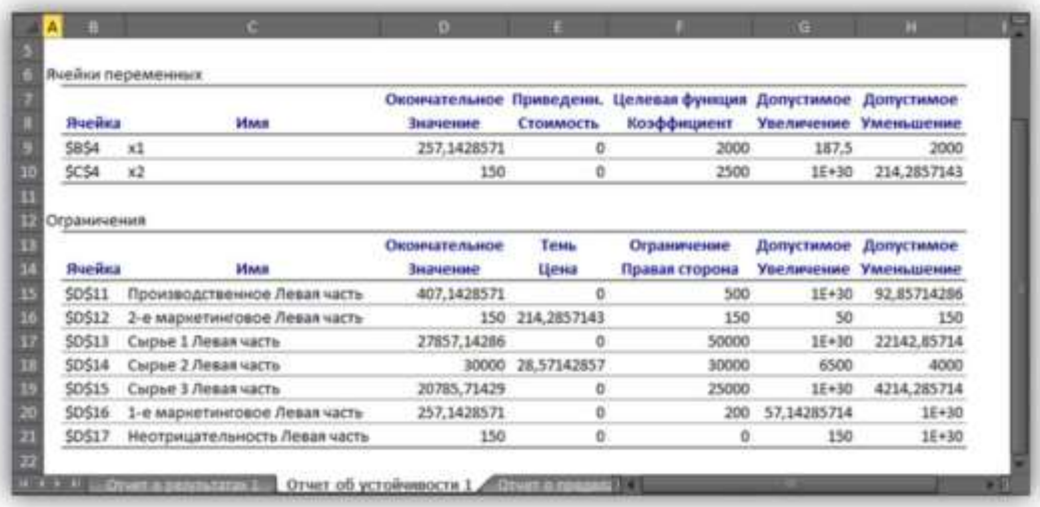
| Ячейка | Имя | Исходное значение | Окончательное значение | Целочисленное |
|---|---|---|---|---|
| $B$4 | x1 | 100 | 257,1428571 | Продолжить |
| $C$4 | x2 | 100 | 150 | Продолжить |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Значение ячейки | Формула | Состояние | Допуск |
|---|---|---|---|---|---|
| $D$11 | Производственное Левая часть | 407,1428571 | $D$11<=$F$11 | Без привязки | 92,85714286 |
| $D$12 | 2-е маркетинговое Левая часть | 150 | $D$12<=$F$12 | Привязка | 0 |
| $D$13 | Сырье 1 Левая часть | 27857,14286 | $D$13<=$F$13 | Без привязки | 22142,85714 |
| $D$14 | Сырье 2 Левая часть | 30000 | $D$14<=$F$14 | Привязка | 0 |
| $D$15 | Сырье 3 Левая часть | 20785,71429 | $D$15<=$F$15 | Без привязки | 4214,285714 |
| $D$16 | 1-е маркетинговое Левая часть | 257,1428571 | $D$16>=$F$16 | Без привязки | 57,14285714 |
| $D$17 | Неотрицательность Левая часть | 150 | $D$17>=$F$17 | Без привязки | 150 |



**Рисунок 11. Отчет о результатах**



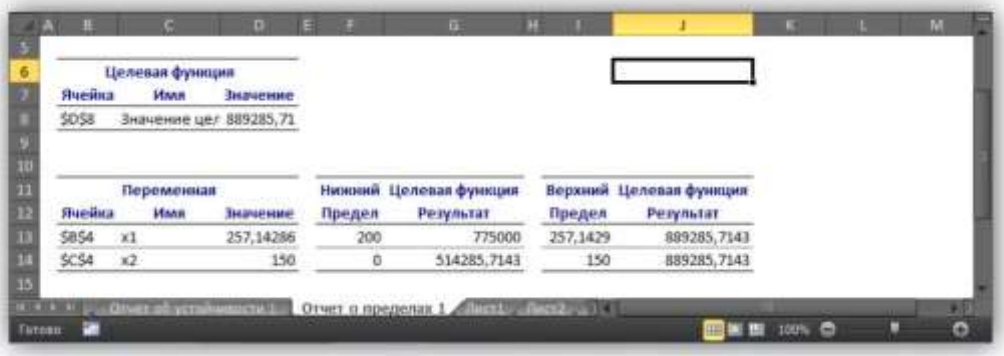
Ячейки переменных

| Ячейка | Имя | Окончательное Значение | Приведенн. Стоимость | Целевая функция Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$4 | x1 | 257,1428571 | 0 | 2000 | 187,5 | 2000 |
| $C$4 | x2 | 150 | 0 | 2500 | 1E+30 | 214,2857143 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Окончательное Значение | Тень Цена | Ограничение Правая сторона | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$11 | Производственное Левая часть | 407,1428571 | 0 | 500 | 1E+30 | 92,85714286 |
| $D$12 | 2-е маркетинговое Левая часть | 150 | 214,2857143 | 150 | 50 | 150 |
| $D$13 | Сырье 1 Левая часть | 27857,14286 | 0 | 50000 | 1E+30 | 22142,85714 |
| $D$14 | Сырье 2 Левая часть | 30000 | 28,57142857 | 30000 | 6500 | 4000 |
| $D$15 | Сырье 3 Левая часть | 20785,71429 | 0 | 25000 | 1E+30 | 4214,285714 |
| $D$16 | 1-е маркетинговое Левая часть | 257,1428571 | 0 | 200 | 57,14285714 | 1E+30 |
| $D$17 | Неотрицательность Левая часть | 150 | 0 | 0 | 150 | 1E+30 |

**Рисунок 12. Отчёт об устойчивости**



| Целевая функция | | |
|---|---|---|
| Ячейка | Имя | Значение |
| $D$8 | Значение цег | 889285,71 |

| Переменная | | | Нижний | Целевая функция | Верхний | Целевая функция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ячейка | Имя | Значение | Предел | Результат | Предел | Результат |
| $B$4 | x1 | 257,14286 | 200 | 775000 | 257,1429 | 889285,7143 |
| $C$4 | x2 | 150 | 0 | 514285,7143 | 150 | 889285,7143 |

**Рисунок 13. Отчёт о пределах**

Отчет по результатам полезен для анализа чувствительности тем, что там явно указано, какие ограничения связанные и какие несвязанные. Эти данные приведены в отчете в таблице «Ограничения» в столбце «Состояние». В столбце «Допуск» той же таблицы показаны значения разностей между левыми и правыми частями ограничений.

Отчет об устойчивости в целях анализа чувствительности представляет большую пользу. В таблице «Ячейки переменных» этого отчета приведена информация о значениях изменяемых ячеек:

— **Ячейка** – адрес ячейки переменной;
— **Имя**. Создаётся заранее или составляется из заголовков строк и столбцов, на пересечении которых находятся изменяемые ячейки. Если имен нет, то это поле остается пустым;
— **Окончательное значение** – значение переменной, найденное средством «Поиск решения»;
— **Приведённая стоимость** – показывает, как изменится оптимальное значение целевой функции при выпуске продукции, которой нет в оптимальном плане. В рассматриваемом примере оптимальный план предполагает выпуск обоих типов дисплеев,

поэтому их приведённая стоимость равна нулю. Если бы оптимальное значение какой-либо из неизвестных было равно нулю (xi = 0), а приведённая стоимость равнялась бы, например, –3, то принудительный выпуск 2-х единиц этой переменной xi (т. е. добавление нового ограничения xi ≥ 2) привел бы к изменению (уменьшению) целевой функции на 2*(–3) = –6 единиц. Необходимо отметить, что из равенства нулю оптимального значения неизвестной не следует априорно, что ее приведённая стоимость будет отлична от нуля;

— **Целевая функция Коэффициент** – коэффициент, стоящий при данной изменяемой переменной в формуле целевой функции;
— **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** – показывают, в каких пределах может изменяться целевой коэффициент при условии, что найденные значения переменных останутся неизменными.

В таблице «Ограничения» соответственно названию приведена информация об ограничениях:

— **Ячейка** – адрес ячейки, на значение которой наложено ограничение;
— **Имя**. Создаётся заранее или составляется из заголовков строк и столбцов, на пересечении которых находятся изменяемые ячейки. Если имен нет, то это поле остается пустым;
— **Окончательное значение** – значение в ячейке, найденное средством «Поиск решения»;
— **Тень Цена** – показывает, насколько изменится значение целевой функции, если на единицу изменится значение правой части данного ограничения; теневая цена отлична от нуля только тогда, когда данное ограничение в оптимальном решении является связанным;
— **Ограничение Правая сторона** – значение правой части ограничения;
— **Допустимое увеличение** и **Допустимое уменьшение** – показывают пределы изменения правой части ограничения, в которых действует приведенное значение теневой цены («Тень Цена») данного ограничения[1].

Наиболее важными данными для анализа чувствительности в этом отчете являются нормированные стоимости и теневые цены, применение которых будет рассмотрено ниже. Важно отметить, что значения теневых цен подсчитаны в предположении, что изменяется значение правой части

[1] — значения 1E+30 в столбце Допустимое увеличение (или Допустимое уменьшение) показывают, что допускается неограниченное возрастание (или убывание) значения соответственно целевого коэффициента или правой части ограничения.

только одного ограничения при условии постоянства всех остальных параметров модели.

В отчете по пределам в столбцах Нижний предел и Верхний предел показано, в каких пределах с учетом всех ограничений могут изменяться переменные и какие при этом значения будет принимать целевая функция (значения в столбцах «Целевая функция Результат»). Стоит отметить, что если на значения переменной не налагаются явные ограничения, задающие ее верхнюю или нижнюю границу, то в столбцах «Верхний предел»/«Нижний предел» и «Целевой результат» для этой переменной будут стоять значения ошибки «#Н/Д».

**Анализ привязки решения к ограничениям**

Приступим к анализу чувствительности в рассматриваемом примере. Во-первых, требуется заметить, что переменные решения нулевые значения не принимают, что облегчает анализ. Рассмотрим ограничения. Первое ограничение, задающее предельный объем производства, связанным не является. Отсюда следует очевидный вывод о том, что такой производственный план задействует не все мощности завода. Это является серьёзным недостатком данного плана.

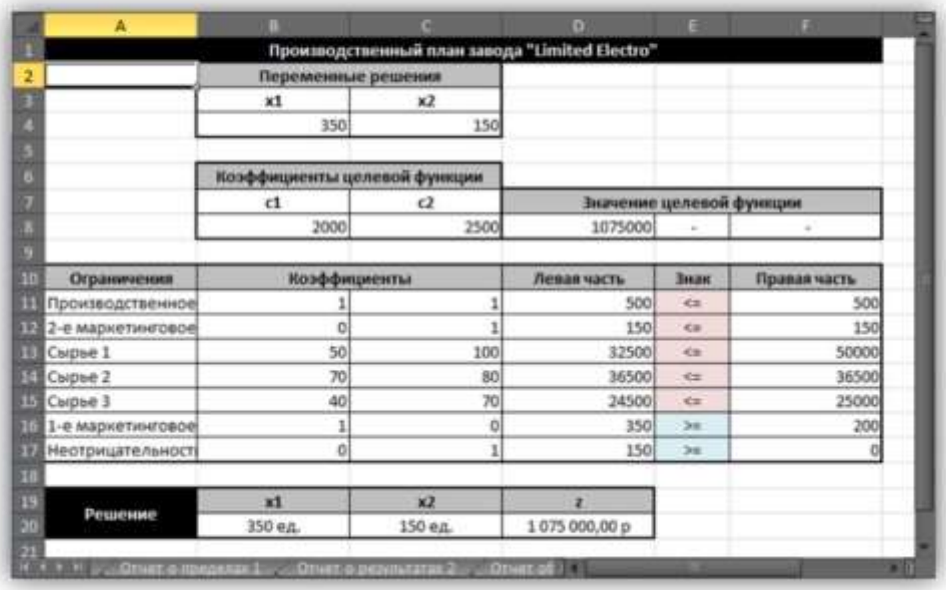
Рассмотрим, что сдерживает объемы производства. Связанными являются второе маркетинговое ограничение и ограничение по сырью 2 (на это указывает отчет о результатах и ненулевые значения теневых цен для этих ограничений в отчете по устойчивости). Влиять на маркетинговое ограничение трудно, поскольку требования отдела маркетинга формируются конъюнктурой рынка, но всё же они могут подвергаться изменению, для чего отдел маркетинга применяет собственные технологии для изменения конъюнктуры рынка, например рекламу и т.п. Однако в рассматриваемом примере особого смысла изменение маркетингового требования не имеет, т.к. чтобы полностью загрузить мощности производства, надо запланировать еще около 93 единиц продукции, а на такое увеличение производства за счёт маркетинга рассчитывать сложно, так как даже объем в 150 единиц трудно продать.

Другое лимитирующее ограничение определяется наличием на складе запаса сырья 2. Взглянем на теневую цену этого ограничения, она равна 28,57. Это означает, что изменение на одну единицу величины правой части данного ограничения (т.е. изменение величины запаса сырья 2 на 1 ед.) приведет к изменению на 28,57 руб. величины прибыли (значения целевой функции). Очевидно, что в данном случае при увеличении значения правой части ограничения значение целевой функции будет возрастать, а при уменьшении — убывать. Насколько же нужно увеличить запас сырья 2, чтобы полностью загрузить все производственные мощности? К сожалению, отчет по устойчивости прямого ответа на этот вопрос не дает.

Посмотрим на число в столбце Допустимое увеличение для этого ограничения. Оно равно 6500. Это значит, что, увеличивая значение правой части ограничения до величины 36500, мы остаемся в рамках прежнего решения — значения переменных и целевой функции, конечно, будут изменяться, но лимитирующими и нелимитирующими останутся прежние ограничения. Если же значение правой части ограничения будет равно или превысит величину 36500, то в качестве лимитирующего (привязка) выступит другое ограничение, которое на данный момент не является лимитирующим.

Чтобы узнать, что получится при изменении правой части пятого ограничения до величины 36500, необходимо опять запускать «Поиск решения». Внесите в ячейку *F14* значение *36500* и выберите опять команду «Поиск решения». В диалоговом окне Поиск решения ничего менять не требуется, поскольку настройки были сохранены при предыдущем запуске. Нажмите на кнопку «Найти решение». После нахождения решения требуется выбрать все отчёты для повторного создания.

Новое решение отображает Рисунок 14. В новом решении $x_1 = 350$, $x_2 = 150$ и $z = 1075000$. Новым лимитирующим ограничением стало первое ограничение, задающее предельный объем производства. Рассматриваемый пример оказался «удачным» для аналитика, т.к. изменение только одного параметра модели (значения правой части ограничения по сырью 2) уже привело к решению (производственному плану), где производственные мощности завода задействованы полностью. В общем случае, если действительно есть необходимость задействовать все мощности производства, скорее всего, пришлось бы проверять другие лимитирующие ограничения и пробовать изменять их правые части.



Производственный план завода "Limited Electro"

| Переменные решения | |
|---|---|
| x1 | x2 |
| 350 | 150 |

| Коэффициенты целевой функции | | Значение целевой функции | | |
|---|---|---|---|---|
| c1 | c2 | | | |
| 2000 | 2500 | 1075000 | - | - |

| Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Знак | Правая часть |
|---|---|---|---|---|---|
| Производственное | 1 | 1 | 500 | <= | 500 |
| 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 150 | <= | 150 |
| Сырье 1 | 50 | 100 | 32500 | <= | 50000 |
| Сырье 2 | 70 | 80 | 36500 | <= | 36500 |
| Сырье 3 | 40 | 70 | 24500 | <= | 25000 |
| 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 350 | >= | 200 |
| Неотрицательност | 0 | 1 | 150 | >= | 0 |

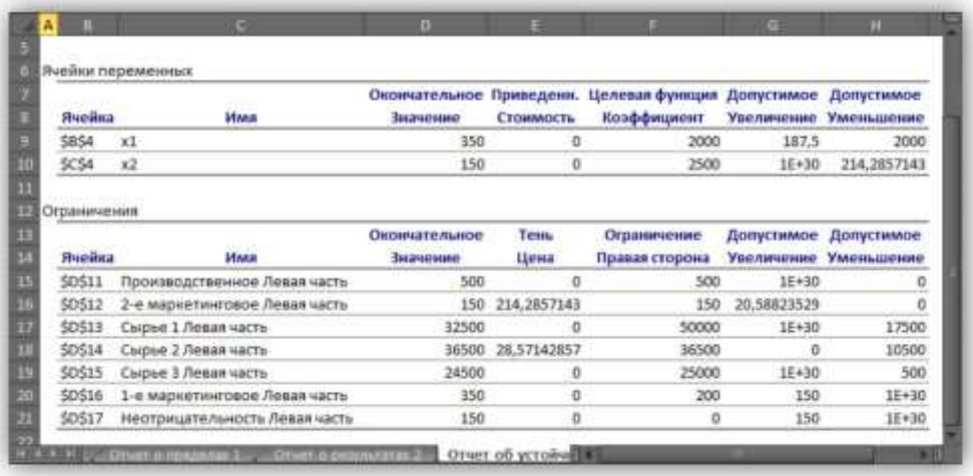
| Решение | x1 | x2 | z |
|---|---|---|---|
| | 350 ед. | 150 ед. | 1 075 000,00 р |

**Рисунок 14. Новое оптимальное решение**

На текущий момент анализа оптимальным производственным планом будет производство 350 ед. дисплеев типа 46” и 150 ед. дисплеев 51”. Однако, чтобы выполнить такой план, необходимо увеличить месячные запасы сырья 2 на 6500 единиц, а месячные запасы сырья 1 и сырья 3 можно уменьшить на 17500 и 500 ед. соответственно. Затем требуется подсчитать, на сколько увеличится (и увеличится ли) себестоимость продукции, если докупить дополнительные объемы сырья 2, так как возрастут расходы по крайней мере на хранение сырья. Это может повлиять на удельную прибыль дисплеев, т. е. могут измениться значения коэффициентов при переменных в формуле целевой функции. Если утверждения о увеличении цены продукции верны, то вычисления снова потребуется повторить. Кроме того, надо вспомнить, что значения этих коэффициентов (цены единицы) известны только приближенно. Поэтому далее следует рассмотреть влияние коэффициентов при переменных в формуле целевой функции.

**Анализ коэффициентов целевой функции**

Напомним, что в отчете по устойчивости коэффициенты целевой функции названы «Целевая функция Коэффициент», далее для краткости этот параметр будет называться просто коэффициент, и, как показывает Рисунок 14, этим коэффициентам с самого начала присвоены имена c1 и c2. В последнем отчете об устойчивости (см. Рисунок 15) в таблице «Ячейки переменных» в столбцах «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение» приведены значения, на которые могут изменяться целевые коэффициенты при условии сохранения решения. Сохранение решения здесь означает сохранение значений переменных решения, но значение целевой функции может изменяться. Однако следует учесть, что эти числа имеют смысл при выполнении дополнительного условия, а именно, что целевые коэффициенты изменяются по одному, а не совместно. Таким образом, на основании данных отчета по устойчивости можно утверждать, что если коэффициент *c1* при переменной *x1* будет изменяться в пределах от 0 до 2500 или коэффициент *c2* при переменной *x2* будет изменяться в пределах от 2000 до бесконечности, то значения этих переменных останутся прежними. На вопрос же каким будет решение, если изменятся оба целевых коэффициента, отчет по устойчивости ответа не дает. Этот ответ требуется получить самостоятельно.



Ячейки переменных

| Ячейка | Имя | Окончательное Значение | Приведенн. Стоимость | Целевая функция Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$4 | x1 | 350 | 0 | 2000 | 187,5 | 2000 |
| $C$4 | x2 | 150 | 0 | 2500 | 1E+30 | 214,2857143 |

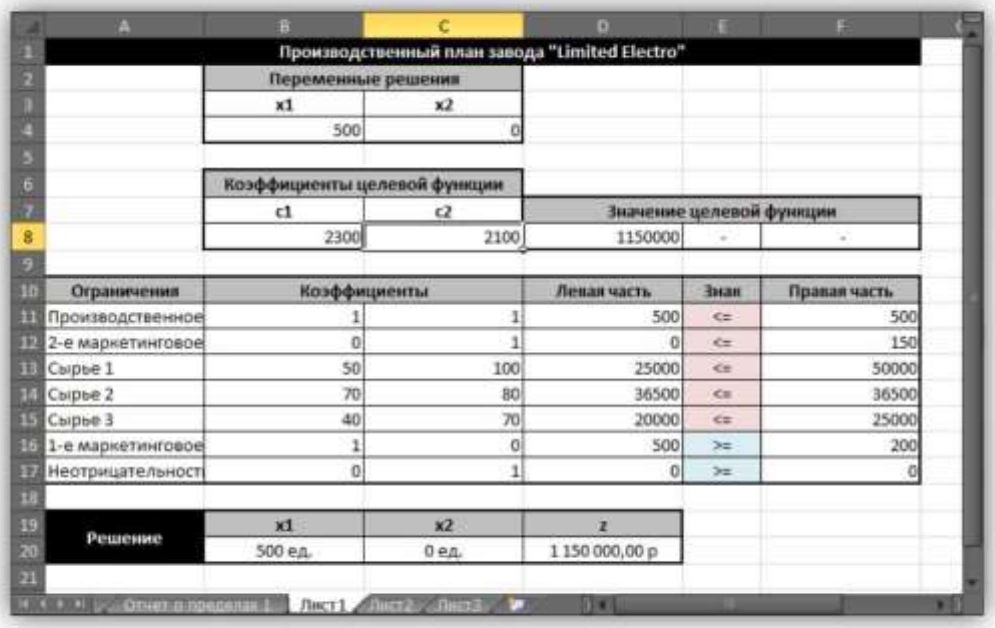
Ограничения

| Ячейка | Имя | Окончательное Значение | Тень Цена | Ограничение Правая сторона | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$11 | Производственное Левая часть | 500 | 0 | 500 | 1E+30 | 0 |
| $D$12 | 2-е маркетинговое Левая часть | 150 | 214,2857143 | 150 | 20,58823529 | 0 |
| $D$13 | Сырье 1 Левая часть | 32500 | 0 | 50000 | 1E+30 | 17500 |
| $D$14 | Сырье 2 Левая часть | 36500 | 28,57142857 | 36500 | 0 | 10500 |
| $D$15 | Сырье 3 Левая часть | 24500 | 0 | 25000 | 1E+30 | 500 |
| $D$16 | 1-е маркетинговое Левая часть | 350 | 0 | 200 | 150 | 1E+30 |
| $D$17 | Неотрицательность Левая часть | 150 | 0 | 0 | 150 | 1E+30 |

**Рисунок 15. Отчет по устойчивости для решения с изменённым ограничением «Сырьё 2»**

В примере целевой коэффициент *c1* при переменной *x1* может изменяться в пределах *1500* до *2300*, а целевой коэффициент *c2* при переменной *x2* — в пределах от *2100* до *3000*. Хотя эти пределы не перекрывают крайние значения, которые показаны в отчете об устойчивости, необходимо проверить решение при совместном изменении значений целевых коэффициентов. Для этого проверим граничные изменения коэффициентов, при этом важно учесть, что полученное решение, как показывает Рисунок 15, остаётся в силе пока целевой коэффициент c1, будет меньше целевого коэффициента c2. Поэтому в первую очередь требуется проверить решение, если коэффициент c1 будет равен 2300, а коэффициент c2 будет равен 2100. Запишите эти числа в ячейки *B8* и *C8* соответственно и запустите «Поиск решения», ничего не меняя в его установках, в результате будет получено новое решение (см. Рисунок 16).

Как можно было предположить, если удельная прибыль 51” дисплеев меньше удельной прибыли 46” дисплеев, то производить 51” дисплеи невыгодно. Отметим, что прибыль при данном решении больше, чем в предыдущем решении (1150000 руб. против 1075000 руб.), а сырья всех видов потребуется меньше, поскольку ни одно ограничение по сырью не является лимитирующим. И все-таки, если для поддержания ассортимента продукции необходимо производить дисплеи 51”, то насколько надо увеличить ее удельную прибыль, чтобы ее производство стало выгодным? Ответ здесь очевиден — надо как минимум сравнять удельные стоимости обоих типов краски. На это указывает число *200* в столбце «Допустимое увеличение» и в строке *x2* таблицы «Ячейки переменных» отчета об устойчивости для данного решения (см. Рисунок 17).



Производственный план завода "Limited Electro"

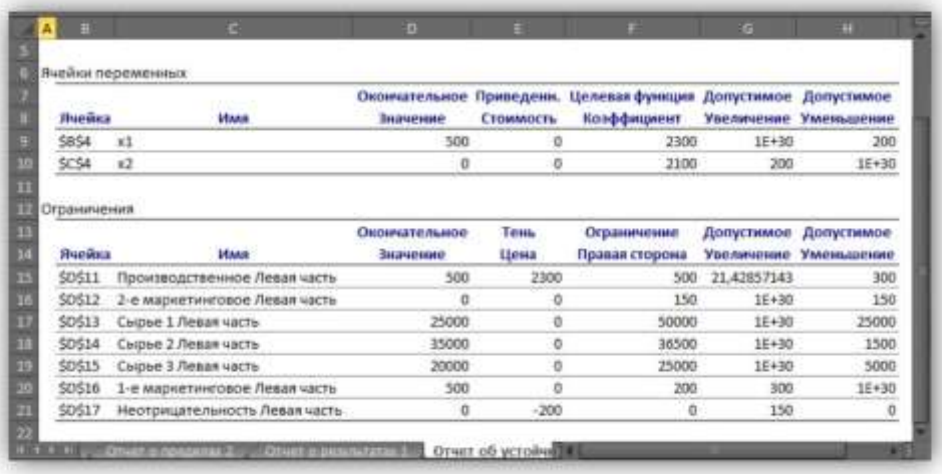
| | | |
|---|---|---|
| Переменные решения | | |
| | x1 | x2 |
| | 500 | 0 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Коэффициенты целевой функции | | Значение целевой функции | | |
| c1 | c2 | | | |
| 2300 | 2100 | 1150000 | - | - |

| Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Знак | Правая часть |
|---|---|---|---|---|---|
| Производственное | 1 | 1 | 500 | <= | 500 |
| 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 0 | <= | 150 |
| Сырье 1 | 50 | 100 | 25000 | <= | 50000 |
| Сырье 2 | 70 | 80 | 36500 | <= | 36500 |
| Сырье 3 | 40 | 70 | 20000 | <= | 25000 |
| 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 500 | >= | 200 |
| Неотрицательност | 0 | 1 | 0 | >= | 0 |

| Решение | x1 | x2 | z |
|---|---|---|---|
| | 500 ед. | 0 ед. | 1 150 000,00 р |

**Рисунок 16. Решение при крайних значениях целевых коэффициентов**



Ячейки переменных

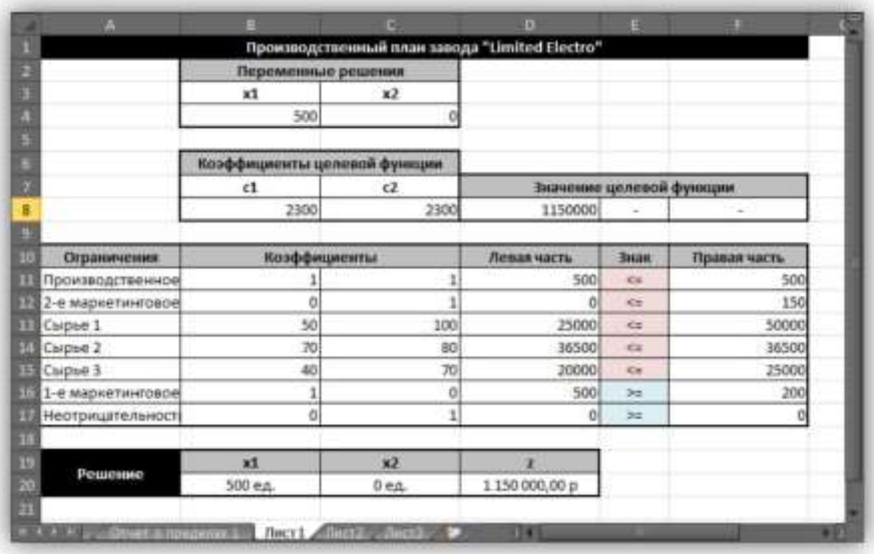
| Ячейка | Имя | Окончательное Значение | Приведенн. Стоимость | Целевая функция Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$4 | x1 | 500 | 0 | 2300 | 1E+30 | 200 |
| $C$4 | x2 | 0 | 0 | 2100 | 200 | 1E+30 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Окончательное Значение | Тень Цена | Ограничение Правая сторона | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$11 | Производственное Левая часть | 500 | 2300 | 500 | 21,42857143 | 300 |
| $D$12 | 2-е маркетинговое Левая часть | 0 | 0 | 150 | 1E+30 | 150 |
| $D$13 | Сырье 1 Левая часть | 25000 | 0 | 50000 | 1E+30 | 25000 |
| $D$14 | Сырье 2 Левая часть | 35000 | 0 | 36500 | 1E+30 | 1500 |
| $D$15 | Сырье 3 Левая часть | 20000 | 0 | 25000 | 1E+30 | 5000 |
| $D$16 | 1-е маркетинговое Левая часть | 500 | 0 | 200 | 300 | 1E+30 |
| $D$17 | Неотрицательность Левая часть | 0 | -200 | 0 | 150 | 0 |

**Рисунок 17. Отчет по устойчивости для решения при крайних значениях целевых коэффициентов**

Если значения удельных прибылей сделать равными, то будет получен случай множественных альтернативных оптимальных решений задачи линейной оптимизации: любая пара неотрицательных чисел *x1* и *x2* таких, что x1 + x2 = 500 и x2 ≤ 150, будет решением данной задачи, при этом значения целевой функции для любых таких решений будут одинаковыми. Чтобы убедиться в этом, введите в ячейки *B8* и *C8* одинаковые значения, например 2300. Запустите «Поиск решения». Будет получено новое решение x1 = 500 и x2 = 0 (см. Рисунок 18), поскольку это граничное решение, которое кроме прочего оптимизированно по ограничениям, т.е. в отчёте о результатах имеет наиболее оптимальные абсолютные значения допусков в таблице «Ограничения». Других решений в рассматриваемом примере, хотя их существует много, с использованием «Поиска решений» получено быть не может.



Производственный план завода "Limited Electro"

| Переменные решения | |
|---|---|
| x1 | x2 |
| 500 | 0 |

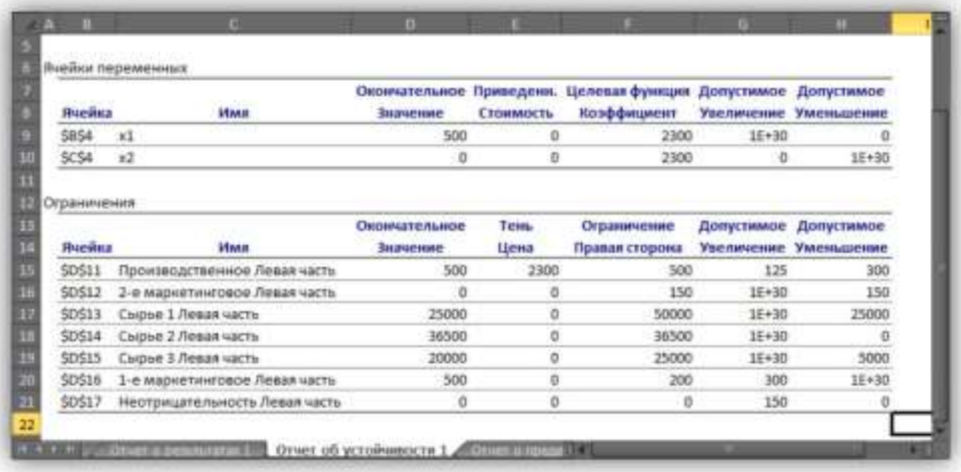
| Коэффициенты целевой функции | | Значение целевой функции | | |
|---|---|---|---|---|
| c1 | c2 | | | |
| 2300 | 2300 | 1150000 | - | - |

| Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Знак | Правая часть |
|---|---|---|---|---|---|
| Производственное | 1 | 1 | 500 | <= | 500 |
| 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 0 | <= | 150 |
| Сырье 1 | 50 | 100 | 25000 | <= | 50000 |
| Сырье 2 | 70 | 80 | 36500 | <= | 36500 |
| Сырье 3 | 40 | 70 | 20000 | <= | 25000 |
| 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 500 | >= | 200 |
| Неотрицательност | 0 | 1 | 0 | >= | 0 |

| Решение | x1 | x2 | z |
|---|---|---|---|
| | 500 ед. | 0 ед. | 1 150 000,00 р |

**Рисунок 18. Решение предполагающее отказ от дисплеев 51”**

В реальных задачах линейной оптимизации множественные оптимальные решения встречаются относительно редко. Более вероятно, эта ситуация может проявиться при проведении анализа чувствительности, как в последнем примере. Признак того, что при данном решении существуют другие альтернативные решения, дает отчет об устойчивости. Если в таблице «Ячейки переменных» в столбцах «Допустимое увеличение» и «Допустимое уменьшение» для некоторых переменных присутствуют нули, то это и является признаком того, что существуют альтернативные решения. Например, Рисунок 19 показывает отчет по устойчивости для рассматриваемой задачи, когда c1 = 2300 и c2 = 2300, а x1 = 500 и x2 = 0.



Ячейки переменных

| Ячейка | Имя | Окончательное Значение | Приведенн. Стоимость | Целевая функция Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$4 | x1 | 500 | 0 | 2300 | 1E+30 | 0 |
| $C$4 | x2 | 0 | 0 | 2300 | 0 | 1E+30 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Окончательное Значение | Тень Цена | Ограничение Правая сторона | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $D$11 | Производственное Левая часть | 500 | 2300 | 500 | 125 | 300 |
| $D$12 | 2-е маркетинговое Левая часть | 0 | 0 | 150 | 1E+30 | 150 |
| $D$13 | Сырье 1 Левая часть | 25000 | 0 | 50000 | 1E+30 | 25000 |
| $D$14 | Сырье 2 Левая часть | 36500 | 0 | 36500 | 1E+30 | 0 |
| $D$15 | Сырье 3 Левая часть | 20000 | 0 | 25000 | 1E+30 | 5000 |
| $D$16 | 1-е маркетинговое Левая часть | 500 | 0 | 200 | 300 | 1E+30 |
| $D$17 | Неотрицательность Левая часть | 0 | 0 | 0 | 150 | 0 |

**Рисунок 19. Отчет по устойчивости в случае множественных решений**

Если некоторые переменные принимают нулевые значения, то еще одним признаком присутствия альтернативных решений будут нулевые значения нормированных стоимостей для этих переменных.

Наличие альтернативных решений делает необходимым выбор из множества решений. Кроме того, поскольку с «точки зрения» целевой функции все альтернативные решения равнозначны, можно привлечь дополнительный критерий отбора решений, который изначально не учитывался в модели. Тем самым можно улучшить решение, сделать его более оптимальным, но в соответствии с новым дополнительным критерием. Например, в рассматриваемом случае с заводом «Limited Electro» среди альтернативных решений можно найти такое решение, которое обеспечивает минимальные суммарные запасы сырья при той же величине прибыли. Легко убедиться, что при решении x1 = 500 и x2 = 0 потребуется *80000* единиц всех видов сырья, а при решении x1 = 350 и x2 = 150 — *93500*. Именно по этому дополнительному критерию «Поиск решения» выделил решение x1 = 500 и x2 = 0 (см. Рисунок 18).

**Создание итогового отчёта**

Для подведения итогов анализа чувствительности требуется записать и структурировать информацию, которая была получена в результате этого анализа. Одним из вариантов такой формализации результатов является составление таблицы, где для тех значений параметров модели, которые изменялись при проведении анализа чувствительности, были бы приведены значения переменных решения и соответствующие значения целевой функции. В Excel построение такой таблицы может быть выполнено при помощи средства сценарии.

Сценарий — это сохраненное множество значений ячеек рабочего листа, т.е. своего рода снимок состояния. Excel имеет возможность быстрого переключения между различными сценариями. Поэтому, если сохранить в качестве сценария значения параметров модели и значения переменных решения, можно быстро восстановить табличную модель и ее решение при различных наборах параметров. Кроме того, на основе сохраненных сценариев Excel может создать отчет. Сценарии являются полезными при проведении анализа чувствительности (для сравнения различных решений) и для документирования результатов анализа.

Рассмотрим на примере, как создавать и сохранять сценарии и как на их основе затем построить отчет. Для оптимизации работы аналитика, сценарии желательно сохранять по мере их формирования, т. е. после каждого изменения, внесенного в табличную модель, а в текущей лабораторной работе, для формирования сценариев потребуется повторить несколько расчётов.

Перед началом создания сценариев требуется сделать замечание о том, что следует сохранять в сценариях. В сценариях сохраняются константы, т. е. такие значения, которые в ячейки рабочего листа введены напрямую, а не вычислены по формулам. Значения переменных решения, хотя они вычисляются с помощью средства «Поиск решения», также считаются константами, поскольку для их определения не используются формулы рабочего листа. Т.о. результаты вычислений не сохраняются, а вычисляются заново при восстановлении на рабочем листе ранее сохраненных констант сценария или при создании отчета по сценариям. В сценариях примера будем сохранять значения переменных решения, значения целевых коэффициентов и значения правых частей ограничений.

Восстановим по очереди модели. Первая модель имела целевые коэффициенты *c1* и *c2* соответственно *2000* и *2500*, а правая часть пятого ограничения равнялась *30000*. Восстановите на рабочем листе эти значения и запустите средство «Поиск решения» для получения решения. Должно получиться прежнее решение: x1 = 257, x2 = 150 и z = 889285,71 (см. Рисунок 10).

Чтобы создать новый сценарий для текущего рабочего листа, выполните следующие действия:

1. Выберите команду Сервис->Сценарии (в MS Office 2007 и выше — Данные->Работа с данными->Анализ «что если»).
2. Открывшееся диалоговое окно «Диспетчер сценариев» — основное средство работы со сценариями. В этом окне нажмите кнопку «Добавить» (см. Рисунок 20).
3. В диалоговом окне «Добавление сценария» введите название сценария в поле ввода «Название сценария» (см. Рисунок 21). Желательно давать содержательные названия, показывающие отличия данного сценария от других. В рассматриваемом примере первый сценарий назовите «Исходный».
4.

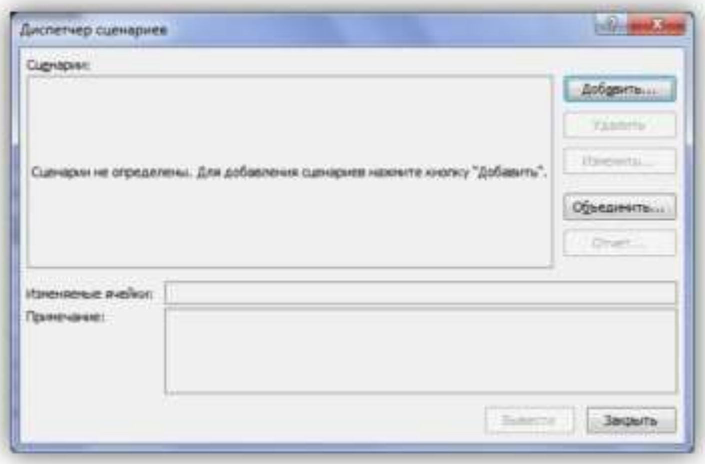



**Рисунок 20. Диалоговое окно «Диспетчер сценариев»**

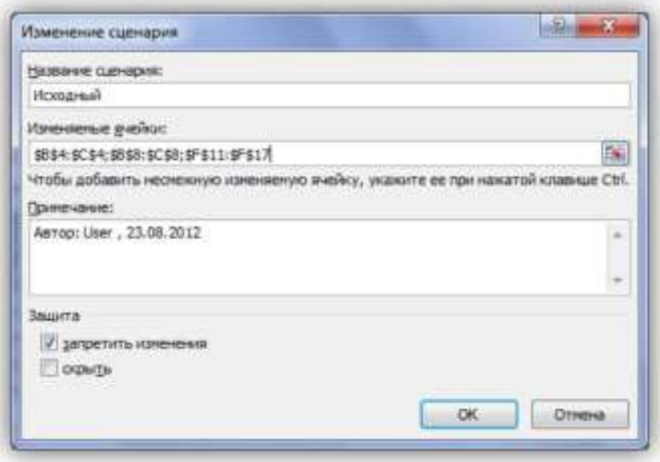



**Рисунок 21. Диалоговое окно «Добавление сценария»**

4. В поле ввода «Изменяемые ячейки» введите адреса ячеек, содержащих константы, задающие параметры модели. Эти ячейки в сценариях называются ячейки переменных. В рассматриваемом примере надо ввести *B4:C4;B8:C8;F11:F17*. Проще всего вводить адреса ячеек путем выделения ячеек непосредственно на рабочем листе.
5. В поле ввода «Примечание» желательно вводить комментарии к создаваемому сценарию. Excel автоматически создаст примечание, содержащее имя создателя сценария (по зарегистрированному имени пользователя) и дату его создания.
6. Нажмите в диалоговом окне «Добавление сценария» кнопку «ОК».
7. В открывшемся диалоговом окне Значения ячеек сценария проверьте и при необходимости измените значения для изменяемых ячеек (см. Рисунок 22).

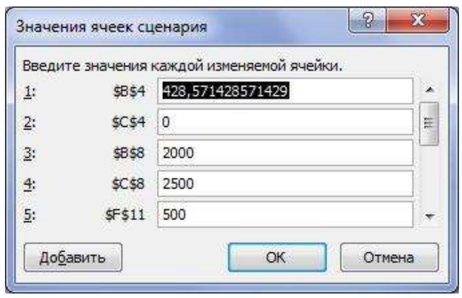


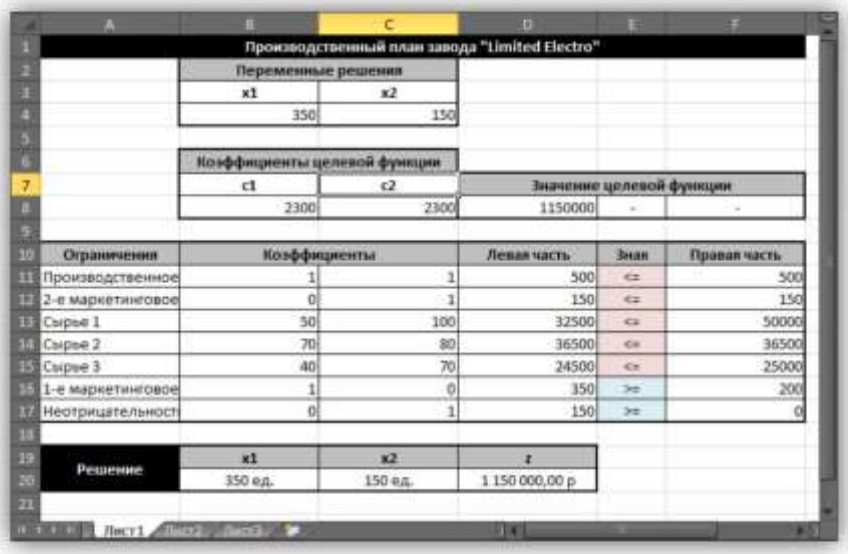

**Рисунок 22. Задание значений для нового сценария**

8. Нажмите кнопку «ОК» в диалоговом окне «Значения ячеек сценария», что создает сценарий и возвращает в диалоговое окно «Диспетчер сценариев».

Сценарий создан. Чтобы посмотреть, как сценарий вычисляет результаты (и для проверки сохраненных в сценарии значений), измените какие-либо значения на рабочем листе (например, измените значения переменных решения) и затем выполните следующие действия. Выберите команду Сервис->Сценарии (в MS Office 2007 и выше — Данные->Работа с данными->Анализ «что если»), в открывшемся диалоговом окне «Диспетчер сценариев» в списке «Сценарии» выберите сценарий, который надо отобразить, и нажмите кнопку «Вывести». Excel должен воспроизвести на рабочем листе решение первой задачи, которое отображает Рисунок 22. Если есть числовые расхождения между рисунком и воспроизведённым сценарием, то проверьте в сценарии значения изменяемых ячеек.

Далее создайте сценарий для решения, где правая часть пятого ограничения заменена значением *36500*. Для этого введите в ячейку *F14* данное значение и найдите решение с помощью средства «Поиск решения» (см. Рисунок 14). Затем повторите описанные выше действия по созданию сценария. Новый сценарий назовите, например, «Полная загрузка».

Подобным образом создайте сценарий, где удельные прибыли дисплеев обоих типов равны, и поэтому Excel предлагает отказаться от производства дисплеев 51” (см. Рисунок 18). Этот сценарий назовите «Без дисплеев 51”». Также создайте еще один сценарий, где удельные прибыли дисплеев разных типов также равны, но требуется произвести 150 ед. дисплеев 51” (см. Рисунок 23). Этому сценарию дайте название «С дисплеями 51”».



| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Производственный план завода "Limited Electro" | | | | | |
| 2 | | Переменные решения | | | | |
| 3 | | x1 | x2 | | | |
| 4 | | 350 | 150 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | Коэффициенты целевой функции | | | | |
| 7 | | c1 | c2 | Значение целевой функции | | |
| 8 | | 2300 | 2300 | 1150000 | - | - |
| 9 | | | | | | |
| 10 | Ограничения | Коэффициенты | | Левая часть | Знак | Правая часть |
| 11 | Производственное | 1 | 1 | 500 | <= | 500 |
| 12 | 2-е маркетинговое | 0 | 1 | 150 | <= | 150 |
| 13 | Сырье 1 | 50 | 100 | 32500 | <= | 50000 |
| 14 | Сырье 2 | 70 | 80 | 36500 | <= | 36500 |
| 15 | Сырье 3 | 40 | 70 | 24500 | <= | 25000 |
| 16 | 1-е маркетинговое | 1 | 0 | 350 | >= | 200 |
| 17 | Неотрицательност | 0 | 1 | 150 | >= | 0 |
| 18 | | | | | | |
| 19 | Решение | x1 | x2 | z | | |
| 20 | | 350 ед. | 150 ед. | 1 150 000,00 р | | |
| 21 | | | | | | |

**Рисунок 23. Решение с равной ценой дисплеев и полной загрузкой дисплеев 51"**

Далее создайте отчет по имеющимся сценариям можно следующим образом:

1. Выберите команду Сервис->Сценарии (в MS Office 2007 и выше — Данные->Работа с данными->Анализ «что если»).
2. В открывшемся диалоговом окне «Диспетчер сценариев» нажмите кнопку «Отчет».
3. В диалоговом окне «Отчет» по сценарию укажите, какой тип отчета вы хотите создать: выберите переключатель «структура» для создания итогового отчета в виде структурированного рабочего листа, либо

переключатель «сводная таблица» — для создания итогового отчета в виде сводной таблицы (см. Рисунок 24). Для сценариев решения задач линейной оптимизации наиболее подходит отчет в виде структурированного рабочего листа.

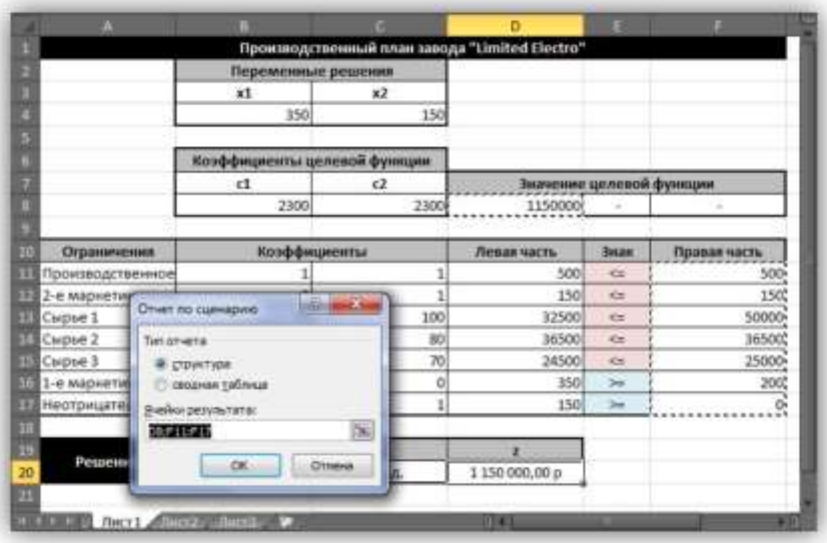


**Рисунок 24. Диалоговое окно Отчет по сценарию**

4. В поле ввода «Ячейки результата» введите адреса ячеек (с клавиатуры или путем выделения их непосредственно на рабочем листе), содержащих итоговые результаты. Для задач оптимизации обязательно надо указать ячейку с целевой функцией, а также, поскольку в сценариях сохраняются значения правых частей ограничений, ячейки с формулами, вычисляющими значения левых частей ограничений.
5. Нажмите кнопку «ОК».

Отчет по сценариям легко читается и понятен с первого взгляда, если изменяемым ячейкам сценариев и ячейкам результатов (задаваемых при создании отчета) присвоить уникальные имена, соответствующие их смыслу. Присвоить имена ячейкам можно нажав на них правой кнопкой мыши -> «Присвоить имя…». В противном случае остаются пустыми ячейки отчета в столбце B, и их возможно заполнить вручную.

Рисунок 25 отображает готовый отчет по созданным сценариям. Этот отчет в достаточной степени подходит для документирования и обоснования принятия решения. Он послужит основой для заключительных выводов выполненного анализа чувствительности.

## Вывод

Подведем итог выполнения работы по поиску решения и анализу чувствительности найденного решения для рассматриваемого примера:

1. Первоначальное решение (сценарий «Исходный») — производить *257 ед.* дисплеев 46” и *150 ед.* дисплеев 51”, при этом будет получена

прибыль в размере *889285,17 руб.* — не загружает полностью производственные мощности.

2. Чтобы полностью загрузить производственные мощности, надо увеличить месячный запас сырья 2 с *30000* до *36500 ед.* (сценарий «Полная загрузка»), при этом следует производить *350 ед.* дисплеев 46” и *150 ед.* дисплеев 51”, тогда будет получена прибыль в размере *1075000 руб.*
3. Первые два решения имеют силу, если удельная прибыль дисплеев 51” превышает удельную прибыль дисплеев 46”. Если удельная прибыль дисплеев 51” меньше удельной прибыли дисплеев 46”, то производить дисплеи 51” нерентабельно.
4. Если удельная прибыль дисплеев 51” примерно равна удельной прибыли дисплеев 46”, то прибыль (целевая функция) не зависит от количества произведенных дисплеев 51” (сценарии «Без дисплеев 15”» и «С дисплеями 51"»). При этом в условиях поставленных ограничений рационально отказаться от производства дисплеев 51” или уменьшить их производство до минимума, поскольку это сокращает необходимый для производства суммарный запас всех видов сырья (сценарий «Без дисплеев 15”»).

| Структура сценария | | Текущие значения: | Исходный | Полная загрузка | Без дисплеев 15" | С дисплеями 51" |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Изменяемые:** | | | | | | |
| Количество 46", ед. | $B$4 | 350 | 428,5714286 | 350 | 500 | 350 |
| Количество 51", ед. | $C$4 | 150 | 0 | 150 | 0 | 150 |
| Стоимость 46", руб./ед. | $B$8 | 2300 | 2000 | 2000 | 2300 | 2300 |
| Стоимость 51", руб./ед. | $C$8 | 2300 | 2500 | 2500 | 2300 | 2300 |
| Огр. прав. производственное | $F$11 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 |
| Огр. прав. 2-е маркетинговое | $F$12 | 150 | 150 | 150 | 150 | 150 |
| Огр. прав. сырье 1 | $F$13 | 50000 | 50000 | 50000 | 50000 | 50000 |
| Огр. прав. сырье 2 | $F$14 | 36500 | 30000 | 36500 | 36500 | 36500 |
| Огр. прав. сырье 3 | $F$15 | 25000 | 25000 | 25000 | 25000 | 25000 |
| Огр. прав. 1-е маркетинговое | $F$16 | 200 | 200 | 200 | 200 | 200 |
| Огр. прав. неотрицательность | $F$17 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Результат:** | | | | | | |
| Прибыль, итого | $D$8 | 1150000 | 857142,8571 | 1075000 | 1150000 | 1150000 |
| Огр. лев. производственное | $D$11 | 500 | 428,5714286 | 500 | 500 | 500 |
| Огр. лев. 2-е маркетинговое | $D$12 | 150 | 0 | 150 | 0 | 150 |
| Огр. лев. сырье 1 | $D$13 | 32500 | 21428,57143 | 32500 | 25000 | 32500 |
| Огр. лев. сырье 2 | $D$14 | 36500 | 30000 | 36500 | 35000 | 36500 |
| Огр. лев. сырье 3 | $D$15 | 24500 | 17142,85714 | 24500 | 20000 | 24500 |
| Огр. лев. 1-е маркетинговое | $D$16 | 350 | 428,5714286 | 350 | 500 | 350 |
| Огр. лев. неотрицательность | $D$17 | 150 | 0 | 150 | 0 | 150 |

Примечания: столбец "Текущие значения" представляет значения изменяемых ячеек в момент создания Итогового отчета по Сценарию. Изменяемые ячейки для каждого сценария выделены серым цветом.

**Рисунок 25. Итоговый отчёт**

Так можно кратко подвести итоги анализа математической модели реальной ситуации. Подобного итогового результата достаточно при решении задач линейной оптимизации в реальном производственном процессе и в задачах научных исследований.

## *Литература*

1. Петровский А. Б. Теория принятия решений — М.: Издательский центр «Академия», 2009 .— 398, [1] с.: ил.
2. Грешилов А. А. Математические методы принятия решений — М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006 .— 583, [1] с.: ил.
3. Минько А.А. Принятие решений с помощью Excel. — М.: Эксмо, 2007. — 240 с. , [1] с.: ил.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Принятие многокритериальных решений методом анализа иерархий

## *Общие сведения*

### Цель работы

- Научиться решать задачи принятия многокритериальных решений методом анализа иерархий;
- Научиться решать задачи принятия многокритериальных решений с использованием пакета MS Excel.

### План выполнения

1. Изучить теоретическую часть;
2. Получить задание у преподавателя;
3. Выполнить задание 1:
   3.1. Построить иерархию «цели—критерии—альтернативы»; 3.2. Попарно сравнить критерии и оценки альтернатив и перевести результаты сравнений в численную форму. Нормализовать и проверить согласованность суждений с помощью пакета MS Excel;
   3.3. Вычислить векторы приоритетов по каждому из критериев; 3.4. Определить наилучшую альтернативу;
4. Выполнить задание 2:
   4.1. Осуществить выбор альтернативы при помощи рейтинга приоритетов;
   4.2. Осуществить выбор альтернативы при помощи МАИ;
5. Составить отчёт по лабораторной работе. Отчёт должен иметь следующую структуру:
   5.1. Титульный лист, который должен содержать следующую информацию:
      5.1.1. Название университета и кафедры, ответственной за дисциплину;
      5.1.2. Заголовок — номер и название лабораторной работы;
      5.1.3. Подзаголовок — номер варианта и номера задач;
      5.1.4. ФИО и должности студента и преподавателя;
      5.1.5. «г. Санкт-Петербург, 2012 год»;
   5.2. Отчёт о решении задания 1, содержащий следующее информационное наполнение:
      5.2.1. Формулировка индивидуального задания;
      5.2.2. Иерархия «цели—критерии—альтернативы»;
      5.2.3. Снимки экрана, содержащие матрицы сравнений критериев и альтернатив, вычисление векторов приоритетов, проверку согласованности и определение наилучшей альтернативы;

5.2.4. Вывод по заданию; 5.3. Отчёт о решении задания 2, содержащий информационное наполнение, аналогичное отчёту о решении задания 1.

## *Описание работы*

Ежедневно человек сталкивается с необходимостью принимать решения в ситуациях, характерных условно небольшим количеством целей и критериев. Перечислим некоторые из них:

- Выбор места работы из нескольких предложенных вакансий или учебного заведения;
- Выбор бытовых товаров, в т.ч. техники и сложных электронных устройств;
- Принятие решения о том, какой новый продукт выпускать первым;
- Выбор места для нового ресторана, отеля, производственного объекта и т. д.;
- Составление рейтинга городов по условиям проживания;
- Выбор нового пакета прикладных программ от конкурирующих производителей.

При покупке автомобиля, например, необходимо учитывать такие факторы как: безопасность, объем двигателя, расход топлива, цена и т. д. В каждом из перечисленных выше примеров при принятии сложных решений требуется учитывать множество факторов.

## Использование метода ранжирования по приоритетам

Простейшим способом принятия решений в подобных ситуациях является присвоение критериям, определяющим качество решения, весовых коэффициентов и вычисление для альтернативных решений оценок по числовой шкале, например от 1 (наихудшее) до 10 (наилучшее), путем суммирования произведений значений каждого критерия на его весовой коэффициент. Решение с наивысшей суммой в этом случае является наиболее предпочтительным. Такой метод выбора решения назовём методом ранжирования по приоритетам.

Рассмотрим пример, в котором необходимо выбрать компьютер для офиса. Выбор осуществляется среди трех моделей:

1. Модель А с процессором AMD Phenom II X4 980 с частотой 3700 МГц;
2. Модель Б с процессором Intel Core i3-2120 с частотой 3300 МГц;
3. Модель В с процессором Intel Core i5-2320 с частотой 3000 МГц;

При выборе будем учитываться следующие критерии:

— Цена;
— Эффективность (предположим, что частота процессора отражает эффективность компьютера);
— Ёмкость жесткого диска;
— Срок гарантийного ремонта.

Далее требуется решить, какие весовые коэффициенты должны принимать разные критерии. Примем следующие веса критериев: цена — 0,40 (50% общего веса); эффективности — 0,25 (15%); ёмкость жесткого диска — 0,20 (20%) и гарантийный срок — 0,15 (15% общего веса). После назначения весов критериев должна быть произведена оценка каждой модели компьютера по всем четырем критериям. Их оценки по шкале от 1 до 10 (как описывалось выше) показаны в табличной модели (см. Рисунок 26, Рисунок 27, «ЛР2.Пример1.xls»)

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Сравнение компьютеров | | | | |
| 2 | | | Ранги альтернатив | | |
| 3 | Веса критериев | | Модель А | Модель Б | Модель В |
| 4 | Цена | 40,0% | 5 | 8 | 8 |
| 5 | Эффективност | 25,0% | 8 | 6 | 6 |
| 6 | Объём ПЗУ | 20,0% | 7 | 6 | 9 |
| 7 | Срок гарантии | 15,0% | 6 | 6 | 8 |
| 8 | | | 6,3 | 6,8 | 7,7 |
| 9 | | | | | |
| 10 | | Цена | Процессор | Объём ПЗУ | Срок гарантии |
| 11 | Модель А | 36 900,30р. | 3700 МГц, x4 | 750 Гб | 3 года |
| 12 | Модель Б | 30 711,00р. | 3300 МГц, x2 | 600 Гб | 3 года |
| 13 | Модель В | 31 138,00р. | 3000 МГц, x4 | 1 Тб | 4 года |

Лист1 Лист2 Лист3

**Рисунок 26. Модель принятия решения при сравнении компьютеров**

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Сравнение компьютеров | | | | |
| 2 | | | Ранги альтернатив | | |
| 3 | Веса критериев | | Модель А | Модель Б | Модель В |
| 4 | Цена | 0,4 | 5 | 8 | 8 |
| 5 | Эффективность | 0,25 | 8 | 6 | 6 |
| 6 | Объём ПЗУ | 0,2 | 7 | 6 | 9 |
| 7 | Срок гарантии | 0,15 | 6 | 6 | 8 |
| 8 | | | =СУММПРОИЗВ(B4:B7;C4:C7) | =СУММПРОИЗВ(B4:B7;D4:D7) | =СУММПРОИЗВ(B4:B7;E4:E7) |
| 9 | | | | | |
| 10 | | Цена | Процессор | Объём ПЗУ | Срок гарантии |
| 11 | Модель А | 36900,3 | 3700 МГц, x4 | 750 Гб | 3 года |
| 12 | Модель Б | 30711 | 3300 МГц, x2 | 600 Гб | 3 года |
| 13 | Модель В | 31138 | 3000 МГц, x4 | 1 Тб | 4 года |

Лист1 Лист2 Лист3

**Рисунок 27. Модель принятия решения при сравнении компьютеров (с формулами)**

Как видно из примера, наибольшую сумму баллов 7,7 набрала модель В, поэтому купить следует именно ее.

Метод рейтинга приоритетов прост в использовании, однако при его применении на практике возникает ряд сложностей (при задании оценочных шкал для разнородных критериев, при выставлении оценок альтернативам), преодолеть которые можно при помощи более совершенного метода, такого как метода анализа иерархий (*англ. Analytic hierarchy process*).

## Использование метода анализа иерархий

Метод анализа иерархий (МАИ) также основан на использовании взвешенных средних, однако в нем применяется более надежный и согласованный метод присвоения оценок и весовых коэффициентов. МАИ основывается на попарном сравнении альтернативных решений по каждому критерию. Затем проводится аналогичный ряд сравнений, чтобы оценить относительную важность каждого критерия и таким образом определить весовые коэффициенты. Основная процедура состоит из следующих этапов:

1. Определяются рейтинги альтернатив по каждому критерию: 1.1. Создаётся матрица попарных сравнений по всем критериям; 1.2. Полученная матрица нормализуется; 1.3. Для получения соответствующих рейтингов усредняются значения в каждой строке; 1.4. Вычисляются и проверяются коэффициенты согласованности;
2. Определяются весовые коэффициенты критериев: 2.1. Создается матрица попарных сравнений по всем критериям;
   2.2. Полученная матрица нормализуется;
   2.3. Для получения весовых коэффициентов усредняются значения в каждой строке;
   2.4. Вычисляются и проверяются коэффициенты согласованности;
3. Вычисляется взвешенный средний рейтинг для каждой альтернативы и выбирается решение, набравшее наибольшее количество баллов.

Продемонстрируем применение данной процедуры на примере. Сети кафе «Петровские кофейни» нужно выбрать наилучший пакет программного обеспечения для приёма заказов из предлагаемых несколькими поставщиками. Эта задача была поручена заведующему отдела обслуживания клиентов Скобину Николаю Петровичу. Он выделил трех поставщиков, предлагаемое программное обеспечение которых сможет удовлетворить основные потребности компании Reservation Technologies (RT), «ИТ-Техностар» (ИТТ) и «Норд-Консалтинг» (НК). Критерии, которые он считает важными в выборе программного обеспечения:

А. Общая стоимость программного пакета; Б. Наличие сервисного обслуживания на протяжении следующего года;

В. Эргономичность графических интерфейсов пользователя; Г. Возможность адаптации системы под бизнес-процесс «Петровских кофеен».

**Определение рейтинга альтернатив по каждому критерию**

Первый шаг процедуры МАИ состоит в попарном сравнении продавцов по каждому критерию. Для этого используем стандартную шкалу сравнения, которую содержит Таблица 2.

**Таблица 2. Шкала сравнения альтернатив по критериям**

| Ранг | Описание |
|---|---|
| 1 | Одинаковое предпочтение |
| 3 | Умеренное предпочтение |
| 5 | Явное предпочтение |
| 7 | Очевидное предпочтение |
| 9 | Абсолютное предпочтение |

Также можно присваивать значения рейтинга 2, 4, 6 и 8, которые определяются как средние от ближайших рейтингов.

Николай Петрович начал с первого критерия (общая стоимость) и внес в лист «Стоимость» рабочей книги «ЛР2.Пример2.xls» данные (см. Рисунок 28, Рисунок 29). Таблицу следует читать таким образом: указанный в строке поставщик сравнивается с поставщиком, указанным в столбце. Если указанный в строке поставщик предпочтительней, то соответствующее число от 1 до 9 записывается в ячейку на пересечении строки и столбца. Если же предпочтительней поставщик, указанный в столбце, то 1 делится на соответствующее число от 1 до 9, и результат записывается в ячейку на пересечении строки и столбца. Очевидно, что поскольку любой поставщик одинаково предпочтителен по сравнению с самим собой, то во все ячейки главной диагонали заносится значение 1. По показателю общей стоимости поставщику RT отдается среднее между умеренным и явным предпочтение в сравнении с поставщиком ИТТ. Поэтому в ячейку второго столбца первой строки заносится число 4 (ячейка С4). Поставщику НК отдается предпочтение от одинакового до умеренного перед поставщиком RT, поэтому в ячейке третьего столбца первой строки записано число 1/2 (ячейка D4). Скобин так запрограммировал свою таблицу, что после ввода элементов справа от диагонали (ячейки C4, D4 и D5) обратные предпочтения вычисляются автоматически. Например, поскольку при сравнении поставщика RT с поставщиком ИТТ было записано 4, то при обратном сравнении поставщика ИТТ с поставщиком RT автоматически получается 1/4 (ячейка B5).

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Использование МАИ. Сравнение альтернатив по стоимости** | | | | | |
| 2 | **Попарное сравнение** | | | | | |
| 3 | | RT | ИТТ | НК | | |
| 4 | RT | 1,000 | 4,000 | 0,500 | | |
| 5 | ИТТ | 0,250 | 1,000 | 0,143 | | |
| 6 | НК | 2,000 | 7,000 | 1,000 | | |
| 7 | **Сумма** | **3,250** | **12,000** | **1,643** | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | **Нормализация** | | | | | |
| 10 | | RT | ИТТ | НК | Среднее | Мера согласованности |
| 11 | RT | 0,308 | 0,333 | 0,304 | 0,315 | 3,002 |
| 12 | ИТТ | 0,077 | 0,083 | 0,087 | 0,082 | 3,000 |
| 13 | НК | 0,615 | 0,583 | 0,609 | 0,602 | 3,004 |
| 14 | | | | | | |
| 15 | **Согласованность** | | | | | |
| 16 | **ИС** | **ИР** | **Коэф. Согласованности** | | | |
| 17 | 0,001 | 0,580 | 0,002 | | | |

Стоимость | Лист2 | Лист3

**Рисунок 28. Попарное сравнение по стоимости**

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | **Использование МАИ. Сравнение альтернатив по стоимости** | | | | | |
| 2 | **Попарное сравнение** | | | | | |
| 3 | | RT | ИТТ | НК | | |
| 4 | RT | 1 | 4 | 0,5 | | |
| 5 | ИТТ | =1/C4 | 1 | =1/7 | | |
| 6 | НК | =1/D4 | =1/D5 | 1 | | |
| 7 | **Сумма** | **=СУММ(B4:B6)** | **=СУММ(C4:C6)** | **=СУММ(D4:D6)** | | |
| 8 | | | | | | |
| 9 | **Нормализация** | | | | | |
| 10 | | RT | ИТТ | НК | Среднее | Мера согласованности |
| 11 | RT | =B4/B$7 | =C4/C$7 | =D4/D$7 | =СУММ(B11:D11)/3 | =МУМНОЖ(B4:D4;E$11:E$13)/E11 |
| 12 | ИТТ | =B5/B$7 | =C5/C$7 | =D5/D$7 | =СУММ(B12:D12)/3 | =МУМНОЖ(B5:D5;E$11:E$13)/E12 |
| 13 | НК | =B6/B$7 | =C6/C$7 | =D6/D$7 | =СУММ(B13:D13)/3 | =МУМНОЖ(B6:D6;E$11:E$13)/E13 |
| 14 | | | | | | |
| 15 | **Согласованность** | | | | | |
| 16 | **ИС** | **ИР** | **Коэф. Согласованности** | | | |
| 17 | =(СРЗНАЧ(F11:F13) - | 0,58 | =A17/B17 | | | |

Стоимость | Лист2 | Лист3

**Рисунок 29. Попарное сравнение по стоимости (с формулами)**

После выполнения всех попарных сравнений матрицу необходимо нормализовать. Это выполняется путем суммирования чисел в каждом столбце и последующего деления каждого элемента столбца на полученную для данного столбца сумму. Результаты данной операции представлены в ячейках B11:D13 (см. Рисунок 28, Рисунок 29).

Следующим шагом требуется вычислить балл для каждого продавца по критерию общей стоимости. Эти значения показаны в столбце E (см. Рисунок 28). Видно, что наивысший средний балл по данному критерию имеет поставщик НК.

Завершив нормализацию матрицы, необходимо вычислить коэффициент согласованности и проверить его значение. Цель этой операции состоит в том, чтобы убедиться в согласованности задания предпочтений в исходной таблице. Например, если по критерию обшей стоимости задана явная предпочтительность поставщика RT перед поставщиком ИТТ и умеренная предпочтительность поставщика ИТТ по сравнению с поставщиком НК, то при сравнении поставщиков RT и НК задание одинаковой предпочтительности приведет к несогласованности, еще большая несогласованность возникнет при указании, что НК предпочтительней RT (см. Рисунок 30).

**RT > ИТТ**
**ИТТ > НК**
**НК > RT (!)**

**Рисунок 30. Случай несогласованной оценки по критерию**

Вычисление коэффициента согласованности состоит из трех этапов.

1. Вычисляется мера согласованности для каждой альтернативы;
2. Определяется индекс согласованности (ИС).
3. Вычисляется коэффициент согласованности, как отношение ИС/ИР, где ИР — индекс рандомизации.

Для вычисления меры согласованности в MS Excel можно воспользоваться функцией умножения матриц МУМНОЖ. Как показывают Рисунок 28 и Рисунок 29, для поставщика RT средний рейтинг каждого поставщика (ячейки E11:E13) умножается на соответствующее количество баллов в первой строке сравнения (ячейки B4:D4), эти произведения суммируются, и сумма делится на средний рейтинг первого поставщика (ячейка E11). Аналогичные вычисления осуществляются для альтернатив ИТТ и НК. В идеальном случае меры согласованности должны быть равны числу возможных альтернатив (в рассматриваемом случае — 3). Для вычисления индекса согласованности определяется средняя мера согласованности всех трех альтернатив, из нее вычитается количество альтернатив $n$ и результат делится на $(n–1)$. Индекс согласованности ИС показывает Рисунок 28 в ячейке A17, его значение равно 0,001. Последний этап определения коэффициента согласованности заключается в делении ИС на индекс рандомизации ИР, значения которого для различных значений *n* вычисляются в методе МАИ специальным образом, как индекс согласованности для кососимметрических матриц. Значения для использования в работе приведены в таблице ниже (см. Таблица 3).

**Таблица 3. Значения индекса рандомизации**

| n | Значение индекса рандомизации |
|---|---|
| 2 | 0,00 |
| 3 | 0,58 |
| 4 | 0,90 |
| 5 | 1,12 |
| 6 | 1,24 |
| 7 | 1,32 |
| 8 | 1,41 |
| 9 | 1,45 |
| 10 | 1,51 |

Коэффициент согласованности сравнения по критерию стоимости записан в ячейке С17 и равен 0,002.

В случае абсолютной согласованности предпочтений мера согласованности будет равна 3, следовательно, ИС будут равны нулю, и коэффициент согласованности также будет равен нулю. Если этот коэффициент слишком велик (больше 0,10 по оценке Саати), значит, менеджер был недостаточно последователен в своих оценках, поэтому следует вернуться назад и пересмотреть результаты попарных сравнений (в большинстве случаев обнаруживается элементарная ошибка, и коэффициент согласованности сигнализирует о ее наличии).

После сравнения по стоимости аналогичные сравнения должны быть произведены по остальным трём критериям. Это можно сделать, трижды скопировав рабочий лист «Стоимость», создав тем самым три новых рабочих листа, а затем надо просто изменить параметры попарных сравнений (см. Рисунок 31, Рисунок 32, Рисунок 33). Во всех случаях значения коэффициента согласованности заключены в пределах от 0 до 0,047, это означает, что Николай Петрович был достаточно последователен в своих оценках. Кроме того, можно заметить, что компания ИТТ оказалась лучшей по критерию обслуживания, RT и ИТТ — лучшие по критерию сложности, а ИТТ — лучшая по критерию адаптируемости.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Использование МАИ. Сравнение альтернатив по обслуживанию** | | | | | |
| **Попарное сравнение** | | | | | |
| | RT | ИТТ | НК | | |
| RT | 1,000 | 0,500 | 6,000 | | |
| ИТТ | 2,000 | 1,000 | 8,000 | | |
| НК | 0,167 | 0,125 | 1,000 | | |
| **Сумма** | **3,167** | **1,625** | **15,000** | | |
| | | | | | |
| **Нормализация** | | | | | |
| | RT | ИТТ | НК | Среднее | Мера согласованности |
| RT | 0,316 | 0,308 | 0,400 | 0,341 | 3,020 |
| ИТТ | 0,632 | 0,615 | 0,533 | 0,593 | 3,032 |
| НК | 0,053 | 0,077 | 0,067 | 0,065 | 3,003 |
| | | | | | |
| **Согласованность** | | | | | |
| **ИС** | **ИР** | **Коэф. Согласованности** | | | |
| 0,009 | 0,580 | 0,016 | | | |

Стоимость | Обслуживание | Эргоном

**Рисунок 31. Попарное сравнение по обслуживанию**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Использование МАИ. Сравнение альтернатив по эргономичности** | | | | | |
| **Попарное сравнение** | | | | | |
| | RT | ИТТ | НК | | |
| RT | 1,000 | 1,000 | 5,000 | | |
| ИТТ | 1,000 | 1,000 | 5,000 | | |
| НК | 0,200 | 0,200 | 1,000 | | |
| **Сумма** | **2,200** | **2,200** | **11,000** | | |
| | | | | | |
| **Нормализация** | | | | | |
| | RT | ИТТ | НК | Среднее | Мера согласованности |
| RT | 0,455 | 0,455 | 0,455 | 0,455 | 3,000 |
| ИТТ | 0,455 | 0,455 | 0,455 | 0,455 | 3,000 |
| НК | 0,091 | 0,091 | 0,091 | 0,091 | 3,000 |
| | | | | | |
| **Согласованность** | | | | | |
| **ИС** | **ИР** | **Коэф. Согласованности** | | | |
| 0,000 | 0,580 | 0,000 | | | |

Обслуживание | Эргономичность

**Рисунок 32. Попарное сравнение по эргономичности**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Использование МАИ. Сравнение альтернатив по адаптируемости** | | | | | |
| **Попарное сравнение** | | | | | |
| | RT | ИТТ | НК | | |
| RT | 1,000 | 0,250 | 3,000 | | |
| ИТТ | 4,000 | 1,000 | 6,000 | | |
| НК | 0,333 | 0,167 | 1,000 | | |
| **Сумма** | **5,333** | **1,417** | **10,000** | | |
| | | | | | |
| **Нормализация** | | | | | |
| | RT | ИТТ | НК | Среднее | Мера согласованности |
| RT | 0,188 | 0,176 | 0,300 | 0,221 | 3,040 |
| ИТТ | 0,750 | 0,706 | 0,600 | 0,685 | 3,109 |
| НК | 0,063 | 0,118 | 0,100 | 0,093 | 3,013 |
| | | | | | |
| **Согласованность** | | | | | |
| **ИС** | **ИР** | **Коэф. Согласованности** | | | |
| 0,027 | 0,580 | 0,047 | | | |

Адаптирумость

**Рисунок 33. Попарное сравнение по адаптируемости**

## Определение весовых коэффициентов критериев

На втором этапе должны быть осуществлены аналогичные попарные сравнения для определения весов критериев. Процесс аналогичен сравнению альтернатив по критериям, однако в данном случае сравниваются между собой критерии. Эти действия в рассматриваемом примере выполняются на рабочем листе Веса (см. Рисунок 34).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Использование МАИ. Сравнение альтернатив по адаптируемости | | | | | | |
| 2 | Попарное сравнение | | | | | | |
| 3 | | Стоимость | Обслуживание | Эргономичность | Адаптируемость | | |
| 4 | Стоимость | 1,000 | 6,000 | 0,500 | 3,000 | | |
| 5 | Обслуживание | 0,167 | 1,000 | 0,125 | 0,333 | | |
| 6 | Эргономичность | 2,000 | 8,000 | 1,000 | 5,000 | | |
| 7 | Адаптируемость | 0,333 | 3,000 | 0,200 | 1,000 | | |
| 8 | **Сумма** | **3,500** | **18,000** | **1,825** | **9,333** | | |
| 9 | | | | | | | |
| 10 | Нормализация | | | | | | |
| 11 | | Стоимость | Обслуживание | Эргономичность | Адаптируемость | Среднее | Мера согласованности |
| 12 | Стоимость | 0,286 | 0,333 | 0,274 | 0,321 | 0,304 | 4,071 |
| 13 | Обслуживание | 0,048 | 0,056 | 0,068 | 0,036 | 0,052 | 4,011 |
| 14 | Эргономичность | 0,571 | 0,444 | 0,548 | 0,536 | 0,525 | 4,087 |
| 15 | Адаптируемость | 0,095 | 0,167 | 0,110 | 0,107 | 0,120 | 4,023 |
| 16 | | | | | | | |
| 17 | Согласованность | | | | | | |
| 18 | ИС | ИР | Коэф. Согласованности | | | | |
| 19 | 0,019 | 0,900 | 0,021 | | | | |

Стоимость / Обслуживание / Эргономичность / Адаптируемость / Ве

**Рисунок 34. Коэффициент согласованности для весов критериев**

Оказалось, что показатель эргономичности имеет наибольший вес (0,525 в ячейке F14), за ним идет стоимость (0,304 в ячейке F12). Меры согласованности оказались близки к 4, поэтому индекс согласованности и коэффициент согласованности близки к нулю.

Последний шаг состоит в вычислении взвешенных средних оценок для каждого варианта решения и применении полученных результатов для принятия решения о том, у какого поставщика будет куплено новое программное обеспечение.

## Итоговый выбор альтернативы

Заключительные вычисления сделаны на листе Выбор (см. Рисунок 35, Рисунок 36). На основании полученных результатов можно сделать вывод, что компания RT с показателем 0,378 (ячейка C8) несколько превосходит компанию ИТТ, имеющую показатель 0,376 (ячейка D8), а компания НК от них заметно отстала, имея показатель 0,245.

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Использование МАИ. Итоговый выбор альтернативы | | | | |
| 2 | Результаты сравнения | | | | |
| 3 | | Веса | RT | ИТТ | НК |
| 4 | Стоимость | 0,304 | 0,315 | 0,082 | 0,602 |
| 5 | Обслуживание | 0,052 | 0,341 | 0,593 | 0,065 |
| 6 | Эргономичность | 0,525 | 0,455 | 0,455 | 0,091 |
| 7 | Адаптируемость | 0,120 | 0,221 | 0,685 | 0,093 |
| 8 | | Взвешенные оценки | 0,378 | 0,376 | 0,245 |

Стоимость / Обслуживание / Эргономичност

**Рисунок 35. Итоговый выбор альтернативы**

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Использование МАИ. Итоговый выбор альтернативы | | | | |
| 2 | Результаты сравнения | | | | |
| 3 | | Веса | RT | ИТТ | НК |
| 4 | Стоимость | =Веса!F12 | =Стоимость!E11 | =Стоимость!E12 | =Стоимость!E13 |
| 5 | Обслуживание | =Веса!F13 | =Обслуживание!E11 | =Обслуживание!E12 | =Обслуживание!E13 |
| 6 | Эргономичность | =Веса!F14 | =Эргономичность!E11 | =Эргономичность!E12 | =Эргономичность!E13 |
| 7 | Адаптируемость | =Веса!F15 | =Адаптирумость!E11 | =Адаптирумость!E12 | =Адаптирумость!E13 |
| 8 | | Взвешенные оценки | =СУММПРОИЗВ(B4:B7;C4:C7) | =СУММПРОИЗВ(B4:B7;D4:D7) | =СУММПРОИЗВ(B4:B7;E4:E7) |

Адаптирумость / Веса / Выбор

**Рисунок 36. Итоговый выбор альтернативы (с формулами)**

## *Литература*


1. Петровский А. Б. Теория принятия решений — М.: Издательский центр «Академия», 2009 .— 398, [1] с.: ил.
2. Таха Х. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2005. — 912 с.
3. Мур Дж., Уэдерфорд Л. и др. Экономическое моделирование в MS Excel. — М.: Вильямс, 2004. — 1024 с.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Принятие решений в условиях риска

## *Общие сведения*

## Цель работы

- Научиться решать задачи принятия многокритериальных решений в условиях риска с использованием метода деревьев решений;
- Научиться принимать многокритериальные решения в условиях риска с использованием пакета MS Excel.

## План выполнения

1. Изучить теоретическую часть;
2. Получить задание преподавателя;
3. Выполнить задание 1:
   3.1. Построить дерево принятия решений или таблицы платежей; 3.2. Выбрать критерии оценки качества решения (например, максимизация прибыли или минимизация затрат); 3.3. Оценить полезность каждого из вариантов решений и выбрать наилучшее решение; 3.4. Проанализировать чувствительность полученного решения;
4. Выполнить задание 2:
   4.1. Построение собственной функции полезности (в виде графика в MS Excel). Диапазон денежных сумм выбрать по своему усмотрению;

   4.2. Для сравнения, на том же графике построить прямую, отражающую нейтральное отношение к риску;
   4.3. Анализ полученной функции на предмет отношения к риску;
5. Составить отчёт по лабораторной работе. Отчёт должен иметь следующую структуру:
   5.1. Титульный лист, который должен содержать следующую информацию:
      5.1.1. Название университета и кафедры, ответственной за дисциплину;
      5.1.2. Заголовок — номер и название лабораторной работы;
      5.1.3. Подзаголовок — номер варианта и номера задач;
      5.1.4. ФИО и должности студента и преподавателя;
      5.1.5. «г. Санкт-Петербург, 2012 год»;
   5.2. Отчёт о решении задания 1, содержащий следующее информационное наполнение:

5.2.1. Формулировка индивидуального задания;
5.2.2. Дерево принятия решения и таблица платежей;
5.2.3. Снимки экрана монитора, содержащие результаты расчетов прибылей (затрат) возможных исходов, в соответствии с «деревом»;
5.2.4. Анализ чувствительности принятого решения;
5.2.5. Выводы о выбранном варианте решения и о результатах анализа;

5.3. <u>Отчёт о решении задания</u> <u>2</u>, содержащий информационное наполнение, аналогичное отчёту о решении задания 1:
5.3.1. Формулировка индивидуального задания;
5.3.2. Дерево принятия решения и таблица платежей;
5.3.3. Снимки экрана монитора, содержащие результаты расчетов прибылей (затрат) возможных исходов, в соответствии с «деревом»;
5.3.4. Снимок экрана с построенной графически собственной функцией полезности и выводы, касающиеся собственного отношения к риску;
5.3.5. Выводы о выбранном варианте решения и об отношении к риску на основании функции полезности.

## *Теоретическая часть*

К задачам принятия решений в условиях риска, относятся задачи, в которых исходные данные можно описать с помощью вероятностных распределений. В подобных моделях термин риск имеет смысл наличия нескольких исходов, одни из которых рассматриваются более предпочтительным другим.

Если решение принимается в условиях риска, то стоимости альтернатив описываются вероятностными распределениями, т.е. прибыль (затраты), связанная с каждым альтернативным решением, является случайной величиной (вернут или вернут кредит: в одном случае мы получим прибыль, в другом — убытки). Поэтому в качестве критерия принятия решения в случае случайного события используется ожидаемое значение стоимости — математическое ожидание *M*. Все альтернативы сравниваются с точки зрения максимизации ожидаемой прибыли или минимизации ожидаемых затрат.

## Решение простого дерева

Рассмотрим процесс решения задачи в условиях риска на примере.

Для финансирования проекта Предприятию нужно занять сроком на один год 15 млн. руб. Для этого начальник финансово-экономического отдела обращается в Банк. Банк может дать кредит Предприятию под 15% годовых или вложить те же деньги в другое дело со 100%-ным возвратом суммы, но под 9% годовых. После анализа статистики прошлого опыта кредитования, кредитный специалист Банка определил, что 4% аналогичных клиентов кредит не возвращают.

Как должен поступить кредитный специалист Банка в сложившейся ситуации: кредитовать Предприятие или вложить средства в другое дело?

## Построение дерева решений

Одним из методов решения задачи в условиях риска является использование деревьев решений. Деревья решений содержат в себе информацию о ходе принятия решений ЛПР и о случайных событиях, происходящих после принятия решений. Дерево, соответствующее представленной задаче, будет выглядеть так, как отображает Рисунок 37.

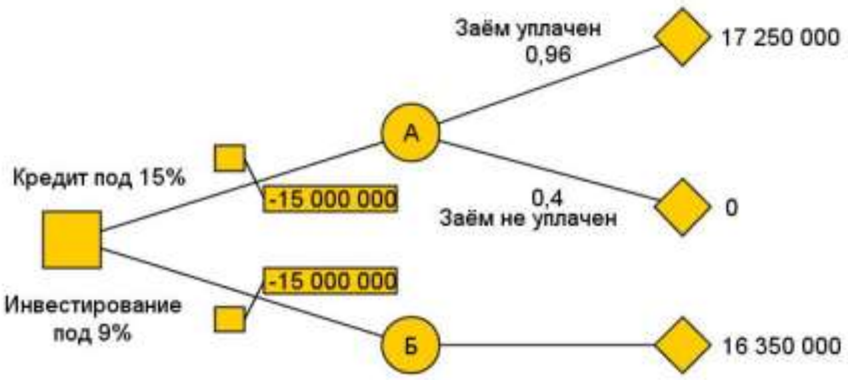



**Рисунок 37. Пример 1 — дерево решений**

На схеме дерева решений используются следующие обозначения узлов:

1. Узел дерева в форме квадрата (  ) — принятие решения ЛПРом. Потомками узла принятия решения на дереве являются альтернативы;
2. Узел дерева в форме окружности (  ) — это случайные события. Потомками случайных событий являются возможные исходы случайного события;
3. Узел дерева в форме ромба (  ) — терминальный узел дерева, возможный конечный исход ситуации принятия решения. Данный узел не имеет потомков.

Численные значения конечных исходов просчитываются, начиная с терминальных узлов дерева по направлению к основному узлу так, как показано далее:

*Результат А1 = 15000000 + 0,15 * 15000000 = 17250000*
*Результат А0 = 0*

*Результат Б1 = 15000000 + 0,09 * 15000000 = 16350000*

Чистый доход, получаемый в случае выбора альтернативы **А**:

$$M_{давать\_заем} = (17250000 * 0,96 + 0 * 0,04) - 15000000 = 16560000 - 15000000 = 1560000$$

Выбор альтернативы **Б** дает:

$$M_{не\_давать\_заем} = (16350000 * 1,0 – 15000000) = 1350000$$

Поскольку ожидаемый чистый доход больше для альтернативы А, то требуется принять решение — выдать заем.

## Анализ чувствительности решения

Решения, принимаемые в условиях риска, очевидно, зависят от значений вероятностей исходов. Чувствительность решения от вероятностей определяется величиной допустимого изменения вероятностей исходов событий, с которыми связано принимаемое решение. Знать, насколько решение чувствительно необходимо, чтобы понимать насколько можно полагаться на производимый выбор.

Проанализируем чувствительность в только что рассмотренном примере. Ожидаемые чистые доходы в узлах *А* и *Б* довольно близки: *1,56* и *1,35* млн. руб. Выбор решения зависит от значения вероятностей. Анализ чувствительности позволяет вычислить разброс вероятностей, в рамках которых не меняется выбор.

Обозначим вероятность невозврата займа через *p*. Тогда вариант *А* дает чистый доход:

$$17250000*(1-p) + 0*p – 15000000 = 2250000 – 17250000*p$$

Вариант *Б* приносит чистый доход 1350 000 руб.

Уравнивание чистого дохода *А* и *Б* позволяет определить, при какой вероятности *p* решения будут иметь равную полезность:

$$2250000 – 17250000*p = 1350000 => p = 900000/17250000 = 0,052$$

Результат *p≈0,05* оказался близок к *p≈0,04*, что показывает сильную чувствительность результата выбора решения к расчетам величины вероятности.

## Решение дерева в MS Excel

Рассмотрим решение более сложных задач принятия решений в условиях риска на новом примере. Для решения таких задач предлагается использовать MS Excel.

Небольшая овощная лавка еженедельно закупает и продаёт различные овощи и фрукты, в том числе помидоры. Стоимость закупки ящика помидоров составляет 1500 руб., прибыль от продажи ящика — 2400 руб. Статистика исследования спроса приведена в таблице.

**Таблица 4. Пример 2 — недельный спрос на помидоры в овощной лавке**

| **Недельный спрос ящиков, шт.** | **Вероятность** |
|---|---|
| 11 | 0,4 |
| 12 | 0,4 |
| 13 | 0,2 |

Если закупленный ящик остался непроданным, лавка несет убыток 1500 руб. Определить размер запаса, который целесообразно формировать в начале неделе лавке. Изменится ли решение, если неудовлетворенный спрос клиента будет оценен в 1350 руб.?

Дерево решений, соответствующее задаче представлено показывает Рисунок 38.

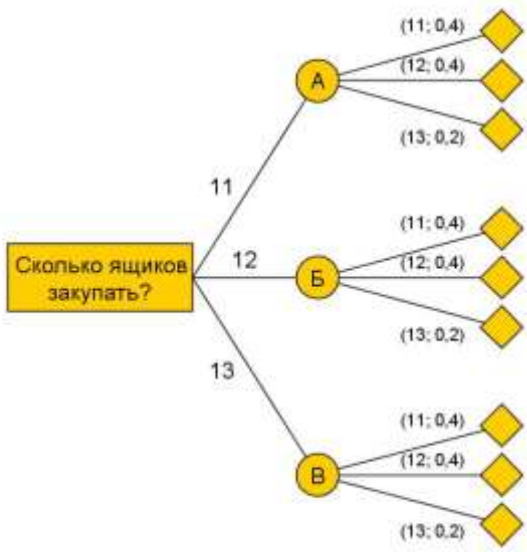
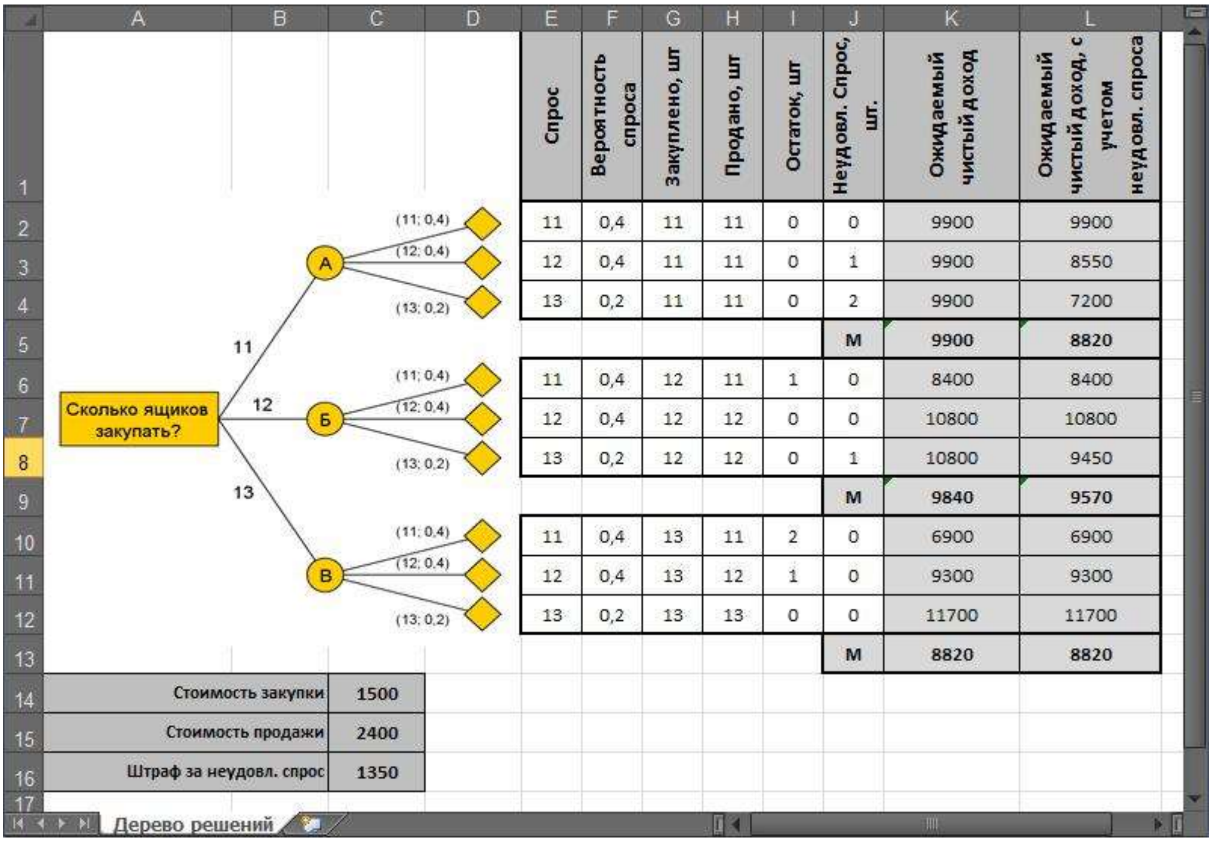



**Рисунок 38. Пример 2 — дерево решений при закупке помидоров в овощной лавке**

Данное дерево можно решить, используя таблицы Excel. Итоговую таблицу решения задачи в Excel отображает Рисунок 39 (*см. также файл «ЛР3.Пример.xls»*).

Ожидаемый чистый доход максимален при выборе альтернативы *А — 9900 руб*. С учетом штрафов за неудовлетворенный спрос максимальный чистый доход дает альтернатива *Б — 9570 руб.*




| Спрос | Вероятность спроса | Закуплено, шт | Продано, шт | Остаток, шт | Неудовл. Спрос, шт. | Ожидаемый чистый доход | Ожидаемый чистый доход, с учетом неудовл. спроса |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0,4 | 11 | 11 | 0 | 0 | 9900 | 9900 |
| 12 | 0,4 | 11 | 11 | 0 | 1 | 9900 | 8550 |
| 13 | 0,2 | 11 | 11 | 0 | 2 | 9900 | 7200 |
| | | | | | M | 9900 | 8820 |
| 11 | 0,4 | 12 | 11 | 1 | 0 | 8400 | 8400 |
| 12 | 0,4 | 12 | 12 | 0 | 0 | 10800 | 10800 |
| 13 | 0,2 | 12 | 12 | 0 | 1 | 10800 | 9450 |
| | | | | | M | 9840 | 9570 |
| 11 | 0,4 | 13 | 11 | 2 | 0 | 6900 | 6900 |
| 12 | 0,4 | 13 | 12 | 1 | 0 | 9300 | 9300 |
| 13 | 0,2 | 13 | 13 | 0 | 0 | 11700 | 11700 |
| | | | | | M | 8820 | 8820 |

| | |
|---|---|
| Стоимость закупки | 1500 |
| Стоимость продажи | 2400 |
| Штраф за неудовл. спрос | 1350 |

**Рисунок 39. Пример 2 — решение дерева в MS Excel**

## Деревья с несколькими точками принятия решения

Более сложные задачи принятия решений в условиях риска характерны большим количеством узлов принятия решения в дереве. Возьмём дополнительные условия к примеру 1, чтобы рассмотреть ход решения задач с несколькими узлами принятия решения.

В дополнение условий примера 1, банк решает вопрос, проверять ли конкурентоспособность клиента, перед тем, как выдавать ему заём. За проверку аудиторская фирма берет с банка 80000 руб. Т.о. перед банком встают две проблемы (две задачи принятия решения): первая — проводить проверку или нет, вторая — выдавать после проверки заём или нет.

Для решения первой проблемы, банк собирает дополнительные данные: проверяет правильность выдаваемых аудиторской фирмой сведений. Для этого выбираются 1000 человек, которые были проверены аудиторами и которым впоследствии выдавались ссуды. Рекомендации аудиторской фирмы и фактический результат возврата возврат ссуды содержит Таблица 5.

**Таблица 5. Пример 3 — фактический результат возврата ссуды для проверенных аудитором клиентов**

| Рекомендации аудитора после проверки | Всего клиентов | Ссуда возвращена | | Ссуда НЕ возвращена | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Кол-во клиентов | % | Кол-во клиентов | % |
| Выдавать ссуду | 750 | 735 | 98 | 15 | 2 |
| Не выдавать ссуду | 250 | 225 | 90 | 25 | 10 |
| Итого: | 1000 | 960 | 96 | 40 | 4 |

Решение задачи при наличии дополнительной информации сводится к построению дерева и его решению.

**Этап 1. Построение дерева решений**

Дерево решений для примера 3 приведено ниже (см. Рисунок 40).

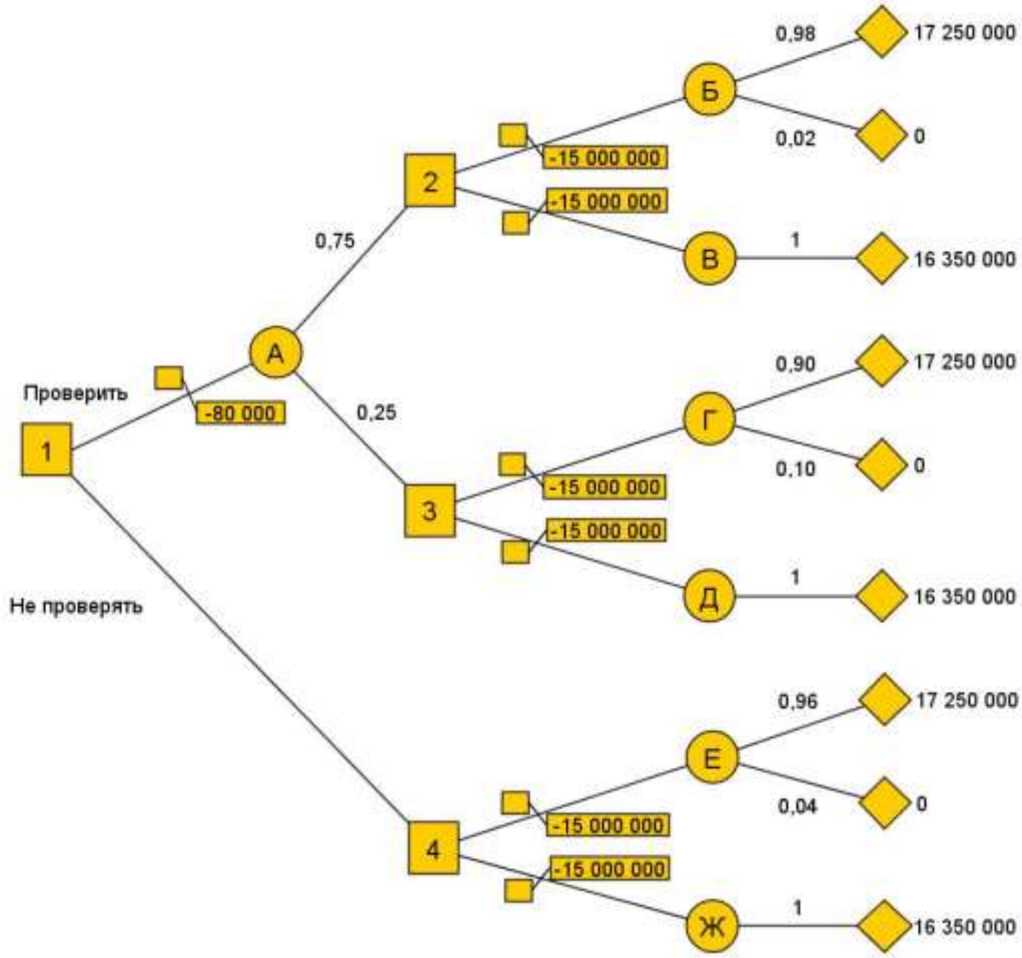



**Рисунок 40. Пример 3 — дерево решений**

**Этап 2. Решение дерева**

Справа налево проставим исходы каждого из узлов дерева в денежном эквиваленте. Любые встречающиеся расходы требуется вычесть из ожидаемых доходов. Таким образом подсчитывается всё дерево. В узлах принятия решения выбирается ветвь, ведущая к наибольшему из возможных при данном решении ожидаемому доходу.

Сначала рассмотрим случайные события *Б* и *В*, являющиеся следствием принятия решения *2* (*Выдавать ли заем клиенту?*).

Доход, ожидаемый от исхода *Б*:

$$M(Б) = 17250000 * 0,98 + 0 * 0,02 = 16905000$$

Чистый ожидаемый доход:

$$NM(Б) = 16905000 - 15000000 = 1905000$$

Доход, ожидаемый от исхода *В*:

$$M(В) = 16350000 * 1,0 = 16350000$$

Чистый ожидаемый доход:

$$NM (В) = 16350000 - 15000000 = 1350000$$

Исходя из последних расчётов, наиболее рационально при принятии решения *2* является альтернатива выдать заём с итоговым чистым ожидаемым доходом *1 905 000 руб.*, соответствующее значение чистого ожидаемого дохода принимает узел *2*.

Аналогично рассчитываются случайные события *Г* и *Д*:

$M(Г) = 15\ 525\ 000$
$NM(Г) = 525\ 000$
$M(Д) = 16\ 350\ 000$
$NM(Д) = 1\ 350\ 000$

При принятии решения в узле *3* наиболее рациональным решением будет не выдавать заём, соответственно узел принимает значение *1 350 000 руб*.

Аналогично рассчитываются узлы *Е, Ж* и *4*, принимающие значения *1 560 000, 1 350 000* и *1 560 000 руб.* соответственно.

Теперь требуется вернуться к узлам *А* и *1*. Используя ожидаемые чистые доходы в узлах *2* и *3*, рассчитаем математическое ожидание для случайного события *А*:

$$M(А) = (1905000 * 0,75) + (1350000 * 0,25) = 1766000$$

Так как аудиторская проверка стоит 80000 руб., ожидаемый чистый доход составит:

$NM(A) = 1766000 - 80000 = 1686000$

Теперь есть все необходимые данные, чтобы выявить наиболее рациональное решение в узле *1* (*Должен ли банк воспользоваться аудиторской проверкой?*). В этом узле максимальное математическое ожидание — *1 686 000*, поэтому должна быть выбрана ветвь с проверкой, а альтернативная ветвь перечёркивается.

Ниже приведено решённое дерево (см. Рисунок 41).

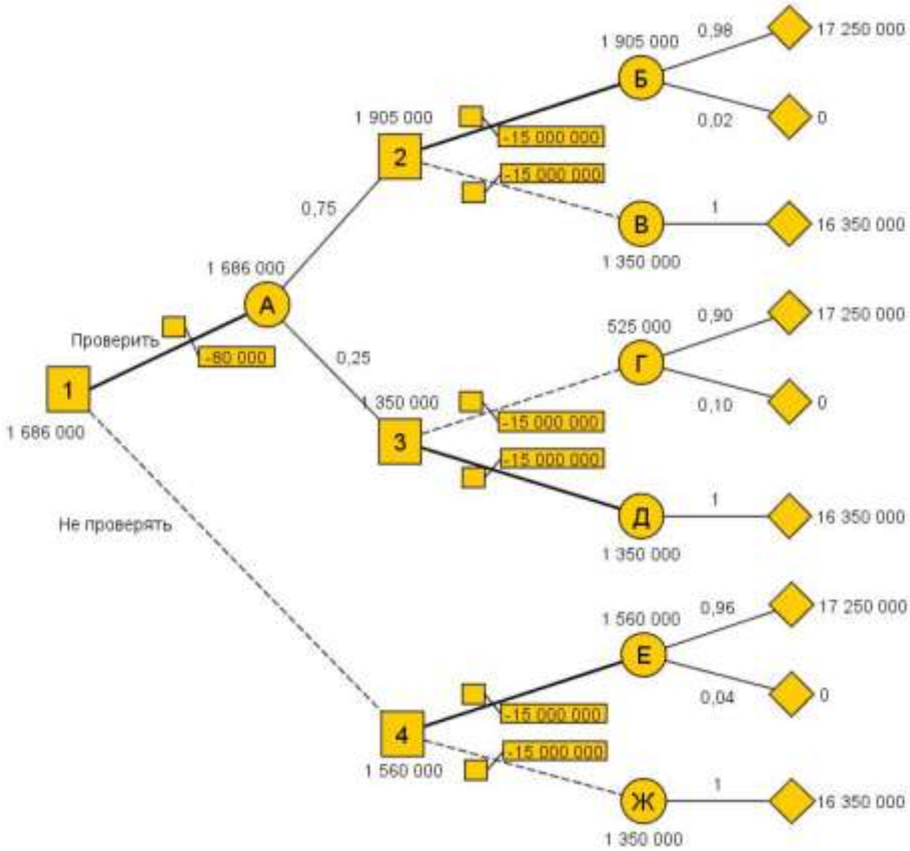



**Рисунок 41. Пример 3 — решённое дерево**

## Построение индивидуальной функции полезности

В предыдущих примерах платежи выражались в виде денег. Зачастую возникают ситуации, когда при анализе следует использовать полезность решения, а не величину реальных денежных платежей. Для примера предположим, что существует шанс *50* на *50*, что инвестиция в *20 млн. руб.* или принесет прибыль в *40 млн. руб.*, или будет полностью потеряна. Соответствующая этому условию ожидаемая прибыль равна:

*40 * 0,5 – 20 * 0,5 = 10 млн. руб.*

Хотя ожидается прибыль в виде чистого дохода, разные люди могут по-разному интерпретировать полученный результат. Инвестор, который идет на риск, может вложить деньги, чтобы с вероятностью *50 %* получить прибыль в *40 млн. руб.* Наоборот, осторожный инвестор может не захотеть рисковать потерей *20 млн. руб*.

Определение полезности является субъективным. Оно зависит от индивидуального отношения к риску. Рассмотрим, как можно построить функцию полезности, отражающую собственное отношение к деньгам, например, к риску выиграть или проиграть определенную сумму.

В примере, приведенном выше, наилучший платеж равен *40 млн. руб.*, а наихудший — *(–20) млн. руб*. Установим шкалу полезности *П*, изменяющуюся от *0* до *1*, где *0* соответствует полезности *(–20)*, а *1* — *40*, т.е. *П(–20) = 0* и *П(40) = 1*. *0* и *1* как границы шкалы выбраны для удобства. Наиболее часто шкалу нормируют от *0* до *1* или от *0* до *100*.

Если отношение ЛПР беспристрастно к риску, то график результирующей функции полезности является прямой линией, соединяющей точки (0; –20) и (1; 40). В этом случае график функции полезности совпадает с графиком денежной оценки результата.

В различных реальных ситуациях функция полезности может принимать совершенно разный вид. Ниже иллюстрируется вид функции полезности для трех индивидуумов *X*, *Y* и *Z* (см. Рисунок 42).

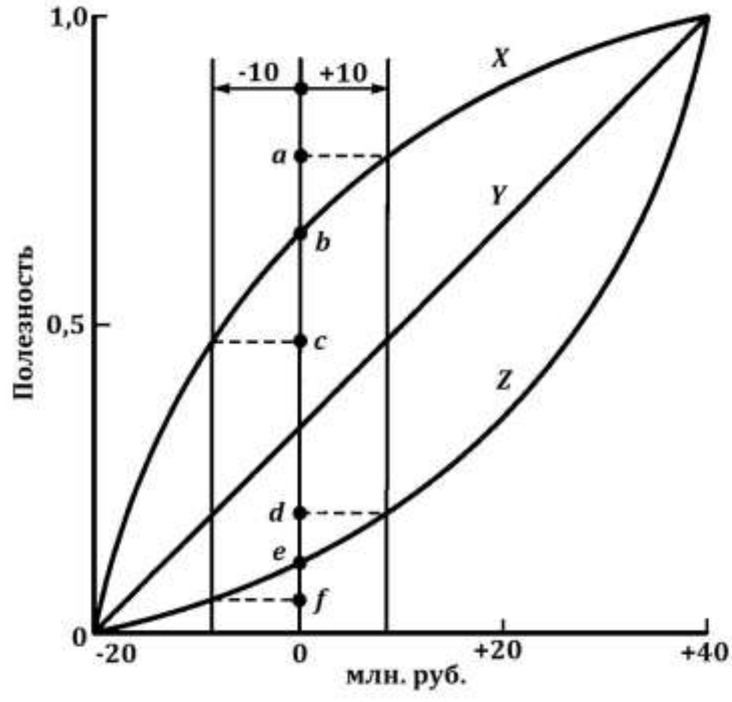



**Рисунок 42. Функция полезности для индивидуумов X, Y, Z**

*X* осторожен и не склонен к риску, так как проявляет большую чувствительность к потере, чем к прибыли. Это следует из того, что для индивидуума *X* при изменении в *10 млн. руб.* вправо и влево от точки, соответствующей *0* рублей, увеличение прибыли изменяет полезность на величину *ab*, которая меньше изменения полезности *bc*, обусловленной потерями такой же величины, т.е. $ab < bc$.

*Z,* наоборот, настроен на риск. Такие же изменения в ±*10 млн. руб.*, обнаруживают противоположное поведение, здесь $de > ef$.

А индивидуум *Y* является нейтральным к риску, так как упомянутые изменения порождают одинаковые изменения полезности.

В общем случае индивидуум может быть, как не расположен к риску, так и настроен на риск, в зависимости от суммы риска. В этом случае соответствующая кривая полезности будет иметь вид удлиненной буквы S (логистической кривой).

Определим теперь полезность, соответствующую промежуточным значениям платежей, например, *–10, 0, 10, 20* или *30*. Для определения полезности суммы реальных денег, будем использовать следующую формулу:

$$П(x) = p*П(-20) + (1-p)*П(40) = 100*(1-p), 0<p<1 .$$

Для определения значения *П(x)* просят ЛПР сообщить свое предпочтение между гарантированной наличной суммой x и возможностью сыграть в лотерею, в которой с вероятностью p реализуется проигрыш в сумме *20 млн. руб.* и с вероятностью *(1-p)* имеет место выигрыш в *40 млн. руб*. Под предпочтением понимается выбор значения «нейтральной» вероятности *p*, при котором с точки зрения ЛПР возможности сыграть в лотерею или получить гарантированную сумму *x* являются одинаково привлекательными. Например, если *x = 10 млн. руб.*, ЛПР может заявить, что гарантированные *10 млн. руб.* наличными и лотерея одинаково привлекательны при *p = 0,3*. В этом случае вычисляется полезность для *x = 10 млн. руб.* по следующей формуле:

$$П(10) = 100*(1 - 0,3) = 70 .$$

Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будет получено достаточное количество точек *(x, П(x))* для определения формы функции полезности. Затем можно определить *П(x)* путем интерполяции между полученными точками.

## *Литература*

1. Петровский А. Б. Теория принятия решений — М.: Издательский центр «Академия», 2009 .— 398, [1] с.: ил.
2. Таха Х. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2005. — 912 с.
3. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. — М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997. — 590 с.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

Принятие решений в условиях неопределенности

## *Общие сведения*

## Цель работы

Научиться находить рациональные решения в условиях неопределенности вызванной конфликтом интересов.

## План выполнения

1. Изучить теоретическую часть;
2. Получить задание преподавателя;
3. Выполнить задание 1:
   3.1. Определить по заданной матрице платежей нижнюю и верхнюю цены игры. Определить, существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях?
   3.2. Привести задачу теории матричных игр к задаче линейного программирования;
   3.3. Решить задачу ЛП с помощью пакета MS Excel. Определить цену игры и оптимальные стратегии для каждого из игроков.
4. Выполнить задание 2: 4.1.
   Построить матрицу платежей.
   4.2. Определить по заданной матрице платежей нижнюю и верхнюю цены игры. Определить, существует ли в игре равновесие в чистых стратегиях?
   4.3. Привести задачу теории матричных игр к задаче линейного программирования.
   4.4. Решить задачу линейного программирования с помощью пакета MS Excel и ответить на дополнительные вопросы задания.
5. Составить отчёт по лабораторной работе. Отчёт должен иметь следующую структуру:
   5.1. Титульный лист, который должен содержать следующую информацию:
      5.1.1. Название университета и кафедры, ответственной за дисциплину;
      5.1.2. Заголовок — номер и название лабораторной работы;
      5.1.3. Подзаголовок — номер варианта и номера задач;
      5.1.4. ФИО и должности студента и преподавателя;
      5.1.5. «г. Санкт-Петербург, 2012 год»;

5.2. Отчёт о решении задания 1, содержащий следующее информационное наполнение:

5.2.1. Формулировка индивидуального задания;

5.2.2. Решение задачи поиска минимальной и максимальной цен игры, поиска точки равновесия в чистых стратегиях;

5.2.3. Снимки экрана монитора, содержащие табличную модель задачи линейного программирования;

5.2.4. Решение задачи поиска цены игры в смешанных стратегиях игроков, поиска вероятностей использования стратегий;

5.2.5. Найденное решение и выводы;

5.3. Отчёт о решении задания 2, содержащий информационное наполнение, аналогичное отчёту о решении задания 1:

5.3.1. Формулировка индивидуального задания;

5.3.2. Результат построения матрицы игры с комментариями о выбранном решении;

5.3.3. Решение задачи поиска минимальной и максимальной цен игры, поиска точки равновесия в чистых стратегиях;

5.3.4. Снимки экрана монитора, содержащие табличную модель задачи линейного программирования;

5.3.5. Решение задачи поиска цены игры в смешанных стратегиях игроков, поиска вероятностей использования стратегий;

5.3.6. Найденное решение и выводы.

## *Теоретическая часть*

Ситуации, связанные с принятием решений, в которых два или более разумных противника имеют конфликтующие цели, рассматриваются в теории игр. Само слово «игра» применяется для обозначения некоторого набора правил и соглашений, составляющих данный вид игры, например: футбол, карточная игра, шахматы. Эти ситуации принятия решений отличаются от рассмотренных ранее, где природа, хотя и могла находиться в различных состояниях, но не преследовала каких-либо целей и, следовательно, не рассматривалась в роли соперника.

## Общие понятия матричных игр

В игре заинтересованные стороны называются игроками, каждый из которых имеет некоторое множество вариантов выбора (не меньше двух, иначе он фактически не участвует в игре, поскольку заранее известно, что он предпримет). В экономике модель поведения лиц в виде игры возникает, например, при попытке нескольких фирм завоевать наиболее выгодное место на конкурентном рынке, или, например, при желании нескольких лиц (кампаний) разделить некоторое количество продукта (ресурса, финансовых средств) между собой так, чтобы каждому досталось как можно больше. Игроками в конфликтных экономических ситуациях, моделируемых в виде игры, являются производственные и непроизводственные фирмы, банки, отдельные люди и другие экономические агенты. В военных приложениях модель игры используется, например, для наилучшего выбора средств (из имеющихся или потенциально возможных) поражения военных целей противника или защиты от его нападения.

Для игр характерна неопределенность результата. Причины или источники неопределенности относятся к трем группам:

1. Комбинаторные источники (*например игра шахматы*);
2. Случайные факторы (*например игры кости, карточные игры, где случаен расклад*);
3. Неопределенность имеет стратегическое происхождение: игрок не знает, какого рода образа действий придерживается его противник.

   Здесь неопределенность исходит от другого лица.

Далее будем рассматривать игровые модели конфликтов, в которых участвуют два противника, каждый из которых имеет конечное число вариантов выбора решений. С каждой парой решений связан платеж, который один из игроков выплачивает другому (т.е. выигрыш одного игрока равен проигрышу другого). Такие игры принято называть *конечными играми двух лиц с нулевой суммой*.

В игре принимают участие два игрока: А и В. В распоряжении каждого игрока имеется конечное множество вариантов выбора — стратегий. Пусть $\{a_1 , a_2 ,..., a_n \}$ — множество стратегий игрока А, $\{b_1 , b_2 ,..., b_m\}$ — множество стратегий игрока В. С каждой парой стратегий связан платеж, который один из игроков выплачивает другому. Т.е., когда игрок А выбирает стратегию $a_i$ (свою i-ю стратегию), а игрок В — стратегию $b_j$, то результатом такого выбора становится платеж $H(a_i , b_j)$. Поскольку стратегий конечное число, то платежи $H(a_i , b_j)$ образуют матрицу размерности $n \times m$, называемую *матрицей платежей* (или *матрицей игры*). Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока А, а столбцы — стратегиям игрока В.

Пусть два игрока А и В играют в игру, основанную на подбрасывании монеты. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают герб (Г) или решку (Р). Если результаты двух подбрасываний монеты совпадают (т.е. ГГ или РР), то игрок А получает один доллар от игрока В. Иначе игрок А платит один доллар игроку В.

Для каждого из игроков возможны 2 варианта результатов: выпадения герба или решки, следовательно матрица платежей имеет размерность *2 x 2* следующего вида:

| | **Вг** | **Вр** |
|---|---|---|
| **Аг** | | |
| **Ар** | | |

Если результаты двух подбрасываний (т.е. подбрасываний монеты игроками А и В) совпадают, то платеж в 1 доллар получает игрок А. Будем строить матрицу игры, с точки зрения игрока А, т.е. его выигрыши оценивать как положительные, а проигрыши — как отрицательные (с точки зрения В все будет наоборот и мы вполне могли бы построить матрицы платежей, ориентируясь на его точку зрения).

| | **Вг** | **Вр** |
|---|---|---|
| **Аг** | 1 | |
| **Ар** | | 1 |

Если результаты подбрасывания различаются, то доллар получает В, значит платеж А равняется –1 доллар. В игре с нулевой суммой выигрыш игрока В равносилен проигрышу игрока А и равен поэтому $-H(a_i, b_j)$.

| | **Вг** | **Вр** |
|---|---|---|
| **Аг** | 1 | –1 |
| **Ар** | –1 | 1 |

Т.о., мы построили матрицу игры, описывающую заданную ситуацию. Предполагается, что матрица игры обоим игрокам известна.

Исход игры зависит от поведения обоих игроков, которое основывается на выборе правильных стратегий игры, т.е. таких вариантов, при которых так платеж данному игроку будет наибольшим. Однако, в отличие от методов оптимизации, в теории игр игрок не может просто стремиться к максимуму, он вынужден считаться с действиями соперника. Существенно, что ни один из партнеров не знает, какую стратегию применит его противник. Таким образом, имеет место ситуация полной неопределенности, при которой теория вероятности также не может помочь игрокам в выборе решения.

## Решение игр в чистых стратегиях

Рассмотрим процесс принятия решений обеими сторонами, предполагая, что оба игрока будут действовать рационально. Если игрок А не знает, как поступит его противник, то, действуя наиболее целесообразно и не желая рисковать, он выберет такую стратегию, которая гарантирует ему наибольший из наименьших выигрышей при любой стратегии противника.

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | –3 | 4 |
| $A_2$ | –3 | 4 | –5 |
| $A_3$ | 4 | –5 | 6 |

Т.е. А предполагает, что В умен и будет вести себя так, чтобы доставить противнику набольшие неприятности. Тогда, при выборе 1-й стратегии, А может рассчитывать лишь на худший для себя результат –3. При выборе 2-й и 3-й стратегий он может рассчитывать на –5. Из всех возможных стратегий целесообразнее выбрать ту, что принесет максимальный возможный доход (минимальные возможные убытки, как в нашем случае). В рассматриваемом случае это стратегия 1.

Принято говорить, что при таком образе действий игрок А руководствуется принципом *максиминного* выигрыша. Этот выигрыш определяется формулой:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

Величина $\alpha$ называется нижней ценой игры, максиминным выигрышем, или сокращенно максимином. Это тот гарантированный минимум, который игрок А может себе обеспечить, придерживаясь наиболее осторожной стратегии.

Очевидно, аналогичное рассуждение можно провести и за игрока В. Так как он заинтересован в том, чтобы обратить выигрыш А в минимум, он должен просмотреть каждую свою стратегию с точки зрения максимального выигрыша при этой стратегии. Поэтому внизу матрицы выпишем максимальные значения по каждому столбцу:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}$$

Все эти максимумы хороши для А, но крайне неприятны для В. Поскольку противник также учитывает нашу разумность, то выбирает из этих вариантов наименьший:

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

— больше этой суммы игрок В точно не потеряет. Величина $\beta$ называется верхней ценой игры, или минимаксом.

Принцип осторожности, который определяет выбор партнерами стратегий, соответствующих максиминному выигрышу или минимаксному проигрышу, часто называют принципом минимакса, а стратегии, вытекающие из этого принципа, — минимаксными стратегиями. Можно доказать, что всегда $\alpha \le \beta$, чем и объясняются названия «нижняя цена» и «верхняя цена».

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 2 | –3 | 4 | -3 |
| $A_2$ | –3 | 4 | –5 | -5 |
| $A_3$ | 4 | –5 | 6 | -5 |
| $\beta_j$ | 4 | 4 | 6 | |

Матрица игры в общем виде:

| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_m$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1m}$ | $\alpha_1$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2m}$ | $\alpha_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $A_n$ | $a_{n1}$ | $a_{n2}$ | … | $a_{nm}$ | $\alpha_n$ |
| $\beta_j$ | $\beta_1$ | $\beta_1$ | … | $\beta_m$ | |

Нижняя цена игры $\alpha = -3$; верхняя цена игры $\beta = 4$. Наша максиминная стратегия есть $A_1$; применяя ее систематически, мы можем твердо рассчитывать выиграть не менее –3 (проиграть не более 3). Минимаксная стратегия противника есть любая из стратегий $B_1$ и $B_2$, применяя их систематически, он, во всяком случае, может гарантировать, что проиграет не более 4. Если мы отступим от своей максиминной стратегии (например, выберем стратегию $A_2$), противник может нас «наказать» за это, применив стратегию $B_3$ и сведя наш выигрыш к — 5. Но если противник выберет стратегию $B_3$, то мы в свою очередь можем выбрать $A_3$ и он проиграет 6 и т.д. Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются своими минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противной стороны.

Однако существуют некоторые игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Это те игры, для которых нижняя цена равна верхней:

$\alpha = \beta$

Если нижняя цена игры равна верхней, то их общее значение называется ценой игры, и обозначают $\gamma$.

Например, в игре, матрица которой приведена ниже, верхняя и нижняя цены игры оказываются равными: $\alpha = \beta = \gamma = 0{,}6$.

Элемент 0,6, выделенный в платежной матрице, является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. В геометрии точку на поверхности, обладающую аналогичным свойством (одновременный минимум по одной координате и максимум по другой), называют *седловой точкой*. По аналогии этот термин применяется и в теории игр. Элемент матрицы, обладающий этим свойством, называется седловой точкой матрицы, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку*.

| | **$B_1$** | **$B_2$** | **$B_3$** | **$B_4$** | **$\alpha_i$** |
|---|---|---|---|---|---|
| **$A_1$** | 0,4 | *0,5* | 0,7 | 0,3 | 0,3 |
| **$A_2$** | 0,8 | *0,4* | 0,3 | 0,7 | 0,3 |
| **$A_3$** | *0,7* | **0,6** | *0,8* | *0,9* | **0,6** |
| **$A_4$** | 0,7 | *0,2* | 0,4 | 0,6 | 0,2 |
| **$\beta_j$** | 0,8 | **0,6** | 0,8 | 0,9 | |

Для игр с седловой точкой решение игры обладает следующим свойством: если один из игроков (например А) придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок (В) будет любым способом отклоняться от своей оптимальной стратегии, то для игрока, допустившего отклонение, это никогда не может оказаться выгодным. Это утверждение легко проверить на примере рассматриваемой игры с седловой точкой.

В этом случае наличие у любого игрока сведений о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, не может изменить собственного поведения игрока: если он не хочет действовать против своих же интересов, он должен придерживаться своей оптимальной стратегии. Т.е. пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы положением равновесия.

Анализируя матрицу игры, можно прийти к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь этой стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α.

## Решение игр в смешанных стратегиях

Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α, если применять не одну-единственную «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий? Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются смешанными стратегиями.

Для матричной игры *n x m* обозначим через $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ — смешанную стратегию игрока А, где $p_1 \ge 0, p_2 \ge 0, ..., p_n \ge 0$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Через $Q = (q_1, q_2, ..., q_m)$ обозначим смешанную стратегию игрока В, где $q_1 \ge 0, q_2 \ge 0, ..., q_m \ge 0$ и $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$. Здесь $p_1, p_2, ..., p_n$ — вероятности использования игроком А в смешанной стратегии своих чистых стратегий

$q_1,$

$q_2, ..., q_m$ $a_i$, и — вероятности использования игроком В в смешанной

стратегии своих чистых стратегий $b_j$.

Математическое ожидание выигрыша игрока А запишется в виде:

$$M(P,Q) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, p_i\, q_j$$

Смешанная стратегия, которая гарантирует игроку наибольший возможный средний выигрыш (или наименьший возможный средний проигрыш), называется его *оптимальной смешанной стратегией*. Пусть P* — смешанная стратегия игрока А, Q* — смешанная стратегия игрока В. Пара смешанных стратегий (P*, Q*), при которой M(P,Q*) ≤ M(P*,Q*) ≤ M(P*,Q), называют *седловой точкой игры*, а математическое ожидание выигрыша γ = M(P*, Q*) — ценой игры, причем всегда α≤γ≤β.

## Сведение матричной игры к задаче линейного программирования

Общим методом нахождения решения игры любой конечной размерности является ее сведение к задаче линейного программирования. Из основного положения теории игр следует, что при использовании смешанных стратегий такое оптимальное решение всегда существует и

$a_1,$

$a_2, ..., a_n$ цена игры γ находится между верхним и нижним значениями игры

(α≤γ≤β).

Допустим, что смешанная стратегия игрока А складывается из

стратегий с вероятностями $p_i$ (некоторые из значений вероятностей могут быть равны нулю). Оптимальная смешанная стратегия игрока В складывается из стратегий $b_1, b_2, ..., b_m$ с вероятностями $q_j$. Условия игры определяются платежной матрицей $H(a_i, b_j)$ с элементами $a_{ij} > 0$, $i = 1, ..., n$; $j = 1, ..., m$. Если игрок А применяет оптимальную смешанную стратегию, а игрок В — чистую стратегию $b_j$, то средний выигрыш игрока А (математическое ожидание выигрыша) составит

$p_1 a_{1j} + p a_{2j} + ... + p_n a_{nj}$ .

Игрок А стремится к тому, чтобы при любой стратегии игрока В его выигрыш был не меньше, чем цена игры $\gamma$, а сама цена игры была максимальной. Такое поведение игрока А описывается следующей задачей линейного программирования:

$\gamma \to \max$ (игрок А стремится максимизировать свой выигрыш)

$p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + ... + p_n a_{n1} \geq \gamma,$

$p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + ... + p_n a_{n2} \geq \gamma,$

...

$p_1 a_{1m} + p_2 a_{2m} + ... + p_n a_{nm}$

$\geq \gamma,\ p_1 + p_2 + ... + p_n = 1,$

$p_i \geq 0,\ i = 1,..., n.$

Используя обозначения $x_i = p_i / \gamma$ и

соотношение $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ , получим $\gamma = 1 (x_1 + x_2 + ... + x_n)$ . Отсюда

$x_1 + x_2 + ... + x_n \to \min$

$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_{n1} x_n \geq 1,$

$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{n2} x_n \geq 1,$

...

$a_{1m} x_1 + a_{2m} x_2 + ... + a_{nm} x_n$

$\geq 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1,..., n.$

Эта задача всегда имеет решение $x_1^*, x_2^*, ... x_n^*$ , получивкоторое

(например, с $\gamma = 1 (x_1^* + x_2^* + ... + x_n^*)$ помощью надстройки Поиск решения MS Excel) можно найти

$p_1, p_2, ..., p_n$ — оптимальную смешанную стратегию игрока А.

Требуется обратить внимание на то, что матрица игры представлена в неравенствах в транспонированном виде.

Поведению игрока В соответствует двойственная задача линейного программирования:

$y_1 + y_2 + ... + y_n \to \max$

(эквивалентно $\gamma \to \min$ : игрок В стремится минимизировать свой средний проигрыш)

$a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + ... + a_{1n} y_n \leq 1,$

$a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{2n} y_n \leq 1,$

...

$a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + ... + a_{mn} y_n \leq 1,$

$y_i \geq 0,\ j = 1,..., m.$

Здесь $y_j = q_j / \gamma$ .

Если в исходной платежной матрице имеется хотя бы один неположительный элемент, то первым шагом в процедуре сведения игры к задаче линейного программирования должно быть ее преобразование к матрице, все элементы которой строго положительны. Для этого достаточно увеличить все элементы исходной матрицы на одно и то же число

$$d > \max_i \max_j \left| a_{ij} \right|, \; a_{ij} \le 0 .$$

При таком преобразовании матрицы оптимальные стратегии игроков не изменятся. Если исходная матрица увеличивалась на $d$, то для получения цены первоначальной игры, γ нужно уменьшить на $d$.

## *Литература*


1. Петровский А. Б. Теория принятия решений — М.: Издательский центр «Академия», 2009 .— 398, [1] с.: ил.
2. Таха Х. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2005. — 912 с.
3. Вентцель Е.С. Популярные лекции по математике. Элементы теории игр (Выпуск 32). — М.: Физматгиз, 1961. — 72 с.
4. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. — М.: Высшая школа, 1983. — 383 с.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

Методы сетевого планирования

## *Общие сведения*

## Цель работы

Научиться использовать метод сетевого планирования для решения задач управления проектами.

## План выполнения

1. Изучить теоретическую часть;
2. Получить задание преподавателя;
3. Выполнить задания 1 и 2: 3.1. Построить сетевой график; 3.2. Определить критический путь;
   3.3. Ответить на дополнительные вопросы к задаче; 3.4. Построить календарный план работ;
4. Составить отчёт по лабораторной работе. Отчёт должен иметь следующую структуру:
   4.1. Титульный лист, который должен содержать следующую информацию:
      4.1.1. Название университета и кафедры, ответственной за дисциплину;
      4.1.2. Заголовок — номер и название лабораторной работы;
      4.1.3. Подзаголовок — номер варианта и номера задач;
      4.1.4. ФИО и должности студента и преподавателя;
      4.1.5. «г. Санкт-Петербург, 2012 год»;
   4.2. Отчёт о решении заданиях 1 и 2, содержащий следующее информационное наполнение:
      4.2.1. Формулировка индивидуального задания;
      4.2.2. Сетевой график;
      4.2.3. Формулировка критического пути;
      4.2.4. Календарный план работ;
      4.2.5. При необходимости, снимки экрана монитора, содержащие основные моменты решения задачи;
      4.2.6. Ответы на вопросы задания;
      4.2.7. Результаты решения и выводы.

## *Теоретическая часть*

В лабораторной работе рассматриваются возможности использования сетевого планирования для контроля сроков выполнения проектов. Проектом может быть разработка нового продукта или производственного процесса; строительство предприятия, здания или сооружения; ремонт сложного оборудования и прочее. При реализации проекта составляется график выполнения работ. Для того, чтобы проект был завершен вовремя, необходимо контролировать сроки выполнения этих работ. Усложняющим фактором является то, что работы взаимосвязаны. Одни работы зависят от выполнения других и не могут начаться, пока предшествующие работы не будут завершены.

Основные этапы методов сетевого планирования отображает Рисунок 43. На первом этапе определяются отдельные процессы, составляющие проект, их отношения последовательности (т.е. какой процесс должен предшествовать другому) и длительность. Далее проект представляется в виде сети (сетевого графика), показывающей последовательность процессов, составляющих проект. На третьем этапе на основе построенной сети выполняются вычисления, в результате которых составляется временной график реализации проекта.

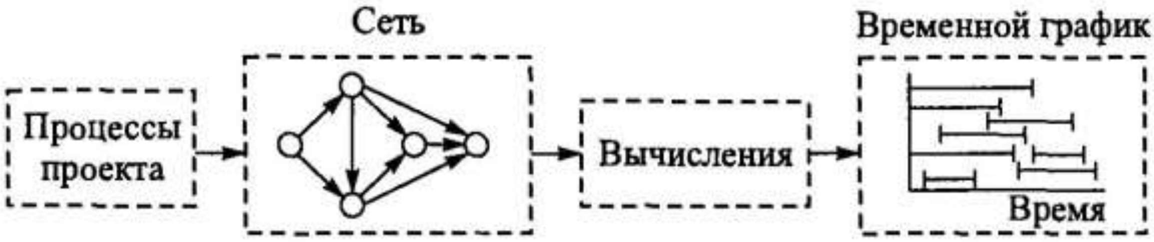



**Рисунок 43. Этапы сетевого планирования**

Построение сетевой модели начинается с разбиения проекта на четко определенные работы, для которых определяется продолжительность. Работа — это некоторый процесс, приводящий к достижению определенного результата, требующий затрат ресурсов и имеющий протяженность во времени.

Исходные данные для построения сетевой модели могут задаваться различными способами, например следующими:

— описанием предполагаемого проекта. В этом случае необходимо самостоятельно разбить его на отдельные работы и установить их взаимные связи;

— списком работ проекта. В этом случае необходимо проанализировать содержание работ и установить существующие между ними связи;
— списком работ проекта с указанием их упорядочения. В этом случае необходимо только отобразить работы на сетевом графике.

## Построение сетевого графика

Исходным шагом для применения методов сетевого планирования является описание проекта в виде перечня выполняемых работ с указанием их взаимосвязи. Для описания проекта используются два основных способа: табличный и графический. Рассмотрим следующую таблицу, описывающую проект.

| **Работа** | **Непосредственно предшествующая работа** | **Время выполнения** |
|---|---|---|
| A | - | $t_A$ |
| B | - | $t_B$ |
| C | B | $t_C$ |
| D | A, C | $t_D$ |

В первом столбце указаны наименования всех работ проекта. Их четыре: A, B, C, D. Во втором столбце указаны работы, непосредственно предшествующие данной. У работ A и B нет предшествующих. Работе C непосредственно предшествует работа B. Это означает, что работа C может быть начата только после того, как завершится работа B. Работе D непосредственно предшествуют две работы: A и C. Это означает, что работа D может быть начата только после того, как завершатся работы A и C. В третьем столбце таблицы для каждой работы указано время ее выполнения. На основе этой таблицы может быть построено следующее графическое описание проекта (см. Рисунок 44).

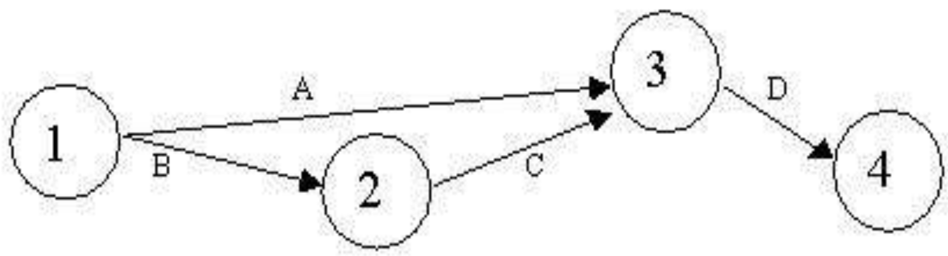



**Рисунок 44. Граф работ проекта — сетевой график**

На рисунке проект представлен в виде графа с вершинами 1, 2, 3, 4 и дугами A, B, C, D — **сетевого графика**. Каждая вершина графа отображает событие (момент времени, когда завершаются одни работы и начинаются другие). Событие 1 означает начало выполнения проекта. Иногда такое событие обозначают буквой S (start). Событие 4 означает завершение проекта. Для обозначения такого события иногда используется буква F (finish). Любая работа проекта — это упорядоченная пара двух **событий** (или **вех**). Например, работа A есть упорядоченная пара событий (1,3). Работа D — упорядоченная пара событий (3,4). Событие проекта состоит в том, что завершены все работы, «входящие» в соответствующую вершину. Например, событие 3 состоит в том, что завершены работы A и C.

Построение сети проекта основано на следующих правилах:

**Правило 1.** Каждая работа в проекте представляется одной и только одной дугой.

**Правило 2.** Каждая работа идентифицируется двумя концевыми узлами.

На рисунке ниже (см. Рисунок 45) показано, как с помощью введения фиктивной работы можно представить две параллельных работы A и B. По определению фиктивная работа (которая на сетевом графике обычно обозначается пунктирной дугой) не поглощает временных или других ресурсов. Вставив фиктивную работу одним из четырех способов (см. Рисунок 45), мы получаем возможность идентифицировать работы A и B по крайней мере одним уникальным концевым узлом (как требует правило 2).

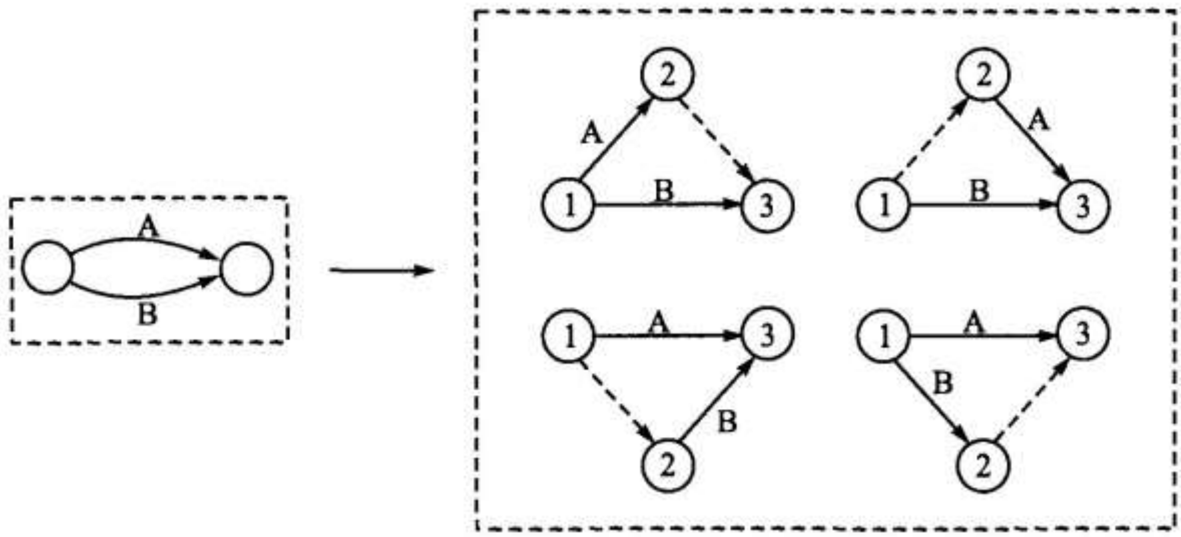



**Рисунок 45. Использование фиктивных работ**

**Правило 3.** Для поддержания правильных отношений предшествования при включении в сетевой график любой работы необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Какая работа непосредственно предшествует текущей?
2. Какая работа должна выполняться после завершения текущей работы?
3. Какая работа конкурирует (выполняется параллельно) с текущей?

Ответы на эти вопросы, возможно, потребуют включить в сеть фиктивные работы, чтобы правильно отобразить последовательность выполнения работ. Предположим, например, что четыре работы должны удовлетворять следующим условиям.

1. Работа С должна начаться сразу после завершения работ А и В.

2. Работа Е должна начаться непосредственно после завершения работы В.

Рисунок 46а показывает неправильное представление работ, так как из него следует, что работа Е должна начаться после завершения как работы В, так и А. Рисунок 46б показывает, как с помощью фиктивной работы D решить эту проблему.

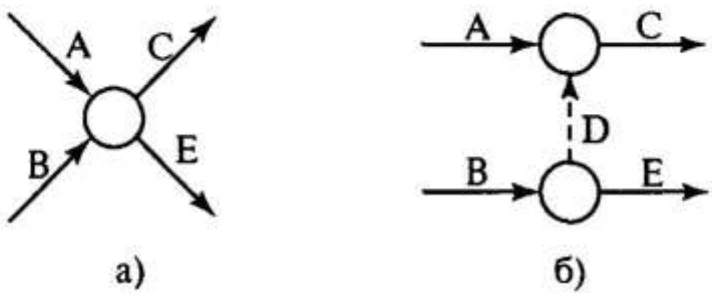



**Рисунок 46. Использование фиктивных работ, пример 2**

Фиктивная работа может реально существовать, например, «передача документов от одного отдела к другому». Если продолжительность такой работы несоизмеримо мала по сравнению с продолжительностью других работ проекта, то формально ее принимают равной нулю.

В сетевом графике не должно быть:

- корневых событий (т.е. не имеющих предшествующих событий), кроме исходного;
- терминальных событий (т.е. не имеющих последующих событий), кроме завершающего;
- циклов (см. Рисунок 47).

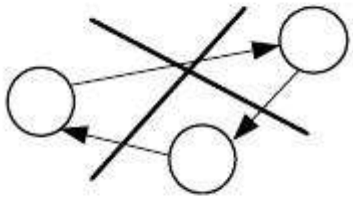


**Рисунок 47. Неправильный сетевой график работ**

## Определение критического пути

Будем предполагать, что время выполнения каждой работы точно известно. Введем следующие определения.

**Путь** — последовательность взаимосвязанных работ, ведущая из одной вершины проекта в другую вершину. Например (см. Рисунок 48), {A, D, G} и {C, F} – два различных пути.

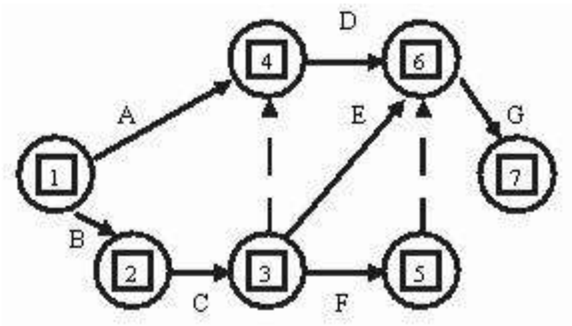



**Рисунок 48. Различные пути на сетевом графике**

**Длина пути** — суммарная продолжительность выполнения всех работ пути.

**Полный путь** — это путь от исходного к завершающему событию.

**Критический путь** — полный путь, суммарная продолжительность выполнения всех работ которого является наибольшей.

Очевидно, что минимальное время, необходимое для выполнения любого проекта равно длине критического пути. Именно на работы, принадлежащие критическому пути, следует обращать особое внимание. Если такая работа будет отложена на некоторое время, то время окончания проекта будет отложено на то же время. Если необходимо сократить время выполнения проекта, то в первую очередь нужно сократить время выполнения хотя бы одной работы на критическом пути.

Для того, чтобы найти критический путь, достаточно перебрать все пути и выбрать тот, или те из них, которые имеют наибольшую суммарную продолжительность выполнения работ. Однако для больших проектов реализация такого подхода связана с вычислительными трудностями.

Метод критического пути (метод CPM — Critical Path Method) позволяет получить критический путь намного проще.

Расчет сетевой модели начинают с временных параметров событий, которые вписывают непосредственно в вершины сетевого графика (Рисунок 49):

- $T_p(i)$ – ранний срок наступления события i, минимально необходимый для выполнения всех работ, которые предшествуют событию i;
- – поздний срок наступления события i, превышение которого $_n(i)$ вызовет аналогичную задержку наступления завершающего события сети;
- $R(i) = T_n(i) - T_p(i)$ – резерв события i, т.е. время, на которое может быть отсрочено наступление события i без нарушения сроков завершения.

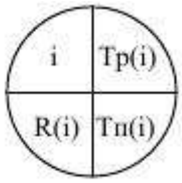



**Рисунок 49. Параметры событий**

Ранние сроки наступления событий рассчитываются от исходного (S) к завершающему (F) событию следующим образом:

1. для исходного события S: $T_p(S) = 0$;
2. для всех остальных событий i: $T_p(i) = \max\limits_{\forall(k,i)}\left[T_p(k) + t(k, i)\right]$,

где максимум берется по всем работам (k,i), входящим в событие i; $t(k, i)$ — длительность работы (k,i) (см. Рисунок 50).

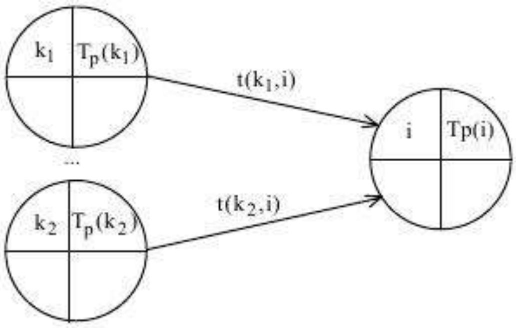



**Рисунок 50. Ранние сроки наступления событий**

Поздние сроки наступления событий $T_n(i)$ рассчитываются от завершающего к исходному событию:

1. для завершающего события F: $T_p(F) = T_n(F)$;

2. для всех остальных событий i: $T_n(i) = \min\limits_{\forall(j,i)} \left[T_n(j) - t(i,j)\right]$,

где минимум берется по всем работам (i,j), выходящим из события i; $t(i, j)$ — длительность работы (i,j) (см. Рисунок 51).

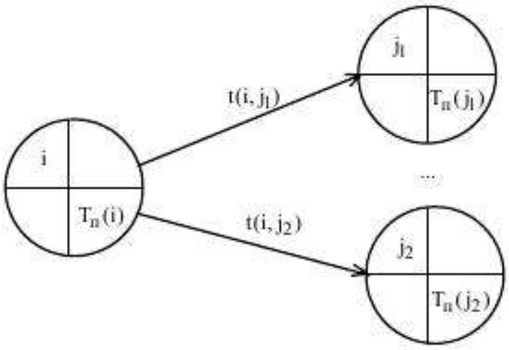



**Рисунок 51. Поздние сроки наступления событий**

Условия критичности пути:

— необходимое условие: нулевые резервы событий, лежащих на критическом пути $R(i) = 0$ ;

— достаточное условие: нулевые полные резервы работ, лежащих на критическом пути $R_n(i, j) = 0$ . $R_n(i, j) = T_n(j) - T_p(i) - t(i, j)$ — показывает максимальное время, на которое можно увеличить длительность работы (i,j) или отсрочить ее начало, чтобы не нарушился срок завершения проекта в целом.

**Пример**

Рассмотрим пример. Компания разрабатывает строительный проект. Исходные данные по основным операциям проекта представлены в таблице. Нужно построить сетевую модель проекта, определить критические пути и проанализировать, как влияет на ход выполнения проекта задержка работы D на 4 недели.

| Работа | Непосредственно предшествующая работа | Длительность, недели |
|---|---|---|
| A | - | 4 |
| B | - | 6 |
| C | A, B | 7 |
| D | B | 3 |
| E | C | 4 |
| F | D | 5 |
| G | E, F | 3 |

Сетевой график проекта показан на рисунке ниже (см. Рисунок 52).

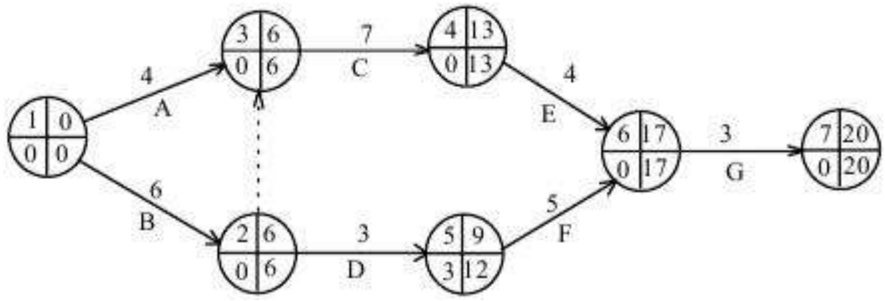



**Рисунок 52. Пример. Сетевой график проекта**

Согласно необходимому условию два полных пути сетевой модели (см. Рисунок 52) $L_1$ =1,2,3,4,6,7 и $L_2$ =1,3,4,6,7 могут быть критическими. Проверим достаточное условие критичности для работ (1,2) и (1,3)

$$R_n(1,2) = T_n(2) - T_p(1) - t(1,2) = 6 - 0 - 6 = 0\ ,$$

$$R_n(1,3) = T_n(3) - T_p(1) - t(1,3) = 0 = 6 - 0 - 4 = 2\ .$$

Путь $L_2$ , начинающийся с работы (1,3) не является критическим, т.к. поскольку как минимум одна из его работ не является критической. Работа (1,3) имеет ненулевой полный резерв, а значит может быть задержана с выполнением, что недопустимо для критических работ.

Таким образом, сетевая модель имеет единственный критический путь $L_{êð}$ = 1,2,3,4,6,7 длительностью 20 недель. За выполнением работ этого пути необходим особый контроль, т.к. любое увеличение их длительности нарушит срок выполнения проекта в целом.

Работа D или (2,5) не является критической, ее полный резерв равен 3-м неделям. Это означает, что при задержке работы в пределах 3-х недель срок выполнения проекта не будет нарушен. Поэтому если согласно условию работа D задержится на 4 недели, то весь проект закончится на 1 неделю позже.

## Построение календарного плана

Пусть сетевой график построен и критический путь на нем определен. Результаты решения задачи планирования теперь необходимо отобразить в виде календарного плана. В таблице ниже приведены данные о кодах и длительностях работ в днях из рассмотренного выше примера.

| (i,j) | 1,2 | 1,3 | 2,5 | 3,4 | 4,6 | 5,6 | 6,7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t(i,j), дни | 6 | 4 | 3 | 7 | 4 | 5 | 3 |

К критическому пути относятся работы (1,2), (3,4), (4,6) и (6,7) (фиктивной работой (2,3) на плане пренебрегаем). Их на календарном плане выделяют сплошной линией. Работы (1,3), (2,5), (5,6), не относящиеся к критическому пути, рисуют пунктиром.

Календарный план, построенный на основании входных данных, показывает Рисунок 53.

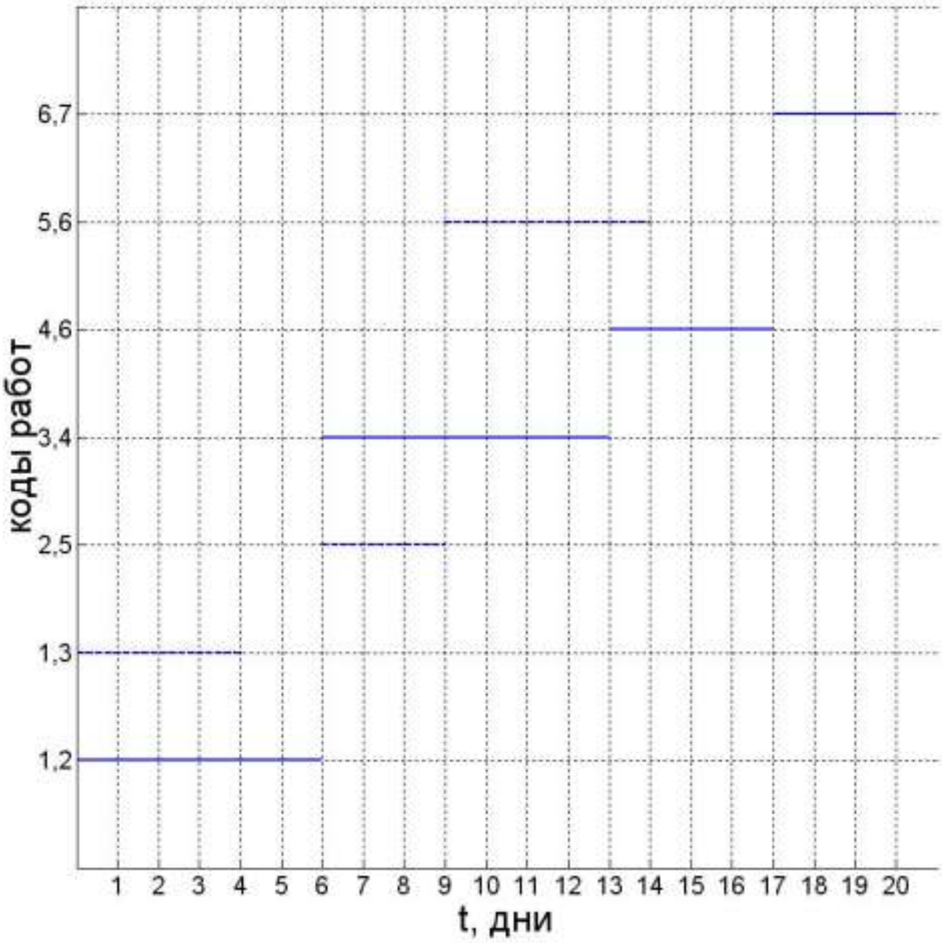



**Рисунок 53. Календарный план проекта**

## *Литература*


1. Алексинская Т. В. Учебное пособие по решению задач по курсу экономико-математические методы и модели. — Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. — 153 с.
2. Таха Х. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2005. — 912 с.
3. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. — М.: Юнити, 1997. — 587 с.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Методы анализа временных рядов

## *Общие сведения*

## Цель работы

Приобрести навыки прогнозирования значений временного ряда, в частности, выделения устойчивых тенденции и учета сезонной составляющей, а также навыки использования средств Пакет Анализа и Поиск решения, входящих в MS Excel.

## План выполнения

1. Изучить теоретическую часть;
2. Получить задание преподавателя;
3. Выполнить задания 1 и 2:
   3.1. Построить график значений временного ряда; 3.2. Построить графики прогнозируемых значений (для каждого из полученных прогнозов); 3.3. Вычислить среднее абсолютных отклонений или среднее относительных ошибок; 3.4. Ответить на вопросы задачи;
4. Составить отчёт по лабораторной работе. Отчёт должен иметь следующую структуру:
   4.1. <u>Титульный лист</u>, который должен содержать следующую информацию:
      4.1.1. Название университета и кафедры, ответственной за дисциплину;
      4.1.2. Заголовок — номер и название лабораторной работы;
      4.1.3. Подзаголовок — номер варианта и номера задач;
      4.1.4. ФИО и должности студента и преподавателя;
      4.1.5. «г. Санкт-Петербург, 2012 год»;
   4.2. <u>Отчёт о решении заданиях 1 и 2</u>, содержащий следующее информационное наполнение:
      4.2.1. Формулировка индивидуального задания;
      4.2.2. Графики значений временного ряда и прогноза;
      4.2.3. При необходимости, снимки экрана монитора, содержащие основные моменты решения задачи;
      4.2.4. Ответы на вопросы задания;
      4.2.5. Результаты решения и выводы.

***Теоретическая часть***

## Общие сведения

*Временным рядом* называется последовательность значений некоторого показателя во времени (например, объемов продаж, см. Рисунок 54).

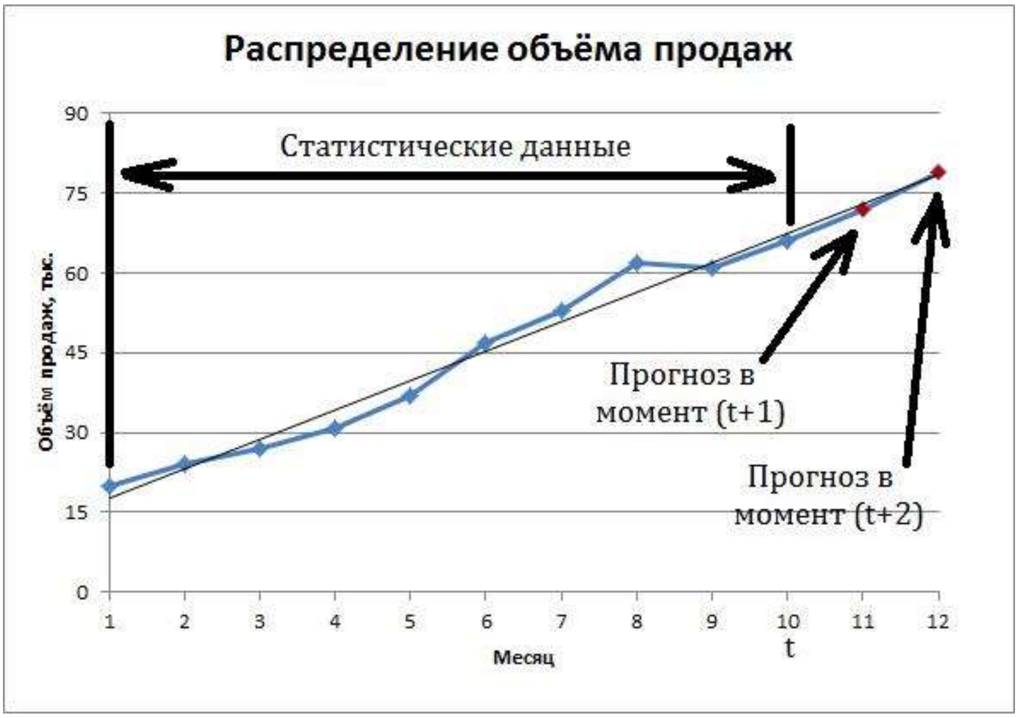



**Рисунок 54. Временный ряд объёма продаж**

Анализ временных рядов является способом выявления тенденций прошлого и продления их в будущее. Методы анализа временных рядов осуществляют прогноз путем экстраполяции значений отдельной переменной на основе статистических данных за прошлый временной период. *Основное допущение*, которое при этом делается, заключается в том, что происшедшее в прошлом дает хорошее приближение в оценке будущего.

Развитие процессов, реально наблюдаемых в жизни, складывается из некоторой *устойчивой тенденции* и некоторой *случайной составляющей*, выражающейся в колебании значений показателя вокруг тренда. Рисунок 55 показывает, как могут зависеть объемы продаж одного и того же товара на двух стадиях его жизненного цикла (в начале и в конце продаж).

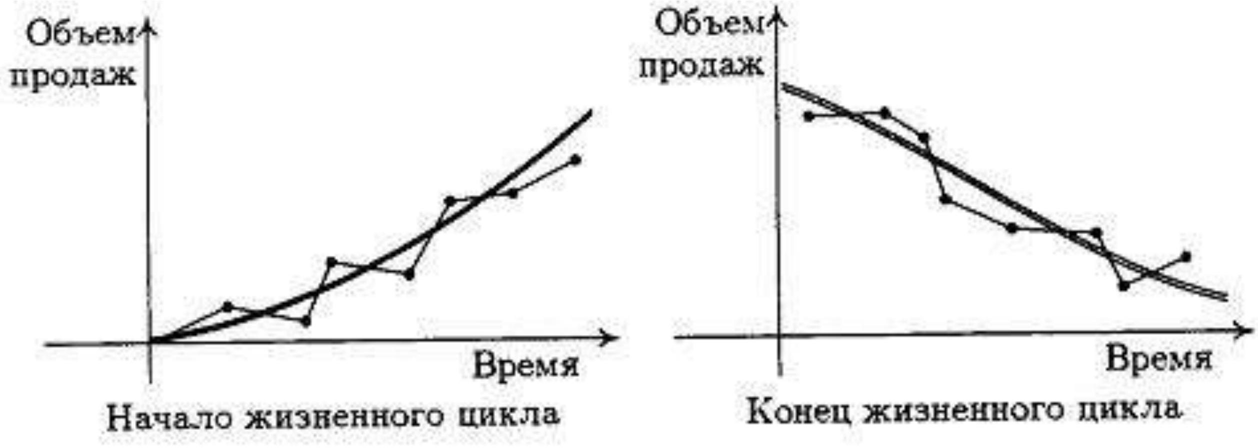



**Рисунок 55. Зависимость объёма продаж от стадии жизненного цикла продукта**

Кривые тренда сглаживают временной ряд значений показателя, выделяя общую тенденцию. Именно выбор кривой тенденции во многом определяет результаты прогнозирования.

В большинстве случаев временной ряд, кроме тенденции и случайных отклонений от него, характеризуется еще *сезонной составляющей*. Сезонная составляющая — это периодические изменения показателя. Обычная продолжительность сезонной составляющей измеряется днями, неделями или месяцами.

## Методы без сезонной составляющей

Вначале рассмотрим несколько простейших методов прогнозирования, не учитывающих наличия сезонности во временном ряде. Предположим, что в журнале РБК приведена сводка за последние 12 дней (включая сегодняшний) цен на апельсины, сложившихся на момент закрытия биржи. Используя эти данные, нужно предсказать завтрашнюю цену на какао (также на момент закрытия биржи). Рассмотрим несколько способов сделать это.

1. Если последнее (сегодняшнее) значение наиболее значимо по сравнению с остальными, то оно является наилучшим прогнозом на завтра.
2. Возможно, из-за быстрого изменения цен на бирже первые шесть значений уже устарели и не актуальны, в то время как последние шесть значимы и имеют равную ценность для прогноза. Тогда в качестве прогноза на завтра можно взять среднее последних шести значений.

3. Если все значения существенны, но сегодняшнее 12-е значение наиболее значимо, а предыдущие 11-е, 10-е, 9-е и т.д. имеют все меньшую и меньшую значимость, следует найти взвешенное среднее всех 12 значений. Причем весовые коэффициенты для последних значений должны быть больше, чем для предыдущих, и сумма всех весовых коэффициентов должна равняться 1.

Первый способ называется «наивным» прогнозом и достаточно очевиден. Рассмотрим подробнее остальные способы.

**Метод скользящего среднего**

Одним из предположений, лежащих в основе данного метода, является то, что более точный прогноз на будущее можно получить, если использовались недавние наблюдения, причем, чем «новее» данные, тем их вес для прогноза должен быть больше. Удивительно, но такой «наивный» подход оказывается чрезвычайно полезным для практики. Например, многие авиакомпании используют частный тип скользящего среднего для создания прогнозов спроса на авиаперелеты, которые, в свою очередь, используются в сложных механизмах управления и оптимизации доходов. Более того, практически все программные пакеты управления запасами содержат модули, выполняющие прогнозы на основе того или иного типа скользящего среднего.

Рассмотрим следующий пример. Маркетологу нужно спрогнозировать спрос на производимые его компанией станки. Данные по объемам продаж за последний год работы компании находятся в файле «ЛР6.Пример 1.Станки.xls».

**Простое скользящее среднее**. В этом методе среднее фиксированного числа N последних наблюдений используется для оценки следующего значения временно ряда. Например, используя данные о продажах станков за первые три месяца года, менеджер получает для апреля значение, используя формулу, приведённую ниже:

$$\hat{x}_4 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{20 + 24 + 27}{3} \approx 23{,}67 \qquad (1).$$

В случае произвольного числа N узлов расчетная формула обобщается следующим образом:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{k-i} \qquad (2).$$

Менеджер вычислил объем продаж на основе простого скользящего среднего за 3 и 4 месяца. Однако требуется определить, какое количество узлов даёт более точный прогноз. Для оценки точности прогнозов используются *среднее абсолютных отклонений* (САО) и *среднее относительных ошибок*, в процентах (СООП), вычисляемые по формулам (3) и (4).

$$САО = \frac{\Sigma| - '|}{} \qquad (3),$$

$$СООП = \frac{\Sigma \frac{| - ^{\prime}|}{} * 100\%}{} \qquad (4).$$

где $x_i$ – $i$-ое реальное значение переменной в $i$-й момент времени, а $x'_i$ – $i$-ое спрогнозированное значение переменной в $i$-й момент времени, N — количество прогнозов.

Согласно результатам, полученным на листе «Простое ск. среднее» рабочей книги «ЛР6.Пример 1.Станки.xls» (см. Рисунок 56), скользящее среднее за три месяца имеет значение САО равное 12,67 (*ячейка D16*), тогда как для скользящего среднего за 4 месяца значение САО равно 15,59 (*ячейка F16*). Тогда можно выдвинуть гипотезу, что использование большего количества статистических данных скорее ухудшает, чем улучшает точность прогноза методом скользящего среднего.

| Месяц | Объемы продаж, тыс. | Прогноз на основе ск. среднего за 3 месяца | Абсолютная ошибка | Прогноз на основе ск. среднего за 4 месяца | Абсолютная ошибка |
|---|---|---|---|---|---|
| Январь | 20 | - | - | - | - |
| Февраль | 24 | - | - | - | - |
| Март | 27 | - | - | - | - |
| Апрель | 31 | 23,67 | 7,33 | - | - |
| Май | 37 | 27,33 | 9,67 | 25,50 | 11,50 |
| Июнь | 47 | 31,67 | 15,33 | 29,75 | 17,25 |
| Июль | 53 | 38,33 | 14,67 | 35,50 | 17,50 |
| Август | 62 | 45,67 | 16,33 | 42,00 | 20,00 |
| Сентябрь | 54 | 54,00 | 0,00 | 49,75 | 4,25 |
| Октябрь | 36 | 56,33 | 20,33 | 54,00 | 18,00 |
| Ноябрь | 32 | 50,67 | 18,67 | 51,25 | 19,25 |
| Декабрь | 29 | 40,67 | 11,67 | 46,00 | 17,00 |
| | | | | | |
| | | Сумма: | 114,00 | Сумма: | 124,75 |
| | | САО: | 12,67 | САО: | 15,59 |

**Рисунок 56. Пример 1 – результаты прогнозирования методом простого скользящего среднего**

На графике (см. Рисунок 57), построенном по результатам наблюдений и прогнозов с интервалом 3 месяца, можно заметить ряд особенностей, общих для всех применений метода скользящего среднего.

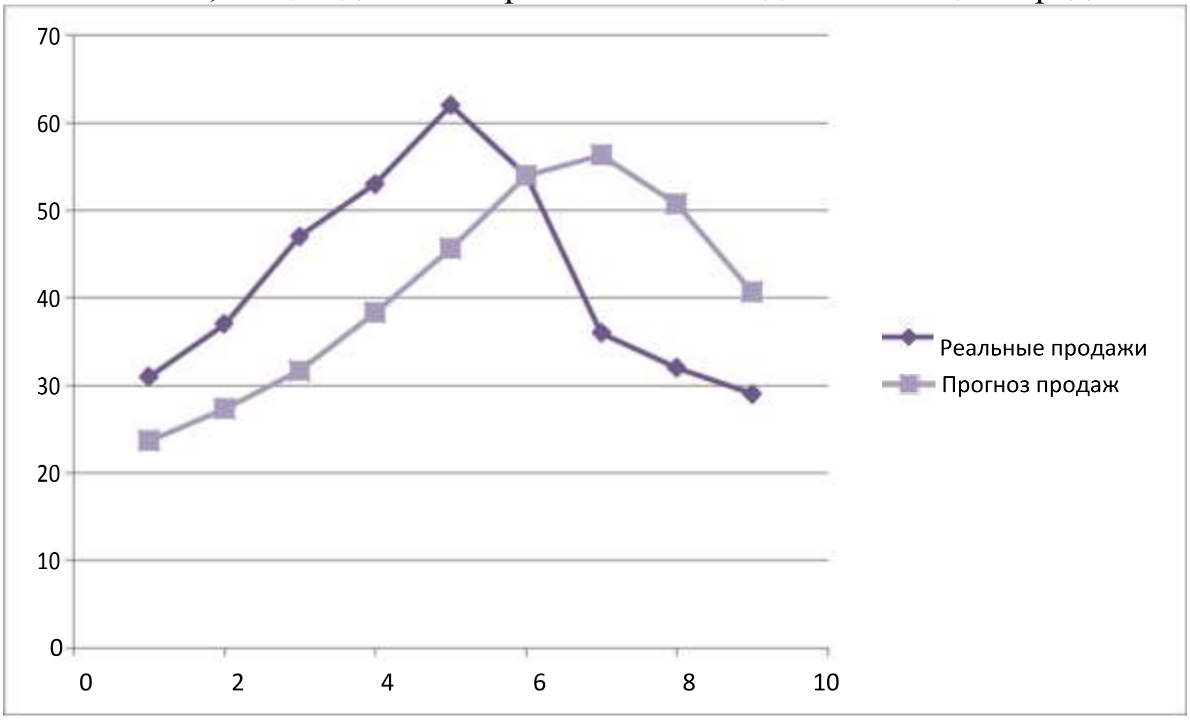



**Рисунок 57. Пример 1 – график кривой прогноза методом простого скользящего среднего и график реального объёма продаж**

Значение прогноза, полученное методом простого скользящего среднего, всегда меньше фактического значения, если исходные данные монотонно возрастают, и больше фактического значения, если исходные данные монотонно убывают. Поэтому, если данные монотонно возрастают или убывают, то с помощью простого скользящего среднего нельзя получить точных прогнозов. Этот метод лучше всего подходит для данных с небольшими случайными отклонениями от некоторого постоянного или медленно меняющегося значения.

Основной недостаток метода простого скользящего среднего возникает в результате того, что при вычислении прогнозируемого значения самое последнее наблюдение имеет такой же вес (т. е. значимость), как и предыдущие. Это происходит потому, что вес всех N последних наблюдений, участвующих в вычислении скользящего среднего, равен 1/N. Присвоение равного веса противоречит интуитивному представлению о том, что во многих случаях последние данные могут больше сказать о том, что произойдет в ближайшем будущем, чем предыдущие.

**Взвешенное скользящее среднее**. Вклад различных моментов времени можно учесть, вводя вес для каждого значения показателя в скользящем интервале. В результате получается метод взвешенного скользящего среднего, который математически можно записать так:

$$\frac{\sum \quad ( \quad * \quad )}{\sum} \qquad (4).$$

где $w_{k-i}$ — вес, с которым используется показатель $x_{k-i}$ при расчете.

Вес — это всегда положительное число. В случае, когда все веса одинаковы, вырождается метод простого скользящего среднего.

Теперь маркетолог может использовать метод взвешенного скользящего среднего за 3 месяца. Но прежде требуется понять, как выбрать веса. Используя средство Поиск решения, можно определить оптимальный вес узлов. Чтобы определить вес узлов с помощью средства Поиск решения, при котором значение среднего абсолютных отклонений было бы минимально, выполните следующие действия:

1. Выберите команду Сервис -> Поиск решения.
2. В диалоговом окне Поиска решения установите ячейку G16 целевой (см. лист «Веса»), минимизируя её.
3. Изменяемыми ячейками укажите диапазон B1:B3.
4. Установите ограничения B4 = 1,0; B1:B3 ≥ 0; B1:B3 ≤ 1; B1 ≤ B2 и B2 ≤ B3.
5. Запустите поиск решения (результат отображает).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *альфа 2 =* | 0,000 | | Месяц | Объемы продаж, тыс. | Прогноз на основе ск. среднего за 3 месяца | Абсолютная ошибка |
| 2 | *альфа 1 =* | 0,000 | | Январь | 20 | - | - |
| 3 | *альфа 0 =* | 1,000 | | Февраль | 24 | - | - |
| 4 | *Сумма весов =* | 1,00 | | Март | 27 | - | - |
| 5 | | | | Апрель | 31 | 27,00 | 4,00 |
| 6 | | | | Май | 37 | 31,00 | 6,00 |
| 7 | | | | Июнь | 47 | 37,00 | 10,00 |
| 8 | | | | Июль | 53 | 47,00 | 6,00 |
| 9 | | | | Август | 62 | 53,00 | 9,00 |
| 10 | | | | Сентябрь | 54 | 62,00 | 8,00 |
| 11 | | | | Октябрь | 36 | 54,00 | 18,00 |
| 12 | | | | Ноябрь | 32 | 36,00 | 4,00 |
| 13 | | | | Декабрь | 29 | 32,00 | 3,00 |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | | | | | | Сумма = | 68,00 |
| 16 | | | | | | САО = | 7,56 |

**Рисунок 58. Пример 1 – результат поиска весов значений показателей при использовании метода взвешенного скользящего среднего**

Полученные результаты показывают, что оптимальное распределение весов таково, что весь вес сосредоточен на самом последнем наблюдении, при этом значение среднего абсолютных отклонений равно 7,56 (см. также Рисунок 59). Этот результат подтверждает предположение о том, что более поздние наблюдения должны иметь больший вес.

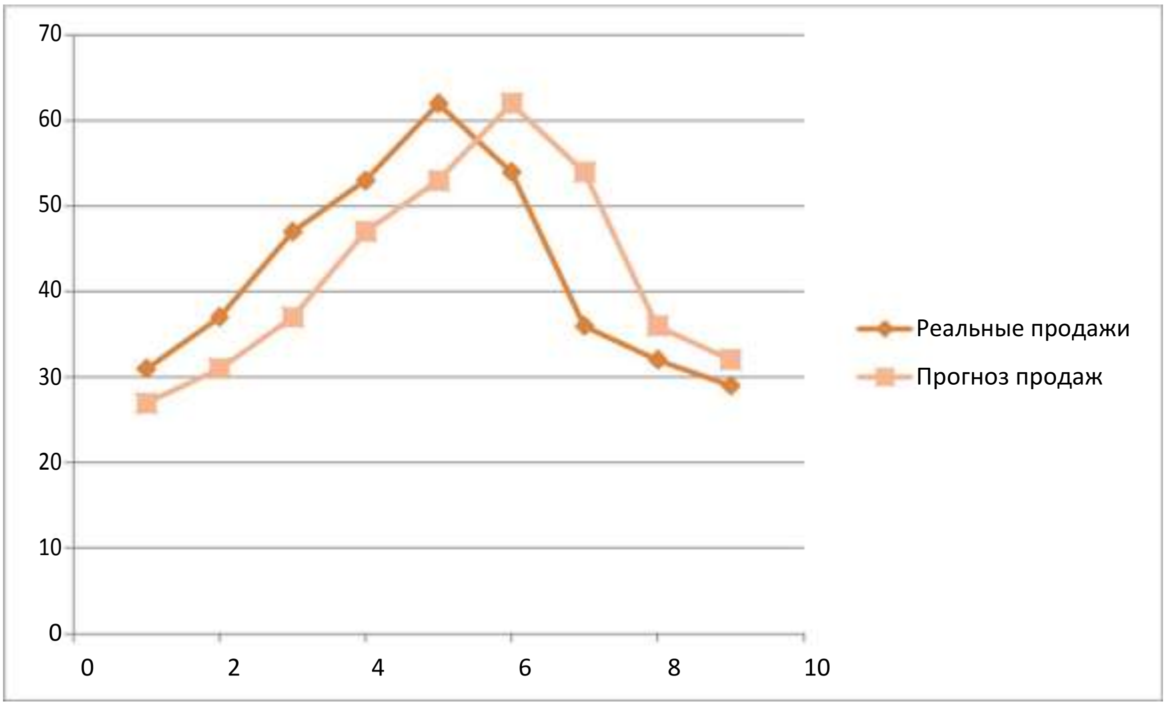



**Рисунок 59. Пример 1 – график кривой прогноза методом взвешенного скользящего среднего и график реального объёма продаж**

## Метод экспоненциального сглаживания

Прогнозы в методах скользящего среднего зависят от предыдущих значений показателя временного ряда, но не от качества предыдущих прогнозов. Рассмотрим один из методов прогнозирования, который учитывает отклонение предыдущего прогноза от реального значения показателя ряда.

Очевидно, что в методе взвешенного скользящего среднего существует множество способов задавать значения весов так, чтобы их сумма была равной 1,и экспоненциальное сглаживание – один из таких способов. В этой схеме метода взвешенного среднего для любого t > 1 прогнозируемое значение $\hat{x}_{t+1}$ в момент времени (t+1) представляет собой взвешенную сумму фактического объема продаж $x_t$ , за период времени t и прогнозируемого объема продаж $\hat{x}_t$ , за период времени t (см. формулу (5)).

$$\hat{}_{+1} = \propto \; + (1-\propto)\hat{} \qquad (5).$$

Экспоненциальное сглаживание имеет вычислительные преимущества перед скользящим средним. Здесь, чтобы вычислить $\hat{x}_{t+1}$ , необходимо знать только значения $x_t$ и $\hat{x}_t$ , (а также значение α), вместо значений показателя ряда во всех узлах, по которым происходит сглаживание. Сохраняя значение α и последний прогноз, мы также неявно сохраняем и все предыдущие прогнозы.

Рассмотрим некоторые свойства модели экспоненциального сглаживания. Для начала заметим, что если t > 2, то в формуле (5) t можно заменить на t–1, т.е.:

$$\hat{} = \propto \ _{-1} + (1-\propto)\hat{} \ _{-1} \qquad (6).$$

Подставив формулу (6) в первоначальную формулу (5), получим:

$$\hat{} _{+1} = \propto \ + \propto (1-\propto) _{-1} + (1-\propto)^2 \hat{} _{-1} \qquad (7).$$

Выполняя последовательно аналогичные подстановки, получим следующее выражение для $\hat{x}_{t+1}$:

$$\hat{} _{-1} = \propto \ + \propto (1-\propto) _{-1} + \propto (1-\propto)^2 _{-2} + \cdots + \propto (1-\propto)^{-1} _1 + (1-\propto)\hat{} _1 \qquad (8).$$

Поскольку из неравенства 0 < α < 1 следует, что 0 < 1 – α < 1, то α>α(1-α)>α(1-α)$^2$… Другими словами, наблюдение $x_t$, имеет больший вес, чем наблюдение $x_{t-1}$, которое, в свою очередь, имеет больший вес, чем $x_{t-2}$. Это иллюстрирует основное свойство модели экспоненциального сглаживания — коэффициенты при $x_k$ убывают при уменьшении номера k. Также можно показать, что сумма всех коэффициентов (включая коэффициент при $x_1$), равна 1.

Из приведенной формулы видно также, что значение $\hat{x}_{t+1}$ является взвешенной суммой всех предыдущих наблюдений (включая последнее наблюдение $x_t$). Последнее слагаемое этой суммы является не статистическим наблюдением, а «предположением» $\hat{x}_1$ (можно предположить, например, что $\hat{x}_1 = x_1$). Очевидно, что с ростом t влияние $\hat{x}_1$, на прогноз уменьшается, и в определенный момент им можно будет пренебречь. Даже если значение α достаточно малое (такое, что (1 – α) приблизительно равно 1), значение $(1 - \alpha)^t$ будет быстро убывать.

Значение параметра α сильно влияет на функционирование модели прогнозирования, поскольку α представляет собой вес самого последнего наблюдения $x_t$. Это значит, что следует назначать большее значение α в том случае, когда в модели наиболее прогностическим является именно последнее наблюдение. Если же α близко к 0, это означает практически полное доверие к прошлому прогнозу и игнорирование последнего наблюдения.

Перед маркетологом возникает проблема: как наилучшим образом подобрать значение α? В этом поможет средство Поиск решения. Чтобы найти оптимальное значение α (т.е. такое, при котором прогнозная кривая будет менее всего отклоняться от кривой значений временного ряда), выполните следующие действия.

1. Выберите команду Сервис -> Поиск решения.
2. В диалоговом окне Поиск решения установите целевую ячейку G16 (см. лист «Экспо»), минимизируя значение.
3. Укажите изменяемой ячейкой ячейку B1.
4. Установите ограничения B1 > 0 и B1 < 1
5. Запустите расчёт (см. результат, Рисунок 60).

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *альфа =* | 1,000 | | **Месяц** | **Объемы продаж, тыс.** | **Прогноз** | **Абсолютная ошибка** |
| 2 | | | | Январь | 20 | 20,00 | - |
| 3 | | | | Февраль | 24 | 20,00 | 4,00 |
| 4 | | | | Март | 27 | 24,00 | 3,00 |
| 5 | | | | Апрель | 31 | 27,00 | 4,00 |
| 6 | | | | Май | 37 | 31,00 | 6,00 |
| 7 | | | | Июнь | 47 | 37,00 | 10,00 |
| 8 | | | | Июль | 53 | 47,00 | 6,00 |
| 9 | | | | Август | 62 | 53,00 | 9,00 |
| 10 | | | | Сентябрь | 54 | 62,00 | 8,00 |
| 11 | | | | Октябрь | 36 | 54,00 | 18,00 |
| 12 | | | | Ноябрь | 32 | 36,00 | 4,00 |
| 13 | | | | Декабрь | 29 | 32,00 | 3,00 |
| 14 | | | | | | | |
| 15 | | | | | | Сумма = | 75,00 |
| 16 | | | | | | САО = | 6,82 |

**Рисунок 60. Пример 1 – результат использования метода экспоненциального сглаживания**

Опять, как и в методе взвешенного скользящего среднего, наилучший прогноз будет получен, если назначить весь вес последнему наблюдению (см. Рисунок 61). Следовательно, оптимальное значение α равно 1, при этом среднее абсолютных отклонений равно 6,82 (ячейка G16).

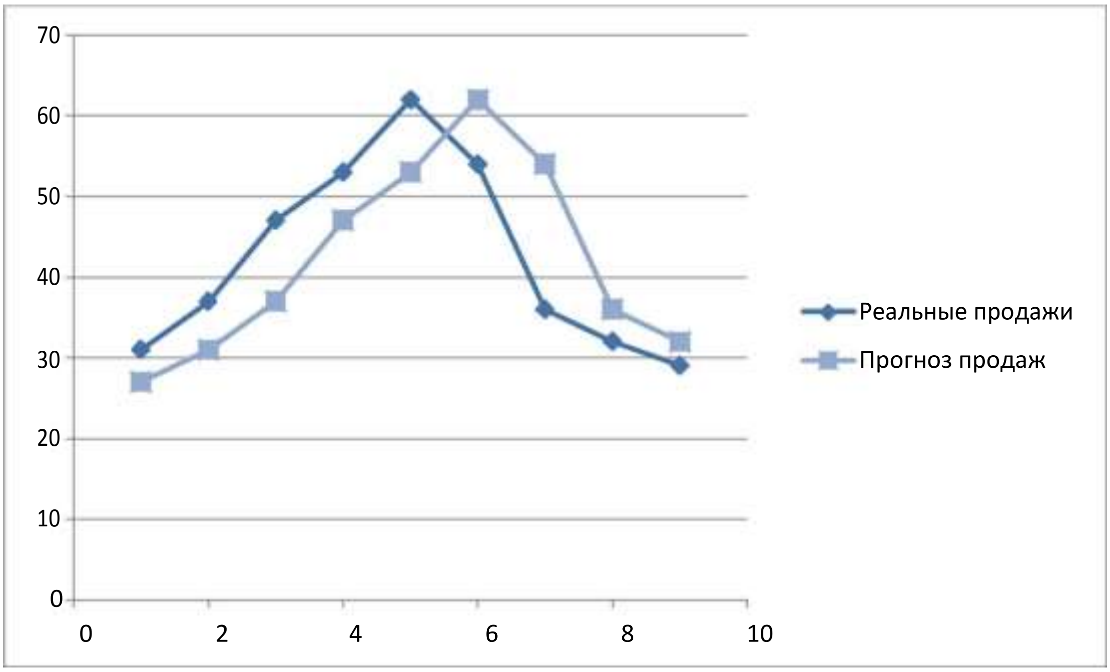



**Рисунок 61. Пример 1 – график кривой прогноза методом взвешенного скользящего среднего и график реального объёма продаж**

Метод экспоненциального сглаживания хорошо работает в ситуациях, когда переменная имеет стационарный характер, а ее отклонения от постоянного значения вызваны случайными факторами и не носят регулярного характера. Но этим методом, как и методами скользящего среднего не удастся спрогнозировать монотонно возрастающие или монотонно убывающие данные. Прогнозируемы значения будут всегда меньше или больше наблюдаемых, соответственно, а точность данных будет сравнима с точностью «наивного прогноза». Эти методы также не учитывают сезонных изменений показателя ряда.

Если статистические данные монотонно изменяются или подвержены сезонным изменениям, необходимы специальные методы прогнозирования, которые будут рассмотрены ниже.

## Подбор кривой тренда

В качестве примера, воспользуемся данными объемов продаж из файла «ЛР6.Пример 2.Продажи.xls». Вначале построим точечную диаграмму, отображающие реальные объемы продаж. Чтобы построить по этим данным линию тренда, отражающую тенденцию в изменении объемов продаж, надо выполнить такие действия.

1. Выберите любую точку выбранного ряда данных. В результате будут выделены все точки ряда.
2. Вызовите через контекстное меню функцию «Добавить линию тренда».
3. В диалоговом окне Линия тренда по умолчанию будет выбран линейный тип функции.
4. Нажмите «Ок».

После этого на графике появится прямая линия тренда (см. Рисунок 62).

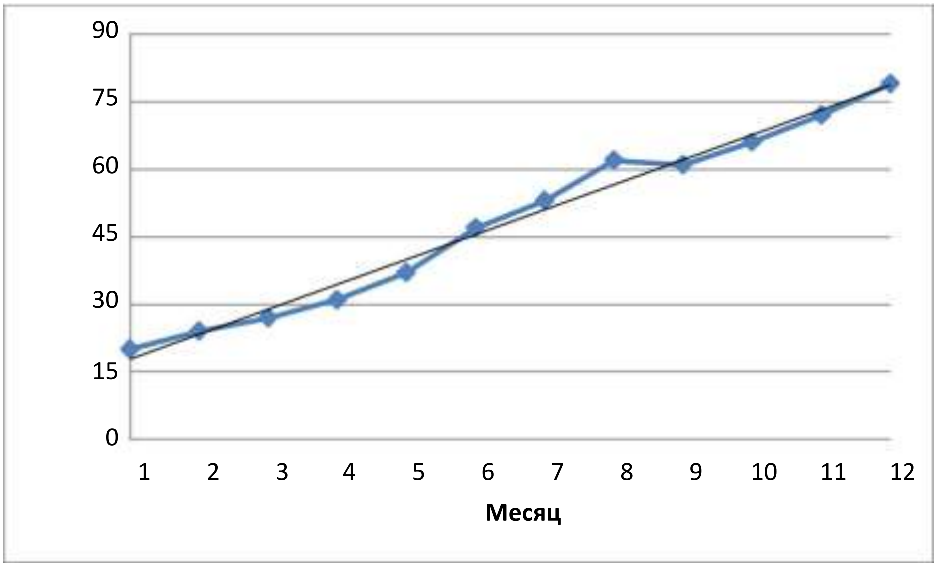



**Рисунок 62. Пример 2 – линия тренда на графике Excel**

Для того чтобы осуществить прогноз, нужно в диалоговом окне Линия тренда отметить интересующий интервал времени в пункте «вперед на» (или «назад на»).

В меню Линия тренда можно также задать параметры подбираемой кривой. Например, он может быть экспоненциальной или полиномом заданной степени.

В рассматриваемом случае кривой тренда является прямая линия с уравнением $y = ax + b$. Коэффициенты $a$ и $b$ для этой кривой можно также найти с помощью надстройки Пакет Анализа, выбрав средство Регрессия.

## Метод Хольта

Метод Хольта представляет собой развитие метода экспоненциального сглаживания, с учетом наличия тренда. Формулировка метода имеет вид

$\hat{}\ {}_{+} = +$ (8),

где

$=\propto\ + (1-\propto)(\ {}_{-1} + \ {}_{-1})$ (9),

$= \ (\ - \ {}_{-1}) + (1 - \ )\ {}_{-1}$ (10).

Метод Хольта позволяет прогнозировать на $k$ периодов времени вперед. Метод, как видно, использует два параметра $\alpha$ и $\beta$, значения которых находятся в пределах от 0 до 1. Переменная $L$, указывает на долгосрочный уровень значений или базовое значение данных временного ряда. Переменная $T$ указывает на возможное возрастание или убывание значений за один период, т.е. на присутствие тренда.

Рассмотрим работу этого метода на следующем примере. Светлана работает аналитиком в большой брокерской фирме. На основе имеющихся у нее квартальных отчетов компании RusWind Airlines она хочет спрогнозировать доход этой компании в следующем квартале. Имеющиеся данные и диаграмма, построенная на их основе, находятся в файле «ЛР6.Пример 3.RusWindAirlines.xls» (см. Рисунок 63).

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Квартал | Прибыль на 1 акцию |
| 2 | 1 | -6,00р. |
| 3 | 2 | 3,00р. |
| 4 | 3 | 1,50р. |
| 5 | 4 | 4,50р. |
| 6 | 5 | 6,60р. |
| 7 | 6 | 10,50р. |
| 8 | 7 | 11,10р. |
| 9 | 8 | 12,60р. |
| 10 | 9 | 11,10р. |
| 11 | 10 | 15,90р. |
| 12 | 11 | 17,70р. |
| 13 | 12 | 19,50р. |


**Рисунок 63. Пример 3 - данные о доходе авиакомпании RusWind**

Видно, что данные имеют явный тренд (почти монотонно возрастают). Светлана хочет применить метод Хольта, чтобы спрогнозировать значение прибыли на одну акцию на тринадцатый квартал. Для этого необходимо задать начальные значения для $L$ и $T$. Есть несколько вариантов выбора:

1. L равно значению прибыли на одну акцию за первый квартал и $T = 0$;

2. L равно среднему значению прибыли на одну акцию за 12 кварталов и *T* равно среднему изменению за все 12 кварталов.

Существуют и другие варианты начальных значений для *L* и *T*, но Светлана выбрала первый вариант.

Она решила воспользоваться средством Поиск решения, чтобы найти оптимальное значение параметров $\alpha$ и $\beta$, при которых значение среднего абсолютных ошибок в процентах было бы минимально. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Выбрать команду Сервис -> Поиск решения.
2. В диалоговом окне Поиск решения задать ячейку F18 целевой, минимизируя её.
3. Выбрать диапазон ячеек B1:B2 изменяемыми.
4. Добавить ограничения B1:B2 > 0 и B1:B2 < 1.
5. Выполнить поиск.

Полученный прогноз показан отображают Рисунок 64, Рисунок 65, Рисунок 66. Как видно, оптимальными оказались значения α = 0,59 и β = 0,42, при этом среднее абсолютных ошибок в процентах равно около 38%.

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *alpha =* | 0,59 | | | | |
| 2 | *beta =* | 0,42 | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | **Квартал** | **П/А** | **Li** | **Ti** | **Прогноз П/А** | **Абс. ошибка, %** |
| 5 | 1 | -6,00р. | -6,00р. | 0 | - | - |
| 6 | 2 | 3,00р. | -0,69р. | 2,230 | -6,00р. | 300,0% |
| 7 | 3 | 1,50р. | 1,52р. | 2,220 | 1,54р. | 2,7% |
| 8 | 4 | 4,50р. | 4,19р. | 2,409 | 3,74р. | 17,0% |
| 9 | 5 | 6,60р. | 6,60р. | 2,410 | 6,60р. | 0,1% |
| 10 | 6 | 10,50р. | 9,89р. | 2,780 | 9,01р. | 14,2% |
| 11 | 7 | 11,10р. | 11,74р. | 2,391 | 12,67р. | 14,1% |
| 12 | 8 | 12,60р. | 13,23р. | 2,011 | 14,13р. | 12,2% |
| 13 | 9 | 11,10р. | 12,80р. | 0,985 | 15,24р. | 37,3% |
| 14 | 10 | 15,90р. | 15,03р. | 1,510 | 13,78р. | 13,3% |
| 15 | 11 | 17,70р. | 17,23р. | 1,797 | 16,54р. | 6,5% |
| 16 | 12 | 19,50р. | 19,30р. | 1,915 | 19,02р. | 2,5% |
| 17 | | | | | 21,22р. | |
| 18 | | | | | *СООП =* | **38,2%** |

**Рисунок 64. Пример 3 - результат прогноза с использованием метода Хольта**

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | alpha = | 0,59 | | | | |
| 2 | beta = | 0,42 | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | Квартал | П/А | Li | Ti | Прогноз П/А | Абс. ошибка, % |
| 5 | 1 | =Данные!B2 | =B5 | 0 | - | - |
| 6 | 2 | =Данные!B3 | =$B$1*B6+(1-$B$1)*(C5+D5) | =$B$2*(C6-C5)+(1-$B$2)*D5 | =СУММ(C5:D5) | =ABS(B6-E6)/B6 |
| 7 | 3 | =Данные!B4 | =$B$1*B7+(1-$B$1)*(C6+D6) | =$B$2*(C7-C6)+(1-$B$2)*D6 | =СУММ(C6:D6) | =ABS(B7-E7)/B7 |
| 8 | 4 | =Данные!B5 | =$B$1*B8+(1-$B$1)*(C7+D7) | =$B$2*(C8-C7)+(1-$B$2)*D7 | =СУММ(C7:D7) | =ABS(B8-E8)/B8 |
| 9 | 5 | =Данные!B6 | =$B$1*B9+(1-$B$1)*(C8+D8) | =$B$2*(C9-C8)+(1-$B$2)*D8 | =СУММ(C8:D8) | =ABS(B9-E9)/B9 |
| 10 | 6 | =Данные!B7 | =$B$1*B10+(1-$B$1)*(C9+D9) | =$B$2*(C10-C9)+(1-$B$2)*D9 | =СУММ(C9:D9) | =ABS(B10-E10)/B10 |
| 11 | 7 | =Данные!B8 | =$B$1*B11+(1-$B$1)*(C10+D10) | =$B$2*(C11-C10)+(1-$B$2)*D10 | =СУММ(C10:D10) | =ABS(B11-E11)/B11 |
| 12 | 8 | =Данные!B9 | =$B$1*B12+(1-$B$1)*(C11+D11) | =$B$2*(C12-C11)+(1-$B$2)*D11 | =СУММ(C11:D11) | =ABS(B12-E12)/B12 |
| 13 | 9 | =Данные!B10 | =$B$1*B13+(1-$B$1)*(C12+D12) | =$B$2*(C13-C12)+(1-$B$2)*D12 | =СУММ(C12:D12) | =ABS(B13-E13)/B13 |
| 14 | 10 | =Данные!B11 | =$B$1*B14+(1-$B$1)*(C13+D13) | =$B$2*(C14-C13)+(1-$B$2)*D13 | =СУММ(C13:D13) | =ABS(B14-E14)/B14 |
| 15 | 11 | =Данные!B12 | =$B$1*B15+(1-$B$1)*(C14+D14) | =$B$2*(C15-C14)+(1-$B$2)*D14 | =СУММ(C14:D14) | =ABS(B15-E15)/B15 |
| 16 | 12 | =Данные!B13 | =$B$1*B16+(1-$B$1)*(C15+D15) | =$B$2*(C16-C15)+(1-$B$2)*D15 | =СУММ(C15:D15) | =ABS(B16-E16)/B16 |
| 17 | | | | | =СУММ(C16:D16) | |
| 18 | | | | | СООП = | =СРЗНАЧ(F6:F16) |

**Рисунок 65. Пример 3 - результат прогноза с использованием метода Хольта. Формулы**

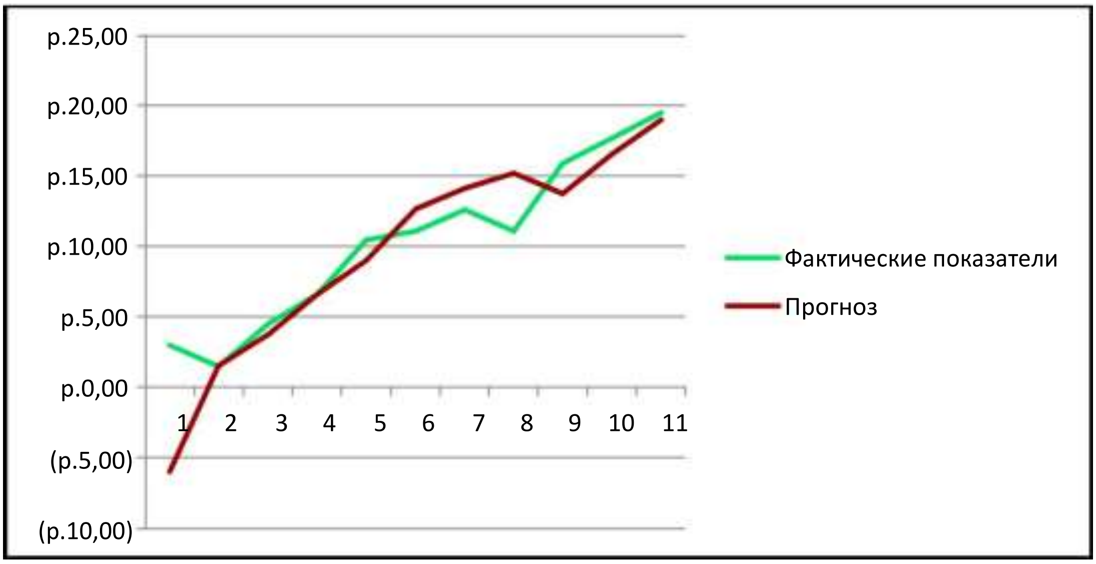



**Рисунок 66. Пример 3 - результат прогноза с использованием метода Хольта. График**

Однако метод Хольта, как и рассмотренные ранее простейшие методы прогнозирования, не учитывает наличие во временном ряде сезонных изменений.

## Учет сезонных изменений

Спрос на значительное число товаров меняется в течение года. Например, если посмотреть на объемы продаж мороженого по месяцам, то можно увидеть в теплые месяцы (с июня по август в северном полушарии) более высокий уровень продаж, чем зимой, и так каждый год. Здесь сезонные колебания имеют период в 12 месяцев. Другой пример:

анализируются еженедельные отчеты о количестве постояльцев, которые оставались на ночь в отеле, расположенном в бизнес-центре города. Предположительно можно сказать, что большое число клиентов ожидается в ночи на вторник, среду и четверг, меньше всего клиентов будет в ночи на субботу и воскресенье, и среднее число постояльцев ожидается в ночи на пятницу и понедельник. Такая структура данных, отображающая количество клиентов в разные дни недели, будет повторяться через каждые семь дней.

Подобные циклические изменения показателя временного ряда носят название сезонных колебаний (хотя сезон, как мы видели, может продлиться и неделю и год). Процедура, которая позволяет сделать прогноз с учетом сезонных изменений, состоит из следующих этапов.

1. На основе исходных данных определяется структура сезонных колебаний и период этих колебаний.
2. Используя численный метод, описанный далее, из исходных данных исключают сезонную составляющую.
3. На основе данных, из которых исключена сезонная составляющая, делается наилучший возможный прогноз.
4. К полученному прогнозу добавляется сезонная составляющая.

Проиллюстрируем этот подход на данных об объемах сбыта угля (измеряемого в тысячах тонн) в США на протяжении девяти лет. Пусть некто Фрэнк работает менеджером в компании Gillette Coal Mine, и ему необходимо спрогнозировать спрос на уголь на ближайшие два квартала. Он ввел данные по всей угольной отрасли в рабочую книгу «ЛР6.Пример 4.Уголь.xls» и построил по этим данным график (см. Рисунок 67).

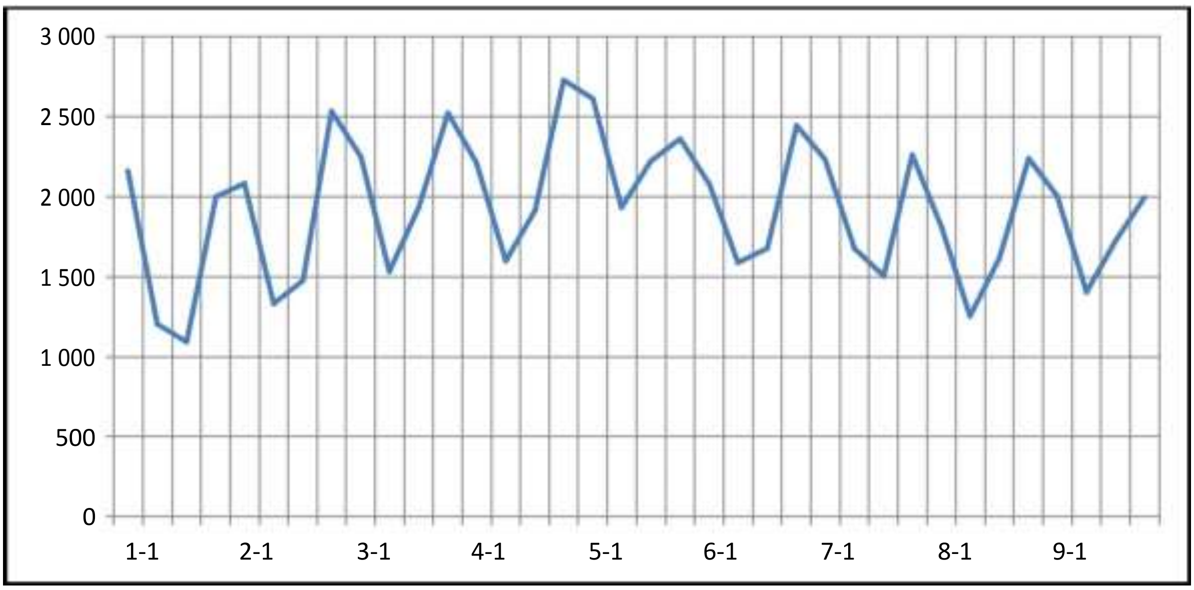



**Рисунок 67. Пример 4 - данные о спросе на уголь в компании Gillette Coal Mine**

**Определение структуры и периода сезонных колебаний**. Из графика, приведённого выше видно, что объемы продаж выше среднего уровня в первом и четвертом кварталах (зимнее время года) и ниже среднего во втором и третьем кварталах (весенне-летние месяцы).

**Исключение сезонной составляющей**. Прежде всего необходимо вычислить среднее значение всех отклонений за один период сезонных изменений. Чтобы исключить сезонную составляющую в пределах одного года, используются данные за четыре периода (квартала). А чтобы исключить сезонную составляющую из всего временного ряда, вычисляется последовательность скользящих средних по *T* узлам, где *T* — продолжительность сезонных колебаний. Для выполнения необходимых вычислений Фрэнк использовал столбцы *C* и *D*, как показано на рисунке ниже. Столбец *C* содержит значения скользящего среднего по 4 узлам на основе данных, которые находятся в столбце *B*.

Далее требуется назначить полученные значения скользящего среднего средним точкам последовательности данных, на основе которых эти значения были вычислены. Эта операция называется центрированием значений. Если *T* нечетное, то первое значение скользящего среднего (среднее значений от первой до *T*-й точки) надо присвоить *(T + 1)/2* точке (например, если *T = 7*, то первое скользящее среднее будет назначено четвертой точке). Аналогично среднее значений от второй до *(T + 1)*-й точки центрируется в *(T + 3)/2* точке и т. д. Центр *n*-го интервала находится в точке *(T+(2n-1))/2*.

Если *T* четное, как в рассматриваемом случае, то задача несколько усложняется, поскольку центральные (средние) точки расположены между точками, по которым вычислялось значение скользящего среднего. Поэтому центрированное значение для третьей точки вычисляется как среднее первого и второго значений скользящего среднего. Например, первое число в столбце D отцентрированных средних (см. Рисунок 68), слева равняется (1613 + 1594) / 2 = 1603.

| 7 | Период год-квартал | Исходные данные | Скользящие средние | Центрированные средние |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 1-1 | 2 159 | - | - |
| 9 | 1-2 | 1 203 | - | - |
| 10 | 1-3 | 1 094 | 1 613 | 1 603 |
| 11 | 1-4 | 1 996 | 1 594 | 1 610 |
| 12 | 2-1 | 2 081 | 1 626 | 1 674 |
| 13 | 2-2 | 1 332 | 1 721 | 1 788 |
| 14 | 2-3 | 1 476 | 1 856 | 1 877 |
| 15 | 2-4 | 2 533 | 1 898 | 1 923 |
| 16 | 3-1 | 2 249 | 1 948 | 2 005 |
| 17 | 3-2 | 1 533 | 2 063 | 2 061 |
| 18 | 3-3 | 1 935 | 2 060 | 2 055 |
| 19 | 3-4 | 2 523 | 2 050 | 2 058 |
| 20 | 4-1 | 2 208 | 2 066 | 2 064 |
| 21 | 4-2 | 1 597 | 2 061 | 2 087 |
| 22 | 4-3 | 1 917 | 2 112 | 2 163 |
| 23 | 4-4 | 2 726 | 2 213 | 2 255 |
| 24 | 5-1 | 2 612 | 2 297 | 2 335 |
| 25 | 5-2 | 1 931 | 2 373 | 2 328 |
| 26 | 5-3 | 2 223 | 2 282 | 2 215 |
| 27 | 5-4 | 2 363 | 2 148 | 2 105 |
| 28 | 6-1 | 2 074 | 2 062 | 1 994 |
| 29 | 6-2 | 1 589 | 1 925 | 1 935 |
| 30 | 6-3 | 1 673 | 1 945 | 1 964 |
| 31 | 6-4 | 2 443 | 1 984 | 1 995 |
| 32 | 7-1 | 2 231 | 2 006 | 1 984 |
| 33 | 7-2 | 1 675 | 1 963 | 1 940 |
| 34 | 7-3 | 1 503 | 1 917 | 1 864 |
| 35 | 7-4 | 2 259 | 1 812 | 1 759 |
| 36 | 8-1 | 1 809 | 1 706 | 1 720 |
| 37 | 8-2 | 1 254 | 1 734 | 1 731 |
| 38 | 8-3 | 1 613 | 1 729 | 1 753 |
| 39 | 8-4 | 2 238 | 1 777 | 1 796 |
| 40 | 9-1 | 2 004 | 1 815 | 1 829 |
| 41 | 9-2 | 1 406 | 1 843 | 1 813 |
| 42 | 9-3 | 1 725 | 1 782 | - |
| 43 | 9-4 | 1 994 | - | - |
| 44 | 10-1 | | | |
| 45 | 10-2 | | | |

| 7 | Период год-квартал | Исходные данные | Скользящие средние | Центрированные средние |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 1-1 | 2159 | - | - |
| 9 | 1-2 | 1203 | - | - |
| 10 | 1-3 | 1094 | =СРЗНАЧ(B8:B11) | =СРЗНАЧ(C10:C11) |
| 11 | 1-4 | 1996 | =СРЗНАЧ(B9:B12) | =СРЗНАЧ(C11:C12) |
| 12 | 2-1 | 2081 | =СРЗНАЧ(B10:B13) | =СРЗНАЧ(C12:C13) |
| 13 | 2-2 | 1332 | =СРЗНАЧ(B11:B14) | =СРЗНАЧ(C13:C14) |
| 14 | 2-3 | 1476 | =СРЗНАЧ(B12:B15) | =СРЗНАЧ(C14:C15) |
| 15 | 2-4 | 2533 | =СРЗНАЧ(B13:B16) | =СРЗНАЧ(C15:C16) |
| 16 | 3-1 | 2249 | =СРЗНАЧ(B14:B17) | =СРЗНАЧ(C16:C17) |
| 17 | 3-2 | 1533 | =СРЗНАЧ(B15:B18) | =СРЗНАЧ(C17:C18) |
| 18 | 3-3 | 1935 | =СРЗНАЧ(B16:B19) | =СРЗНАЧ(C18:C19) |
| 19 | 3-4 | 2523 | =СРЗНАЧ(B17:B20) | =СРЗНАЧ(C19:C20) |
| 20 | 4-1 | 2208 | =СРЗНАЧ(B18:B21) | =СРЗНАЧ(C20:C21) |
| 21 | 4-2 | 1597 | =СРЗНАЧ(B19:B22) | =СРЗНАЧ(C21:C22) |
| 22 | 4-3 | 1917 | =СРЗНАЧ(B20:B23) | =СРЗНАЧ(C22:C23) |
| 23 | 4-4 | 2726 | =СРЗНАЧ(B21:B24) | =СРЗНАЧ(C23:C24) |
| 24 | 5-1 | 2612 | =СРЗНАЧ(B22:B25) | =СРЗНАЧ(C24:C25) |
| 25 | 5-2 | 1931 | =СРЗНАЧ(B23:B26) | =СРЗНАЧ(C25:C26) |
| 26 | 5-3 | 2223 | =СРЗНАЧ(B24:B27) | =СРЗНАЧ(C26:C27) |
| 27 | 5-4 | 2363 | =СРЗНАЧ(B25:B28) | =СРЗНАЧ(C27:C28) |
| 28 | 6-1 | 2074 | =СРЗНАЧ(B26:B29) | =СРЗНАЧ(C28:C29) |
| 29 | 6-2 | 1589 | =СРЗНАЧ(B27:B30) | =СРЗНАЧ(C29:C30) |
| 30 | 6-3 | 1673 | =СРЗНАЧ(B28:B31) | =СРЗНАЧ(C30:C31) |
| 31 | 6-4 | 2443 | =СРЗНАЧ(B29:B32) | =СРЗНАЧ(C31:C32) |
| 32 | 7-1 | 2231 | =СРЗНАЧ(B30:B33) | =СРЗНАЧ(C32:C33) |
| 33 | 7-2 | 1675 | =СРЗНАЧ(B31:B34) | =СРЗНАЧ(C33:C34) |
| 34 | 7-3 | 1503 | =СРЗНАЧ(B32:B35) | =СРЗНАЧ(C34:C35) |
| 35 | 7-4 | 2259 | =СРЗНАЧ(B33:B36) | =СРЗНАЧ(C35:C36) |
| 36 | 8-1 | 1809 | =СРЗНАЧ(B34:B37) | =СРЗНАЧ(C36:C37) |
| 37 | 8-2 | 1254 | =СРЗНАЧ(B35:B38) | =СРЗНАЧ(C37:C38) |
| 38 | 8-3 | 1613 | =СРЗНАЧ(B36:B39) | =СРЗНАЧ(C38:C39) |
| 39 | 8-4 | 2238 | =СРЗНАЧ(B37:B40) | =СРЗНАЧ(C39:C40) |
| 40 | 9-1 | 2004 | =СРЗНАЧ(B38:B41) | =СРЗНАЧ(C40:C41) |
| 41 | 9-2 | 1406 | =СРЗНАЧ(B39:B42) | =СРЗНАЧ(C41:C42) |
| 42 | 9-3 | 1725 | =СРЗНАЧ(B40:B43) | - |
| 43 | 9-4 | 1994 | - | - |
| 44 | 10-1 | | | |
| 45 | 10-2 | | | |

**Рисунок 68. Пример 4 – нахождение центрированного среднего по исходным данным**

Графики исходных данных и отцентрированных средних показаны ниже (см. Рисунок 69).

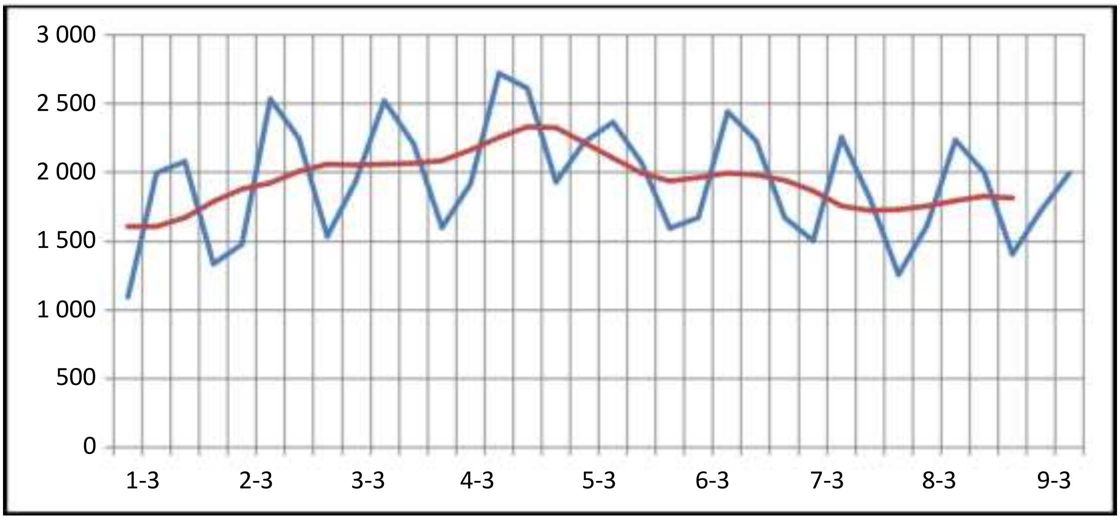



**Рисунок 69. Пример 4 - график центрированного скользящего среднего**

Далее найдём отношения значений точек данных к соответствующим значениям отцентрированных средних (см. Рисунок 70). Поскольку точкам в начале и конце последовательности данных нет соответствующих отцентрированных средних (см. первые и последние значения в столбце D), такое действие на эти точки не распространяется. Эти отношения показывают степень отклонения значений данных относительно типового уровня, определяемого отцентрированными средними. Заметим, что значения отношений для третьих кварталов меньше 1, а для четвертых — больше 1.

| | A | E |
|---|---|---|
| 7 | Период год-квартал | Отношения данных к центрированным средним |
| 8 | 1-1 | - |
| 9 | 1-2 | - |
| 10 | 1-3 | 0,682 |
| 11 | 1-4 | 1,240 |
| 12 | 2-1 | 1,244 |
| 13 | 2-2 | 0,745 |
| 14 | 2-3 | 0,787 |
| 15 | 2-4 | 1,317 |
| 16 | 3-1 | 1,122 |
| 17 | 3-2 | 0,744 |
| 18 | 3-3 | 0,942 |
| 19 | 3-4 | 1,226 |
| 20 | 4-1 | 1,070 |
| 21 | 4-2 | 0,765 |
| 22 | 4-3 | 0,886 |
| 23 | 4-4 | 1,209 |
| 24 | 5-1 | 1,119 |
| 25 | 5-2 | 0,830 |
| 26 | 5-3 | 1,004 |
| 27 | 5-4 | 1,123 |
| 28 | 6-1 | 1,040 |
| 29 | 6-2 | 0,821 |
| 30 | 6-3 | 0,852 |
| 31 | 6-4 | 1,225 |
| 32 | 7-1 | 1,124 |
| 33 | 7-2 | 0,863 |
| 34 | 7-3 | 0,806 |
| 35 | 7-4 | 1,284 |
| 36 | 8-1 | 1,052 |
| 37 | 8-2 | 0,724 |
| 38 | 8-3 | 0,920 |
| 39 | 8-4 | 1,246 |
| 40 | 9-1 | 1,096 |
| 41 | 9-2 | 0,776 |
| 42 | 9-3 | - |
| 43 | 9-4 | - |
| 44 | 10-1 | |
| 45 | 10-2 | |

| | A | B | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 7 | Период год-квартал | Исходные данные | Центрированные средние | Отношения данных к центрированным |
| 8 | 1-1 | 2159 | - | - |
| 9 | 1-2 | 1203 | - | - |
| 10 | 1-3 | 1094 | =СРЗНАЧ(C10:C11) | =B10/D10 |
| 11 | 1-4 | 1996 | =СРЗНАЧ(C11:C12) | =B11/D11 |
| 12 | 2-1 | 2081 | =СРЗНАЧ(C12:C13) | =B12/D12 |
| 13 | 2-2 | 1332 | =СРЗНАЧ(C13:C14) | =B13/D13 |
| 14 | 2-3 | 1476 | =СРЗНАЧ(C14:C15) | =B14/D14 |
| 15 | 2-4 | 2533 | =СРЗНАЧ(C15:C16) | =B15/D15 |
| 16 | 3-1 | 2249 | =СРЗНАЧ(C16:C17) | =B16/D16 |
| 17 | 3-2 | 1533 | =СРЗНАЧ(C17:C18) | =B17/D17 |
| 18 | 3-3 | 1935 | =СРЗНАЧ(C18:C19) | =B18/D18 |
| 19 | 3-4 | 2523 | =СРЗНАЧ(C19:C20) | =B19/D19 |
| 20 | 4-1 | 2208 | =СРЗНАЧ(C20:C21) | =B20/D20 |
| 21 | 4-2 | 1597 | =СРЗНАЧ(C21:C22) | =B21/D21 |
| 22 | 4-3 | 1917 | =СРЗНАЧ(C22:C23) | =B22/D22 |
| 23 | 4-4 | 2726 | =СРЗНАЧ(C23:C24) | =B23/D23 |
| 24 | 5-1 | 2612 | =СРЗНАЧ(C24:C25) | =B24/D24 |
| 25 | 5-2 | 1931 | =СРЗНАЧ(C25:C26) | =B25/D25 |
| 26 | 5-3 | 2223 | =СРЗНАЧ(C26:C27) | =B26/D26 |
| 27 | 5-4 | 2363 | =СРЗНАЧ(C27:C28) | =B27/D27 |
| 28 | 6-1 | 2074 | =СРЗНАЧ(C28:C29) | =B28/D28 |
| 29 | 6-2 | 1589 | =СРЗНАЧ(C29:C30) | =B29/D29 |
| 30 | 6-3 | 1673 | =СРЗНАЧ(C30:C31) | =B30/D30 |
| 31 | 6-4 | 2443 | =СРЗНАЧ(C31:C32) | =B31/D31 |
| 32 | 7-1 | 2231 | =СРЗНАЧ(C32:C33) | =B32/D32 |
| 33 | 7-2 | 1675 | =СРЗНАЧ(C33:C34) | =B33/D33 |
| 34 | 7-3 | 1503 | =СРЗНАЧ(C34:C35) | =B34/D34 |
| 35 | 7-4 | 2259 | =СРЗНАЧ(C35:C36) | =B35/D35 |
| 36 | 8-1 | 1809 | =СРЗНАЧ(C36:C37) | =B36/D36 |
| 37 | 8-2 | 1254 | =СРЗНАЧ(C37:C38) | =B37/D37 |
| 38 | 8-3 | 1613 | =СРЗНАЧ(C38:C39) | =B38/D38 |
| 39 | 8-4 | 2238 | =СРЗНАЧ(C39:C40) | =B39/D39 |
| 40 | 9-1 | 2004 | =СРЗНАЧ(C40:C41) | =B40/D40 |
| 41 | 9-2 | 1406 | =СРЗНАЧ(C41:C42) | =B41/D41 |
| 42 | 9-3 | 1725 | - | - |
| 43 | 9-4 | 1994 | - | - |
| 44 | 10-1 | | | 2260,25 |
| 45 | 10-2 | | | 2170,75 |

**Рисунок 70. Пример 4 – отношение данных к центрированным средним скользящим**

Эти отношения являются основой для создания сезонных индексов. Для их вычисления группируются вычисленные отношения по кварталам, как показано в столбцах C—K (см. Рисунок 71).

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,108 | **1-й кв.** | - | 1,244 | 1,122 | 1,070 | 1,119 | 1,040 | 1,124 | 1,052 | 1,096 |
| 2 | 0,784 | **2-й кв.** | - | 0,745 | 0,744 | 0,765 | 0,830 | 0,821 | 0,863 | 0,724 | 0,776 |
| 3 | 0,860 | **3-й кв.** | 0,682 | 0,787 | 0,942 | 0,886 | 1,004 | 0,852 | 0,806 | 0,920 | - |
| 4 | 1,234 | **4-й кв.** | 1,240 | 1,317 | 1,226 | 1,209 | 1,123 | 1,225 | 1,284 | 1,246 | - |

**Рисунок 71. Пример 4 - отношения исходных данных к центрированным скользящим средним, сгруппированные по сезонам**

Затем требуется найти средние значения отношений по каждому кварталу (см. столбец A, Рисунок 71). Например, среднее всех отношений для первого квартала равно 1,108. Это значение является сезонным индексом первого квартала, на основе которого можно сделать вывод, что объем сбыта угля за первый квартал составляет в среднем около 110,8% относительного среднего годового объема сбыта.

**Сезонный индекс** — это среднее отношение данных, относящихся к одному сезону (в данном случае сезоном является квартал), ко всем данным. Если сезонный индекс больше 1, значит, показатели этого сезона выше средних показателей за год, аналогично, если сезонный индекс ниже 1, то показатели сезона ниже средних показателей за год.

Наконец, чтобы исключить из исходных данных сезонную составляющую, следует поделить значения исходных данных на соответствующий сезонный индекс. Результаты этой операции приведены в столбцах F и G (см. Рисунок 72). График данных, которые уже не содержат сезонной составляющей, отражает Рисунок 73.

**Прогнозирование без сезонной составляющей**. На основе данных, из которых исключена сезонная составляющая, строится прогноз. Для этого используется соответствующий метод, который учитывает характер поведения данных (например, данные имеют тренд или относительно постоянны). В этом примере прогноз строится с помощью простого экспоненциального сглаживания. Оптимальное значение параметра α находится с помощью средства Поиск решения. Графики прогноза и реальных данных с исключенной сезонной составляющей приведены ниже (см. Рисунок 74).

| | B | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | Исходные данные | Сезонные индексы | Данные без сезонной составляющей | Прогноз | |
| 8 | 2 159 | 1,108 | 1 948,1 | 1 948,1 | |
| 9 | 1 203 | 0,784 | 1 535,4 | 1 948,1 | |
| 10 | 1 094 | 0,860 | 1 272,3 | 1 678,5 | |
| 11 | 1 996 | 1,234 | 1 617,8 | 1 413,1 | |
| 12 | 2 081 | 1,108 | 1 877,8 | 1 546,8 | |
| 13 | 1 332 | 0,784 | 1 700,0 | 1 763,0 | |
| 14 | 1 476 | 0,860 | 1 716,6 | 1 721,9 | |
| 15 | 2 533 | 1,234 | 2 053,1 | 1 718,4 | |
| 16 | 2 249 | 1,108 | 2 029,3 | 1 937,1 | |
| 17 | 1 533 | 0,784 | 1 956,5 | 1 997,4 | |
| 18 | 1 935 | 0,860 | 2 250,4 | 1 970,7 | |
| 19 | 2 523 | 1,234 | 2 045,0 | 2 153,4 | |
| 20 | 2 208 | 1,108 | 1 992,3 | 2 082,6 | |
| 21 | 1 597 | 0,784 | 2 038,2 | 2 023,6 | |
| 22 | 1 917 | 0,860 | 2 229,5 | 2 033,2 | |
| 23 | 2 726 | 1,234 | 2 209,5 | 2 161,4 | |
| 24 | 2 612 | 1,108 | 2 356,9 | 2 192,8 | |
| 25 | 1 931 | 0,784 | 2 464,5 | 2 300,0 | |
| 26 | 2 223 | 0,860 | 2 585,3 | 2 407,5 | |
| 27 | 2 363 | 1,234 | 1 915,3 | 2 523,7 | |
| 28 | 2 074 | 1,108 | 1 871,4 | 2 126,2 | |
| 29 | 1 589 | 0,784 | 2 028,0 | 1 959,7 | |
| 30 | 1 673 | 0,860 | 1 945,7 | 2 004,4 | |
| 31 | 2 443 | 1,234 | 1 980,1 | 1 966,0 | |
| 32 | 2 231 | 1,108 | 2 013,1 | 1 975,2 | |
| 33 | 1 675 | 0,784 | 2 137,8 | 2 000,0 | |
| 34 | 1 503 | 0,860 | 1 748,0 | 2 090,0 | |
| 35 | 2 259 | 1,234 | 1 831,0 | 1 866,5 | |
| 36 | 1 809 | 1,108 | 1 632,3 | 1 843,3 | |
| 37 | 1 254 | 0,784 | 1 600,5 | 1 705,5 | |
| 38 | 1 613 | 0,860 | 1 875,9 | 1 636,9 | |
| 39 | 2 238 | 1,234 | 1 814,0 | 1 793,0 | |
| 40 | 2 004 | 1,108 | 1 808,3 | 1 806,7 | |
| 41 | 1 406 | 0,784 | 1 794,5 | 1 807,7 | |
| 42 | 1 725 | 0,860 | 2 006,2 | 1 799,1 | |
| 43 | 1 994 | 1,234 | 1 616,2 | 1 934,4 | |
| 44 | | | | 1 726,5 | |
| 45 | | | | | |

| | B | F | G |
|---|---|---|---|
| 7 | Исходные данные | Сезонные индексы | Данные без сезонной составляющей |
| 8 | 2 159 | =$A$1 | =B8/F8 |
| 9 | 1 203 | =$A$2 | =B9/F9 |
| 10 | 1 094 | =$A$3 | =B10/F10 |
| 11 | 1 996 | =$A$4 | =B11/F11 |
| 12 | 2 081 | =$A$1 | =B12/F12 |
| 13 | 1 332 | =$A$2 | =B13/F13 |
| 14 | 1 476 | =$A$3 | =B14/F14 |
| 15 | 2 533 | =$A$4 | =B15/F15 |
| 16 | 2 249 | =$A$1 | =B16/F16 |
| 17 | 1 533 | =$A$2 | =B17/F17 |
| 18 | 1 935 | =$A$3 | =B18/F18 |
| 19 | 2 523 | =$A$4 | =B19/F19 |
| 20 | 2 208 | =$A$1 | =B20/F20 |
| 21 | 1 597 | =$A$2 | =B21/F21 |
| 22 | 1 917 | =$A$3 | =B22/F22 |
| 23 | 2 726 | =$A$4 | =B23/F23 |
| 24 | 2 612 | =$A$1 | =B24/F24 |
| 25 | 1 931 | =$A$2 | =B25/F25 |
| 26 | 2 223 | =$A$3 | =B26/F26 |
| 27 | 2 363 | =$A$4 | =B27/F27 |
| 28 | 2 074 | =$A$1 | =B28/F28 |
| 29 | 1 589 | =$A$2 | =B29/F29 |
| 30 | 1 673 | =$A$3 | =B30/F30 |
| 31 | 2 443 | =$A$4 | =B31/F31 |
| 32 | 2 231 | =$A$1 | =B32/F32 |
| 33 | 1 675 | =$A$2 | =B33/F33 |
| 34 | 1 503 | =$A$3 | =B34/F34 |
| 35 | 2 259 | =$A$4 | =B35/F35 |
| 36 | 1 809 | =$A$1 | =B36/F36 |
| 37 | 1 254 | =$A$2 | =B37/F37 |
| 38 | 1 613 | =$A$3 | =B38/F38 |
| 39 | 2 238 | =$A$4 | =B39/F39 |
| 40 | 2 004 | =$A$1 | =B40/F40 |
| 41 | 1 406 | =$A$2 | =B41/F41 |
| 42 | 1 725 | =$A$3 | =B42/F42 |
| 43 | 1 994 | =$A$4 | =B43/F43 |
| 44 | | | |
| 45 | | | |

**Рисунок 72. Пример 4 – сезонные индексы и данные без сезонной составляющей**

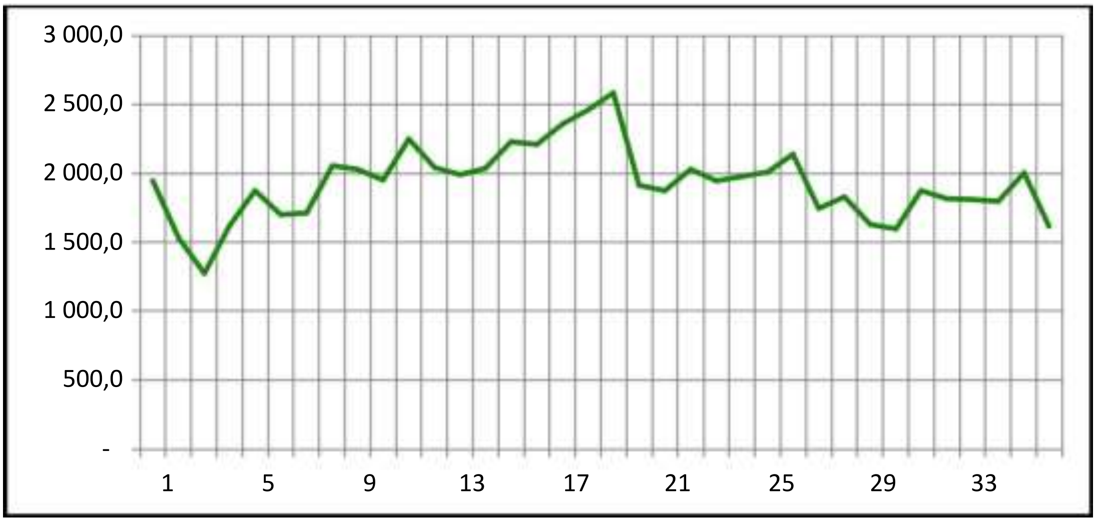



**Рисунок 73. Пример 4 - данные без сезонной составляющей**

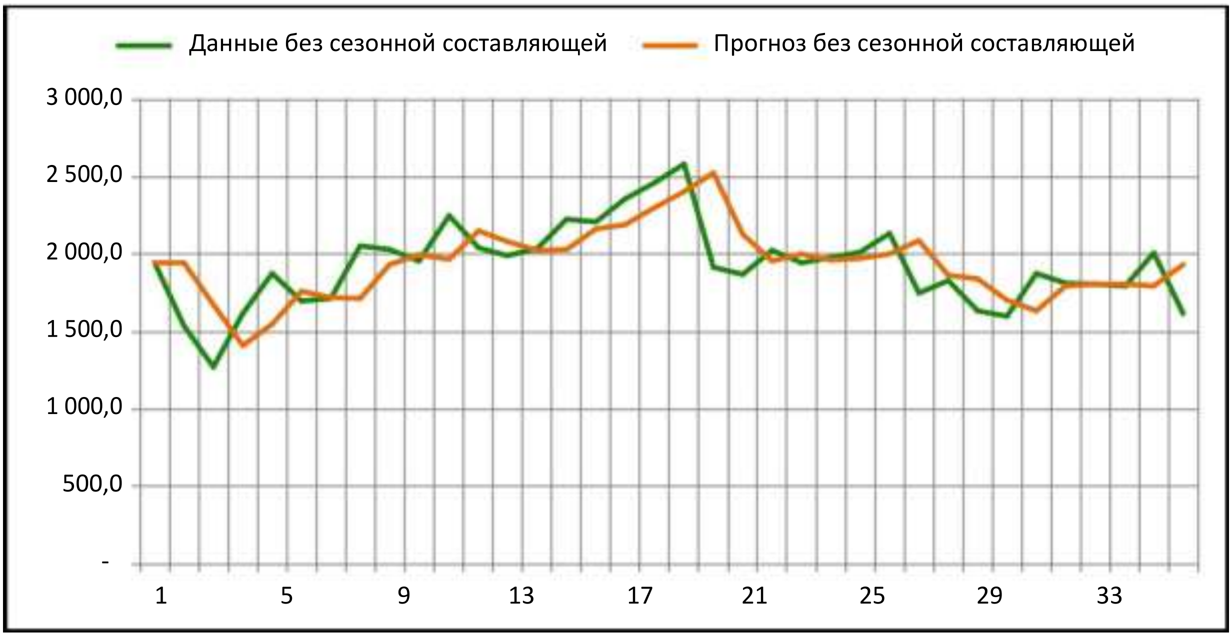



**Рисунок 74. Пример 4 – графики прогноза и реальных данных с исключенной сезонной составляющей**

**Учет сезонной структуры**. После нахождения прогноза без сезонной составляющей требуется учесть в полученном прогнозе (1726,5) сезонную составляющую. Для этого следует умножить 1726 на сезонный индекс первого квартала 1,108, в результате чего получим значение 1912. Аналогичная операция (умножение 1726 на сезонный индекс 0,784) даст прогноз на второй квартал, равный 1353. Результат добавления сезонной структуры к полученному прогнозу показан ниже (см. Рисунок 75).


**Рисунок 75. Пример 4 – итоговый результат прогнозирования с сезонной составляющей**

## *Литература*

1. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. — М.: Дело, 2000. — 431 с.
2. Мур Дж., Уэдерфорд Л. и др. Экономическое моделирование в MS Excel. — М.: Вильямс, 2004. — 1024 с.
3. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. — М.: Юнити, 1997. — 587 с.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7

Системная динамика

## *Общие сведения*

## Цель работы

Приобрести навыки моделирования функционирования сложных систем с помощью методов системной динамики и пакета iThink.

## План выполнения

1. Изучить теоретическую часть;
2. Получить задание преподавателя;
3. Выполнить задание 1:
   3.1. Построить модель, указанную в задании. Модель должна содержать графики изменения емкости каждого из резервуаров;
4. Составить отчёт по лабораторной работе. Отчёт должен иметь следующую структуру:
   4.1. Титульный лист, который должен содержать следующую информацию:
      4.1.1. Название университета и кафедры, ответственной за дисциплину;
      4.1.2. Заголовок — номер и название лабораторной работы;
      4.1.3. Подзаголовок — номер варианта и номера задач;
      4.1.4. ФИО и должности студента и преподавателя;
      4.1.5. «г. Санкт-Петербург, 2012 год»;
   4.2. Основная часть, содержащая следующее информационное наполнение:
      4.2.1. Формулировка индивидуального задания;
      4.2.2. Ответы на вопросы задания;
      4.2.3. При необходимости, снимки экрана монитора, содержащие основные моменты решения задачи;
      4.2.4. Результаты решения и выводы.

***Теоретическая часть***

## Системная динамика

**Системная динамика** — направление в изучении сложных систем, исследующее их поведение во времени, в зависимости от структуры элементов системы и взаимодействия между ними. Компьютерному моделированию подобных систем в современной науке уделяется не малое внимание.

Большинство систем, которые в настоящее время привлекают внимание исследователей, достаточно сложны. Соответственно сложными становятся и их математические модели, а создание подобных моделей требует значительной математической подготовки. Для специалистов из многих отраслей это является серьезной проблемой. Получается, что математические модели способны создавать лишь немногие избранные, в то время как остальным отводится роль пользователей или, в лучшем случае, консультантов.

С этой проблемой столкнулся Джей Форрестер во время преподавания в Слоановской бизнес-школе при МТИ. Результатом его работ конца 1950-х гг. стала системная динамика — новый «язык», описывающий поведение сложных систем, в зависимости от их структуры и взаимодействий (обратных связей, задержек реакции, влияния среды и др.). Системная динамика позволяет разрабатывать не только «формульное», но и визуальное представление системы, схему ее устройства.

Для изучения основных понятий системной динамики в настоящей лабораторной работе будет использовать программный комплекс iThink.

## Программный комплекс iThink

Существует множество аналогичных по своим целям и возможностям программных средств, которые могут быть использованы для решения тех или иных задач, возникающих в экономической практике. Одной из наиболее важных задач современной экономической практики является управление финансовыми потоками, циркулирующими на предприятии, в холдинге, между банком и его клиентами. Специфика «потокового» подхода к управлению заключается в планировании и контроле перемещений финансовых и материальных ресурсов, при этом в виде потока можно рассматривать не только движение денежных средств, но и функционирование предприятия в целом. Оперативное и эффективное управление этими потоками весьма затруднено будучи неавтоматизированным. Средства потокового управления в настоящий момент на рынке программных средств представлены в виде специализированных систем имитационного моделирования и экспертных систем. Одной из таких систем является программный комплекс iThink от компании iSee Systems.

**Назначение iThink**

iThink — мощное средство имитационного моделирования производственных и финансовых проектов и процессов, предназначенный для следующих наиболее важных групп пользователей:

1. *инвестиционных компаний, брокеров, дилеров ценных бумаг.* эта группа пользователей с помощью Ithink осуществляет планирование инвестиционных операций, прогнозирование рыночной конъюнктуры и доходности вложений; 2. *аналитических отделов банков и финансово-промышленных групп*.

   в аналитических отделах банков – самая широкая сфера применения имитационных моделей: прогнозирование, «обкатка» структурных схем и инвестиционных проектов, выбор и обоснование оптимальной стратегии. Ithink – это экспертная программа, пригодная для решения задач планирования и управления финансово-промышленной группой;
3. *отделов проектных исследований банка*. Ithink способен обеспечить достаточно глубокую детализацию проектных документов, например, плановые графики и таблицы могут быть сделаны в нужном временном масштабе;
4. *консультационных и проектных компаний.* Ithink позволяет наглядно продемонстрировать суть рекомендаций и последствия их реализации. Так, схема автоматизации бухгалтерии и управленческого учета может быть предварительно просчитана на имитационной модели;
5. *региональных органов власти.* С помощью Ithink возможно моделирование региональных экономик: планирование хозяйственных систем областного, городского и муниципального масштаба. Пакет обеспечивает повышение эффективности управления процессами снабжения и распределения ресурсов. Возможно моделирование сезонных циклов, что актуально для сельского хозяйства. Ithink может

применяться для планирования социальной сферы и медицинских услуг. Актуальной задачей может быть прогнозирование налоговых сборов и управление местными бюджетами;
6. *«отраслевых» областей*. Ithink может применяться для управленческого моделирования объектов топливно-энергетического комплекса, металлургических, химических и других предприятий, включая предприятия с непрерывным производственным циклом.

В процессе моделирования в окне модели формируется структурная схема модели из блоков встроенного графического языка моделирования. Между блоками устанавливаются взаимосвязи и генерируется программный код. Оператору требуется ввести функциональные зависимости и числовые параметры, после этого модель готова к запуску.

**Основные блоки языка моделирования iThink**

В языке моделирования iThink используется пять основных блоков: **резервуар** (Stock), **поток** (Flow), **конвертер** (Converter), **коннектор** (Action Connector), **процесс принятия решения** (Process Decision Diamond).

*Резервуар* — количество ресурса, существующее в данный момент времени и измеряемое либо в денежных, либо в физических единицах (2 тысячи рублей, 5т макарон, 200 рейтинговых баллов и т.д.). Резервуар в Ithink изображается прямоугольником, который способен накапливать, аккумулировать единицы резервуара.

*Поток* - это процесс, протекающий непрерывно во времени, оценить который можно в физических или денежных единицах, соотнесенных с каким-либо временным интервалом (рубли в месяц, литры в час, стоимость акций на время закрытия биржи в данный день и т.д.). В Ithink поток изображается фигурой, состоящей из путепровода, вентиля, регулятора потока и указателя направления. По характеру использования, потоки подразделяются на ограниченные и неограниченные, однонаправленные и двунаправленные, конвертируемые и неконвертируемые.

*Конвертеры* в Ithink – преобразователи модельных единиц, которые изображаются окружностями. Они могут содержать значения констант или внешних входных переменных, подсчитывать значения алгебраических выражений или использоваться для хранения графических функций.

*Коннектор* предназначен для связи между собой элементов модели.

*Процесс принятия решения* – это механизм для управления запутанными схемами, связанный с представлением определения процессов внутри модели. С помощью этого блока можно скрыть сложность определенных операций.

**Уровни представления модели в iThink**

В Ithink модели представляются тремя иерархическими уровнями: уровень интерфейса (высокоуровневое представление блок-схемой), уровень модели, уровень программного кода. Переключение производится путём выбора соответствующей вкладки в левой части окна программы.

**Уровень интерфейса.** На данном уровне производится работа с интерфейсом модели. Могут быть заданы элементы управления различными частями модели (см. Рисунок 76). В текущей лабораторной работе уровень интерфейса использоваться не будет.

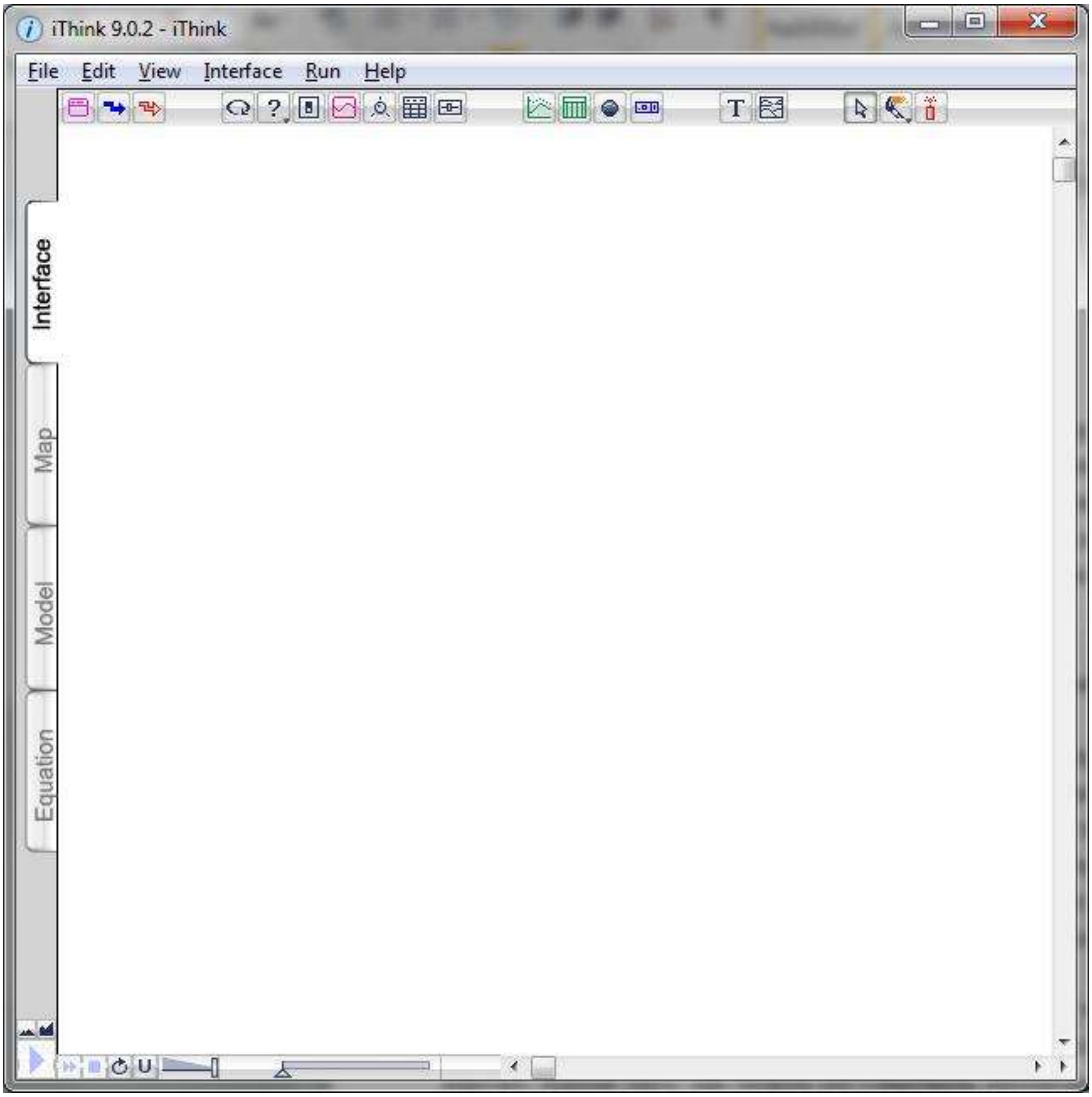



**Рисунок 76. Окно iThink при активном уровне Интерфейса**

**Уровень модели** — базовый уровень, на котором строится модель при помощи потоковых схем (см. Рисунок 77).

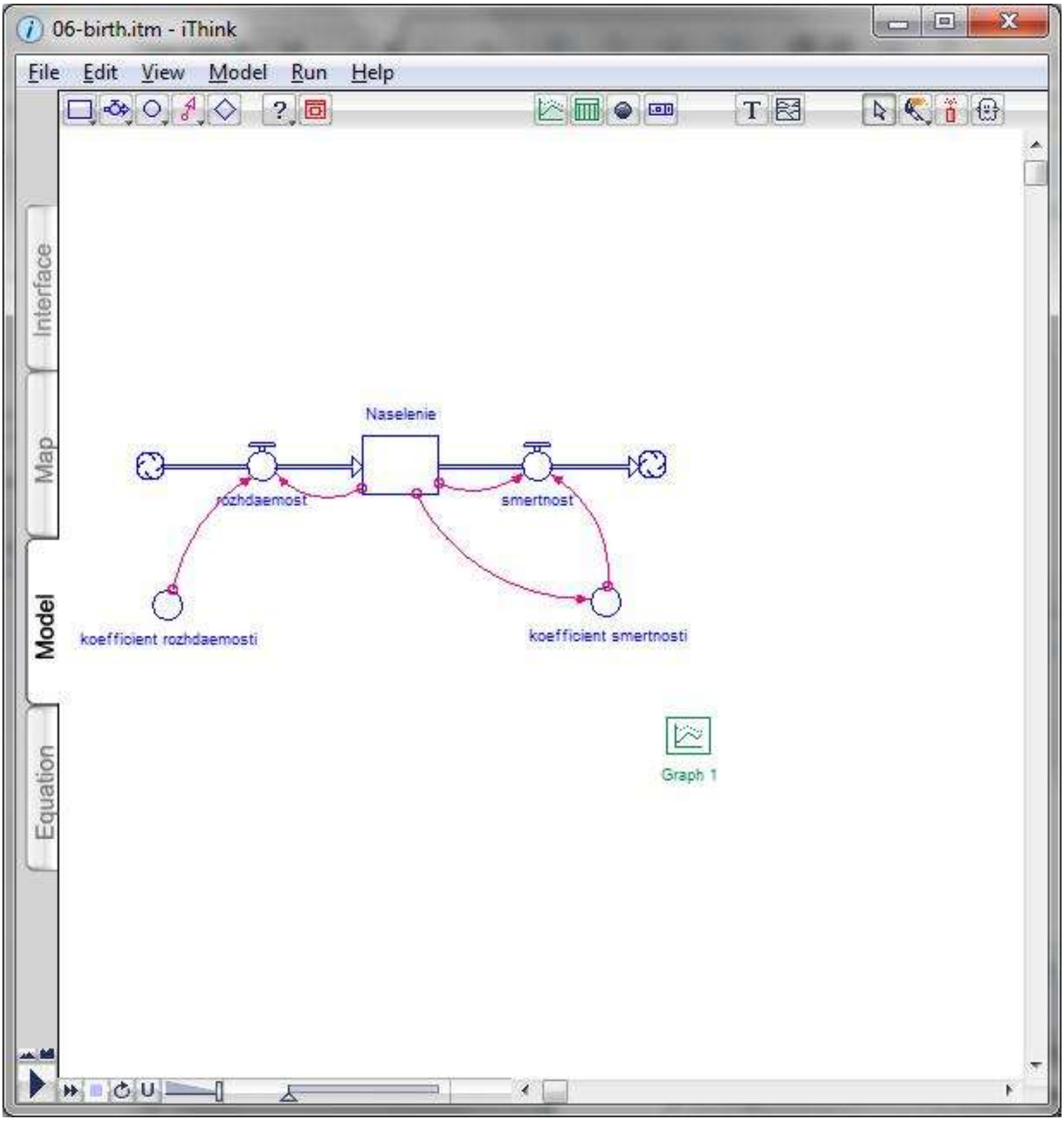



**Рисунок 77. Модельный уровень представления в iThink**

**Уровень программного кода**. В результате создания модели на модельном уровне программный код на этом уровне генерируется автоматически (см. Рисунок 78).

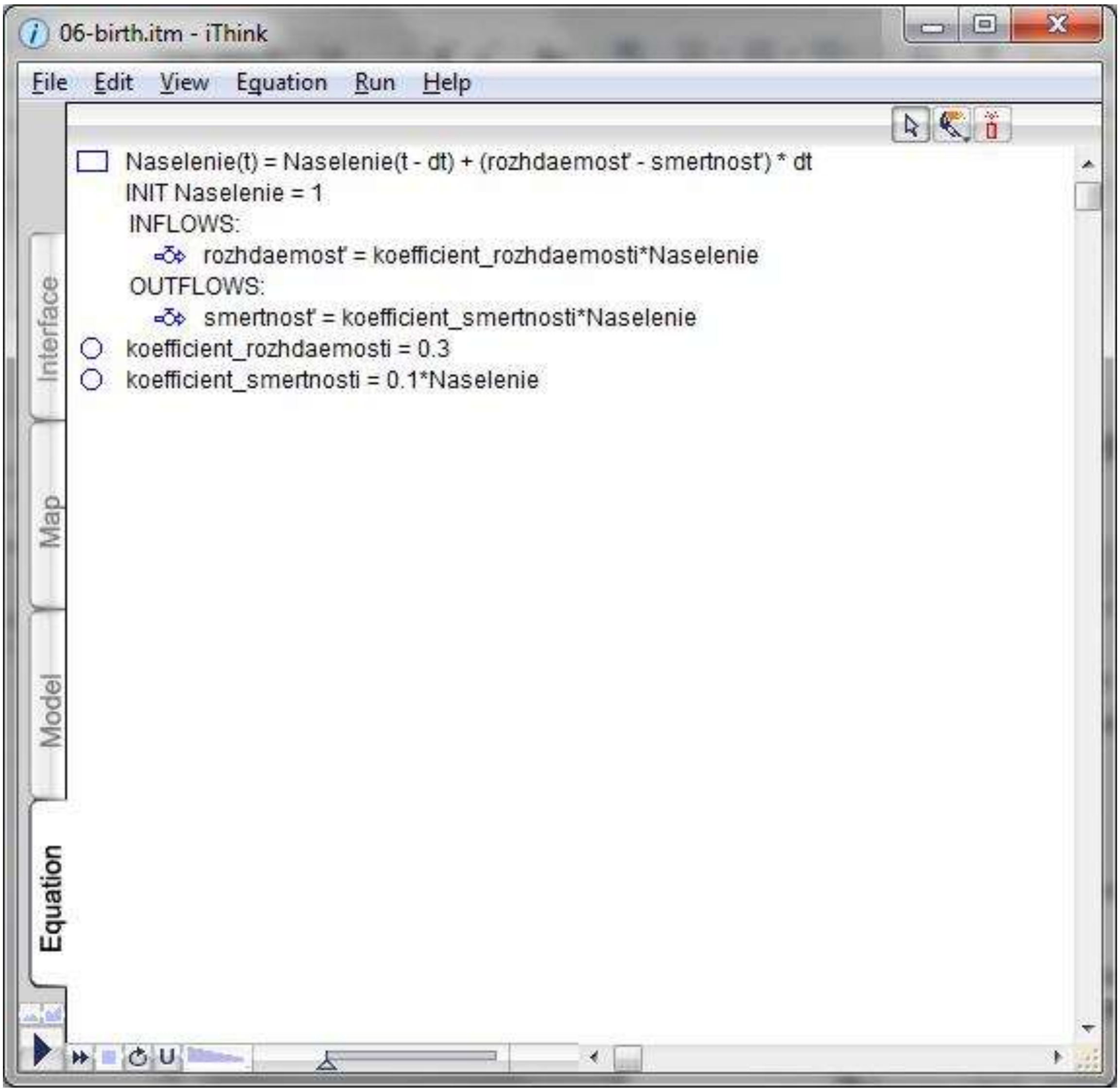



**Рисунок 78. Представление на уровне программного кода в iThink**

## Пример. Моделирование рождаемости

Для моделирования систем нам понадобятся блоки резервуара (stock) и потока (flow).

**Резервуары** (также называемые фондами) отражают существующие в системе накопления (количество товаров на складе, денег в банке). Представьте себе бассейн. Как и бассейн, резервуар может быть полон, частично заполнен или вообще пуст. В системной динамике (и в пакете iThink) резервуары представляются прямоугольниками. Резервуары могут накапливать все что угодно — воду, деньги, людей, мотивацию — как материальные, так и нематериальные объекты.

**Потоки** позволяют добавлять или отнимать что-либо из резервуаров. Поток напоминает трубу, через которую вода вливается в бассейн или вытекает наружу. Кроме того, мы можем регулировать интенсивность потоков, также как регулируем количество воды при помощи крана.

**Рисунок 79. Фрагмент панели инструментов iThink. Слева направо кнопки создания: резервуаров, потоков, конвертеров, соединителей**

В качестве примера рассмотрим создание модели изменения численности населения. Заметим, что в iThink можно использовать русские имена элементов, однако мы в дальнейшем будем использовать транслитерацию.

Во вкладке **Model** создадим резервуар *Naselenie* и поток *rozdaemost'* с помощью панели инструментов (см. Рисунок 79), соединим их между собой и переименуем соответствующим образом. Результат показан на ниже (см. Рисунок 80, а также файл *ЛР7.Население1.itm*). Резервуар *Naselenie* представляет собой количество населения и пополняется за счет потока *rozdaemost'* — т.е. за счет рождения людей.

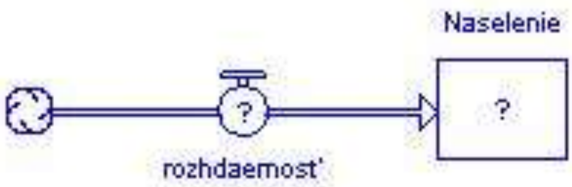



**Рисунок 80. Результат создания резервуара и потока**

«Облака», из которых начинаются (и которыми заканчиваются) потоки, представляют собой бесконечные источники (стоки) — источники (стоки), находящиеся за пределами системы.

Вопросительные знаки внутри элементов показывают, что необходимо задать соответствующие значения: начальное значение численности населения и скорость потока рождаемости.

Чтобы задать изменение потока *rozdaemost'* можно, например, ввести значение интенсивности этого потока (*koefficient rozhdaemosti*) и связать его с *rozdaemost'* специальным элементом — соединителем (connector) отображаемым красными стрелками (см. Рисунок 81, файл *ЛР7.Население2.itm*).

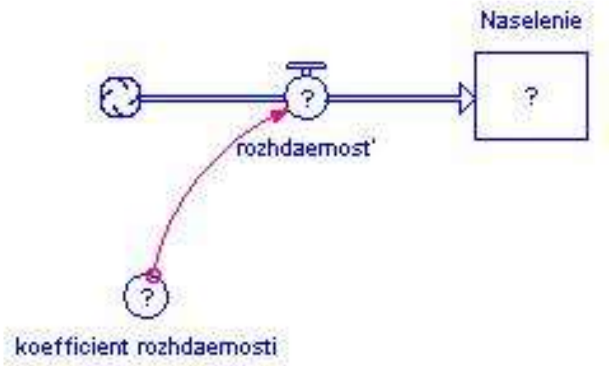



**Рисунок 81. Задание интенсивности потока**

Кружок, представляющий коэффициент рождаемости *koefficient rozhdaemosti* называется конвертером (converter). Конвертеры могут содержать константы или выражения и используются для модификации остальных частей модели.

Введем начальные значения элементов системы. Это можно сделать двойным щелчок по соответствующему элементу. Эта процедура показана ниже (см. Рисунок 82, Рисунок 83, Рисунок 84). Начальное значение *Naselenie = 1*, *rozdaemost' = koefficient rozhdaemosti*, *koefficient rozhdaemosti = 0.3* (см. файл *ЛР7.Население3.itm*).

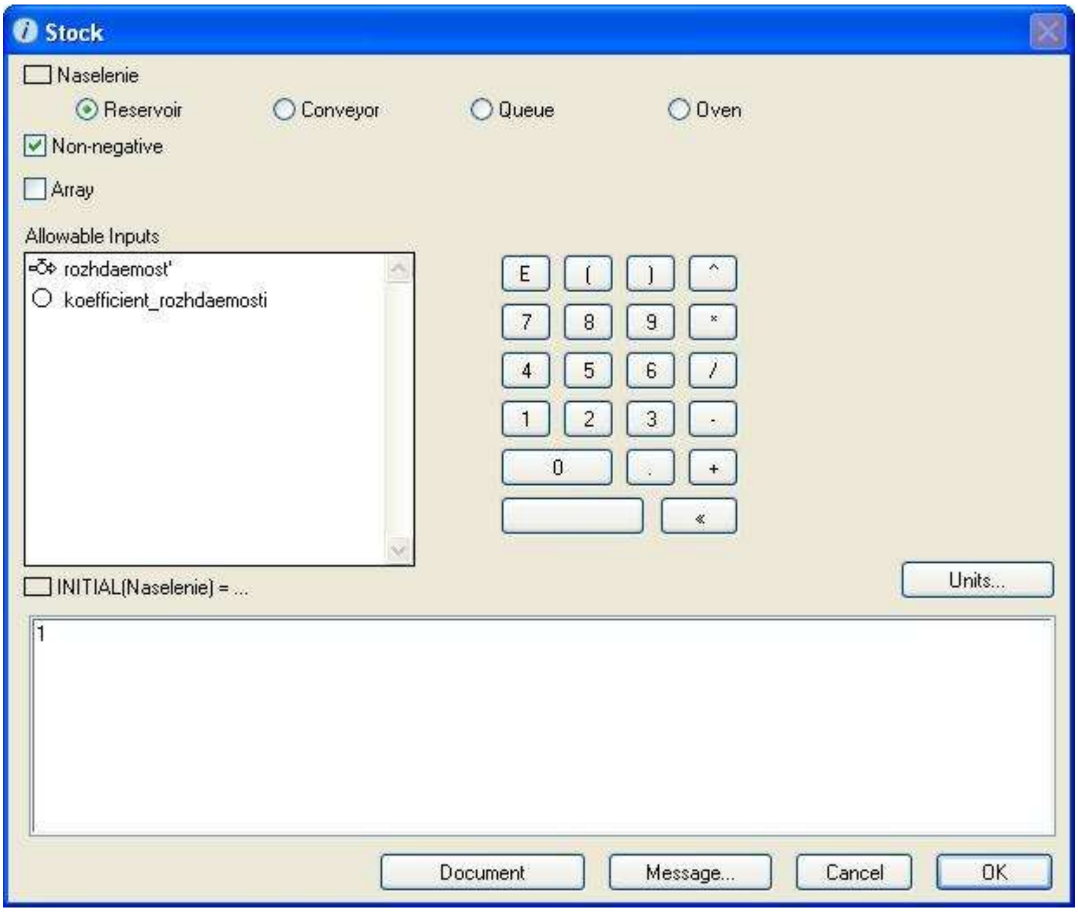



**Рисунок 82. Ввод начальных значений элементов модели – 1**

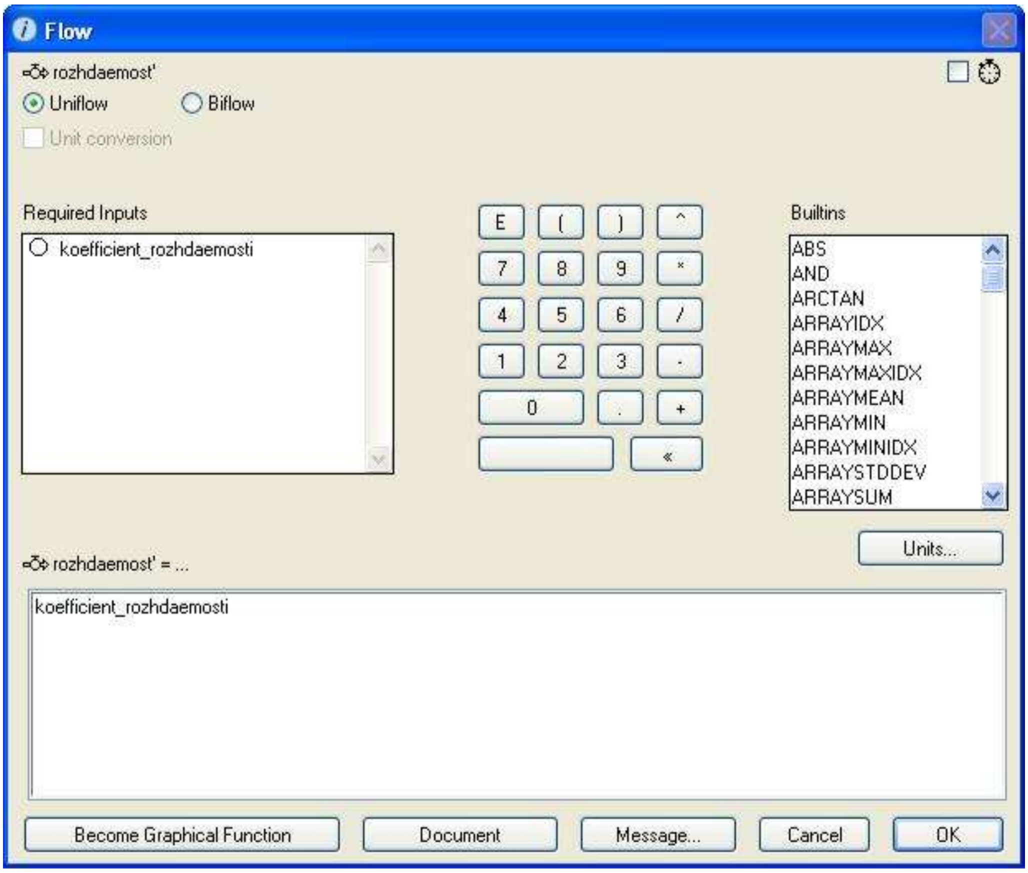



**Рисунок 83. Ввод начальных значений элементов модели – 2**

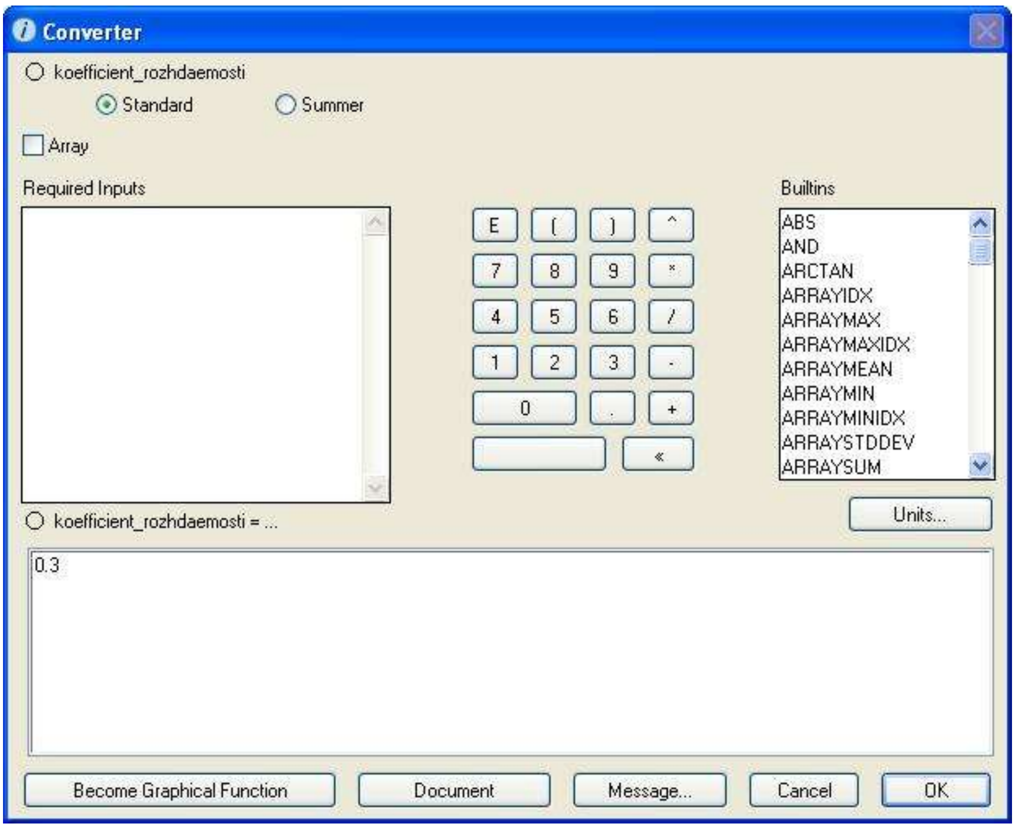



**Рисунок 84. Ввод начальных значений элементов модели – 3**

Построим график изменения численности населения во времени. Для этого воспользуемся кнопкой  панели инструментов. Двойной щелчок по графику позволяет настроить его параметры. Настройки, которые отображает Рисунок 85, позволяют вывести на графике содержимое резервуара *Naselenie* и задать заголовок графика — *Chislennost' naseleniya* (для остальных параметров используются их значения по умолчанию).

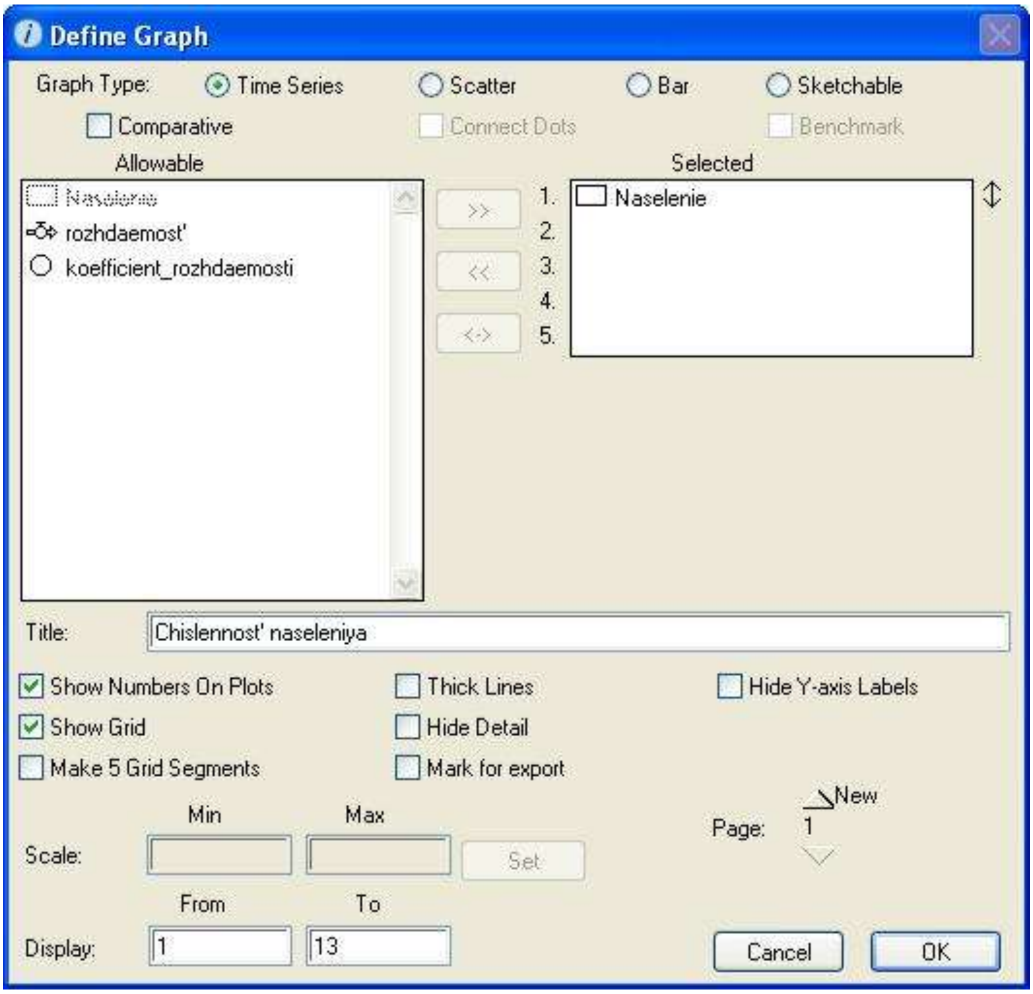



**Рисунок 85. Настройка графика для отражения содержимого резервуара**

После этого можно запустить модель на выполнение кнопкой на панели запуска в нижней части окна iThink (см. файл *ЛР7.Население4.itm*).

Если люди рожаются с постоянной интенсивностью, то население будет расти линейно (см. Рисунок 86).

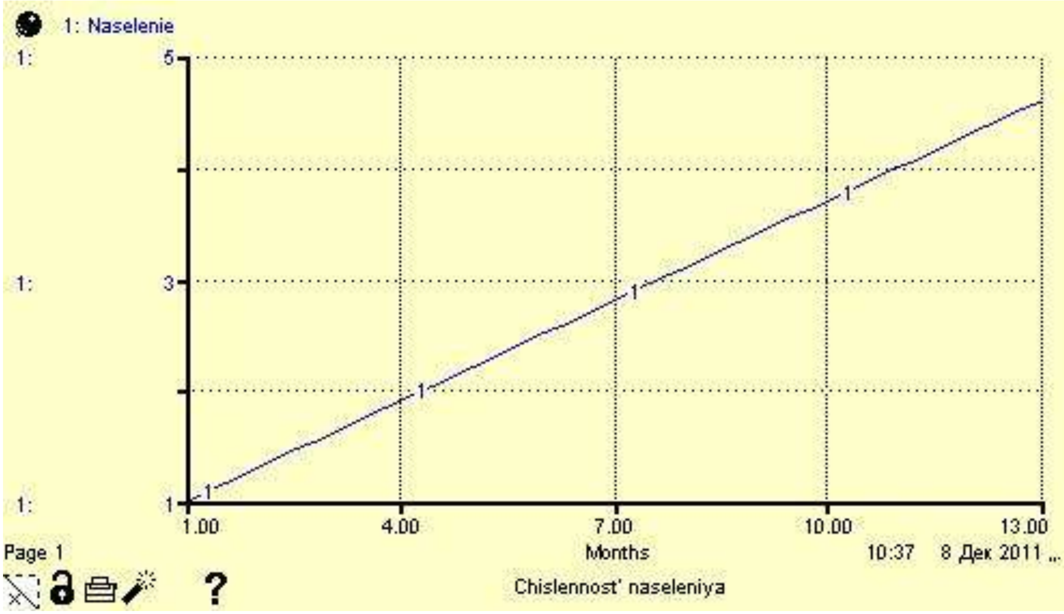



**Рисунок 86. Линейный график рождения населения**

Очевидно, что скорость изменения численности населения не является постоянной и зависит от текущего значения численности. Зададим эту связь, соединяя на схеме поток *rozdaemost'* с резервуаром *Naselenie*. Пусть также значение *rozdaemost'* будет равно: *koefficient rozhdaemosti * Naselenie* (см. Рисунок 87, Рисунок 88).

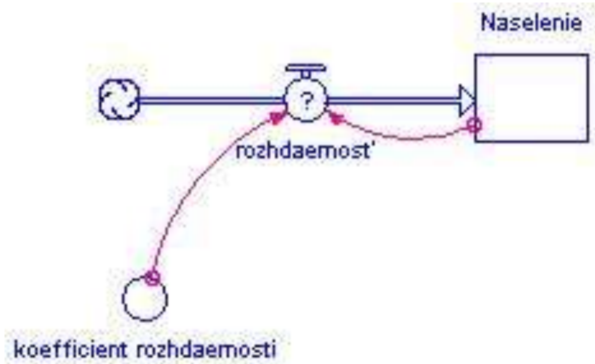



**Рисунок 87. Задание скорости изменения численности населения – 1**

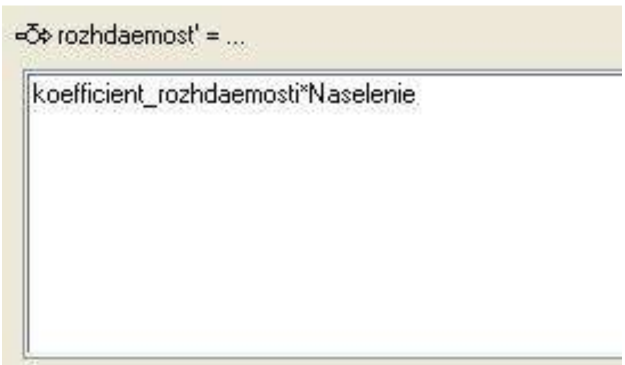



**Рисунок 88. Задание скорости изменения численности населения – 2**

Рисунок 89 отображает видим пример работы положительной обратной связи: количество населения увеличивается и это, в свою очередь, увеличивает прирост населения (см. файл *ЛР7.Население5.itm*).

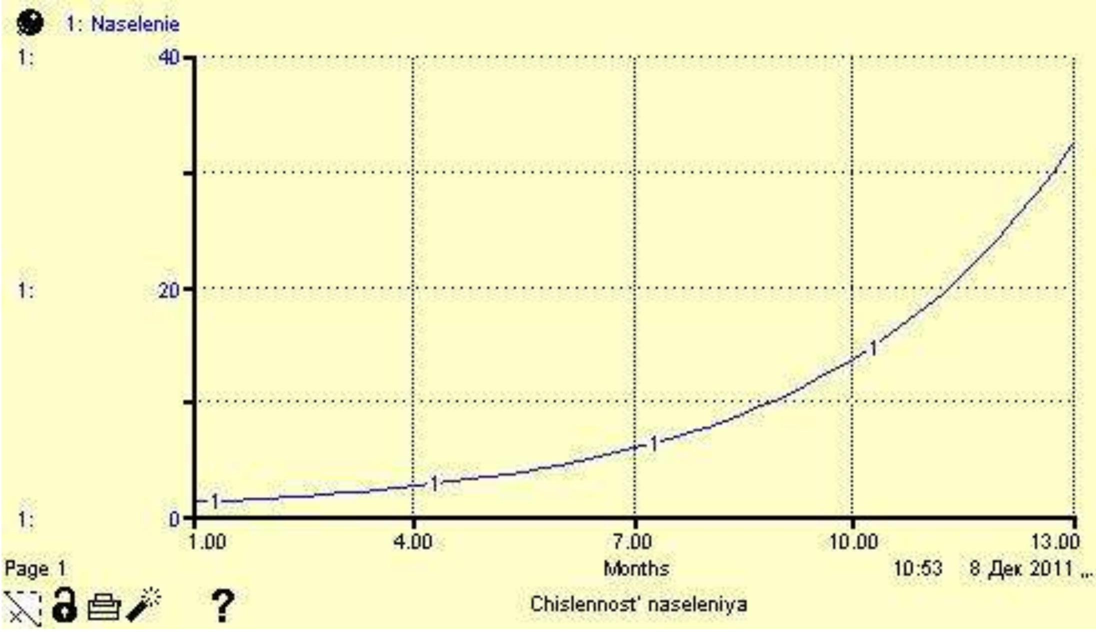



**Рисунок 89. Результат работы положительной обратной связи**

Уравнения системы, составленные iThink можно увидеть во вкладке Equation (см. Рисунок 90).

```
Naselenie(t) = Naselenie(t - dt) + (rozhdaemost') * dt
INIT Naselenie = 1
INFLOWS:
rozhdaemost' = koefficient_rozhdaemosti*Naselenie
koefficient_rozhdaemosti = 0.3
```

**Рисунок 90. Уравнения системы**

В приведенной выше модели (см. Рисунок 87, Рисунок 88) нет средств, ограничивающих рост населения. Добавим в нее фрагмент, отражающий смертность населения — поток *smertnost'*. Смертность зависит от коэффициента смертности (*koefficient smertnosti*) и от численности населения (*Naselenie*).

Пусть значения элементов равны: *koefficient smertnosti = 0.1* Naselenie, smertnost' = koefficient smertnosti * Naselenie*. Соответствующая модель и график изменения численности населения показаны ниже (см. Рисунок 91, Рисунок 92).

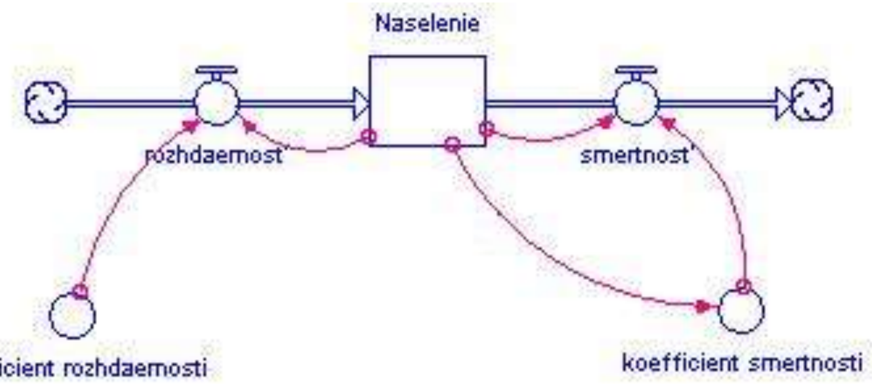



**Рисунок 91. Модель, учитывающая смертность**

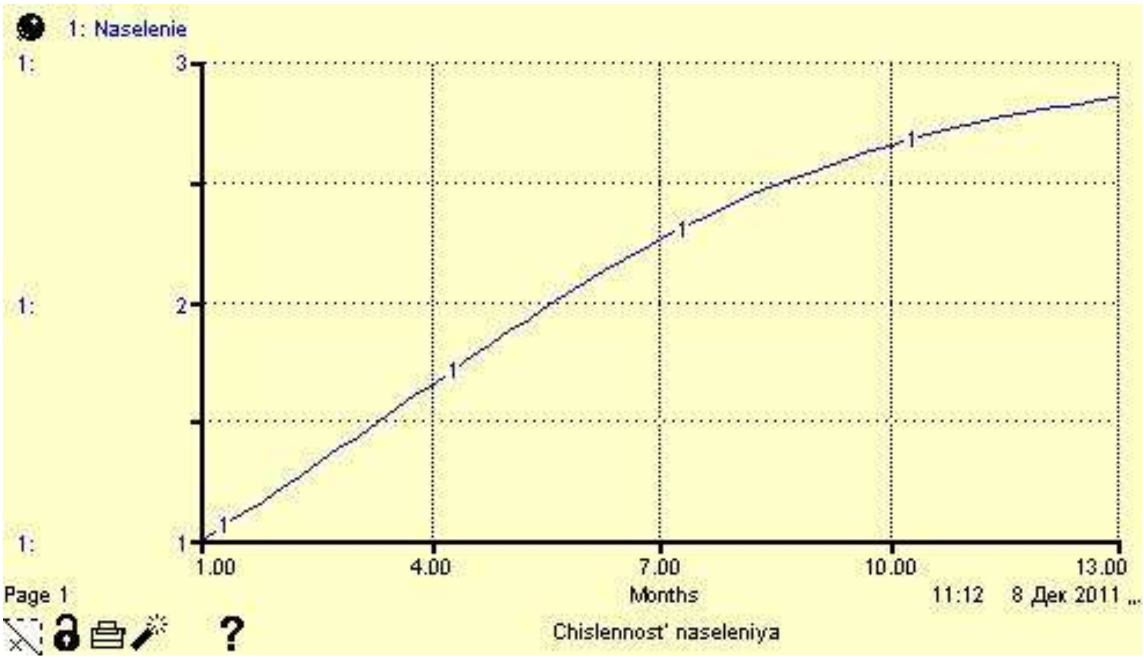



**Рисунок 92. График модели, учитывающей смертность**

Таким образом, в системе появляется отрицательная обратная связь (больше население -> больше смертей -> быстрее убыль населения), отвечающая за стабилизацию поведения системы, в данном случае — за стабилизацию численности населения.

Заметим, что коэффициент смертности, в свою очередь, зависит от численности населения: если плотность населения становится слишком велика, смертность увеличивается.

iThink в этом случае «конструирует» систему уравнений, приведённую ниже (см. Рисунок 93).

```
Naselenie(t) = Naselenie(t - dt) + (rozhdaemost' - smertnost') * dt
INIT Naselenie = 1
 INFLOWS:
   rozhdaemost' = koefficient_rozhdaemosti*Naselenie
 OUTFLOWS:
   smertnost' = koefficient_smertnosti*Naselenie
koefficient_rozhdaemosti = 0.3
koefficient_smertnosti = 0.1*Naselenie
```

**Рисунок 93. Система уравнения модели с учётом смертности**

## *Литература*


1. Кузнецов Ю. А., Перова В. И Применение пакетов имитационного моделирования для анализа математических моделей экономических систем. — Нижний Новгород: ННГУ, 2007. — 98 с.
2. Сидоренко В.Н. Системная динамика. - М.: ТЕИС, 1998. – 205 с.
3. Емельянов А.А. Имитационное моделирование в экономических информационных системах./ А.А. Емельянов, Е.А. Власова - М.: Изд-во МЭСИ, 1998.-108 с.