

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова

В. М. Адам'ян
М. Я. Сушко

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник
для студентів
фізичних спеціальностей
університетів

Одеса
“Астропринт”
2005

ББК 22.161.8я73
А281
УДК 517.972/974(075)

Посібник створено на базі частини лекційного курсу, що неодноразово читався студентам фізичного факультету Одеського національного університету. Він містить виклад основних ідей і методів варіаційного числення в обсязі, достатньому для їх подальшого застосування в курсах і спецкурсах із теоретичної фізики. Наводиться велика кількість завдань різного рівня складності, частину з яких можна використати в якості змістовних доповнень до курсів із класичної механіки, оптики, механіки неперервних середовищ, тензорного аналізу.

Посібник розраховано на студентів та аспірантів фізико-математичних та інженерно-фізичних спеціальностей університетів.

Рецензенти: **С. К. Асланов**, д-р фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри теоретичної механіки Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова;

О. В. Затовський, д-р фіз.-мат. наук, професор кафедри теоретичної фізики Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова.

Друкується за рішенням Вченої ради фізичного факультету
Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова.
Протокол № 10 від 28 травня 2004 р.

А $\frac{1602070200 - 089}{318 - 2005}$ Без оголош.

ISBN 966-318-340-3

© В. М. Адамян, М. Я. Сушко, 2005

У вертикальній площині дано дві точки A і B . Визначити шлях AMB , спускаючись по якому під впливом власної ваги, тіло M , почавши рухатися з точки A , дійде до точки B за найкоротший час. Щоб зацікавити аматорів подібних запитань та заохотити їх до більш активних спроб розв'язати вказану задачу, повідомляю, що вона не зводиться до марної розумової вправи, позбавленої будь-якого практичного значення – як це може комусь здатися. Насправді ця задача має великий практичний інтерес, при цьому, крім механіки, ще й для інших дисциплін, що може всім здатися неправдоподібним.

Johann Bernoulli. Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur, Acta Eruditorum Lipsiae, Junii A.MDCXCVI (1696), p. 269.

Передмова

Цей посібник адресовано особам, що систематично вивчають математичні методи фізики, або звертаються до них у своїй діяльності. Його основу складає частина лекційного курсу, який автори на протязі багатьох років читають студентам фізичного факультету Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова. Задум цієї книги – у порівняно невеликому об'ємі викласти основні ідеї та методи варіаційного числення в обсязі, достатньому для їх подальшого використання в курсах і спецкурсах із теоретичної фізики.

При виборі матеріалу та послідовності його подачі ми не відступили від більшості посібників і керівництв із цієї дисципліни: починаючи з необхідних умов існування екстремумів найпростіших функціоналів від функції однієї змінної, поступово узагальнюючи та ускладнюючи проблеми існування й відшукування екстремалей, ми врешті приходимо до функціоналів, що залежать від кількох функцій багатьох змінних.

Ми не мали на меті навести основні теореми й результати варіаційного числення в найбільш загальній формі, але намагалися прояснити їх зміст і походження, а також зробити прозорими ідеї, що використовуються при доведенні принципових положень. Зокрема, дещо більша увага приділяється з'ясуванню достатніх умов існування мінімумів функціоналів, необхідних умов існування умовних екстремумів, тощо.

Посібник насичено прикладами та завданнями з різних розділів теоретичної фізики. Вони не лише ілюструють суто математичні результати варіаційного числення, але й виступають змістовними доповненнями до курсів класичної механіки, оптики, механіки неперервних середовищ, тензорного аналізу, що інколи випадають із програм цих курсів. Разом із порівняно простими завданнями, що допомагають засвоїти основні поняття варіаційного числення та „набити руку” на розв’язуванні елементарних задач, у посібнику наводяться і складні проблемні завдання, які є невід’ємною складовою частиною теоретичного курсу. В останніх випадках до завдань додаються детальні вказівки, або наводяться їх повні розв’язки.

Сподіваємося, що запропонований посібник буде корисним для студентів та аспірантів інженерно-фізичних і математичних спеціальностей університетів.

В. М. Адамян,

М. Я. Сушко

1. НАЙПРОСТІША ЗАДАЧА ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

1.1. Поняття функціонала

Поняття функціонала природно виникає при розв'язуванні широкого класу геометричних і фізичних задач. Для прикладу, розглянемо найпростішу задачу про обчислення площі фігури, обмеженої на площині XOY графіком неперервної

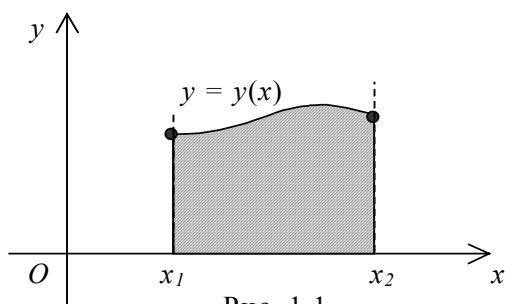


Рис. 1.1

однозначної функції $y = y(x)$, прямими $x = x_1$, $x = x_2$ та віссю абсцис OX (рис.1.1). Ця площа, як відомо, визначається інтегралом

$$S = \int_{x_1}^{x_2} dx |y(x)|, \quad (1.1)$$

і тому набуває того чи іншого значення в залежності від функції $y = y(x)$. Іншими словами, площа S є функцією кривої $y = y(x)$, тобто числовою функцією від функції.

Означення 1.1.1. Кажуть, що на деякому класі функцій задано функціонал J , якщо вказано правило, за яким кожній функції $y(x)$ цього класу ставиться у відповідність певне число $J[y]$.

У наведеному прикладі функціонал площі $S = S[y]$ задається на класі $C([x_1, x_2])$ функцій, неперервних на відрізку $[x_1, x_2]$. Надалі під класом $C^k([x_1, x_2])$ розумітимемо

множину функцій, неперервних на відрізку $[x_1, x_2]$ разом зі своїми k -першими похідними.

Клас функцій, на якому задано функціонал, називають *областю визначення функціонала*. Підкреслимо: щоб задати функціонал, треба вказати як правило відповідності, так і область визначення.

Завдання 1.1.1. Знайдіть явний вигляд та область визначення таких функціоналів:

а) довжина гладкої кривої $y = y(x)$;

б) площа поверхні, утвореної обертанням кривої $y = y(x)$ навколо осі OX ;

в) об'єм тіла, обмеженого поверхнею обертання кривої $y = y(x)$ навколо осі OX та площинами $x = x_1$, $x = x_2$;

г) координати центра мас однорідної нитки, форма якої описується рівнянням $y = y(x)$.

$$\text{Відповіді: а) } J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2(x)}, \quad C^1([x_1, x_2]);$$

$$\text{б) } J[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} dx |y(x)| \sqrt{1 + y'^2(x)}, \quad C^1([x_1, x_2]);$$

$$\text{в) } J[y] = \pi \int_{x_1}^{x_2} dx y^2(x), \quad C([x_1, x_2]);$$

$$\text{г) } X[y] = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} dx x \sqrt{1 + y'^2(x)}, \quad Y[y] = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} dx y \sqrt{1 + y'^2(x)}, \text{ де}$$

$$M = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2(x)}, \quad C^1([x_1, x_2]).$$

1.2. Основна задача варіаційного числення

Основна задача варіаційного числення полягає у відшукуванні такої кривої (чи поверхні) $y_0(x)$, для якої значення $J[y_0]$ заданого функціонала є найменшим або найбільшим по відношенню до його значень $J[y]$ на всіх близьких до $y_0(x)$ кривих $y(x)$ із заданого класу функцій. Кривих (поверхонь) із цією властивістю може бути декілька; вони називаються *екстремальми* функціонала J .

Сформульована задача подібна до задачі диференціального числення про відшукування екстремумів функції $f(x)$, тобто тих значень x_0 змінної x , для яких величини $f(x_0)$ є найменшими або найбільшими у порівнянні зі значеннями $f(x)$ у достатньо близьких до x_0 точках.

Зупинимося на більш точних означеннях.

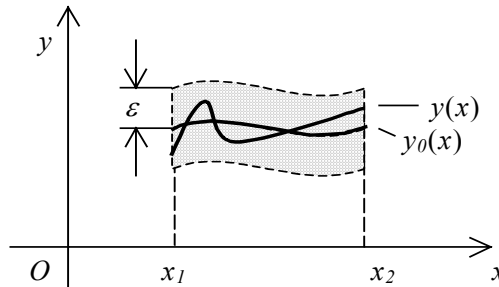


Рис. 1.2

Означення 1.2.1. ε -околом порядку k кривої $y_0(x)$ на проміжку $[x_1, x_2]$ називають множину всіх кривих $y(x)$, для яких скрізь на цьому проміжку виконуються нерівності

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \varepsilon, \quad |y'(x) - y_0'(x)| \leq \varepsilon, \dots,$$

$$|y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)| \leq \varepsilon.$$

Число ε називають відстанню порядку k між кривими $y(x)$ і $y_0(x)$.

Означення 1.2.2. Кажуть, що функціонал J має на кривій $y_0(x)$ із заданої множини кривих класу $C^k([x_1, x_2])$ відносний екстремум, якщо нерівність $J[y] \leq J[y_0]$ (або $J[y] \geq J[y_0]$) виконується для всіх кривих $y(x)$ цієї множини, належних ε -околові порядку k кривої $y_0(x)$. Якщо ж ця нерівність справджується для всіх кривих $y(x)$ заданої множини, розміщених у деякій області D площини XOY , то кажуть, що функціонал $J[y]$ набуває на кривій $y_0(x)$ абсолютного екстремуму в області D .

Завдання 1.2.1. Серед усіх плоских гладких кривих, що з'єднують задані точки $M(x_1, y_1)$ і $N(x_2, y_2)$, вкажіть ту, що має найменшу довжину. Визначте тип екстремуму.

Відповідь: пряма $y(x) = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$; абсолютний.

1.3. Необхідна умова існування екстремуму функціонала.

Теорема Ейлера-Лагранжа

Розглянемо найпростіший тип функціонала

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y'), \quad (1.2)$$

де функція $F(x, y, y')$ є неперервною разом зі своїми першими та другими похідними за всіма аргументами в деякій області D площини XOY і при довільних значеннях похідної $y'(x)$.

Для дослідження необхідних умов існування екстремумів функціоналів виду (1.2) використовується наступний факт.

Лема 1.3.1. Якщо неперервна функція $f(x)$ задовольняє співвідношення

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) h(x) = 0,$$

де $h(x)$ – довільна функція, що є гладкою на проміжку $[x_1, x_2]$ та дорівнює нулю на його кінцях ($h(x_1) = h(x_2) = 0$), то скрізь на цьому проміжку $f(x) \equiv 0$.

Доведення. Припустимо, що твердження леми хибне. Тоді в деякій точці x_0 проміжку $[x_1, x_2]$ значення $f(x_0) \neq 0$, наприклад, $f(x_0) > 0$. Унаслідок неперервності функція $f(x)$ буде додатною й у деякому околі $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$, точки x_0 , який повністю належить $[x_1, x_2]$. Скориставшись тепер довільністю $h(x)$, візьмемо її у вигляді

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x_1 \leq x < x_0 - \delta, \\ \eta^2(x), & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta < x \leq x_2, \end{cases}$$

де $\eta(x)$ – довільна гладка функція, яка відмінна від нуля при $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ та дорівнює нулю при $x = x_0 \pm \delta$. Дістаємо

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x) h(x) = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} dx f(x) \eta^2(x) > 0,$$

що суперечить умові леми.

Зауважимо, що подібну лему можна довести й для кратних інтегралів. Її часто називають основною лемою варіаційного числення.

Лема 1.3.2. Нехай крива $y_0(x)$ повністю лежить в області D і є екстремаллю функціонала (1.2) у класі $C^2([x_1, x_2])$ функцій зі спільним початком і спільним кінцем (рис. 1.3):

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2. \quad (1.3)$$

Тоді вона задовольняє диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (1.4)$$

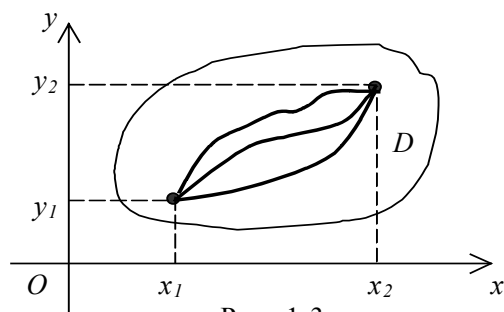


Рис. 1.3

Доведення. Нехай $y_0(x)$ — екстремаль функціонала (1.2). Розглянемо множину кривих $y(x) = y_0(x) + \delta y(x) \equiv y_0(x) + \alpha h(x)$ з ε -околу другого порядку кривої $y_0(x)$. Тут δy — відхилення функції y від екстремалі, α — близький до нуля параметр ($|\alpha| \leq \alpha_0$), $h(x)$ — довільна гладка функція, для якої $\max_{x_1 \leq x \leq x_2} \{|\delta y(x)|, |\delta y'(x)|, |\delta y''(x)|\} < \varepsilon$. На кінцях проміжку $y(x_i) = y_0(x_i) + \alpha h(x_i)$, або $y_i = y_i + \alpha h(x_i)$ ($i = 1, 2$), звідки $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Зауважимо, що криві $y(x)$ з області визначення функціонала називають *допустимими* кривими досліджуваної варіаційної задачі.

Функціонал (1.2) при підстановці в нього функції $y(x)$ являє собою функцію від параметра α :

$$\varphi(\alpha) = J[y_0 + \alpha h] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y_0 + \alpha h, y'_0 + \alpha h'),$$

яка при $\alpha = 0$ має екстремум (оскільки $J[y_0]$ — екстремальне значення функціонала); тому $\varphi'(0) = 0$.

Умови, які задовольняє функція $F(x, \alpha) \equiv F(x, y_0 + \alpha h, y'_0 + \alpha h')$, означають, що функції $F(x, \alpha)$ і $\partial F(x, \alpha) / \partial \alpha$ неперервні в прямокутнику $[x_1, x_2] \times [-\alpha_0, \alpha_0]$, $\alpha_0 \cdot \max_{x_1 \leq x \leq x_2} \{ |h(x)|, |h'(x)| \} < \varepsilon$, і тому диференціювання за α під знаком інтеграла є законним. Маємо:

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \Big|_{y=y_0+\alpha h, y'=y'_0+\alpha h'} \cdot h(x) + \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \Big|_{y=y_0+\alpha h, y'=y'_0+\alpha h'} \cdot h'(x) \right\}.$$

Підставляючи $\alpha = 0$ та інтегруючи другий доданок частинами, дістаємо:

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \Big|_{y=y_0, y'=y'_0} \cdot h(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \\ + \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \Big|_{y=y_0, y'=y'_0} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \Big|_{y=y_0, y'=y'_0} \right\} h(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Перший доданок у формулі (1.5) після підстановки меж інтегрування дорівнює нулю. Другий доданок містить під знаком інтеграла довільну функцію $h(x)$; згідно з Лемою 1.3.1, він дорівнює нулю лише за умови, що дорівнює нулю вираз у фігурних дужках. Останній є ніщо інше, як рівняння (1.4), записане для функції $y_0(x)$.

Зробимо деякі зауваження і введемо ряд нових понять.

1) Можна довести, що рівняння (1.4) справджується й тоді, коли екстремум шукається на множині функцій із класу $C^1([x_1, x_2])$. Більше того, якщо функція $y_0(x)$ – екстремаль, то похідна $\partial F / \partial y'$ є на ній функцією, яка має повну похідну за x , а в тих точках кривої $y_0(x)$, де $\partial^2 F / \partial y'^2 \neq 0$, існує неперервна друга похідна $y_0''(x)$. Отже, необхідну умову існування екстремуму (відносного, абсолютного) функціонала (1.2) у класі гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем можна сформулювати таким чином:

Теорема Ейлера-Лагранжа. Для того щоб функція $y_0(x)$ із класу $C^1([x_1, x_2])$ надавала екстремум функціоналу (1.2) за умов (1.3), необхідно, щоб вона задовольняла рівняння (1.4). Якщо $\partial^2 F / \partial y'^2 \neq 0$ всюди на відрізку $[x_1, x_2]$, то $y_0(x) \in C^2([x_1, x_2])$.

2) У загальному випадку рівняння Ейлера-Лагранжа є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку відносно функції $y(x)$. Серед двічі неперервно диференційовних функцій воно відбирає ті, що можуть бути екстремальми, але не обов'язково ними є. Відібрані функції, взагалі кажучи, залежать від двох довільних сталих інтегрування, тобто утворюють двопараметричну сім'ю кривих $y = y(x, C_1, C_2)$. Сталі C_1 і C_2 визначаються за допомогою умов (1.3) на межах проміжку $[x_1, x_2]$.

З упевненістю можна стверджувати, що функціонал (1.2) не має екстремалей, якщо рівняння Ейлера-Лагранжа взагалі не має розв'язків; або має розв'язки, але вони не задовольняють умови (1.3); або має розв'язки, що задовольняють умови (1.3), але не належать класу $C^1([x_1, x_2])$.

У задачах прикладного характеру факт існування гладкого екстремуму визначається, як правило, самою постановкою задачі.

Завдання 1.3.1. Які з гладких кривих, що проходять через задані початкову й кінцеву точки, можуть бути екстремальними таких функціоналів:

$$\text{а) } J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx y, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2;$$

$$\text{б) } J[y] = \int_0^2 dx x y y', \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1;$$

$$\text{в) } J[y] = \int_0^\pi dx (y^2 + y'^2 - 2y \sin x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1;$$

$$\text{г) } J[y] = \int_0^3 dx \left[\frac{1}{(1+x)} y^2 + 4(1+x) y'^2 \right], \quad y(0) = 0, \quad y(3) = \frac{3}{2};$$

$$\text{д) } J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2(x)}, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2;$$

$$\text{е) } J[y] = \int_0^1 dx x^{2/3} y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \text{ (приклад Гільберта);}$$

$$\text{є) } J[y] = \int_0^{3/2} dx (2y + y'^3), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{3}{2}\right) = 1;$$

$$\text{ж) } J[y] = \int_0^1 dx x^2 y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \text{ (приклад Вейерштрасса);}$$

$$\text{з) } J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 - 4y y'^3 + 2x y'^4), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0?$$

Вказівки: в) загальний розв'язок рівняння $y'' - y = -\sin x$ зручно шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння $y'' - y = 0$ та частинного розв'язку неоднорідного; останній шукайте у вигляді $y(x) = a \sin x + b \cos x$;

г) розв'язок рівняння $4(1+x)^2 y'' + 4(1+x)y' - y = 0$ шукайте у вигляді $y = c(1+x)^\alpha$; характеристичне рівняння має два корені α_1 і α_2 , тому загальний розв'язок $y = c_1(1+x)^{\alpha_1} + c_2(1+x)^{\alpha_2}$.

Відповіді: а) екстремаль не існує (рівняння Ейлера-Лагранжа вироджується в неправильну тотожність); б) екстремаль не існує (рівняння Ейлера-Лагранжа зводиться до $y(x) = 0$, і умова справа не виконується); в) $y(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} \pi}$; г) $y(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$; д) див. Завдання 1.2.1; е) екстремаль не існує, оскільки розв'язок рівняння Ейлера-Лагранжа $y(x) = x^{1/3}$ не є функцією класу $C^1([0,1])$; є) $y(x) = (2x/3)^{3/2}$; ж) екстремаль не існує (умова зліва не виконується); з) $y(x) = 0$.

3) Функцію $\delta y(x)$ називають *варіацією функції* $y(x)$, а величину $\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y]$ – приростом функціонала $J[y]$, зумовленим варіацією δy . Головну (лінійну) за δy частину приросту функціонала називають *варіацією функціонала* $\delta J[y]$. Для знаходження $\delta J[y]$ у нашому випадку в різниці $\Delta J[y]$ досить виділити член, лінійний за α :

$$\begin{aligned}\Delta J[y] &= J[y + \delta y] - J[y] = J[y + \alpha h] - J[y] = \varphi(\alpha) - \varphi(0) = \\ &= \varphi(0) + \varphi'(0)\alpha + O(\alpha^2) + \dots - \varphi(0) = \varphi'(0)\alpha + O(\alpha^2) + \dots\end{aligned}$$

Відокремлюючи перший доданок, маємо:

$$\delta J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right\} dx.$$

Якщо $y(x) \in C^2([x_1, x_2])$, то, враховуючи формулу (1.5), знаходимо:

$$\delta J[y] = \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx.$$

Для кривих із закріпленими кінцями

$$\delta J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx. \quad (1.6)$$

Для екстремальної кривої $y = y_0(x)$ маємо: $\delta J[y_0] = 0$. Це співвідношення нагадує теорему Ферма для точок екстремуму x_0 функції $f(x)$: $df(x_0) = 0$. Аналогія

між повним диференціалом функції та варіацією функціонала дозволяє шукати останній за звичайними правилами знаходження диференціала $df(x) = f'(x)dx$, тільки тепер у ролі приросту аргументу dx виступає варіація функції δy , і підінтегральний вираз у формулі для $\Delta J[y] = J[y + \delta y] - J[y]$ формально розвивається в ряд за δy .

Варіацію δy можна диференціювати один або декілька разів, причому $\frac{d^k \delta y}{dx^k} = \delta \frac{d^k y}{dx^k}$.

Підкреслимо: якщо існує варіація функціонала як диференціал за параметром (див. Лему 1.3.2), то існує й варіація функціонала як головна лінійна частина приросту функціонала, і ці два означення рівносильні.

Внески в $\Delta J[y]$, пропорційні другому та більш високим степеням δy , називають другою варіацією ($\delta^2 J[y]$) та варіаціями вищих порядків.

1.4. Функціональна похідна. Інваріантність рівняння Ейлера–Лагранжа відносно перетворення координат

Аналогом похідної у варіаційному численні виступає функціональна похідна.

Виберемо варіацію δy так, щоб вона відрізнялася від нуля в малому Δ -околі точки x_0 , тобто щоб криві y та $y + \delta y$ збігалися скрізь на проміжку $[x_1, x_2]$, за винятком інтервалу $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta) \subset [x_1, x_2]$ (рис. 1.4).

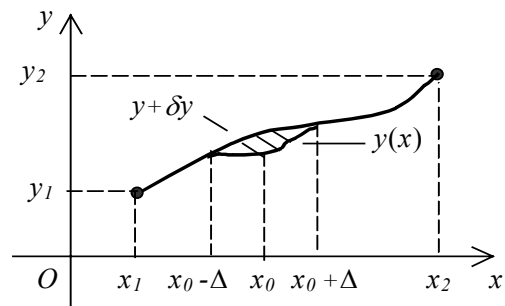


Рис. 1.4

Користуючись теоремою про середнє, інтеграл (1.6) перепишемо у вигляді

$$\delta J[y] = \int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx = \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \Big|_{x=\tilde{x}_0} \cdot S,$$

де $S = \int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} dx \delta y(x)$ – з точністю до знака площа (заштрихованої області) між кривими y

та $y + \delta y$ (називатимемо її площею Δ -околу), \tilde{x}_0 – деяка точка з Δ -околу.

Функціональною похідною за кривою y у точці x_0 називають границю відношення

$$\frac{\delta J[y]}{\delta y} \equiv \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta J[y]}{S} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \bigg|_{x=x_0}. \quad (1.7)$$

Функціональна похідна вздовж екстремальної кривої дорівнює нулю в кожній точці цієї кривої.

Поняття функціональної похідної дозволяє досить просто довести той факт, що властивість кривої бути екстремаллю є інваріантна відносно перетворення координат.

Теорема 1.4.1. Нехай крива $y = y_0(x)$ є екстремаллю функціонала (1.2) на множині кривих, що з'єднують точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) . Крім того, нехай після переходу від координат (x, y) до криволінійних координат (t, q) за формулами

$$x = \varphi(t, q), \quad y = \psi(t, q),$$

з відмінним від нуля якобіаном переходу

$$I \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0,$$

її рівняння набирає вигляду $q = q_0(t)$, а функціонал $J[y]$ перетворюється на функціонал $J_1[q]$

$$J[y] = J_1[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t, q, q') \quad (1.8)$$

від кривих $q = q(t)$, що з'єднують точки (t_1, q_1) і (t_2, q_2) на площині TOQ , де $x_i = \varphi(t_i, q_i)$, $y_i = \psi(t_i, q_i)$, $i = 1, 2$. Тоді екстремум функціонала $J_1[q]$ досягається саме на кривій $q = q_0(t)$, яка буде розв'язком рівняння Ейлера-Лагранжа для $J_1[q]$:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'} = 0. \quad (1.9)$$

Іншими словами, якщо загальний розв'язок рівняння (1.4) має вигляд $y = y_0(x, C_1, C_2)$, то загальний розв'язок рівняння (1.9) визначається як неявна функція $q = q_0(t)$, що задовольняє рівняння $\psi(t, q_0(t)) = y_0(\varphi(t, q_0(t)), C_1, C_2)$.

Доведення. Справді, якщо в околі кожної точки x_0 з інтервалу (x_1, x_2) для екстремальної кривої виконується співвідношення

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta J[y]}{S} = 0,$$

то й в околі кожної відповідної точки t_0 з інтервалу (t_1, t_2) функціональна похідна від $J_1[q]$ дорівнюватиме нулю:

$$\lim_{\Delta_1 \rightarrow 0} \frac{\delta J_1[q]}{S_1} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\delta J[y]}{S} \frac{S}{S_1} = 0,$$

оскільки відношення площ S і S_1 старого й нового околів прямує до детермінанта I , який не дорівнює нулю.

Інваріантність рівняння Ейлера-Лагранжа відносно перетворення координат дозволяє при розв'язуванні конкретних геометричних та фізичних задач в однаковій мірі користуватися різними криволінійними системами координат, лише б вони були взаємно однозначно пов'язані з декартовими. Перехід до криволінійних координат, наприклад, сферичних, стає особливо ефективним у тому випадку, коли система має відповідну симетрію, зокрема, сферичну, оскільки тоді рівняння Ейлера-Лагранжа набирають найбільш простого вигляду. Зауважимо, що перехід до нових координат можна здійснювати безпосередньо в підінтегральному виразі (1.2), а потім для нового інтеграла писати рівняння Ейлера-Лагранжа – це й буде початкове рівняння в декартових координатах, віднесене до нових змінних.

1.5. Випадки повної інтегровності та перші інтеграли рівняння Ейлера-Лагранжа

Як уже зазначалося, рівняння Ейлера-Лагранжа є, взагалі кажучи, звичайним диференціальним рівнянням другого порядку, і тому знаходження його розв'язків є в більшості випадків задачею значно складнішою, ніж розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку. У зв'язку з цим особливий інтерес привертають умови, за яких його порядок можна понизити чи, навіть, це рівняння можна аналітично розв'язати. Виявляється, що це можливо в тих випадках, коли ядро $F(x, y, y')$ функціонала (1.2) не залежить від одного чи двох своїх аргументів. У фізичних задачах

відсутність такої залежності є проявом певних симетрій, наприклад, простору та часу, що призводять до виконання відповідних законів збереження.

Зупинимося на цьому більш детально. Нагадаємо, що під x і y можна розуміти довільні криволінійні координати.

1) Якщо $F = F(y')$, тобто залежить лише від похідної y' , то $\partial F / \partial y = 0$ і $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \frac{dy'}{dx}$. Рівняння (1.4) зводиться до

$$y'' \left(\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2} \right) = 0, \quad (1.10)$$

і хоча б один із співмножників повинен дорівнювати нулю. Нехай $y''(x) = 0$, тоді $y'(x) = C_1$, $y(x) = C_1 x + C_2$. Ці криві утворюють двопараметричну сім'ю прямих. В іншому можливому випадку, коли

$$\left(\frac{\partial^2 F(y')}{\partial y'^2} \right) \equiv f(y') = 0,$$

рівняння $f(y') = 0$ є функціональним рівнянням відносно похідної y' . Нехай $y'_i(x) \equiv k_i$ – усі його дійсні корені (їх може й не бути). Тоді $y_i(x) = k_i x + C$. Ці криві утворюють більш вузьку однопараметричну (k_i – фіксовані числа) сім'ю прямих, що входить до зазначеної вище двопараметричної.

Таким чином, у випадку, коли $F = F(y')$, екстремалами функціонала (1.2) можуть бути лише прямі

$$y(x) = C_1 x + C_2. \quad (1.11)$$

2) Якщо $F = F(x, y)$, тобто не залежить від похідної y' , то $\partial F / \partial y' = 0$, і рівняння (1.4) вироджується у функціональне відносно $y(x)$:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \equiv g(x, y) = 0. \quad (1.12)$$

Якщо розв'язки $y_i = y_i(x)$ рівняння (1.12) існують, то, на відміну від розв'язків диференціального рівняння, вони не містять довільних сталих, підбором яких задовольняють умови (1.3). Знайдені функції $y_i(x)$ підпорядковуватимуться умовам (1.3) лише у виключних ситуаціях, тобто в загальному випадку відповідний функціонал не матиме екстремалей.

3) Якщо F залежить від y' лінійно, тобто має вигляд $F = a(x, y) + b(x, y)y'$, де $a(x, y)$, $b(x, y)$ – деякі функції, то рівняння Ейлера-Лагранжа знову вироджується у функціональне:

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} \equiv g(x, y) = 0.$$

Як щойно було зазначено, розв'язок подібного рівняння у загальному випадку не задовольняє умови в крайніх точках, і тому функціонал (1.2), найімовірніше, екстремалей не має. Більше того, варіаційна задача взагалі втрачає зміст, якщо

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} \equiv 0,$$

бо тоді вираз $a(x, y)dx + b(x, y)dy$ є повним диференціалом, і значення функціонала (1.2) залежать лише від початкової та кінцевої точок, а не від вибору кривої $y = y(x)$.

4) $F = F(x, y')$, тобто не залежить явно від y (змінну y у цьому випадку називають *циклічною*). Тоді $\partial F / \partial y = 0$, і рівняння (1.4) набуває вигляду

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = 0.$$

Його відразу можна один раз проінтегрувати; іншими словами, рівняння Ейлера-Лагранжа має перший інтеграл

$$\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'} = C_1. \quad (1.13)$$

Це є диференціальне рівняння першого порядку, яке не залежить явно від функції $y(x)$. Розв'язавши його відносно y' , отримаємо рівняння або декілька рівнянь типу $y' = f(x, C_1)$, звідки $y(x)$ знаходимо інтегруванням:

$$y(x) = \int dx f(x, C_1) + C_2. \quad (1.14)$$

5) $F = F(y, y')$, тобто не залежить явно від x . Помноживши обидві частини виразу

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' = 0$$

на y' , перепишемо його як повну похідну

$$\frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

(перевірте!). Відповідно, рівняння Ейлера-Лагранжа має перший інтеграл

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1. \quad (1.15)$$

Це диференціальне рівняння першого порядку, яке не залежить явно від x . Розв'язавши його відносно y' , дістанемо рівняння або декілька рівнянь типу $y' = f(y, C_1)$. Після відокремлення змінних та інтегрування, функції y знаходимо із співвідношення

$$\int \frac{dy}{f(y, C_1)} = x + C_2. \quad (1.16)$$

Зауваження. Інтеграли (1.13) і (1.15) інколи називають *інтегралом імпульсу* та *інтегралом енергії*. Ці назви походять із класичної механіки, де кожній механічній системі, підпорядкованій ідеальним в'язям, ставиться у відповідність певна функція $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ від $s \geq 1$ узагальнених координат $q_k(t)$ та узагальнених швидкостей \dot{q}_k точок системи, а також часу t . Нагадаємо, що узагальненими координатами називають будь-які величини (не обов'язково декартові координати точок системи), за допомогою яких можна однозначно задати положення системи у просторі. Узагальнені швидкості означаються як похідні $\dot{q}_k \equiv dq_k(t)/dt$.

Функцію $L(q_k, \dot{q}_k, t)$ називають *функцією Лагранжа*; вона дорівнює різниці кінетичної K та потенціальної Π енергій системи як функцій змінних $q_k(t)$ і $\dot{q}_k(t)$. Її похідні

$$P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad F_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad (1.17)$$

називаються відповідно *узагальненими імпульсами* та *узагальненими силами*. Повна енергія механічної системи

$$E = K + \Pi = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L. \quad (1.18)$$

Згідно з *принципом найменшої дії* (*принципом Гамільтона*), рух системи на проміжку часу $[t_1, t_2]$ між двома фіксованими положеннями, які характеризуються значеннями $q_k(t_1)$ і $q_k(t_2)$ узагальнених координат точок системи, відбувається так, що функціонал дії

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (1.19)$$

набуває екстремального (зазвичай – мінімального) значення:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_k, \dot{q}_k, t) = 0. \quad (1.20)$$

Для одновимірної системи з одним ступенем вільності $q(t)$ необхідною умовою для цього є виконання рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (1.21)$$

Як буде показано далі, при наявності s ступенів вільності $q_k(t)$ еволюція останніх від початкового положення $q_k(t_1)$ до кінцевого $q_k(t_2)$ визначається системою диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (1.22)$$

Система рівнянь (1.22) залишається інваріантною відносно вибору узагальнених координат $q_k(t)$. Для знаходження сталих інтегрування в розв'язках цих рівнянь замість умов типу (1.3) (тобто значень координат точок системи в початковий та кінцевий моменти часу: $q_k(t_1) = q_k^{(1)}$ і $q_k(t_2) = q_k^{(2)}$) використовують так звані початкові умови – значення координат і швидкостей у початковий момент часу t_1 : $q_k(t_1) = q_k^{(1)}$, $\dot{q}_k(t_1) = v_k^{(1)}$ (зазвичай вважають, що $t_1 = 0$). У фізичному плані це означає, що рух механічної системи жорстко детермінований: при відомому рівнянні руху він повністю визначається початковими координатами та початковими швидкостями точок системи^{*)}.

^{*)} Для диференціальних рівнянь другого порядку початкові умови гарантують єдиність розв'язку при довільних значеннях $(q_k^{(1)}, v_k^{(1)})$ (окрім спеціальних випадків, коли t_1 – особлива точка). Умови ж на кінцях проміжку $[t_1, t_2]$ не гарантують взагалі існування відповідної траєкторії. Наприклад, для умов $q(0) = a$, $q(2\pi/\omega) = b$

За допомогою позначень (1.17) рівняння руху (1.22) набувають вигляду рівнянь Ньютона, записаних для узагальнених імпульсів та узагальнених сил:

$$\dot{P}_k = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (1.23)$$

У порівнянні з рівняннями Ньютона, записаними для кожної матеріальної точки системи, рівняння (1.22), (1.23) мають ту перевагу, що їх кількість дорівнює кількості ступенів вільності системи, і при наявності в'язей, що обмежують рух системи, є меншою від $3N$, тобто є меншою від кількості рівнянь Ньютона, потрібних для опису системи N матеріальних точок. Крім того, у рівняння Ейлера-Лагранжа не входять сили реакції в'язей, які наперед невідомі.

Завдання 1.5.1. Для наведених функціоналів знайдіть можливі екстремалі, які проходять через задані точки:

а) $J[y] = \int_0^1 dx \cos y', \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \pi;$

б) $J[y] = \int_0^{\pi/4} dx (y^2 - y'^2), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$

в) $J[y] = \int_0^2 dx (y^2 x^2 + y^4), \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 2;$

г) $J[y] = \int_1^2 dx x^2 y'^2, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1;$

д) $J[y] = \int_0^1 dx e^y y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \ln 4;$

е) $J[y] = \int_0^3 dx (y'^3 - y'^2), \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 1;$

є) $J[y] = \int_1^2 dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{x}, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1;$

розв'язок рівняння $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ на проміжку $[0, 2\pi/\omega]$ існує лише при $a = b$, і при виконанні цієї умови існує нескінченно багато розв'язків цього рівняння.

$$\text{ж)} \quad J[y] = \int_0^7 dx (y'^2 - yy'^2), \quad y(0) = 2, \quad y(7) = 5;$$

$$\text{з)} \quad J[y] = \int_0^1 dx (y^2 - y'^2) e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e;$$

$$\text{и)} \quad J[y] = \int_0^4 dx y^2 y'^2, \quad y(0) = 1, \quad y(4) = 3;$$

$$\text{і)} \quad J[y] = \int_0^1 dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 \quad (y > 0);$$

$$\text{ї)} \quad J[y] = \int_0^2 dx (xy^2 + x^2 yy'), \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 2.$$

Вказівка. Екстремальну криву можна шукати або розв'язуючи диференціальне рівняння другого порядку (1.4), або за допомогою перших інтегралів (1.13), (1.15) (якщо вони існують), тобто інтегруючи відповідне диференціальне рівняння першого порядку. Вибір того чи іншого способу визначається міркуваннями простоти та зручності обчислень. У зв'язку з цим зверніть увагу на приклади б), д), є), ж), и), і).

Відповіді: а) $y(x) = \pi x$; б) $y(x) = \sqrt{2} \sin x$; в) екстремаль не існує; г) $y(x) = -1 + 4/x$; д) $y(x) = 2 \ln(x+1)$; е) $y(x) = x/3$; є) $y(x) = -2 + \sqrt{5-x^2}$; ж) $y(x) = 1 + (1+x)^{2/3}$; з) $y(x) = xe^{2-x}$; и) $y(x) = \sqrt{2x+1}$; і) $y(x) = \sqrt{1+x-x^2}$; ї) варіаційна задача не має змісту.

Завдання 1.5.2. По якій траєкторії повинен рухатися літак, щоби при сталому горизонтальному вітрові та сталій висоті польоту долетіти з початкової точки в кінцеву за найкоротший час. (Окремий випадок аеронавтичної задачі Цермелло).

Розв'язання. Обмежимося випадком плоского польоту та нехтуватимемо рухом земної поверхні. Нехай літак рухається у площині XOY із початкової точки $M(x_1, y_1)$

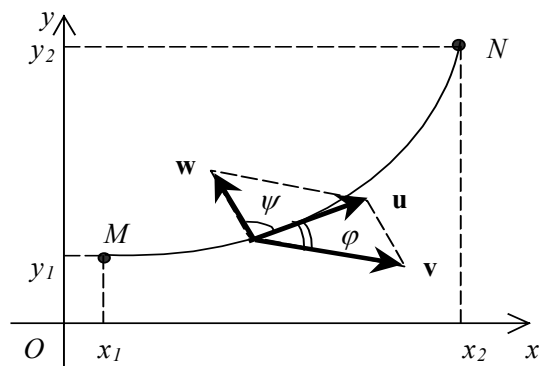


Рис. 1.5

у кінцеву $N(x_2, y_2)$ вздовж гладкої кривої $y(x)$ (див. рис. 1.5). Швидкість руху літака \mathbf{u} відносно землі

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad (1')$$

де \mathbf{v} – швидкість літака відносно повітря, \mathbf{w} – швидкість вітру відносно землі. За величиною швидкість (1') дорівнює $u = dl/dt$, де

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad - \quad \text{елемент}$$

довжини траєкторії літака, dt – час, потрібний літаку, щоб його пройти. Зауважимо, що швидкість літака вздовж елементарної ділянки практично не змінюється.

Позначимо кути між векторами \mathbf{u} та \mathbf{v} , \mathbf{u} та \mathbf{w} через, відповідно, φ і ψ . Спроекуємо вираз (1') на напрям вектора \mathbf{u} та на перпендикулярний до нього:

$$u = v \cos \varphi + w \cos \psi, \quad v \sin \varphi = w \sin \psi.$$

Звідси знаходимо: $u = w \cos \psi + \sqrt{v^2 - w^2 \sin^2 \psi}$.

Одиничні орти вздовж векторів \mathbf{u} та \mathbf{w} мають координати $\mathbf{n}_u = \left(\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl} \right)$,

$$\mathbf{n}_w = \left(\frac{w_x}{w}, \frac{w_y}{w} \right), \text{ тому } \cos \psi = \mathbf{n}_u \cdot \mathbf{n}_w = \frac{dx}{dl} \frac{w_x}{w} + \frac{dy}{dl} \frac{w_y}{w}.$$

Щоб знайти час польоту літака з точки M у точку N , розіб'ємо всю траєкторію $y = y(x)$ на малі ділянки dl_i , на яких значення u_i швидкості літака практично сталі, додамо проміжки часу $dt_i = dl_i / u_i$, за які літак проходить ці ділянки, та перейдемо до границі здобутої інтегральної суми при $dl_i \rightarrow 0$. Дістаємо:

$$T[y] = \int_{MN} \frac{dl}{u} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx(1 + y'^2)}{(w_x + y'w_y) + \sqrt{v^2(1 + y'^2) - (w_x y' - w_y)^2}}.$$

Отже, серед усіх кривих, що з'єднують точки M та N , треба відшукати ту, для якої функціонал $T[y]$ набуває (при заданих значеннях швидкості $v(x)$ і проєкцій $w_x(x)$, $w_y(x)$) мінімального значення.

Якщо швидкість вітру відносно землі та швидкість літака відносно повітря сталі, то підінтегральний вираз залежить явно лише від похідної $y'(x)$. Тоді траєкторією польоту буде пряма, що з'єднує точки M та N .

Завдання 1.5.3. Знайдіть траєкторію, по якій повинен рухатися літак над поверхнею земної кулі, щоби при сталій швидкості, незмінній висоті польоту та відсутності повітряних потоків долетіти з початкової точки в кінцеву за найкоротший час. Обертанням земної кулі знехтуйте.

Розв'язання. Нехай траєкторія літака лежить на поверхні сфери радіуса R :

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \varphi, & y &= R \sin \theta \sin \varphi, & z &= R \cos \theta, \\ 0 &\leq \varphi < 2\pi, & 0 &\leq \theta \leq \pi. \end{aligned} \quad (1')$$

Оскільки швидкість літака стала, серед усіх кривих на поверхні сфери, що з'єднують початкову та кінцеву точки з координатами, скажімо, (R, θ_1, φ_1) та (R, θ_2, φ_2) , треба відшукати найкоротшу. Квадрат елемента довжини на поверхні сфери $dl^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$; внаслідок цього шукана крива $\varphi = \varphi(\theta)$ є екстремаллю функціонала

$$L[\varphi] = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2},$$

де $\varphi' \equiv d\varphi/d\theta$. Підінтегральна функція в ньому не залежить від змінної φ , тому можна скористатися першим інтегралом (1.13) відповідного рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\sin^2 \theta \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2 \theta \varphi'^2}} = C_1.$$

Звідси

$$\varphi' = \frac{C_1}{\sin^2 \theta \sqrt{1 - \frac{C_1^2}{\sin^2 \theta}}}.$$

Відокремивши змінні φ і θ , та перейшовши до нової змінної $u = \operatorname{ctg} \theta$, дістаємо:

$$d\varphi = -\frac{C_1 du}{\sqrt{1-C_1^2-C_1^2 u^2}},$$

звідки

$$\varphi + C_2 = \arccos\left(\frac{C_1 u}{\sqrt{1-C_1^2}}\right).$$

Остаточно маємо:

$$C_1^* \operatorname{ctg} \theta = \cos(\varphi + C_2), \quad (2')$$

де $C_1^* \equiv C_1 / \sqrt{1-C_1^2}$, а C_2 – ще одна стала інтегрування. Ці сталі знаходимо з умови, що крива $(2')$ починається в точці (R, θ_1, φ_1) і закінчується в точці (R, θ_2, φ_2) :

$$C_1^* \operatorname{ctg} \theta_1 = \cos(\varphi_1 + C_2),$$

$$C_1^* \operatorname{ctg} \theta_2 = \cos(\varphi_2 + C_2).$$

Якщо $C_1^* = 0$, то $\varphi = \text{const}$. У цьому випадку траєкторія є відрізком меридіана сфери, тобто великого кола, що проходить через її полюси.

Якщо $C_1^* \neq 0$, перепишемо $(2')$ у вигляді

$$\operatorname{ctg} \theta = A \cos \varphi + B \sin \varphi,$$

де A і B – деякі комбінації сталих, і повернемося за допомогою формул $(1')$ до декартових координат:

$$z = Ax + By.$$

У цьому випадку траєкторія теж виявляється відрізком великого кола, яке є перерізом сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ та площини $z = Ax + By$, що проходить через її центр.

Завдання 1.5.4. Серед усіх кривих, що з'єднують задані точки A і B у вертикальній площині (точки не лежать на одній вертикалі), віднайдіть ту, рухаючись вздовж якої під впливом сили тяжіння матеріальна точка пройде шлях від A до B за найкоротший час. Початкова швидкість точки дорівнює нулю, тертя та опір середовища нехтовно малі. (Задача про брахістохрону І. Бернуллі).

Вказівки. Нехай маса матеріальної точки m , прискорення вільного падіння g . Напрямимо вісь OX горизонтально, вісь OY – вертикально вниз, початок координат помістимо в точку A , а координати точки B позначимо через (l, h) (див. рис. 1.6). Щоб знайти час $T[y]$, потрібний матеріальній точці для руху вздовж шуканої кривої $y(x)$, візьмемо до уваги, що ділянку dl із координатами кінців (x, y) , $(x + dx, y + dy)$ та довжиною $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$ точка проходить за час $dt = dl/v(y)$, де $v(y)$ – швидкість точки на цій ділянці. Останню знаходимо із закону збереження механічної енергії: $\frac{1}{2}mv^2(y) = mgy$ (початкова швидкість матеріальної точки дорівнює нулю, потенціальну енергію відраховуємо від осі OX). Дістаємо:

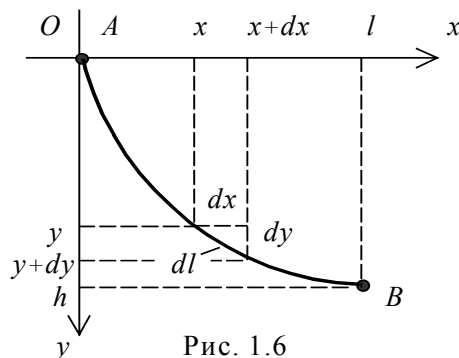


Рис. 1.6

$$T[y] = \int_0^l dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

Для знаходження екстремалей цього функціонала скористайтесь інтегралом (15) та підстановкою $y' = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$; відповідь подайте в параметричному вигляді $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$, де $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Точці A зручно віднести значення $\varphi_1 = 0$: $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Для точки B , де $\varphi = \varphi_2$, можна записати: $x(\varphi_2) = l$, $y(\varphi_2) = h$.

Відповідь. Брахістохрони, тобто екстремалі функціонала часу $T[y]$, належать сім'ї циклоїд

$$x(\varphi) = C_1(\varphi - \sin \varphi) + C_2, \quad y(\varphi) = C_1(1 - \cos \varphi).$$

З умов у точці A випливає, що $C_2 = 0$; сталі φ_2 і C_1 знаходяться із співвідношень

$$\frac{1 - \cos \varphi_2}{\varphi_2 - \sin \varphi_2} = \frac{h}{l}, \quad C_1 = \frac{h}{1 - \cos \varphi_2}.$$

Зауважимо, що стала C_1 дорівнює радіусу R кола, що творить циклоїду (кожна точка кола описує циклоїду, коли воно котиться без ковзання вздовж осі OX), а φ_2 – куту, на який треба повернути коло, щоб його верхня в початковий момент точка перемістилася з положення A в положення B (рис. 1.7).

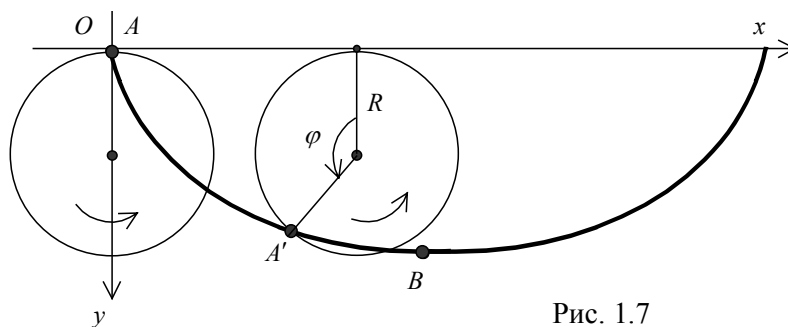


Рис. 1.7

Часова залежність координат матеріальної точки при русі вздовж брахістохрони знаходиться за допомогою рівняння руху (1.21).

Завдання 1.5.5. Матеріальна точка рухається в однорідному полі тяжіння вздовж гладкої циклоїди, розміщеної у вертикальній площині. Знайдіть закон руху точки, якщо радіус твірного кола циклоїди дорівнює R , і рух починається з найвищої точки циклоїди (точка A на рис. 1.7). (Циклоїдальний маятник).

Розв'язання. Нехай миттєве положення A' точки на циклоїді в момент часу t задається кутом повороту $\varphi = \varphi(t)$ радіуса твірного кола відносно від'ємного напрямку осі OY (див. рис. 1.7). Декартові координати точки в цей момент

$$x(t) = R(\varphi - \sin \varphi), \quad y(t) = R(1 - \cos \varphi).$$

Записавши $dx = R(1 - \cos \varphi)d\varphi$, $dy = R \sin \varphi d\varphi$, знаходимо декартові компоненти швидкості:

$$\dot{x}(t) = R(1 - \cos \varphi)\dot{\varphi}, \quad \dot{y}(t) = R \sin \varphi \dot{\varphi},$$

та довжину $l = l(\varphi)$ дуги AA' циклоїди:

$$l = \int_{AA'} dl = 2R \int_0^\varphi d\varphi \sin \frac{\varphi}{2} = 4R \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Функція Лагранжа точки $L = K - \Pi$, де

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 2mR^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = -mgy = -2mgR \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2mgR \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2mgR.$$

Відповідне рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

досить складне. Зручніше скористатися його інваріантністю відносно перетворень координат та перейти до нової узагальненої координати $s = 4R - l = 4R \cos \frac{\varphi}{2}$, яка описує зміщення матеріальної точки від найнижчої точки циклоїди. Опустивши несуттєву сталу в потенціальній енергії, маємо:

$$K = \frac{m}{2} \dot{s}^2, \quad \Pi = \frac{mg}{8R} s^2.$$

Нове рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial s} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = 0$$

зводиться до рівняння руху гармонічного осцилятора

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 \tag{1.24}$$

з частотою коливань $\omega_0 = \sqrt{g/4R}$. Його загальний розв'язок має вигляд

$$s(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \tag{1.25}$$

Сталі C_1 і C_2 знаходимо з початкових умов $l(0) = 0$, $\dot{l}(0) = 0$, тобто $s(0) = 4R$, $\dot{s}(0) = 0$. Дістаємо: $C_1 = 4R$, $C_2 = 0$.

Рух точки вздовж циклоїди є *ізохронним* – при довільних початкових відхиленнях $s(0) \leq 4R$ точка досягає найнижчого положення за однакові проміжки часу, які дорівнюють чверті її періоду коливань.

Час t^* , який точка витрачає на проходження брахістохрони AB (див. Завдання 1.5.4), знаходимо із співвідношення

$$s(t^*) = 4R - l_{AB} = 4R \cos \frac{\varphi_2}{2},$$

звідки $t^* = \varphi_2 / 2\omega_0$.

Завдання 1.5.6. Матеріальну точку підвісили на нерозтяжній невагомій нитці довжиною l та, відхиливши на кут φ_0 , плавно відпустили. Опишіть рух точки. (Математичний маятник).

Розв'язання. Найбільш зручною узагальненою координатою є кут $\varphi = \varphi(t)$, який описує відхилення маятника від положення рівноваги (рис. 1.8). Тоді:

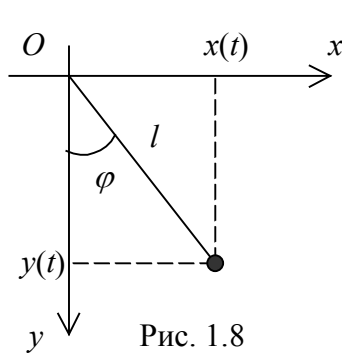


Рис. 1.8

$$x(t) = l \sin \varphi, \quad y(t) = l \cos \varphi.$$

Кінетична та потенціальна енергія (за нульовий рівень якої вибираємо пряму $y = 0$) дорівнюють:

$$K = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = -mgy = -mgl \cos \varphi.$$

Рівняння руху математичного маятника має вигляд

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0, \quad \omega_0^2 \equiv \frac{g}{l}. \quad (1.26)$$

Воно зводиться до рівняння гармонічних коливань (1.24) лише у випадку малих кутів відхилення ($\varphi \ll 1$) від положення рівноваги.

Щоб розв'язати (1.26), скористаємося тим, що функція Лагранжа не залежить явно від часу – справджується закон збереження енергії:

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0.$$

Звідси знаходимо:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \omega_0 \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)} = \pm 2\omega_0 \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Із двох знаків перед коренем залишаємо нижній, оскільки на початковій стадії руху кут φ повинен зменшуватися: $d\varphi/dt < 0$.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримуємо:

$$I(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = -\omega_0 t + C. \quad (1')$$

Сталу C знаходимо за допомогою початкової умови $\varphi(0) = \varphi_0$. Вона дорівнює інтегралу в (1'), обчисленому в межах від 0 до φ_0 : $C = I(\varphi_0)$.

Зробимо в $I(\varphi)$ підстановку $\sin x = \sin \frac{\varphi}{2} / \sin \frac{\varphi_0}{2}$. Тоді

$$\cos x = \sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} / \sin \frac{\varphi_0}{2}, \quad d\varphi = 2dx \cos x \sin \frac{\varphi_0}{2} / \cos \frac{\varphi}{2},$$

і $I(\varphi)$ набуває вигляду

$$I(\varphi) = \int_0^x \frac{dx'}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 x'}} \equiv K(x, \alpha),$$

де позначено $\alpha \equiv \sin \frac{\varphi_0}{2}$, $x = x(\varphi) \equiv \arcsin\left(\sin \frac{\varphi}{2} / \alpha\right)$, а $K(x, \alpha)$ – так званий еліптичний інтеграл першого роду, який через елементарні функції не виражається. Зауважимо також, що $x(0) = 0$, $x(\varphi_0) = \pi/2$.

Замість (1') маємо:

$$K(x, \alpha) = -\omega_0 t + K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right).$$

Обчислюючи обидві частини цієї рівності при фіксованому α та різних значеннях x , можемо знайти залежність t від x , потім відшукати обернену залежність $x = \tilde{x}(t)$, а, отже, й закон руху маятника:

$$\varphi(t) = 2 \arcsin[\alpha \sin \tilde{x}(t)].$$

Період коливань маятника $T = 4\tau$, де τ – час, за який маятник зміщується із крайнього положення $\varphi = \varphi_0$ в положення рівноваги $\varphi = 0$, для якого $x = 0$. Можемо записати: $K(0, \alpha) = -\omega_0 \tau + K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = 0$,

звідки

$$T = \frac{4}{\omega_0} K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right).$$

Для більшості реальних ситуацій $\alpha \ll 1$, тому підінтегральний вираз в еліптичному інтегралі можна розвинути в ряд за степенями $\alpha \sin x$:

$$\begin{aligned} K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 x}} = \int_0^{\pi/2} dx \left[1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \sin^2 x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \alpha^4 \sin^4 x + \dots \right] = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \alpha^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \alpha^4 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Отже, період коливань математичного маятника дорівнює

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right].$$

Для випадку малих коливань, коли $\varphi_0 \ll 1$, $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$, $K(x, \alpha) \approx x(\varphi) \approx \operatorname{arcsin} \frac{\varphi}{\varphi_0}$,

$K\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \approx \frac{\pi}{2}$, маємо: $\operatorname{arcsin} \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\pi}{2} - \omega_0 t$, звідки

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t.$$

Таким чином, лише малі коливання математичного маятника є ізохронними, з незалежним від амплітуди періодом

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

При $\varphi_0 \leq 15^\circ$ різниця між значеннями T і T_0 не перевищує 0,5%.

1.6. Екстремальні принципи у фізиці

Принцип найменшої дії Гамільтона, який було сформульовано в попередньому параграфі для механічних систем матеріальних точок, є найбільш загальним формулю-

ванням закону їх руху. Його перевага перед іншими полягає в тому, що він легко поширюється на системи іншої фізичної природи, наприклад, електромагнітне поле, поля елементарних частинок чи кварк-глюонні поля. А саме, кожній такій системі ставиться у відповідність функціонал дії S , який залежить від координат точкових мас і часу, а у випадку полів – від векторних або скалярних польових функцій від координат точок простору-часу (напруженостей електричного $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ та магнітного $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ полів, хвильової функції $\psi(\mathbf{r},t)$ мезонного поля і т. д.). Закономірності зміни стану системи у просторі та часі між двома фіксованими моментами t_1 і t_2 описуються певними диференціальними рівняннями, які випливають з умови екстремальності S на відріжку $[t_1, t_2]$.

Важливе місце посідає окремий випадок рівноважних систем, параметри яких не змінюються з часом. У цьому випадку принципу найменшої дії придають дещо інше, але еквівалентне формулювання у вигляді так званих *умов рівноваги*. Нагадаємо декотрі з них:

1) стійкому стану рівноваги механічної системи, що знаходиться в полі потенціальних сил і підпорядкована голономним (тобто накладеними тільки на координати) ідеальним стаціонарним в'язям, відповідає таке розміщення її частин, при якому повна потенціальна енергія системи є мінімальною (теорема Лагранжа-Діріхле);

2) енергія істинного електростатичного поля провідників є мінімальною по відношенню до енергії полів, які створювалися б усіма іншими розподілами зарядів по об'єму провідників (теорема Томсона). Аналогічне твердження вірне і для магнітостатичних полів, спричинених стаціонарними струмами;

3) у стані теплової рівноваги вільна енергія $F(T,V)$ термодинамічної системи (тобто робота, яку система здатна здійснити при оборотному ізотермічному процесові) є мінімальна в порівнянні з усіма іншими змінами стану при сталих температурі T та об'ємові V . Такі самі теореми справджуються й для інших термодинамічних потенціалів як функцій власних змінних – термодинамічного потенціалу Гіббса $\Phi(T,P)$, внутрішньої енергії $E(S,V)$ і теплової функції $W(S,P)$. Тут S – ентропія системи, P – тиск у системі.

Завдання 1.6.1. Між двома дротяними кільцями радіуса R натягнуто мильну плівку. Відрізок, що з'єднує центри кілець, є перпендикулярним до площин кілець і

має довжину l (рис. 1.9). Вважаючи товщину плівки сталою та малою, знайдіть рівняння поверхні, утвореної плівкою. (Задача Плато про мінімальну поверхню обертання).

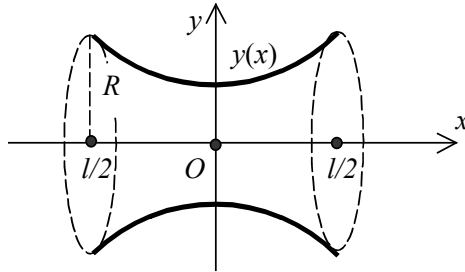


Рис. 1.9

Розв'язання. При фіксованих температурі та густині мильного розчину плівка набуває такої форми, для якої функціонал надлишкової вільної енергії ΔF мінімальний. Останній дорівнює енергії поверхневого натягу плівки: $\Delta F = 2\sigma S$, де σ – коефіцієнт поверхневого натягу, S – площа

бічної поверхні плівки. Із міркувань симетрії зрозуміло, що поверхня плівки збігається з поверхнею, утвореною обертанням гладкої кривої $y(x)$ навколо осі OX . Тому

$$\Delta F[y] = 4\pi\sigma \int_{-l/2}^{l/2} dx y(x) \sqrt{1 + y'^2}, \quad (1.27)$$

і задача зводиться до відшукування кривої, що мінімізує функціонал ΔF за умов

$$y\left(-\frac{l}{2}\right) = y\left(\frac{l}{2}\right) = R. \quad (1.28)$$

Скориставшись інтегралом (1.15), можемо записати:

$$y = C_1 \sqrt{1 + y'^2}, \quad y' = \sqrt{\frac{y^2 - C_1^2}{C_1^2}},$$

звідки після відокремлення змінних дістаємо:

$$\int \frac{C_1 dy}{\sqrt{y^2 - C_1^2}} = x + C_2.$$

Інтеграл справа легко обчислюється підстановкою $y = C_1 \operatorname{ch} t$ й дорівнює $C_1 t$.

Маємо:

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch} \frac{x + C_2}{C_1}. \quad (1.29)$$

Шукана крива є ланцюговою лінією, що проходить через точки (1.28). Поверхня, утворена обертанням ланцюгової лінії, називається *катеноїдом*.

З умов (1.28) випливає, що $C_2 = 0$ (крива симетрична відносно осі OY), а стала C_1 задовольняє трансцендентне рівняння

$$C_1 \operatorname{ch} \frac{l}{2C_1} = R.$$

Як завжди в подібних випадках, аналізуємо це рівняння, перейшовши до безрозмірних величин. Дістаємо:

$$\operatorname{ch} u = \alpha u, \quad (1.30)$$

де $\alpha = 2R/l$, $u = l/2C_1$. При $\alpha \ll 1$ $\operatorname{ch} u \cong e^u/2 \gg \alpha u$, і рівняння (1.30) розв'язків не має (див. рис. 1.10). При зростанні α до певного значення α^* пряма αu стає дотичною до графіка $\operatorname{ch} u$ – маємо єдиний розв'язок u^* . При $\alpha > \alpha^*$ існують два розв'язки u_1 і u_2 ; їх числові значення залежать від α .

Тангенс кута нахилу дотичної до функції $\operatorname{ch} u$ в точці u^* дорівнює $\operatorname{sh} u^*$, тому для u^* маємо рівняння $\operatorname{ch} u^* = u^* \operatorname{sh} u^*$. Числові розрахунки дають: $\alpha^* = \operatorname{sh} u^* \approx 1,509 \cong 3/2$.

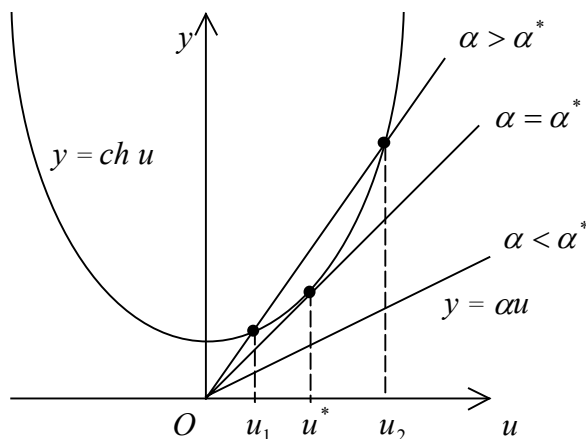


Рис. 1.10

Отже, при $l > 4R/3$ задача не має розв'язків у класі $C^1([-l/2, l/2])$: серед гладких поверхонь обертання нема такої, яка б реалізовувала мінімум функціонала (1.27), проходячи через точки (1.28). Цю ситуацію можна інтерпретувати таким чином. Якщо відстань між кільцями досить велика в порівнянні з їх радіусами, то площа поверхні, утвореної двома кругами радіуса R та відрізком осі OX між ними, є меншою, ніж площа довільної гладкої поверхні, натягнутої на кільця (подібну ситуацію маємо й для функціонала площі (1.1)). З фізичного погляду це означає, що при $l > 4R/3$ плівка стає нестійкою й розривається.

Із двох розв'язків, що маємо при $l < 4R/3$, реалізується лише один. Щоб його визначити, обчислюємо значення вільної енергії (1.27) для функції (1.29) при двох

значеннях сталої C_1 ($l/2u_1$ і $l/2u_2$). Шуканому кореню відповідає менше значення вільної енергії.

Поява “зайвого” кореня відображає той факт, що виконання рівняння Ейлера-Лагранжа (1.4) є необхідною, але не достатньою умовою існування мінімуму функціонала.

Дещо осторонь від згаданих стоїть відомий із геометричної оптики екстремальний принцип Ферма: серед допустимих шляхів між двома фіксованими точками в оптично неоднорідному середовищі світло поширюється (за стаціонарних умов) тим, на який фронт хвилі витрачає найменше часу.

Завдання 1.6.2. У прозорому середовищі зі змінним показником заломлення $n(x, y)$ світло поширюється з точки $A(0, 0)$ у точку $B(l, h)$. Знайдіть траєкторію променя світла, якщо $n(x, y) = n_0(1 + \alpha y)$. Розгляньте граничні випадки слабо неоднорідного ($\alpha \ll 1$) та однорідного ($\alpha = 0$) середовищ.

Вказівка. Задача зводиться до відшукування екстремуму функціонала

$$T[y] = \int_0^l \frac{dl}{u(x, y)} = \frac{1}{c} \int_0^l dl n(x, y) \quad (1.31)$$

за додаткових умов $y(0) = 0$ та $y(l) = h$. Тут c – швидкість світла у вакуумі, $u(x, y) = c/n(x, y)$ – швидкість світла в середовищі.

Відповідь. Траєкторією є відрізок ланцюгової лінії

$$y(x) = \frac{C_1}{\alpha} \operatorname{ch} \left[\frac{\alpha}{C_1} (x + C_2) \right] - \frac{1}{\alpha}, \quad (1.32)$$

де сталі C_1 та C_2 задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \frac{C_1}{\alpha} \operatorname{ch} \left[\frac{\alpha}{C_1} C_2 \right] - \frac{1}{\alpha} &= 0, \\ \frac{C_1}{\alpha} \operatorname{ch} \left[\frac{\alpha}{C_1} (l + C_2) \right] - \frac{1}{\alpha} &= h. \end{aligned} \quad (1.33)$$

З формули (1.32) зручно виключити сталу C_2 . З урахуванням тотожностей

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

та першої з формул (1.33) дістаємо:

$$y(x) = \frac{1}{\alpha} \left[-1 + \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{C_1} \right] + \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 - C_1^2} \operatorname{sh} \frac{\alpha x}{C_1}.$$

Сталу C_1 знаходимо з умови $y(l) = h$.

При $\alpha \ll 1$ з точністю до квадратичних за α членів маємо:

$$y(x) \cong \sqrt{1 - C_1^2} \left[\frac{x}{C_1} + \frac{1}{6} \alpha^2 \left(\frac{x}{C_1} \right)^3 + \dots \right] + \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{x}{C_1} \right)^2 + \dots \quad (1.34)$$

Для однорідного середовища

$$y(x) = \sqrt{1 - C_1^2} \frac{x}{C_1} = \frac{h}{l} x,$$

тобто світло поширюється вздовж прямої. Цей результат можна отримати відразу ж, якщо врахувати, що при $\alpha = 0$ підінтегральний вираз у функціоналі (1.31) залежить лише від похідної y' .

Завдання 1.6.3. Покажіть, що при переході променя світла з оптично однорідного середовища з показником заломлення n_1 в оптично однорідне середовище з показником заломлення n_2 справджується закон Снелліуса:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

де α – кут падіння променя світла на поверхню розділу середовищ, β – кут заломлення (рис. 1.11).

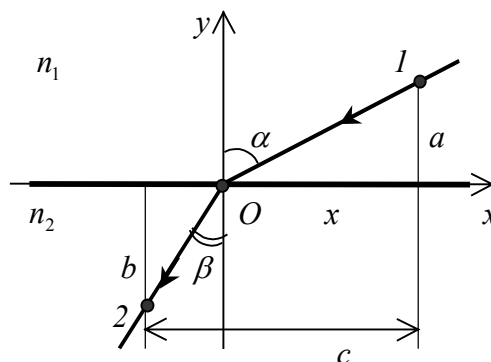


Рис. 1.11

Розв'язання. У кожному з середовищ світло поширюється вздовж прямої (див. попереднє завдання), тому результуючою траєкторією є ламана лінія, що складається з двох прямолінійних відрізків і надає екстремум функціоналу

$$J[y] = \int_1^2 dl n(x, y) = \int_1^0 dl n_1 + \int_0^2 dl n_2 = n_1 \sqrt{x^2 + a^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (c - x)^2}.$$

Варіюючи за x , дістаємо співвідношення

$$\left[n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - n_2 \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} \right] \delta x = 0.$$

Воно має виконуватися для довільних δx , тому вираз у квадратних дужках дорівнює нулю. Корінь цього рівняння дає координату точки перетину поверхні розділу середовищ променем світла. Закон Снелліуса дістаємо відразу ж, якщо врахуємо, що

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin \alpha, \quad \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}} = \sin \beta^*).$$

Завдання 1.6.4. Унаслідок неоднорідного розподілу густини повітря вздовж вертикалі промінь світла при поширенні в атмосфері може зазнавати повного внутрішнього відбиття. Це спричиняє появу в атмосфері одного чи декількох уявних зображень далеких предметів, які знаходяться поза межами прямої видимості (марева). Оцініть залежність відстані l між спостерігачем і спостережуваними предметами від градієнта $dn/dy = n_0 \alpha = \text{const}$ показника заломлення середовища (див. Завдання 1.6.2).

Розв'язання. При малих значеннях α траєкторія променя описується формулою (1.34). Вона близька до параболи, причому зображення предмета A спостерігається в точці O під деяким кутом θ , якщо $\alpha < 0$, тобто показник заломлення спадає з ростом висоти (рис. 1.12). У лінійному за α наближенні

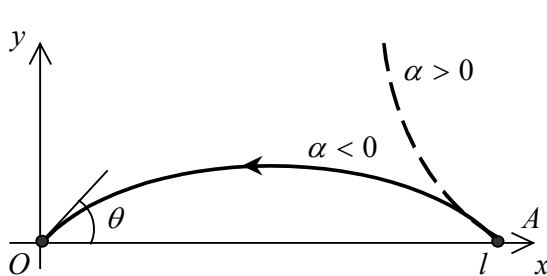


Рис. 1.12

$$y(x) \cong \sqrt{\gamma - 1} x - \frac{1}{2} \gamma |\alpha| x^2,$$

де стала $\gamma \equiv 1/C_1^2$ знаходиться з умови

$$y(l) = 0: \sqrt{\gamma - 1} l - \frac{1}{2} \gamma |\alpha| l^2 = 0. \quad \text{Оскільки}$$

$$\text{tg } \theta = \sqrt{\gamma - 1}, \quad \cos^2 \theta = 1/\gamma, \quad \text{то}$$

$2\sqrt{\gamma - 1}/\gamma = \sin 2\theta = |\alpha| l$. Звідси бачимо, що якщо поглинанням світла в середовищі

*) Насправді закон Снелліуса є еквівалентний принципові Ферма.

можна знехтувати, то максимальна відстань від спостерігача до спостережуваного ним об'єкта $l \cong 1/|\alpha|$.

Принципом найменшої дії рух механічної системи визначається повністю: розв'язуючи відповідні рівняння, можна знайти як форму траєкторії, так і залежність просторового положення системи від часу. Якщо ж залишити осторонь часову частину задачі та обмежитися більш вузьким питанням про відшукування лише траєкторії, то можна користуватися таким спрощеним формулюванням принципу найменшої дії: траєкторія руху матеріальної точки масою m у полі потенціальних сил із потенціалом Π між двома положеннями 1 та 2 є екстремаллю функціонала

$$S_0 = \int_1^2 dl \sqrt{2m(E - \Pi)}, \quad (1.35)$$

де E – повна механічна енергія точки. Це – принцип Мопертюї.

Функціонал S_0 називають *укороченою дією*. Екстремальна властивість S_0 впливає з аналогії між геометричною оптикою та механікою, зміст якої можна сформулювати наступним чином: траєкторія матеріальної точки при її русі в стаціонарному потенціальному полі Π зі швидкістю $v(l) = \sqrt{2(E - \Pi)/m}$ збігається з траєкторією променя світла, що поширюється в оптично неоднорідному середовищі з показником заломлення $n(x, y, z) \propto \sqrt{2m(E - \Pi)}$ (тобто величина $\sqrt{2m(E - \Pi)}$ в механіці відіграє ту ж роль, що й показник заломлення $n(x, y, z)$ в оптиці). Оскільки промінь світла поширюється в неоднорідному середовищі зі швидкістю $u = c/n(x, y, z)$ і його істинним шляхом реалізується екстремум функціонала (1.31), то істинною траєкторією матеріальної точки реалізується екстремум функціонала (1.35).

Завдання 1.6.5. Знайдіть траєкторію польоту каменя в однорідному полі тяжіння, кинутого з початковою швидкістю v_0 під деяким кутом θ до горизонту. Чому дорівнює θ , якщо відомо, що камінь впав на відстані l від місця кидання?

Вказівка. Треба відшукати екстремум функціонала

$$J[y] = \int_0^l dx \sqrt{2m(E - mgy)} \sqrt{1 + y'^2} \quad (1.36)$$

за додаткових умов $y(0) = 0$ і $y(l) = 0$. Тут $E = mv_0^2/2$ – повна енергія каменя. Розв’язок зручно шукати за допомогою рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$2(E - mgy)y'' + mg(1 + y'^2) = 0, \quad (1.37)$$

яке після диференціювання за x набирає вигляду

$$(E - mgy)y''' = 0.$$

Видно, що функція y є параболою $y(x) = ax^2 + bx + c$, причому умови на кінцях дають $c = 0$, $b = -al$.

Щоб знайти сталу a , функцію y треба підставити в (1.37) та розв’язати здобуте квадратне рівняння відносно a :

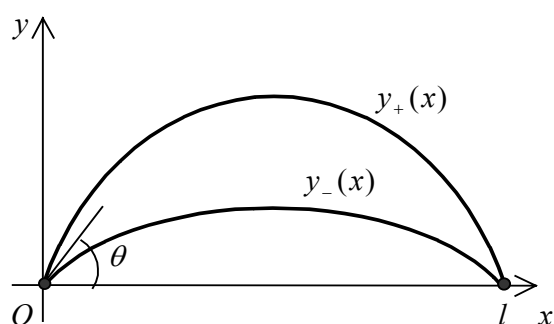


Рис. 1.13

$$a_{\pm} = -\frac{v_0^2 \pm \sqrt{(v_0^2)^2 - (gl)^2}}{gl^2}.$$

Із двох кривих $y_{\pm} = a_{\pm}(x^2 - xl)$ (див. рис. 1.13) найменшому значенню укороченої дії (1.36) відповідає парабола y_- , час руху вздовж якої є меншим за час руху вздовж параболи y_+ .

Кут θ визначається за допомогою співвідношення

$$\operatorname{tg} \theta = y'_-(0) = \frac{v_0^2 - \sqrt{(v_0^2)^2 - (gl)^2}}{gl},$$

звідки $\sin 2\theta = gl/v_0^2$. Максимальна дальність польоту досягається при $\theta = 45^\circ$. Щоб кинути камінь на відстань l , йому треба надати швидкість $v_0 \geq \sqrt{gl}$.

Зауважимо, що рівняння (1.37) має перший інтеграл

$$\frac{\sqrt{2m(E - mgy)}}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1,$$

звідки, відокремивши змінні, також можна знайти функцію $y(x)$ (зробіть це самостійно).

Звернемо увагу на схожість між *Завданнями 1.6.4 і 1.6.5*: якщо позначити $|\alpha| \equiv g/v_0^2$, то аналогом показника заломлення в останньому виступає величина

$n(x, y) = n_0 \sqrt{1 - mgy/E} = n_0 \sqrt{1 - 2|\alpha|y}$, яка при $|\alpha| \ll 1$ зводиться до $n(x, y) = n_0(1 - |\alpha|y)$.

Завдання 1.6.6. Опишіть траєкторії руху частинки в полі центральних сил із потенціалом $\Pi(r)$, де r – відстань від частинки до силового центру.

Вказівка. Скористайтеся тим фактом, що рух частинки в центральному полі відбувається в площині. Траєкторія руху в полярних координатах (r, φ) (див. рис. 1.14) має вигляд $r = r(\varphi)$. Елемент довжини

$$dl = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2} = \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi, \quad \text{де} \quad r' \equiv dr/d\varphi.$$

Задача зводиться до відшукування екстремуму функціонала

$$S_0[r] = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{2m(E - \Pi(r))} \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

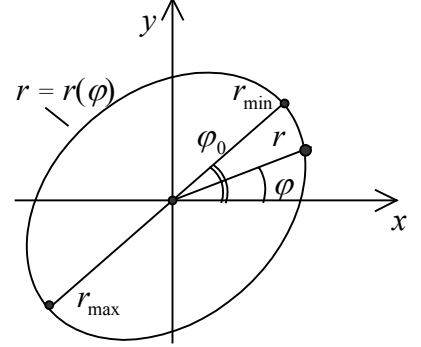


Рис. 1.14

Підінтегральна функція $F = F(r, r')$ не залежить явно від φ , тому маємо інтеграл руху, який називається орбітальним механічним моментом:

$$M \equiv F(r, r') - r' \frac{\partial F(r, r')}{\partial r'} = r^2 \frac{\sqrt{2m(E - \Pi(r))}}{\sqrt{r'^2 + r^2}}$$

Відповідь. Траєкторія руху частинки входить до сім'ї кривих

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{dr \frac{M}{r^2}}{\sqrt{2m(E - \Pi(r)) - \frac{M^2}{r^2}}}. \quad (1.38)$$

Сталі φ_0 і M визначаються початковими умовами задачі (див. рис. 1.14). Рух частинки може відбуватися лише в тій області значень r , де підкореневий вираз в інтегралі невід'ємний. Мінімальна r_{\min} та максимальна r_{\max} відстані частинки від силового центра знаходяться за допомогою умови

$$E = \Pi(r) + \frac{M^2}{2mr^2},$$

яка означає, що в точках $r = r_{\min}$ і $r = r_{\max}$ траєкторії кінетична енергія радіального руху частинки дорівнює нулю. Після проходження цих точок відстань від частинки до силового центра починає, відповідно, збільшуватися та зменшуватися, тому їх ще називають точками повороту.

Завдання 1.6.7. Опишіть траєкторії руху космічних тіл (планет, комет, штучних супутників) у гравітаційному полі, створюваному іншим, набагато масивнішим, космічним тілом. (Задача Кеплера про рух планет).

Вказівка. Тіло з більшою масою m_0 можна вважати нерухомим, тоді задача зводиться до аналізу траєкторії руху менш масивного (з масою m) тіла у ньютонівському полі $\Pi(r) = -\alpha/r$, де $\alpha \equiv Gmm_0 > 0$, G – стала всесвітнього тяжіння. Щоб обчислити інтеграл (1.38), зручно скористатися заміною $x = M/r$.

Відповідь. Траєкторії – конічні перерізи

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

з ексцентриситетом $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ та параметром $p = \frac{M^2}{m\alpha}$. При $\varepsilon < 1$ траєкторія є еліпсом, один із фокусів якого знаходиться в силовому центрі. Ця ситуація характерна для руху планет навколо Сонця та природних і штучних супутників навколо планет. У граничному випадку $\varepsilon = 0$ еліпс вироджується в коло. При $\varepsilon = 1$ траєкторія є параболою, а при $\varepsilon > 1$ – гіперболою. По таких траєкторіях рухаються комети та інші космічні тіла, що випадково залетіли до Сонячної системи, але мають достатню кінетичну енергію, щоб її покинути. Такою є й траєкторія руху зарядженої частинки в полі іншої однойменно зарядженої частинки (як, наприклад, у дослідах Резерфорда з вивчення будови атомного ядра, у яких альфа-частинки розсіювалися на ядрах атомів металеві фольги). Справді, у цьому випадку потенціальна енергія кулонівської взаємодії частинок $\Pi(r) = \alpha/r$, де $\alpha = q_1q_2 > 0$, q_i – заряди частинок, завжди додатна, тому при $M \neq 0$ $\varepsilon > 1$.

Завдання 1.6.8. Доведіть, що із пункту A в пункт B , розташованих на одній горизонталі, при одній і тій самій витраті пального в деяких випадках можна доїхати

швидше, якщо рухатися по дорозі зі схилами, ніж вздовж прямої AB (рис. 1.15).

Вказівка. Швидкість у точці з ординатою y знаходиться із співвідношення

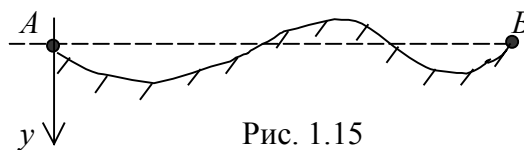


Рис. 1.15

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy + W,$$

де W – корисна частина теплової енергії пального.

1.7. Достатня умова мінімуму

Зупинимось коротко на достатніх умовах існування мінімуму (максимуму) функціонала найпростішого типу (1.2). Обмежимося розглядом мінімуму, який реалізується на множині гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем.

Нехай $y_0(x)$ – крива, яка надає мінімум функціоналові (1.2). Тоді для довільної гладкої функції $h(x)$, що задовольняє умови $h(x_1) = h(x_2) = 0$, і достатньо малих значень параметра α маємо

$$\varphi_h(\alpha) = J[y_0 + \alpha h] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y_0 + \alpha h, y'_0 + \alpha h') > \varphi(0) = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y_0, y'_0), \quad |\alpha| > 0,$$

тобто

$$\varphi'_h(0) = 0, \quad \varphi''_h(0) \geq 0. \quad (1.39)$$

Як було встановлено раніше (див. Лему 1.3.2), перша з цих умов веде до рівняння Ейлера-Лагранжа (1.4). Розв'язавши його та скориставшись умовами жорсткого закріплення (1.3), знаходимо $y_0(x)$.

Позначимо через $C_0^1([x_1, x_2])$ множину гладких функцій на відрізку $[x_1, x_2]$, які дорівнюють нулю при $x = x_1$ і $x = x_2$. Друге із співвідношень (1.39) потребує проаналізувати умови, за яких для довільної функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ справджується нерівність

$$\varphi''_h(0) = \int_{x_1}^{x_2} dx (Sh^2 + Rh'^2) \geq 0, \quad (1.40)$$

де S та R виражаються через $y_0(x)$ за формулами

$$S(x) \equiv \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \bigg|_{y=y_0}, \quad R(x) \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \bigg|_{y=y_0}. \quad (1.41)$$

Надалі вважаємо, що $S(x)$ і $R(x)$ – неперервні функції на відрізку $[x_1, x_2]$, і що $R(x)$ ще має на $[x_1, x_2]$ неперервну похідну.

Теорема 1.7.1. Нерівність (1.40) виконується для довільної функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ лише тоді, коли

$$\mu \equiv \min_{x \in [x_1, x_2]} R(x) \geq 0. \quad (1.42)$$

Доведення. Припустимо, що $R(x)$ досягає мінімуму в точці $x_0 \in (x_1, x_2)$, і що $R(x_0) = \mu < 0$. Оскільки $R(x)$ – неперервна функція, існує таке число $\Delta > 0$, що $R(x) < \frac{\mu}{2}$, якщо $|x - x_0| \leq \Delta$.

Розглянемо послідовність функцій

$$h_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left[\sin \frac{\pi n}{\Delta} (x - x_0) - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi n}{\Delta} (x - x_0) \right], & |x - x_0| < \Delta, \\ 0, & |x - x_0| > \Delta, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$$

Усі ці функції належать множині $C_0^1([x_1, x_2])$, і для них

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} dx h_n^2(x) &= \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx h_n^2(x) = \frac{5}{4}, \\ \int_{x_1}^{x_2} dx h_n'^2(x) &= \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx h_n'^2(x) = \frac{2\pi^2 n^2}{\Delta^2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Нехай $M \equiv \max_{x \in [x_1, x_2]} S(x)$. Тоді згідно з (1.43)

$$\begin{aligned} \varphi_{h_n}''(0) &= \int_{x_1}^{x_2} dx [S(x) h_n^2(x) + R(x) h_n'^2(x)] = \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx [S(x) h_n^2(x) + R(x) h_n'^2(x)] \leq \\ &\leq M \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx h_n^2(x) + \frac{\mu}{2} \int_{x_0-\Delta}^{x_0+\Delta} dx h_n'^2(x) = \frac{5}{4} M + \frac{\pi^2 n^2 \mu}{\Delta^2}. \end{aligned}$$

Бачимо, що $\varphi''_{h_n}(0) < 0$ при $n > \sqrt{5\Delta^2 M / 4\pi^2 |\mu|}$. Отже, умова (1.42) є необхідною для того, щоб функція $y_0(x)$ надавала мінімум функціоналу (1.2).

Надалі вважатимемо, що $R(x) > 0$, тобто $\mu > 0$. Ця умова називається *посиленою умовою Лежандра*.

Завдання 1.7.1. Нехай функціонал (1.2) породжується функціями виду

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2} H(y), \quad (1.44)$$

де за змістом задачі $\min H(y) > 0$. Переконайтеся, що для мінімуму такого функціонала посиленна умова Лежандра виконується.

Теорема 1.7.2. Якщо посиленна умова Лежандра виконується, то нерівність

$$S(x) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \right) \bigg|_{y=y_0} \geq 0 \quad (1.45)$$

є достатньою для того, щоб функціонал (1.2) мав мінімум на функції $y_0(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$.

Доведення. За умов теореми для будь-якої функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ маємо:

$$\varphi''_h(0) = \int_{x_1}^{x_2} dx [S(x)h^2(x) + R(x)h'^2(x)] \geq \int_{x_1}^{x_2} dx R(x)h'^2(x) \geq \mu \int_{x_1}^{x_2} dx h'^2(x) \geq 0.$$

Знак рівності в останній нерівності треба писати лише тоді, коли неперервна функція $h'(x)$ є тотожним нулем на відрізку $[x_1, x_2]$, а з огляду на умови $h(x_1) = h(x_2) = 0$ — лише коли $h(x) \equiv 0$. Отже, $\varphi''_h(0) > 0$ для ненульових $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$.

Завдання 1.7.2. Доведіть, що розв'язки рівняння Ейлера-Лагранжа для функцій виду

$$F(x, y, y') = H(y)G(y'), \quad (1.46)$$

надають мінімальні значення функціоналові (1.2) з-поміж усіх кривих зі спільним початком і спільним кінцем, якщо двічі диференційовні функції $H(y)$ і $G(y')$

задовольняють умови

$$H(y) > 0, \quad G''(y') > 0, \quad G(y') - y'G'(y') \geq 0, \quad H''(y)H(y) - H'^2(y) \geq 0. \quad (1.47)$$

Завдання 1.7.3. Перевірте виконання умов *Теорем 1.7.1, 1.7.2* та умов (1.47) для функціоналів часу в *Завданнях 1.5.4, 1.6.2*.

Якщо $\min_{x \in [x_1, x_2]} S(x) < 0$, то при виконанні посиленої умови Лежандра квадратичний функціонал (1.40) має або лише додатні значення для всіх ненульових функцій $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$, або набуває від'ємних значень для деяких ненульових функцій цього класу. У першому випадку функція $y_0(x)$ є кривою, що дійсно надає мінімум функціоналу (1.2), тоді як у другому вона такою не є.

Щоб з'ясувати, коли реалізується саме перший випадок, візьмемо довільну неперервну функцію $\rho(x)$, для якої

$$\min_{x \in [x_1, x_2]} \rho(x) > 0, \quad (1.48)$$

та розглянемо на множині $C_0^1([x_1, x_2])$ функціонал більш складної структури:

$$Q[h] = \frac{\int_{x_1}^{x_2} dx [S(x)h^2(x) + R(x)h'^2(x)]}{\int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x)h^2(x)}. \quad (1.49)$$

Уведення функціонала (1.49) диктується тією обставиною, що квадратичний функціонал (1.40) у загальному випадку може набувати необмежених за модулем від'ємних значень, якщо $\min_{x \in [x_1, x_2]} S(x) < 0$. Справді, нехай остання умова виконується, і при цьому $\varphi_h''(0) = a < 0$ для деякої функції $\tilde{h}(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$. Тоді на функції $N\tilde{h}(x)$ функціонал (1.40) набуває значення $aN^2 < 0$, при цьому число N можна взяти як завгодно великим.

Що ж стосується функціонала (1.49), то він задовольняє умову

$$Q[h] > \Lambda_0 \equiv \min_{x \in [x_1, x_2]} \frac{S(x)}{\rho(x)} > -\infty. \quad (1.50)$$

Дійсно, якщо $R(x) > 0$, то при ненульових $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ внесок доданка

$\int_{x_1}^{x_2} dx R(x) h'^2(x)$ в $Q[u]$ ненульовий і додатний, оскільки рівність $\int_{x_1}^{x_2} dx R(x) h'^2(x) = 0$

справджується лише при $h'(x) \equiv 0$, що для функцій класу $C_0^1([x_1, x_2])$ є рівносильним умові $h(x) \equiv 0$ (див. доведення *Теорема 1.7.2*). Тому можемо записати:

$$Q[h] > \frac{\int_{x_1}^{x_2} dx S(x) h^2(x)}{\int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x) h^2(x)} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{S(x)}{\rho(x)} \rho(x) h^2(x)}{\int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x) h^2(x)} \geq \Lambda_0.$$

Позначивши

$$\lambda_0 \equiv \inf_{h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])} Q[h], \quad (1.51)$$

для кожної $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ маємо:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx [S(x) h^2(x) + R(x) h'^2(x)] \geq \lambda_0 \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x) h^2(x). \quad (1.52)$$

Звідси випливає, що твердження *Теорем 1.7.1, 1.7.2* можна посилити наступним чином.

Теорема 1.7.3. Серед гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем крива $y_0(x)$ надає мінімум функціоналові (1.2), якщо $\lambda_0 > 0$, і не надає, якщо $\lambda_0 < 0$. Випадок $\lambda_0 = 0$ вимагає додаткового дослідження.

Щоб знайти число λ_0 , зазначимо, що згідно з нерівністю (1.52) точна нижня межа значень функціонала

$$\Phi[h] \equiv \int_{x_1}^{x_2} dx [S(x) h^2(x) + R(x) h'^2(x)] - \lambda_0 \int_{x_1}^{x_2} dx \rho(x) h^2(x)$$

на множині функцій $C_0^1([x_1, x_2])$ дорівнює нулю. Нехай ця межа досягається на ненульовій функції $u(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$, тобто $\Phi[u] = 0$. Тоді для будь-якої функції $h(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ і дійсних значень параметра ε функція

$$f(\varepsilon) \equiv \Phi[u + \varepsilon h]$$

має абсолютний мінімум при $\varepsilon = 0$. Звідси знаходимо, що функція $u(x)$ задовольняє рівняння Ейлера-Лагранжа

$$-\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + S(x)u(x) = \lambda_0 \rho(x)u(x). \quad (1.53)$$

Умови закріплення мають вигляд

$$u(x_1) = 0, \quad u(x_2) = 0. \quad (1.54)$$

Для подальшого аналізу замінимо λ_0 у формулі (1.53) комплексним параметром z . Дістаємо систему

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(R(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + S(x)u(x) &= z\rho(x)u(x), \\ u(x_1) &= 0, \quad u(x_2) = 0, \end{aligned} \quad (1.55)$$

яка називається *крайовою задачею Штурма-Ліувілля*. Диференціальне рівняння в ній називається *рівнянням Штурма-Ліувілля*, а додаткові умови в крайніх точках – *крайовими умовами*.

Система (1.55) лінійна та однорідна відносно функції $u(x)$, і тому має тривіальний розв'язок $u(x) \equiv 0$. При довільних значеннях параметра z він є, взагалі кажучи, єдиним розв'язком, що задовольняє як рівняння Штурма-Ліувілля, так і крайові умови. З іншого боку, можуть існувати виняткові значення параметра z , для яких рівняння Штурма-Ліувілля має нетривіальні розв'язки, що задовольняють крайові умови. Ці виняткові значення параметра z називаються *власними значеннями* крайової задачі Штурма-Ліувілля, а відповідні нетривіальні розв'язки системи (1.55) при цих значеннях z – *власними функціями*, що відповідають цим власним значенням.

Завдання 1.7.4. Знайдіть власні значення і відповідні власні функції крайової задачі (1.55) для випадку, коли всі коефіцієнтні функції є тотожними сталими: $R(x) \equiv \mu$, $S(x) \equiv q$, $\rho(x) \equiv \rho$.

Розв'язання. При заданих значеннях коефіцієнтів загальний розв'язок рівняння Штурма-Ліувілля має вигляд

$$u(x, z) = A \sin \sqrt{\frac{\rho z - q}{\mu}}(x - x_1) + B \cos \sqrt{\frac{\rho z - q}{\mu}}(x - x_1). \quad (1.56)$$

Крайова умова зліва дає $B = 0$, а крайова умова справа веде до співвідношення

$$A \sin \sqrt{\frac{\rho z - q}{\mu}} (x_2 - x_1) = 0,$$

з якого випливає, що нетривіальні розв'язки ($A \neq 0$) існують лише при таких значеннях параметра z :

$$z_n = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\mu \pi^2 n^2}{(x_2 - x_1)^2} + q \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.57)$$

Відповідні власні функції мають вигляд

$$u_n(x, z) = A \sin \frac{\pi n(x - x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1.58)$$

Повертаючись до рівняння Штурма-Ліувілля в (1.55), позначимо через $\psi(x, z)$ той його єдиний розв'язок, який зліва задовольняє умови

$$\psi(x_1, z) = 0, \quad \psi'(x_1, z) = 1. \quad (1.59)$$

Застосовуючи стандартні методи теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь, можна показати, що при фіксованих значеннях змінної x функція $\psi(x, z)$ є цілою відносно параметра z , тобто аналітичною на відкритій комплексній площині. Порівнюючи перші крайові умови в (1.55) і (1.59), бачимо, що кожна власна функція крайової задачі (1.55) є пропорційна функції $\psi(x, z)$, якщо z збігається з власним значенням. З другої крайової умови в (1.55) знаходимо, що власні значення задачі (1.55) є нулями функції $\psi(x_2, z)$, тобто коренями рівняння $\psi(x_2, z) = 0$. Оскільки однозначна аналітична функція в області аналітичності може мати лише ізольовані нулі, то в кожному крузі скінченного радіуса на комплексній площині може знаходитися лише скінченна кількість власних значень крайової задачі (1.55). Тому ці власні значення утворюють послідовність точок $\{z_n\}$ із єдиною точкою скупчення на нескінченності.

Нехай z_n – власне значення крайової задачі (1.55), а $u_n(x)$ – власна функція, яка йому відповідає. Домножаючи ліву і праву частини рівняння Штурма-Ліувілля для $u_n(x)$ на комплексно спряжену функцію $\overline{u_n(x)}$, та інтегруючи обидві частини здобутої

рівності за x у межах від x_1 до x_2 , дістаємо:

$$-\int_{x_1}^{x_2} \overline{u_n(x)} \frac{d}{dx} (R(x)u'_n(x)) dx + \int_{x_1}^{x_2} S(x)|u_n(x)|^2 dx = z_n \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)|u_n(x)|^2 dx. \quad (1.60)$$

Обчислюючи перший інтеграл в (1.60) частинами, з урахуванням крайових умов (1.55) далі знаходимо:

$$z_n = \frac{\int_{x_1}^{x_2} R(x)|u'_n(x)|^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} S(x)|u_n(x)|^2 dx}{\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)|u_n(x)|^2 dx}. \quad (1.61)$$

Вираз у правій частині рівності (1.70) – це дійсна величина. Звідси бачимо, що власні значення крайової задачі Штурма-Ліувілля (1.55) є дійсні числа.

Для дійсних чисел z_n коефіцієнти в рівнянні (1.55) для функції $u_n(x)$ стають дійсними, тому дійсними є функція $\psi(x, z_n)$ та (при дійсних коефіцієнтах C_n) власні функції $u_n(x) = C_n \psi(x, z_n)$. Згадавши означення (1.49) функціонала $Q[h]$ і нерівність (1.50), дістаємо:

$$z_n = Q[u_n] > \Lambda_0 = \min_{x \in [x_1, x_2]} \frac{S(x)}{\rho(x)}. \quad (1.62)$$

Тим самим ми довели, що правильна

Теорема 1.7.4. Власні значення крайової задачі Штурма-Ліувілля (1.55) є дійсні числа з інтервалу $(\Lambda_0, +\infty)$ з єдиною точкою скупчення на $+\infty$.

З означення (1.51) та системи (1.53), (1.54) бачимо, що λ_0 є власним значенням, причому *найменшим*. Тому *Теорему 1.7.3* можна сформулювати так:

Теорема 1.7.5. Серед гладких кривих зі спільним початком і спільним кінцем крива $y_0(x)$ надає мінімум функціоналові (1.2), якщо найменше власне значення λ_0 крайової задачі Штурма-Ліувілля (1.55) додатне, і не надає, якщо воно від'ємне.

Завдання 1.7.5. Нехай $\min_{x \in [x_1, x_2]} R(x) = \mu$ і $\min_{x \in [x_1, x_2]} S(x) = q$. Доведіть, що $\lambda_0 > 0$,

якщо

$$\frac{\mu \pi^2}{(x_2 - x_1)^2} + q > 0. \quad (1.63)$$

Вказівка. Скористайтесь нерівністю

$$\int_{x_1}^{x_2} dx [S(x)h^2(x) + R(x)h'^2(x)] \geq \int_{x_1}^{x_2} dx [qh^2(x) + \mu h'^2(x)]$$

та результатом *Завдання 1.7.4.*

Завершимо цей параграф, навівши ще одну достатню умову мінімальності функціонала (1.2) при виконанні посиленої умови Лежандра. Для цього розглянемо введений вище розв'язок $\psi(x, z)$ рівняння Штурма-Ліувілля (1.55), підпорядкований умовам (1.59). З теорії рівняння Штурма-Ліувілля відомо, що кількість нулів функції $\psi(x, 0)$ в інтервалі (x_1, x_2) точно збігається з кількістю від'ємних власних значень крайової задачі (1.55). Отже, крива $y_0(x)$ надає функціоналові (1.2) мінімум, якщо функція $\psi(x, 0)$ не має нулів на інтервалі $(x_1, x_2]$. Ця умова відома як *посилена умова Якобі*.

Виконання посилених умов Лежандра та Якобі є достатньою умовою того, щоб екстремаль $y_0(x)$ надавала мінімум функціоналу найпростішого типу (1.2) на класі гладких кривих. Достатня умова максимуму формулюється аналогічно, лише тепер $R < 0$.

Завдання 1.7.6. Серед гладких кривих, які проходять через точки $A(0,0)$ і $B(1,1)$, знайдіть ту, яка надає екстремум функціоналу

$$J[y] = \int_0^1 dx y'^3.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння Ейлера-Лагранжа для цього функціонала $y(x) = C_1 x + C_2$. З урахуванням умов закріплення маємо $y_0(x) = x$.

Посилена умова Лежандра для функції $y_0(x)$ виконується скрізь на інтервалі

$$(0,1): R = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \Big|_{y=y_0} = 6y'_0 = 6 > 0.$$

Перевіряємо виконання посиленої умови Якобі. Потрібно знайти розв'язок рівняння (1.55) при $R = 6$, $S = 0$ і $z = 0$. Воно набирає вигляду $\psi''(x,0) = 0$, звідки $\psi(x,0) = D_1 x + D_2$, D_1, D_2 – сталі інтегрування. Умови зліва $\psi(0,0) = 0$, $\psi'(0,0) = 1$ остаточно дають: $\psi(x,0) = x$. Ця функція не має жодних нулів на інтервалі $(0,1]$.

Отже, екстремаль $y_0(x) = x$ надає мінімум заданому функціоналові. Цей результат можна було б отримати відразу, скориставшись *Теоремою 1.7.2*.

Вивчення достатніх умов екстремуму для більш складних типів функціоналів є значно складнішим і тому в цьому тексті не проводиться. Як уже зазначалося, у фізичних та прикладних задачах існування таких екстремумів впливає із самої постановки задачі.

2. УЗАГАЛЬНЕННЯ НАЙПРОСТІШОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ

2.1. Крайові умови

До цього часу при вивченні функціонала (1.2) розглядалися лише ті гладкі криві, кінці яких жорстко закріплено в нерухомих точках з абсцисами x_1 та x_2 . Ординати цих точок задавалися співвідношеннями (1.3).

Означення 2.1.1. Додаткові умови, яким підпорядковуються значення допустимих функцій та їх похідних на межах досліджуваного інтервалу, називаються крайовими.

Крайові умови (1.3) задавалися ззовні і ніяким чином не були пов'язані з явним видом функціонала (1.2). Інша ситуація зустрічається у випадках, коли екстремум функціонала (1.2) вивчається на більш широкому класі гладких функцій, наприклад, коли кінці допустимих кривих можуть вільно ковзати вздовж деяких кривих. Тепер явний вигляд крайових умов залежить від конкретного виду ядра $F(x, y, y')$, а необхідна умова існування екстремуму вимагає, щоб екстремальна крива задовольняла як відповідне рівняння Ейлера-Лагранжа, так і ці нові умови.

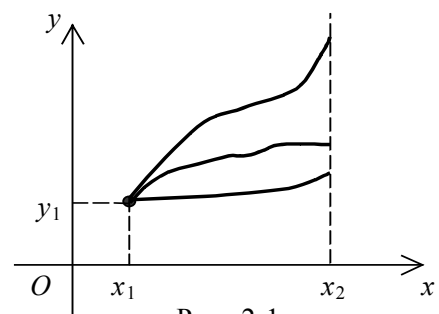


Рис. 2.1

Знайдемо необхідні умови існування екстремуму функціонала (1.2) у класі $C^1([x_1, x_2])$ кривих, ліві кінці яких жорстко закріплено в точці $x = x_1$, а праві можуть вільно ковзати вздовж вертикальної прямої $x = x_2$ (рис. 2.1).

При фіксованому значенні зліва

$$y(x_1) = y_1 \quad (2.1)$$

необхідна умова екстремуму набирає вигляду (див. формулу (1.5))

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot h(x) \right|_{x=x_2} + \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} h(x) = 0. \quad (2.2)$$

Те ж саме можемо записати в термінах варіації $\delta y(x)$ функції $y(x)$:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y(x) \right|_{x=x_2} + \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) = 0. \quad (2.3)$$

На інтервалі (x_1, x_2) , а також у точці $x = x_2$ значення функції $h(x)$ (варіації $\delta y(x)$) довільні. Користуючись цим, розглянемо спершу окремий випадок, коли $h(x_2) = 0$ ($\delta y(x_2) = 0$). Тоді перший доданок у (2.2) (і (2.3)) дорівнює нулю. У силу ж довільності функції $h(x)$ (варіації $\delta y(x)$) на інтервалі (x_1, x_2) другий доданок дорівнює нулю тоді, коли дорівнює нулю вираз у фігурних дужках, тобто коли справджується рівняння Ейлера-Лагранжа (1.4).

Нехай тепер значення $h(x_2)$ (чи $\delta y(x_2)$) довільні. Другий доданок у (2.2) (і (2.3)) дорівнює нулю, бо шукана екстремаль, належачи до більш широкого класу допустимих кривих, має задовольняти необхідну умову екстремуму для більш вузького класу кривих із закріпленими кінцями, тобто має справжуватися рівняння (1.4). Тоді перший доданок у (2.2) (і (2.3)) дорівнює нулю лише за умови

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_2} = 0 \quad (2.4)$$

— дістаємо співвідношення, якому повинні підпорядковуватися значення екстремалі та її похідної в точці $x = x_2$.

Таким чином, необхідна умова існування екстремуму функціонала (1.2) у класі гладких кривих, ліві кінці яких жорстко закріплено, а праві можуть вільно ковзати вздовж вертикальної прямої $x = x_2$, складається з: а) рівняння Ейлера-Лагранжа (1.4), б) крайової умови (2.1); в) крайової умови (2.4). Додатково треба перевірити належність знайдених розв'язків екстремальної задачі саме до класу гладких кривих.

Зауваження. Якщо й ліві кінці допустимих кривих можуть вільно ковзати вздовж вертикалі $x = x_1$, то умова (2.1) замінюється умовою (2.4), записаною для $x = x_1$. У загальному ж випадку крайові умови є різними комбінаціями умов (1.3), (2.1), (2.4) та їм подібних. *Конкретний вигляд крайової умови в даній точці визначається характером обмеження на поведінку допустимої кривої у цій точці.*

Завдання 2.1.1. У класі $C^1([x_1, x_2])$ кривих, кінці яких можуть вільно ковзати вздовж вертикалей, знайдіть можливі екстремалі, що задовольняють задані крайові умови:

$$\text{а) } J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 1;$$

$$\text{б) } J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 - y + 1), \quad y(0) = 0;$$

$$\text{в) } J[y] = \int_0^{\pi/4} dx (y'^2 - y^2), \quad y(0) = 1;$$

$$\text{г) } J[y] = \int_0^2 dx (y'^2 - y'x), \quad y(0) = 0;$$

$$\text{д) } J[y] = \int_1^e dx (xy'^2 + 2y), \quad y(1) = 0;$$

$$\text{е) } J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 - 2yy' + 2y^2), \quad y(1) = 1;$$

$$\text{є) } J[y] = \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx (y^2 - y'^2 + 4y \sin x), \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$\text{ж) } J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 + y^2 + 4y \operatorname{sh} x), \quad y(0) = 0;$$

$$\text{з) } J[y] = \int_0^1 dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}, \quad y(0) = 1;$$

$$\text{и) } J[y] = \int_0^1 dx y'(1 + x^2 y^2), \quad y(1) = 0.$$

Вказівки: д) рівняння Ейлера-Лагранжа $1 - (xy')' = 0$ має загальний розв'язок $y(x) = C_1 \ln x + x + C_2$. Крайова умова справа $\partial F / \partial y'|_{x=e} = 2xy'|_{x=e} = 0$, тобто $y'(e) = 0$. Знайшовши сталі, дістаємо: $y(x) = -e \ln x + x - 1$; е) рівняння Ейлера-Лагранжа $y'' - 2y = 0$ має загальний розв'язок $y(x) = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}$. Крайова умова зліва $y'(0) - y(0) = 0$. Остаточна відповідь: $y(x) = \frac{\sqrt{2} \operatorname{ch}(\sqrt{2}x) + \operatorname{sh}(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2} \operatorname{ch} \sqrt{2} + \operatorname{sh} \sqrt{2}}$; є) розв'язок неоднорідного рівняння $y'' + y = -2 \sin x$ можна шукати методом варіації довільних сталих: $y(x) = A(x) \cos x + B(x) \sin x$. На функції $A(x)$ та $B(x)$ без обмеження загальності можна накласти умову $A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0$. Друге рівняння знайдемо, підставивши функцію $y(x)$ у наше неоднорідне рівняння: $-A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = -2 \sin x$. Розв'язок здобутої системи має вигляд $A(x) = x - \frac{1}{2} \sin(2x) + a$, $B(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) + b$, де a та b – сталі інтегрування. Загальний розв'язок має структуру $y(x) = (a + x) \cos x + \tilde{b} \sin x$, \tilde{b} – нова стала. За допомогою крайових умов $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ знаходимо: $y(x) = \left(-\frac{\pi}{4} + 1 + x\right) \cos x$.

Відповіді: а) $y(x) = 1$; б) $y(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$; в) $y(x) = \cos x + \sin x$; г) $y(x) = \frac{x^2}{4}$; ж) $y(x) = x \operatorname{ch} x - \frac{(\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1)}{\operatorname{ch} 1} \operatorname{sh} x$; з) $y(x) = \sqrt{2 - (1 - x)^2}$; и) екстремалей нема (крайова умова зліва не задовольняється).

Завдання 2.1.2. Уздовж якої кривої, розташованої у вертикальній площині XOY (вісь OX напрямлена горизонтально, вісь OY – вертикально вниз), повинна рухатися матеріальна точка під дією сили тяжіння, щоб, відправившись із початку координат із нульовою початковою швидкістю, перетнути вертикальну пряму $x = l$ за найкоротший час? (Модифікована задача про брахістохрону І. Бернуллі).

Вказівка: $y'(l) = 0$; див. також Завдання 1.5.4.

Відповідь: $x(\varphi) = \frac{l}{\pi}(\varphi - \sin \varphi)$, $y(\varphi) = \frac{l}{\pi}(1 - \cos \varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Завдання 2.1.3. Горизонтальний тонкий стержень довжиною L жорстко закріплено в точці A . До його іншого кінця B підвішено кульку масою m . Нехтуючи масою стержня, знайдіть його рівноважний профіль (рис. 2.2).

Розв'язання. Треба знайти функцію $y = y(x)$, яка реалізує мінімум функціонала потенціальної енергії системи $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$. Тут: Π_1 – функціонал потенціальної енергії системи в полі сили тяжіння; він дорівнює потенціальній енергії кульки:

$$\Pi_1 = -mgY, \quad (2.5)$$

де Y – ордината точки B (енергію відраховуємо від рівня $y = 0$, несуттєву адитивну сталу $-mga$, a – довжина нитки, опускаємо); Π_2 – функціонал потенціальної енергії пружної деформації стержня; він обчислюється за формулою

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} EJ \int_0^L dl \left(\frac{d\alpha}{dl} \right)^2, \quad (2.6)$$

де α – кут між дотичною до профілю $y(x)$ і віссю OX , $d\alpha/dl = 1/R$ – кривина стержня (R – радіус кривини), E – модуль розтягу Юнга, J – головний момент інерції поперечного перерізу стержня.

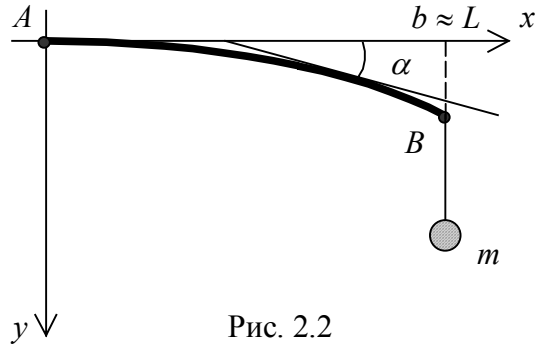
Зауважимо, що головні моменти поперечного перерізу S відносно головних осей ξ і η визначаються подібно до звичайних моментів інерції, лише замість елемента маси у відповідних формулах стоїть елемент поверхні dS :

$$J_\xi = \int_S dS \eta^2, \quad J_\eta = \int_S dS \xi^2.$$

Для кругового перерізу радіуса R , у якого центр інерції знаходиться в центрі круга, а напрями головних осей довільні, $J = J_\xi = J_\eta = \pi R^4/4$.

Виразивши ординату Y через кут α :

$$Y = \int_{AB} dy = \int_0^L dl \sin \alpha,$$



для Π дістаємо:

$$\Pi = \int_0^L dl \left(\frac{1}{2} EJ \alpha'^2 - mg \sin \alpha \right).$$

Мінімум функціонала Π реалізується для функції $\alpha = \alpha(l)$, яка задовольняє рівняння

$$EJ \alpha'' + mg \cos \alpha = 0$$

та крайові умови $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(L) = 0$.

Вважаючи, що прогин стержня малий ($\alpha \ll 1$), та нехтуючи величинами другого порядку малості, можемо записати: $\cos \alpha \approx 1$, $y'(x) = \tan \alpha \approx \alpha$. Бачимо також, що довжина стержня у цьому наближенні залишається незмінною:

$$L = \int_0^L dl = \int_0^b dx \sqrt{1 + y'^2} \approx b,$$

де b – абсциса точки B . Тому $\alpha' \approx y''$, $\alpha'' \approx y'''$, а рівняння для профілю стержня та крайові умови набувають вигляду:

$$EJ y''' + mg = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(L) = 0, \quad (2.7)$$

звідки

$$y(x) = -\frac{mg}{6EJ} x^3 + C_2 x^2 + C_1 x + C_0.$$

Сталі інтегрування дорівнюють: $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = mgL/2EJ$. Отже, остаточна відповідь така:

$$y(x) = \frac{mg}{6EJ} x^2 (3L - x).$$

Задачі про форму деформованих стержнів, балок та поверхонь за тих чи інших крайових умов складають предмет вивчення теорії пружності та її спрощеного варіанта – опору матеріалів. Як правило, для їх розв'язання доводиться аналізувати функціонали, що залежать від функції та її вищих похідних. Такі функціонали вивчаються в § 2.4.

2.2. Умови трансверсальності

Подальшим узагальненням функціоналів найпростішого типу (1.2) виступають функціонали виду

$$J[y] = \int_{\Gamma} dx F(x, y, y'), \quad (2.8)$$

що задаються на множині гладких кривих Γ , кінці яких можуть ковзати по відомих гладких лініях $y = \varphi(x)$ та $y = \psi(x)$ (не обов'язково вертикальних). Крім нових крайових умов, новим елементом відповідної екстремальної задачі є те, що абсциси початку та кінця екстремальної кривої також підлягають відшукуванню.

Знайдемо екстремум функціонала типу (2.8) у класі гладких кривих, ліві кінці

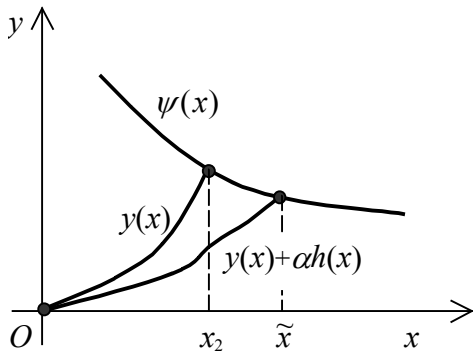


Рис. 2.3

яких жорстко закріплено в точці $x = 0$, а праві можуть ковзати вздовж гладкої кривої $y = \psi(x)$. Для цього функціонал подамо у вигляді інтеграла зі змінною верхньою межею:

$$J[y] = \int_0^{\tilde{x}} dx F(x, y, y'). \quad (2.9)$$

Нехай його екстремум досягається на кривій

$y = y(x)$, правий кінець якої має абсцису x_2 .

Оскільки останній лежить на кривій $y = \psi(x)$, можемо записати (див. рис. 2.3):

$$y(x_2) = \psi(x_2). \quad (2.10)$$

Зліва ж маємо:

$$y(0) = 0. \quad (2.11)$$

Розглянемо тепер множину допустимих кривих $y(x) + \alpha h(x)$, де α – малий параметр, $h(x)$ – довільна гладка функція. Праві кінці допустимих кривих лежать на кривій $y = \psi(x)$, тому їх абсциси \tilde{x} задовольняють співвідношення

$$y(\tilde{x}) + \alpha h(\tilde{x}) = \psi(\tilde{x}). \quad (2.12)$$

Зауважимо, що абсциси \tilde{x} залежать від параметра α , причому при $\alpha = 0$ (для екстремальної кривої) $\tilde{x}(0) = x_2$. Зліва й надалі маємо $y(0) + \alpha h(0) = 0$, тобто $h(0) = 0$.

Для екстремалі $y(x)$ функція $\varphi(\alpha) \equiv J[y + \alpha h]$ набуває екстремуму. Можемо записати:

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= F|_{x=x_2} \cdot \tilde{x}'(0) + \int_0^{\tilde{x}(0)} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} \cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot h'(x) \right\} = \\ &= F|_{x=x_2} \cdot \tilde{x}'(0) + \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=x_2} \cdot h(x_2) + \int_0^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} h(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Число $\tilde{x}'(0)$ знаходимо, диференціюючи (2.12) за α :

$$y'(\tilde{x})\tilde{x}'(\alpha) + h(\tilde{x}) + \alpha h'(\tilde{x})\tilde{x}'(\alpha) = \psi'(\tilde{x})\tilde{x}'(\alpha),$$

$$\tilde{x}'(0) = \frac{h(x_2)}{\psi'(x_2) - y'(x_2)}.$$

Дістаємо:

$$\left[\frac{F}{\psi' - y'} + \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_2} \cdot h(x_2) + \int_0^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} h(x) = 0.$$

Звідси, з огляду на довільність функції $h(x)$ на проміжку $(0, x_2]$, робимо висновок, що екстремаль $y(x)$ має задовольняти як рівняння Ейлера-Лагранжа (1.4), так і таку крайову умову справа:

$$\left[F + (\psi' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_2} = 0. \quad (2.14)$$

Крім того, повинні справджуватися рівності (2.11) (крайова умова для жорстко закріпленого лівого кінця) та (2.10) (правий кінець екстремалі лежить на заданій кривій).

Співвідношення (2.14) називається *умовою трансверсальності*. У граничному випадку вертикальної прямої ($\psi' \rightarrow \infty$) воно переходить у крайову умову (2.4). Граничний випадок горизонтальної прямої дістаємо, поклавши $\psi' = 0$.

Користуючись попередніми результатами, можемо тепер сформулювати загальну схему розв'язання екстремальної задачі для функціонала (2.8). Спершу розв'язуємо рівняння Ейлера-Лагранжа (1.4) та знаходимо двопараметричну сім'ю кривих $y = y(x, C_1, C_2)$. Потім серед них відшукуємо ті, які на лівих (з абсцисою x_1) і правих

(з абсцисою x_2) кінцях задовольняють умови трансверсальності

$$\left[F + (\varphi' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_1} = 0, \quad \left[F + (\psi' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_2} = 0 \quad (2.15)$$

та рівняння

$$y(x_1, C_1, C_2) = \varphi(x_1), \quad y(x_2, C_1, C_2) = \psi(x_2). \quad (2.16)$$

За допомогою цих чотирьох рівнянь знаходимо x_1 , x_2 , C_1 та C_2 .

Підкреслимо, що умова трансверсальності повинна виконуватися лише для того кінця екстремальної кривої, який може вільно рухатися вздовж певної кривої (чи по поверхні).

Завдання 2.2.1. Знайдіть найкоротшу відстань від точки $A(0,0)$ до кривої $y = \psi(x)$.

Розв'язання. Треба знайти довжину L екстремалі $y = y(x)$ функціонала

$$J[y] = \int_0^{\tilde{x}} dx \sqrt{1 + y'^2},$$

яка з'єднує точку A з деякою точкою B (із поки що невідомою абсцисою x_2) на лінії $y = \psi(x)$: $y(x_2) = \psi(x_2)$. Крайова умова в точці A має вигляд $y(0) = 0$. Умова трансверсальності в точці B записується як $y'(x_2)\psi'(x_2) = -1$, тобто вироджується в умову ортогональності екстремалі та заданої кривої.

Загальний розв'язок рівняння Ейлера-Лагранжа в нашому випадку відомий: $y(x) = C_1 x + C_2$. З урахуванням крайових умов для екстремалі дістаємо:

$y(x) = -\frac{1}{\psi'(x_2)}x$. Точку x_2 знаходимо як корінь рівняння $x_2 = -\psi'(x_2)\psi(x_2)$. Шукана

відстань $L = \sqrt{x_2^2 + \psi^2(x_2)}$.

Завдання 2.2.2. За який мінімальний час та в якій точці промінь світла, випущений із початку координат, досягне параболи $y = \frac{5}{4} + (x-2)^2$?

Відповідь. У точці $x_2 = 3/2$ за час $t = 3/\sqrt{2}c$, c – швидкість світла.

Завдання 2.2.3. Нехай ядро функціонала (2.8) $F(x, y, y') = f(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$. Покажіть, що якщо значення функції f на лівому кінці не дорівнює нулю, то умова трансверсальності на ньому вироджується в умову ортогональності екстремалі $y = y(x)$ та лінії $y = \varphi(x)$: $y'(x_1)\varphi'(x_1) = -1$.

Нехай тепер $y(x)$ – екстремаль функціонала типу (2.9) у класі гладких кривих, ліві кінці яких жорстко закріплено в початку координат, а праві можуть вільно ковзати у площині XOY . З'ясуємо, яку крайову умову задовольняє $y(x)$ на рухомому кінці.

Візьмемо до уваги, що співвідношення (2.14) повинно справджуватися для довільної функції $\psi(x)$. Таке можливо, якщо одночасно виконуються умови

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_2} = 0, \quad F|_{x=x_2} = 0. \quad (2.17)$$

Система цих рівнянь дозволяє знайти координати (x_2, y_2) правого кінця екстремалі ($y_2 = y(x_2)$). Доповнивши (2.17) рівнянням Ейлера-Лагранжа (1.4) та крайовою умовою (2.11), дістаємо необхідні умови для $y(x)$.

Поява двох умов (2.17) відображає той факт, що вільне ковзання правих кінців допустимих кривих у площині XOY є суперпозицією двох незалежних рухів – вільних ковзань вздовж вертикального та горизонтального напрямів. Першому відповідає

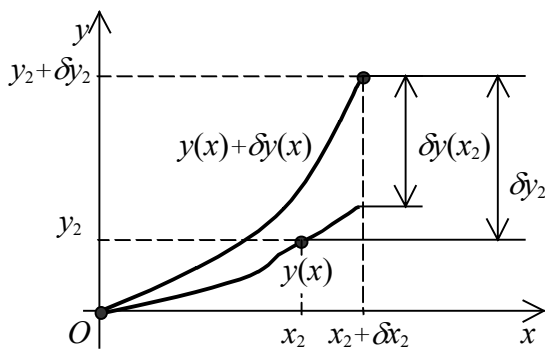


Рис. 2.4

незалежна варіація абсиси δx_2 , а другому – незалежна варіація ординати δy_2 правих кінців. Аналогічні умови повинні задовольнятися й на лівому кінці екстремальної кривої, якщо йому також дозволено вільно ковзати у площині XOY .

Цей самий результат можна отримати й так. Нехай (x_2, y_2) – координати правого кінця екстремалі $y(x)$, а $(x_2 + \delta x_2, y_2 + \delta y_2)$ – координати правих кінців допустимих кривих $y(x) + \delta y(x)$ (рис. 2.4). Подамо першу варіацію функціонала (2.9) у вигляді

(див. формулу (2.13))

$$\delta J[y] = F|_{x=x_2} \cdot \delta x_2 + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_2} \cdot \delta y(x_2) + \int_0^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x). \quad (2.18)$$

У другому доданку цієї формули треба, однак, перейти від $\delta y(x_2)$ (варіації форми допустимих функцій у точці $x = x_2$) до незалежних варіацій δx_2 і δy_2 координат правих кінців допустимих функцій. У лінійному наближенні маємо:

$$\delta y_2 = y(x_2 + \delta x_2) + \delta y(x_2 + \delta x_2) - y(x_2) \approx y'(x_2) \delta x_2 + \delta y(x_2).$$

З урахуванням цієї формули необхідну умову екстремуму функціонала (2.9) можемо записати у вигляді

$$\delta J[y] = \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \Big|_{x=x_2} \cdot \delta x_2 + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_2} \cdot \delta y_2 + \int_0^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) = 0. \quad (2.19)$$

Розглядаючи по черзі кожну з варіацій $\delta y(x)$, $x \in (0, x_2)$, δx_2 і δy_2 , дістаємо рівняння (1.4) та крайові умови (2.17).

2.3. Задача Больца

Окрім уже розглянутих типів обмежень на поведінку кінців допустимих кривих – жорсткого закріплення та вільного ковзання вздовж певних кривих – можна уявити собі й інші типи в'язей. Прикладом може бути так зване пружне закріплення кінців за допомогою пружинок малої (у граничному випадку – нульової) довжини. Вплив таких пружинок на рух кінців допустимих кривих можна врахувати за допомогою деякої функції $\Phi(y(x_1), y(x_2))$, яка залежить лише від значень $y(x_1)$ та $y(x_2)$ шуканої функції на кінцях відрізка $[x_1, x_2]$. Відповідні функціонали мають вигляд

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y') + \Phi(y(x_1), y(x_2)) \quad (2.20)$$

і називаються функціоналами Больца, а задача про відшукування їх екстремалей – задачею Больца.

Завдання 2.3.1. Покажіть, що екстремаль функціонала (2.20) із диференційовною функцією $\Phi(y(x_1), y(x_2))$ повинна задовольняти рівняння Ейлера-Лагранжа (1.4) та крайові умови

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial y(x_1)} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y(x_2)} = 0. \quad (2.21)$$

Вказівка. Варіація функції $\Phi(y(x_1), y(x_2))$ для кривих $y(x) + \delta y(x)$ з ε -околу першого порядку кривої $y(x)$ дорівнює

$$\begin{aligned} \delta \Phi(y(x_1), y(x_2)) &= \Phi(y(x_1) + \delta y(x_1), y(x_2) + \delta y(x_2)) - \Phi(y(x_1), y(x_2)) \cong \\ &\cong \frac{\partial \Phi(y(x_1), y(x_2))}{\partial y(x_1)} \delta y(x_1) + \frac{\partial \Phi(y(x_1), y(x_2))}{\partial y(x_2)} \delta y(x_2). \end{aligned}$$

Перша варіація функціонала (2.20) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \delta J[y] &= \left[- \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y(x_1)} \right] \delta y(x_1) + \left[\left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{x=x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y(x_2)} \right] \delta y(x_2) + \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x). \end{aligned}$$

Вважаючи значення $\delta y(x_1)$ та $\delta y(x_2)$ довільними (чому?), треба знайти умови, за яких $\delta J[y] = 0$.

Завдання 2.3.2. Розв'яжіть такі задачі Больца:

а) $J[y] = \int_0^1 dx y'^2 + 4y^2(0) - 5y^2(1);$

б) $J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 + y^2) - 2 \operatorname{sh} 1 y(1);$

в) $J[y] = \int_0^\pi dx (y'^2 + y^2 - 4y \sin x) + 2y^2(0) + 2y(\pi) - y^2(\pi);$

г) $J[y] = \int_0^{e-1} dx (x+1)y'^2 + 2y(0)[y(e-1)+1];$

д) $J[y] = \int_1^2 dx x^2 y'^2 - 2y(1) + y^2(2);$

$$\text{е) } J[y] = \int_0^1 dx y'^2 + 2y^2(1), \quad y(0) = 0;$$

$$\text{є) } J[y] = \int_0^1 dx (y'^2 - y) + y^2(1);$$

$$\text{ж) } J[y] = \int_0^2 dx (y' + x)^2 + 4y(2), \quad y(0) = 0.$$

Відповіді: а) $y(x) = 0$; б) $y(x) = \operatorname{ch} x$; в) $y(x) = e^x + \sin x$; г) $y(x) = \ln(x+1) - 1$;

д) $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$; е) $y(x) = 0$; є) $y(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}$; ж) $y(x) = -\frac{x^2}{2} - 2x$.

Завдання 2.3.3. Покажіть, що гладка екстремаль функціонала

$$I[y] = \frac{1}{2} \int_0^l [p(x)y'^2(x) + q(x)y^2(x)] dx + \frac{k_1}{2} y^2(0) + \frac{k_2}{2} y^2(l)$$

задовольняє рівняння Штурма-Ліувілля

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y'(x)) + q(x)y(x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

та однорідні крайові умови

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0, \quad y'(l) + h_2 y(l) = 0,$$

де $h_1 \equiv k_1/p(0)$, $h_2 \equiv k_2/p(l)$.

2.4. Функціонали, які залежать від функції та її вищих похідних

Тепер вважатимемо, що при $x \in [x_1, x_2]$ функція F залежить ще й від другої похідної y'' і є неперервною разом зі всіма своїми частинними похідними до другого

порядку включно при всіх можливих значеннях своїх аргументів.

Теорема 2.4.1. Нехай крива $y_0(x)$ є екстремаллю функціонала

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y', y'') \quad (2.22)$$

у класі $C^2([x_1, x_2])$ допустимих кривих, які разом зі своїми першими похідними набувають фіксованих значень на межах відрізка $[x_1, x_2]$:

$$y(x_1) = y_{10}, \quad y'(x_1) = y_{11}, \quad y(x_2) = y_{20}, \quad y'(x_2) = y_{21}. \quad (2.23)$$

Припустимо, що $y_0(x) \in C^4([x_1, x_2])$. Тоді $y_0(x)$ задовольняє рівняння Ейлера-Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0. \quad (2.24)$$

Доведення. Розглянемо множину кривих $y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$ з ε -околу другого порядку кривої $y_0(x)$. Інтегруючи частинами, першу варіацію функціонала (2.22) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \delta J[y] = & \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} \right\} \delta y(x) dx. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Унаслідок крайових умов $\delta y(x_1) = \delta y'(x_1) = \delta y(x_2) = \delta y'(x_2) = 0$ подвійні підстановки у (2.25) дорівнюють нулю, тому перша варіація збігається з інтегралом у правій частині (2.25). Останній дорівнює нулю для довільної варіації δy (яка на кінцях відрізка $[x_1, x_2]$ дорівнює нулю разом із першою похідною), якщо справджується рівність (2.24).

Зауваження.

1) При інтегруванні частинами у формулі (2.25) ми припустили, що шукана функція має неперервні похідні третього та четвертого порядків. Можна довести, що для екстремальної кривої це припущення вірне скрізь, де $\partial F / \partial y'' \neq 0$.

2) У загальному випадку рівняння Ейлера-Пуассона є звичайним диференціальним рівнянням четвертого порядку, тому його загальний розв'язок

містить, взагалі кажучи, чотири сталі інтегрування. Останні визначаються за допомогою крайових умов, що відповідають досліджуваному класу кривих.

Завдання 2.4.1. Знайдіть необхідні умови існування екстремуму функціонала (2.22) у класі $C^2([x_1, x_2])$ кривих, праві кінці яких жорстко закріплено під фіксованим кутом до осі OX , а ліві:

а) можуть вільно ковзати вздовж вертикальної прямої $x = x_1$, утворюючи з нею однаковий фіксований кут (маючи в точці x_1 заданий кут нахилу дотичної);

б) закріплено в точці x_1 шарнірно (тобто в точці x_1 вони можуть утворювати довільні кути з віссю OX);

в) можуть вільно ковзати вздовж вертикальної прямої $x = x_1$, утворюючи з нею довільні кути (маючи в точці x_1 дотичні довільних напрямів).

Вказівка. Узявши до уваги характер поведінки допустимих кривих у крайових точках, проаналізуйте умови, за яких перша варіація (2.25) дорівнює нулю. Наприклад, у випадку б) рівність $\delta J = 0$ має справджуватися при $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = \delta y'(x_2) = 0$ і довільних значеннях $\delta y'(x_1)$, оскільки тангенс кута нахилу дотичних зліва є довільним.

Відповіді. Екстремальні криві задовольняють рівняння Ейлера-Пуассона (2.24) та такі крайові умови:

$$\text{а) } \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \bigg|_{x=x_1} = 0, \quad y'(x_1) = y_{11}, \quad y(x_2) = y_{20}, \quad y'(x_2) = y_{21}; \quad (2.26)$$

$$\text{б) } \frac{\partial F}{\partial y''} \bigg|_{x=x_1} = 0, \quad y(x_1) = y_{10}, \quad y(x_2) = y_{20}, \quad y'(x_2) = y_{21}; \quad (2.27)$$

$$\text{в) } \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \bigg|_{x=x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y''} \bigg|_{x=x_1} = 0, \quad y(x_2) = y_{20}, \quad y'(x_2) = y_{21}. \quad (2.28)$$

Невиконання хоча б однієї з цих умов означає, що функціонал не має екстремуму серед кривих класу $C^2([x_1, x_2])$.

Завдання 2.4.2. Серед кривих класу $C^2([x_1, x_2])$ відшукайте ті, які задовольняють усі необхідні умови існування екстремуму таких функціоналів:

$$\text{а) } J[y] = \int_0^1 dx y''^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = y(1) = y'(1) = 1;$$

$$\text{б)} J[y] = \int_0^{\pi/2} dx (y''^2 - y^2 + x^2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$$

$$\text{в)} J[y] = \int_0^1 dx e^{-x} y''^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 2e;$$

$$\text{г)} J[y] = \int_1^e dx xy''^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y(e) = e, \quad y'(e) = 2;$$

$$\text{д)} J[y] = \int_0^1 dx (y'' - y)^2, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \text{sh} 1, \quad y'(1) = \text{sh} 1 + \text{ch} 1;$$

$$\text{е)} J[y] = \int_0^1 dx (y''^2 + xy'), \quad y(0) = y'(0) = y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Вказівки: б) рівняння Ейлера-Пуассона має вигляд $y^{(4)} - y = 0$; його загальний розв'язок $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. Крайові умови дають: $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_3 = 1$, отже, $y(x) = \cos x$; в) рівняння Ейлера-Пуассона зручно подати у вигляді $(e^{-x} y'')'' = 0$, звідки $(e^{-x} y'')' = C_1$, $e^{-x} y'' = C_1 x + C_2$, $y'' = (C_1 x + C_2) e^x$. Далі функцію $y(x)$ відновлюємо простим інтегруванням. Можна й безпосередньо розв'язати рівняння $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$, врахувавши, що відповідне характеристичне рівняння має два корені $\lambda = 0$ і $\lambda = 1$ другої кратності.

Відповіді: а) $y(x) = x$; в) $y(x) = x e^x$; г) $y(x) = x \ln x$; д) $y(x) = x \text{sh} x$; е)
 $y(x) = \frac{1}{48} x^4 + \frac{23}{24} x^3 - \frac{47}{48} x^2$.

Завдання 2.4.3. Серед кривих класу $C^2([0;1])$, кінці яких знаходяться на вертикальних прямих $x = 0$, $x = 1$, відшукайте та зобразіть графічно можливі екстремалі функціонала

$$J[y] = \int_0^1 dx y''^2,$$

що задовольняють такі умови:

а) $y(0) = 0, y'(0) = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1$;

б) $y'(0) = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1$;

в) $y(0) = 0, y(1) = 0, y'(1) = 1$;

г) $y(1) = 0, y'(1) = 1$;

д) $y'(1) = 1$;

е) $y(1) = 0$;

є) значення $y(x)$ та $y'(x)$ у крайніх точках довільні.

Вказівки: б) крім трьох явно виписаних, для знаходження сталих у загальному розв'язку рівняння Ейлера-Пуассона $y(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$ маємо ще крайову

умову $\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \bigg|_{x=0} = y'''(0) = 0$ (див. (2.26)); в) з урахуванням виписаних крайових

умов шукана функція має вигляд $y(x) = Cx^3 + (1 - 2C)x^2 + (C - 1)x$, де C – поки що невизначена стала. Перша з умов (2.27) дає $y''(0) = 0$, звідки $C = 1/2$. Зауважимо, що для функції $y(x)$ заданий функціонал дорівнює

$J[y] = 4(C^2 - C + 1)$; як функція від C , він набуває мінімуму саме при $C = 1/2$ – умовою $y''(0) = 0$ із однопараметричної сім'ї кривих відбирається та, яка реалізує мінімум функціонала; д) крайові умови $y''(0) = y'''(0) = y'''(1) = 0, y'(1) = 1$ ведуть до $y(x) = x + C$. Стала C залишається

невизначеною, тобто мінімум заданого

функціонала реалізується на однопараметричній сім'ї кривих.

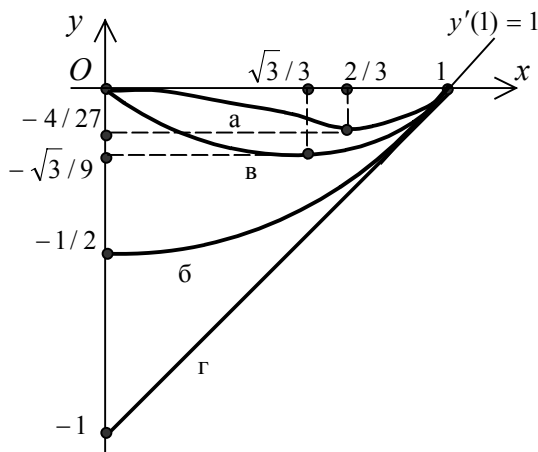


Рис. 2.5

Відповіді: а) $y(x) = x^3 - x^2$; б) $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$; в) $y(x) = \frac{1}{2}(x^3 - x)$; г)

$y(x) = x - 1$; д) $y(x) = x + C$ (однопараметрична сім'я прямих); е) $y(x) = C(x - 1)$ (теж);

є) $y(x) = C_1x + C_2$ (двопараметрична сім'я прямих). Графіки кривих а) – г) подано на рис. 2.5.

Завдання 2.4.4. Серед кривих класу $C^2([x_1, x_2])$, кінці яких знаходяться на вертикальних прямих $x = x_1$, $x = x_2$, відшукайте можливі екстремалі таких функціоналів:

$$\text{а) } J[y] = \int_0^1 dx y''^2, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{б) } J[y] = \int_0^1 dx y''^2, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1;$$

$$\text{в) } J[y] = \int_1^e dx x^2 y''^2, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1, \quad y'(e) = e^{-1};$$

$$\text{г) } J[y] = \int_0^1 dx (y - y'')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

$$\text{д) } J[y] = \int_0^1 dx (y'' - y)^2, \quad y(0) = 1;$$

$$\text{е) } J[y] = \int_0^{\pi/2} dx (y''^2 - y^2), \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$$

$$\text{є) } J[y] = \int_0^{\pi/2} dx (y''^2 - y'^2), \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$\text{ж) } J[y] = \int_0^1 dx (y''^2 + y'^2), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \text{sh } 1, \quad y'(1) = \text{ch } 1.$$

Відповіді: а) $y(x) = \frac{1}{2}(-x^3 + 3x^2)$; б) $y(x) = \frac{1}{2}x^2$; в) $y(x) = \ln x$; г) $y(x) = \text{ch } x$;

д) $y(x) = \text{ch } x + C \text{ sh } x$, C – довільна стала; е) $y(x) = \sin x$; є) $y(x) = 1 - \cos x$; ж) $y(x) = \text{sh } x$.

Завдання 2.4.5. Тонкий стержень довжиною L замуровано в точках A та B , що лежать на одній горизонталі (рис. 2.6). Знайдіть форму профілю стержня внаслідок провисання під власною вагою. Погонна густина стержня ρ .

Вказівки. З урахуванням співвідношень $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$ і $dl = dx\sqrt{1 + y'^2(x)}$, для кривини стержня можемо записати $d\alpha/dl = y''/(1 + y'^2)^{3/2}$. Функціонал повної потенціальної енергії деформованого стержня в полі тяжіння

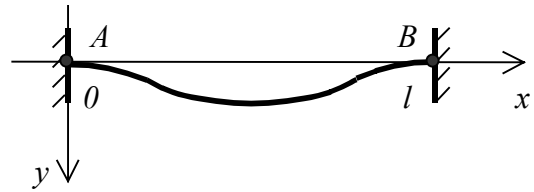


Рис. 2.6

$$\Pi[y] = \int_0^b dx \left\{ \frac{1}{2} EJ \frac{y''^2}{(1 + y'^2)^{5/2}} - \rho g y \sqrt{1 + y'^2} \right\},$$

де b – абсциса точки B (див. також *Завдання 2.1.3*).

Задача зводиться до відшукування екстремуму функціонала $\Pi[y]$ у класі двічі неперервно диференційовних функцій, що підпорядковуються крайовим умовам $y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0$. Відповідне рівняння Ейлера-Пуассона досить складне, але його можна спростити, якщо природно припустити, що провисання стержня є малим: $y'^2 \ll 1$. Тоді рівняння набирає вигляду $y^{(4)} = \frac{\rho g}{EJ}$, а в крайових умовах справа можна покласти $b \cong L$.

Відповідь: $y(x) = \frac{\rho g}{24EJ} x^2 (L - x)^2$. Максимальне провисання спостерігається посередині стержня: $y_{\max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{mgL^3}{384EJ}$.

Завдання 2.4.6. Знайдіть форму профілю стержня внаслідок провисання під власною вагою, якщо:

- а) обидва кінці стержня закріплено шарнірно в точках $x = 0$ та $x = L$ горизонтальної осі;
- б) обидва кінці стержня спираються на тверді вертикальні стінки в цих точках;
- в) кінець $x = 0$ спирається на стінку, а кінець $x = L$ замуровано в стінку;
- г) кінець $x = 0$ замуровано в стінку, а кінець $x = L$ вільний.

Вказівки. У наближенні $y'^2(x) \ll 1$ формули (2.26) – (2.28) дають такі (на додаток до умов жорсткого закріплення) крайові умови: якщо кінець $x = x_0$ ($= x_1$ або x_2) закріплено шарнірно або спирається на стінку, то $y''(x_0) = 0$; якщо кінець $x = x_0$ вільний, то $y''(x_0) = y'''(x_0) = 0$.

Відповіді: а), б) $y(x) = \frac{\rho g}{24EJ} x(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$; в) $y(x) = \frac{\rho g}{48EJ} x(2x^3 - 3Lx^2 + L^3)$;
 г) $y(x) = \frac{\rho g}{24EJ} x^2(x^2 - 4Lx + 6L^2)$.

Завдання 2.4.7. Нехай $y(x)$ є екстремаллю функціонала (2.22) у класі двічі неперервно диференційовних кривих, які разом зі своїми першими похідними набувають фіксованих значень на лівих кінцях, а на правих можуть вільно ковзати під довільними кутами у площині XOY . Знайдіть умови трансверсальності для рухомого кінця кривої $y(x)$.

Відповідь:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y''} \right|_{x=x_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \bigg|_{x=x_2} = 0, \quad F|_{x=x_2} = 0. \quad (2.29)$$

Система рівнянь (2.29) дозволяє знайти абсцису x_2 та ординату $y_2 = y(x_2)$ правого кінця екстремалі, а також тангенс кута нахилу дотичної $y'(x_2)$ до екстремалі в цій точці. Разом із рівнянням Ейлера-Пуассона (2.24) та крайовими умовами жорсткого закріплення типу (2.23) дістаємо необхідні умови, які повинна задовольняти $y(x)$.

Результати *Теорема 2.4.1* та *Завдання 2.4.1* досить легко узагальнити. Істинна така

Теорема Ейлера-Пуассона. Нехай функція F неперервна разом зі всіма своїми частинними похідними до другого порядку включно та при всіх можливих значеннях аргументів $x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}$. Для того щоб деяка крива була екстремаллю функціонала

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) \quad (2.30)$$

у класі $C^n([x_1, x_2])$ кривих, підпорядкованих крайовим умовам

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y_{10}, \quad y'(x_1) = y_{11}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_{1, n-1}, \\ y(x_2) &= y_{20}, \quad y'(x_2) = y_{21}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_2) = y_{2, n-1}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

необхідно, щоб вона задовольняла рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0. \quad (2.32)$$

Порядок рівняння (2.32) у ряді випадків можна понизити.

1) Якщо функція F не залежить явно від y , то рівняння (2.32) має перший інтеграл:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = C.$$

2) Якщо функція F не залежить явно від x :

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}),$$

то за незалежну змінну зручно взяти y і далі шукати x як функцію від неї: $x = x(y)$.

У нових змінних $J[y]$ набуває вигляду

$$J[x] = \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} dy x' F\left(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}, \dots\right),$$

де $x^{(n)} \equiv \frac{d^n x}{dy^n}$. Позначивши нову підінтегральну функцію через

$$\Phi(y, x', x'', \dots, x^{(n)}) \equiv x' F\left(y, \frac{1}{x'}, -\frac{x''}{x'^3}, \dots\right),$$

знаходимо перший інтеграл рівняння Ейлера-Пуассона у вигляді

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'} - \frac{d}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial x''} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{(n)}} = C.$$

3) Якщо F залежить лише від похідних $y^{(k)}$, $y^{(k+1)}$, ..., $y^{(n)}$, $k \geq 2$, то відповідне рівняння Ейлера-Пуассона

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} + (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \frac{\partial F}{\partial y^{(k+1)}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

після інтегрування k разів веде до інтеграла

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y^{(k+1)}} + \dots + (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = Q_{k-1}(x),$$

де $Q_{k-1}(x) = C_1 x^{k-1} + C_2 x^{k-2} + \dots + C_{k-1} x + C_k$ – поліном степеня $k-1$, C_1, \dots, C_k – довільні сталі.

4) Якщо F залежить лише від $y^{(n)}$, то (2.32) зводиться до рівняння

$$\frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = P_{n-1}(x),$$

де $P_{n-1}(x)$ – поліном степеня $n-1$.

Ліва частина цього рівняння містить лише $y^{(n)}$. Розв'язавши його відносно $y^{(n)}$, дістанемо $y^{(n)}$ як функцію від x :

$$y^{(n)} = f(P_{n-1}(x)).$$

Функція y відновлюється далі n -кратним інтегруванням за x обох частин цього рівняння:

$$y(x) = \int \dots \int (dx)^n f(P_{n-1}(x)) + Q_{n-1}(x),$$

де $Q_{n-1}(x)$ – довільний поліном степеня $(n-1)$.

Завдання 2.4.8. У класі $C^3([x_1, x_2])$ знайдіть криві, які задовольняють необхідні умови екстремуму таких функціоналів:

а) $J[y] = \int_0^1 dx y'''^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$, $y''(1) = 6$;

б) $J[y] = \int_0^1 dx y'''^2$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$, $y''(1) = 12$;

в) $J[y] = \int_0^1 dx (y'''^2 + y''^2)$, $y(0) = y''(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y(1) = y''(1) = \text{sh } 1$, $y'(1) = \text{ch } 1$;

г) $J[y] = \int_0^{\pi/2} dx (y'''^2 - y''^2)$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

$$\text{д) } J[y] = \int_0^{\pi} dx (y'''^2 - y''^2), \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi, \quad y'(\pi) = 2, \quad y''(\pi) = 0;$$

$$\text{е) } J[y] = \int_0^{\pi} dx (y'''^2 - y'^2), \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = y''(\pi) = \text{sh } \pi, \quad y'(\pi) = 1 + \text{ch } \pi.$$

Відповіді: а) $y(x) = x^3$; б) $y(x) = x^4$; в) $y(x) = \text{sh } x$; г) $y(x) = 1 - \cos x$; д) $y(x) = x - \sin x$; е) $y(x) = \text{sh } x - \sin x$.

Завдання 2.4.9. У класі $C^3([0,1])$ кривих, кінці яких знаходяться на вертикалях $x = 0$, $x = 1$, знайдіть ті, що можуть надавати екстремум функціоналові

$$J[y] = \int_0^1 dx y'''^2$$

при таких умовах:

$$\text{а) } y(0) = y'(0) = y''(0) = y'(1) = y''(1) = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{б) } y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = 0, \quad y''(1) = 2;$$

$$\text{в) } y(0) = y'(0) = y''(0) = y'(1) = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{г) } y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$\text{д) } y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

Вказівки. З аналізу першої варіації функціонала (2.30) при $n = 3$ випливає, що у крайній точці $x_0 (= x_1, x_2)$ для екстремальної кривої $y(x)$ справджуються такі умови:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y''} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \text{якщо значення } y(x_0) \text{ довільні}; \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \text{якщо значення } y'(x_0) \text{ довільні}; \quad (2.34)$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'''} \right|_{x=x_0} = 0, \text{ якщо значення } y''(x_0) \text{ довільні.} \quad (2.35)$$

Додатково до наведених умов жорсткого закріплення для заданого функціонала дістаємо: в) $y'''(1) = 0$; г) $y'''(1) = y^{(4)}(1) = 0$; д) $y'''(1) = y^{(5)}(1) = 0$.

Відповіді: а) $y(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$; б) $y(x) = x^3(x-1)^2$; в)
 $y(x) = \frac{1}{3}(8x^5 - 25x^4 + 20x^3)$; г) $y(x) = \frac{1}{6}(x^5 - 5x^4 + 10x^3)$; д) $y(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$.

2.5. Просторові задачі

До цього часу розглядалися задачі, у яких функціонали залежали від плоских кривих. При подальшому узагальненні цих задач приходимо до функціоналів, визначених на множинах просторових ліній.

Завдання 2.5.1. Нехай швидкість світла в неоднорідному середовищі є відомою функцією просторових координат: $u = u(x, y, z)$. Сформулюйте задачу про знаходження шляху, по якому промінь світла поширюється з точки $A(x_1, y_1, z_1)$ у точку $B(x_2, y_2, z_2)$.

Відповідь. За допомогою принципу Ферма (див. §1.6) задача зводиться до відшукування у тривимірному просторі кривої $\gamma: y = y(x), z = z(x)$ із фіксованими кінцями, вздовж якої промінь світла доходить із точки A в точку B за мінімальний час, тобто вздовж якої функціонал

$$T[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{u(x, y, z)}$$

набуває найменшого значення при додаткових умовах

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad z(x_1) = z_1, \quad z(x_2) = z_2. \quad (2.36)$$

Зауважимо, що функціонал T залежить від двох функцій та їх перших похідних. У випадку ж $(n+1)$ -вимірному простору, у якому криві задаються за допомогою n функцій $y_i(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, доводиться аналізувати функціонали виду

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x; y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n). \quad (2.37)$$

Уточнивши для просторової кривої поняття ε -околу, можемо й для них користуватися (з відповідними змінами) означеннями відносного та абсолютного екстремумів, наведеними в §1.2.

Означення 2.5.1. ε -околом порядку k кривої $y_{0i}(x)$ на проміжку $[x_1, x_2]$ називають множину всіх кривих $y_i(x)$, для яких скрізь на цьому проміжку і при всіх $i = 1, 2, \dots, n$ виконуються нерівності

$$|y_i(x) - y_{0i}(x)| \leq \varepsilon, \quad |y'_i(x) - y'_{0i}(x)| \leq \varepsilon, \dots, \quad |y_i^{(k)}(x) - y_{0i}^{(k)}(x)| \leq \varepsilon.$$

Число ε називають відстанню порядку k між кривими $y_i(x)$ і $y_{0i}(x)$.

Завдання 2.5.2. Нехай функції $y_0(x)$ та $z_0(x)$ задають просторову криву γ , яка реалізує екстремум функціонала

$$J[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, z, y', z') \quad (2.38)$$

на функціях класу $C^2([x_1, x_2])$ з фіксованими значеннями (2.36) на кінцях, а підінтегральна функція F неперервна разом зі своїми частинними похідними до другого порядку включно. Доведіть, що $y_0(x)$ та $z_0(x)$ задовольняють систему диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Вказівка. Розгляньте множину просторових кривих γ' : $y(x) = y_0(x) + \delta y(x)$, $z(x) = z_0(x) + \delta z(x)$ з ε -околу першого порядку кривої γ та проаналізуйте умови, за яких перша варіація функціонала (2.38)

$$\begin{aligned}\delta J[y, z] = & \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx + \\ & + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta z(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} \right\} \delta z(x) dx\end{aligned}\quad (2.40)$$

дорівнює нулю при довільних значеннях варіацій $\delta y(x)$ і $\delta z(x)$ на внутрішніх точках проміжку $[x_1, x_2]$ та нульових значеннях на його межах: $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$, $\delta z(x_1) = \delta z(x_2) = 0$.

Зауваження. У загальному випадку узагальнена теорема Ейлера-Лагранжа стверджує: якщо крива $\gamma : y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ — екстремаль функціонала (2.37) серед кривих класу $C^1([x_1, x_2])$ із закріпленими кінцями, то функції $y_i(x)$ задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.41)$$

Якщо при цьому вздовж γ функціональний визначник

$$\Delta \equiv \left| \frac{\partial^2 F}{\partial y'_i \partial y'_k} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y'_1 \partial y'_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial y'_1 \partial y'_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial y'_1 \partial y'_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y'_n \partial y'_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial y'_n \partial y'_2} & \dots & \frac{\partial^2 F}{\partial y'_n \partial y'_n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (2.42)$$

то функції $y'_i(x)$ мають неперервні похідні, тобто екстремаль γ належить класу $C^2([x_1, x_2])$ (ця обставина використовувалася при знаходженні варіації (2.40)).

Рівняння (2.41) інваріантні відносно перетворень координат.

Завдання 2.5.3. Знайдіть гладкі криві, які проходять через задані початкову й кінцеву точки та можуть надавати екстремум таким функціоналам:

$$\text{а) } J[y, z] = \int_0^1 dx (y'^2 + z'^2 + 2y - zx^2), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = 1;$$

$$\text{б) } J[y, z] = \int_0^1 dx (y'z' + 6yx + 12zx^2), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = 1;$$

$$\text{в)} J[y, z] = \int_0^{\pi/2} dx (y'^2 + z'^2 + 2yz), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$$

$$\text{г)} J[y, z] = \int_0^1 dx (y'^2 + z'^2 - 2yz), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = \text{sh}1, \quad z(1) = -\text{sh}1;$$

$$\text{д)} J[y, z] = \int_0^1 dx (y^2 + z^2 + 2y'z'), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(1) = z(1) = \text{sh}1;$$

$$\text{е)} J[y, z] = \int_0^1 dx (y'z' + yz), \quad y(0) = z(0) = 1, \quad y(1) = e, \quad z(1) = e^{-1};$$

$$\text{є)} J[y, z] = \int_0^{\pi/2} dx (y'z' - yz), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1;$$

$$\text{ж)} J[y, z, u] = \int_0^{\pi/2} dx (y'^2 + 2z'^2 + u'^2 + 2yz + 2zu), \quad y(0) = u(0) = 1, \quad z(0) = -1,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. в) Система рівнянь Ейлера-Лагранжа має вигляд

$$y'' - z = 0, \quad z'' - y = 0.$$

Диференціюючи, наприклад, перше рівняння двічі за x та виключаючи за допомогою другого рівняння z'' , дістаємо замкнене рівняння для функції y :

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Його загальний розв'язок $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$. Тому інша невідома функція $z(x) = y''(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - C_3 \cos x - C_4 \sin x$.

Крайові умови дають систему чотирьох лінійних рівнянь для сталих інтегрування:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 0, \\ C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} + C_4 &= 1, \\ C_1 + C_2 - C_3 &= 0, \\ C_1 e^{\pi/2} + C_2 e^{-\pi/2} - C_4 &= -1. \end{aligned}$$

Віднявши та додавши перше та третє рівняння, знаходимо $C_3 = 0$, $C_1 = -C_2$.

Додавши далі друге та четверте рівняння, остаточно дістаємо $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_4 = 1$.

Відповіді: а) $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$, $z(x) = \frac{1}{24}(-x^4 + 25x)$; б) $y(x) = x^4$, $z(x) = x^3$; в) $y(x) = \sin x$, $z(x) = -\sin x$; г) $y(x) = \operatorname{sh} x$, $z(x) = -\operatorname{sh} x$; д) $y(x) = z(x) = \operatorname{sh} x$; е) $y(x) = e^x$, $z(x) = e^{-x}$; є) $y(x) = \sin x$, $z(x) = -\sin x$; ж) $y(x) = x + \cos x$, $z(x) = -\cos x$, $u(x) = -x + \cos x$.

Завдання 2.5.4. Випишіть рівняння Ейлера-Лагранжа для Завдання 2.5.1 та знайдіть їх загальний розв'язок для однорідного середовища.

Розв'язання. Диференціювання дає:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{u^2} + \frac{d}{dx} \frac{y'}{u\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{u^2} + \frac{d}{dx} \frac{z'}{u\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0.$$

В однорідному середовищі $u = \text{const}$, і рівняння набувають вигляду

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_2,$$

де C_1 та C_2 – сталі. Розв'язуючи їх відносно y' та z' , знаходимо $y'(x) = a_1$, $z'(x) = a_2$, звідки

$$y(x) = a_1 x + b_1, \quad z(x) = a_2 x + b_2.$$

Значення сталих a_i та b_i , $i = 1, 2$, визначаються через координати початкової та кінцевих точок.

Таким чином, в однорідному середовищі світло поширюється по прямій.

Завдання 2.5.5. Доведіть істинність таких тверджень:

1) якщо підінтегральна функція F у функціоналі (2.37) не залежить явно від змінної (кількох змінних) y_k , то система рівнянь Ейлера-Лагранжа (2.41) має перший інтеграл (кілька перших інтегралів)

$$\frac{\partial F}{\partial y'_k} = C_k. \quad (2.43)$$

Усього можуть існувати n перших інтегралів такого типу;

2) якщо функція F не залежить явно від змінної x , то система рівнянь (2.41) має перший інтеграл

$$F - \sum_{i=1}^n y'_i \frac{\partial F}{\partial y'_i} = C. \quad (2.44)$$

Завдання 2.5.6. Виходячи з принципу найменшої дії Гамільтона (1.20), виведіть рівняння руху (1.22) механічної системи з s ступенями вільності. Покажіть, що її узагальнені імпульси та повна енергія виражаються формулами (1.17) та (1.18).

Розширення класу допустимих кривих, на якому шукається екстремум функціонала типу (2.37), відповідним чином змінює крайові умови, що їх (як і систему рівнянь (2.41)) повинна задовольняти екстремаль.

Завдання 2.5.7. Установіть вид крайових умов для екстремалей функціонала (2.37) у класі гладких просторових кривих, ліві кінці яких жорстко закріплено, а праві можуть вільно ковзати у площині $x = x_2$.

Користуючись отриманим результатом, серед кривих згаданого класу знайдіть можливі екстремалі таких функціоналів:

$$\text{а) } J[y, z] = \int_0^2 dx (y'^2 + z'^2 + y'z'), \quad y(0) = z(0) = 0, \quad y(2) = 2;$$

$$\text{б) } J[y, z] = \int_0^\pi dx (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2), \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 2, \quad y(\pi) = 0;$$

$$\text{в) } J[y, z] = \int_0^1 dx \left(\frac{y'^2 + z'^2}{2} + yz \right), \quad y(0) = z(0) = 1;$$

$$\text{г) } J[y, z] = \int_0^1 dx \left(\frac{y'^2 + z'^2}{2} - yz \right), \quad y(0) = z(0) = 1;$$

$$\text{д) } J[y, z] = \int_0^1 dx \left(\frac{y'^2 + z'^2}{2} - yz \right), \quad y(1) = z(1) = 1.$$

Відповіді. Якщо при ковзанні правого кінця допустимої кривої γ : $y_i = y_i(x)$,

$i = 1, 2, \dots, n$, у площині $x = x_2$ можуть змінюватися значення однієї або кількох функцій $y_k = y_k(x)$, то для кожної з них маємо:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y'_k} \right|_{x=x_2} = 0. \quad (2.45)$$

Рівняння шуканих кривих: а) $y(x) = x$, $z(x) = -x/2$; б) $y(x) = (x - \pi) \sin x$, $z(x) = 2 \cos x + (x - \pi) \sin x$; в) $y(x) = z(x) = \operatorname{ch}(x - 1)/\operatorname{ch} 1$; г) $y(x) = z(x) = \cos(x - 1)/\cos 1$; д) $y(x) = z(x) = \cos x/\cos 1$.

Умова (2.45) є узагальненням крайової умови (2.4) на випадок функціонала, що залежить від просторової кривої. Умови трансверсальності (2.14) також досить легко узагальнюються на цей випадок.

Завдання 2.5.8. Доведіть таку теорему: якщо крива $\gamma: y = y(x), z = z(x)$ надає екстремум функціоналу

$$J[\Gamma] = \int_{\Gamma} dx F(x, y, z, y', z') \quad (2.46)$$

на множині гладких кривих Γ , що з'єднують фіксовану точку $A(x_1, y_1, z_1)$ з точками заданої гладкої кривої $C: y = \varphi(x), z = \psi(x)$, то в точці $B(x_2, y_2, z_2)$, яка належить обом кривим γ та C , виконується умова трансверсальності

$$\left[F + (\varphi' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} + (\psi' - z') \frac{\partial F}{\partial z'} \right]_{x=x_2} = 0. \quad (2.47)$$

Співвідношення (2.47) разом із рівняннями

$$y(x_2) = \varphi(x_2), \quad z(x_2) = \psi(x_2) \quad (2.48)$$

та умовами жорсткого закріплення в точці A дозволяють знайти значення всіх сталих інтегрування в загальному розв'язку системи рівнянь Ейлера-Лагранжа (2.39) та значення абсциси x_2 .

Завдання 2.5.9. Нехай у функціоналі (2.46)

$$F(x, y, z, y', z') = f(x, y, z) \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}. \quad (2.49)$$

Доведіть, що екстремаль γ цього функціонала ортогональна до кривої C .

Вказівка. Координати одиничного вектора дотичної $\mathbf{n}_l(t)$ до гладкої кривої l : $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, знаходяться за формулами

$$\mathbf{n}_l(t) = \frac{1}{\sqrt{\xi'^2(t) + \eta'^2(t) + \zeta'^2(t)}} (\xi'(t), \eta'(t), \zeta'(t)).$$

Тому умова ортогональності $\mathbf{n}_\gamma(x_2) \cdot \mathbf{n}_C(x_2) = 0$ кривих γ : $x = t$, $y = y(x)$, $z = z(x)$ і C : $x = t$, $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ у точці x_2 має вигляд

$$1 + y'(x_2)\varphi'(x_2) + z'(x_2)\psi'(x_2) = 0.$$

Зауважимо, що правильне й обернене твердження: якщо для всіх початкових даних умова трансверсальності збігається з умовою ортогональності, то функція F має структуру (2.49), де f – довільна диференційовна функція змінних x , y та z .

Завдання 2.5.10. Нехай із точки A випущено світловий сигнал. Доведіть, що промінь AB , уздовж якого сигнал уперше досягає заданої гладкої поверхні S , є ортогональним до неї.

Вказівка. Згідно з принципом Ферма, треба знайти екстремаль функціонала

$$T[\Gamma] = \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{u(x, y, z)} dx$$

на множині гладких кривих Γ , що з'єднують точку A з точками поверхні S . Із попереднього завдання випливає, що промінь AB є ортогональним до будь-якої кривої, що лежить на поверхні S і проходить через точку B .

Завдання 2.5.11. Знайдіть мінімальний час, за який світловий промінь, випущений із точки $A(0,0,0)$, дійде в оптично однорідному середовищі до поверхні $f(x, y, z) = 0$, $f(0,0,0) \neq 0$.

Вказівка. Напрямок променя, що досягає поверхні за найменший час, в точці перетину з поверхнею збігається з напрямом її нормалі

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|\nabla f|} \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

Важливим фізичним наслідком *Завдань 2.5.10 та 2.5.11* є *принцип Малюса* в геометричній оптиці: фронт світлової хвилі (геометричне місце точок, які досягаються світловим сигналом за рівні проміжки часу) є ортогональним до всіх променів світлового потоку. Цей принцип справджується й тоді, коли промені заломлюються та відбиваються довільну кількість разів.

2.6. Геодезичні

До відшукування екстремалей функціоналів типу (2.37) веде й задача про геодезичні – криві найбільшої або найменшої довжини між двома заданими точками на двовимірній поверхні або в багатовимірному рімановому просторі. Поняття геодезичної є узагальненням поняття прямої лінії евклідового простору – відрізки останньої є, як ми вже бачили, найкоротшими серед усіх спрямлюваних ліній, що з'єднують дві довільно задані точки евклідового простору.

Нехай положення точки на деякій поверхні визначається координатами (u, v) , а квадрат елемента довжини на ній

$$dl^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2. \quad (2.50)$$

Тоді геодезичними цієї поверхні є ті лінії $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, які надають екстремум функціоналу довжини

$$L[u, v] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}, \quad (2.51)$$

де $u' \equiv du/d\tau$, $v' \equiv dv/d\tau$.

Завдання 2.6.1. Знайдіть геодезичні лінії поверхні кругового циліндра радіуса R .

Розв'язання. Рівняння циліндричної поверхні радіуса R має вигляд

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty,$$

тому квадрат елемента довжини на ній

$$dl^2 = R^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Якщо рівняння геодезичної шукати в параметричній формі

$$\varphi = \varphi(\tau), \quad z = z(\tau), \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2,$$

то функціонал довжини набирає вигляду функціонала, що залежить від двох функцій та їх перших похідних:

$$L[\varphi, z] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{R^2 \varphi'^2 + z'^2}. \quad (2.52)$$

Оскільки підінтегральна функція залежить тільки від похідних φ' та z' , то система рівнянь Ейлера-Лагранжа має перші інтеграли

$$\frac{R^2 \varphi'}{\sqrt{R^2 \varphi'^2 + z'^2}} = C_1, \quad \frac{z'}{\sqrt{R^2 \varphi'^2 + z'^2}} = C_2.$$

Маємо співвідношення $C_1 z' = C_2 R^2 \varphi'$, тобто підінтегральна функція в (2.52) фактично залежить лише від однієї з похідних. Звідси випливає, що шукані функції є лінійними:

$$\varphi(\tau) = a_1 \tau + b_1, \quad z(\tau) = a_2 \tau + b_2, \quad (2.53)$$

де a_i і b_i – сталі, які визначаються за допомогою координат початкової та кінцевої точок.

Геодезичні (2.53) – це гвинтові лінії. Якщо кінцеві точки знаходяться на одній вертикалі ($\varphi = \text{const}$), геодезичні вироджуються у відрізки прямих; якщо ж на одній висоті ($z = \text{const}$) – у дуги кола.

Завдання 2.6.2. Нехай класична матеріальна точка може рухатися лише по деякій гладкій поверхні. Доведіть, що якщо на точку не діють ніякі сили, окрім ідеальних в'язей, то її траєкторією руху є геодезична.

Розв'язання. Потенціальна енергія вільної частинки $\Pi = 0$, а її повна енергія на гладкій поверхні зберігається. Згідно з принципом Мопертюї, траєкторія знаходиться як екстремаль функціонала укороченої дії

$$S_0 = \int_1^2 dl \sqrt{2m(E - \Pi)} = \sqrt{2mE} \int_1^2 dl.$$

Завдання 2.6.3. Знайдіть геодезичні лінії поверхні кругового конуса

$$x = az \cos \varphi, \quad y = az \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq z \leq H.$$

Вказівка. Квадрат елемента довжини на поверхні конуса

$$dl^2 = a^2 z^2 d\varphi^2 + (1 + a^2) dz^2.$$

Відповідь. $\varphi = C_2 + \sqrt{1 + a^{-2}} \arcsin(C_1/az)$, де сталі інтегрування визначаються через координати (φ_1, z_1) та (φ_2, z_2) початкової та кінцевої точок геодезичної. При $\varphi_1 = \varphi_2$, $z_1 \neq z_2$ маємо $C_1 = 0$, тобто геодезична – це відрізок твірної конуса. При $\varphi_1 \neq \varphi_2$ розв’язок зручно подати у вигляді

$$z = z_1 \sin \frac{\varphi_1 - C_2}{\sqrt{1 + a^{-2}}} \bigg/ \sin \frac{\varphi - C_2}{\sqrt{1 + a^{-2}}}.$$

Проаналізуйте його поведінку для випадку $z_1 = z_2$ (кінці геодезичної знаходяться на одній висоті).

Означення 2.6.1. n -вимірний простір із довільним базисом \mathbf{e}_i і координатами x^i , $i = 1, 2, \dots, n$, називається рімановим, якщо його метрика задається співвідношенням

$$dl^2 = \sum_{i,k=1}^n g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i dx^k \equiv g_{ik} dx^i dx^k \geq 0, \quad (2.54)$$

де $g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$ – компоненти метричного тензора. За нижнім і верхнім індексами, що повторюються, тут і надалі розуміємо підсумовування.

Таким чином, геодезичними ріманового простору є екстремалі функціонала

$$L[x^i] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{g_{ik}(x^1, x^2, \dots, x^n) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau}}, \quad (2.55)$$

який виражає довжину дуги кривої $x^i = x^i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, між заданими точками. Більше того, будь-яка достатньо мала ділянка геодезичної є найкоротшою серед усіх спрямлюваних ліній, що з’єднують ці точки.

Завдання 2.6.4. Знайдіть геодезичні лінії ріманового простору, який виникає при переході до системи координат, що рівномірно обертається зі сталою кутовою швидкістю Ω навколо осі OZ .

Вказівка. З урахуванням релятивістських ефектів квадрат елемента довжини в такій системі

$$dl^2 = dr^2 + \frac{r^2 d\varphi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} + dz^2,$$

де c – швидкість світла у вакуумі. За незалежний параметр доцільно взяти змінну r .

Відповідь. Геодезична, яка з'єднує точки (r_1, φ_1, z_1) та (r_2, φ_2, z_2) , визначається рівняннями

$$\varphi = \arcsin \frac{k_1}{r} + \frac{\Omega^2}{c^2} k_1 \sqrt{r^2 - k_1^2} + k_2,$$

$$z = k_3 \sqrt{r^2 - k_1^2} + k_4$$

та умовами

$$\varphi(r_1) = \varphi_1, \quad \varphi(r_2) = \varphi_2, \quad z(r_1) = z_1, \quad z(r_2) = z_2.$$

Завдання 2.6.5. Будь-який параметр τ , який можна подати у вигляді $\tau = al + b$, де $a \neq 0$ і b – сталі, а l – довжина дуги геодезичної, називається канонічним. Користуючись канонічним параметром, виведіть диференціальне рівняння геодезичної в n -вимірному рімановому просторі (2.54).

Розв'язання. Рівняння геодезичної являє собою систему рівнянь Ейлера-Лагранжа для функціонала (2.55). У випадку канонічного параметра ці рівняння набувають компактного вигляду, бо тоді величина

$$g_{ik} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = g_{ik} \frac{dx^i}{adl} \frac{dx^k}{adl} = \frac{1}{a^2} = \text{const},$$

і тому екстремум функціонала (2.55) досягається на тій самій кривій, що й екстремум функціонала

$$M[x^i] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k, \quad (2.56)$$

де $\dot{x}^i \equiv dx^i/d\tau$. Справді:

$$\delta M = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(\sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} \right)^2 = 2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \frac{1}{\sqrt{a^2}} \delta \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k} = \frac{2}{|a|} \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k}.$$

Оскільки $\partial \dot{x}^i / \partial \dot{x}^k = \delta_k^i$ – символ Кронекера, g_{ik} – симетричний тензор, то, перепозначивши індекси підсумовування, для похідних підінтегральної функції $g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k \equiv F$ у (2.56) маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^l} \dot{x}^i \dot{x}^k, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^l} = g_{ik} \delta_l^i \dot{x}^k + g_{ik} \dot{x}^i \delta_l^k = g_{lk} \dot{x}^k + g_{li} \dot{x}^i,$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^l} = \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} \dot{x}^i \dot{x}^k + g_{lk} \ddot{x}^k + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} \dot{x}^i \dot{x}^k + g_{li} \ddot{x}^i = \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} \right) \dot{x}^i \dot{x}^k + 2g_{li} \ddot{x}^i.$$

Позначивши тепер

$$\Gamma_{l,ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right), \quad (2.57)$$

для екстремалей функціонала (2.56), а, отже, і функціонала (2.55), дістаємо:

$$g_{li} \ddot{x}^i + \Gamma_{l,ik} \dot{x}^i \dot{x}^k = 0. \quad (2.58)$$

Величини $\Gamma_{l,ik}$ називаються символами Кристоффеля першого роду. Зручніше, однак, перейти до символів Кристоффеля другого роду

$$\Gamma_{ik}^m = g^{ml} \Gamma_{l,ik}, \quad (2.59)$$

де тензор g^{ml} визначається із співвідношення

$$g^{ml} g_{li} = \delta_i^m. \quad (2.60)$$

Остаточна відповідь така:

$$\frac{d^2 x^m}{d\tau^2} + \Gamma_{ik}^m \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0. \quad (2.61)$$

Зауважимо, що з довільної точки ріманового простору в заданому напрямі виходить тільки одна геодезична.

У плоскому (евклідовому) просторі результатом паралельного перенесення вектора, дотичного до прямої у будь-якій точці, знову є вектор, дотичний до цієї прямої. Згадаємо також, що миттєва швидкість частинки в будь-якій точці завжди напрямлена по дотичній до траєкторії в цій точці, а тому миттєві швидкості вільної частинки (яка рухається вздовж прямої) утворюють поле паралельних векторів. Цей факт разом із поняттям геодезичної дозволяє ввести поняття паралельного перенесення й у рімановому просторі. Справді, із *Завдання 2.6.2* випливає, що рух вільної частинки

в рімановому просторі відбувається вздовж деякої геодезичної $\gamma: x^i = x^i(\tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Користуючись аналогією з евклідовим простором, будемо вважати, за означенням, що миттєві швидкості частинки при вільному русі, а, отже, й дотичні вектори $\xi^i = dx^i/d\tau$ до геодезичної γ в довільних точках γ є паралельними.

Завдання 2.6.6. Знайдіть закон перетворення компонент довільного вектора A^m внаслідок нескінченно малого паралельного перенесення з точки $P(x^1, \dots, x^n)$ у точку $Q(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$ ріманового простору. Далі доведіть, що паралельне перенесення не змінює ані довжини вектора, ані скалярного добутку двох векторів.

Розв'язання. Оскільки трансформаційні властивості вектора при перетворенні координат не залежать від його фізичної природи, закон перетворення компонент вектора A^m збігається із законом перетворення компонент дотичного вектора ξ^m . Із формули (2.61) для приросту компонент вектора A^m внаслідок паралельного перенесення дістаємо:

$$dA^m = -\Gamma_{ik}^m A^i dx^k. \quad (2.62)$$

Скориставшись формулами (2.59), (2.60) і (2.62), далі знаходимо

$$\frac{d}{d\tau}(g_{mn} A^m A^n) = 0, \quad \frac{d}{d\tau}(g_{mn} A^m B^n) = 0, \quad (2.63)$$

тобто ані довжина вектора A^m , ані скалярний добуток векторів A^m і B^m при паралельному перенесенні не змінюються.

Отримані результати можна інтерпретувати наступним чином. Щоб паралельно перенести вектор A^m із точки P у близьку точку Q , мешканець криволінійного, скажімо, двовимірного світу (наприклад, поверхні сфери) повинен з'єднати точки P і Q геодезичною, а потім неперервно перемістити початок вектора A^m вздовж геодезичної, залишаючи незмінними довжину вектора та кут між вектором і геодезичною. Це ж саме завдання мешканець плоского тривимірного світу (у якому знаходиться сфера) може виконати у два етапи: 1) здійснити у своєму просторі звичайне паралельне перенесення вектора A^m із точки P в точку Q , при цьому

компоненти вектора A^m у плоскому тривимірному просторі залишаються незмінними, хоч сам вектор, взагалі кажучи, вийде із двовимірного світу; 2) розкласти вектор у точці Q на тангенціальну складову A_t^m (яка лежить у двовимірному світі) та нормальну складову A_n^m (яка покидає двовимірний світ), та оголосити результатом паралельного перенесення у двовимірному світі вектор A_t^m . Можна довести, що для близьких точок P і Q складова A_n^m є другого порядку малості за dx^k , і тому довжина вектора A_t^m та скалярний добуток векторів A_t^m і B_t^m у точці Q збігаються з довжиною вектора A^m та скалярним добутком векторів A^m і B^m у точці P .

Завдання 2.6.7. Перенесіть вектор, дотичний до сфери в одній із вершин сферичного трикутника з трьома прямими кутами, назад у цю вершину вздовж сторін трикутника.

Відповідь. У результаті перенесення вектор повернеться в початковій точці на прямий кут.

Нехай \tilde{A}^m – вектор, який дістаємо внаслідок паралельного перенесення вектора A^m по замкненому шляху. Зміна $\Delta A^m = \tilde{A}^m - A^m$ залежить від міри викривлення простору (для евклідового простору $\Delta A^m \equiv 0$), а тому може бути використана для визначення кількісних характеристик викривлення. Виявляється, що якщо обхід навколо точки P здійснюється вздовж довільних замкнених кривих C , що повністю лежать у достатньо малому околі точки P , то

$$\Delta A^m = -\frac{1}{2} R_{ijk}^m A^i \Delta \sigma^{jk}, \quad (2.64)$$

де величина $\Delta \sigma^{jk}$ визначається площею, яку описують криві C , а тензор

$$R_{ijk}^m = \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^k} + \Gamma_{j\alpha}^m \Gamma_{ik}^\alpha - \Gamma_{k\alpha}^m \Gamma_{ij}^\alpha \quad (2.65)$$

не залежить від кривих C . Цей тензор, таким чином, можна розглядати як міру відхилення ріманового простору від евклідового. Він називається тензором кривини або тензором Рімана-Кристоффеля.

Індекс m у формулі (2.65) можна опустити:

$$R_{mijk} = g_{m\alpha} R_{ijk}^\alpha. \quad (2.66)$$

Підсумувавши за індексами $m = j$, дістанемо тензор Річчі

$$R_{ik} = R_{iak}^a = \frac{\partial \Gamma_{ik}^a}{\partial x^a} - \frac{\partial \Gamma_{ia}^a}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^a \Gamma_{a\beta}^\beta - \Gamma_{ia}^\beta \Gamma_{k\beta}^a, \quad (2.67)$$

а помноживши R_{ik} на g^{ik} та підсумувавши за однаковими індексами, приходимо до інваріанта скалярної кривини

$$R = g^{ik} R_{ik}. \quad (2.68)$$

Наведемо для довідок декілька важливих теорем.

Теорема А. В околі кожної точки P ріманового простору можна ввести так звані нормальні координати x_1, x_2, \dots, x_n (із центром у P), у яких розвинення метричного тензора $g_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ за локальною формулою Тейлора з центром у P має вигляд

$$g_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta_{ik} - \frac{1}{6} R_{mijk}(P) x^m x^j + o(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2), \quad (2.69)$$

де $R_{mijk}(P)$ – значення компонент тензора Рімана-Кристоффеля в точці P .

Теорема Б. Для того щоб простір був евклідовим, необхідно й достатньо, щоб тензор Рімана-Кристоффеля дорівнював нулю.

Теорема В. Кривина двовимірної поверхні в тривимірному просторі визначається в кожній точці лише однією незалежною компонентою тензора кривини, при цьому її скалярна кривина R збігається з подвоєною гауссовою кривиною $K = 1/\rho_1 \rho_2$, де ρ_1, ρ_2 – головні радіуси кривини поверхні в даній її точці (тому гауссова кривина, на відміну від середньої кривини, є внутрішнім інваріантом поверхні).

Теорема Г. Кривина тривимірного простору визначається в кожній точці трьома, а кривина 4-простору – чотирнадцятьма незалежними компонентами тензора кривини.

Завдання 2.6.8. Знайдіть гауссову кривину сфери радіуса a .

Відповідь: $K = R/2 = 1/a^2 > 0$ (кривина додатна й стала).

3. ЗАДАЧІ НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ

3.1. Ізопериметрична задача

У задачах на умовний екстремум екстремаль функціонала відшукується серед функцій заданого класу, які, крім крайових, задовольняють й інші додаткові умови. У багатьох випадках їх можна розв'язати, звівши їх до звичайних задач варіаційного числення для функціоналів більш загального виду.

Зупинимось спершу на *ізопериметричній задачі*. У найпростішому варіанті вона формулюється так: серед гладких функцій із жорстко закріпленими кінцями знайти екстремаль функціонала

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, y'), \quad (3.1)$$

для якої інший функціонал набуває заданого сталого значення:

$$L[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx G(x, y, y') = L_0. \quad (3.2)$$

Як і раніше, вважатимемо, що функції $F(x, y, y')$ і $G(x, y, y')$ є неперервними разом зі своїми першими та другими похідними за усіма аргументами в деякій області D площини XOY і при довільних значеннях похідної $y'(x)$.

Теорема Ейлера. Якщо крива $y_0(x) \in C^2([x_1, x_2])$ надає екстремум функціоналу (3.1) у класі $C^1([x_1, x_2])$ за умови (3.2) та звичайних умов жорсткого закріплення

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad (3.3)$$

і якщо $y_0(x)$ не є екстремаллю функціонала (3.2) (тобто число L_0 не є екстремальним значенням функціонала (3.2)), то існує така стала λ , що крива $y_0(x)$ надає екстремум функціоналу

$$J^*[y] = J[y] - \lambda L[y] = \int_{x_1}^{x_2} dx [F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y')]. \quad (3.4)$$

Параметр λ називається невизначеним множником Лагранжа.

Доведення. Називатимемо допустимими такі варіації $\delta y(x) \in C_0^1([x_1, x_2])$ кривої $y_0(x)$, для яких

$$L[y_0 + \delta y] = L_0. \quad (3.5)$$

Для допустимих варіацій маємо

$$\delta L[y_0] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx = 0, \quad (3.6)$$

а також, як і у випадку функціонала найпростішого типу (див. § 1.3),

$$\delta J[y_0] = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right\} \delta y(x) dx = 0. \quad (3.7)$$

Умова (3.6) істотно звужує клас можливих варіацій екстремальної кривої. Зокрема, не є допустимими варіації, які відрізняються від нуля в малому околі лише однієї точки $x_0 \in (x_1, x_2)$, для якої

$$\left[\frac{\partial G(x, y_0(x), y'_0(x))}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G(x, y_0(x), y'_0(x))}{\partial y'} \right]_{x=x_0} \neq 0. \quad (3.8)$$

Точки, для яких справджується умова (3.8), існують, бо інакше функція $y_0(x)$ задовольняла б на інтервалі (x_1, x_2) рівняння

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} = 0$$

для екстремалі функціонала (3.2), а це суперечить умові теореми.

Розглянемо тепер таку допустиму варіацію, яка відмінна від нуля в як завгодно малих δ -околах точки x_0 та іншої (довільної) точки $x' \in (x_1, x_2)$. Позначивши

$$S_0 \equiv \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \delta y(x) dx, \quad S' \equiv \int_{x'-\delta}^{x'+\delta} \delta y(x) dx,$$

замість (3.6) і (3.7) можемо записати:

$$\delta L \approx \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_{x=x_0} \cdot S_0 + \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_{x=x'} \cdot S' = 0, \quad (3.9)$$

$$\delta J \approx \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_0} \cdot S_0 + \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x'} \cdot S' = 0. \quad (3.10)$$

Із рівняння (3.9) знаходимо:

$$S_0 = - \frac{\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_{x=x'}}{\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_{x=x_0}} \cdot S'.$$

Поклавши тепер

$$\lambda = \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{x=x_0}}{\left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right]_{x=x_0}},$$

рівняння (3.10) можемо подати у вигляді

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \lambda \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial G}{\partial y'} \right] \right\} \Big|_{x=x'} \cdot S' = 0.$$

Оскільки S' – мале, але довільне число, а x' – довільна точка інтервалу (x_1, x_2) , бачимо, що екстремальна функція задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial y} (F - \lambda G) - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} (F - \lambda G) = 0. \quad (3.11)$$

Таким чином, щоб розв'язати ізопериметричну задачу (3.1)–(3.3), спершу за допомогою заданих функціоналів $J[y]$ та $L[y]$ будуємо функціонал $J^*[y]$ (3.4) з підінтегральною функцією $F^*(x, y, y') = F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y')$ та виписуємо для нього відповідне диференціальне рівняння Ейлера-Лагранжа (3.11). Розв'язавши це рівняння,

отримуємо трипараметричну сім'ю кривих $y = y(x; \lambda, C_1, C_2)$, серед яких, можливо, знаходиться функція, що є екстремаллю функціонала (3.1) і надає фіксованого (не екстремального) значення функціоналу (3.2). Щоб її відокремити, за допомогою крайових умов (3.3) та умови (3.2) знаходимо значення сталих інтегрування C_1, C_2 та параметра λ :

$$y(x_1; \lambda, C_1, C_2) = y_1, \quad y(x_2; \lambda, C_1, C_2) = y_2, \quad L[y(x; \lambda, C_1, C_2)] = L_0.$$

Завдання 3.1.1. Знайдіть гладкі екстремалі функціоналів $J[y]$, що проходять через задані початкову та кінцеву точки, і для яких функціонали $L[y]$ набувають заданих значень:

$$\text{а) } J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad L[y] = \int_0^1 dx y = 1;$$

$$\text{б) } J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad L[y] = \int_0^1 dx y = 1;$$

$$\text{в) } J[y] = \int_0^1 dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad L[y] = \int_0^1 dx y = 0;$$

$$\text{г) } J[y] = \int_0^\pi dx y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad L[y] = \int_0^\pi dx y \sin x = 1;$$

$$\text{д) } J[y] = \int_0^1 dx (y' + x)^2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad L[y] = \int_0^1 dx xy = 1.$$

Відповіді: а) $y(x) = -6x^2 + 6x$; б) $y(x) = -3x^2 + 4x$; в) $y(x) = 3x^2 - 2x$; г)

$$y(x) = \frac{2}{\pi} \sin x; \text{ д) } y(x) = -\frac{95}{16}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{111}{16}x.$$

Завдання 3.1.2. Знайдіть рівноважний профіль важкої однорідної гнучкої нерозтяжної нитки довжиною l , яка провисає під дією сили тяжіння. Кінці нитки закріплено на одному рівні. (Задача про ланцюгову лінію).

Розв'язання. Нехай кінці нитки закріплено в точках $x = \pm a$ горизонтальної осі OX , а вісь OY напрямлена вертикально вгору (рис. 3.1). У стані рівноваги система має

мінімальну потенціальну енергію, тобто її центр ваги Y знаходиться в найнижчій точці.

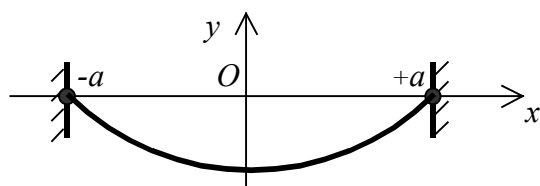


Рис. 3.1

Потрібно знайти мінімум функціонала

$$Y[y] = \int_{-a}^{+a} dx y \sqrt{1 + y'^2}$$

за додаткової умови, що довжина нитки залишається сталою:

$$L[y] = \int_{-a}^{+a} dx \sqrt{1 + y'^2} = l. \quad (3.12)$$

Розв'язком цієї ізопериметричної задачі є екстремаль функціонала

$$Y^*[y] = \int_{-a}^{+a} dx (y - \lambda) \sqrt{1 + y'^2},$$

яка задовольняє крайові умови $y(-a) = y(a) = 0$ та умову (3.12).

Перший інтеграл відповідного рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд

$$\frac{y - \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C_1,$$

де λ – невизначений множник Лагранжа, C_1 – стала інтегрування. Підставляючи $y' = \text{sh } t$, знаходимо:

$$y(x) = \lambda + C_1 \text{ch} \left(\frac{x}{C_1} + C_2 \right).$$

Крайові умови дають: $C_2 = 0$, $\lambda = -C_1 \text{ch} \left(\frac{a}{C_1} \right)$. З умови (3.12) для сталої C_1

дістаємо рівняння

$$\text{sh} \left(\frac{a}{C_1} \right) = \frac{l}{2a} \frac{a}{C_1}.$$

У безрозмірному вигляді маємо

$$\text{sh } u = \alpha u,$$

де $u \equiv a/C_1$, $\alpha \equiv l/2a$.

Тривіальний розв'язок $u = 0$ цього рівняння відповідає випадку, коли $C_1 = \infty$ і $y = 0$. З фізичного погляду це можливо лише за умови, що довжина нитки $l = 2a$.

Нетривіальний розв'язок з'являється тоді, коли тангенс кута нахилу прямої $y = \alpha u$ є більшим за тангенс кута нахилу дотичної до функції $y = \operatorname{sh} u$ в нулі (див. рис. 3.2), тобто коли $\alpha > 1$, або $l > 2a$. Отже, задача має розв'язок за умови, що $l \geq 2a$.

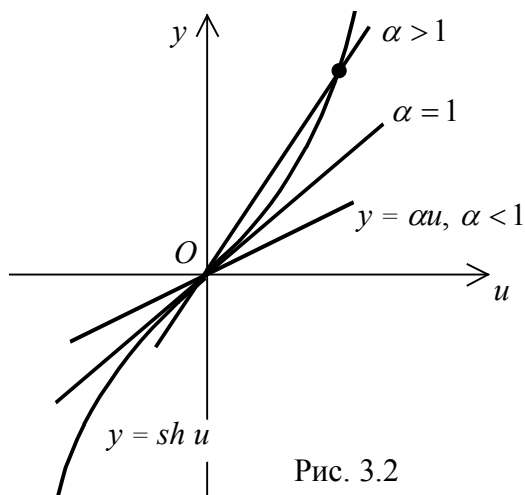


Рис. 3.2

Завдання 3.1.3. Серед усіх кривих довжиною l , що з'єднують фіксовані точки A та B ($l \geq AB$), знайдіть ту, яка разом із відрізком AB обмежує плоску замкнену область із найбільшою площею.

Розв'язання. Нехай відстань $AB = 2a$. Виберемо за вісь OX пряму, що проходить через задані точки A та B , і помістимо початок координат посередині відрізка AB , тобто $A(-a, 0)$ та $B(a, 0)$ (див. рис. 3.3).

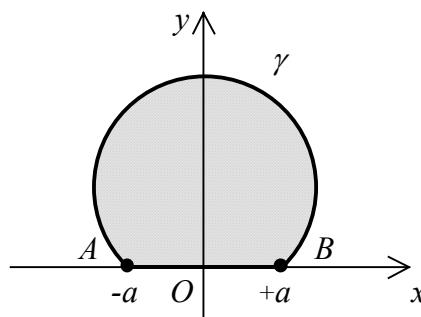


Рис. 3.3

Вважатимемо також, що шукана крива γ знаходиться над віссю OX . Тоді задача зводиться до відшукування максимуму функціонала площі

$$S[y] = \int_{-a}^{+a} dx y$$

за умови, що довжина кривої γ залишається сталою:

$$L[y] = \int_{-a}^{+a} dx \sqrt{1 + y'^2} = l. \quad (3.12)$$

Згідно з теоремою Ейлера, треба знайти екстремаль функціонала

$$S^*[y] = \int_{-a}^{+a} dx \left(y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right),$$

яка задовольняє крайові умови $y(-a) = y(a) = 0$ та умову (3.12).

Перший інтеграл відповідного рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд

$$y = C_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

де λ – невизначений множник Лагранжа, C_1 – стала інтегрування.

Це рівняння легко інтегрується в параметричному вигляді за допомогою підстановки $y' = \operatorname{tg} \varphi$. Маємо:

$$y = C_1 + \lambda \cos \varphi, \quad x = C_2 - \lambda \sin \varphi,$$

де C_2 – нова стала інтегрування. Виключивши параметр φ за допомогою тотожності $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, бачимо, що крива γ є дугою кола

$$(y - C_1)^2 + (x - C_2)^2 = \lambda^2$$

з центром у точці (C_2, C_1) і радіусом λ .

Крайові умови дають $C_1 = -\sqrt{\lambda^2 - a^2}$, $C_2 = 0$. Для сталої $\lambda > 0$ з умови (3.12) дістаємо рівняння

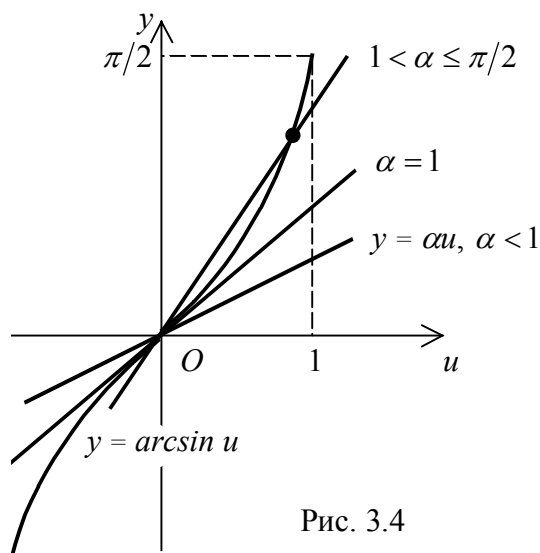


Рис. 3.4

$$2\lambda \arcsin\left(\frac{a}{\lambda}\right) = l,$$

яке зводимо до безрозмірного вигляду

$$\arcsin u = \alpha u,$$

де $u \equiv a/\lambda$, $\alpha \equiv l/2a$.

Тривіальний розв'язок цього рівняння $u = 0$ відповідає значенню $\lambda = \infty$. У цьому випадку крива γ лежить на осі OX , а відповідна площа набуває нульового (тобто тривіального) найменшого значення.

Нетривіальний же розв'язок існує, якщо

тангенс кута нахилу прямої $y = \alpha u$ є більшим за тангенс кута нахилу дотичної до функції $y = \arcsin u$ в нулі (див. рис. 3.4), тобто коли $\alpha > 1$, або $l > 2a$. При цьому

функція $y(x) = \sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2}$, $x \in [-a, a]$, яка описує дугу γ , є однозначною лише за умови $\alpha \leq \pi/2$, тобто $l \leq \pi a$. Площа, обмежена нею та відрізком AB у цьому випадку, дорівнює

$$S_{l \leq \pi a}(\lambda) = \int_{-a}^a dx \left(\sqrt{\lambda^2 - x^2} - \sqrt{\lambda^2 - a^2} \right) = -a\sqrt{\lambda^2 - a^2} + \lambda^2 \arcsin \frac{a}{\lambda} = \frac{\lambda l}{2} - a\sqrt{\lambda^2 - a^2}.$$

Зокрема, при $l = \pi a$ радіус $\lambda = a$ і площа $S_{l=\pi a}(\lambda) = \pi a^2/2$.

Якщо ж $l > \pi a$, проекцією дуги γ на вісь OX є відрізок $[-\lambda, \lambda]$, а обмежена нею та відрізком AB площа $S_{l > \pi a}(\lambda) = \pi \lambda^2 - S_{l \leq \pi a}(\lambda)$.

Завдання 3.1.4. Важка рідина густиною ρ знаходиться в циліндричному стакані з радіусом R . Стакан обертається навколо своєї вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю Ω . Вважаючи, що рух рідини усталився, і вона обертається як тверде тіло, знайдіть форму її вільної поверхні. У стані спокою висота рівня рідини у стакані H .

Вказівки. Рух рідини зручно описувати за допомогою циліндричної системи координат (r, φ, z) , у якій дно стакана лежить у площині $(r, \varphi, 0)$, а вісь стакана напрямлена вздовж вертикальної осі OZ (рис. 3.5). Обертаючись разом зі стаканом, така система є неінерціальною, тому рівновага рідини в ній настає за умови, що дорівнює нулю рівнодійна усіх сил (включаючи силу інерції), що діють на точки рідини. Якщо сили інерції потенціальні, то умовою рівноваги є мінімальність функціонала $(\Pi_{ext} + \Pi_{in})$, де Π_{ext} – потенціальна енергія рідини в полі зовнішніх сил, Π_{in} – додаткова потенціальна енергія, пов'язана з силами інерції.

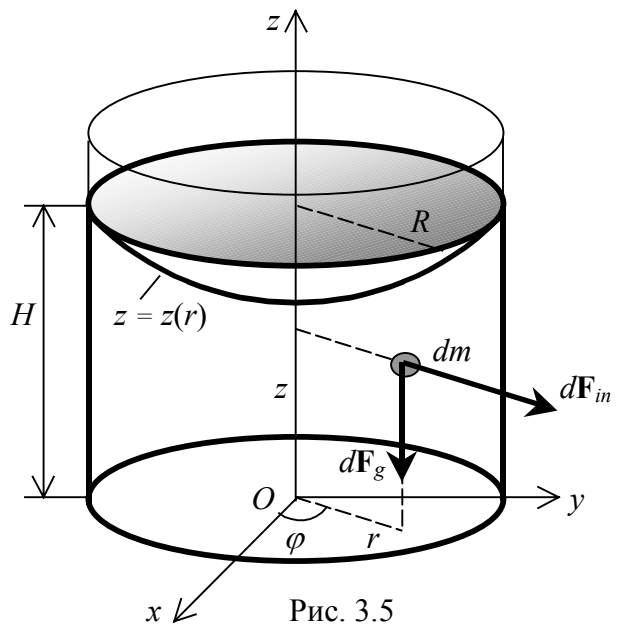


Рис. 3.5

У нашому випадку зовнішньою силою є сила тяжіння \mathbf{F}_g , яка напрямлена вертикально вниз, а силою інерції – відцентрова сила \mathbf{F}_{in} , яка діє на частинки рідини в радіальному напрямі (перпендикулярно до осі обертання). Зокрема, на елемент рідини об'ємом $rdrd\varphi dz$ і масою $dm = \rho rdrd\varphi dz$ діє сила інерції $dF_{in} = \Omega^2 r dm$. Її можна подати у вигляді $dF_{in} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 dm \right)$, тобто потенціальна енергія елемента рідини у полі сили інерції

$$d\Pi_{in} = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 dm.$$

Сила тяжіння також потенціальна. Потенціальна енергія згаданого елемента рідини в полі тяжіння

$$d\Pi_{ext} = gz dm,$$

де g – прискорення вільного падіння.

Повна потенціальна енергія рідини, з точністю до довільної сталої, дорівнює

$$\Pi = \iiint_V \left(gz - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \right) dm,$$

де інтеграл береться за всіма елементами рідини.

Нехай $z = z(r)$ – рівняння вільної поверхні рідини (в усталеному режимі форма поверхні рідини не залежить від кута φ). Розписуючи dm та інтегруючи за φ в межах від 0 до 2π і потім за z у межах від 0 до $z(r)$, дістаємо:

$$\begin{aligned} \Pi &= \rho \iiint_V \left(gz - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \right) r dr d\varphi dz = 2\pi \rho \int_0^R dr \int_0^{z(r)} dz \left(g z r - \frac{1}{2} \Omega^2 r^3 \right) = \\ &= \pi \rho \int_0^R dr \left(g r z^2(r) - \Omega^2 r^3 z(r) \right). \end{aligned}$$

Крім того, незалежно від форми поверхні, повна маса рідини m зберігається:

$$m = \iiint_V dm = 2\pi \rho \int_0^R r dr \int_0^{z(r)} dz = 2\pi \rho \int_0^R r z(r) dr = \pi \rho R^2 H.$$

Таким чином, задача зводиться до відшукування мінімуму функціонала

$$J[z] = \int_0^R dr \left(g r z^2(r) - \Omega^2 r^3 z(r) \right)$$

за додаткової умови

$$\int_0^R dr r z(r) = \frac{1}{2} R^2 H.$$

Відповідь. Вільна поверхня набуває форми параболоїда обертання

$$z(r) = H + \frac{\Omega^2}{4g} (2r^2 - R^2).$$

Крайові умови жорсткого закріплення не є обов'язковими при формулюванні ізопериметричної задачі. Крайові умови інших типів також можливі.

Завдання 3.1.5. Покажіть, що гладка екстремаль функціонала

$$I[X] = \frac{1}{2} \int_0^l [p(x) X'^2(x) + q(x) X^2(x)] dx + \frac{k_1}{2} X^2(0) + \frac{k_2}{2} X^2(l) \quad (3.13)$$

за умови, що інший функціонал

$$K[X] = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) X^2(x) dx \quad (3.14)$$

набуває сталого значення, є розв'язком *крайової задачі Штурма-Ліувілля*, що складається з однорідного диференціального рівняння

$$-\frac{d}{dx}(p(x)X'(x)) + q(x)X(x) = \lambda \rho(x)X, \quad 0 < x < l, \quad (3.15)$$

та однорідних крайових умов

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(l) + h_2 X(l) = 0, \quad h_1 \equiv k_1/p(0), \quad h_2 \equiv k_2/p(l). \quad (3.16)$$

Узагальненням найпростішої ізопериметричної задачі (3.1)–(3.3) є задача про відшукування гладкої екстремалі функціонала

$$J[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) \quad (3.17)$$

за додаткової умови, що залишаються сталими k інших функціоналів

$$L_j[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} dx G_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = L_j, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (3.18)$$

та при фіксованих значеннях функцій $y_i(x)$ на кінцях відрізка $[x_1, x_2]$.

Аналогічно до задачі (3.1)–(3.3), вона розв'язується шляхом введення k невизначених множників Лагранжа λ_j та побудови нового функціонала

$$J^*[y_1, y_2, \dots, y_n] = J[y_1, y_2, \dots, y_n] - \sum_{j=1}^k \lambda_j L_j[y_1, y_2, \dots, y_n] \quad (3.19)$$

з підінтегральною функцією

$$F^* = F - \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j. \quad (3.20)$$

Шукана екстремаль є розв'язком системи k диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа для функціонала $J^*[y_1, y_2, \dots, y_n]$:

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_j} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F^*}{\partial y'_j} = 0, \quad (3.21)$$

який задовольняє умови (3.18) та умови жорсткого закріплення.

3.2. Задача Лагранжа

Інший тип задач на умовний екстремум дістаємо, вимагаючи, щоб екстремаль функціонала (3.17) замість умови сталості функціоналів (3.18) задовольняла в'язі

$$f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n; y'_1, y'_2, \dots, y'_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m < n. \quad (3.22)$$

Ця задача називається *задачею Лагранжа*. Зауважимо, що в'язь f_j називається *голономною*, якщо вона не містить (або зводиться до вигляду, що не містить) похідні $y'_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. У протилежному разі вона називається *неголономною*.

Прикладами задачі Лагранжа з голономною в'яззю є розглянуті вище задачі про геодезичну (див. *Завдання 2.6.1* та *2.6.3*), яка з'єднує задані точки на певній поверхні

$$f(x, y, z) = 0. \quad (3.23)$$

Отже, в найпростішому варіанті задачу Лагранжа можна сформулювати так: знайти екстремаль функціонала виду

$$J[y, z] = \int_{x_1}^{x_2} dx F(x, y, z, y', z'), \quad (3.24)$$

яка задовольняє голономну в'язь (3.23) та крайові умови жорсткого закріплення

$$y(x_1) = y_1, \quad z(x_1) = z_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad z(x_2) = z_2. \quad (3.25)$$

Теорема 3.2.1. Нехай функції $F(x, y, z; y', z')$ та $f(x, y, z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними відповідно до другого та першого порядків включно. Тоді екстремаль функціонала (3.24) за умов (3.23), (3.25) задовольняє систему диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial z'} = 0, \quad (3.26)$$

де

$$\tilde{F}(x, y, z, \lambda; y', z') = F(x, y, z; y', z') - \lambda(x) f(x, y, z), \quad (3.27)$$

а $\lambda(x)$ – невизначена функція класу $C^1([x_1, x_2])$.

Сталі інтегрування і функція $\lambda(x)$ в загальному розв'язку системи (3.26) знаходяться за допомогою крайових умов (3.25) і в'язі (3.23).

Доведення. Як і у випадку ізопериметричної задачі, спробуємо задачу (3.23)–(3.25) на умовний екстремум функціонала (3.24) звести до задачі про звичайний екстремум функціонала більш загального виду з підінтегральною функцією (3.27):

$$\tilde{J}[y, z, \lambda] = \int_{x_1}^{x_2} dx \tilde{F}(x, y, z, \lambda; y', z'). \quad (3.28)$$

Якщо розглядати $\lambda(x)$ як ще одну функцію, від якої залежить функціонал $\tilde{J}[y, z, \lambda]$, то його екстремаль повинна задовольняти систему трьох диференціальних рівнянь Ейлера-Лагранжа, а саме, два рівняння (3.26) та рівняння

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda'} = 0. \quad (3.29)$$

А це є не що інше, як рівняння (3.23).

Завдання 3.2.1. Доведіть, що головна нормаль до геодезичної лінії поверхні збігається в кожній точці з нормаллю до поверхні. (Основна властивість геодезичної).

Розв'язання. Потрібно проаналізувати задачу Лагранжа (3.23)–(3.25), де у випадку геодезичної лінії підінтегральна функція функціонала (3.24) має вигляд

$$F(y', z') = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

Із рівнянь Ейлера-Лагранжа (3.26) для допоміжної функції

$$\tilde{F} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} - \lambda(x)f(x, y, z)$$

випливає, що

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{F} \right) + \lambda f_y = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{F} \right) + \lambda f_z = 0. \quad (3.30)$$

Ще одне рівняння дістанемо, диференціюючи (3.23) за змінною x :

$$f_x + f_y y' + f_z z' = 0.$$

Тепер помножимо обидві частини цієї рівності на λ та підставимо замість λf_y і λf_z їх значення з формул (3.30):

$$-y' \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{F} \right) - z' \frac{d}{dx} \left(\frac{z'}{F} \right) + \lambda f_x = 0.$$

Розкриваючи похідні за x та враховуючи співвідношення

$$F^2 = 1 + y'^2 + z'^2, \quad F \frac{dF}{dx} = y'y'' + z'z'',$$

знаходимо:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{F} \right) + \lambda f_x = 0. \quad (3.31)$$

Вирази в дужках під знаком похідної дорівнюють напрямним косинусам дотичної до геодезичної, тому рівняння (3.30), (3.31) можна переписати так:

$$\frac{d \cos \alpha}{dx} + \lambda f_x = 0, \quad \frac{d \cos \beta}{dx} + \lambda f_y = 0, \quad \frac{d \cos \gamma}{dx} + \lambda f_z = 0. \quad (3.32)$$

Користуючись формулою $dx/dl = \cos \alpha$, операцію диференціювання за змінною x у формулах (3.32) замінімо операцією диференціювання за довжиною геодезичної:

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{d}{dl}. \text{ Отримуємо:}$$

$$\frac{d \cos \alpha}{dl} = \mu f_x, \quad \frac{d \cos \beta}{dl} = \mu f_y, \quad \frac{d \cos \gamma}{dl} = \mu f_z, \quad (3.33)$$

$$\text{де } \mu \equiv -\lambda \cos \alpha.$$

Як відомо з диференціальної геометрії, ліві частини формул (3.33) пропорційні напрямним косинусам головної нормалі до кривої, а праві – напрямним косинусам нормалі до поверхні. Звідси й випливає, що вздовж геодезичної лінії головна нормаль до неї є одночасно й нормаллю до поверхні.

Загальна задача Лагранжа про відшукування екстремуму функціонала (3.17) за умови, що шукані функції $y_i(x)$ належать класу $C^1([x_1, x_2])$, задовольняють m диференціальних співвідношень (неголономні в'язі) (3.22) та певні крайові умови кількістю $2n + m$, розв'язується аналогічно до попередньої.

Нехай функції (3.22) визначені та мають неперервні частинні похідні другого порядку за всіма своїми аргументами, а матриця $\|\partial f_j / \partial y'_i\|$ має ранг m в усіх точках $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ деякої просторової області, коли похідні y'_1, y'_2, \dots, y'_n пробігають довільні значення на кінцях інтервалу $[x_1, x_2]$. Тоді шуканою екстремаллю є інтегральна крива системи $(n + m)$ диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.34)$$

$$f_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m < n, \quad (3.35)$$

де допоміжна функція

$$\tilde{F} = F - \sum_{j=1}^m \lambda_j(x) f_j, \quad (3.36)$$

а невизначені функції Лагранжа $\lambda_j(x)$ належать класу $C^1([x_1, x_2])$.

Зауважимо, що співвідношення (3.35) можна розглядати як рівняння Ейлера-Лагранжа, у яких функція (3.36) диференціюється за невідомими функціями λ_j .

Завдання 3.2.2. По якій замкненій кривій у горизонтальній площині повинен рухатися літак зі сталою за величиною власною швидкістю v , щоб за фіксований проміжок часу облетіти найбільшу площу? Під час руху літака дме вітер, швидкість якого відносно землі стала за напрямом та величиною $w < v$. (Задача Чаплигіна про максимальну площу обльоту).

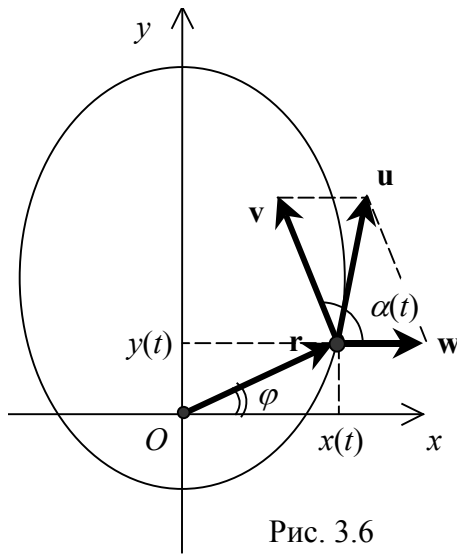


Рис. 3.6

Розв'язання. Вивчатимемо рух літака відносно нерухомої системи відліку, пов'язаної із землею. Нехай рух відбувається в горизонтальній площині XOY , а вісь OX напрямлена вздовж швидкості вітру w (рис. 3.6). Позначимо через $\alpha(t)$ кут між напрямом власної швидкості літака v та віссю OX , а через $x(t)$ і $y(t)$ – компоненти радіус-вектора центра мас літака r у момент часу t . Тоді швидкість літака відносно землі $u = v + w$ має компоненти

$$\dot{x} = v \cos \alpha + w, \quad \dot{y} = v \sin \alpha. \quad (3.37)$$

Площа, яку описує літак у горизонтальній площині за час dt , дорівнює половині модуля (фактично половині z -компоненти) векторного добутку $[r, u \cdot dt]$. Тому площа, яку літак облітає за проміжок часу T , виражається інтегралом

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T dt (x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (3.38)$$

Задача, таким чином, зводиться до відшукування трьох функцій $\alpha(t)$, $x(t)$ і $y(t)$, що надають максимум функціоналу (3.38) та задовольняють дві неголономні в'язі (3.37).

Побудуємо систему рівнянь (3.34). Оскільки функція (3.36) у нашому випадку має вигляд

$$\tilde{F} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \lambda_1(t)(\dot{x} - v \cos \alpha - w) - \lambda_2(t)(\dot{y} - v \sin \alpha), \quad (3.39)$$

дістаємо:

$$\dot{\lambda}_1 + \dot{y} = 0, \quad \dot{\lambda}_2 - \dot{x} = 0, \quad -\lambda_1 \sin \alpha + \lambda_2 \cos \alpha = 0. \quad (3.40)$$

Із перших двох рівнянь

$$\lambda_1 = -y + C_1, \quad \lambda_2 = x + C_2. \quad (3.41)$$

Паралельним перенесенням осей координат можна домогтися, щоб сталі C_1 та C_2 дорівнювали нулю. Тоді третє рівняння руху набирає вигляду

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0. \quad (3.42)$$

Разом із двома рівняннями в'язей (3.37) воно утворює замкнену систему для знаходження функцій $\alpha(t)$, $x(t)$ та $y(t)$.

Перейдемо до полярних координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Тоді рівняння (3.42) зводиться до

$$\cos(\alpha - \varphi) = 0,$$

звідки

$$\alpha = \varphi + \frac{\pi}{2}. \quad (3.43)$$

З урахуванням цього співвідношення рівняння (3.37) набирають вигляду

$$\begin{aligned} \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} &= -v \sin \varphi + w, \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} &= v \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Помножимо перше з цих рівнянь на $\cos \varphi$, друге – на $\sin \varphi$, та додамо їх ліві та праві частини. Маємо

$$\frac{dr}{dt} = w \cos \varphi,$$

тобто

$$\frac{dr}{dt} = \frac{w}{v} \frac{dy}{dt}.$$

Обидві частини цього рівняння легко інтегруються:

$$r = \frac{w}{v} y + C = \frac{w}{v} r \sin \varphi + C,$$

де C – стала інтегрування. Звідси

$$r = \frac{C}{1 - \frac{w}{v} \sin \varphi} = \frac{C}{1 + \frac{w}{v} \cos \alpha}. \quad (3.45)$$

Бачимо, що траєкторія літака з максимальною площею обльоту – це конічний переріз із фокусом у початку координат і ексцентриситетом $\varepsilon = w/v$. Оскільки швидкість вітру вважається меншою за швидкість літака, то $\varepsilon < 1$, тобто цей переріз є еліпсом із великою віссю вздовж осі OY . Рухаючись по такому еліпсові, пілот повинен витримувати кут (3.43) для напрямку власної швидкості літака відносно землі.

4. КОЛИВАННЯ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. Функціонали від функцій багатьох змінних. Рівняння Ейлера-Остроградського

У цьому параграфі вивчається основна задача варіаційного числення для функціоналів, що залежать від функцій декількох змінних та їх частинних похідних. Найпростіший представник такого типу функціоналів залежить від функції двох змінних та її перших похідних:

$$J[z] = \iint_D dx dy F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}\right). \quad (4.1)$$

Вважатимемо, що допустимі функції $z = z(x, y)$ визначені в деякій області D площини XOY із кусково-гладкою межею Γ , є неперервні разом зі своїми першими частинними похідними, а множина їх значень для точок $(x, y) \in D$ утворює деяку просторову область G (рис. 4.1).

Теорема 4.1.1. Нехай при довільних скінченних значеннях $z_x \equiv \partial z / \partial x$ та

$z_y \equiv \partial z / \partial y$ підінтегральна функція $F(x, y, z, z_x, z_y)$ у функціоналі (4.1) є в області G двічі неперервно диференційовною за своїми аргументами. Якщо функція $z_0(x, y)$, яка

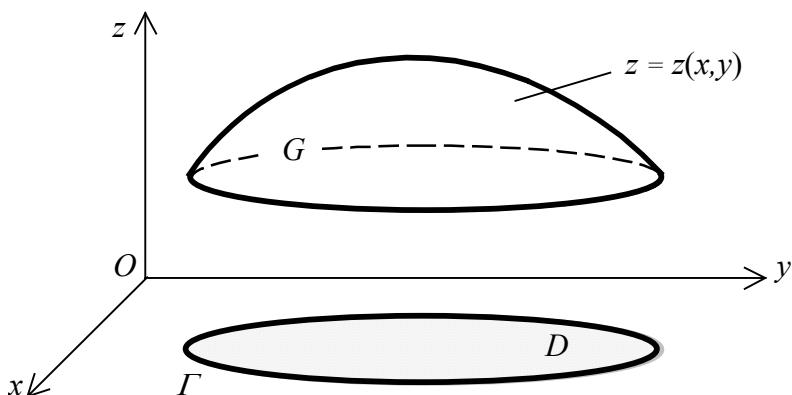


Рис. 4.1

надає екстремум функціоналу (4.1) на множині допустимих функцій з однаковими фіксованими значеннями $z(x, y)|_{\Gamma}$ на контурі Γ , має неперервні другі похідні, то вона задовольняє рівняння *Ейлера-Остроградського*

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z_y} = 0. \quad (4.2)$$

Доведення. Розглянемо множину допустимих поверхонь

$$z(x, y) = z_0(x, y) + \delta z(x, y) = z_0(x, y) + \alpha h(x, y),$$

для яких на межі Γ $\delta z(x, y)|_{\Gamma} = h(x, y)|_{\Gamma} = 0$. Варіацію функціонала (4.1)

$$\delta J = \alpha \iint_D dx dy \left(\frac{\partial F}{\partial z} h + \frac{\partial F}{\partial z_x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z_y} \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

за допомогою двовимірних векторів $\mathbf{A} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_x}, \frac{\partial F}{\partial z_y} \right)$, $\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right)$ та тотожності

$$\mathbf{A} \cdot \nabla h = \nabla(h\mathbf{A}) - h\nabla\mathbf{A}$$

подамо у вигляді

$$\delta J = \alpha \iint_D dx dy \left(\frac{\partial F}{\partial z} h + \mathbf{A} \cdot \nabla h \right) = \alpha \iint_D dx dy \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \nabla\mathbf{A} \right) h + \nabla(h\mathbf{A}) \right\}.$$

Застосовуючи до останнього члена в δJ двовимірний варіант теореми Остроградського-Гаусса

$$\iint_D dx dy \nabla(h\mathbf{A}) = \oint_{\Gamma} dl h A_n,$$

де A_n – перпендикулярна до контуру Γ компонента вектора \mathbf{A} , дістаємо:

$$\delta J = \iint_D dx dy \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \nabla\mathbf{A} \right) \delta z(x, y) + \oint_{\Gamma} dl \delta z(x, y) A_n. \quad (4.3)$$

Другий доданок у формулі (4.3) дорівнює нулю, оскільки значення допустимих поверхонь на контурі Γ фіксовані. Рівність $\delta J[z_0] = 0$ справджуватиметься для

довільних значень варіації $\delta z(x, y)|_D$ всередині області D лише тоді, коли скрізь в області D функція $z_0(x, y)$ задовольнятиме рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \nabla \mathbf{A} = 0,$$

тобто рівняння (4.2).

Завдання 4.1.1. Випишіть рівняння Ейлера-Остроградського для задачі про знаходження мінімальної площі, натягненої на контур Γ .

Вказівка. Треба знайти мінімум функціонала площі поверхні, що натягнена на контур Γ і проектується на область D :

$$J[z] = \iint_D dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Відповідне рівняння Ейлера-Остроградського

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{z_x}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{z_y}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} = 0$$

означає, що середня кривина шуканої поверхні скрізь у D дорівнює нулю.

Завдання 4.1.2. Узагальніть рівняння Ейлера-Остроградського на випадок функціонала виду

$$J[z] = \iint \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n F(x_1, x_2, \dots, x_n; z, z_{x_1}, z_{x_2}, \dots, z_{x_n}),$$

де $z_{x_i} \equiv \partial z(x_1, x_2, \dots, x_n) / \partial x_i$

Відповідь:

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial z_{x_i}} = 0. \quad (4.4)$$

Завдання 4.1.3. Покажіть, що потенціал електростатичного поля у вакуумі задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = 0.$$

Вказівки. Об'ємна густина енергії електростатичного поля

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E}^2(x, y, z).$$

Узявши до уваги зв'язок між напруженістю поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ та його потенціалом $\varphi(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}),$$

виразіть повну енергію електростатичного поля

$$W = \int_V d\mathbf{r} w(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \int_V d\mathbf{r} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi} \iiint_V dx dy dz \mathbf{E}^2(x, y, z)$$

через потенціал $\varphi(\mathbf{r})$ та скористайтесь теоремою Томсона (див. §1.6) про мінімум енергії істинного електростатичного поля.

Оскільки W належить до класу функціоналів, що залежать від функції декількох змінних та її перших похідних, його екстремальна поверхня має задовольняти рівняння Ейлера-Остроградського (4.4):

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} = 0,$$

де в нашому випадку

$$F = \frac{1}{8\pi} (\nabla \varphi)^2 = \frac{1}{8\pi} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2).$$

Завдання 4.1.4. Інтегралом Діріхле від функції $z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по області D n -вимірного простору називається інтеграл

$$J[z] = \int_D \dots \int dx_1 \dots dx_n \sum_{i=1}^n (z_{x_i})^2.$$

Вважаючи, що функція z набуває заданих значень на границі області D , знайдіть умови, за яких досягається мінімум інтеграла Діріхле.

Відповідь. Функція z має задовольняти n -вимірне рівняння Лапласа

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = 0.$$

Завдання 4.1.5. Те ж саме для функціонала

$$J[z] = \int_D \dots \int_D dx_1 \dots dx_n \left[\sum_{i=1}^n (z_{x_i})^2 + 2zf(x_1, \dots, x_n) \right].$$

Відповідь. Функція z повинна задовольняти n -вимірне рівняння Пуассона

$$\Delta z = f.$$

Завдання 4.1.6. Нехай екстремум функціонала (4.1) шукається серед поверхонь, краї яких можуть вільно ковзати в напрямі, перпендикулярному до площини XOY , залишаючись при цьому над контуром Γ (рис. 4.2). Вважаючи решту умов *Теорема 4.1.1* на підінтегральну функцію $F(x, y, z, z_x, z_y)$ та на допустимі функції виконаними, знайдіть необхідні умови, які тепер повинна задовольняти екстремальна поверхня $z_0(x, y)$ функціонала (4.1).

Вказівка. Проаналізуйте умови, за яких справджується рівність $\delta J[z_0] = 0$ для варіації (4.3) при довільних значеннях варіацій $\delta z(x, y)|_D$ та $\delta z(x, y)|_\Gamma$.

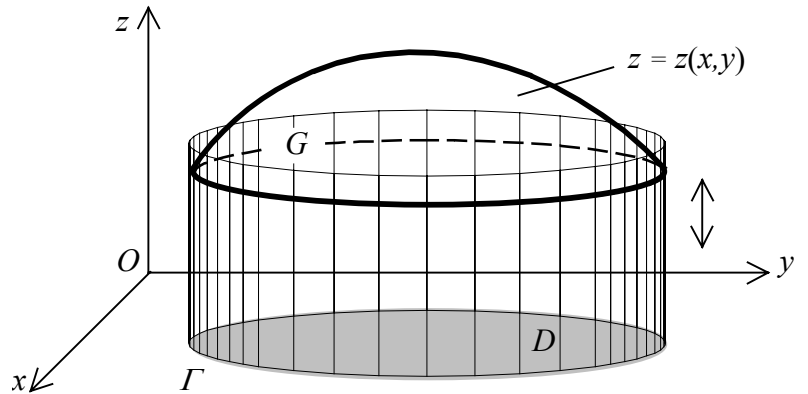


Рис. 4.2

Відповідь. Екстремальна поверхня $z_0(x, y)$ задовольняє рівняння Ейлера-Остроградського (4.2) та крайову умову

$$A_n|_\Gamma = 0, \quad (4.5)$$

де $\mathbf{A} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_x}, \frac{\partial F}{\partial z_y} \right)$.

Завдання 4.1.7. Нехай задано функціонал типу (4.1), але з додатковим внеском на межі Γ :

$$J[z] = \iint_D dx dy F(x, y, z(x, y), z_x(x, y), z_y(x, y)) + \oint_\Gamma dl f(z(l)), \quad (4.6)$$

де гладка функція $f(z(l))$, $z(l) \equiv z(x, y)|_\Gamma$ залежить лише від значень допустимих

функцій $z(x, y)$ на контурі Γ . Вважаючи решту умов *Теорема 4.1.1* на підінтегральну функцію $F(x, y, z, z_x, z_y)$ та допустимі функції виконаними, знайдіть необхідні умови, які повинна задовольняти екстремальна поверхня $z_0(x, y)$ функціонала (4.6).

Відповідь. Екстремальна поверхня задовольняє рівняння Ейлера-Остроградського (4.2) та крайову умову

$$\left(A_n + \frac{\partial f}{\partial z} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (4.7)$$

Завдання 4.1.8. Покажіть, що екстремальна поверхня функціонала

$$J[z] = \iint_D dx dy F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \quad (4.8)$$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial z_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial z_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial z_{yy}} = 0. \quad (4.9)$$

Завдання 4.1.9. Покажіть, що екстремальна поверхня функціонала

$$J[z] = \iint_D dx dy [z_{xx}^2 + z_{yy}^2 + 2z_{xy}^2 - 2zf(x, y)]$$

задовольняє неоднорідне бігармонічне рівняння

$$\Delta \Delta z = f(x, y).$$

4.2. Рівняння малих коливань систем із розподіленими параметрами

Згідно з принципом найменшої дії, механічний рух системи дискретних точок з відомою функцією Лагранжа L при наявності ідеальних в'язей можна описати за допомогою рівнянь Ейлера-Лагранжа, які є наслідком екстремальності функціонала дії для цієї системи (див. §1.5). Для системи з неперервним розподілом маси, що заповнює область з об'ємом V , виникає потреба перейти до об'ємної густини (лагранжіана) \mathcal{L}

функції Лагранжа, визначеної співвідношенням

$$L = \int_V dV \mathcal{L} . \quad (4.10)$$

Дія для такої системи набирає вигляду

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \mathcal{L} , \quad (4.11)$$

тобто є функціоналом, що залежить від функції декількох змінних. Вимагаючи далі, щоб для істинного руху він набував екстремального значення, дістаємо рівняння руху у вигляді рівняння Ейлера-Остроградського для лагранжіана \mathcal{L} .

Почнемо розгляд таких рівнянь із випадку рівняння малих вільних поперечних коливань струни (пружної гнучкої нитки).

Нехай у стані рівноваги струна збігається з відрізком $[0, l]$ осі OX , а її коливання відбуваються у вертикальній площині XOU та характеризуються деякою функцією $u(x, t)$, яка має зміст поперечного відхилення від стану рівноваги точки x струни в момент часу t (див. рис. 4.3). Оскільки струна не має розривів, функція $u(x, t)$ неперервна.

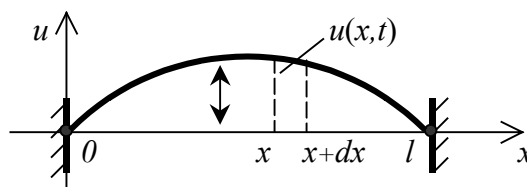


Рис. 4.3

Частинна похідна $u_t(x, t) \equiv \partial u(x, t) / \partial t$ від зміщення за часом має зміст поперечної швидкості точки x струни в момент часу t . Оскільки струна не рветься, її сусідні точки рухаються з близькими швидкостями, тобто функція $u_t(x, t)$ теж неперервна.

Частинна похідна $u_x(x, t) \equiv \partial u(x, t) / \partial x$ від зміщення за координатою пов'язана з деформацією струни: ділянка струни $(x, x + dx)$ має в деформованому стані, з точністю до нескінченно малих більш високого порядку, довжину $dl = \sqrt{1 + u_x^2(x, t)} dx$. Функція $u_x(x, t)$ також є неперервною, бо профіль струни внаслідок її гнучкості не має гострих кутів.

За означенням, коливання вважаються *малими*, якщо виконується співвідношення

$$u_x^2(x, t) \ll 1 . \quad (4.12)$$

Довжина струни l' залишається при малих коливаннях незмінною і рівною довжині l недеформованої струни:

$$l' = \int_0^l dx \sqrt{1 + u_x^2(x, t)} \cong \int_0^l dx = l .$$

Це означає, що сила натягу струни в довільний момент часу дорівнює силі початкового натягу T_0 , з якою її розтягнули до моменту збудження коливань.

Виведемо рівняння поперечних коливань струни за допомогою принципу найменшої дії. Функціонал дії для струни записується у вигляді

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt (K(t) - \Pi(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l dx \mathcal{L} , \quad (4.13)$$

де $K(t)$, $\Pi(t)$ та \mathcal{L} – відповідно кінетична енергія, потенціальна енергії та лагранжіан струни, обчислені в наближенні (4.12).

Нехай $\rho(x)$ – погонна густина струни в точці x . Тоді маса елементарної ділянки $(x, x + dx)$ струни $dm(x) = \rho(x)dx$, а її кінетична енергія в момент часу t

$$dK(x, t) = \frac{1}{2} dm(x) u_t^2(x, t) = \frac{1}{2} \rho(x) u_t^2(x, t) dx .$$

Кінетична енергія всієї струни

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^l dx \rho(x) u_t^2(x, t) .$$

Потенціальна енергія $d\Pi(x, t)$, яку запасав ділянка $(x, x + dx)$ у процесі коливань, дорівнює роботі dA , яку треба виконати проти сили T_0 , щоб розтягнути цю ділянку на величину

$$\delta l = dl - dx = \left(\sqrt{1 + u_x^2(x, t)} - 1 \right) dx \cong \left(1 + \frac{1}{2} u_x^2(x, t) - \frac{1}{8} u_x^4(x, t) + \dots - 1 \right) dx \cong \frac{1}{2} u_x^2(x, t) dx .$$

(Прокоментуйте ту обставину, що довжина струни при малих коливаннях вважається незмінною, $l' \cong l$, тоді як при обчисленні потенціальної енергії ми вважаємо, що $l' - l \neq 0$.)

Маємо:

$$d\Pi(x, t) = dA = T_0 \delta l \cong \frac{1}{2} T_0 u_x^2(x, t) dx,$$

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l dx T_0 u_x^2(x, t).$$

Функція Лагранжа струни має вигляд

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l dx [\rho(x) u_t^2(x, t) - T_0 u_x^2(x, t)], \quad (4.14)$$

а функціонал дії струни –

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx [\rho(x) u_t^2(x, t) - T_0 u_x^2(x, t)]. \quad (4.15)$$

Задача, таким чином, зводиться до відшукування екстремалей функціонала (4.15), що залежить від функції двох змінних та її перших частинних похідних: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t))$. Варіювання здійснюється за функцією $u(x, t)$, значення якої в точках $t = t_1$, $t = t_2$ (оскільки вивчається рух струни між двома фіксованими моментами часу) та в точках $x = 0$, $x = l$ (оскільки кінці струни жорстко закріплено) фіксовані. Іншими словами, $\delta u(0, t) = \delta u(l, t) = \delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$.

Згідно з *Теоремою 4.1.1*, така екстремаль обов'язково задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = 0.$$

У нашому випадку

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} = \rho(x) u_t(x, t), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = -T_0 u_x(x, t),$$

і, отже, *рівняння малих вільних поперечних коливань струни* має вигляд

$$\rho(x) u_{tt}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (T_0 u_x(x, t)). \quad (4.16)$$

Для однорідної струни густина $\rho(x)$ є сталою, тому рівняння (4.16) зводиться до диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad (4.17)$$

де величина $a^2 \equiv T_0/\rho$ має розмірність квадрата швидкості.

Завдання 4.2.1. Виведіть рівняння малих поперечних коливань струни, якщо в процесі коливань на неї ще діє зовнішня сила, перпендикулярна до рівноважного профілю струни. Погонна густина сили (тобто сила, яка діє одиницю довжини струни) дорівнює $f(x, t)$.

Вказівка. Узагальнена сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює частинній похідній функції Лагранжа точки за узагальненою координатою точки: $F = \partial L(q, \dot{q}, t)/\partial \dot{q}$ (див. §1.5). У нашому випадку на елементарну ділянку $(x, x + dx)$ струни діє сила $f(x, t)dx = \partial \Delta L_{ext}(u, u_x, u_t, t)/\partial u$, де ΔL_{ext} – внесок цієї ділянки у функцію Лагранжа струни, зумовлений зовнішньою силою:

$$\Delta L_{ext} = \int_x^{x+dx} \mathcal{L}_{ext} dx \cong \mathcal{L}_{ext} dx.$$

Дістаємо: $f(x, t) = \partial \mathcal{L}_{ext}(u, u_x, u_t, t)/\partial u$. Узявши, зокрема, лагранжіан $\mathcal{L}_{ext}(u, u_x, u_t, t) = f(x, t)u(x, t)$, наявність зовнішньої сили можемо врахувати за допомогою додаткового внеску

$$L_{ext} = \int_0^l dx f(x, t)u(x, t) \quad (4.18)$$

у функцію Лагранжа (4.14) (або $\Pi_{ext} = -L_{ext}$ у потенціальну енергію, якщо $f(x, t)$ – потенціальна сила).

Відповідь:

$$\rho(x)u_{tt}(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}(T_0 u_x(x, t)) + f(x, t). \quad (4.19)$$

Завдання 4.2.2. Виведіть рівняння малих поперечних коливань мембрани із закріпленим краєм при наявності поперечних потенціальних зовнішніх сил.

Вказівки. Нехай рівноважний профіль мембрани утворює у площині XOY деяку область D , відхилення мембрани від стану рівноваги описується функцією $u = u(x, y, t)$, і на одиницю маси мембрани діє сила $f(x, y, t)$, перпендикулярна до площини XOY . Крім того, нехай функції $\rho(x, y)$ і $k(x, y)$ характеризують відповідно поверхневу

густину та пружні властивості мембрани. Тоді її кінетична енергія, потенціальна енергія пружної деформації та потенціальна енергія в полі зовнішніх сил дорівнюють:

$$K(t) = \frac{1}{2} \iint_D dx dy \rho(x, y) u_t^2(x, y, t),$$

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \iint_D dx dy k(x, y) \left(\sqrt{1 + u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t)} - 1 \right) \cong \\ &\cong \frac{1}{2} \iint_D dx dy k(x, y) (u_x^2(x, y, t) + u_y^2(x, y, t)), \\ \Pi_{ext}(t) &= - \iint_D dx dy \rho(x, y) f(x, y, t) u(x, y, t). \end{aligned}$$

Відповідь:

$$\rho u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} (k u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (k u_y) + \rho f. \quad (4.20)$$

Завдання 4.2.3. Виведіть рівняння малих поздовжніх коливань пружного стержня та крайові умови на його кінцях, якщо вони:

а) закріплені пружно, тобто на кожний кінець діє з боку кріплення поздовжня сила, пропорційна зміщенню та напрямлена протилежно до нього;

б) закріплені жорстко;

в) вільні, тобто не закріплені.

Покажіть, що б) та в) є граничними випадками а).

Розв'язання. а) Скористаємося принципом найменшої дії. Функціонал дії для

самого стержня записується у вигляді (4.13), де лагранжіан залежить від поздовжнього зміщення $u(x, t)$ точок стержня та його перших похідних: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_x, u_t)$. Функція $u(x, t)$ описує відхилення точок стержня в момент часу t від тих положень x , які вони мали в недеформованому стержні (див. рис. 4.4).

Нехай $\rho(x)$ та $S(x)$ – відповідно густина та площа поперечного перерізу стержня в точці x . Знайдемо кінетичну енергію $dK(x, t)$ елементарної ділянки $(x, x + dx)$

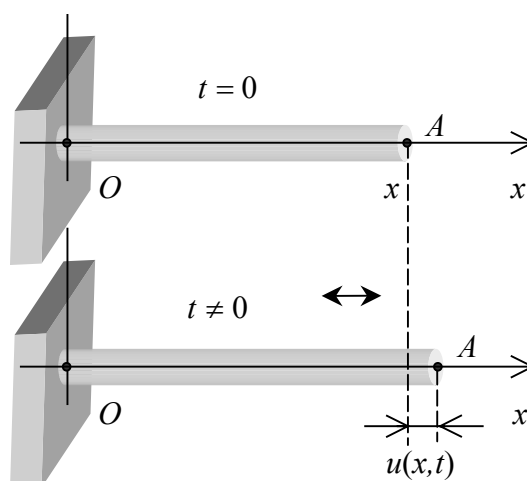


Рис. 4.4

стержня, обмеженої двома близькими поперечними перерізами x та $x + dx$, а також потенціальну енергію деформації $d\Pi(x, t)$ цієї ділянки при поздовжніх коливаннях. Оскільки коливання малі, достатньо обмежитися членами другого порядку малості за функцією $u(x, t)$ та її похідними.

Оскільки маса ділянки $(x, x + dx)$ дорівнює $\rho(x)S(x)dx$, і в згаданому наближенні швидкості всіх точок ділянки можна вважати однаковими й рівними $u_t(x, t)$, то

$$dK(x, t) = \frac{1}{2} \rho(x)S(x)u_t^2(x, t)dx.$$

Потенціальну енергію $d\Pi(x, t)$ знайдемо за допомогою закону Гука, який стверджує, що механічне напруження $\sigma(x, t)$ у перерізі x у момент часу t прямо пропорційне відносному видовженню $\varepsilon(x, t)$ стержня в цьому перерізі:

$$\sigma(x, t) = \frac{|\mathbf{F}(x, t)|}{S(x)} = E(x)|\varepsilon(x, t)|,$$

де $\mathbf{F}(x, t)$ – сила пружності, яка діє в перерізі x у момент часу t , $E(x)$ – модуль Юнга матеріалу стержня.

Оскільки $\varepsilon(x, t) = \delta l / l$, де $l = dx$ – рівноважна довжина ділянки $(x, x + dx)$, $\delta l = u(x + dx, t) - u(x, t) \cong u_x(x, t)dx$ – її видовження, то

$$\varepsilon(x, t) \cong \frac{u_x(x, t)dx}{dx} = u_x(x, t),$$

тобто похідна $u_x(x, t)$ має зміст відносного видовження при поздовжніх коливаннях.

Проекція сили $\mathbf{F}(x, t)$ на вісь OX дорівнює

$$F(x, t) = -E(x)S(x)u_x(x, t),$$

де знак “–” враховує напрям цієї сили. Зокрема, якщо стержень видовжується вздовж осі OX , то $u_x(x, t) > 0$ і $F(x, t) < 0$.

Потенціальна енергія $d\Pi(x, t)$, яку ділянка $(x, x + dx)$ запасає у процесі коливань, дорівнює роботі dA , що треба виконати проти сили $\mathbf{F}(x, t)$, щоб цю ділянку розтягнути. Оскільки при розтягуванні стержня $F(x, t)$ змінюється за лінійним законом, то її середнє значення

$$\overline{F(x, t)} = -\frac{0 + E(x)S(x)u_x(x, t)}{2} = -\frac{1}{2}E(x)S(x)u_x(x, t).$$

Тоді

$$d\Pi(x, t) = dA = -\overline{F(x, t)}\delta l = \frac{1}{2}E(x)S(x)u_x^2(x, t)dx.$$

Інтегруючи за всіма елементарними ділянками, дістаємо кінетичну та потенціальну енергії стержня:

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^l dx \rho(x) S(x) u_t^2(x, t),$$

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l dx E(x) S(x) u_x^2(x, t).$$

Врахуємо тепер ще той факт, що кінці стержня закріплено пружно, наприклад, за допомогою пружинок із дуже малими масами та довжинами. Кінетична енергія таких пружинок практично дорівнює нулю, а їх потенціальна енергія визначається зміщеннями лівого $x = 0$ та правого $x = l$ кінців стержня:

$$\Pi_1(t) = \frac{1}{2} k_1 u^2(0, t), \quad \Pi_2(t) = \frac{1}{2} k_2 u^2(l, t),$$

де k_1 та k_2 – коефіцієнти жорсткості відповідно лівої та правої пружинок.

Отже, пружне закріплення кінців стержня враховується за допомогою додаткових внесків у точках $x = 0$ та $x = l$ до потенціальної енергії системи.

Для функціонала дії всієї системи остаточно маємо:

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_0^l dx [\rho(x) S(x) u_t^2(x, t) - E(x) S(x) u_x^2(x, t)] - k_1 u^2(0, t) - k_2 u^2(l, t) \right\}. \quad (4.21)$$

Задача зводиться до відшукування екстремалей функціонала з додатковими внесками на краях. Варіювання проводиться за функцією $u(x, t)$, значення якої в точках $t = t_1$, $t = t_2$ у всіх випадках а) – в) фіксовані (вивчається рух системи між фіксованими моментами часу): $\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$. Значення ж функції $u(x, t)$ в точках $x = 0$ та $x = l$, а, отже, і варіацій $\delta u(0, t)$ та $\delta u(l, t)$ є, взагалі кажучи, довільними.

Для варіації дії маємо:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_0^l dx [\rho S u_t \delta u_t - E S u_x \delta u_x] - k_1 u(0, t) \delta u(0, t) - k_2 u(l, t) \delta u(l, t) \right\}.$$

Інтегруючи частинами та прирівнюючи δS до нуля, отримуємо

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_0^l dx \left[-\rho S u_{tt} + \frac{\partial}{\partial x} (E S u_x) \right] \delta u(x, t) + (E S u_x(x, t) - k_1 u(x, t)) \Big|_{x=0} \delta u(0, t) - \right. \\ \left. - (E S u_x(x, t) + k_2 u(x, t)) \Big|_{x=l} \delta u(l, t) \right\} = 0, \quad (4.22)$$

звідки, внаслідок довільності варіацій $\delta u(0, t)$ та $\delta u(l, t)$, знаходимо як рівняння руху стержня, так і крайові умови:

$$\rho S u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} (E S u_x), \quad (4.23)$$

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = 0, \quad (4.24)$$

де $h_1 \equiv k_1/E(0)S(0)$, $h_2 \equiv k_2/E(l)S(l)$.

Відповіді: б) Потрібно знайти варіацію функціонала

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx [\rho(x) S(x) u_t^2(x, t) - E(x) S(x) u_x^2(x, t)] \quad (4.25)$$

за додаткової умови жорсткого закріплення: $\delta u(0, t) = \delta u(l, t) = 0$. Дістаємо рівняння (4.23) та крайові умови

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (4.26)$$

Це є граничний випадок задачі а) при $k_{1,2} \rightarrow \infty$ (або $h_{1,2} \rightarrow \infty$).

в) Треба знайти варіацію функціонала (4.25) за додаткової умови, що кінці стержня вільні, тобто варіації $\delta u(0, t)$ і $\delta u(l, t)$ довільні. Отримуємо рівняння (4.23) та крайові умови

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0. \quad (4.27)$$

Це є граничний випадок задачі а) при $k_{1,2} \rightarrow 0$ (або $h_{1,2} \rightarrow 0$).

Завдання 4.2.4. Виведіть рівняння та крайові умови, які описують *малі згинальні коливання пружного стержня* із закріпленим лівим кінцем, якщо його правий кінець:

- а) закріплено жорстко;
- б) закріплено шарнірно;
- в) вільний.

Розгляньте частковий випадок однорідного стержня.

Розв'язання. Потенціальна енергія пружної деформації згину (див. Завдання 2.1.3.) дорівнює

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l E(x) J(x) u_{xx}^2(x, t) dx,$$

де функція $u(x, t)$ описує поперечне відхилення точки x стержня в момент часу t .

Функціонал дії

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx [\rho(x) S(x) u_t^2(x, t) - E(x) J(x) u_{xx}^2(x, t)]. \quad (4.28)$$

Після двократного інтегрування частинами та з урахуванням умов $\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0$ його перша варіація набирає вигляду

$$\begin{aligned} \delta S = & - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^l dx \left[\rho S u_{tt} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E J u_{xx}) \right] \delta u(x, t) - \int_{t_1}^{t_2} dt (E J u_{xx}(x, t) \delta u_x(x, t)) \Big|_{x=0}^{x=l} + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} E J u_{xx}(x, t) \right) \delta u(x, t) \right] \Big|_{x=0}^{x=l}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Прирівнюючи її до нуля та враховуючи довільність варіації $\delta u(x, t)$, знаходимо:

$$\rho S u_{tt} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E J u_{xx}) = 0. \quad (4.30)$$

Це є рівняння четвертого порядку відносно змінної x , тому його потрібно доповнити чотирма крайовими умовами.

У випадку жорсткого закріплення крайня точка стержня не зміщується, а дотична до стержня в ній залишається горизонтальною (варіації $\delta u(x, t)$ та $\delta u_x(x, t)$ у крайній

точці дорівнюють нулю). Тому зліва маємо:

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0. \quad (4.31)$$

Крайові умови справа у випадку а) такі самі:

$$u(l, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0. \quad (4.32)$$

У випадку б) крайня права точка не зміщується ($\delta u(l, t) = 0$), а дотична до стержня в ній змінює, взагалі кажучи, свій напрям ($\delta u_x(l, t)$ – довільна). Маємо:

$$u(l, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0. \quad (4.33)$$

У випадку в) варіації $\delta u(l, t)$ та $\delta u_x(l, t)$ довільні, тому дістаємо

$$u_{xx}(l, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x} (EJu_{xx}(x, t)) \right|_{x=l} = 0. \quad (4.34)$$

Зокрема, для однорідного стержня

$$u_{xx}(l, t) = 0, \quad u_{xxx}(l, t) = 0. \quad (4.35)$$

Завдання 4.2.5. Виведіть рівняння, яке описує малі згинальні коливання пружного стержня при наявності зовнішньої сили $f(x, t)$, перпендикулярної до його рівноважного профілю і розрахованої на одиницю довжини.

Відповідь:

$$\rho S u_{tt} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJu_{xx}) = f. \quad (4.36)$$

Література

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по вариационному исчислению. – М.: Гостехиздат, 1955. – 247 с.
2. *Буслаев В. С.* Вариационное исчисление. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 297 с.
3. *Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А.* Введение в аналитическую механику. – М: Наука, 1991. – 256 с.
4. *Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Краткий курс теории экстремальных задач. – М: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 204 с.
5. *Гельфанд И. М, Фомин С. В.* Вариационное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.
6. *Гюнтер Н. М.* Курс вариационного исчисления. – М.-Л.: Гостехиздат, 1941. – 308 с.
7. *Лавреньев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 296 с.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. – М.: Наука, 1988. – 510 с.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 246 с.
11. *Паули В.* Теория относительности. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
12. *Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П.* Теоретическая механика. – Л: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 536 с.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Физматгиз, 1958. – Т. 4, 812 с.
14. *Цлаф Л. Я.* Вариационное исчисление и интегральные уравнения. Справочное руководство. – М.: Наука, 1970. – 192 с.
15. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965. – 424 с.

Предметний покажчик

Аналогія оптико-механічна 37

Брахістохрона 25

Варіація функції 12

– функціонала друга 13

– перша 12, 52, 61, 62, 64, 76, 108

– як головна лінійна частина його приросту 12

– як диференціал за параметром 9, 13

Відстань порядку k між кривими 7, 75

В'язь голономна 101

– неголономна 101, 105

Геодезична (лінія) 82

– конуса 83, 84

– поверхні 82

– ріманового простору 84–86

– —, що рівномірно обертається 84, 85

– сфери 23, 24

– циліндра 82, 83

Дія 19, 113, 115, 119, 121

– укорочена 37, 83

Екстремаль 6

Екстремум функціонала (*також див. Умова...*)

– абсолютний 7

– відносний 7

– умовний 90, 100

Енергія вільна 31, 32

– внутрішня 31

– механічна 18, 79

ε -окіл порядку k кривої 7, 75

Задача аеронавтична Цермелло 21

– Бернуллі (про брахістохрону) 24

– модифікована 54

– Больца 61

– варіаційна з рухомими кінцями *див. Умова крайова...*

– на умовний екстремум 90, 100, 103

– найпростіша 8

– ізопериметрична 90, 100

– Кеплера про рух планет 40

– Лагранжа 101

– загальна 103

– основна варіаційного числення 6

– Плато про мінімальну поверхню обертання 32

– про відстань від точки до кривої 59

– відстань від точки до поверхні 81

– геодезичну 23, 82–85

– коливання *див. Коливання...*

– ланцюгову лінію 93

– оптичне марево 36

– основну властивість геодезичної 102

– плоску область із найбільшою площею 95

– поширення світла в середовищі 34, 74, 78

– провисання стержня під власною вагою 68, 69

– прогин стержня під дією сили 55

– форму поверхні рідини при обертанні 97

- Чаплигіна про максимальну площу об'їзду 104
- Штурма–Ліувіллія крайова 46, 99
- Закон Снелліуса 35, 36
- Змінна циклічна 17, 78
- Значення власне крайової задачі Штурма–Ліувіллія 46–48

- Імпульс узагальнений 18, 79
- Інваріантність рівняння Ейлера–Лагранжа 14
- Інтеграл Діріхле 110
 - еліптичний першого роду 29
 - енергії 18, 79
 - імпульсу 18, 78, 79

- Катеноїд 33
- Клас $C([x_1, x_2])$ 5

- $C^k([x_1, x_2])$ 6
- $C_0^1([x_1, x_2])$ 41

- Коливання ізохронні 27
 - малі 113
 - мембрани 116
 - , рівняння 116, 117
 - стержня згинальні 121, 122
 - , крайові умови 122
 - , рівняння 121, 122
 - стержня поздовжні 117
 - , крайові умови 120
 - , рівняння 120
 - струни 113, 116
 - , крайові умови 115
 - , рівняння 115, 116
 - маятника *див.* Маятник...
- Координата узагальнена 18
- Крива допустима 9
 - екстремальна 6
- Кривина гауссова 89
 - сфери 89
 - простору 88, 89
 - скалярна 89

- Лагранжіан 113
- Лема основна варіаційного числення 8
- Лінія гвинтова 83
 - ланцюгова 33, 93

- Маятник математичний 28
 - циклоїдальний 26
- Множник невизначений Лагранжа 91, 100

- Область визначення функціонала 6
- Означення функціонала 5

- Параметр канонічний 85
- Перенесення паралельне вектора 86, 87
- Потенціал електростатичний 109, 110
 - термодинамічний Гіббса 31
- Похідна функціональна 14
- Принцип Гамільтона 19, 30, 79, 112
 - Малюса 82
 - Мопертюї 37, 83
 - найменшої дії 19, 30, 79, 112
 - Ферма 34, 36
- Простір евклідовий 86, 89
 - рімановий 84, 89
 - , паралельне перенесення вектора 86, 87

- Рівняння бігармонічне 112
 - геодезичної ріманового простору 85, 86
 - Ейлера–Лагранжа 9
 - , випадки повної інтегровності 16, 17
 - , крайові умови 9, 52, 58, 62, 80
 - , перші інтеграли 17, 18
 - , система 75, 79, 80
 - Ейлера–Остроградського 108
 - , крайові умови 111, 112
 - , узагальнення 109, 112
 - Ейлера–Пуассона 64, 71
 - , випадки пониження степеня 71
 - , крайові умови 64, 65, 70, 73, 74
 - коливаний *див.* Коливання...
 - Лапласа 109, 110
 - Ньютона 20
 - Пуассона 111
 - руху Ейлера–Лагранжа 19, 79
 - Штурма–Ліувіллія 46, 63, 99
 - , крайові умови 46, 99

- Сила узагальнена 18
- Символи Кристоффеля другого роду 86
 - першого роду 86

- Тензор метричний 84, 89
 - Рімана–Кристоффеля 88
 - Річчі 89

Теорема Ейлера 90
 – Ейлера–Лагранжа 10
 – – – узагальнена 76
 – Ейлера–Пуассона 70
 – Лагранжа–Діріхле 31
 – Остроградського–Гаусса (двовимірна) 108
 – Томсона 31, 110
 Траєкторія руху космічних тіл 40
 – – точки в однорідному полі тяжіння 37, 38
 – – – в полі центральних сил 39
 – – – в стаціонарному потенціальному полі 37
 – – – зарядженої 40
 – – – по гладкій поверхні 83

Умова екстремуму достатня 43, 45, 48, 49
 – – необхідна, функціонал Больца 62
 – – – , – від декількох функцій *див.* Рівняння Ейлера–Лагранжа, система...
 – – – , – від просторової кривої *див.* Рівняння Ейлера–Лагранжа, система...
 – – – , – від функції багатьох змінних *див.* Рівняння Ейлера–Остроградського...
 – – – , – від функції та її вищих похідних *див.* Рівняння Ейлера–Пуассона...
 – – – , – найпростішого типу *див.* Рівняння Ейлера–Лагранжа...
 – – умовного 90, 91, 101, 103
 Умова крайова (*також див.* Рівняння...)

– – , задача Больца 62
 – – , задача Штурма–Ліувілля 46, 99
 – – , закріплення жорстке 9, 51, 64, 69, 70, 79

– – , закріплення пружне 61, 119, 120
 – – , закріплення шарнірне 65, 69
 – – , ковзання вільне по вертикалі 52, 65, 73, 74, 79, 111
 – – , ковзання вільне по гладкій кривій 58, 80
 – – , ковзання вільне у площині 60, 70, 79, 80
 – – , означення 51
 – – , рівняння коливань *див.* Коливання...
 – Лежандра посилена 43, 49
 – ортогональності кривих 59, 81
 – початкова 19
 – рівноваги 31
 – трансверсальності 58, 80
 – Якобі посилена 49

Функціонал Больца 61
 – від декількох функцій 75
 – – просторової кривої 75
 – – функції багатьох змінних 107, 109, 112
 – – функції та її вищих похідних 63, 64, 70, 112
 – дії 19, 113, 115, 119, 121
 – – укороченої 37, 83
 – , екстремум *див.* Екстремум функціонала...
 – найпростішого типу 8
 – , область визначення 6
 – , означення 5
 Функція власна крайової задачі Штурма–Ліувілля 46, 47
 – Лагранжа 18
 – невизначена Лагранжа 101, 104
 – теплова 31

Циклоїда 25, 26

Числення варіаційне, основна задача 6

Швидкість узагальнена 18

Зміст

Передмова.....	3
1. НАЙПРОСТІША ЗАДАЧА ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ	
1.1. Поняття функціонала.....	5
1.2. Основна задача варіаційного числення.....	6
1.3. Необхідна умова існування екстремуму функціонала. Теорема Ейлера-Лагранжа.....	8
1.4. Функціональна похідна. Інваріантність рівняння Ейлера–Лагранжа відносно перетворення координат.....	13
1.5. Випадки повної інтегровності та перші інтеграли рівняння Ейлера-Лагранжа..	15
1.6. Екстремальні принципи у фізиці.....	30
1.7. Достатня умова мінімуму.....	41
2. УЗАГАЛЬНЕННЯ НАЙПРОСТІШОЇ ВАРІАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ	
2.1. Крайові умови.....	51
2.2. Умови трансверсальності.....	57
2.3. Задача Больца.....	61
2.4. Функціонали, які залежать від функції та її вищих похідних.....	63
2.5. Просторові задачі.....	74
2.6. Геодезичні.....	82
3. ЗАДАЧІ НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ	
3.1. Ізопериметрична задача.....	90
3.2. Задача Лагранжа.....	100
4. КОЛИВАННЯ СИСТЕМ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	
4.1. Функціонали від функцій багатьох змінних. Рівняння Ейлера-Остроградського.....	107
4.2. Рівняння малих коливань систем із розподіленими параметрами.....	112
Література.....	123
Предметний покажчик.....	124

Адамян В. М., Сушко М. Я.

A281 Варіаційне числення: Навч. посіб. для студентів фіз. спеціальностей ун-тів. –
Одеса: Астропринт, 2005. – 128 с.
ISBN 966–318–340–3

Посібник створено на базі частини лекційного курсу, що неодноразово читався студентам фізичного факультету Одеського національного університету. Він містить виклад основних ідей і методів варіаційного числення в обсязі, достатньому для їх подальшого застосування в курсах і спецкурсах із теоретичної фізики. Наводиться велика кількість завдань різного рівня складності, частину з яких можна використати в якості змістовних доповнень до курсів із класичної механіки, оптики, механіки неперервних середовищ, тензорного аналізу.

Посібник розраховано на студентів та аспірантів фізико-математичних та інженерно-фізичних спеціальностей університетів.

A $\frac{1602070200 - 089}{318 - 2005}$ Без оголош.

ББК 22.161.8я73

УДК 517.972/974(075)

Навчальне видання

**АДАМЯН Вадим Мовсесович
СУШКО Мирослав Ярославович**

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчальний посібник для студентів
фізичних спеціальностей університетів

Зав. редакцією *Т. М. Забанова*
Голов. редактор *Ж. Б. Мельниченко*
Технічні редактори *Р. М. Кучинська,*
Д. М. Островеров