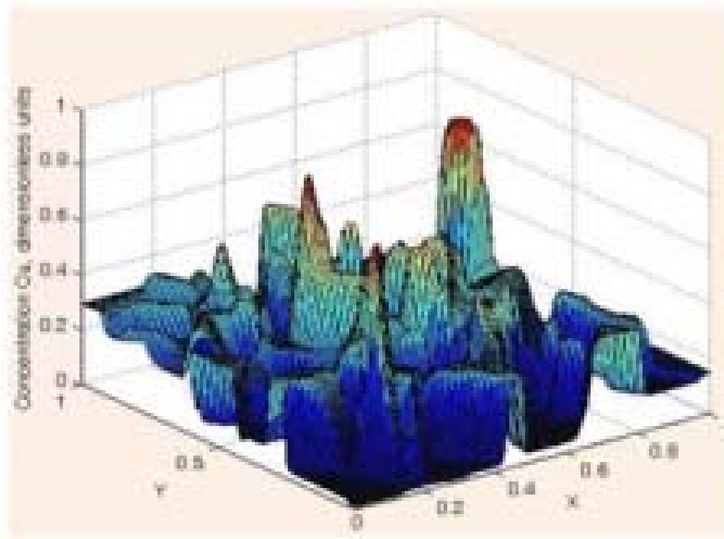


Комп'ютерне моделювання задач прикладної математики

Динамічні системи

Лабораторна робота №3

1. Одне рівняння

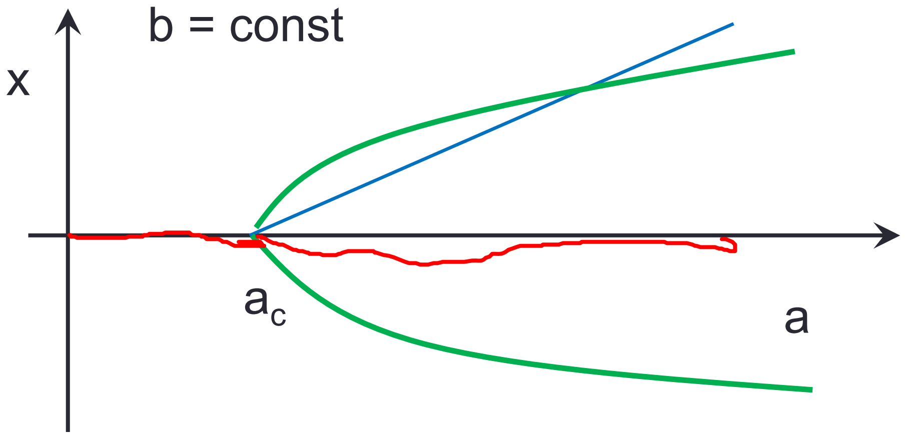
Стаціонарні стани

Динамічне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x, a, b)$$

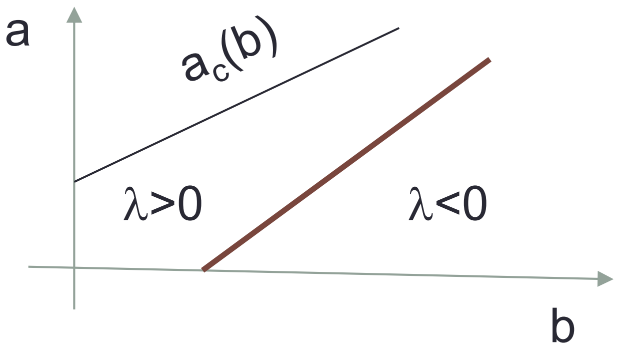
Стаціонарні стани

$$f(x) = 0$$



1. Одне рівняння

Стійкість стаціонарних станів



Розкладаємо у ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \cdots;$$

Розв'язок

$$\delta x \propto \exp(\lambda t): \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt} = \lambda \cdot \delta x; \qquad f(x_i) = 0$$

Характеристичне рівняння

$$\delta x = (x - x_i)$$

$$\lambda \cdot \delta x = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x \Rightarrow \boxed{\lambda = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}}$$

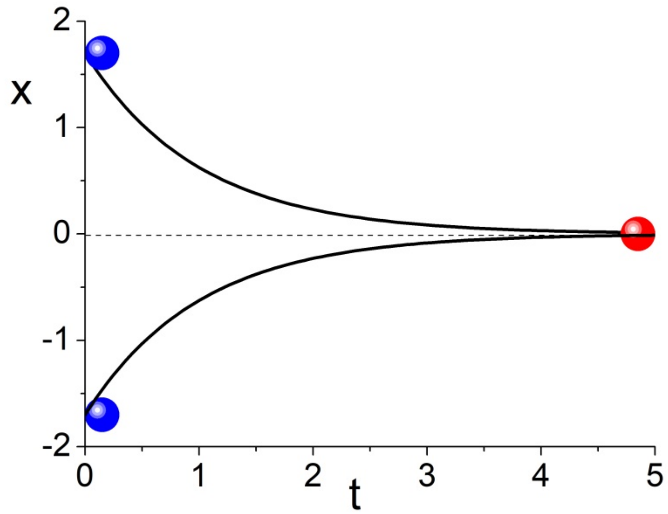
$\lambda < 0$ – стійкий стан

$\lambda > 0$ – нестійкий стан

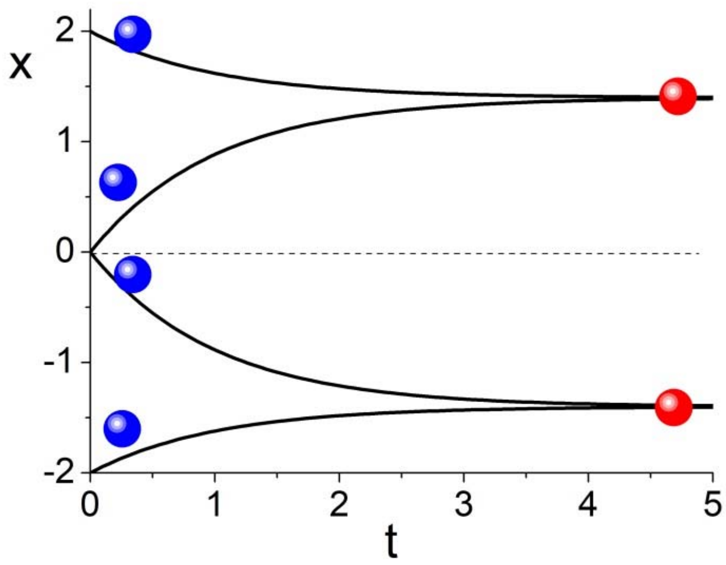
1. Одне рівняння

Еволюція системи

a, b, коли один стаціонарний стан



a, b, коли два/три стаціонарні стани



1. Одне рівняння

Завдання

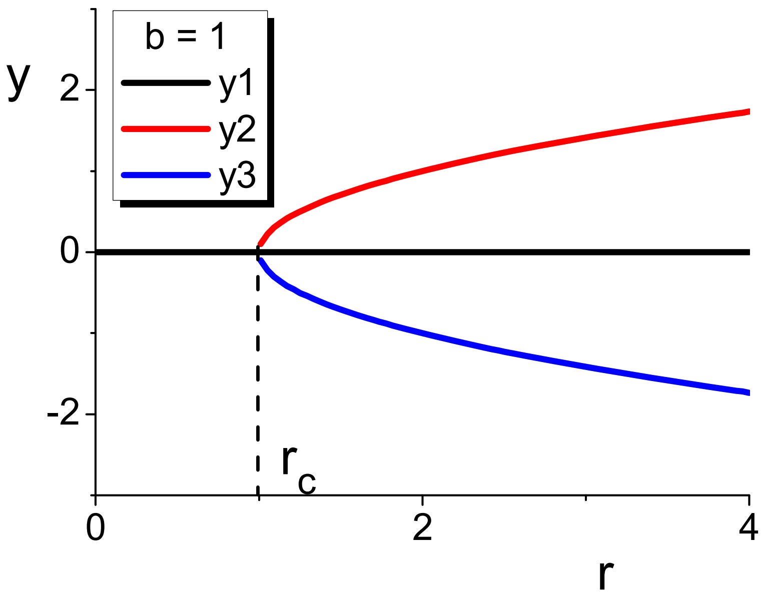
$$1)\begin{cases}\tau_x \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x)\\ \tau_y \dfrac{dy}{dt} = x(r - z) - y\\ \tau_z \dfrac{dz}{dt} = xy - bz\end{cases} \qquad 2)\begin{cases}\tau_x \dfrac{dx}{dt} = -y - z\\ \tau_y \dfrac{dy}{dt} = x + ay\\ \tau_z \dfrac{dz}{dt} = b + z(x - c)\end{cases}$$

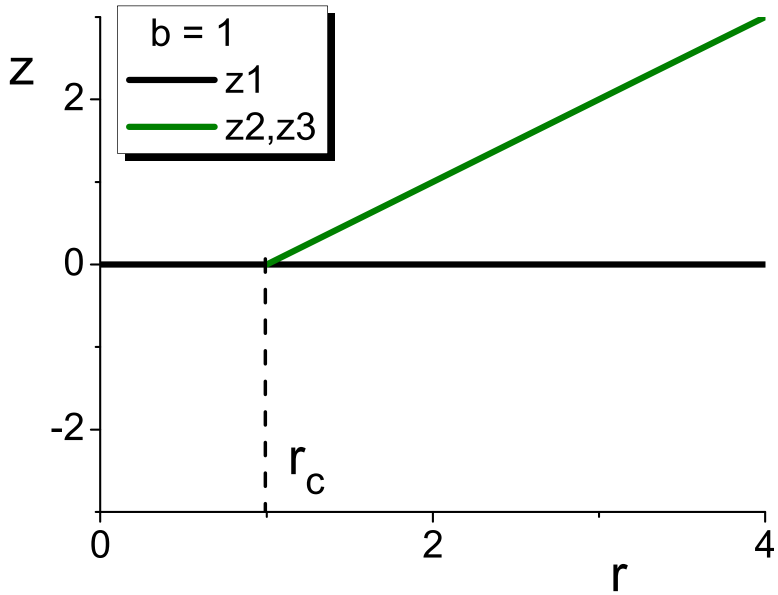
1-4: система 1) при $\tau_x = \tau_z = 0$, sigma = 1
5-8: система 1) при $\tau_y = \tau_z = 0, sigma = 1$
9-12: система 2) при $\tau_x = \tau_y = 0$
13-16: система 2) при $\tau_x = \tau_z = 0$
17-20: система 2) при $\tau_y = \tau_z = 0$

2.Системи нелінійних рівнянь

- $$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, z, b, r) \\ \frac{dz}{dt} = g(y, z, b, r) \end{cases}$$

Стаціонарні стани: $f(y, z) = 0; g(y, z) = 0$





2.Системи нелінійних рівнянь

Стійкість стаціонарних станів:

Матриця Якобі

$$\delta y \propto \exp(\lambda_1 t)$$
$$\delta z \propto \exp(\lambda_2 t)$$

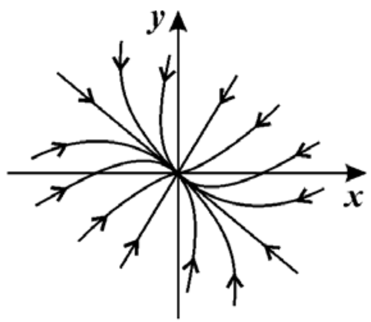
$$M = \begin{pmatrix} \left.\frac{df(y,z)}{dy}\right|_{y_0,z_0} - \lambda & \left.\frac{df(y,z)}{dz}\right|_{y_0,z_0} \\ \left.\frac{dg(y,z)}{dy}\right|_{y_0,z_0} & \left.\frac{dg(y,z)}{dz}\right|_{y_0,z_0} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = 0 \to \lambda$$

2.Системи нелінійних рівнянь

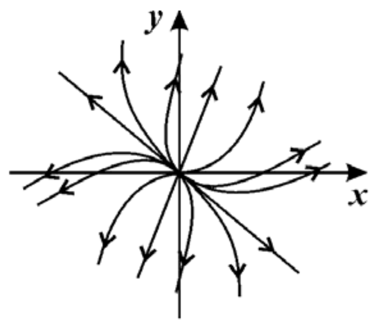
Характеристичне рівняння і типи стаціонарних точок

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$



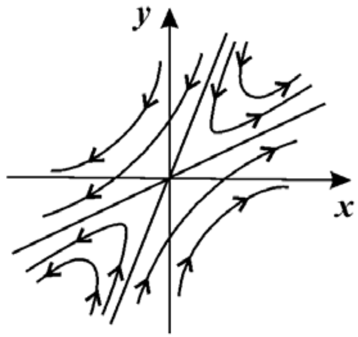
Стійкий вузол

$\lambda_1, \ \lambda_2$ дійсні та від'ємні



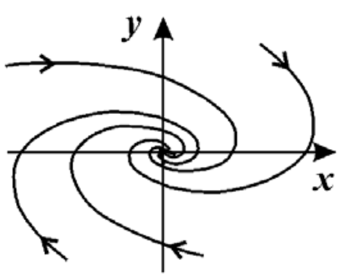
Нестійкий вузол

$\lambda_1, \ \lambda_2$ дійсні та додатні



Сідло

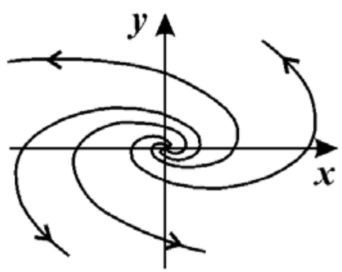
$\lambda_1, \ \lambda_2$ - дійсні різних знаків



Стійкий фокус

$\lambda_1, \ \lambda_2$ - комплексні

Re $\lambda_{1,2} < 0$



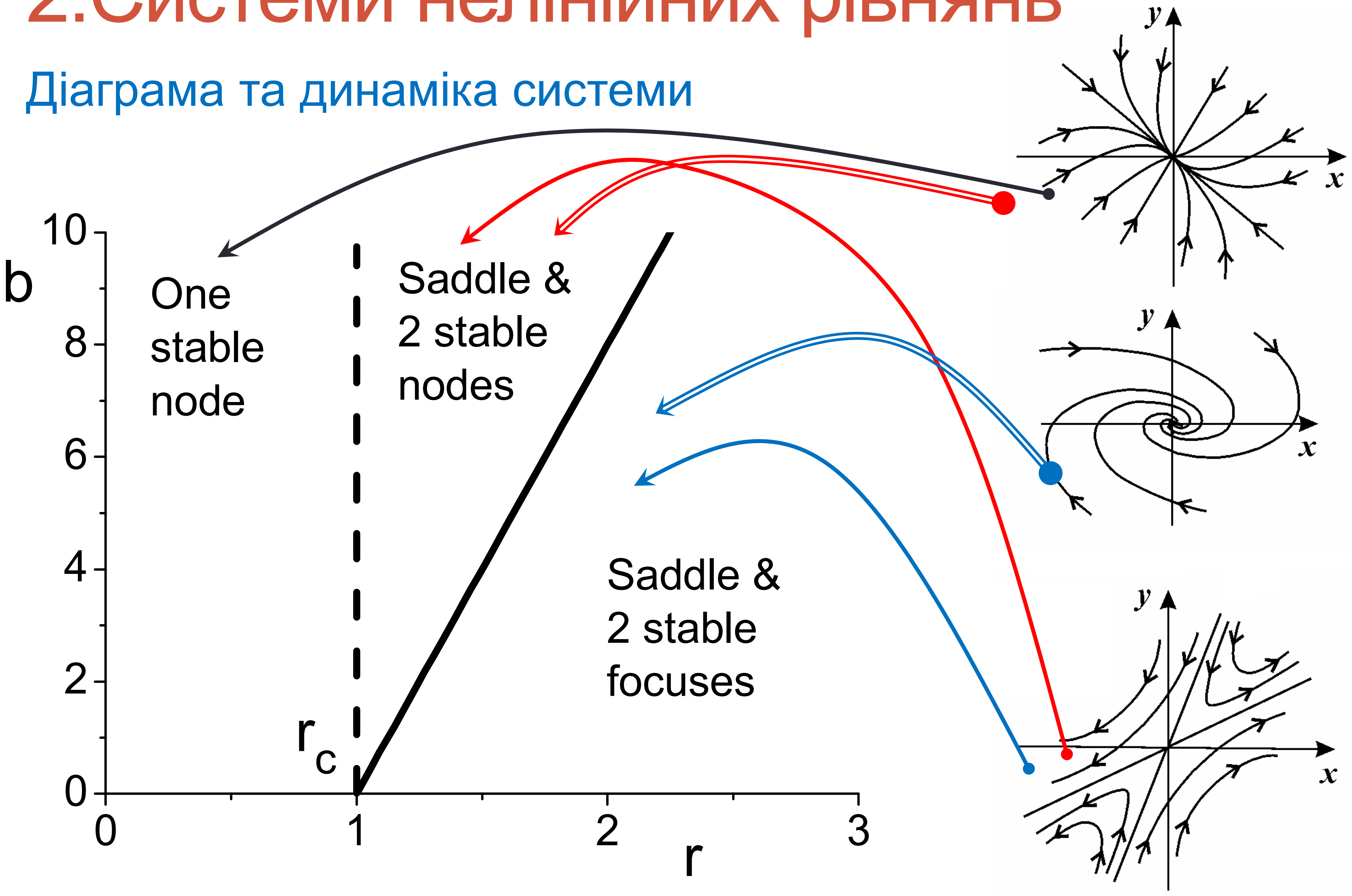
Нестійкий фокус

$\lambda_1, \ \lambda_2$ - комплексні

Re $\lambda_{1,2} > 0$

2.Системи нелінійних рівнянь

Діаграма та динаміка системи



2. Одне рівняння

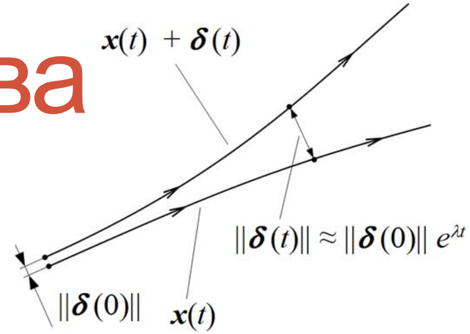
Завдання

$$1)\begin{cases} \tau_x \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \tau_y \dfrac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \tau_z \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} \tau_x \dfrac{dx}{dt} = -y - z \\ \tau_y \dfrac{dy}{dt} = x + ay \\ \tau_z \dfrac{dz}{dt} = b + z(x - r) \end{cases}$$

1-4: система 1) при $\tau_y = 0$
5-8: система 1) при $\tau_z = 0$
9-12: система 2) при $\tau_x = 0$
13-16: система 2) при $\tau_y = 0$
17-20: система 2) при $\tau_z = 0$

3. Карта показників Ляпунова



Алгоритм

Розглянемо алгоритм обчислення старшого показника Ляпунова.

$\boxed{1}$ Отримуємо чисельний розв'язок динамічних рівнянь на інтервалі часу, який є достатнім для того, щоб траєкторія система вийшла на атрактор. У результаті одержуємо деяку точку фазового простору $\overrightarrow{x}(0)$, яку будемо вважати за вихідну.

$\boxed{2}$ Розраховуємо траєкторію, що виходить із точки $\overrightarrow{x}(0)$, та збурену траєкторію, що стартує з точки $\overrightarrow{x}(0)+\overrightarrow{\delta x}_0$. При цьому норма $||\overrightarrow{\delta x}_0|| = \varepsilon$. Для цього знаходимо чисельний розв'язок системи на інтервалі часу T і отримуємо вектор стану $\overrightarrow{x}_1 \equiv \overrightarrow{x}(T)$ і його збурення $\overrightarrow{\delta x}_1$ у даний момент часу. Відношення $||\overrightarrow{\delta x}_1||/\varepsilon$ характеризує зміну норми вектора збурення за час T.

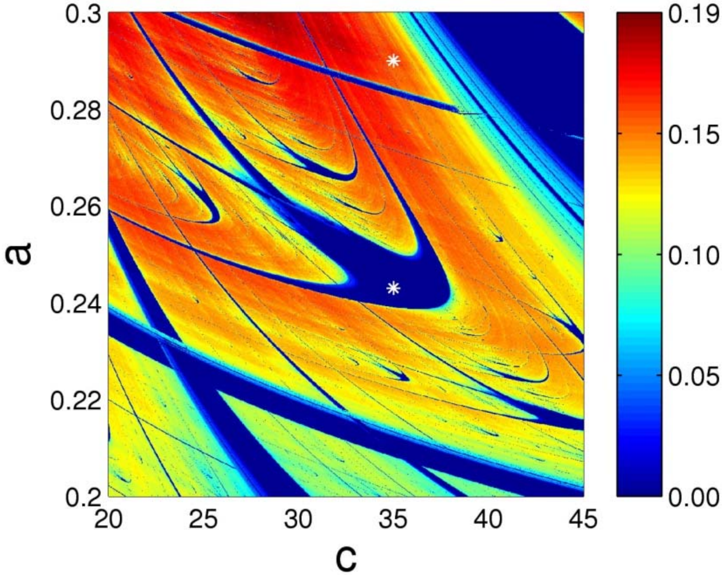
$\boxed{3}$ Перевизначимо цей вектор так, щоб його напрямок залишився тим самим, а норма дорівнювала вихідному значенню ε, а саме

$$\overrightarrow{\delta x}_1 = \varepsilon \overrightarrow{\delta x}_1 / ||\overrightarrow{\delta x}_1||.$$

Виконуємо розв'язання на наступному інтервалі часу T, узявши за початкову точку та початкове збурення $\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_1$ та $\overrightarrow{\delta x}_0 = \overrightarrow{\delta x}_1$ відповідно (пункт 2). Далі процес триває. Після достатньої кількості ітерацій N переходимо до пункту 4.

$\boxed{4}$ Розраховуємо старший показник Ляпунова:

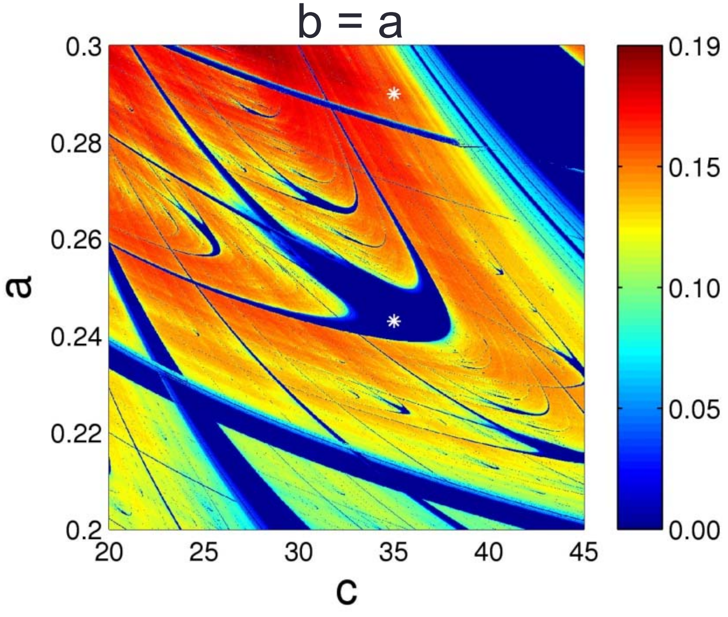
$$\lambda \simeq \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{||\overrightarrow{\delta x}_i||}{\varepsilon}.$$

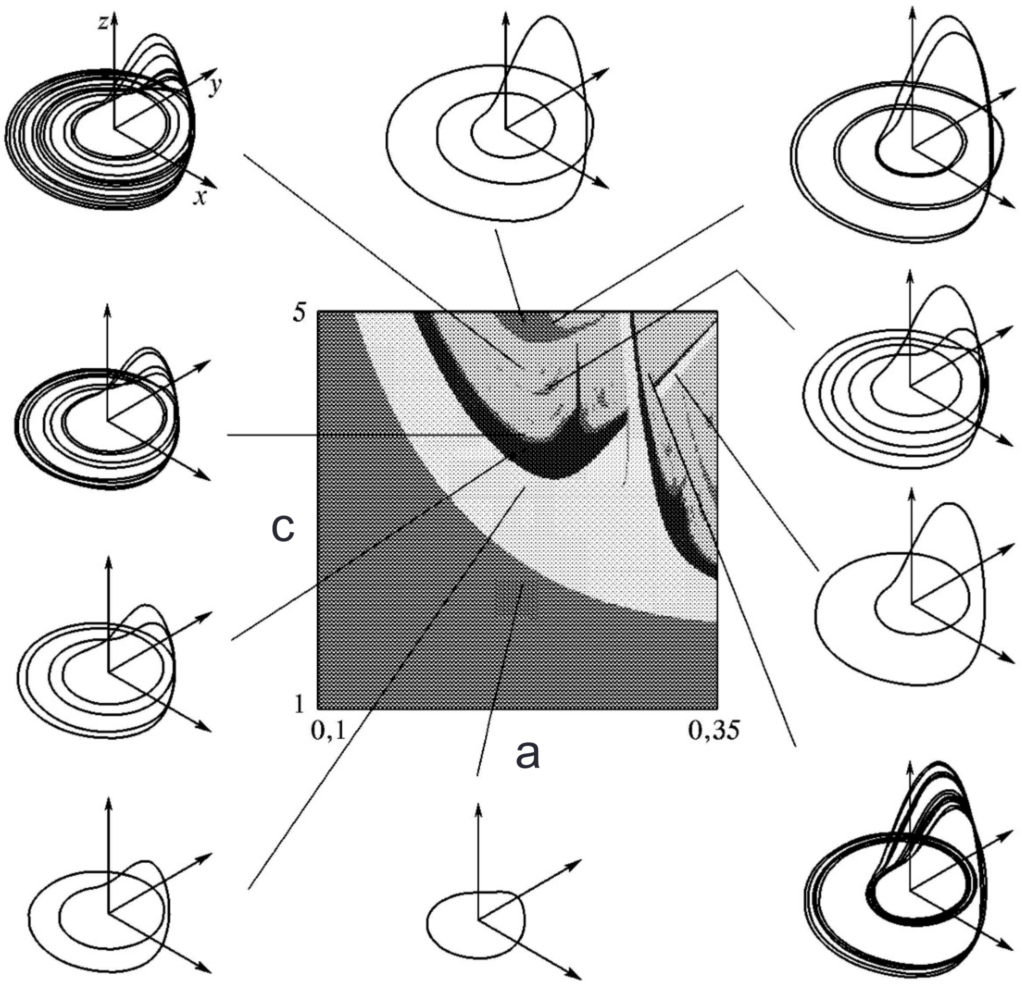


3. Карта показників Ляпунова

Система Реслера

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ay \\ \dfrac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$





3. Карта показників Ляпунова

Завдання

1) $\dot{x} = -z, \quad \dot{y} = -x^2 - y, \quad \dot{z} = \alpha + \beta x + y,$

2) $\dot{x} = -z, \quad \dot{y} = x - y, \quad \dot{z} = \alpha x + y^2 + \beta z,$

3) $\dot{x} = -x - \alpha y, \quad \dot{y} = x + z^2, \quad \dot{z} = \beta + x,$

4) $\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x, \quad \dot{z} = \alpha(y - y^2) - \beta z$

1-5: система 1)
6-10: система 2)
11-15: система 3)
16-20: система 4)