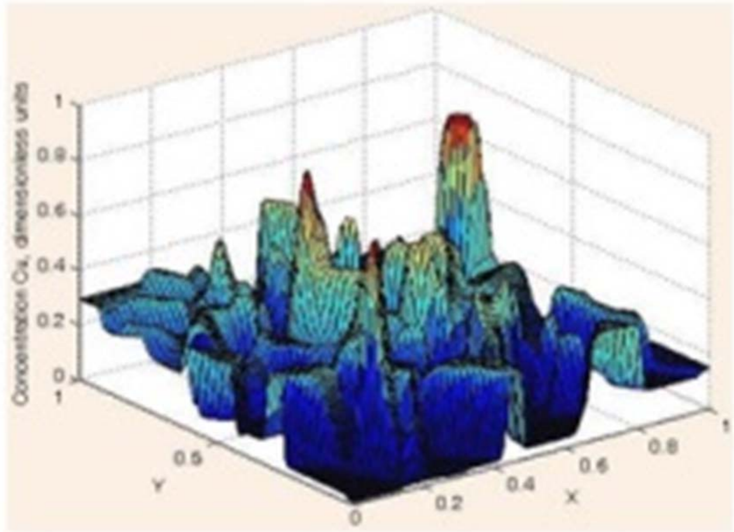


Комп'ютерне моделювання задач прикладної математики

Властивості моделі.
Однорідні динамічні системи.

Лекція 2

Точність моделі

Похибки моделювання класифікують за джерелами походження:

- Методичні похибки можуть бути викликані нехтуванням певними впливовими факторами, помилками у виборі виду функціональної залежності, невідповідністю способу отримання результату моделювання особливостям моделі, неправильним вибором типу моделі тощо.
- Обчислювальні похибки викликані особливостями алгоритму отримання результату. При великій кількості послідовних обчислень похибка накопичується і може досягати значної величини. Такі ситуації виникають при розв'язанні диференціальних рівнянь, особливо у частинних похідних.
- Похибки від невизначеності початкових даних відіграють значну роль при використанні алгоритмів, які мають низьку стійкість. Так, наприклад, при обчисленні похідної різницевим методом похибка результату може значно перевищувати похибки початкових даних.

Види похибок

- абсолютна похибка $\Delta_y = |y - y^*|$
- відносна похибка $\varepsilon_y = \Delta_y / y^*$
- максимальна похибка $\Delta_{y\,\max} = \max\limits_{x_i \in X} \left(\Delta_y\right)$

де $\overrightarrow{x_i} = (x_{1i}, \dots, x_{ni})$ – вектор вхідних величин об'єкта/моделі

X – множина можливих значень вектору вхідних величин

- середня похибка $\overline{\Delta_y} = 1/N \sum_{i=1}^{N} [y(x_i) - y^*(x_i)]$
- середня квадратична похибка

$$\sigma_y = \sqrt{1/N \sum_{i=1}^{N} [y(x_i) - y^*(x_i)]^2} = \sqrt{1/N \sum_{i=1}^{N} \left(\Delta_y\right)^2}$$

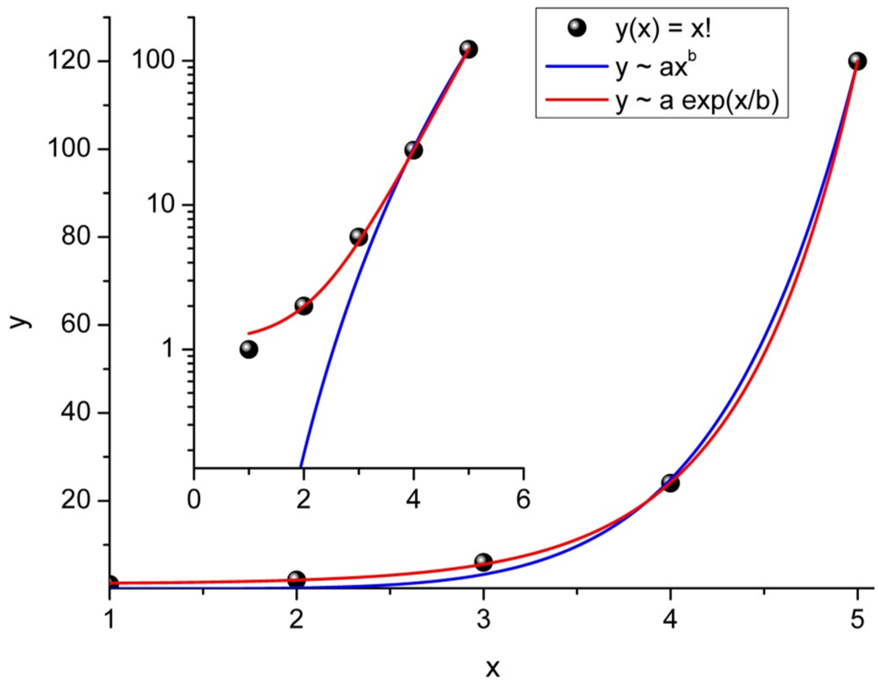
- зведена похибка $\delta_y = \sigma_y / (y_{max} - y_{min})$

$(y_{max} - y_{min})$ - діапазон значень параметра стану

- загальна середня квадратична похибка $\sigma_\Sigma = \sqrt{\sum_i \left(\delta_y^2\right)_i}$

Адекватність моделі

- Необхідна умова для переходу від дослідження об'єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об'єкт дослідження – вимога **адекватності моделі** і об'єкта.
- Адекватність - це правильне відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об'єкта, важливих для цілей даного дослідження.
- **Евристичні критерії** адекватності моделей:
  - Достатня точність за граничних умов моделювання і у особливих точках.
  - Достатня точність збігу з відомими випадками
  - Підвищення або, принаймні, збереження точності при врахуванні до даткових факторів



Методи числового диференціювання

- Постановка задачі

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

Похідна:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{\Delta x}, \Delta x = x_{n+1} - x_n$$

- Метод Єйлера

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + g(x_n, y_n)\Delta x$$

- Метод Рунге-Кутта

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = g(x_n, y_n)$$
$$k_2 = g(x_n + \Delta x/2\,, y_n + \Delta x/2\, k_1)$$
$$k_3 = g(x_n + \Delta x/2\,, y_n + \Delta x/2\, k_2)$$
$$k_2 = g(x_n + \Delta x, y_n + \Delta x k_3)$$

Задача охолодження філіжанки кави (чаю)

- Відвідувач зайшов у кафе та замовив чашку кави. Температура в приміщенні 18 С. Відвідувач вважає за комфортну температуру кави 50 С. Потрібно визначити час, необхідний для остигання свіжоприготовленої кави до комфортної для відвідувача температури.
- Математична модель

$$\frac{dT}{dt} = -r(T - T_s),\ T(0) = T_0$$

T_s - температура навколишнього середовища

T_0 - початкова температура кави

r – коефіцієнт теплопередачі

Час хв	T град	Час хв	T град
0	83.0	8.0	64.7
1.0	77.7	9.0	63.4
2.0	75.1	10.0	62.1
3.0	73.0	11.0	61.0
4.0	71.1	12.0	59.9
5.0	69.4	13.0	58.7
6.0	67.8	13.0	57.8
7.0	66.4	15.0	56.6

Задача охолодження філіжанки кави (чаю)

e^{-rt+C}

- Математична модель

$$\frac{dT}{dt} = -r(T - T_s), \; T(0) = T_0 \qquad (1)$$

$$\int \frac{dT}{T - T_s} = -\int r\,dt$$

- Пошук точного розв'язку

$$\frac{dT}{(T - T_s)} = -r\,dt \rightarrow ln(T - T_s) = -rt + C$$

$$(T - T_s) = exp(T_0 - rt) = exp(C)\,exp(-rt)$$

$$T = T_s + Aexp(-rt), \qquad A = exp(C)$$

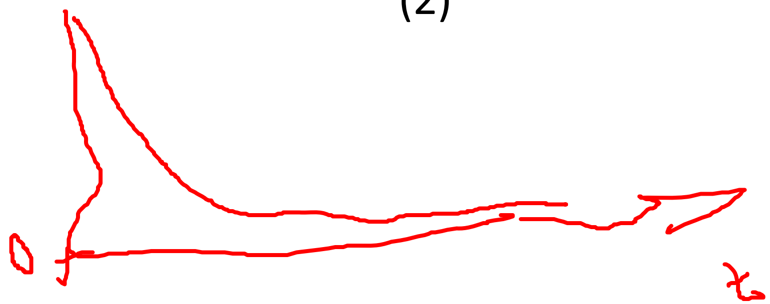
Початкові умови

$$T(0) = T_0 \;\rightarrow T_0 = T_s + A \;\rightarrow A = T_0 - T_s$$

Точний розв'язок

$$T = T_s - (T_s - T_0)exp(-rt) \qquad (2)$$

0



Задача охолодження філіжанки кави (чаю)

Програма досліджень.

1) Інший відвідувач замовив каву з вершками. Дослідити вид кривої остигання за умови, що додавання вершків зменшує температуру кави на 5 градусів.

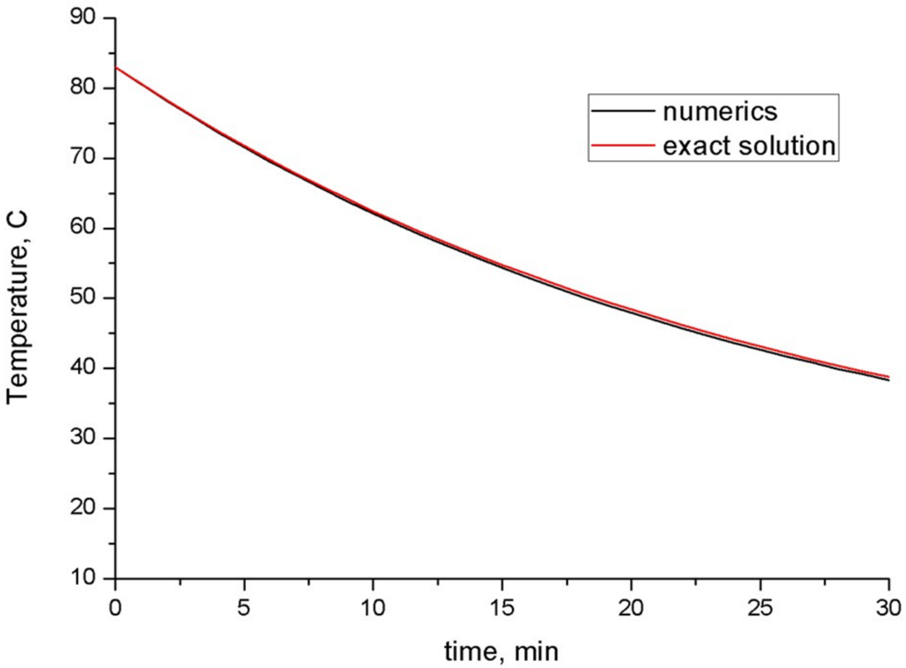
2) Дослідити випадок, коли вершки додають у каву через 3 хвилини після приготування. Зіставте з першим випадком. Якщо ви поспішаєте і п'єте каву з вершками, чи додаватимете ви вершки відразу або почекаєте кілька хвилин?

3) Припустимо, що вам налили каву в товщу чашку. Температура кави одразу впала на 10 градусів. Побудуйте криву остигання. З якої чашки ви надасте перевагу пити каву.

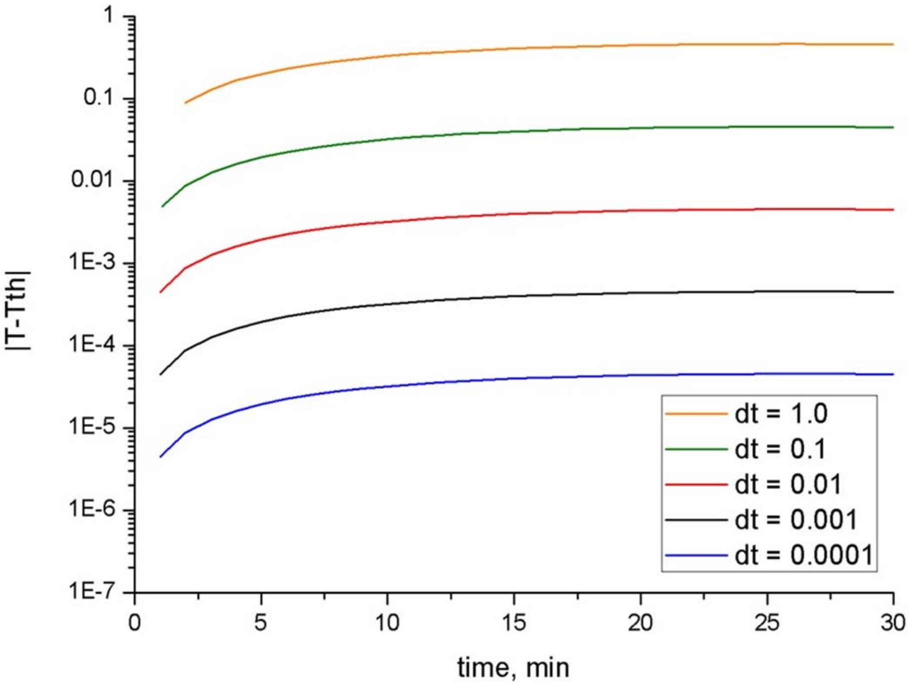
4) Припустимо, що інший відвідувач у спекотний літній час зайшов випити чашку кави. Температура в приміщенні 30 С. Побудуйте та проведіть аналіз кривої остигання.

5) Знайдіть час, необхідний для того, щоб різниця температур між температурою кави та кімнатною склала 1⁄(e≈0.37) від початкової. Цей час називається часом остигання або часом релаксації. Проаналізуйте, залежить час релаксації від початкової температури? Від температури довкілля?

Задача охолодження філіжанки кави (чаю)

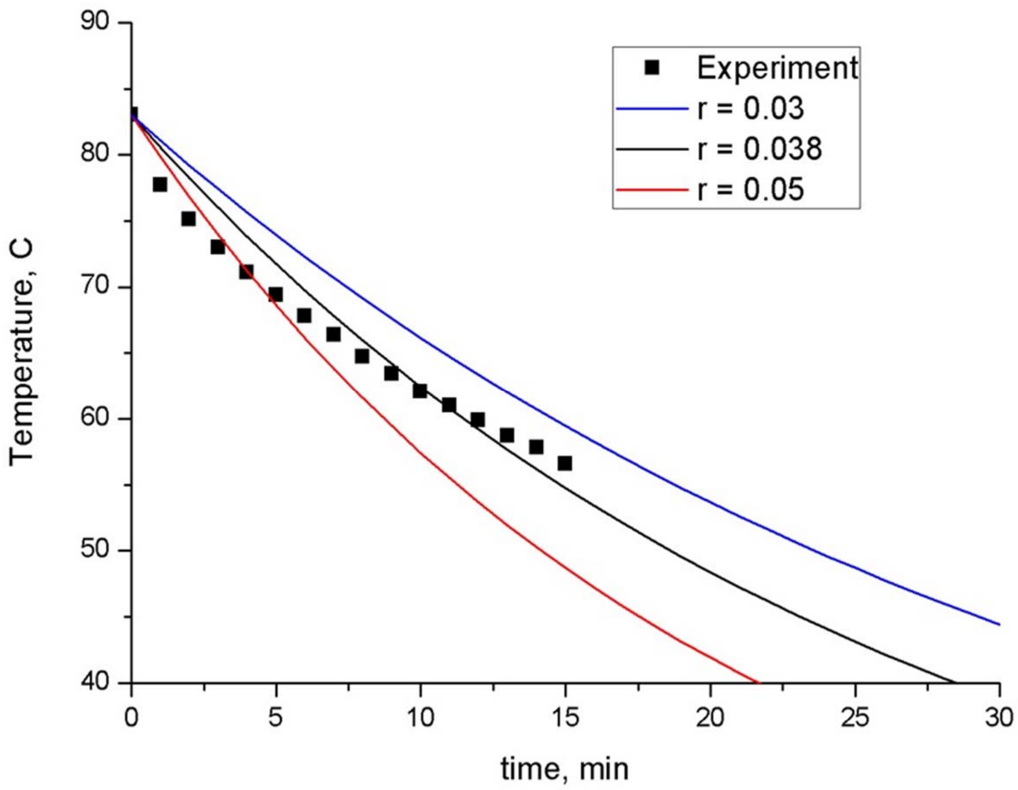


Залежність температури кави від часу: точний розв'язок та числове моделювання при $\Delta t = 1.0$



Залежність похибки обчислень від часу для різних значень кроку інтегрування Δt

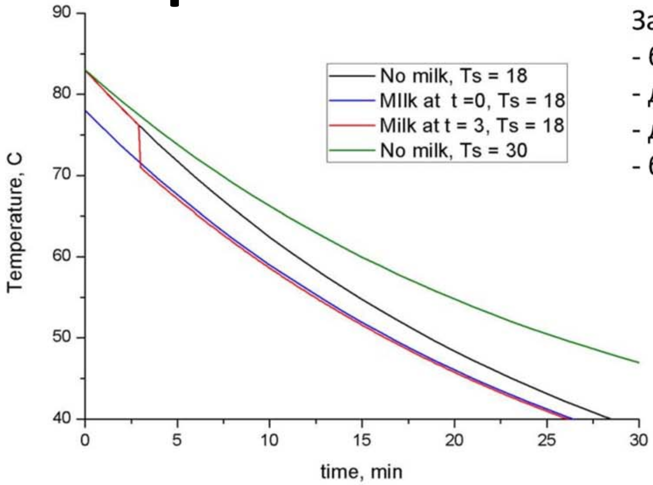
Задача охолодження філіжанки кави (чаю)



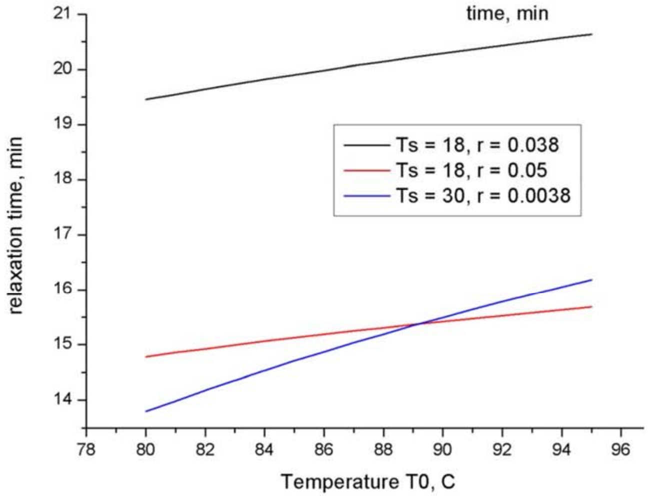
Час хв	T град	Час хв	T град
0	83.0	8.0	64.7
1.0	77.7	9.0	63.4
2.0	75.1	10.0	62.1
3.0	73.0	11.0	61.0
4.0	71.1	12.0	59.9
5.0	69.4	13.0	58.7
6.0	67.8	13.0	57.8
7.0	66.4	15.0	56.6

Залежність температури кави від часу
при різних значеннях коефіцієнту теплопередачі *r*
Порівняння з експериментальними даними взятими з таблиці

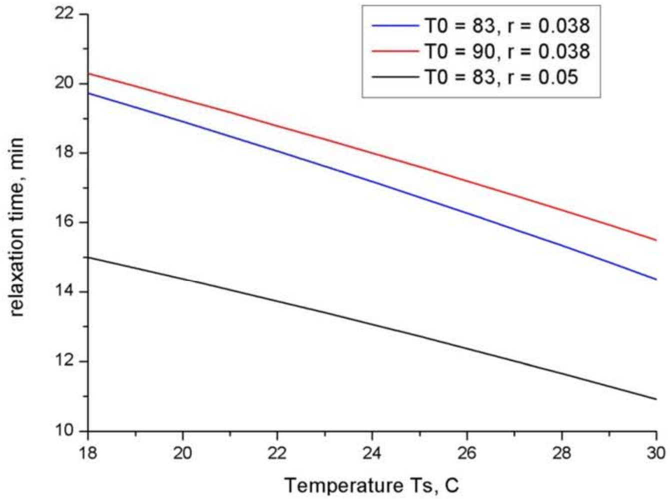
Задача охолодження філіжанки кави (чаю)



Залежність температури кави від часу при $\Delta t = 0.001$:
- без додавання молока,
- додавання молока одразу
- додавання молока через 3 хвилини
- більша температура середовища



Залежність часу вистигання (релаксації) від початкової температури T0 при $\Delta t = 0.001$ та різних значеннях температури середовища *Ts* та коефіцієнту теплопередачі *r*



Залежність часу вистигання (релаксації) від температури середовища *Ts* при $\Delta t = 0.001$ та різних значеннях початкової температури T0 та коефіцієнту теплопередачі *r*

Однорідні динамічні системи

Постановка задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \qquad x(0) = x_0$$

Потенціальні системи

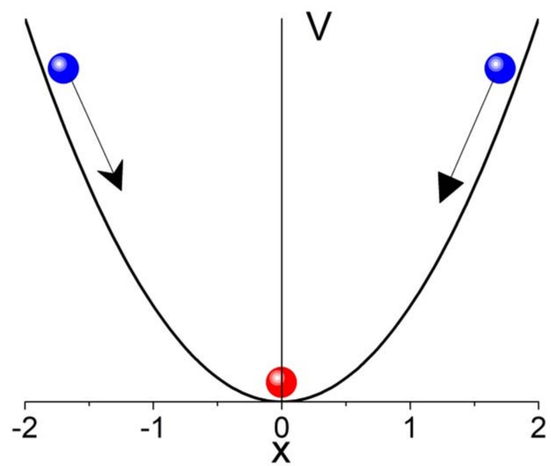
$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad f(x) = -\frac{dV}{dx}, \qquad x(0) = x_0$$

Стаціонарні стани

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$

Приклад:

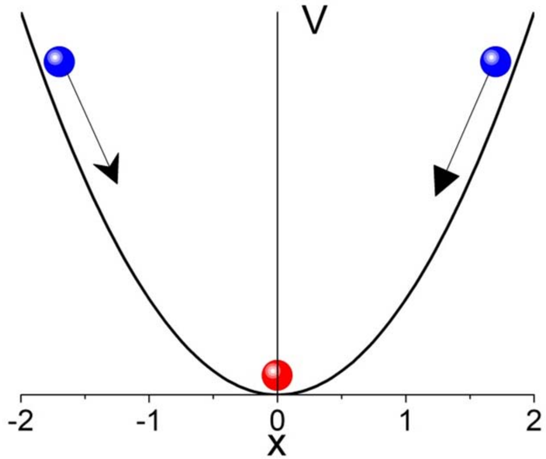
$$V(x) = x^2$$



Однорідні динамічні системи

Потенціальні системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad f(x) = -\frac{dV}{dx}, \qquad x(0) = x_0$$

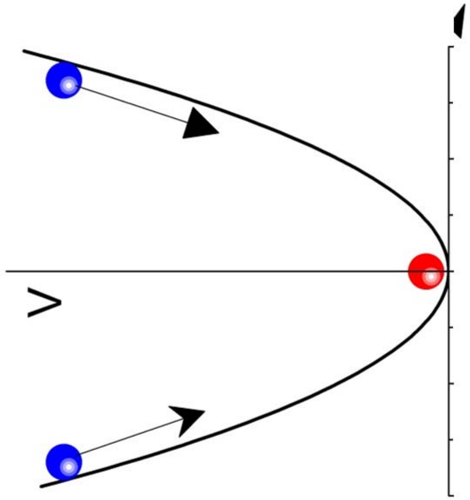


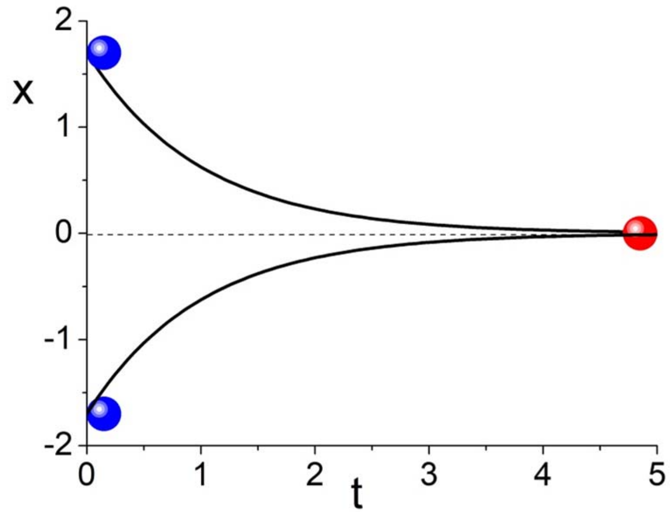
Стаціонарні стани

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$

Приклад:

$$V(x) = x^2$$

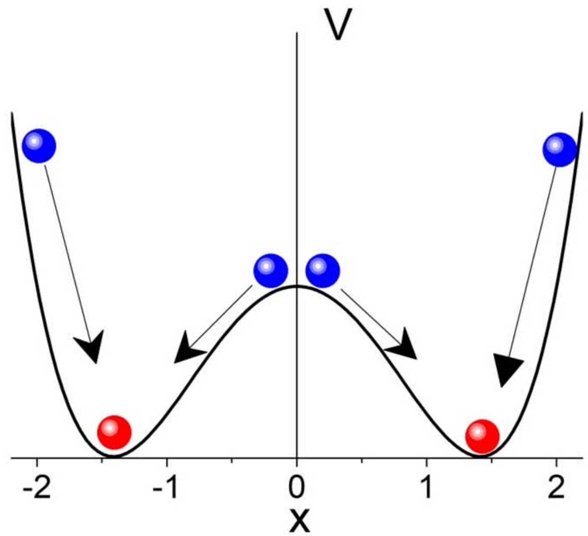




Однорідні динамічні системи

Потенціальні системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad f(x) = -\frac{dV}{dx}, \qquad x(0) = x_0$$

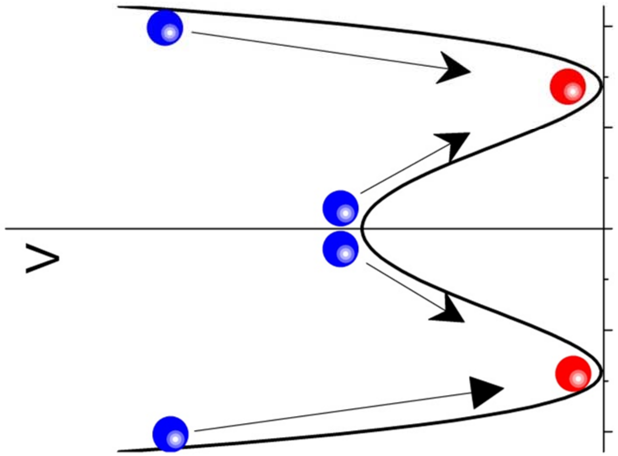


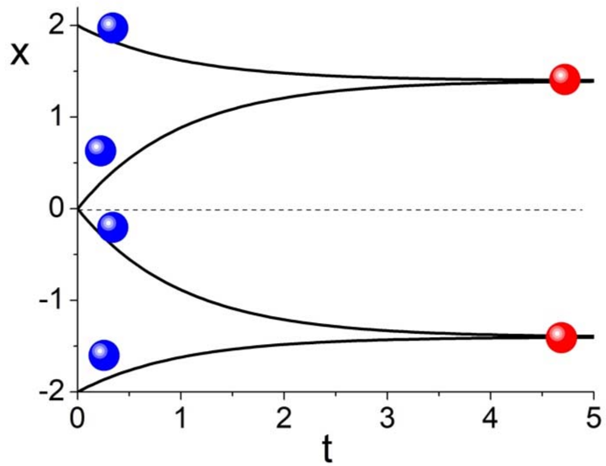
Стаціонарні стани

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$

Приклад:

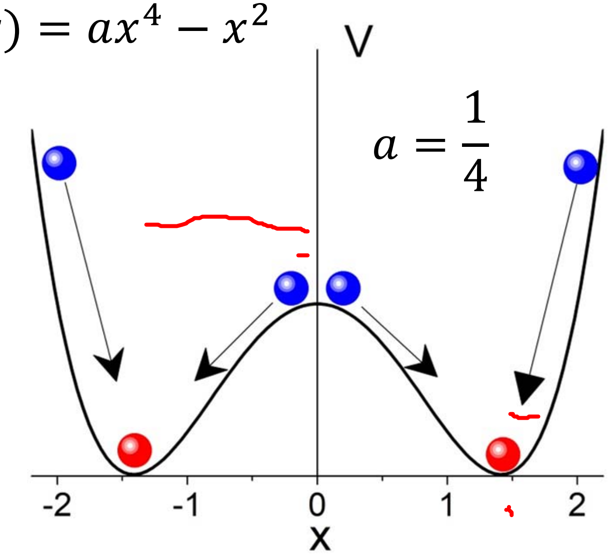
$$V(x) = ax^4 - x^2$$





Однорідні динамічні системи

$V(x) = ax^4 - x^2$



Потенціальні системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \qquad f(x) = -\frac{dV}{dx}, \qquad x(0) = x_0$$

Стаціонарні стани x_i

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \boxed{2x - 4ax^3} = 0 \Rightarrow x_1 = 0; \;\; x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Стійкість стаціонарних станів: $x \to x_i$

$$f(x) = \cancel{f(x_i)}^{\,0} + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \cdots; \qquad \delta x = (x - x_i)$$

$2 - 12ax^2$

$\Uparrow$

$x_i = 0$

Розв'язок

$$\delta x \propto \exp(\lambda t): \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d(\delta x)}{dt} = \lambda \cdot \delta x; \qquad f(x_i) = 0$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda \cdot \cancel{\delta x} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \cancel{\delta x} \Rightarrow \boxed{\lambda = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}}$$

$\lambda < 0$ – стійкий стан

$\lambda > 0$ – нестійкий стан

Дякую за увагу