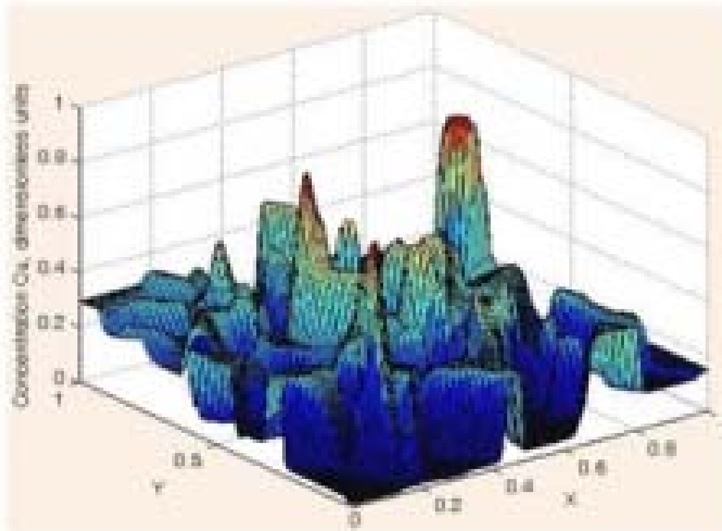


Комп'ютерне моделювання задач прикладної математики

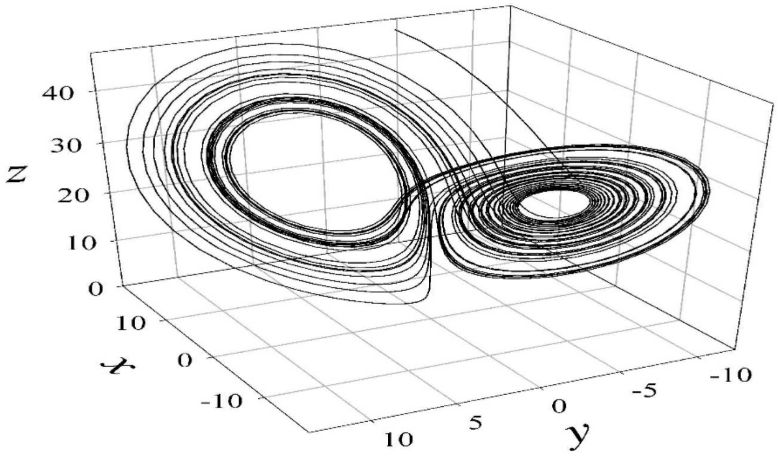
Динамічні системи

Лекція 11

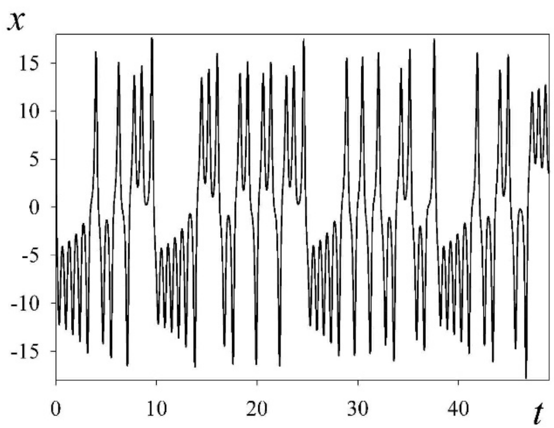
Системи нелінійних рівнянь

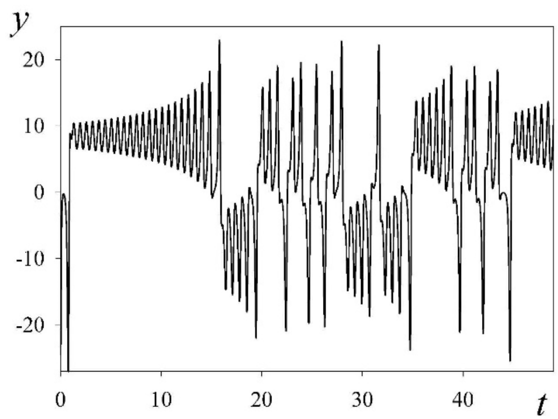
Однакові часи релаксації $\tau_x \approx \tau_y \approx \tau_z = 1$

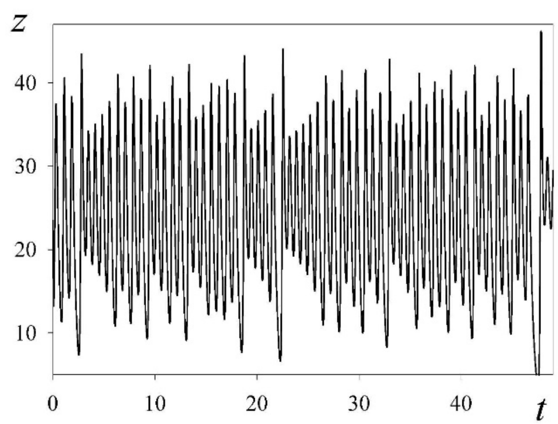
- Система Лоренца
- $$\begin{cases} \tau_x \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \tau_y \dfrac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \tau_z \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$



$\sigma = 10$
r = 28
b = 8/3







Системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \tau_x \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) = f(x, y, z) \\ \tau_y \dfrac{dy}{dt} = x(r - z) - y = g(x, y, z) \\ \tau_z \dfrac{dz}{dt} = xy - bz = h(x, y, z) \end{cases}$$

Стаціонарні стани:

$$\frac{dx}{dt} = 0; \frac{dy}{dt} = 0; \frac{dz}{dt} = 0 \rightarrow \{x_0, y_0, z_0\}$$

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \Rightarrow y = x \\ x(r - z) - y = 0 \Rightarrow x(r - z - 1) = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ z = r - 1 \end{Bmatrix} \\ xy - bz = 0 \Rightarrow x^2 = bz \Rightarrow x = \pm\sqrt{b(r - 1)} \end{cases}$$

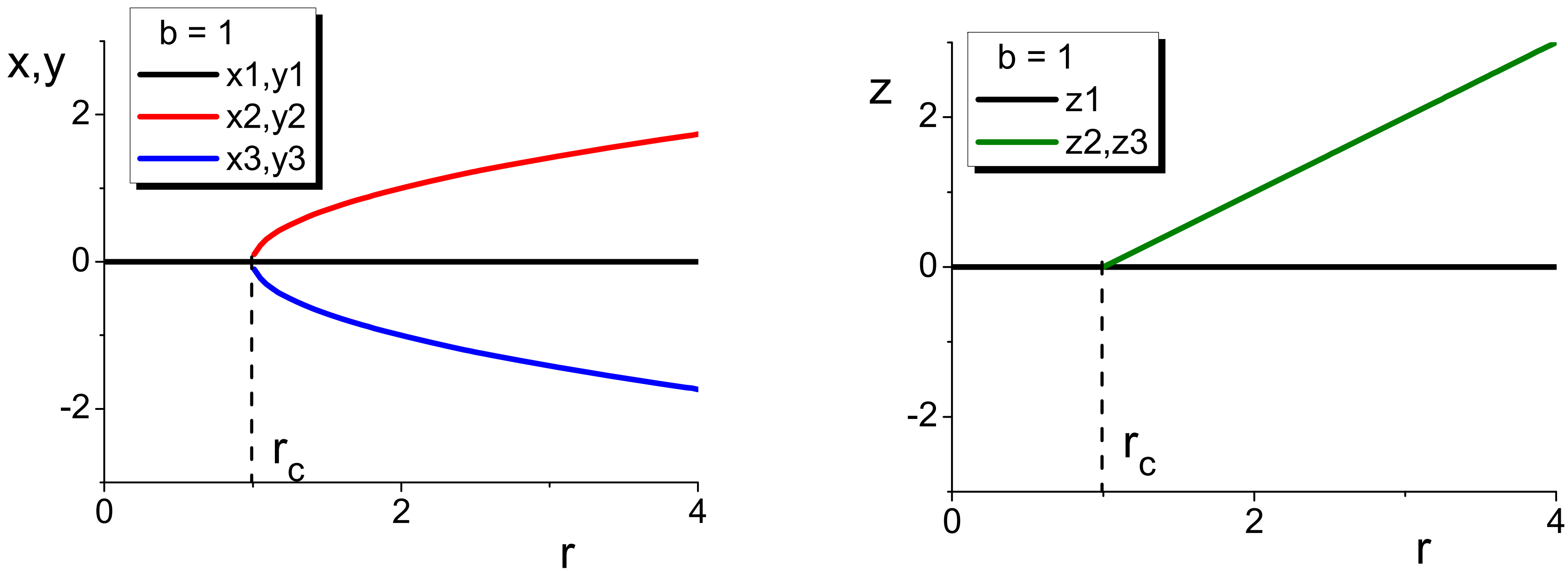
Стаціонарні стани

$$(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$$
$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\sqrt{b(r - 1)}, \sqrt{b(r - 1)}, r - 1\right)$$
$$(x_0, y_0, z_0) = \left(-\sqrt{b(r - 1)}, -\sqrt{b(r - 1)}, r - 1\right)$$

Системи нелінійних рівнянь

Стаціонарні стани

$$(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$$
$$(x_0, y_0, z_0) = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$$
$$(x_0, y_0, z_0) = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$$



Системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \tau_x \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y-x) = f(x,y,z) \\ \tau_y \dfrac{dy}{dt} = x(r-z) - y = g(x,y,z) \\ \tau_z \dfrac{dz}{dt} = xy - bz = h(x,y,z) \end{cases}$$

Стаціонарні стани:

$$\frac{dx}{dt} = 0; \frac{dy}{dt} = 0; \frac{dz}{dt} = 0 \rightarrow \{x_0, y_0, z_0\}$$

Матриця Якобі

$$M = \begin{pmatrix} \left.\dfrac{df(x,y,z)}{dx}\right|_{x_0 y_0, z_0} - \lambda & \left.\dfrac{df(x,y,z)}{dy}\right|_{x_0 y_0, z_0} & \left.\dfrac{df(x,y,z)}{dz}\right|_{x_0 y_0, z_0} \\ \left.\dfrac{dg(x,y,z)}{dx}\right|_{x_0 y_0, z_0} & \left.\dfrac{dg(x,y,z)}{dy}\right|_{x_0 y_0, z_0} - \lambda & \left.\dfrac{dg(x,y,z)}{dz}\right|_{x_0 y_0, z_0} \\ \left.\dfrac{dh(x,y,z)}{dx}\right|_{x_0 y_0, z_0} & \left.\dfrac{dh(x,y,z)}{dy}\right|_{x_0 y_0, z_0} & \left.\dfrac{dh(x,y,z)}{dz}\right|_{x_0 y_0, z_0} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = 0 \rightarrow A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0 \rightarrow \lambda(\sigma, r, b)$$

Системи нелінійних рівнянь

Характеристичне рівняння

$$A\Lambda^3 + B\Lambda^2 + C\Lambda + D = 0, \qquad X = X(\sigma, r, b), \qquad X = \{A, B, C, D\}$$

Показник стійкості (Ляпунова) $\Lambda = \lambda + i\varpi$

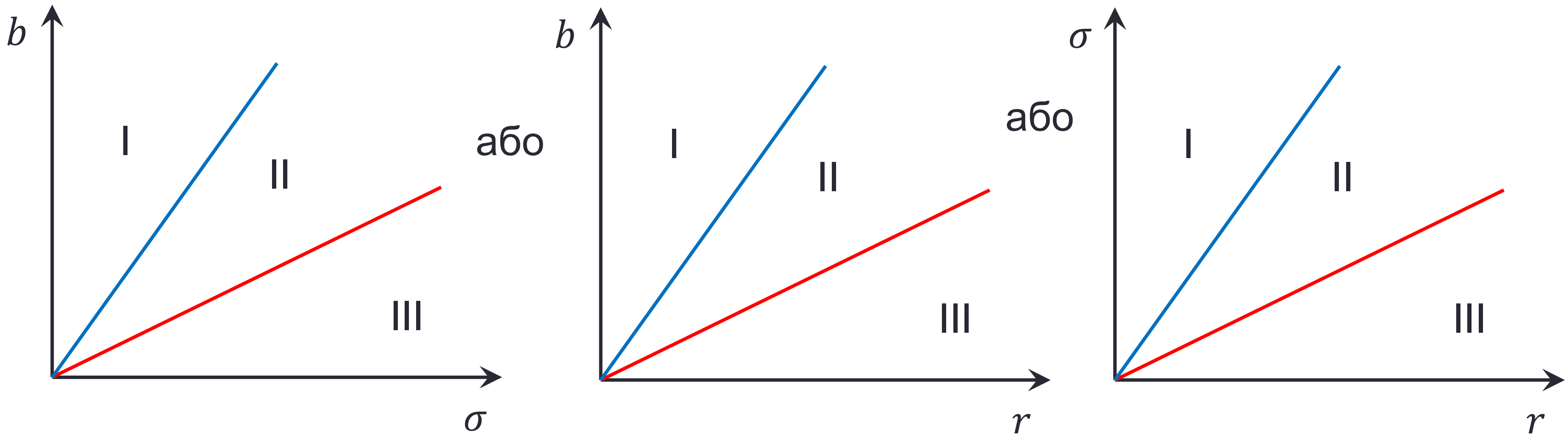
1. Реалізація безколивального режиму (вузол/сідло): $\Lambda = \lambda$
2. Реалізація нейтрального стану: $\Lambda = i\varpi$
3. Реалізація коливального режиму: $\Lambda = \lambda + i\varpi$

Системи нелінійних рівнянь

1. Реалізація безколивального режиму (вузол/сідло): $\Lambda = \lambda$

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D = 0, \qquad X = X(\sigma, r, b), \qquad X = \{A, B, C, D\}$$

$r = const$ $\qquad$ $\sigma = const$ $\qquad$ $b = const$



I – стійкий вузол: $\lambda_1 < 0; \lambda_2 < 0; \lambda_3 < 0$

II – нестійкий вузол: $\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0; \lambda_3 > 0$

III – сідло: $\lambda_i < 0; \lambda_{j,k} > 0$; або $\lambda_i > 0; \lambda_{j,k} < 0$

Системи нелінійних рівнянь

2. Реалізація нейтрального стану: $\Lambda = i\varpi$

$$A\Lambda^3 + B\Lambda^2 + C\Lambda + D = 0, \qquad X = X(\sigma, r, b), \qquad X = \{A, B, C, D\}$$

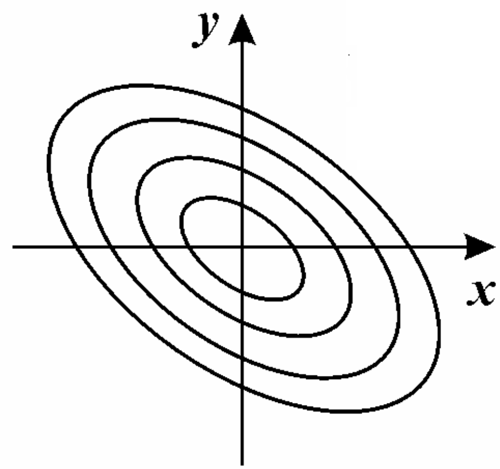
$\Lambda = i\omega$

$\Lambda^3 = -i\omega^3$

$\Lambda^2 = -\omega^2$

$\Lambda = i\omega$

$-\underline{i\omega^3 \cdot A} - \underline{B\omega^2} + \underline{iC\omega} + \underline{D} = 0.$



$$-i\omega^3 A + iC\omega = 0 \Rightarrow C = A\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{C}{A}$$

$$D - B\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{D}{B}$$

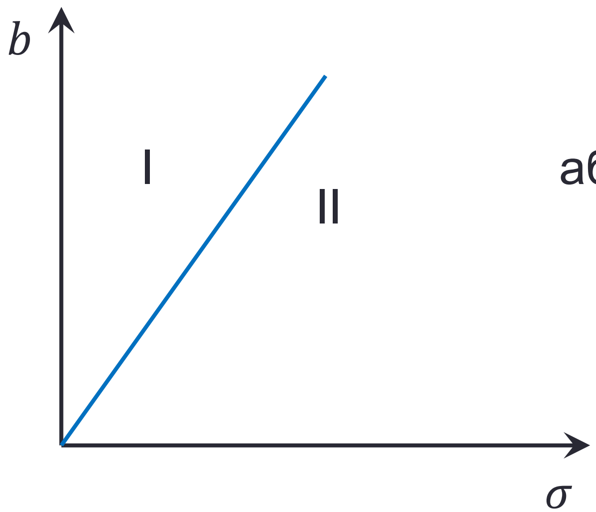
$$\frac{C}{A} = \frac{D}{B}$$

Системи нелінійних рівнянь

2. Реалізація нейтрального стану: $\Lambda = i\varpi$

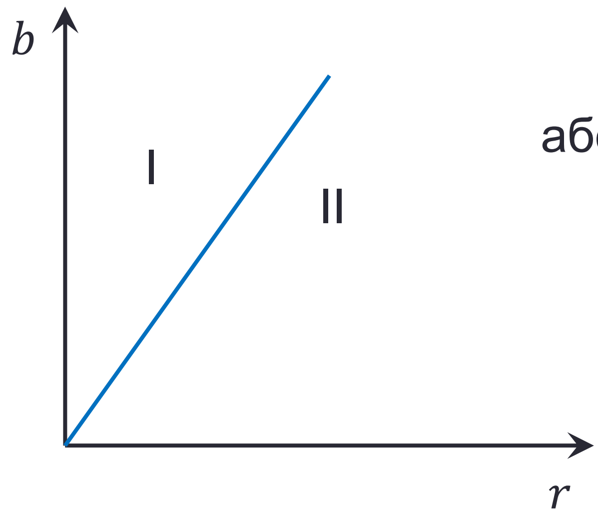
$$A\Lambda^3 + B\Lambda^2 + C\Lambda + D = 0, \qquad X = X(\sigma, r, b), \qquad X = \{A, B, C, D\}$$

$r = const$



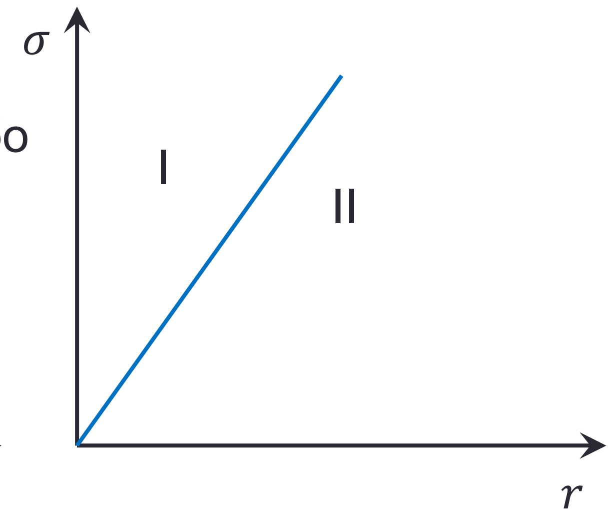
або

$\sigma = const$



або

$b = const$



I – існує центр

II – не існує центр

Системи нелінійних рівнянь

3. Реалізація коливального режиму: $\Lambda = \lambda + i\varpi$

$A\Lambda^3 + B\Lambda^2 + C\Lambda + D = 0,\qquad X = X(\sigma, r, b),\qquad X = \{A, B, C, D\}$

$$\Lambda^3 = (\lambda + i\omega)^3 = (\lambda + i\omega)(\lambda^2 + 2i\lambda\omega - \omega^2) =$$

$$= \lambda^3 + 2i\lambda^2\omega - \lambda\omega^2 + i\lambda^2\omega - 2\lambda\omega^2 - i\omega^3$$

$$\Lambda^2 = \lambda^2 + 2i\lambda\omega - \omega^2$$

$$\Lambda = \lambda + i\omega$$

$$A\left([\lambda^3 - 3\lambda\omega^2] + i[3\lambda^2\omega - \omega^3]\right) + B\left([\lambda^2 - \omega^2] + i[2\lambda\omega]\right) + C(\lambda + i\omega) + D = 0.$$

$$\begin{cases} A(\lambda^3 - 3\lambda\omega^2) + B(\lambda^2 - \omega^2) + C\lambda + D = 0 \\ A(3\lambda^2\omega - \omega^3) + B(2\lambda\omega) + C\omega = 0. \quad \Big| \div \omega \neq 0 \end{cases}$$

Системи нелінійних рівнянь

2. Реалізація коливального режиму: $\Lambda = \lambda + i\varpi$

$$A\Lambda^3 + B\Lambda^2 + C\Lambda + D = 0, \qquad X = X(\sigma, r, b), \qquad X = \{A, B, C, D\}$$

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D - 3A\lambda\omega^2 - B\omega^2 = 0.$$

$$A(3\lambda^2 - \omega^2) + 2B\lambda + C = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3A\lambda^2 - A\omega^2 + 2B\lambda + C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\omega^2 = 3A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0.$$

$$\omega^2 = \frac{1}{A}\left[3A\lambda^2 + 2B\lambda + C\right]$$

Системи нелінійних рівнянь

2. Реалізація коливального режиму: $\Lambda = \lambda + i\varpi$

$$A\Lambda^3 + B\Lambda^2 + C\Lambda + D = 0, \qquad X = X(\sigma, r, b), \qquad X = \{A, B, C, D\}$$

$$A\lambda^3 + B\lambda^2 + C\lambda + D - \left(3\lambda + \frac{B}{A}\right)\left(3A\lambda^2 + 2B\lambda + C\right) = 0$$

$$\left(3\lambda + \frac{B}{A}\right)\left(3A\lambda^2 + 2B\lambda + C\right) = 9A\lambda^3 + 6B\lambda^2 + 3C\lambda + 3B\lambda^2 + 2\frac{B^2}{A}\lambda + \frac{B\cdot C}{A}$$

$$\Rightarrow -8A\lambda^3 + (-8B)\lambda^2 + \left(-2C - \frac{2B^2}{A}\right)\lambda + \left(D - \frac{B\cdot C}{A}\right) = 0$$

Ц $A' = -8A$; $B' = -8B$; $C' = -2C - \frac{2B^2}{A}$; $D' = D - \frac{B\cdot C}{A}$

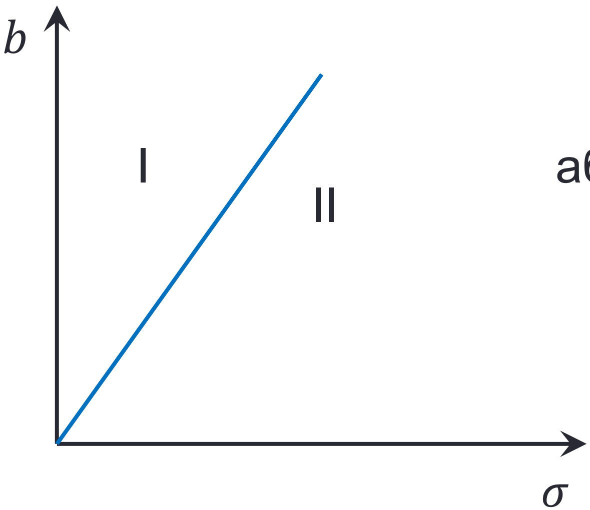
$$\Rightarrow A'\lambda^3 + B'\lambda^2 + C'\lambda + D' = 0.$$

Системи нелінійних рівнянь

2. Реалізація коливального режиму: $\Lambda = \lambda + i\varpi$

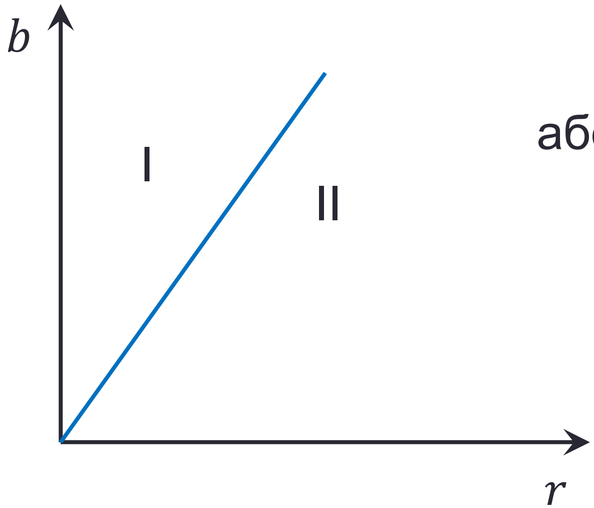
$$A\Lambda^3 + B\Lambda^2 + C\Lambda + D = 0, \qquad X = X(\sigma, r, b), \qquad X = \{A, B, C, D\}$$

$r = const$



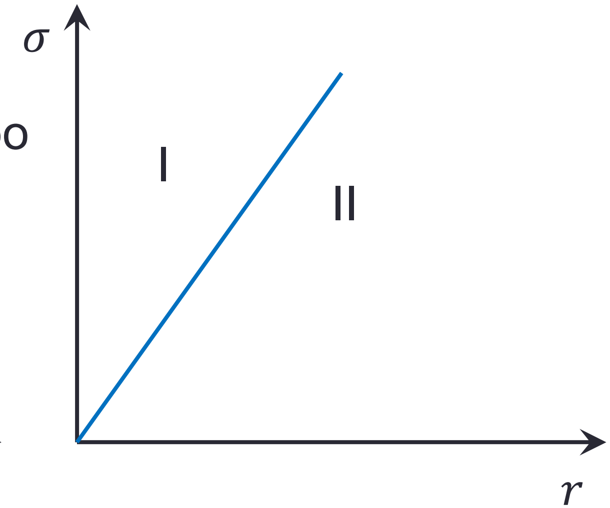
або

$\sigma = const$



або

$b = const$



I – стійкий фокус

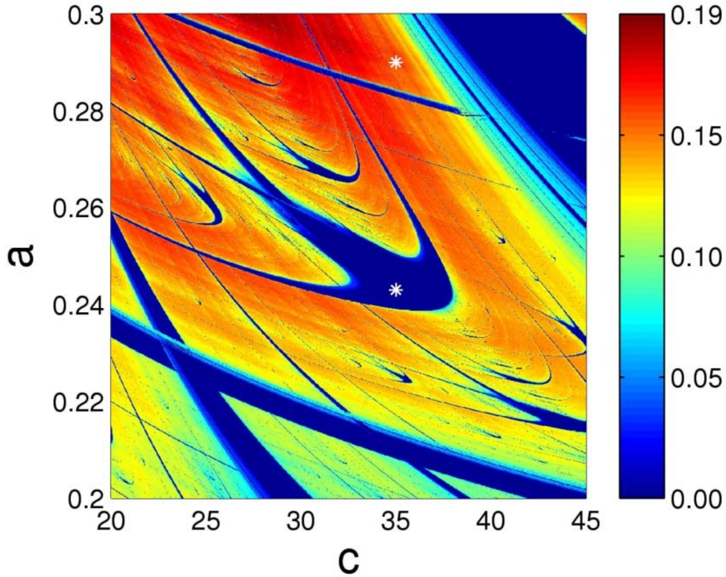
II – нестійкий фокус

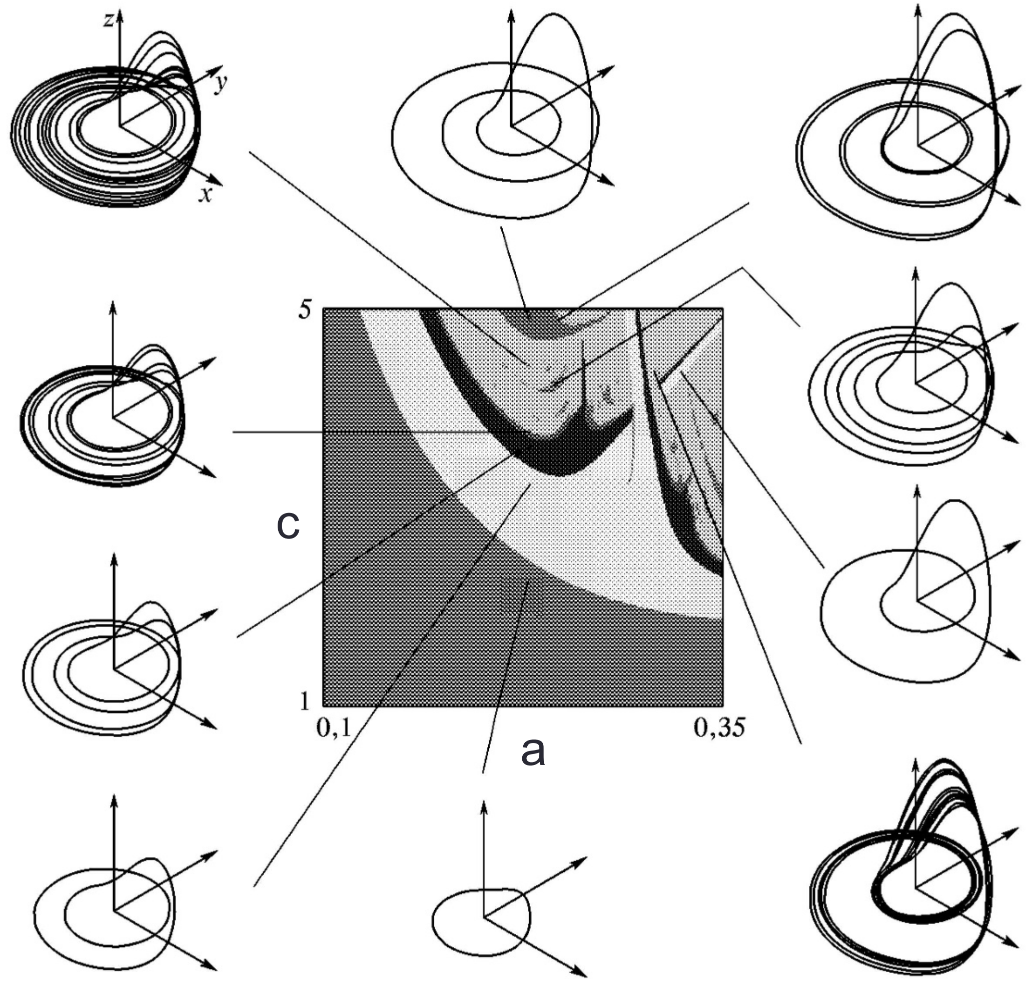
Системи нелінійних рівнянь

Карта показників Ляпунова

Система Реслера

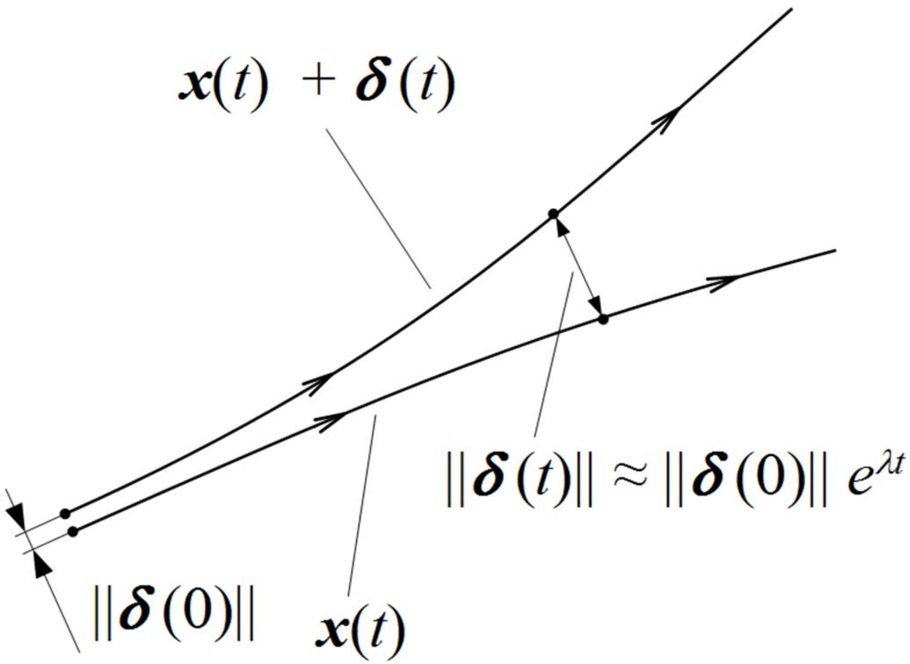
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ay \\ \dfrac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases}$$





Системи нелінійних рівнянь

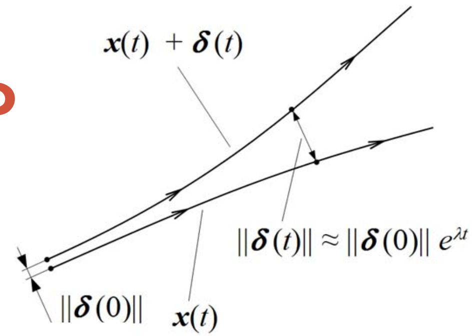
Карта показників Ляпунова



Старший Показник Ляпунова динамічної системи — величина, що характеризує швидкість видалення друг від друга траєкторій. Позитивність показника Ляпунова зазвичай свідчить про хаотичну поведінку системи.

$$\lambda = \lim_{\substack{t\to\infty \\ \delta x(0)\to 0}} \frac{1}{t} \ln\left|\frac{\delta x(t)}{\delta x(0)}\right| .$$

Системи нелінійних рівнянь



Карта показників Ляпунова

Нехай $\delta x(0)$ – нескінченно мала відстань між двома точками у фазовому просторі, які належать різним фазовим траєкторіям у момент часу $t = 0$, $\delta x(t)$ – відстань між цими точками у момент часу t. Тоді можна записати

$$|\delta x(t)| \approx |\delta x(0)| \exp(\lambda t),$$

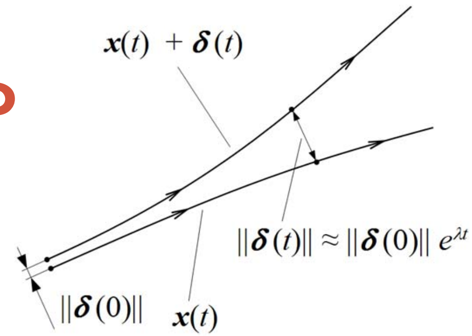
де параметр λ називається показником Ляпунова. Якщо $\lambda > 0$, то дві фазові траєкторії, які виходять із малого околу певної точки простору (початкові координати зсунуті на незначну відстань), з часом розходяться експоненціально швидко

Формула для розрахунку показника Ляпунова

$$\lambda = \lim_{\substack{t\to\infty \\ \delta x(0)\to 0}} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta x(t)}{\delta x(0)} \right| .$$

У загальному випадку він є функцією початкової координати.

Системи нелінійних рівнянь



Карта показників Ляпунова

Алгоритм

Розглянемо алгоритм обчислення старшого показника Ляпунова.

$\boxed{1}$ Отримуємо чисельний розв'язок динамічних рівнянь на інтервалі часу, який є достатнім для того, щоб траєкторія система вийшла на атрактор. У результаті одержуємо деяку точку фазового простору $\overrightarrow{x}(0)$, яку будемо вважати за вихідну.

$\boxed{2}$ Розраховуємо траєкторію, що виходить із точки $\overrightarrow{x}(0)$, та збурену траєкторію, що стартує з точки $\overrightarrow{x}(0)+\overrightarrow{\delta x_0}$. При цьому норма $||\overrightarrow{\delta x_0}|| = \varepsilon$. Для цього знаходимо чисельний розв'язок системи на інтервалі часу T і отримуємо вектор стану $\overrightarrow{x}_1 \equiv \overrightarrow{x}(T)$ і його збурення $\overrightarrow{\delta x_1}$ у даний момент часу. Відношення $||\overrightarrow{\delta x_1}||/\varepsilon$ характеризує зміну норми вектора збурення за час T.

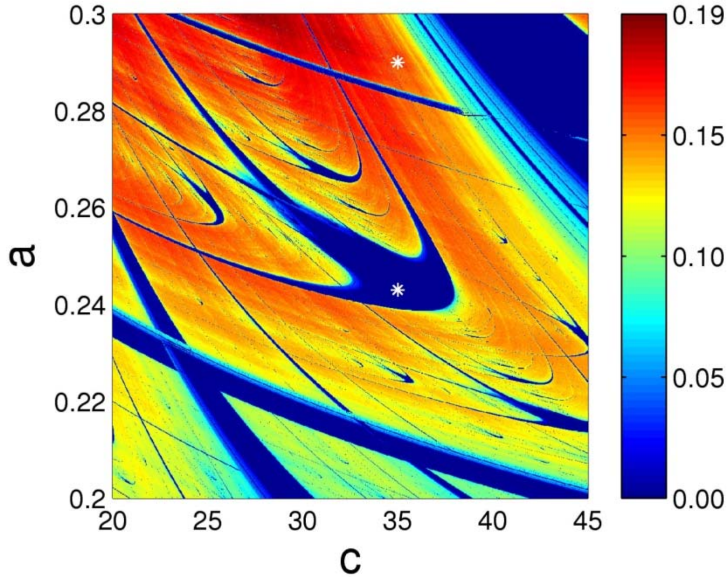
$\boxed{3}$ Перевизначимо цей вектор так, щоб його напрямок залишився тим самим, а норма дорівнювала вихідному значенню ε, а саме

$$\overrightarrow{\delta x_1} = \varepsilon \overrightarrow{\delta x_1}/||\overrightarrow{\delta x_1}||.$$

Виконуємо розв'язання на наступному інтервалі часу T, узявши за початкову точку та початкове збурення $\overrightarrow{x}(0) = \overrightarrow{x}_1$ та $\overrightarrow{\delta x_0} = \overrightarrow{\delta x_1}$ відповідно (пункт 2). Далі процес триває. Після достатньої кількості ітерацій N переходимо до пункту 4.

$\boxed{4}$ Розраховуємо старший показник Ляпунова:

$$\lambda \simeq \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^{N} \ln \frac{||\overrightarrow{\delta x_i}||}{\varepsilon}.$$



ДЯКУЮ ЗА УВАГУ