

ГРАФОВІ ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ

Моделювання критичних станів при самоорганізації соціальних мереж

О.В. Хоменко

Сумський державний університет

План лекції

1 Отримання основних рівнянь, що описують особливості критичного стану соціальної мережі.

2 Феноменологічна теорія самоорганізованої критичності у соціальній мережі.
Фазовий перехід \Rightarrow Самоорганізація \Rightarrow Самоорганізована критичність (СОК)

1 Dmitriev A., Maltseva S., Tsukanova O., Dmitriev V., Theoretical Study of Self-organized Phase Transitions in Microblogging Social Networks // Studies in Computational Intelligence, V. 813, 2019.

2 Dmitriev A., Dmitriev V., Balybin S., Self-Organized Criticality on Twitter: Phenomenological Theory and Empirical Investigation Based on Data Analysis Results, Complexity, V. 2019, 2019, Article ID 8750643.

3 А.И. Олемской, А.В. Хоменко, Синергетика конденсированной среды : учеб. пос. - Сумы: Изд-во СумГУ, 2002. - 373 с.

4 Dmitriev A., Dmitriev V., Maltseva S., Balybin S., Three-Parameter Kinetics of Self-organized Criticality on Twitter, Studies in Computational Intelligence, V. 881, SCI, 2020.

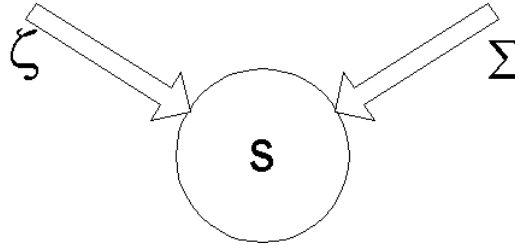
ФАЗОВИЙ ПЕРЕХІД (ТЕРМОДИНАМІКА)

s — параметр порядку (кореляційна функція), $\delta p_{t+\tau}$ — зміна повного числа мікропостів

$$s_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \delta p_{t+\tau}, \delta \Sigma_t \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \delta p_{t+\tau} \delta \Sigma_t dt \quad (1)$$

Σ — спряжене поле — інформація (ентропія, complexity)

ζ — керувальний параметр — число стратегічно орієнтованих користувачів (внутрішня енергія)



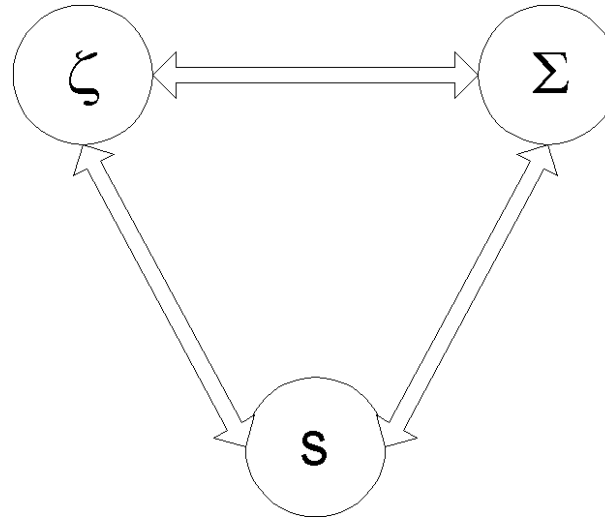
Вільна енергія:

$$f(s) = \zeta(s) - T \cdot \Sigma(s). \quad (2)$$

Стаціонарний стан:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 0. \quad (3)$$

САМООРГАНІЗАЦІЯ (синергетика)



Найпростіша схема зводиться до системи Лоренця:

$$\tau_s \dot{s} = -s + a_s \cdot \Sigma, \quad (4)$$

$$\tau_\Sigma \dot{\Sigma} = -\Sigma + a_\Sigma \cdot s\zeta, \quad (5)$$

$$\tau_\zeta \dot{\zeta} = (\zeta_e - \zeta) - a_\zeta \cdot s\Sigma. \quad (6)$$

Одиниці виміру:

$$s^{sc} \equiv (a_\Sigma a_\zeta)^{-1/2}, \quad \Sigma^{sc} \equiv a_s^{-1} (a_\Sigma a_\zeta)^{-1/2}, \quad \zeta^{sc} \equiv (a_s a_\Sigma)^{-1}.$$

В рамках адіабатичної апроксимації

$$\tau_{\Sigma}, \tau_{\zeta} \ll \tau_s \quad (7)$$

маємо

$$\zeta = \frac{\zeta_e}{1 + s^2}, \quad \Sigma = \frac{\zeta_e s}{1 + s^2}. \quad (8)$$

Система Лоренця зводиться до рівняння Ландау-Халатнікова

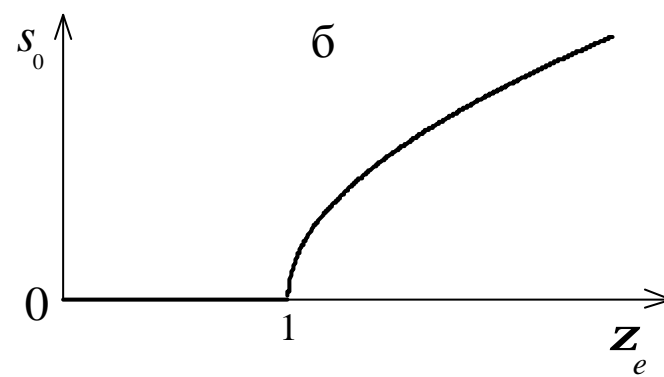
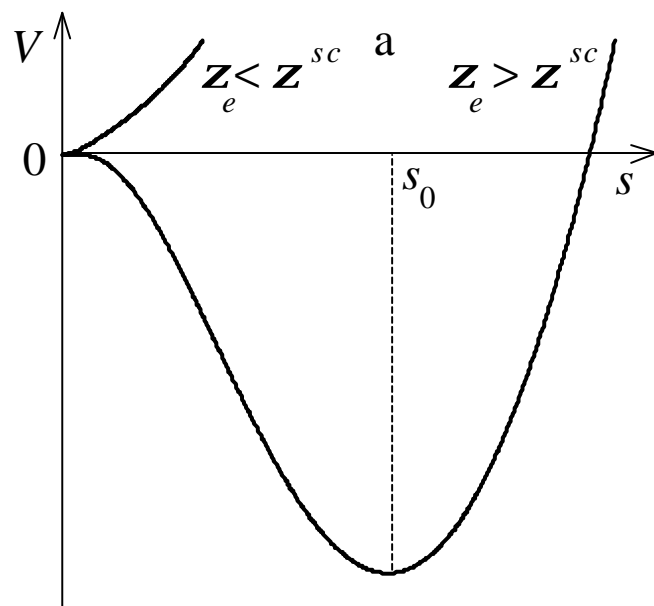
$$\dot{s} = -\frac{\partial V}{\partial s} \quad (9)$$

з синергетичним потенціалом

$$V = \frac{s^2}{2} - \frac{\zeta_e}{2} \ln(1 + s^2). \quad (10)$$

Стаціонарний стан:

$$s_0 = \Sigma_0 = \sqrt{\zeta_e - 1}, \quad \zeta^{sc} = \zeta_0 = 1. \quad (11)$$



Для температури

$$T \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial \Sigma} \quad (12)$$

рівняння стану

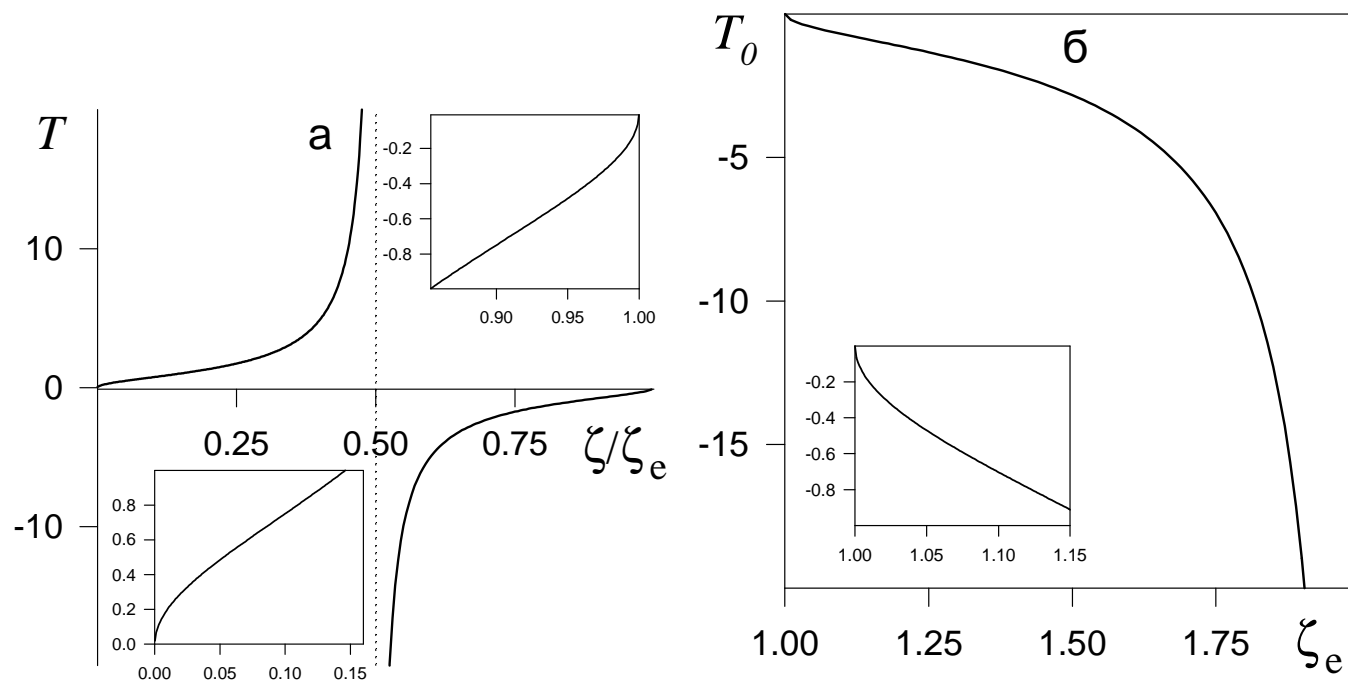
$$\Sigma = \sqrt{\zeta(\zeta_e - \zeta)} \quad (13)$$

дає

$$T = - \left(1 - \frac{\zeta_e}{2\zeta}\right)^{-1} \sqrt{\frac{\zeta_e}{\zeta} - 1}. \quad (14)$$

Стаціонарна температура:

$$T_0 = - \frac{\sqrt{\zeta_e - 1}}{1 - \zeta_e/2}. \quad (15)$$



САМООРГАНІЗОВАНА КРИТИЧНІСТЬ

(теорія стохастичності)

Система Лоренця

$$\tau_s \dot{s} = -s + \Sigma + \sqrt{I_s} \xi_1(t), \quad (16)$$

$$\tau_\Sigma \dot{\Sigma} = -\Sigma + s\zeta + \sqrt{I_\Sigma} \xi_2(t), \quad (17)$$

$$\tau_\zeta \dot{\zeta} = (\zeta_e - \zeta) - s\Sigma + \sqrt{I_\zeta} \xi_3(t) \quad (18)$$

з білим шумом

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (19)$$

В рамках адіабатичної апроксимації:

$$\Sigma(t) = \bar{\Sigma} + \tilde{\Sigma} \xi_4(t), \quad \zeta(t) = \bar{\zeta} + \tilde{\zeta} \xi_5(t), \quad (20)$$

$$\bar{\Sigma} \equiv \frac{\zeta_e s}{1 + s^2}, \quad \tilde{\Sigma} \equiv \frac{\sqrt{I_\Sigma + I_\zeta s^2}}{1 + s^2}, \quad (21)$$

$$\bar{\zeta} \equiv \frac{\zeta_e}{1 + s^2}, \quad \tilde{\zeta} \equiv \frac{\sqrt{I_\zeta + I_\Sigma s^2}}{1 + s^2}. \quad (22)$$

Рівняння Ланжевена:

$$\tau_s \dot{s} = f(s) + \sqrt{I(s)} \xi(t), \quad (23)$$

$$f \equiv -\frac{\partial V}{\partial s}, \quad V = \frac{s^2}{2} - \frac{\zeta_e}{2} \ln(1 + s^2), \quad (24)$$

$$I(s) \equiv I_s + \frac{I_\Sigma + I_\zeta s^2}{(1 + s^2)^2}. \quad (25)$$

Рівняння Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ -f(s)P(s, t) + \frac{\partial}{\partial s} [I(s)P(s, t)] \right\} \quad (26)$$

має стаціонарний розв'язок

$$P(s) \propto \frac{1}{I(s)} \exp\{-U(s)\} \quad (27)$$

з ефективним потенціалом

$$U(s) = -\int \frac{f(s)}{I(s)} ds, \quad f \equiv -\frac{\partial V}{\partial s}. \quad (28)$$

Максимуми функції розподілу $P(s)$ визначаються рівнянням

$$x^3 - \zeta_e x^2 - 2I_\zeta x + 4(I_\zeta - I_\Sigma) = 0, \quad x \equiv 1 + s^2. \quad (29)$$

Рівноважний (non-avalanche) розв'язок $s = 0$ з'являється

$$\zeta_e < \zeta_c, \quad \zeta_c \equiv 1 + 2I_\zeta - 4I_\Sigma. \quad (30)$$

Потоковий стан зникає під лінією, що визначається рівнянням

$$I_\zeta^2 - I_\zeta \left[\frac{27}{2} \left(1 - \frac{\zeta_e}{3} \right) - \frac{\zeta_e^2}{8} \right] + \frac{\zeta_e^3}{2} = 0. \quad (31)$$

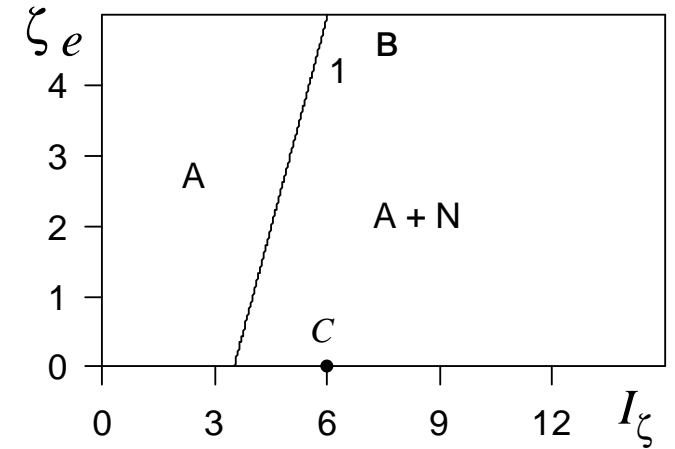
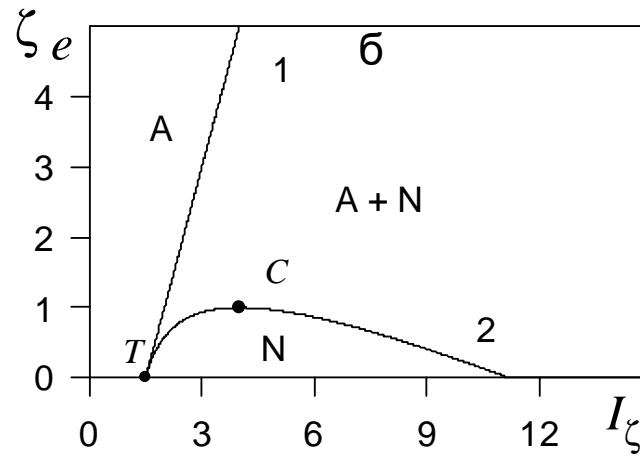
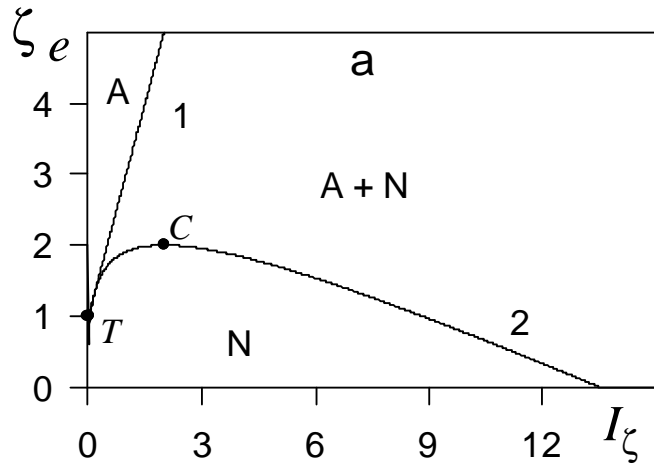
Трикритична точка T :

$$\zeta_e = \frac{4}{3}(1 - I_\Sigma), \quad I_\zeta = \frac{1}{6}(1 + 8I_\Sigma). \quad (32)$$

Критична точка C :

$$I_\Sigma = 2, \quad I_\zeta = 6. \quad (33)$$

Фазові діаграми: а — $I_\Sigma = 0$; б — $I_\Sigma = 1$; в — $I_\Sigma = 2$. Криві 1 та 2 визначають межі стійкості рівноважного (N) та потокового (A) станів



Функція розподілу потокових станів

У випадку $I_s, I_\zeta \ll I_\Sigma$ реалізується розподіл Гіббса:

$$P(s) \approx I_\Sigma^{-1} (1+s^2)^2 \exp \left\{ I_\Sigma^{-1} \int f(s) (1+s^2)^2 ds \right\}, \quad (34)$$

$$f(s) \equiv -s + \zeta_e s / (1 + s^2).$$

У протилежному випадку $I_s, I_\Sigma \ll I_\zeta$ маємо степеневу залежність у границі $s \rightarrow 0$:

$$P(s) \approx I_\zeta^{-1} \left(\frac{1+s^2}{s} \right)^2 \exp \left\{ I_\zeta^{-1} \int \frac{f(s)(1+s^2)^2}{s^2} ds \right\} \sim s^{-2}. \quad (35)$$

Вихідний розподіл в режимі СОК:

$$P(s) = s^{-\tau} \mathcal{P}(x) \sim s^{-\tau}; \quad x \equiv s/s_c, \quad \tau \approx 3/2. \quad (36)$$

Дробові рівняння Лоренця ($s \Rightarrow s^{\tau/2}$):

$$\tau_s \dot{s} = -s + \Sigma + \sqrt{I_s} \xi(t), \quad (37)$$

$$\tau_\Sigma \dot{\Sigma} = -\Sigma + s^{\tau/2} \zeta + \sqrt{I_\Sigma} \xi(t), \quad (38)$$

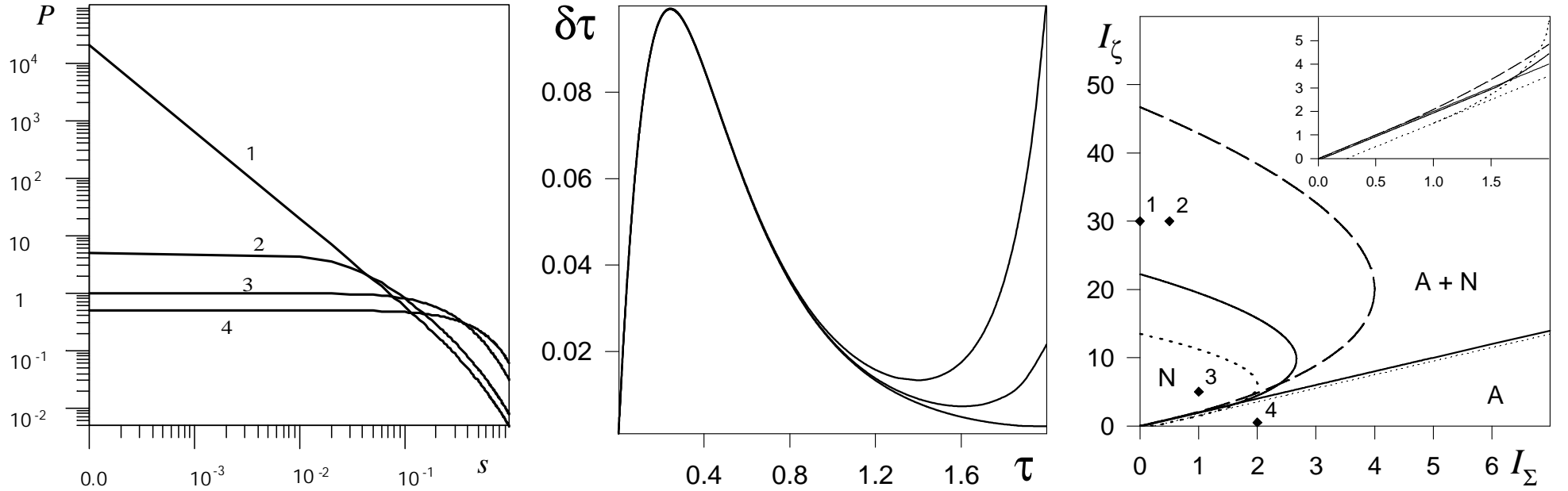
$$\tau_\zeta \dot{\zeta} = (\zeta_e - \zeta) - s^{\tau/2} \Sigma + \sqrt{I_\zeta} \xi(t). \quad (39)$$

Відповідна функція розподілу:

$$P(s) \propto s^{-\tau} (1 + s^\tau)^2 \exp \left\{ -I_\zeta^{-1} \int \frac{(1+s^\tau)^2}{s^{\tau-1}} ds \right\}, \quad (40)$$

$$s \rightarrow 0 \Rightarrow P(s) \sim s^{-\tau} \quad (41)$$

СОК: $\zeta_e = 0$ (крива 1)



Фазова діаграма: $\tau = 1; 1.5; 2$ (пунктирна, суцільна та штрихова криві). Точки відповідають кривим 1 — 4 для $P(s)$

ВИСНОВКИ

1 Досліджено найпростішу синергетичну модель формування потокового стану соціальної мережі. З урахуванням адитивних некорельованих флуктуацій основних параметрів побудовано фазову діаграму, що визначає області потокового, рівноважного і змішаного станів.

2 Встановлено, що зростання інтенсивності флуктуацій приводить до появи потокового стану навіть за відсутності стратегічно орієнтованих користувачів, що задаються зовнішніми умовами, причому шум керувального параметра відіграє критичну роль. Флуктуаційний режим такого роду відповідає випадку, коли розподіл параметра порядку за його величиною має степеневий вигляд.

3 Оскільки показник степені є дробом, то використано дробову систему Лоренця, що дозволяє описати реальну картину утворення потокового стану. У результаті виявляється, що степеневий розподіл, властивий СОК, забезпечується флуктуаціями кількості стратегічно орієнтованих користувачів.