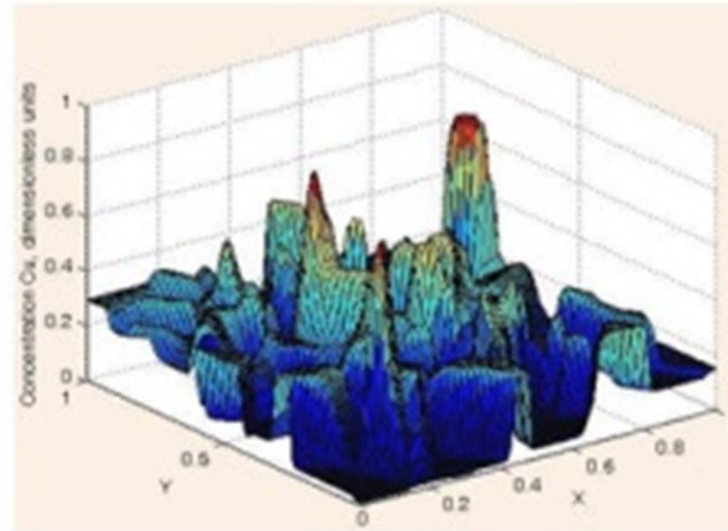


Комп'ютерне моделювання задач прикладної математики

Динамічні системи

Лекція 10

Стійкість стаціонарних станів

Динамічне рівняння $$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Стаціонарні стани

$$f(x) = 0$$

Розкладаємо у ряд Тейлора:

$$f(x) = f(x_i) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} (x - x_i) + \cdots;$$

Розв'язок

$$\delta x \propto \exp(\lambda t): \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt} = \lambda \cdot \delta x; \qquad f(x_i) = 0$$

Характеристичне рівняння

$$\delta x = (x - x_i)$$

$$\lambda \cdot \delta x = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i} \delta x \Rightarrow \lambda = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}$$

$\lambda < 0$ – стійкий стан

$\lambda > 0$ – нестійкий стан

Стійкість стаціонарних станів

Динамічне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Стаціонарні стани

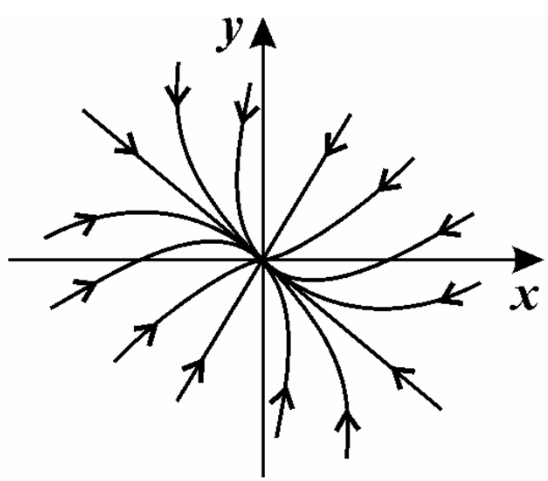
$$f(x) = 0$$

Показник стійкості

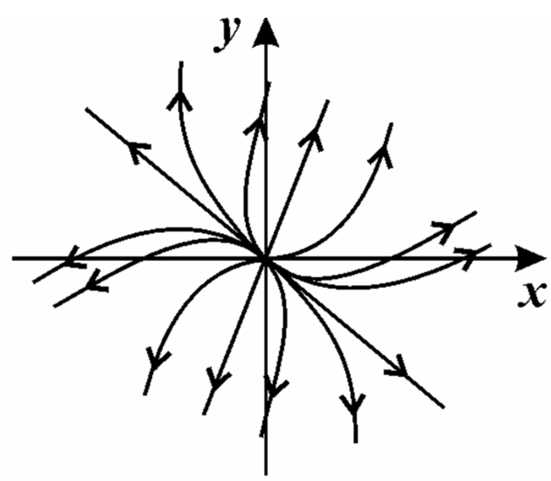
$$\lambda = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_i}$$

$\lambda < 0$ – стійкий стан

$\lambda > 0$ – нестійкий стан



Стійкий вузол



Нестійкий вузол

Системи нелінійних рівнянь

- $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y,z) \\ \frac{dz}{dt} = g(y,z) \end{cases}$

Стаціонарні стани: $f(y,z) = 0; g(y,z) = 0$

Матриця Якобі

$\delta y \propto \exp(\lambda_1 t)$

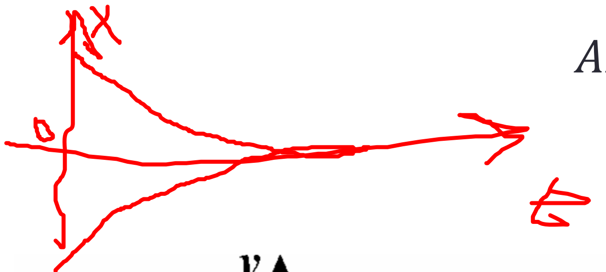
$\delta z \propto \exp(\lambda_2 t)$

$$M = \begin{pmatrix} \left.\frac{df(y,z)}{dy}\right|_{y_0,z_0} - \lambda & \left.\frac{df(y,z)}{dz}\right|_{y_0,z_0} \\ \left.\frac{dg(y,z)}{dy}\right|_{y_0,z_0} & \left.\frac{dg(y,z)}{dz}\right|_{y_0,z_0} - \lambda \end{pmatrix}$$

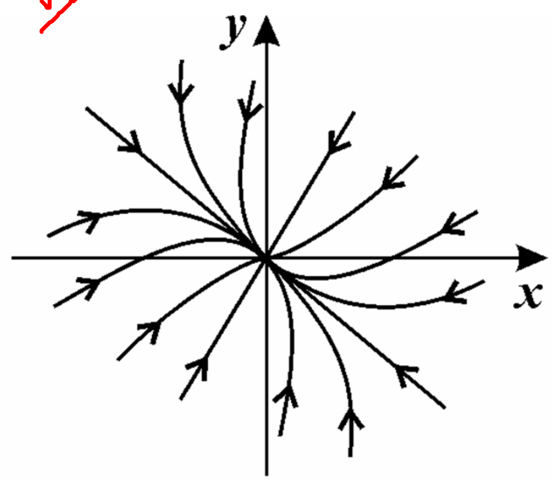
$$\det(M) = 0 \rightarrow \lambda$$

Системи нелінійних рівнянь

Характеристичне рівняння і типи стаціонарних точок

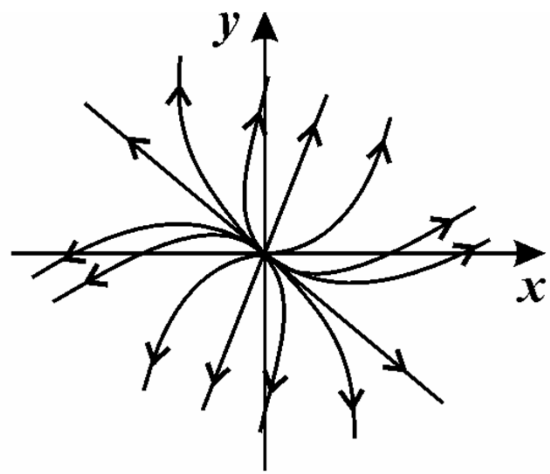


$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$



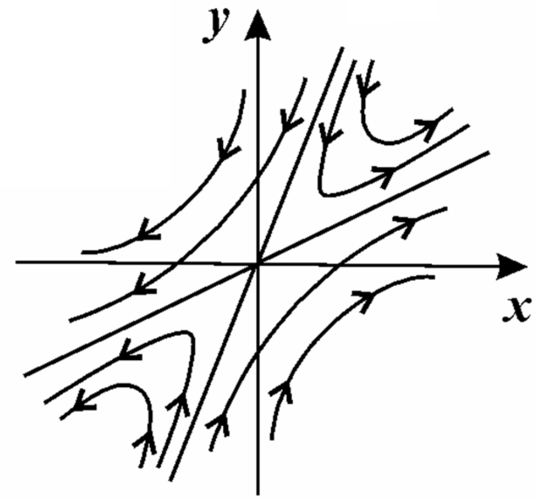
Стійкий вузол

λ_1, λ_2 дійсні та від'ємні



Нестійкий вузол

λ_1, λ_2 дійсні та додатні

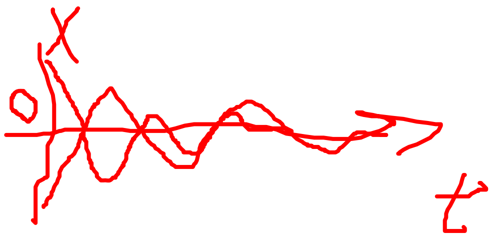


Сідло

λ_1, λ_2 - дійсні різних знаків

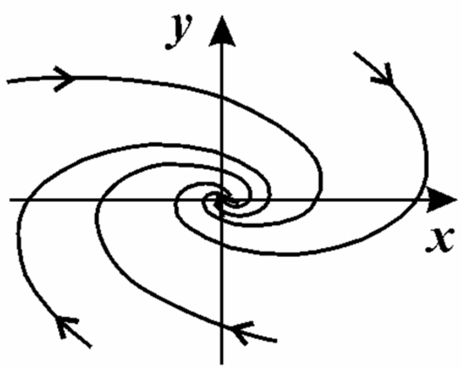
Системи нелінійних рівнянь

Характеристичне рівняння і типи стаціонарних точок



$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

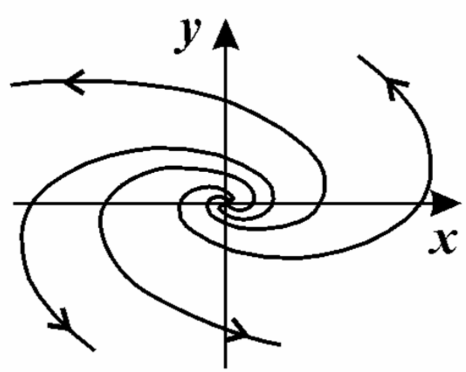
$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\varpi \qquad \lambda_0 = Re(\lambda_{1,2})$$



Стійкий фокус

$\lambda_1, \ \lambda_2$ **- комплексні**

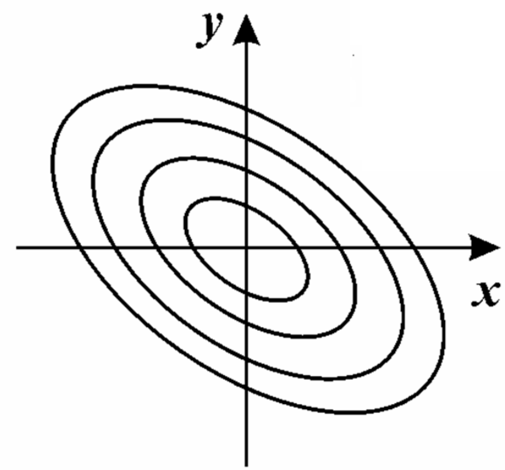
Re $\lambda_{1,2} < 0$



Нестійкий фокус

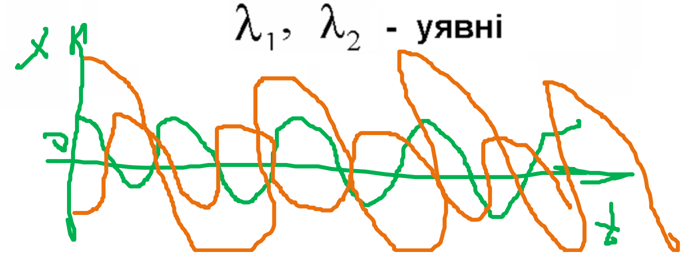
$\lambda_1, \ \lambda_2$ **- комплексні**

Re $\lambda_{1,2} > 0$



центр

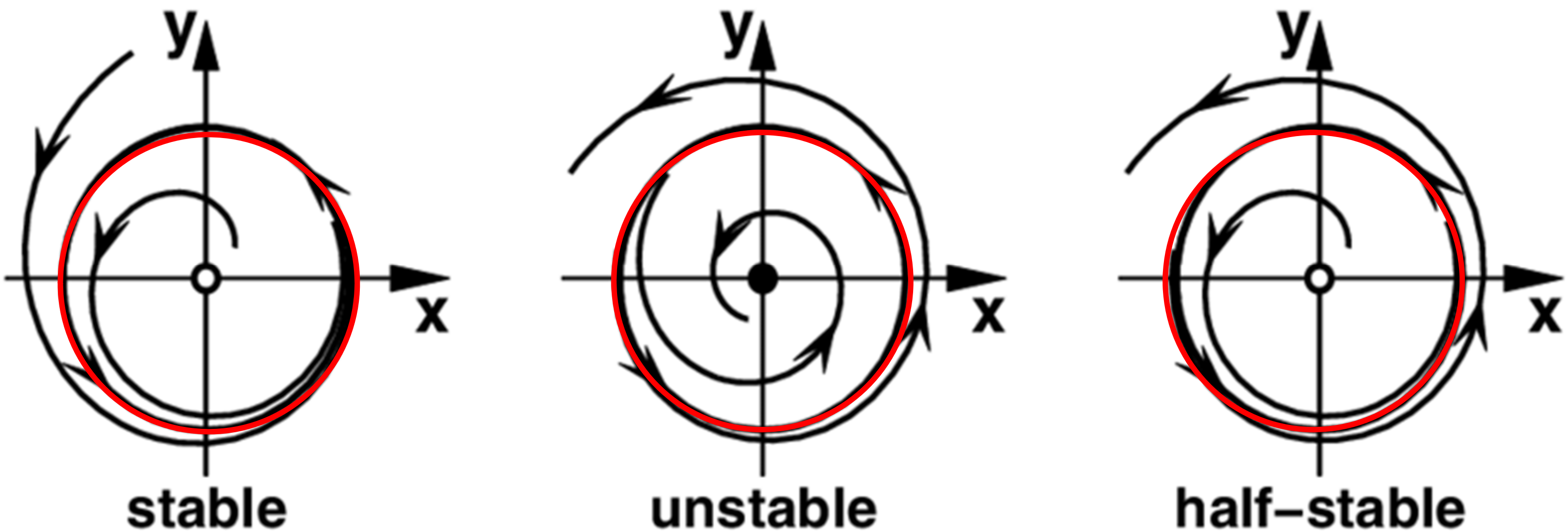
$\lambda_1, \ \lambda_2$ **- уявні**



Системи нелінійних рівнянь

Характеристичне рівняння і типи стаціонарних точок

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$



Системи нелінійних рівнянь

- Система Лоренца
- $$\begin{cases} \tau_x \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \tau_y \dfrac{dy}{dt} = x(r - z) - y \\ \tau_z \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$

Адіабатичне наближення:

$$\tau_x \ll \tau_y;\ \tau_x \ll \tau_z;\ \tau_y = \tau_z$$

$$\tau_x = 0 \to \frac{dx}{dt} = 0 \to x = y$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(r - z) - y \\ \dfrac{dz}{dt} = y^2 - bz \end{cases}$$

Системи нелінійних рівнянь

- $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(r-z) - y \\ \dfrac{dz}{dt} = y^2 - bz \end{cases}$$

Стаціонарні стани: $\dfrac{dy}{dt} = 0;\ \dfrac{dz}{dt} = 0$

$$bz = y^2 \to z = \frac{y^2}{b}$$

$$y\left(r - \frac{y^2}{b}\right) - y = 0; \to$$

$$y_1 = 0;$$

$$r - \frac{y^2}{b} = 1 \to \frac{y^2}{b} = r - 1 \to y_{23} = \pm\sqrt{b(r-1)}$$

$$(0{,}0);$$

$$\left(\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r} - 1\right);$$

$$\left(-\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r} - 1\right)$$

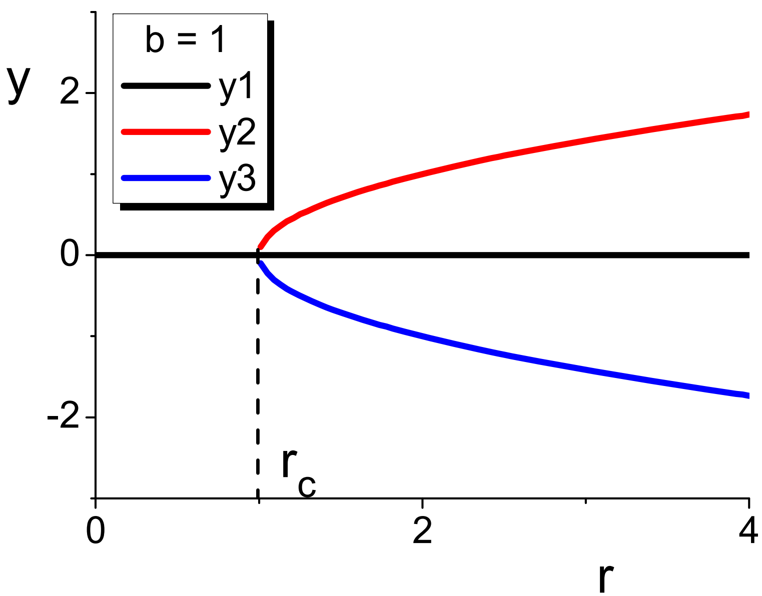
1) $b > 0, r \geq 1;$
2) ~~$b < 0, r \leq 1;$~~

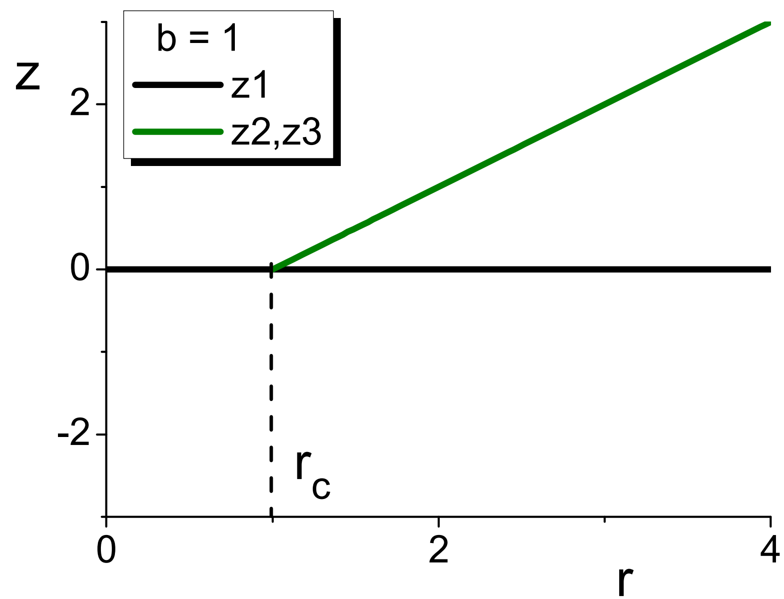
Системи нелінійних рівнянь

- $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y(r-z) - y \\ \frac{dz}{dt} = y^2 - bz \end{cases}$

$$\begin{gathered} (0,0); \\ \left(\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right); \\ \left(-\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right) \end{gathered}$$

$b > 0, r > 1$





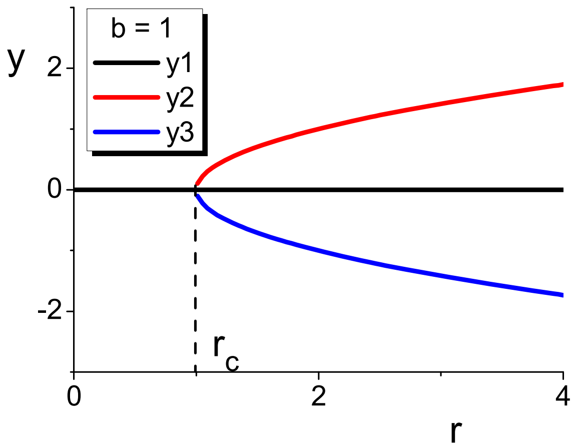
Системи нелінійних рівнянь

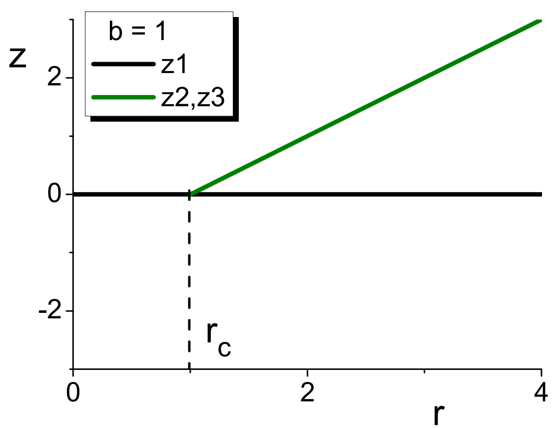
- $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(r-z) - y \\ \dfrac{dz}{dt} = y^2 - bz \end{cases}$$

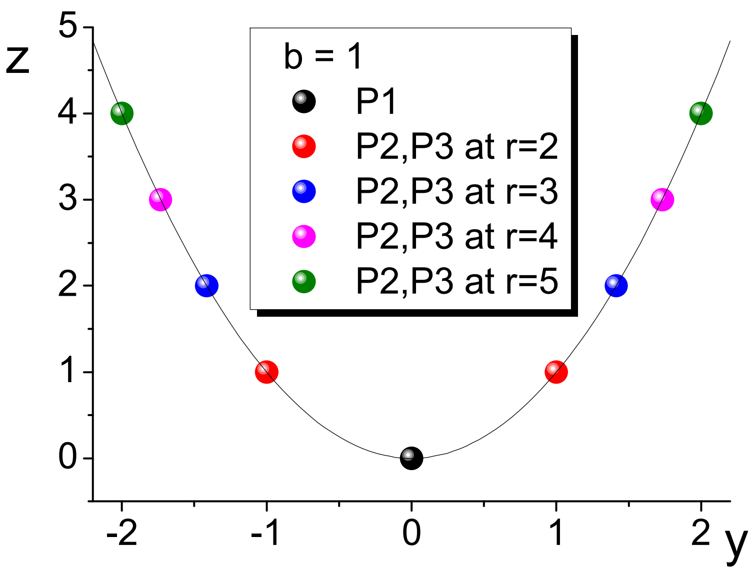
$$(0{,}0);$$
$$\left(\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right);$$
$$\left(-\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right)$$

$$b > 0, r > 1$$

$$bz = y^2 \rightarrow z = \frac{y^2}{b}$$







Системи нелінійних рівнянь

- $$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = y(r-z) - y = f(y,z) \\ \frac{dz}{dt} = y^2 - bz = g(y,z) \end{cases}$$

Стаціонарні стани:

$$\frac{dy}{dt} = 0; \; \frac{dz}{dt} = 0$$

$$(0,0); \quad \left(\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right); \quad \left(-\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right)$$

Матриця Якобі

$$M = \begin{pmatrix} \left.\frac{df(y,z)}{dy}\right|_{y_0,z_0} - \lambda & \left.\frac{df(y,z)}{dz}\right|_{y_0,z_0} \\ \left.\frac{dg(y,z)}{dy}\right|_{y_0,z_0} & \left.\frac{dg(y,z)}{dz}\right|_{y_0,z_0} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = 0 \to \lambda$$

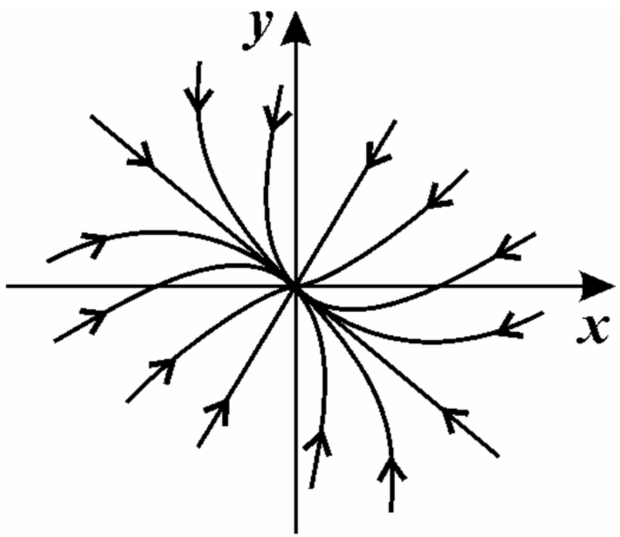
Системи нелінійних рівнянь

- $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(r-z) - y \\ \dfrac{dz}{dt} = y^2 - bz \end{cases}$

$(0{,}0)$ at $b > 0, r < 1$

Точка: $(0{,}0)$

$\lambda_1 = r - 1 < 0$
$\lambda_2 = -b < 0$



Стійкий вузол

λ_1, λ_2 **дійсні та від'ємні**

$(0{,}0);$
$\left(\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right);$
$\left(-\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right)$

at $b > 0, r > 1$

Системи нелінійних рівнянь

- $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(r-z) - y \\ \dfrac{dz}{dt} = y^2 - bz \end{cases}$

$$(0,0);$$
$$\left(\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right);$$
$$\left(-\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right)$$

$$b > 0, r > 1$$

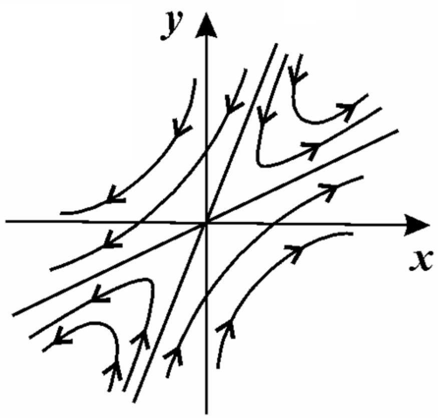
Точка: $(0,0)$ Точка: $\left(\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right)$ & Точка: $\left(-\sqrt{b(r-1)}, \mathrm{r}-1\right)$

$$\lambda_1 = r - 1 > 0$$
$$\lambda_2 = -b < 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b\big(b - 8(r-1)\big)} < 0$$

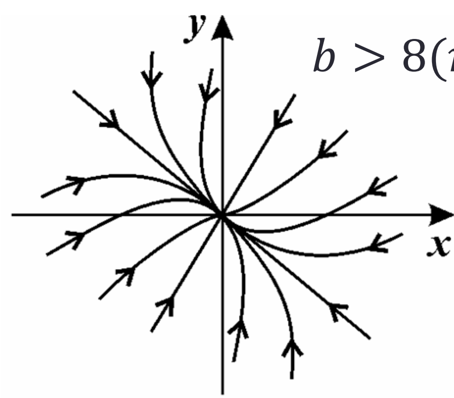
$$b < 8(r-1)$$

$$b > 8(r-1)$$



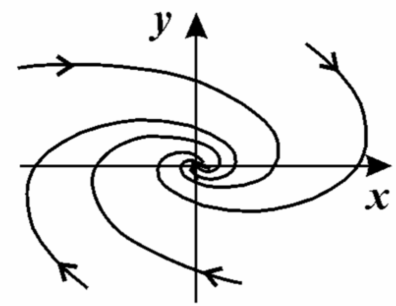
Сідло

λ_1, λ_2 - дійсні різних знаків



Стійкий вузол

λ_1, λ_2 дійсні та від'ємні

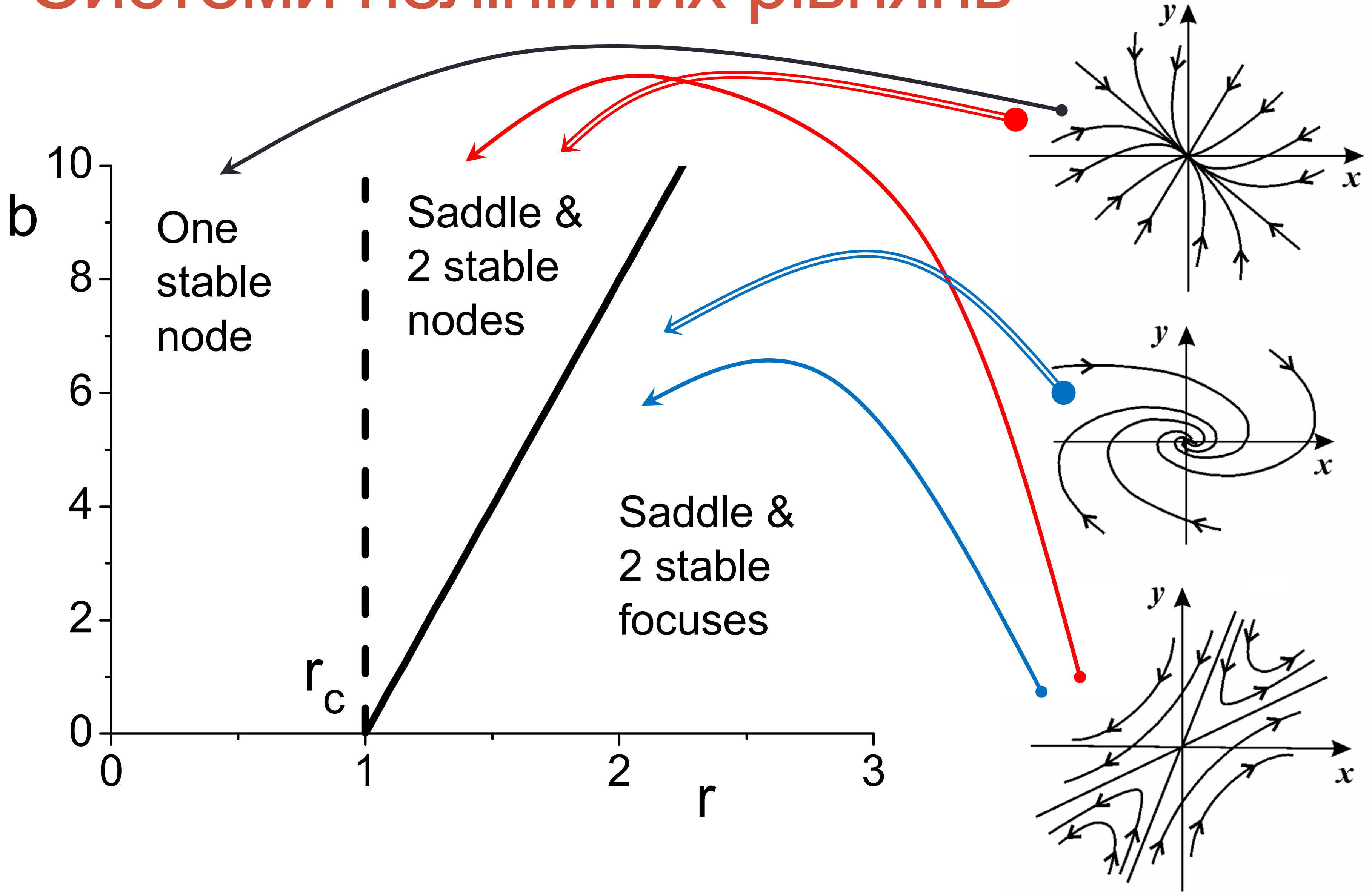


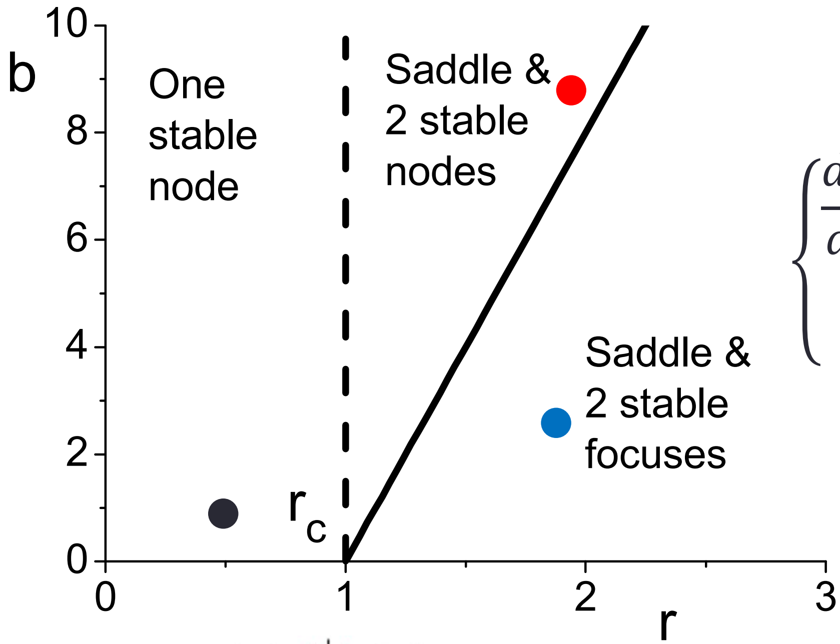
Стійкий фокус

λ_1, λ_2 - комплексні

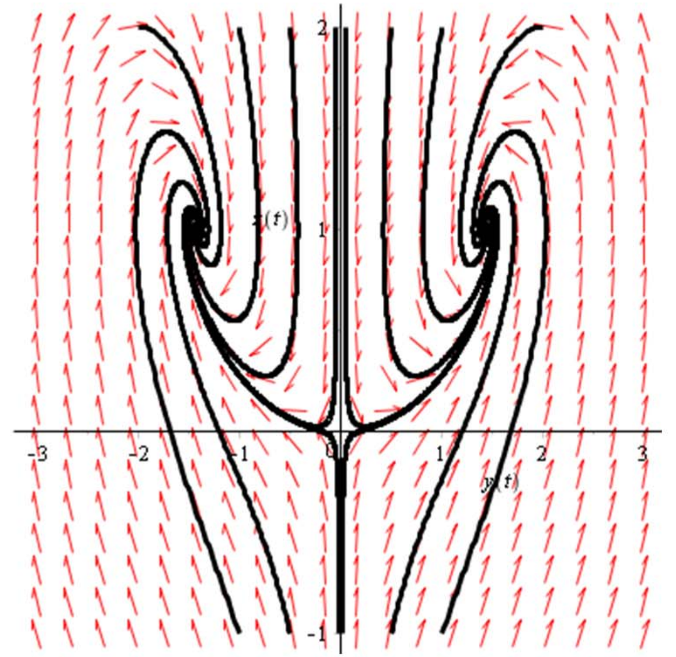
Re $\lambda_{1,2} < 0$

Системи нелінійних рівнянь

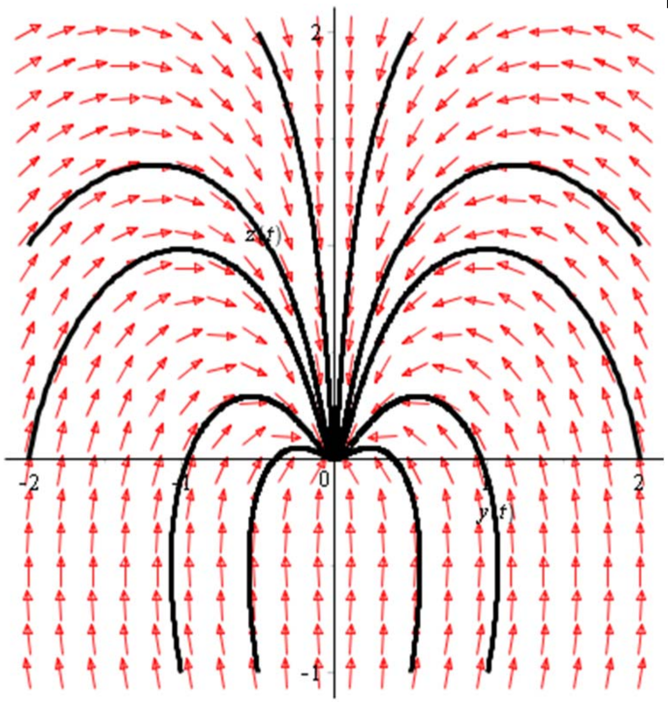




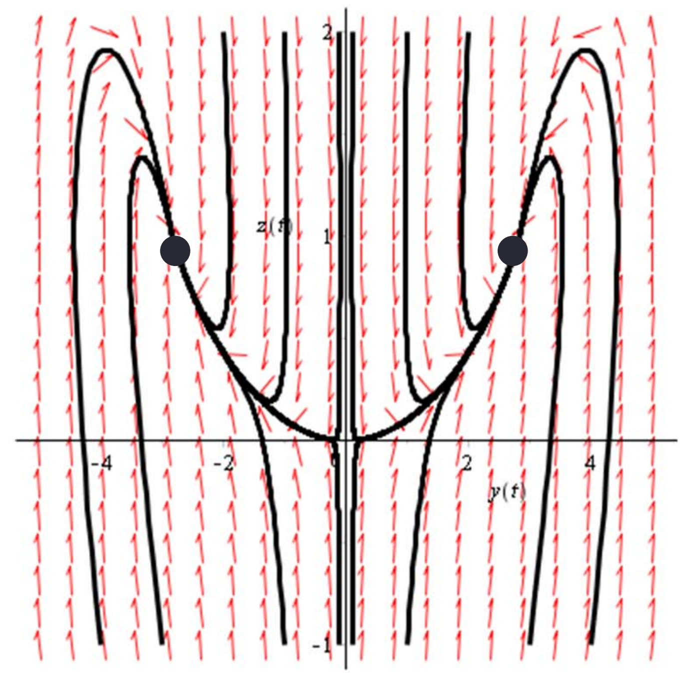
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(r - z) - y \\ \dfrac{dz}{dt} = y^2 - bz \end{cases}$$



$r = 2; b = 3$



$r = 0.5; b = 1$



$r = 2; b = 8$

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ