Розділ 2

Прийняття рішень в умовах визначеності

Лекція 2. Прийняття рішень при багатьох критеріях

Зміст лекції:

1. **Проблема багатокритеріальності Змістовний аналіз**
2. **Формальна Постановка Задачі багатокритеріальної оптимізації**
3. **Проблеми та класифікація методів вирішення задач багатокритеріальної оптимізації**

1. Проблема багатокритеріальності. Змістовний аналіз

Суть багатокритеріальних задач прийняття рішень. Змістовний аналіз

До цих пір ми розглядали задачі оптимізації, де 1 критерій (показник ефективності) за яким проводиться оцінка ефективності об'єкта, тобто потрібно звернути в min (max) один єдиний показник.

Такі завдання на практиці зустрічаються рідко. Коли йде мова про проектування таких об'єктів як літак, технологічний процес, то їх ефективність, як правило, не може бути повністю оцінена за допомогою єдиного показника.

Доводиться розглядати додаткові критерії (показники ефективності). Чим більше критеріїв якості вводиться в розгляд, тим більш повну характеристику достоїнств і недоліків проектованого об'єкта можна отримати.

Таким чином, завдання проектування складних систем завжди багатокритеріальні, тому що при виборі найкращого варіанту доводиться враховувати багато різних вимог, пред'явлених до системи (об'єкту).

Суть багатокритеріальних задач прийняття рішень. Змістовний аналіз

Варіанти-"кандидати" порівнюються за двома або більше критеріями, щоб знайти оптимальний варіант

(або один з оптимальних, якщо "перше місце" ділять різні "кандидати").

Приклад: вибираємо, який вид танка вибрати на озброєння військ, критерії - захищеність, зручність екіпажу, ефективність озброєння, швидкість.

Суть багатокритеріальних задач прийняття рішень. Відношення Парето, Парето-оптимальні рішення, безліч Парето

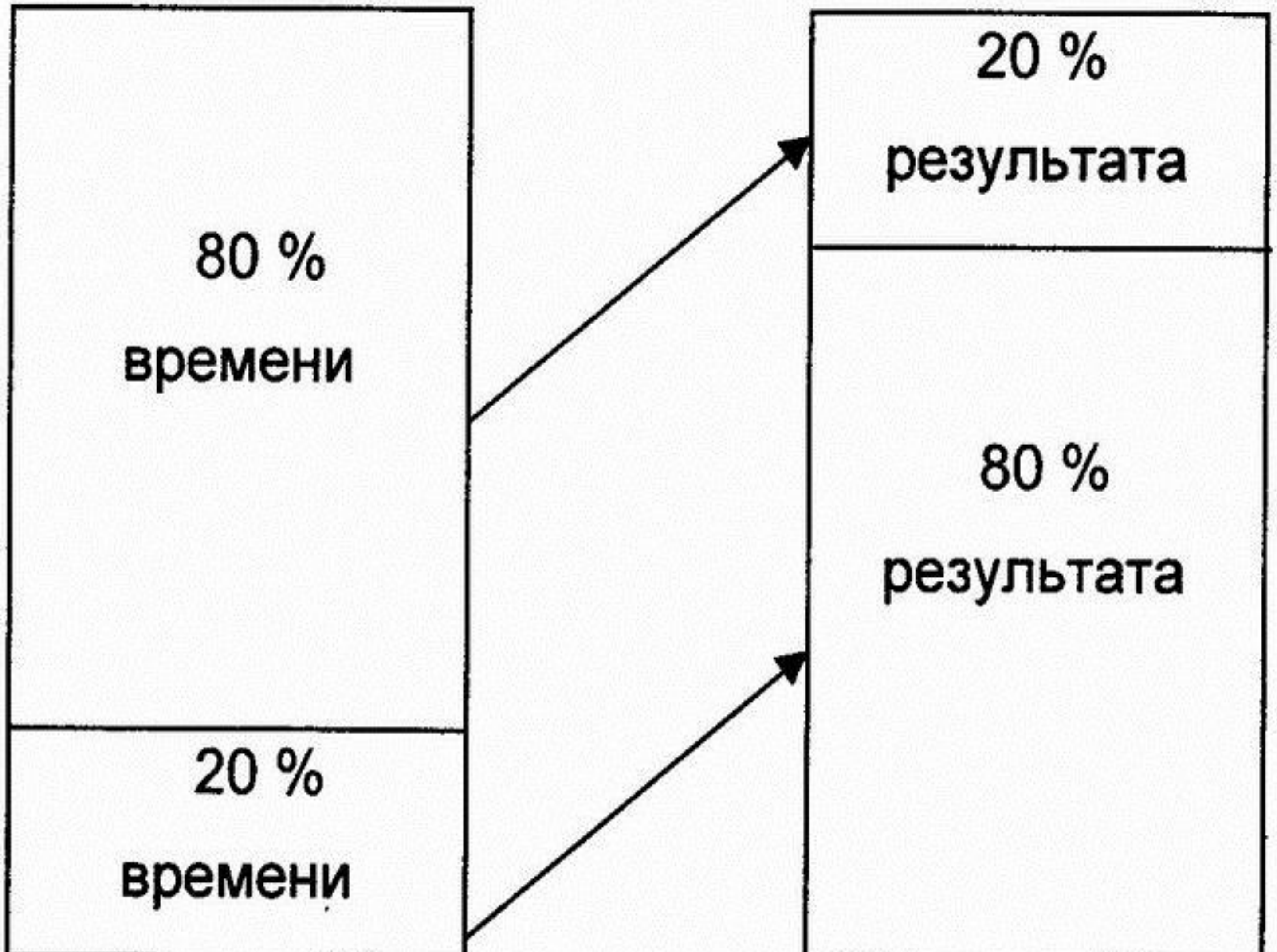
? ЯК простим способом скоротити число варіантів, особливо якщо таких багато. Нехай, наприклад, ми вибираємо стратегію розвитку підприємства **критерії** –

- очікуваний прибуток на рік (в сенсі мат. очікування з теорії ймовірностей),
- надійність стратегії (ймовірність того, що буде прийнятний для нас прибуток, хоч скільки-небудь солідний дохід).

Вільфре́до Паре́то

- (італ. *Vilfredo Pareto*; *15 липня 1848, Франція—† 19 серпня 1923, Лозанна, Швейцарія) — італійський економіст і соціолог, зробив важливий внесок в економіку, соціологію і моральну філософію. **Він ввів поняття ефективності Парето і допоміг розвитку галузі мікроекономіки**. Його теорії вплинули на Беніто Муссоліні і розвиток Італійського фашизму.
- Сім'я Парето переселилась у Італію в 1858 році. У 1870 отримав ступінь інженера у Туринському Політехнічному Інституті і отримав роботу у італійській залізниці. У 1886 читав лекції по економіці та менеджменту у Флорентійському Університеті. У 1893 був призначений лектором в Університеті Лозанни у Швейцарії де і залишився до кінця життя.
- В 1906 році, він зробив добре відоме спостереження, що 20 % населення володіють 80 % власності у Італії, пізніше узагальнене (Джозефом М. Юраном та іншими) у так званий принцип Парето (для багатьох явищ 80 % наслідків спричинені 20 % причин), ще пізніше узагальнене у понятті розподілу Парето.
- Індекс Парето — це міра нерівномірності розподілу доходу.
- Діаграма Парето — це спеціальний тип гістограми, яка використовується щоб розглядати причини подій в порядку спадання від найбільшої до найменшої. Це статистичний інструмент, що графічно інтерпретує правило 80-20.
- Парето написав роботу про соціальну політику «Розум і суспільство».
- Заснував теорію еліт.

Принцип Парето (правило 80 : 20)



Відношення Парето, Парето-оптимальні рішення, безліч Парето

Припустимо, у нас є 5 стратегій:

Стратегія 2 дає більше прибутку, ніж стратегія 1, при тій же надійності. стратегія 1 не може бути кращою.

Стратегія 3 по очікуваного прибутку рівноцінна стратегії 2, але надійніше. стратегія 2 теж невигідна.

Стратегія 3 прибутковіше стратегії 4 при тій же надійності. стратегія 4 теж невиправдана

Залишаються лише стратегії 3 і 5. *За одним критерієм перевершує одна*, по іншому - інша. Ми не змогли прийти до 1-го варіанту, але усунули більшість завідомо негідних.

Відношення Парето, Парето-оптимальні рішення, безліч Парето

Відношення Парето.

Варіант x краще варіанта y по відношенню Парето (далі: x> y), якщо

- **x хоча б за одним критерієм краще, ніж y,**

- **а по решті критеріїв x не гірше, ніж y.**

Відношення Парето, Парето-оптимальні рішення, безліч Парето

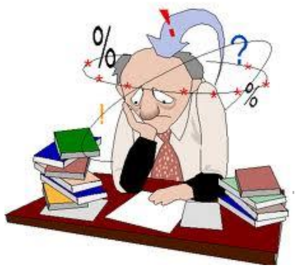
Відношення Парето.

Варіант x краще варіанту y по відношенню Парето (далі: x> y), якщо x хоча б за одним критерієм краще, ніж y, а по решті критеріїв не гірше, ніж y.

Дане відношення **транзитивно** (якщо x> y і y> z, то x> z), антерефлексівно (неможливо x> x), асиметрично (неможливо одночасно x> y і y> x), тобто це відношення строгого порядку.

Зауважимо, що між конкретною парою (x, y) не завжди можна встановити відношення Парето, як це було у випадку стратегій 3 і 5 в нашому прикладі.

Таке ставлення не встановлюється, якщо кожен з пари в чомусь краще, а в чомусь гірше "партнера "



Суть багатокритеріальних задач прийняття рішень

Щоб вибрати конкретне рішення з Парето-оптимальної безлічі

(якщо в ньому більше одного варіанту),

потрібні якісь додаткові дані, наприклад,

відомості про пріоритети критеріїв.

Відношення Парето, Парето-оптимальні рішення, безліч Парето

Щоб вибрати конкретне рішення з Парето-оптимального безлічі (якщо в ньому більше одного варіанту), потрібні якісь додаткові дані, наприклад, відомості про пріоритети критеріїв.

Припустимо, у Васі вибір - з якою дівчиною зустрічатися:

Катя красива, але не дуже розумна,

Маша розумна, але не дуже красива

Дуся і не розумна, і некрасива

Васі потрібна дівчина розумніше і красивіше.

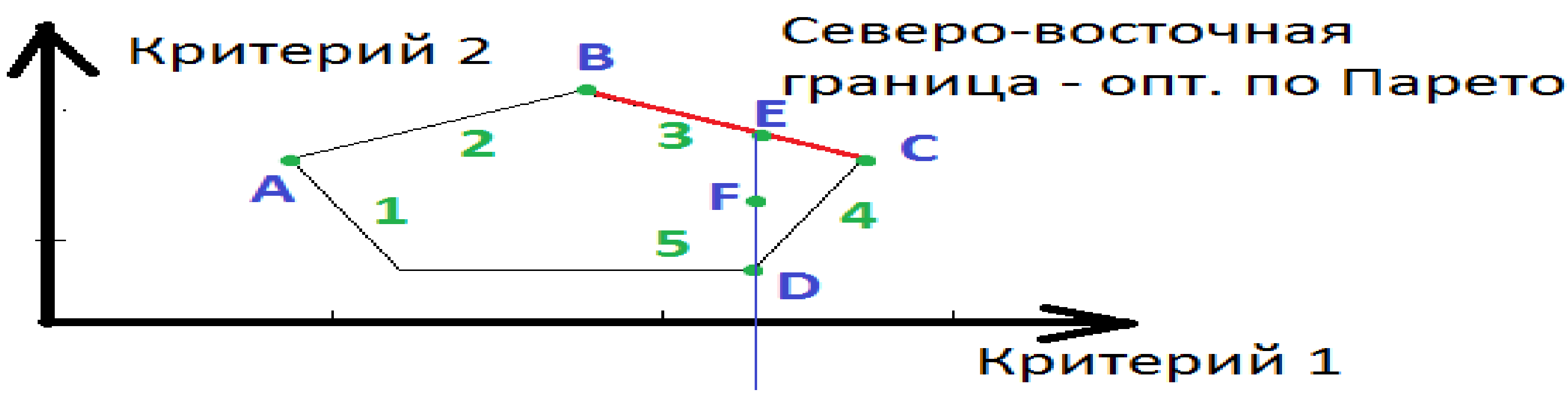
Парето-оптимальна безліч: **{Катя, Маша}.**

Далі Парето не помічник, тут вже що важливіше - розум чи краса?

Відношення Парето, Парето-оптимальні рішення, безліч Парето

Парето-оптимальні рішення на безперервних множинах варіантів

Є ще одне питання - а як застосовувати всю цю теорію, якщо безліч варіантів безперервна? Найпростіше, коли вона опукла, допустимо, як ось цей п'ятикутник



Улучшение: слева направо, снизу вверх

північно-східна межа контуру (відрізок BC в нашому прикладі).

Для більшої впевненості переконайтеся самі, що точки A, D, F не є Парето-оптимальними рішеннями).

Відношення Парето, Парето-оптимальні рішення, безліч Парето

Майте на увазі: це правило вірно, якщо нам потрібно, щоб величини критерії були якомога більше. Останнє не завжди буває так. Наприклад, вартість придбання, витрата палива повинні зводитися до мінімуму.

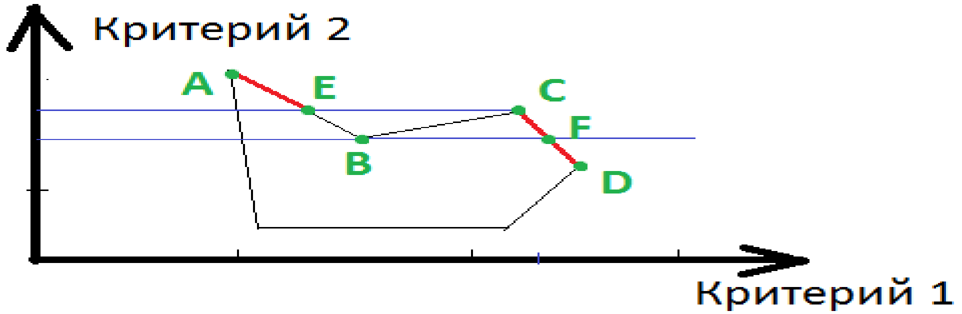
В цьому випадку потрібно замінити "мін" на "макс" аналоги,

наприклад, витрата - на економію,

ймовірність збою - на ймовірність безперебійного функціонування ...

Скажімо, якщо ймовірність збою = 0,02, то надійність становить 0,98.

Відношення Парето, Парето-оптимальні рішення, безліч Парето якщо безліч неопукла



Зрозуміло, що знову поза північно-східного кордону не може бути Парето-оптимальних варіантів. Отже, Парето-оптимальні варіанти можуть бути тільки **на ламаній ABCD, але й тут є "негідні" варіанти.**

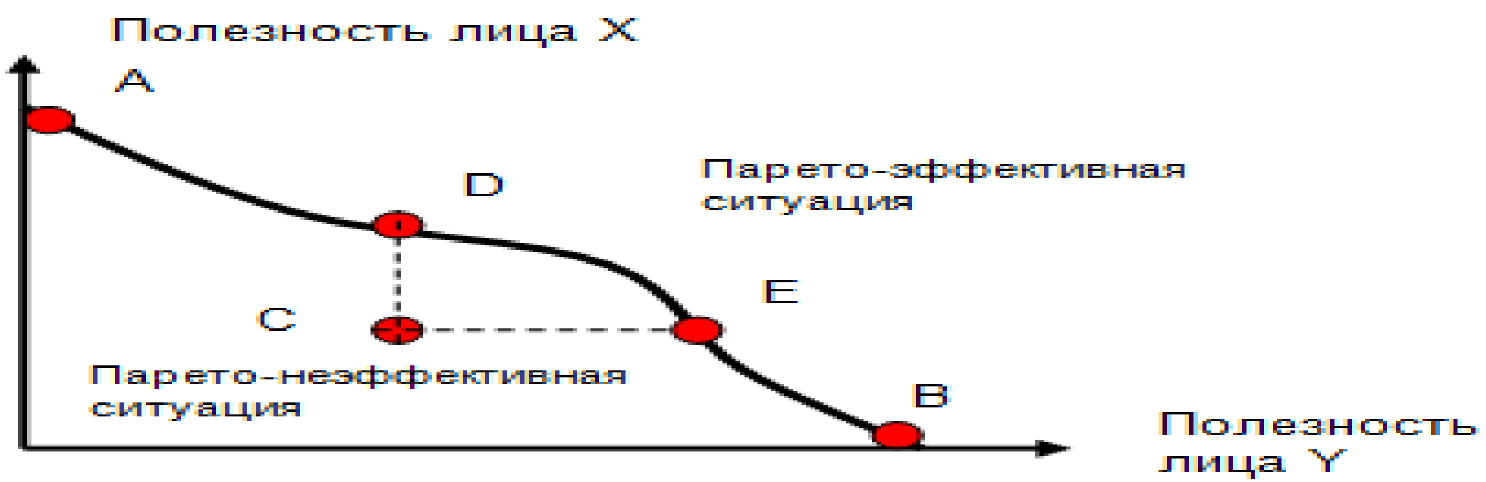
Залишається їх відсіяти.

Провівши побудови, як на малюнку, бачимо, що безліч Парето утворюється з двох груп варіантів.

1. Відрізок AE, виключаючи точку E (оскільки C> E), за рахунок високих показників по другому критерію.
2. Відрізок CD - за рахунок високих показників за першим критерієм.

Відношення Парето, Парето-оптимальні рішення, безліч Парето

Кажуть, що ресурси розподілені оптимально по Парето, коли ніхто не може поліпшити становище без того, щоб в результаті для кого-небудь воно не погіршилося.



2. Формальна Постановка Задачі багатокритеріальної оптимізації

Приклад задачі

- **Товариство, утворене трьома засновниками, має на меті максимізацію прибутку кожного із засновників.**

- **Перший засновник за свій рахунок орендує для товариства землю (b1), а привласнює тільки виручку від реалізації зерна.**
- **Другий купує за свій рахунок добрива (b2), а привласнює тільки виручку від реалізації картоплі.**
- **Третій отримує і оплачує кредит (b3), присвоює виручку від реалізації капусти.**

- **Відомі потреби культур в добривах і в оборотному капіталі (A), ціни культур (c) і ресурсів (d).**
- **Площі під названими культурами - x1, x2 і x3 відповідно.**

- **Знайти план, при якому кожен з учасників товариства отримує максимальний прибуток**

Приклад задачі

$x_1+x_2+x_3 \le b_1$ –баланс земельних угідь,*га*

$a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3 \le b_2$ – баланс добрив, *т*

$a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3 \le b_3$ – баланс оборотного капіталу, тис грн.

$\max c_1x_1 - d_1b_1$ – прибуток першого засновника, тис. грн.

$\max c_2x_2 - d_2b_2$ – прибуток другого засновника, *тис.* грн.

$\max c_3\, x_3 - d_3b_3$ - прибуток третього засновника, *тис*. грн.

При таких обставинах майже завжди існує безліч рішень, при яких кожна цільова функція виявляється в оптимумі.

Але ці рішення не рівноцінні з позицій кожного з учасників товариства.

Один з них вважатиме за краще ***одне рішення, інший - інше***.

Не існує формального правила вирішення цього конфлікту,

якщо тільки учасники самі не домовляться про яке-небудь правило

Задача векторного програмування

Це задача знаходження оптимуму **двох або більше функцій**, що задовольняє умовам, заданим у формі рівнянь і нерівностей.

Рішенням задачі векторного програмування вважається **вектор таких значень її змінних,** при яких *не можна поліпшити значення жодної цільової функції* інакше, ніж за рахунок погіршення іншої цільової функції.

Задача векторного програмування

Рішення задачі векторного програмування часто називають оптимумом по Парето
(***На честь видатного італійського економіста XIX століття, який вперше сформулював таку задачу запропонував принцип непогіршення цільових функцій***).

Всю сукупність різних оптимумів по Парето задачі векторного програмування часто називають

МножиноюПарето або поверхнею Парето

Задача векторного програмування в загальному вигляді

- Задача математичного програмування:

$$\begin{cases} \max z(x) \\ f(x) \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Скаляр

- Задача векторного програмування:

$$\begin{cases} \max Z(x) \\ f(x) \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Вектор

Лінійна Задача векторного програмування в загальному вигляді

- Задача лінійного програмування:

$$\begin{cases} \max\ cx \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

- Лінійна задача векторного програмування:

$$\begin{cases} \max\ Cx \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

Задача векторного програмування в загальному вигляді

Формулюється таким чином:

$$\min_{\vec{x}}\{f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_k(\vec{x})\},$$

$$\vec{x} \in S$$

де $f_i : R^n \to R$ це k ,$k \geq 2$ *цільових функцій.*

Вектори розв'язків $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

належать до не порожньої області визначення S.

Задача багатокритеріальної оптимізації полягає у пошуку вектора цільових змінних, який задовільняє накладеним обмеженням та оптимізує векторну функцію, елементи якої відповідають цільовим функціям.

Ці функції утворюють математичне описання критерію задовільності та, зазвичай, взаємно конфліктують.

«Оптимізувати» означає знайти такий розв'язок, за якого значення цільових функцій були б прийнятними для постановника задачі

3.Проблеми та класифікація методів вирішення задач багатокритеріальної оптимізації

Проблеми та класифікація методів вирішення задач багатокритеріальної оптимізації

решаются задачи принятия решений одновременно по нескольким критериям. Задача МКО ставится следующим образом: требуется найти числа $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющие системе ограничений

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i, \; i = 1, 2, ..., m, \tag{3.1}$$

для которых функции

$$z_k = f_k(x_1, x_2, ..., x_n), \; k = 1, 2, ..., K, \tag{3.2}$$

достигают максимального значения.

Множество точек $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих системе (3.1), образует *допустимую область* $D \subset R^n$. Элементы множества D называются *допустимыми решениями* или *альтернативами*, а числовые функции f_k, $k = 1, 2, ..., K$ – *целевыми функциями*, или *критериями*, заданными на множестве D.

Проблеми та класифікація методів вирішення задач багатокритеріальної оптимізації

- При вирішенні задач БКО доводиться вирішувати специфічні питання, пов'язані з невизначеністю цілей і несумірністю критеріїв.
- основні проблеми, що виникають при розробці методів МКО.
  1. Проблема **нормалізації критеріїв**, тобто приведення критеріїв до єдиного (безрозмірного) масштабом виміру.
  2. Проблема **вибору принципу оптимальності**, тобто встановлення, в якому сенсі оптимальне рішення краще за всіх інших рішень.
  3. Проблема **врахування пріоритетів критеріїв**, що виникає в тих випадках, коли з фізичного змісту ясно, що деякі критерії мають пріоритет над іншими.
  4. Проблема **обчислення оптимуму задачі МКО**. Йдеться про те, як використовувати методи лінійної, нелінійної, дискретної оптимізації для обчислення оптимуму задач з певною специфікою

Нормалізація (нормування) критеріїв

При вирішенні багатокритеріальної задачі часто виникає необхідність нормалізації (нормування) критеріїв $f_k(X)$ тобто приведення всіх критеріїв до єдиного масштабу і безрозмірного вигляду. Надалі будемо вважати, що всі критерії невід'ємні, тобто $f_k(X) \geq 0$ для всіх $X \in D$.
Найбільш часто використовується заміна критеріїв їх безрозмірними відносними величинами: $\lambda_k(X) = \frac{f_k(X)}{f_k^*}$, де $f_k^* = \max_{X \in D} f_k(X)$

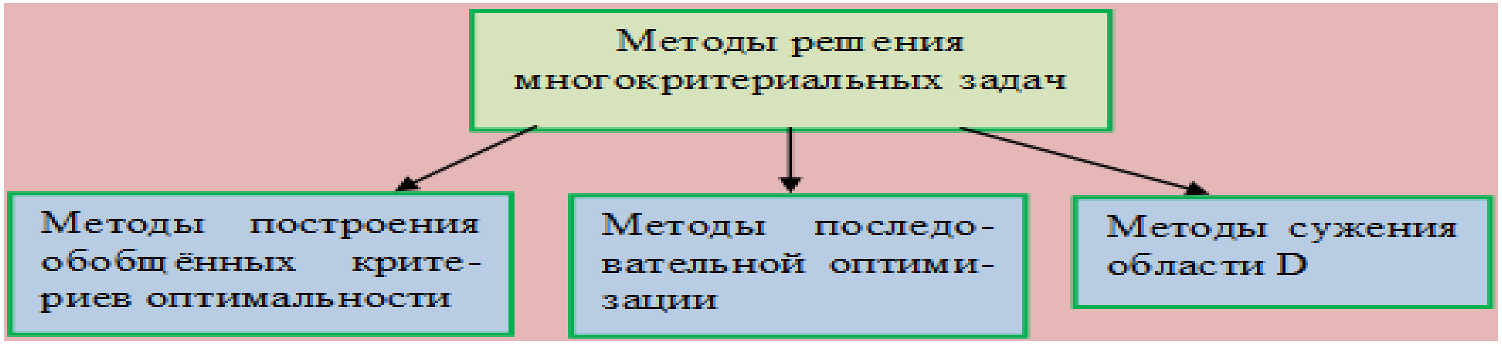
Нормалізовані критерії мають двома важливими властивостями: по-перше, вони є безрозмірними величинами, і, по-друге, вони задовольняють нерівності $0 \leq \lambda_k(X) \leq 1$ для будь-якого $X \in D$.

Ці властивості дозволяють порівнювати критерії між собою.

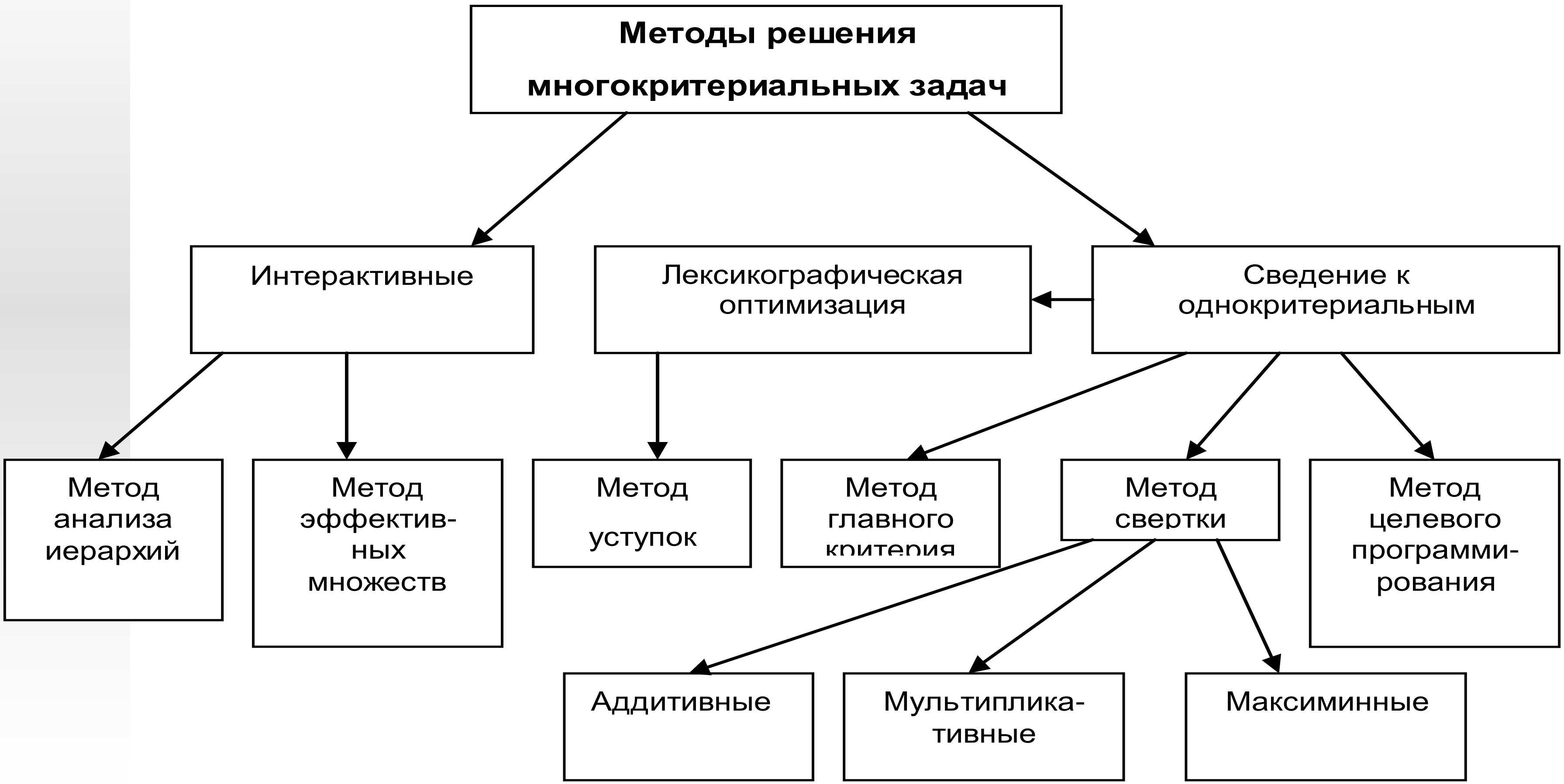
Методи вирішення задач багатокритеріальної оптимізації

Розвиваються за трьома напрямками (деякі автори називають більше):

- **Заміна векторного критерію скалярним критерієм, тобто перехід до однокритеріальної задачі оптимізації**;
- **Послідовне вирішення кінцевої безлічі однокритеріальних задач;**
- **Звуження Області Парето з наступним безпосереднім вибором оптимального рішення**



Класифікація методів вирішення задач багатокритеріальної оптимізації



Класифікація методів вирішення задач багатокритеріальної оптимізації. Методи, основані на згортанні критеріїв

Замість K часткових критеріїв $f_1, f_2, \dots, f_K$ розглядається один скалярний критерій, отриманий шляхом **комбінації часткових критеріїв**.

Розрізняють

- **адитивний і**
- **мультиплікативний**

методи згортання критеріїв.

Методи, основані на згортанні критеріїв. Адитивнана згортка

Нехай критерії співмірні, наприклад, нормовані та визначено вектор вагових коефіцієнтів критеріїв $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_K)$, що характеризують важливість відповідного критерію.

Це значить, що $\alpha_i \geq \alpha_j$, якщо критерій f_i має пріоритет над критерієм f_j. при цьому

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1 \qquad \alpha_k \geq 0$$

Для адитивного методу будується нова цільова функція

- $$f(X) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k f_k(X)$$

  і вирішується задача оптимізації скалярного критерію $z = f(X) \to \max$
  за умови $X \in D$

Методи, основані на згортанні критеріїв. Мультиплікативна згортка

Для мультиплікативного методу підхід до вирішення аналогічний, тільки цільова функція має вигляд

$$f(X) = \prod_{k=1}^{K} f_k^{\alpha_k}(X)$$

Причому.

$$\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1, \ \alpha_k \geq 0$$

Недолік методів згортання критеріїв

Основний і **дуже суттєвий Недолік**

суб'єктивність вибору коефіцієнтів

$$\alpha_k$$

!!!!!!!!!!!!!!!

Метод головного критерія

Вибирається основний (головний) серед критеріїв. Нехай це, наприклад $f_1(X)$.

Всі інші цільові функції переводяться в розряд обмежень:

Відповідно до вимог ОПР на всі критерії накладаються певні обмеження, яким вони повинні задовольняти. Вводиться система контрольних показників $\tilde{f}_k$, щодо яких за всіма критеріями мають бути досягнуті значення, що не менше заданих значень $f_k(X) \geq \tilde{f}_k \quad k = 1, 2, \ldots, K$

Метод головного критерія

Після вибору основного критерію і встановлення нижніх меж для решти критеріїв вирішується задача однокритеріальної оптимізації::

$$f_1(X) \to \max$$

при умовах

$$\begin{cases} f_k(X) \geq \tilde{f}_k, \; k = 1,2,\ldots,K \\ X \in D \end{cases}$$

Метод послідовних поступок

В цьому методі ***критерії нумеруються в порядку убування важливості***. Нехай критерії

$$f_1, f_2, \ldots, f_K$$

записані в порядку зменшення їх важливості.

Тоді повинні бути виконані наступні дії.

1-й крок. Вирішується **однокритеріальна задача по 1-му критерію**:

$$z_1^* = \max_{X \in D} f_1(X)$$

Метод послідовних поступок

2-й крок. Призначається розумна з інженерної точки зору **поступка** Δz_1 ,

Ставиться і вирішується **нова задача оптимізації** по 2-му критерію

$$z_2^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \geq z_1^* - \Delta z_1}} f_2(X)$$

Метод послідовних поступок

3-й крок. Призначається ***поступка для 2-го критерію*** Δz_2 , складається і вирішується ***задача оптимізації по 3-му критерію:***

$$z_3^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \ge z_1^* - \Delta z_1 \\ f_2(X) \ge z_2^* - \Delta z_2}} f_3(X)$$

Процес призначення поступок по кожному критерію та рішення однокритеріальних задач триває, поки не дійдемо до останнього ***K - го кроку***.

Метод послідовних поступок

- **К-й крок.** Призначається ***поступка для К-1 – го критерію***, складається і вирішується ***задача оптимізації за останнім К - м критерієм*** :

$$z_K^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \geq z_1' - \Delta z_1 \\ f_2(X) \geq z_2' - \Delta z_2 \\ \dots \\ f_{K-1}(X) \geq z_{K-1}' - \Delta z_{K-1}}} f_K(X)$$

Метод послідовних поступок.

Основний Недолік

п о л я г а є в

суб'єктивності вибору

- **контрольних показників**
- **поступок.**

При використанні методу послідовних поступок слід пам'ятати, що **поступки можуть бути несумірні між собою**,

тому **треба попередньо організувати нормалізацію критеріїв.**

Крім того, в загальному випадку вже з 2-го кроку **рішення може виявитися не оптимальним за Парето.**

Метод цільового програмування

Назва цієї групи методів пов'язані з тим, що **ОПР задає певні цілі** $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_K$ для кожного критерія.

Задача БКО перетвориться в задачу **мінімізації суми відхилень** з деяким показником P :

$$z = \left(\sum_{k=1}^{K} w_k \left| f_k(X) - \bar{f}_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow \min \qquad \text{при } X \in D,$$

де w_k – вагові коефіцієнти, що характеризують важливість того чи іншого критерія.

Метод цільового програмування

Задачу можна конкретизувати залежно від значень параметра P і заданих цілей. Зокрема,при $p = 2$ та $w_k = 1$ отримаємо задачу мінімізації суми квадратів відхилень :

$$z = \sqrt{\sum_{k=1}^{K} \left| f_k(X) - f_k^* \right|^2} \to \min \text{ при } X \in D,$$

- в якій мінімізується евклідова відстань від множини досяжності F до «абсолютного максимума» $f^* = (f_1^*, f_2^*, \ldots, f_l^*)$ в просторі критеріїв. Тут $f_k^* = \max\limits_{X \in D} f_k(X)$

Метод цільового програмування

Ускладнення, зумовлені несумірністю величин,

$$\left| f_k(X) - f_k^* \right|$$

можна подолати за допомогою ***нормалізації критеріїв***, розглядаючи таку задачу оптимізації

$$z = \sqrt{\sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\left| f_k(X) - f_k^* \right|}{f_k^*} \right)^2} \to \min \qquad \text{при } X \in D.$$