Теоретичні відомості:

Знаходження оптимального програмного керування

1^0. Постановка задачі. Припустимо, що модель об'єкта керування і його поведінка описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{\vec{x}}(t) = f(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t)). \qquad (1)$$

У цьому рівнянні

$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – вектор стану системи;

$\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$ – вектор управління;

t – час;

$T = [t_0, t_1]$ – проміжок часу функціонування системи;

$U \subseteq R^q$ – множина допустимих значень керування;

$\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{u}) = (f_1(t, \vec{x}, \vec{u}), f_2(t, \vec{x}, \vec{u}), ..., f_n(t, \vec{x}, \vec{u}))^T$.

Припустимо також, що момент початку процесу $t = t_0$ заданий, а момент закінчення процесу $t = t_1$ визначається першим моментом досягнення точкою $(t, x(t))$ деякої заданої поверхні $\Gamma \subset R^{n+1}$, тобто у момент часу $t = t_1$ повинні виконуватись умови:

$$\Gamma_i(t_1, x(t_1)) = 0, \qquad i = 1,2,..., l, \qquad (2)$$

де $0 \le l \le n+1$. При $l = n+1$ множина Γ представлена точкою у просторі.

Разом з моментом початку процесу задамо *початкову умову*

$$\vec{x}(t_0) = x_0 . \qquad (3)$$

При керуванні такою системою поки що буде використовуватись тільки інформація про час, тобто система керування у даному випадку є розімкнутою за станом і розглядається так зване *програмне керування*.

Множина допустимих керувань U_0 утворює кусково-неперервні функції $u(\bullet)$ зі значеннями у множині U. У точках розриву значення керування визначається як границя справа.

Введемо у розгляд множину допустимих процесів $D(t_0, \vec{x}_0)$, як множину трійок $d = (t_1, x(\bullet), u(\bullet))$, які включають момент закінчення процесу, траєкторію $x(\bullet)$, керування $u(\bullet)$, що задовольняють рівнянню (1) і початковим умовам (3).

На множині $D(t_0, \vec{x}_0)$ визначимо функціонал якості

$$\int_{t_0}^{t_1} f^{\circ}(t, \vec{x}(t), \vec{u}(t))dt + F(t_1, \vec{x}(t)), \qquad (4)$$

де f° і F – задані неперервно диференційовані функції.

Потрібно знайти таку трійку $d^* = \left(t_1^*, \vec{x}^*(t_1), \vec{u}^*(t_1)\right) \in D(t_0, x_0)$, на якій функціонал (4) набуває мінімальних значень.

Задача мінімізації функціоналу (4) називається *задачею Больца*; якщо у функціоналі (4) відсутній термінальний член – *задачею Лагранжа*; якщо відсутній інтегральний член – *задачею Майера.*

Пошукові функції $x^*(\bullet), u^*(\bullet)$ називаються відповідно *оптимальною траєкторією* і *оптимальним керуванням*, а t_1^* – *оптимальним моментом* кінця процесу.

2⁰. Принцип максимуму. Нехай на трійці $d^* = \left(t_1^*, \vec{x}^*(\bullet), \vec{u}^*(\bullet)\right) \in D(t_0, x_0)$ досягається мінімум функціоналу (4). Тоді існує така вектор-функція $\vec{\psi}(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))^T$, що:

1) у кожній точці неперервності керування $u^*(t)$ функція (гамільтоніан)

$$H(t, \vec{\psi}, \vec{x}, \vec{u}) = \sum_{j=1}^{n} \psi_j f_j(t, \vec{x}, \vec{u}) - f^{\circ}(t, \vec{x}, \vec{u}) \qquad (5)$$

досягає максимуму по керуванню, тобто

$$\max_{u \in U} H\left(t, \psi(t), \vec{x}^*(t), \vec{u}\right) = H\left(t, \psi(t), \vec{x}^*(t), \vec{u}\right);$$

2) виконується умова трансверсальності

$$\delta F\left(t_1^*\right) - H\left(t_1^*\right)\delta t_1 + \sum_{j=1}^{n} \psi_j\left(t_1^*\right)\delta x_j = 0, \qquad (6)$$

при довільних δt_1 і δx_j, що задовольняють систему

$$\begin{aligned} \delta \Gamma_i\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) &= 0, \qquad i = 1, \dots, l \\ \Gamma_i\left(t_1^*, x^*\left(t_1^*\right)\right) &= 0, \qquad i = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

де $H\left(t_1^*\right)=H\left(t_1^*,\, x^*\left(t_1^*\right), u^*\left(t_1^*\right), \psi\left(t_1^*\right)\right)$, а варіації визначаються таким чином

$$\delta F_i\left(t_1^*\right)=\delta F_i\left(t_1^*,\vec{x}^*\left(t_1^*\right)\right)=\left.\left(\frac{\partial F}{\partial t_1}\delta t_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_j}\delta x_j\right)\right|_{\left(t_1^*,\vec{x}^*\left(t_1^*\right)\right)},$$

$$\delta \Gamma_i\left(t_1^*,\vec{x}^*\left(t_1^*\right)\right)=\left.\left(\frac{\partial \Gamma_i}{\partial t_1}\delta t_1+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_j}\delta x_j\right)\right|_{\left(t_1^*,\vec{x}^*\left(t_1^*\right)\right)};$$

3) функції $x^*(\bullet), u^*(\bullet)$ задовольняють систему канонічних рівнянь:

$$\begin{cases}\dot{x}_j^*(t)=\dfrac{\partial H}{\partial \psi_j}=f_j\left(t,x^*(t),u^*(t)\right), & j=1,\ldots,l,\\ \dot{\psi}_j(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_j}, & j=1,\ldots,l.\end{cases} \qquad (7)$$

Задача про швидкодію

Знайти оптимальне по швидкодії керування $u^*(\cdot)$ і відповідну йому оптимальну траєкторію $x^*(\cdot)$ системи:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - 8;$$
$$\dot{x}_2(t) = u(t), \qquad |u(t)| \le 1, \qquad 0 \le t \le T,$$

і час T, затрачений на перехід із початкового стану $x_1(0) = 6,\ x_2(0) = 4$ у початок координат.

<u>Розв'язання:</u>

Сформулюємо проблему у формі задачі мінімізації функціоналу: функціонал якості тут може бути заданий двома способами:

або $T \to \min$ (задача Майєра за класифікацією типів задач оптимального керування)

або $I = \int_0^T dt \to \min$ (задача Лагранжа),

де момент закінчення процесу керування T не заданий і підлягає визначенню. У даному прикладі $f_1(t,x,u) = x_2 - 8,\ f_2(t,x,u) = u,$ і $f^\circ(t,x,u) = 1,\ F(t_1,x) \equiv 0,$ $t_1 = T,$ $\Gamma_1(T,x(T)) = x_1(T) = 0,\ \Gamma_2(T,x(T)) = x_2(T) = 0$.

Розв'язується задача Лагранжа.

Потрібно знайти оптимальне програмне управління $u^*(\cdot)$, відповідну йому траєкторію $x^*(\cdot)$ і час T.

1. Складемо гамільтоніан:

$$H(t,\vec{\psi},\vec{x},u) = \psi_1(x_2 - 8) + \psi_2 u - 1.$$

2. Знайдемо умовний максимум гамільтоніана за керуванням. Так як гамільтоніан – функція лінійна за змінною u, то вона може набувати найбільшого свого значення на границі області значень змінної $|u(t)| \le 1$, тобто $u = 1$ або $u = -1$. Найбільше значення гамільтоніан буде мати за умови, що $\psi_2(t)u > 0$. Таким чином.

$$u^*(t) = \arg\max_{|u|\le 1} H(t,\vec{\psi}(t),\vec{x}(t),u) = 1 \cdot sign\,\psi_2(t).$$

4) Запишемо канонічні рівняння принципу максимуму

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - 8, & x_1(0) = 6, \quad x_1(T) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = u^*(t) = sign\psi_2, & x_2(0) = 4, \quad x_2(T) = 0, \\ \dot{\psi}_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0, & \\ \dot{\psi}_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1(t). & \end{cases}$$

На інтервалі $(0,T)$ розв’язок спряженої системи - функція $\psi_2(t)$ змінює знак не більше 1, так як функція $\psi_2(t)$ лінійна за аргументом t.

Таким чином, в залежності від початкових умов (при $t = 0$) можливі такі 4 випадки керувань системою:

– на інтервалі часу $(0,T)$ керування носить постійний характер:

а) $u^* = 1,\ 0 \le t \le T$;

б) $u^* = -1,\ 0 \le t \le T$;

– керування має одну точку перемикання $0 < \tau < T$:

в) $u^* = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \tau; \\ -1, & \tau \le t \le T. \end{cases}$

г) $u^* = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \tau; \\ 1, & \tau \le t \le T. \end{cases}$

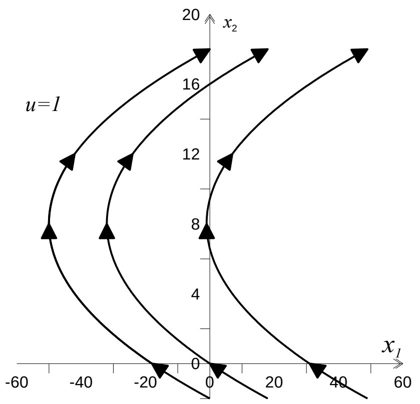
5) На фазовій площині (x_1, x_2) побудуємо графіки множин фазових траєкторій, що відповідають таким випадкам керування системою

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) - 8;$$
$$\dot{x}_2(t) = u^*(t), \quad |u(t)| \le 1, \quad 0 \le t \le T,$$

а) $u^* = 1,\ 0 \le t \le T$;

Розв’яжемо систему у просторі фазових змінних

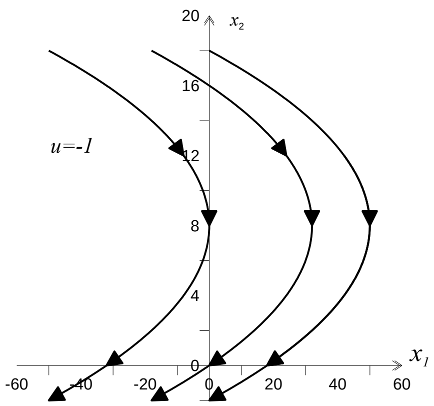
$\dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{x_2 - 8}{1} \Rightarrow x_1 - C = \dfrac{(x_2 - 8)^2}{2}$ - це множина парабол, вершини яких розташовані на прямій $x_2 = 8$ в точках $(C,8)$ на фазовій площині (x_1, x_2). Напрям руху вздовж парабол у часі визначається рівнянням $\dot{x}_2(t) = u^*(t) = 1 > 0$, тобто рух відбувається у напрямку збільшення x_2. Зобразимо це на фазовій площині:



б) $u^* = -1, \ 0 \le t \le T$;

Розв'яжемо систему у просторі фазових змінних

$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2 - 8}{-1} \Rightarrow x_1 - C = -\frac{(x_2 - 8)^2}{2}$ - це множина парабол, вершини яких розташовані на прямій $x_2 = 8$ в точках $(C,8)$ на фазовій площині (x_1, x_2). Напрям руху вздовж парабол у часі визначається рівнянням $\dot{x}_2(t) = u^*(t) = -1 < 0$, тобто рух відбувається у напрямку зменшення x_2. Зобразимо це на фазовій площині:

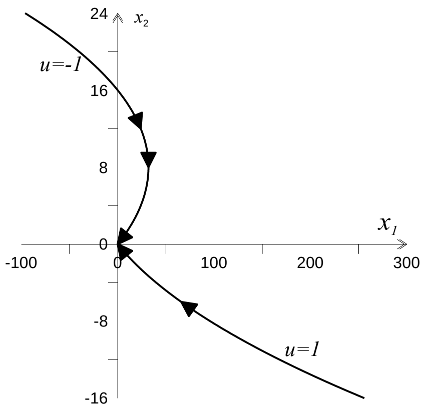


Серед усіх можливих фазових траєкторій виділимо лише ті, за якими можливо досягти початку координат $x_1(T) = 0, \ x_2(T) = 0$:

– при $u^* = 1$ знаходимо сталу $x_1 - C = \frac{(x_2 - 8)^2}{2} \Rightarrow C = -\frac{8^2}{2} = -32$, тобто лінія $x_1 = \frac{(x_2 - 8)^2}{2} - 32$ проходить через початок координат, причому в нашому випадку потрапити у початок координат за цією лінією можливо лише за умови, що $x_2 \le 0$.

– при $u^* = -1$ знаходимо сталу $x_1 - C = -\frac{(x_2 - 8)^2}{2} \Rightarrow C = \frac{8^2}{2} = 32$, тобто лінія $x_1 = -\frac{(x_2 - 8)^2}{2} + 32$ проходить через початок координат, причому в нашому випадку потрапити у початок координат за цією лінією можливо лише за умови, що $x_2 \ge 0$.

Таким чином, лінія перемикання виглядає так:



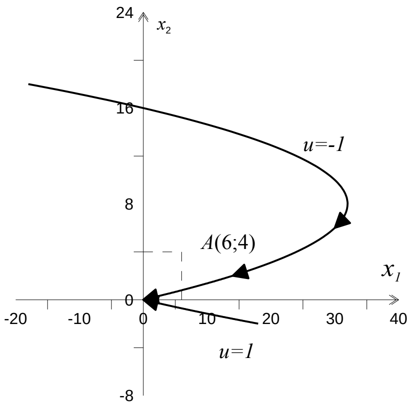
Для того щоб знайти остаточно тип керування, необхідно проаналізувати місце де знаходиться система у початковий момент:

– якщо у початковий момент система знаходиться в одній з точок лінії перемикання, тоді керування є стала величина (або $u^* = 1$, або $u^* = -1$);

– якщо початкова умова така, що точка лежить вище лінії перемикання, тоді керування має вигляд: $u^* = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \tau; \\ 1, & \tau \le t \le T \end{cases}$;

– якщо початкова умова така, що точка лежить нижче лінії перемикання, тоді керування має вигляд: $u^* = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \tau; \\ -1, & \tau \le t \le T. \end{cases}$

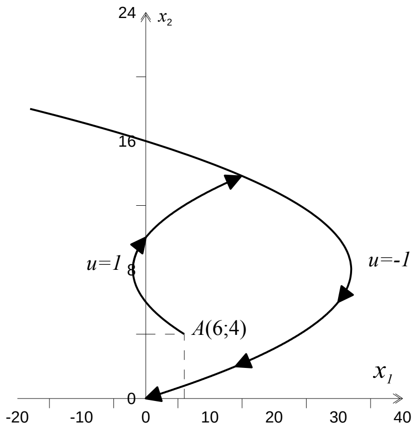
В нашому випадку $x_1(0) = 6$, $x_2(0) = 4$ точка $A(6,4)$ знаходиться нижче лінії перемикання



і тому

$$u^* = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \tau; \\ -1, & \tau \le t \le T. \end{cases}$$

Тобто, спочатку точку А за час τ необхідно перевести на лінію керування за допомогою керування $u^*=1$, а потім система досягне початку координат по лінії керування:



6) Знайдемо час τ - точку перемикання керування, та час T за який система з початкового стану перейде у початок координат.

Для цього знайдемо фазові змінні, як функції часу з рівнянь руху:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - 8; \\ \dot{x}_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \tau; \\ -1, & \tau < t \le T. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \begin{cases} \dfrac{(t + C_1 - 8)^2}{2} + D_1, & 0 \le t \le \tau; \\ -\dfrac{(t + C_2 + 8)^2}{2} + D_2, & \tau < t \le T. \end{cases} \\ x_2(t) = \begin{cases} t + C_1, 0 \le t \le \tau; \\ -(t + C_2), & \tau < t \le T. \end{cases} \end{cases}$$

Врахуємо граничні умови:

$$x_1(0) = 6, \Rightarrow \frac{(C_1 - 8)^2}{2} + D_1 = 6$$

$$x_1(T) = 0, \Rightarrow \frac{(T + C_2 + 8)^2}{2} = D_2$$

$$x_2(0) = 4, \Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow D_1 = 6 - 8 = -2;$$

$$x_2(T) = 0 \Rightarrow T + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -T \Rightarrow D_2 = 32.$$

Таким чином,

$$\begin{cases} x_1(t)=\begin{cases}\dfrac{(t-4)^2}{2}-2, & 0\le t\le\tau;\\ -\dfrac{(t-T+8)^2}{2}+32, & \tau<t\le T.\end{cases}\\ x_2(t)=\begin{cases} t+4, & 0\le t\le\tau;\\ -(t-T), & \tau<t\le T.\end{cases}\end{cases}$$

Час τ і T знайдемо з умови неперервності фазових траєкторій:

$$x_1(\tau-0)=x_1(\tau+0)\Rightarrow\frac{(\tau-4)^2}{2}-2=-\frac{(\tau-T+8)^2}{2}+32$$

$$x_2(\tau-0)=x_2(\tau+0)\Rightarrow\tau+4=-(\tau-T)\Rightarrow 2\tau=T-4$$

Тоді

$$\tau-4=\frac{T-12}{2};\qquad \tau-T+8=\frac{T-4}{2}-T+8=-\frac{(T-12)}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{T-12}{2}\right)^2}{2}-2=-\frac{\left(\frac{T-12}{2}\right)^2}{2}+32\Rightarrow\left(\frac{T-12}{2}\right)^2=34\Rightarrow T_{1,2}=12\pm2\sqrt{34}$$

Так як $\tau>0\Rightarrow T>4$ за змістом, то $T=12+2\sqrt{34}$, тоді $\tau=\dfrac{T-4}{2}=4+\sqrt{34}$

Отже, оптимальний керований процес описується так

Відповідь:

$$u^*=\begin{cases}1, & 0\le t<4+\sqrt{34};\\ -1, & 4+\sqrt{34}\le t\le 12+2\sqrt{34}.\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t)=\begin{cases}\dfrac{(t-4)^2}{2}-2, & 0\le t\le 4+\sqrt{34};\\ -\dfrac{(t-4-2\sqrt{34})^2}{2}+32, & 4+\sqrt{34}<t\le 12+2\sqrt{34}.\end{cases}\\ x_2(t)=\begin{cases} t+4, & 0\le t\le 4+\sqrt{34};\\ -(t-(12+2\sqrt{34})), & 4+\sqrt{34}<t\le 12+2\sqrt{34}.\end{cases}\end{cases}$$

$$T=12+2\sqrt{34}$$