ДИСКРЕТНІ РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

ГРАФОВІ ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ

Сумський державний університет

Розподіл Пуассона

Сімеон-Дені Пуассон (фр. Simeon-Denis Poisson) (21 червня 1781 – 25 квітня 1840, Париж) – французький фізик і математик

Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона моделює випадкову величину, яка представляє собою число подій, що відбулися за фіксований час, за умови, що дані події відбуваються з деякою фіксованою середньою інтенсивністю і незалежно один від одного.
Цей розподіл інтенсивно використовується в картах контролю якості, теорії масового обслуговування, в задачах з телекомунікацій, медичній статистиці і т.і.

Розподіл Пуассона

Пуассонівська модель зазвичай описує схему рідкісних подій: при деяких припущеннях про характер процесу появи випадкових подій

- число подій, що відбулися за фіксований проміжок часу
- число подій, що відбулися у фіксованій області простору.

Прикладами можуть служити

- число часток радіоактивного розпаду, зареєстрованих лічильником протягом деякого часу t,
- число викликів, що надійшли на телефонну станцію за час t,
- кількість дефектів у зразку фіксованої довжини і т.і.

Розподіл Пуассона

Властивості розподілу Пуассона

- Нас цікавить, скільки разів відбувається якась подія в заданій області можливих результатів випадкового експерименту. Область можливих результатів може являти собою інтервал часу, відрізок, поверхня і т.п.
- Імовірність даної події однакова для всіх областей можливих результатів.
- Кількість подій, що відбуваються в одній області можливих результатів, не залежить від кількості подій, що відбуваються в інших областях.
- Імовірність того, що в одній і тій же області можливих результатів дана подія відбувається більше одного разу, прямує до нуля в міру зменшення області можливих результатів.

Розподіл Пуассона

- $f(X \Rightarrow k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- де λ – параметр процесу. Цей параметр часто називають інтенсивністю пуассонівського процесу.

Розподіл Пуассона

Щоб зрозуміти сенс пуассоновского процесу та його властивостей, розглянемо приклад.

Розподіл Пуассона

Щоб зрозуміти сенс пуассоновского процесу та його властивостей, розглянемо приклад.
Припустимо, що ми досліджуємо кількість клієнтів, що звернулися на телефонну станцію в продовж певного часу. Наприклад, потрібно визначити кількість клієнтів, що звертаються за одну хвилину.

Розподіл Пуассона

Щоб зрозуміти сенс пуассоновского процесу та його властивостей, розглянемо приклад.
Припустимо, що ми досліджуємо кількість клієнтів, що звернулися на телефонну станцію в продовж певного часу.
Наприклад, потрібно визначити кількість клієнтів, що звертаються за одну хвилину.
Чи підходить ця ситуація до властивостей розподілу Пуассона?

Розподіл Пуассона

- По-перше, подія, яка нас цікавить, являє собою звернення клієнта, а область можливих результатів — однохвилинний інтервал. Скільки звернеться клієнтів за хвилину — жодного, один, два чи більше?

Розподіл Пуассона

- По-перше, подія, яка нас цікавить, являє собою звернення клієнта, а область можливих результатів — однохвилинний інтервал. Скільки звернеться клієнтів за хвилину — жодного, один, два чи більше?
- По-друге, розумно припустити, що ймовірність звернення клієнта протягом хвилини однакова для всіх однохвилинних інтервалів.

Розподіл Пуассона

- По-перше, подія, яка нас цікавить, являє собою звернення клієнта, а область можливих результатів — однохвилинний інтервал. Скільки звернеться клієнтів за хвилину — жодного, один, два чи більше?
- По-друге, розумно припустити, що ймовірність звернення клієнта протягом хвилини однакова для всіх однохвилинних інтервалів.
- По-третє, звернення одного клієнта протягом будь-якого однохвилинного інтервалу не залежить від звернення будь-якого іншого клієнта протягом будь-якого іншого однохвилинного інтервалу.

Розподіл Пуассона

- По-перше, подія, яка нас цікавить, являє собою звернення клієнта, а область можливих результатів — однохвилинний інтервал. Скільки звернеться клієнтів за хвилину — жодного, один, два чи більше?
- По-друге, розумно припустити, що ймовірність звернення клієнта протягом хвилини однакова для всіх однохвилинних інтервалів.
- По-третє, звернення одного клієнта протягом будь-якого однохвилинного інтервалу не залежить від звернення будь-якого іншого клієнта протягом будь-якого іншого однохвилинного інтервалу.
- І, нарешті, ймовірність того, що до телефонної станції звернеться більше одного клієнта прямує до нуля, якщо часовий інтервал зменшується (наприклад, стає менше 0,1 с).

Розподіл Пуассона

Отже, кількість клієнтів, що звертаються до станції протягом однієї хвилини, описується розподілом Пуассона.

Повернемося до нашого прикладу.
Припустимо, що протягом робочого часу до телефонної станції звертається в середньому три клієнти в хвилину.

Яка ймовірність того, що в дану хвилину до телефонної станції звертається два клієнти?

А чому дорівнює ймовірність того, що до телефонної станції звертається більше двох клієнтів?

Розподіл Пуассона

Параметри	$\lambda \in [0, \infty)$
Носій функції	$k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
Розподіл ймовірностей	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$
Функція розподілу ймовірностей (cdf)	$\frac{\Gamma(\lfloor k+1 \rfloor, \lambda)}{\lfloor k \rfloor !}$ for $k \geq 0$ (де $\Gamma(x, y)$ це неповна гамма функція та $\lfloor k \rfloor$ це ціла частина)
Середнє	λ
Медіана	зазвичай приблизно $\lfloor \lambda + 1/3 - 0.02/\lambda \rfloor$
Мода	$\lfloor \lambda \rfloor$ та $\lambda - 1$ якщо λ - ціле
Дисперсія	λ
Коефіцієнт асиметрії	$\lambda^{-1/2}$
Коефіцієнт ексцесу	λ^{-1}

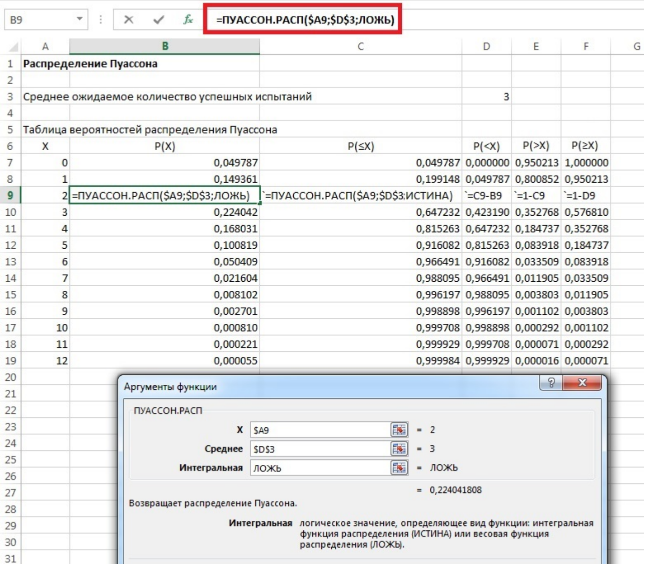
Розподіл Пуассона

$$(1)\quad P(X) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!}$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-3,0}(3,0)^2}{2!} = \frac{9}{(2,71828)^3 \times 2} = 0,2240$$

$$P(X>2) = 1 - \left[\frac{e^{-3,0}(3,0)^0}{0!}\right] + \left[\frac{e^{-3,0}(3,0)^1}{1!}\right] + \left[\frac{e^{-3,0}(3,0)^2}{2!}\right] = 0,5768$$

Розподіл Пуассона



B9 =ПУАССОН.РАСП($A9;$D$3;ЛОЖЬ)

	A	B	C	D	E	F
1	**Распределение Пуассона**					
2						
3	Среднее ожидаемое количество успешных испытаний			3		
4						
5	Таблица вероятностей распределения Пуассона					
6	X	P(X)	P(≤X)	P(<X)	P(>X)	P(≥X)
7	0	0,049787	0,049787	0,000000	0,950213	1,000000
8	1	0,149361	0,199148	0,049787	0,800852	0,950213
9	2	=ПУАССОН.РАСП($A9;$D$3;ЛОЖЬ)	`=ПУАССОН.РАСП($A9;$D$3;ИСТИНА)	`=C9-B9	`=1-C9	`=1-D9
10	3	0,224042	0,647232	0,423190	0,352768	0,576810
11	4	0,168031	0,815263	0,647232	0,184737	0,352768
12	5	0,100819	0,916082	0,815263	0,083918	0,184737
13	6	0,050409	0,966491	0,916082	0,033509	0,083918
14	7	0,021604	0,988095	0,966491	0,011905	0,033509
15	8	0,008102	0,996197	0,988095	0,003803	0,011905
16	9	0,002701	0,998898	0,996197	0,001102	0,003803
17	10	0,000810	0,999708	0,998898	0,000292	0,001102
18	11	0,000221	0,999929	0,999708	0,000071	0,000292
19	12	0,000055	0,999984	0,999929	0,000016	0,000071

Аргументы функции

ПУАССОН.РАСП

X $A9 = 2

Среднее D3 = 3

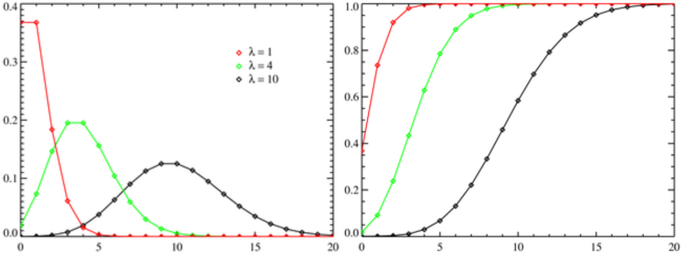
Интегральная ЛОЖЬ = ЛОЖЬ

= 0,224041808

Возвращает распределение Пуассона.

Интегральная логическое значение, определяющее вид функции: интегральная функция распределения (ИСТИНА) или весовая функция распределения (ЛОЖЬ).

Розподіл Пуассона



Розподіл Бернуллі

Якоб Бернуллі (27 грудня 1654 (6 січня 1655) – 16 серпня 1705) – швейцарський математик, основоположник теорій варіаційного числення і диференційних рівнянь, старший у знаменитій династії науковців.

Розподіл Бернуллі

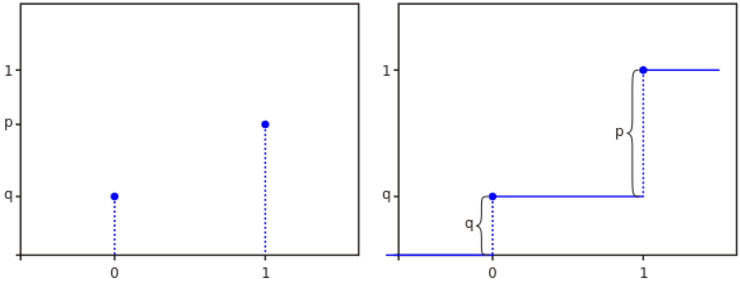
- Розподіл Бернуллі – дискретний розподіл ймовірностей для моделювання випадкового експерименту при заздалегідь відомій ймовірності успіху чи невдачі.
- Дискретна випадкова величина ξ розподілена за законом Бернуллі, якщо

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

- де основний параметр розподілу $p \in [0, 1], q = (1 - p)$

Фізично схема Бернуллі моделює багаторазове проведення незалежних реалізацій одного і того ж випадкового експерименту з двома результатами: успіх і невдача.

Розподіл Бернуллі



Біноміальний розподіл

Тепер розглянемо ситуацію іншим чином.

Біноміальний розподіл

Тепер розглянемо ситуацію іншим чином.
Дійсно, кому цікаво, що середнє випадання цифри при одному киданні монети дорівнює 0,5?

Біноміальний розподіл

Тепер розглянемо ситуацію іншим чином.
Дійсно, кому цікаво, що середнє випадання цифри при одному киданні монети дорівнює 0,5?
Цікавіше поставити питання про число випадання цифри при заданій кількості експериментів.

Біноміальний розподіл

Тепер розглянемо ситуацію іншим чином.
Дійсно, кому цікаво, що середнє випадання цифри при одному киданні монети дорівнює 0,5?
Цікавіше поставити питання про число випадання цифри при заданій кількості експериментів.
Іншими словами, дослідника часто цікавить ймовірність настання деякого числа успішних подій. Це може бути кількість бракованих виробів у перевіреній партії (1- бракована, 0 - придатна) або кількість хворих (1 - здоровий, 0 - хворий) і т.д.
Кількість таких успіхів буде дорівнює сумі всіх значень змінної X, тобто кількістю одиничних випадків.

Біноміальний розподіл

Дискретна випадкова величина ξ підпорядкована біноміальному розподілу, якщо ймовірність набуття нею конкретних значень

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, ...n$$

$$p_Y(k) \equiv \mathbb{P}(Y = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n,$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Біноміальний розподіл

Розрахуємо по цій формулі ймовірність випадання 40 цифр, коли експеримент з підкиданням монети проводили 100 разів

Біноміальний розподіл

Розрахуємо по цій формулі ймовірність випадання 40 цифр, коли експеримент з підкиданням монети проводили 100 разів

$$P(B = 40) = C_{100}^{40} \times 0{,}5^{40} \times (1 - 0{,}5)^{100-40} = \frac{100!}{40!\,(100-40)!} \times 0{,}5^{40} \times 0{,}5^{60} = 0{,}0108$$

Біноміальний розподіл

ДИСКРЕТНІ РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Розподіл Пуассона

Розподіл Бернуллі

Біноміальний розподіл

Від'ємний біноміальний розподіл

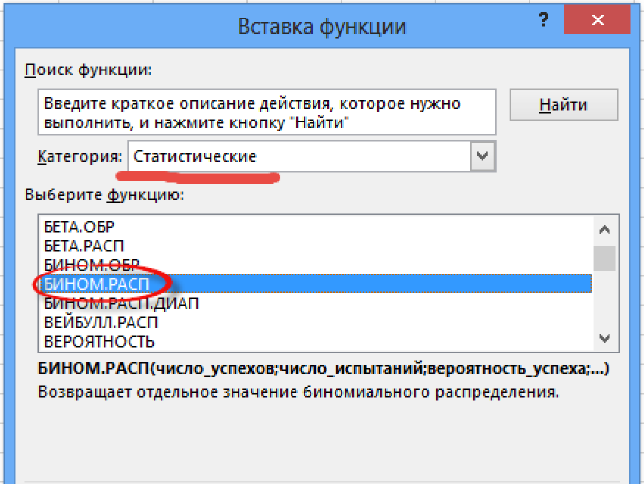
Дискретний рівномірний розподіл

Геометричний розподіл

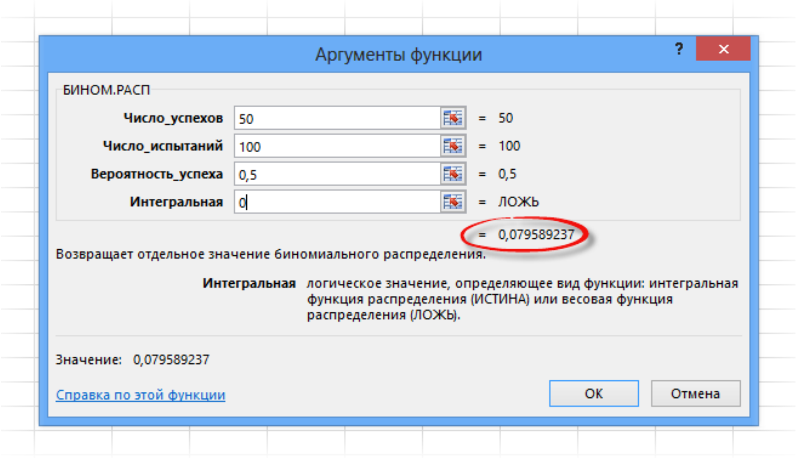
Гіпергеометричний розподіл

	A	B	C	D
1	**Условие**	**Значение**		
2	Кол-во бросков, *n*	100		
3	Кол-во успехов, *k*	50		
4	Вероятность успеха, *p*	0,5		
5				
6	**Расчет**	**Значение**	**Формула**	
7	n!	9,3326E+157	=ФАКТР(B2)	
8	k!	3,04141E+64	=ФАКТР(B3)	
9	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	1,00891E+29	=B7/(B8*ФАКТР(B2-B3))	
10	p^k	8,88178E-16	=СТЕПЕНЬ(B4;B3)	
11	q^{n-k}	8,88178E-16	=СТЕПЕНЬ((1-B4);(B2-B3))	
12	$P(B=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	0,0796	=B9*B10*B11	
13				
14				

Біноміальний розподіл



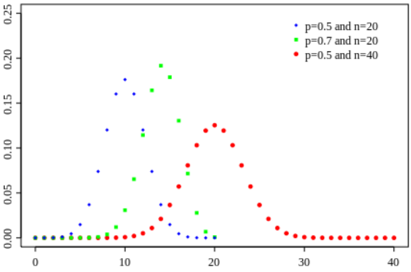
Біноміальний розподіл

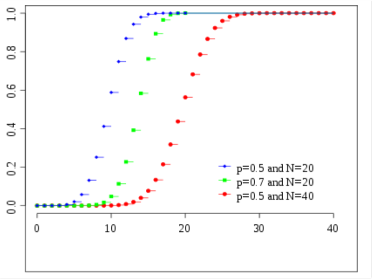


Біноміальний розподіл

- біноміальний розподіл – це дискретний ймовірносний розподіл, що може характеризувати кількість успіхів в послідовності експериментів, значення яких визначають за принципом "так-ні"(кожен з експериментів приходить до успіху з ймовірністю p)
- Такі "так-ні"експерименти також називаються експериментами Бернулі, або схемою Бернуллі, зокрема, якщо $n = 1$ (кількість випробувань), то приходимо до розподілу Бернуллі.

Біноміальний розподіл





Від'ємний біноміальний розподіл

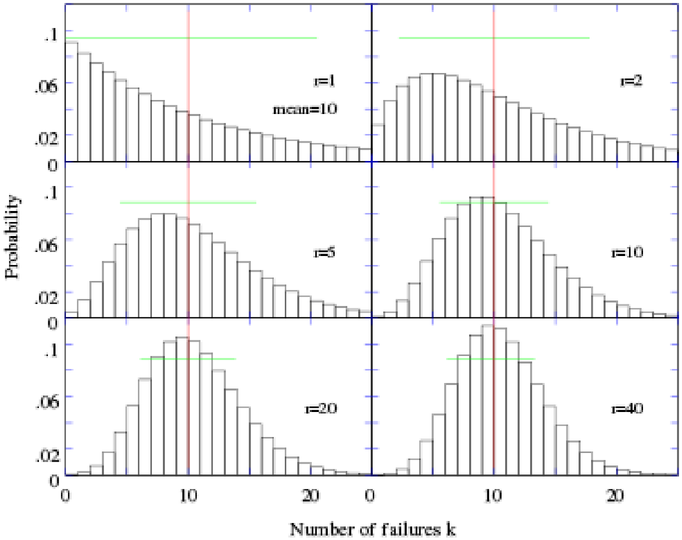
Від'ємний біноміальний розподіл — розподіл для дискретних випадкових величин, що рівні кількості невдач в послідовності випробувань Бернуллі з імовірністю успіху p , проведених до r-го успіху.

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ще називають розподілом Паскаля

Від'ємний біноміальний розподіл

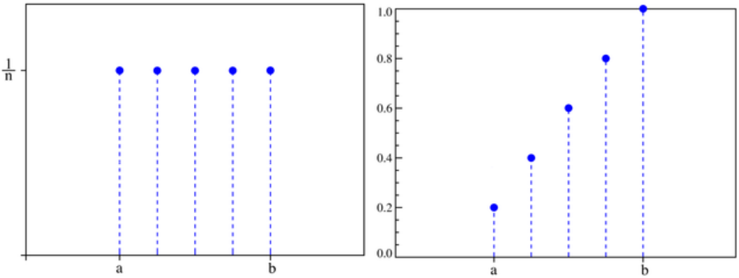
Від'ємний біноміальний розподіл



Дискретний рівномірний розподіл

- Випадкова величина має дискретний рівномірний розподіл, якщо вона приймає скінченне число значень з однаковими ймовірностями.
- $P = \frac{1}{n}$
- Якщо випадкова величина може приймати будь-яке з n значень $k_1, k_2, , k_n$, тоді вона розподілена за дискретним рівномірним розподілом. Ймовірність випадання k_j дорівнює $1/n$.
- Простим прикладом дискретного рівномірного розподілу є випадання гральної кості. k набуває значень 1, 2, 3, 4, 5, 6 і кожен раз випадає з імовірністю $1/6$.

Дискретний рівномірний розподіл

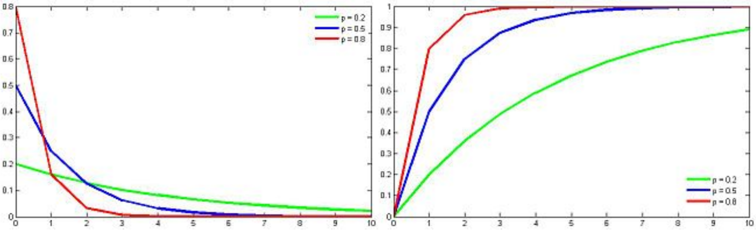


Геометричний розподіл

Геометричний розподіл – розподіл для дискретних випадкових величин для однакових по кількості випробувань випадкового експерименту до спостереження першого "успіху".

$$\mathbb{P}(Y = n) = q^n p, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

Геометричний розподіл



Гіпергеометричний розподіл

Гіпергеометричний розподіл моделює кількість успішних виборок без повернення із сукупності.

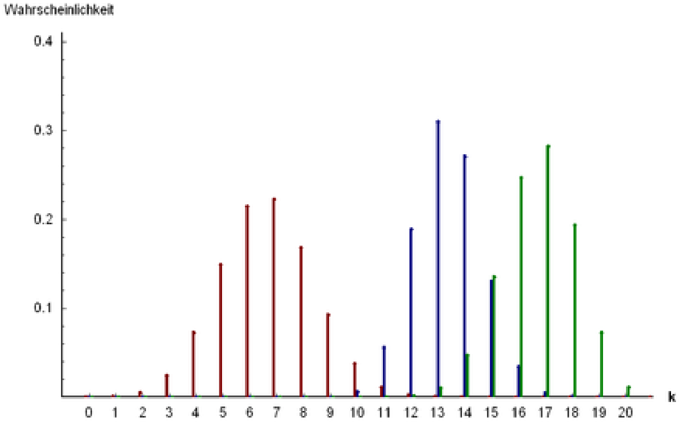
Наприклад: дано сукупність N об'єктів, з яких D мають дефект. Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність того, що у вибірці з n різних об'єктів, витягнутих із сукупності, рівно k об'єктів є бракованими.

Гіпергеометричний розподіл

Загалом, якщо випадкова величина X відповідає гіпергеометричному розподілу з параметрами N, D та n, то ймовірність отримання рівно k успіхів визначається формулою:

$$f(k; N, D, n) = \frac{\binom{D}{k}\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Гіпергеометричний розподіл

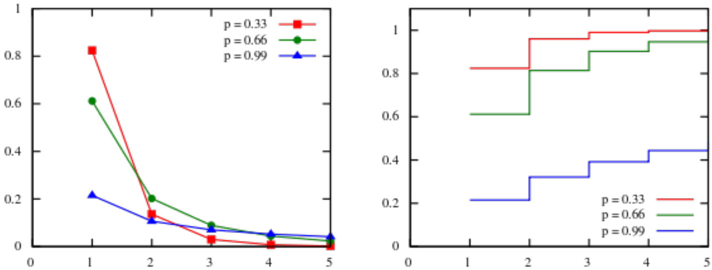


Логарифмічний розподіл

Логарифмічний розподіл – клас дискретних розподілів, що використовується в різних додатках, включаючи математичну генетику і фізику.
Загалом, ймовірність отримання рівно k успіхів визначається формулою:

$$p_Y(k) \equiv \mathbb{P}(Y = k) = -\frac{1}{\ln(1-p)}\frac{p^k}{k}, \; k = 1, 2, 3, \ldots$$

Логарифмічний розподіл



Поліноміальний розподіл

Поліноміальний розподіл ϵ узагальненням біноміального розподілу на багатовимірний випадок.
Біноміальний розподіл ϵ розподілом ймовірностей числа успіхів у незалежній схемі випробувань Бернуллі, з тією самою імовірністю успіху в кожному випробуванні.

Поліноміальний розподіл

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \binom{n}{y_1 \dots y_k} p_1^{y_1} \dots p_k^{y_k}, & \sum_{j=1}^{k} y_i = n \\ 0, & \sum_{j=1}^{k} y_i \neq n \end{cases}, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$$

$$\binom{n}{y_1 \dots y_k} = \frac{n!}{y_1! \dots y_k!}$$