Теорія графів

ГРАФОВІ ЙМОВІРНІСНІ МОДЕЛІ

Сумський державний університет

Поняття графу. Приклади

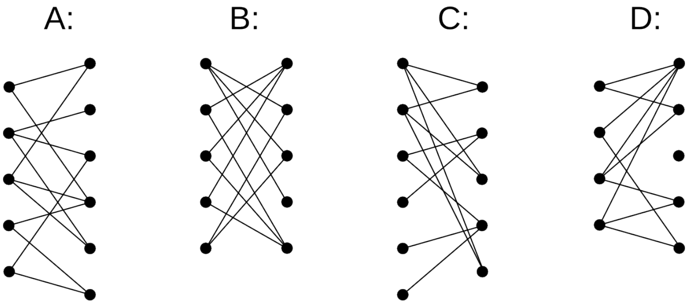
- Граф – це сукупність об'єктів із зв'язками між ними.

Поняття графу. Приклади

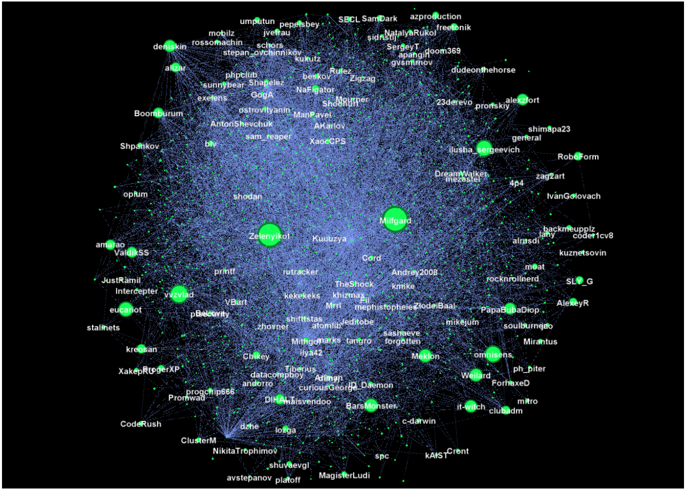
- Граф – це сукупність об'єктів із зв'язками між ними.

- Граф можна наочно зобразити як набір точок (вершини графа), деякі пари яких з'єднані відрізками (ребра графа). Чітке абстрактне визначення графа дамо після розгляду декількох прикладів.

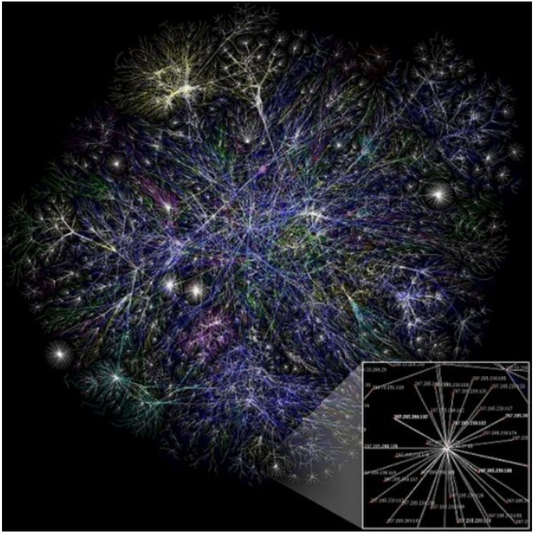
Поняття графу. Приклади



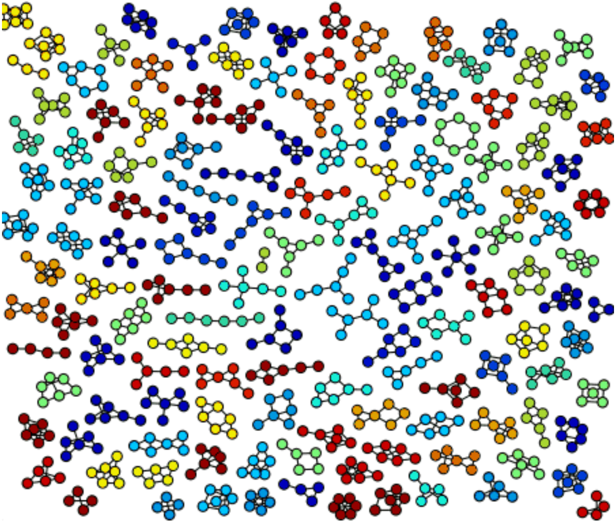
Поняття графу. Приклади



Поняття графу. Приклади



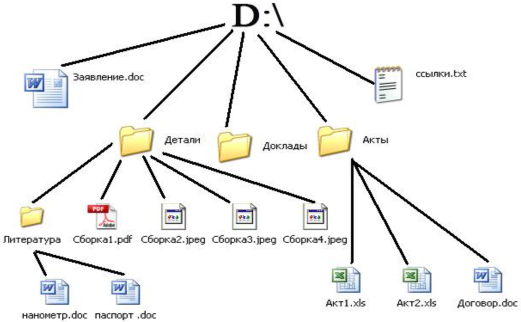
Поняття графу. Приклади



Поняття графу. Приклади

Графи широко використовуються в багатьох сферах науки і техніки, зокрема:

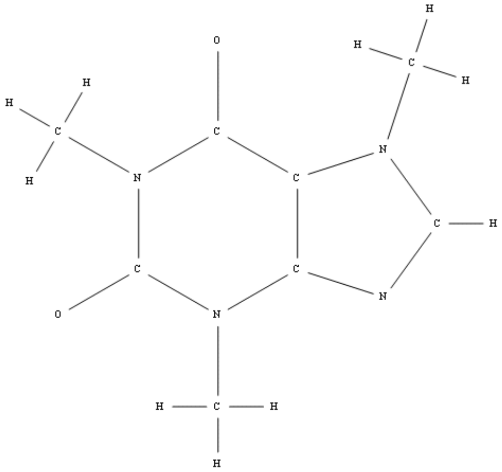
Файлова система комп'ютера. Ієрархія файлів в багатьох операційних системах має вигляд дерева, яке є окремим випадком графа



Поняття графу. Приклади

Графи широко використовуються в багатьох сферах науки і техніки, зокрема:

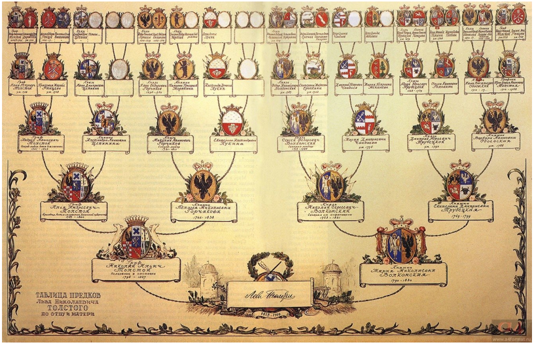
Молекули усіх хімічних речовин можна зобразити у вигляді графа, де атоми є вершинами, а зв'язки між ними – ребрами



Поняття графу. Приклади

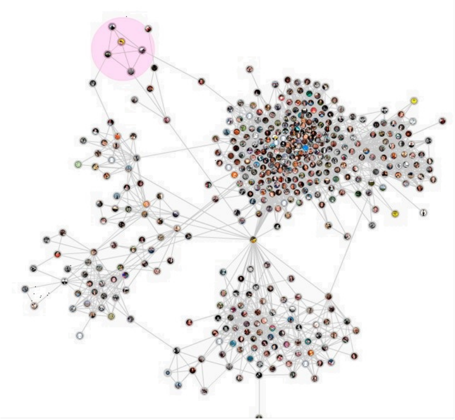
Графи широко використовуються в багатьох сферах науки і техніки, зокрема:

Генеалогічні дерева є прикладом бінарних дерев, що також є окремим випадком графа

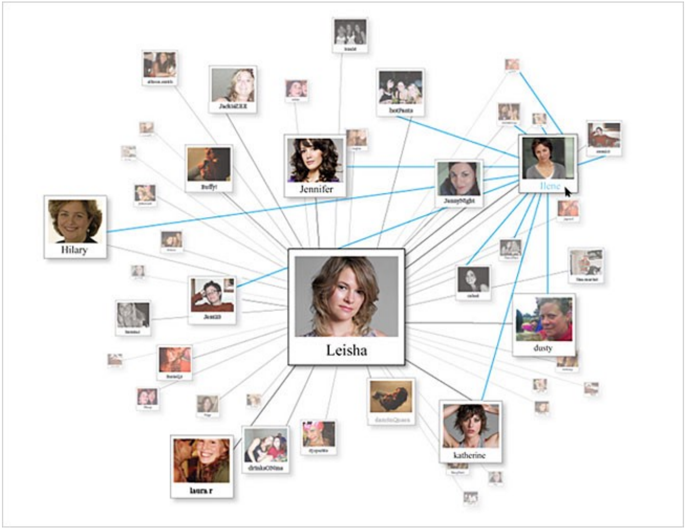


Поняття графу. Приклади

Соціальні мережі також можна представити у вигляді графа, де кожна людина чи соціальна група є вершиною, а зв'язки між ними – ребрами

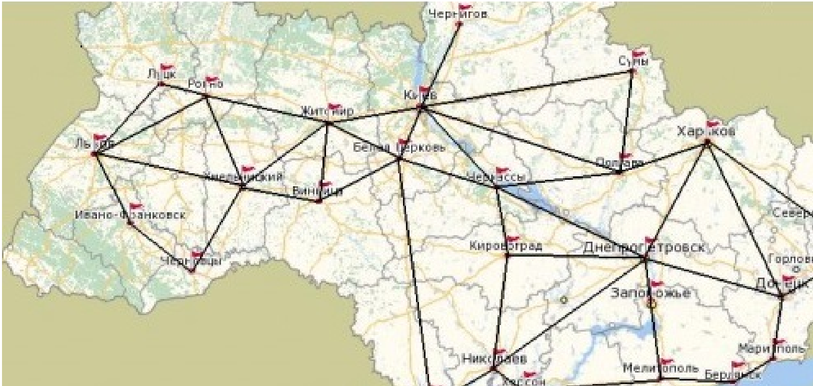


Поняття графу. Приклади



Поняття графу. Приклади

Карта автомобільних чи будь-яких інших шляхів також є графом, причому кожна дорога може мати певне значення *ваги* (наприклад, щільність транспортного потоку), тоді такий граф є *зваженим*



Поняття графу. Приклади

- У біології та екології графи також використовуються для опису ланцюгів харчування, екосистем, генетичних послідовностей
- У археології та геології графи використовуються для вивчення геологічних пластів
- Турнірні таблиці спортивних чемпіонатів також можуть бути зображені у вигляді графів
- Будь-який виробничий процес також може бути зображений за допомогою графа

Поняття графу. Приклади

- Розробка програмного забезпечення та комп'ютерні науки взагалі є однією з тих галузей, де графи застосовуються найчастіше.
- Графи також є зручними для зображення структур даних, блок-схем, потоків даних, схем баз даних та баз знань, скінченних автоматів, схем комп'ютерних мереж та окремих сайтів, схем викликів підпрограм тощо.
- Також графи широко використовуються у багатьох алгоритмах пошуку та сортування.

Поняття графу. Приклади

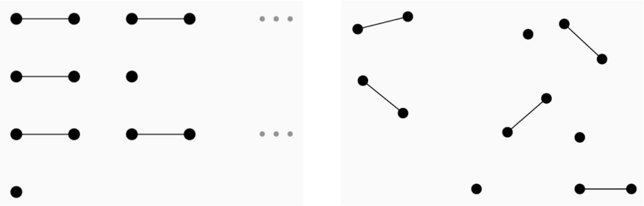
Наприклад

В аудиторії сидить 50 чоловік. Деякі пари серед цих людей перебувають у певному відношенні один з одним. Наприклад, дві людини можуть сидіти за однією партою (не більш ніж дві особи). Всі такі пари можна виділити серед всіх можливих пар людей — з'єднати їх ребром. Зручно ввести такі позначення:

- V – кількість людей в аудиторії (кількість вершин),
- E – кількість пар людей, що сидять за однією партою (кількість ребер).

Поняття графу. Приклади

Граф можна зобразити так, щоб передати дійсні положення парт в аудиторії. Однак передати всі зв'язки між людьми можна і по-іншому.



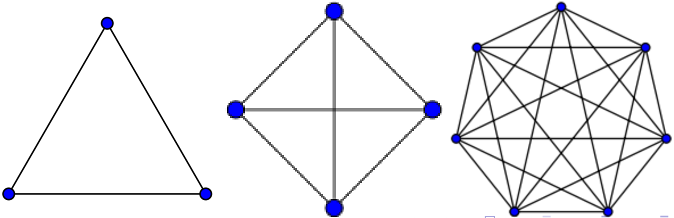
Взагалі кажучи, граф — це абстрактний алгебраїчний об'єкт, який являє собою пару (V, E), і він може бути представлений на площині різними способами.

Поняття графу. Приклади

В даному прикладі з кожної вершини виходить не більше одного ребра.

Тобто неможлива ситуація, коли якісь три вершини з'єднані ребрами попарно. Але можна вибрати таке відношення між людьми, що на тій самій множині вершин така ситуація буде можлива.

Повним графом називається такий граф, всі вершини якого з'єднані попарно.



Поняття графу. Приклади

Орієнтований граф

Розглянемо ту саму ситуацію з людьми в аудиторії, але з іншими співвідношеннями (вподобаннями).

Поняття графу. Приклади

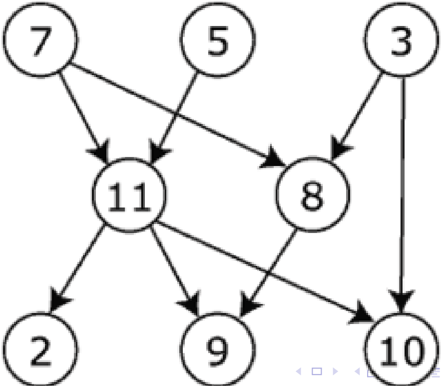
Якщо одній людині подобається інша, це відображається на графі ребром від першого з них до другого. Це відношення, на відміну від розглянутого раніше, має спрямованість. Але почуття не завжди взаємні.

В даному випадку позначення будуть наступними:

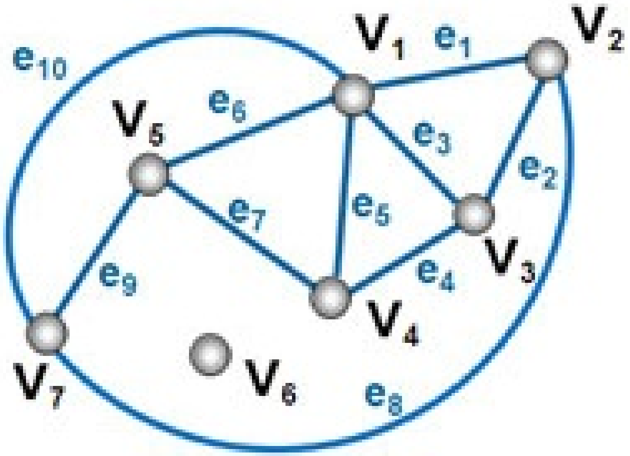
- V – множина людей в аудиторії (множина вершин)
- E – сукупність упорядкованих пар людей (x,y), $(x, y) \neq (y, x)$ (множина ребер)

Одержаний об'єкт називається **орієнтованим графом або орграфом**.

Напрямок ребра зазвичай на малюнку зображується стрілкою.



Поняття графу. Приклади

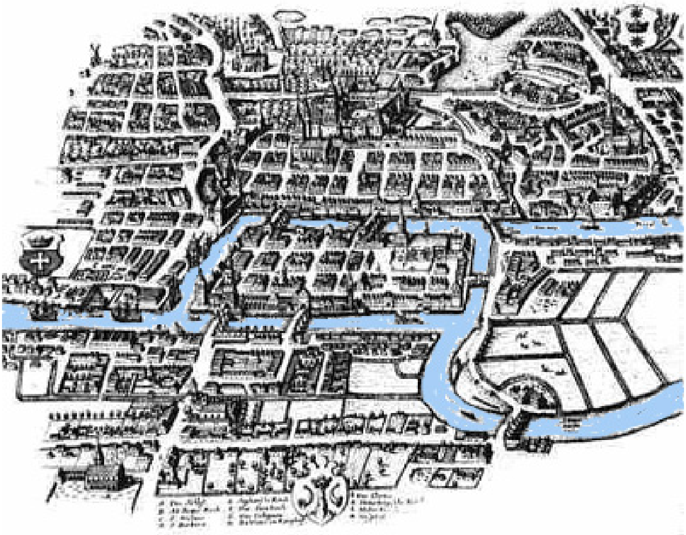


Задача про кенігсбергські мости

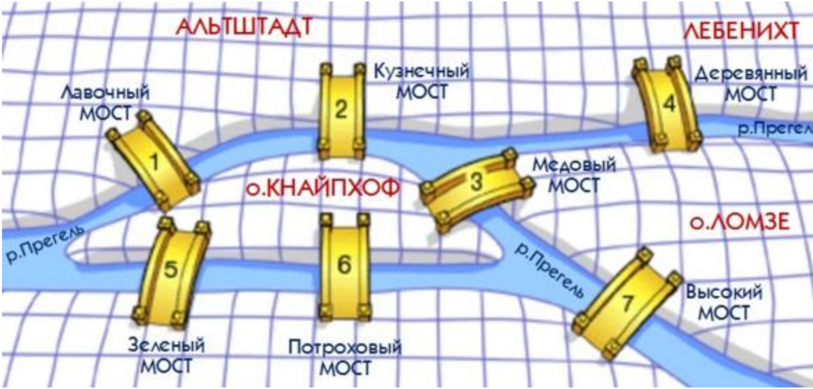
Задача про кенігсбергські мости

У XVIII столітті виникла класична задача про Кенігсбергські мости. Місто Кенігсберг (зараз Калінінград) розташований на берегах річки та двох острівцях — малому і великому. Частини міста тоді були пов'язані 7 мостами: два мости пов'язують великий острів з кожним берегом річки, один міст з'єднує між собою острова, а малий острів з'єднаний одним мостом з кожним із берегів.

Поняття графу. Приклади



Поняття графу. Приклади



Поняття графу. Приклади

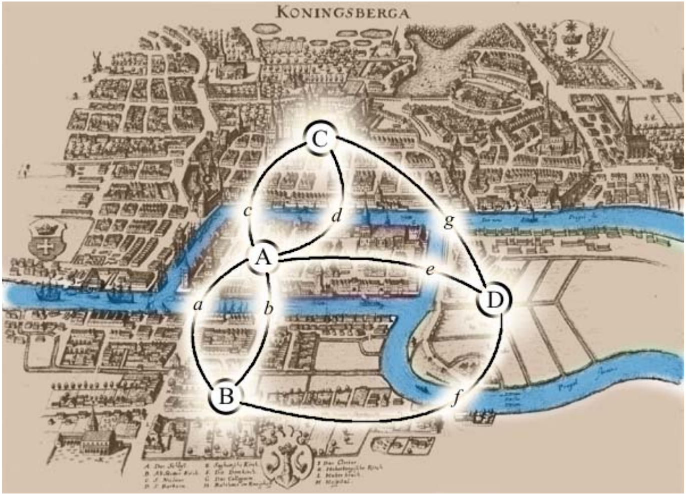
Завдання полягало в тому, щоб, висуваючись з деякої частини суші, пройти по всіх мостах і повернутися на точку старта так, щоб ні за яким мостом не довелося проходити двічі.

Як виявилося, теорія графів говорить про те, що такий шлях знайти неможливо.

Наведемо граф, який відповідає цьому завданню.

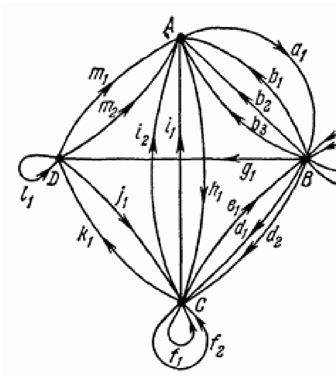
Частини суші (два острови і два береги річки) є вершинами графу, ребрами — мости. Оскільки деякі частини суші з'єднані більш ніж одним мостом, до графу потрібно ввести поняття *кратних ребер*.
Такі графи, в яких допускаються кратні ребра, називаються **мультиграфом**.

Поняття графу. Приклади



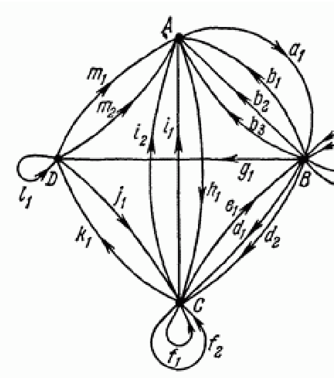
В теорії графів **мультиграфом** називають граф, в якому допускається наявність кратних ребер (їх також називають *паралельними*), тобто є ребра, які мають одні й ті самі кінцеві вершини.

Таким чином, дві вершини можуть бути з'єднані більш ніж одним ребром (цим мультиграфи відрізняються від гіперграфів, в яких кожне ребро може з'єднувати будь-яке число вершин, а не рівно дві).



Поняття графу. Приклади

Інтернет з точки зору теорії графів може бути представлений так званим Web-графом, де в якості вершин – різні сайти в інтернеті, а в якості ребер — гіперпосилання. Це орієнтований граф: важливо знати, куди і з якого сайту вказує гіперпосилання. Також цей граф допускає кратні ребра, але найголовніше — сторінка може посилатися на сторінку з того ж сайту. На малюнку графа це ребро є петля, яка починається і закінчується в одній і тій самій вершині. Графи, які містять петлі, називаються **псевдографом**.



Загальне визначення графа

Після розгляду всіх прикладів, можна дати загальне визначення графа.
Простим (звичайним) графом називається пара

$$G = (V, E),$$

де V — деяка довільна абстрактна множина, а E — деяка сукупність пар об'єктів з V, причому виконуються наступні обмеження:

- Кожна пара об'єктів з V зустрічається в E не більше одного разу. (Немає кратних ребер)

Загальне визначення графа

Після розгляду всіх прикладів, можна дати загальне визначення графа.

Простим (звичайним) графом називається пара

$$G = (V, E),$$

де V — деяка довільна абстрактна множина, а E — деяка сукупність пар об'єктів з V, причому виконуються наступні обмеження:

- Кожна пара об'єктів з V зустрічається в E не більше одного разу. (Немає кратних ребер)
- Пари з множини E не впорядковані. (Немає орієнтації)

Загальне визначення графа

Після розгляду всіх прикладів, можна дати загальне визначення графа.
Простим (звичайним) графом називається пара

$$G = (V, E),$$

де V — деяка довільна абстрактна множина, а E — деяка сукупність пар об'єктів з V, причому виконуються наступні обмеження:

- Кожна пара об'єктів з V зустрічається в E не більше одного разу. (Немає кратних ребер)
- Пари з множини E не впорядковані. (Немає орієнтації)
- Пара (x, x) не належить множині E. (Немає петель)

Поняття графу. Приклади

Загальне визначення графа

Мультиграф

2 Пари з множини E не впорядковані. (Немає орієнтації)

3 Пара (x, x) не належить множині E. (Немає петель)

Поняття графу. Приклади

Загальне визначення графа

Орграф

1 Кожна пара об'єктів з V зустрічається в E не більше одного разу. (Немає кратних ребер)

3 Пара (x, x) не належить множині E. (Немає петель)

Поняття графу. Приклади

Загальне визначення графа

Псевдограф

1 Кожна пара об'єктів з V зустрічається в E не більше одного разу. (Немає кратних ребер)

2 Пари з множини E не впорядковані. (Немає орієнтації)

Поняття графу. Приклади

Якщо не виконується більше однієї вимоги, то використовуються відразу всі відповідні префікси.

Наприклад, Web-граф є *псевдомультіорграфом*.

Слід ще раз відзначити, що граф є *абстрактним об'єктом*, працювати з яким можна навіть не малюючи його на площині.

Маршрути. Зв'язність графа.

При визначенні поняття *зв'язності графа* істотним є поняття *маршруту*.

Нестрого кажучи, маршрутом називається спосіб пройти від однієї вершини до іншої вершини. Більш формально він визначається наступним чином.

Маршрути. Зв‘язність графа.

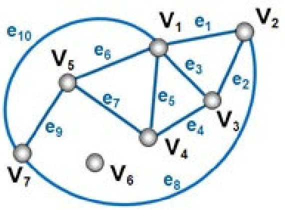
Маршрутом в простому графі називається така послідовність вершин $\{v_i\}$ і ребер $\{e_i\}$ цього графа

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots v_n e_n v_{n+1},$$

що вершини v_i і v_{i+1} є кінцями ребра e_i, тобто

$$e_i = (v_i, v_{i+1}).$$

В даному визначенні не передбачається, що всі вершини або ребра різні.



Маршрути. Зв‘язність графа.

Маршрут називається **замкнутим**, якщо перша і остання його вершини збігаються:

$$v_1 = v_{n+1}.$$

Якщо в маршруті всі ребра різні і він замкнутий, то такий маршрут називається **циклом**. Вершини можуть як повторюватися, так і не повторюватися.

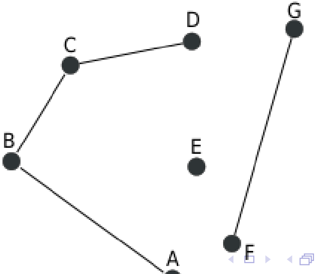
Якщо в маршруті всі ребра різні і він не замкнутий, то такий маршрут називається **ланцюгом** (або **шляхом**, англ. *Path*).

Якщо в маршруті всі вершини (крім, можливо, першої і останньої вершини в разі замкнутого маршруту) і ребра різні, то такий маршрут називається **простим циклом** або **простим ланцюгом**, в залежності від того, чи є він замкнутим.

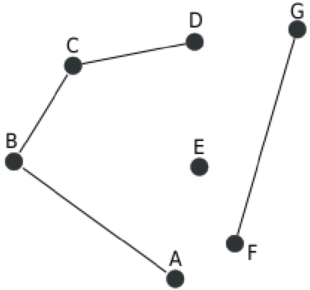
Граф називається **зв'язним**, якщо між будь-якими двома його вершинами існує маршрут.

Можна довести, що це визначення еквівалентно тому, що між будь-якими двома різними вершинами існує простий ланцюг.

Прикладом незв'язного графа є наступний граф.



Маршрути. Зв'язність графа.



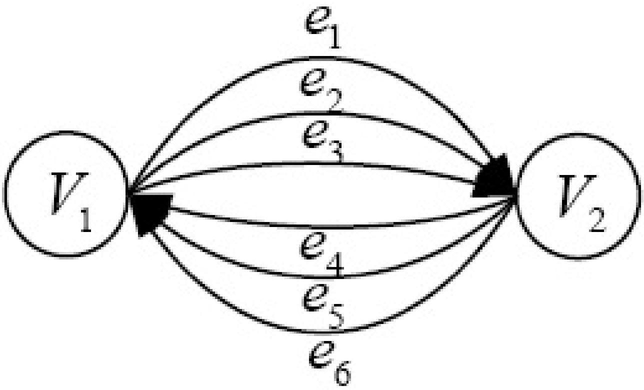
Представлений граф *розірваний* на декілька компонент.

Ці компоненти називаються **компонентами зв'язності графа**.

Орграф називається **сильно зв'язним**, якщо для кожної пари різних вершин v_i і v_j існує шлях із v_i до v_j і з v_j до v_i.

Орграф називається сильно k-зв'язним, якщо для кожної пари різних вершин v_i до v_j існує принаймні k шляхів з v_i до v_j, і з v_j до v_i, які не мають спільних вершин (а, отже, і дуг) за винятком v_i до v_j.

Наприклад трьох-зв’язний орграф



Цей орграф є сильно зв’язним, так як для вершин, існує

Маршрути. Зв'язність графа.

Підграфом $G' = (V', E')$ довільного графа $G = (V, E)$ називається такий граф, що

$$V' \subseteq V, \quad E' \subseteq \{(x, y) \in E : x, y \in V'\}.$$

Якщо

$$E' = \{(x, y) \in E : x, y \in V'\},$$

то такий підграф називають *індукованим* (породженим).

Маршрути. Зв‘язність графа.

Компонентою зв'язаності графа називається такий зв'язний індукований підграф, до якого не можна додати жодної вершини графа без порушення зв'язності.

Вершини називаються *суміжними*, якщо вони з'єднані ребром.

Степенем вершини v називається така величина $\deg v$, що дорівнює числу ребер, кінцем яких є ця вершина.

Компоненту зв'язаності, яка складається з однієї вершини, називається ізольованою вершиною.

Згідно із запропонованими вище визначеннями, нескладно довести співвідношення:

$$\Sigma_{v \in V} \mathrm{deg} v = 2|E|.$$

Доказ випливає з того простого факту, що в сумі за степенями всіх вершин кожне ребро буде враховуватися двічі.

Розглянемо приклад

Чи може така послідовність бути послідовністю степеней вершин графа на 8 вершинах:

- а) 5,4,3,2,2,2,2,1?
- б) 7,6,4,1,1,1,1,1?
- в) 6,6,5,4,3,2,2,2?
- г) 7,6,5,4,3,2,1,0?

Розглянемо приклад

- а) 5,4,3,2,2,2,2,1?

Розглянемо приклад

- а) 5,4,3,2,2,2,2,1?

Сума степеней непарна, чого в графі бути не може

Розглянемо приклад

- б) 7,6,4,1,1,1,1,1?

Розглянемо приклад

- б) 7,6,4,1,1,1,1,1?

Навіть якщо дві вершини зі степенями 7 і 6 з'єднані між собою, з них виходить 11 ребер в інші вершини. З другого боку, сума степеней інших вершин дорівнює 9. Значить, такого бути не може.

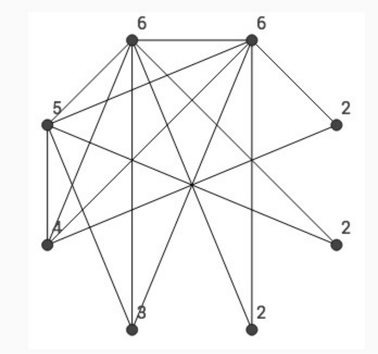
Розглянемо приклад

- в) 6,6,5,4,3,2,2,2?

Розглянемо приклад

- в) 6,6,5,4,3,2,2,2?

Нескладно намалювати такий граф:



Розглянемо приклад

- г) 7,6,5,4,3,2,1,0?

Розглянемо приклад

- г) 7,6,5,4,3,2,1,0?

Раз степінь останньої вершини 0, то у жодної з вершин не може бути більше 6 сусідів.

Дерева

Важливим випадком простого графа є **дерево**.

Дерева знаходять застосування в багатьох алгоритмах.

Деревом називається простий зв'язний ациклічний граф $G = (V, E)$.

Еквівалентні визначення дерева

Наступні твердження еквівалентні:

- Граф G — дерево.

Еквівалентні визначення дерева

Наступні твердження еквівалентні:

- Граф G — дерево.
- Між будь-якими двома вершинами графа G існує єдиний простий ланцюг.

Еквівалентні визначення дерева

Наступні твердження еквівалентні:

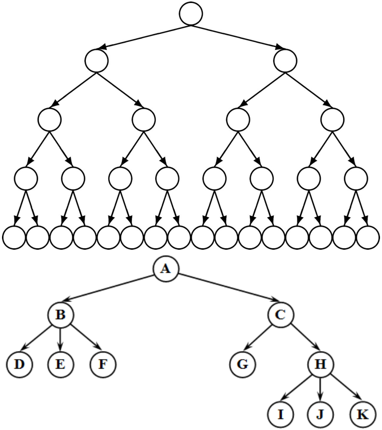
- Граф G — дерево.
- Між будь-якими двома вершинами графа G існує єдиний простий ланцюг.
- G зв'язний і число ребер в ньому на 1 менше числа вершин.

Еквівалентні визначення дерева

Наступні твердження еквівалентні:

- Граф G — дерево.
- Між будь-якими двома вершинами графа G існує єдиний простий ланцюг.
- G зв'язний і число ребер в ньому на 1 менше числа вершин.
- G ациклічний і число ребер в ньому на 1 менше числа вершин.

Дерева



Дерева і ліси

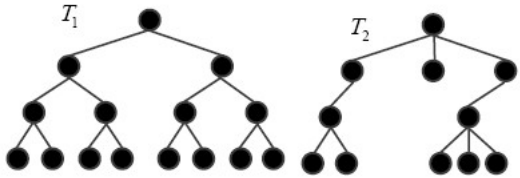
Граф називається деревом,

якщо він зв'язний і не має циклів. Позначається літерою T (Tree).

Граф, що не має циклів

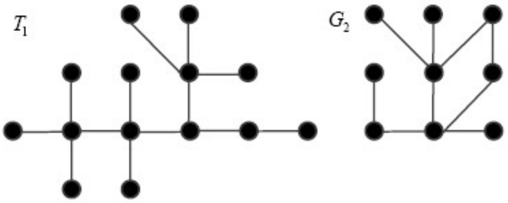
і складається з k компонентів, називається лісом з k дерев. Позначається літерою F(Forest).

Дерева



На Рисунку T_1 і T_2 є деревами, відзначимо, що дерево T_1 є повним бінарним деревом, так як з кожної вершини йдуть по два ребра. Дерева T_1 і T_2 складають ліс F з двох дерев.

Дерева



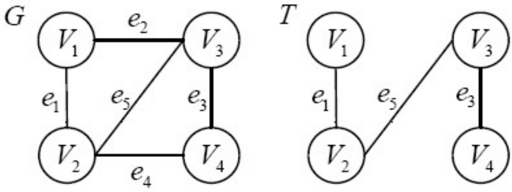
На Рисунку представлені дерево T_1 і граф G_2. Відзначимо, що граф G_2 не є деревом, так як в ньому є цикл.

Дерева

Якщо дерево T є підграфом графа G, то ребра графа G, що належать дереву T, називаються гілками дерева T, а ребра, які не належать дереву T, називаються хордами щодо дерева T.

Дерева

Приклад гілок і хорд.



З Рисунку видно, що дерево T є підграфом графа G. Дерево T вийшло шляхом видалення ребер e_2, e_4 з графа G. Отже, ребра e_1, e_3, e_5 графа G є гілками дерева T, а ребра e_2, e_4 – хорди щодо дерева T.

Дерева

Теорема про кількість ребер для дерева з n вершинами.

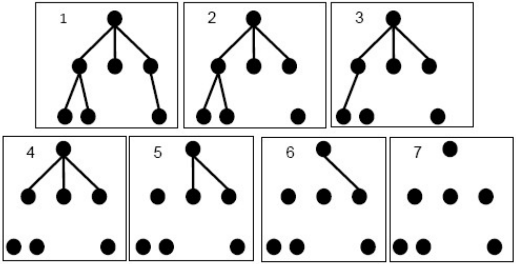
Потрібно довести, що кількість ребер в дереві не більше $(n-1)$, інакше утворюється цикл, і не менше $(n-1)$, інакше утворюється ліс.

Дерева

1. Видалення одного ребра розбиває дерево на 2 компоненти зв'язності, тобто перетворює його в ліс з двох дерев, граф стає незв'язним. Видалення другого ребра перетворює дерево в ліс з 3 дерев, і так далі. Видалення $(n-1)$-го ребра перетворює дерево в ліс з n дерев, кожне з яких є ізольованою вершиною.
2. Додавання будь-якого ребра, після $(n-1)$ утворює цикл з ребрами, що складають дерево.
3. Кожне дерево з n вершинами має в точності $(n-1)$ ребро.

Дерева

Розглянемо дерево, що складається з 7 вершин. Це дерево містить 6 ребер. Видаляючи по одному з ребер послідовно, отримуємо спочатку ліс, що складається з двох дерев, потім ліс з трьох дерев на наступному малюнку, і в кінцевому випадку отримуємо ліс з семи дерев, кожне з яких є ізольованою вершиною.



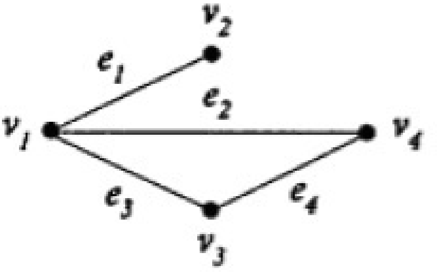
Матриці інцидентності і суміжності

Завдання будь-якої з цих матриць дає можливість відновити граф. Нехай G — граф і I — матриця, рядки якої позначені вершинами графа, а стовпці позначені ребрами графа. Будемо вважати, що вершини і ребра графа пронумеровані. Елемент i-го рядка і j-го стовпця матриці I, позначається s_{ij}, дорівнює 1, якщо i-а вершина инцидентна j-у ребру, і дорівнює 0 у противному випадку.

Таким чином, квадратна матриця $I = [s_{ij}]$ порядку $n \times m$ називається матрицею інцидентності графа G.

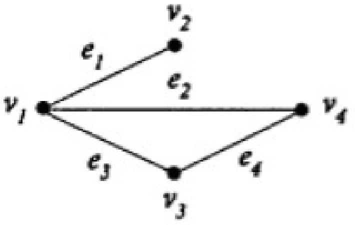
Матриці інцидентності і суміжності

Наприклад, нехай G – граф, зображений на рисунку зліва. Тоді його матриця інцидентності має вигляд, зображений на малюнку праворуч



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Матриці інцидентності і суміжності



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Легко бачити, що ступінь вершини дорівнює сумі елементів рядка, позначеної цією вершиною, так як кожна одиниця в цьому рядку представляє инцидентность цієї вершини ребру. При цьому в кожному стовпці будуть рівно дві одиниці, так як кожне ребро інцидентне двом вершинам.

Матриці інцидентності і суміжності

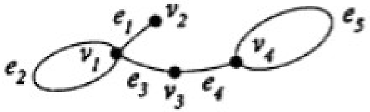
Можна також включити в розгляд матриці інцидентності для графів з петлями.

Вигляд матриці інцидентності безпосередньо показує, чи є дане ребро петлею, так як ребро являє собою петлю тоді і тільки тоді, коли відповідний стовпець містить тільки одну одиницю.

У матриці інцидентності для графа з петлями сума елементів рядка, що відповідає даній вершині, не представляє собою ступінь вершини, якщо в ній є петлі.

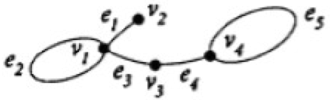
Матриці інцидентності і суміжності

Нехай G – граф, зображений на рисунку ліворуч. Його матриця інцидентності зображена на малюнку праворуч.



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Матриці інцидентності і суміжності



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Зверніть увагу, що наявність петель e_2 і e_5 призводить до того, що в стовпцях, позначених цими ребрами, міститься тільки по одній одиниці.

Матриці інцидентності і суміжності

Матриці інцидентності не мають великого значення при розгляді орієнтованих графів, оскільки вони не містять інформації про те, як ребро орієнтоване.

Тому, використовуючи матрицю інцидентності, не можна відновити орієнтований граф.

Якщо граф не містить петель, то матрицю інціденцій можна побудувати так, щоб вона містила інформацію про орієнтацію ребер.

Матриці інцидентності і суміжності

Позначимо через $v_1, v_2, ..., v_n$ вершини графа, а через $e_1, e_2, ..., e_m$ — його дуги. Введемо числа

$$s_{ij} = +1,$$

якщо e_j виходить з v_i

$$s_{ij} = -1,$$

якщо e_j заходить до v_i

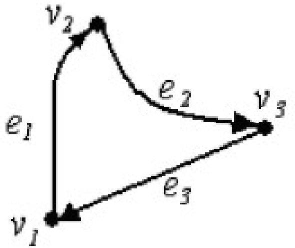
$$s_{ij} = 0,$$

якщо e_j неінциндентна v_i

Матриця $S = [s_{ij}]$ порядку $n \times m$ називається **матрицею інциденцій орієнтованого графа**. У такому вигляді вона визначна тільки для графів без петель.

Матриці інцидентності і суміжності

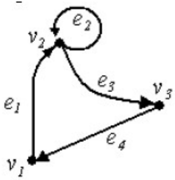
Наприклад, для орієнтованого графа, зображеного на рисунку ліворуч, матриця інціденцій відображена праворуч



$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

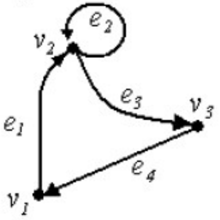
Матриці інцидентності і суміжності

За наявності петель, матрицю інціденцій слід розділити на дві матриці: позитивну і негативну. Тоді для вершини з петлею в одній матриці буде стояти +1, а в іншій -1 на однаковому місці. Наприклад, для наступного графа, позитивною і негативною матрицями, що зв'язують вихідні та вхідні ребра з вершинами, будуть



$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Матриці інциденності і суміжності



$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Тут елемент 2-2 відмінний від нуля для обох підматриць.

Матриці інцидентності і суміжності

Для роботи з орієнтованими графами зручно використати також інший тип матриць – **матриці суміжності**.

Нехай G — граф (орієнтований граф) і нехай S — матриця, рядки якої позначені вершинами графа і стовпці позначені тими самими вершинами в тому самому порядку.

Елемент i-го рядка і j-го стовпця матриці S дорівнює 1, якщо є ребро (або орієнтоване ребро) з i-ї вершини до j-ї вершини, і дорівнює 0 у іншому випадку.

Матриці інцидентності і суміжності

Таким чином, квадратна матриця $S = [s_{ij}]$ порядку $n \times n$ називається матрицею суміжності графа, якщо

$$s_{ij} = 1,$$

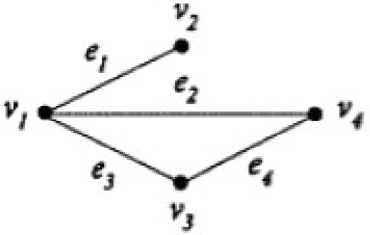
коли існує дуга, що з'єднує вершину i з вершиною j

$$s_{ij} = 0,$$

коли такої дуги не існує

Матриці інцидентності і суміжності

Наприклад G – граф (неорієнтований) і його матриця суміжності

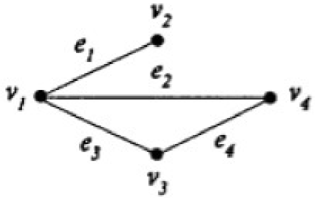


$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

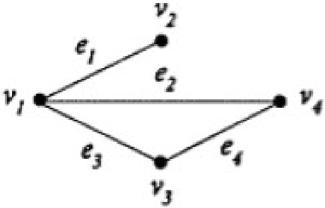
Оскільки петлі відсутні, всі елементи головної діагоналі матриці рівні 0. Матриця суміжності (неорієнтованого графа) симетрична.

Матриці інцидентності і суміжності

Порівняйте



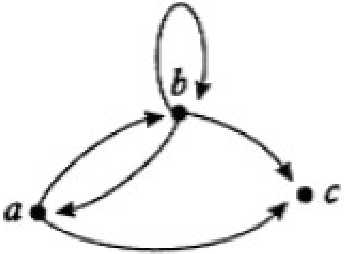
$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Матриці інцидентності і суміжності

Наприклад G – орієнтований граф і його матриця суміжності



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\
\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Матриці інцидентності і суміжності

Як правило, позначення вершин несуттєві. У таких випадках матриці наводяться без позначень рядків і стовпців. Наприклад, матриця

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

є матрицею суміжності для орієнтованого графа, що має чотири вершини і вісім ребер.

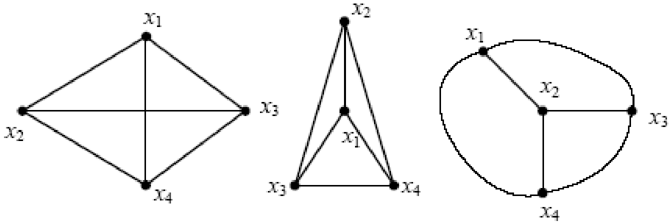
Планарні графи

Граф називається **планарним** (плоским), якщо він може бути зображений на площині так, що всі перетинання ребер є його вершинами.

Графи називаються **ізоморфними**, якщо між множинами їх вершин існує взаємо-однозначна відповідність, така, що вершини з'єднані ребрами в одному з графів в тому і тільки в тому випадку, якщо сполучені відповідні їм вершини в іншому графі.

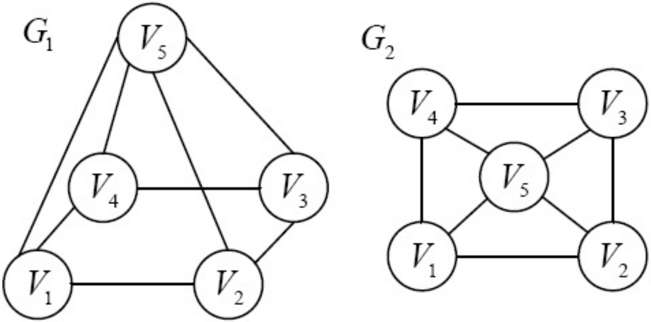
Планарні графи

Ізоморфні графи, наведені на рисунку і різняться лише зображенням. Якщо істотні властивості графа не пов'язані зі способом його зображення на площині або нумерацією його вершин і ребер, то ізоморфні графи, як правило, не розрізняють між собою.



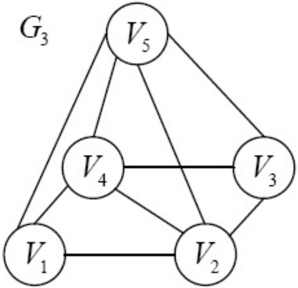
Планарні графи

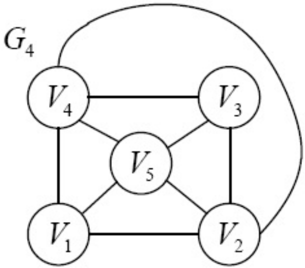
Наприклад граф G_1 є планарним, так як для графа G_1 існує ізоморфний йому граф G_2, який є планарним.



Планарні графи

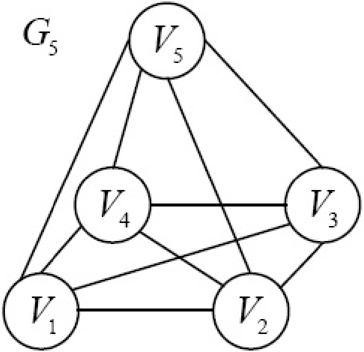
При додаванні до графу G_1 додаткової дуги, отримаємо граф G_3, який також є планарним, і представляється на площині ізоморфним графом G_4.





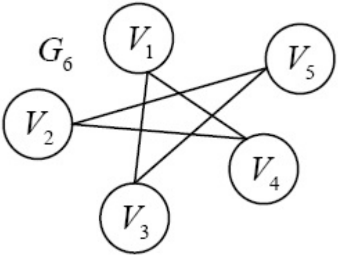
Планарні графи

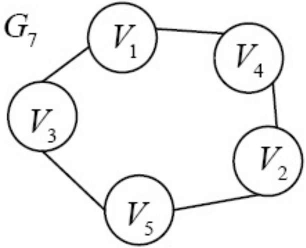
Граф G_5 не є планарним, так як його не можна представити на площині у вигляді графа без перетинів ребер.



Планарні графи

Граф G_6 є планарним (зірка), так як його можна представити у вигляді изоморфного графа G_7





Центри й периферійні вершини

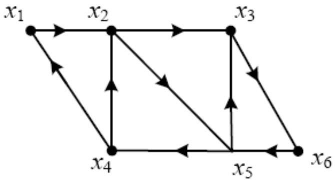
Відхиленням $d(x_i, x_j)$ вершини x_i від вершини x_j називається довжина найкоротшого шляху із x_i в x_j:

$$d(x_i x_j) = \min\{\ell(x_i\ \ x_j)\}.$$

Відхиленістю вершини x_i називається число $d(x_i) = \max d(x_i, x_j)$, тобто це найбільше з відхилень вершини x_i від всіх інших.

Центри й периферійні вершини

Матриця відхилень $d(x_i, x_j)$ та вектор відхилень $d(x_j)$ для графа представлені таблицями



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	2	3	2	3
x_2	3	0	1	2	1	2
x_3	4	4	0	3	2	1
x_4	1	1	2	0	2	3
x_5	2	2	1	1	0	2
x_6	3	3	2	2	1	0

	$d(x_i)$
x_1	3
x_2	3
x_3	4
x_4	3
x_5	2
x_6	3

Центри й периферійні вершини

Вершина графа з найменшою відхиленістю називається **центром графа**.

У графі може бути кілька центрів.

Вершина з найбільшими відхиленнями називається **периферійною вершиною**.

Радіусом $\rho(G)$ орієнтованого графа називається відхиленням центру.

Діаметром $D(G)$ орієнтованого графа називається відхилення периферійної вершини.

Центри й периферійні вершини

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	2	3	2	3
x_2	3	0	1	2	1	2
x_3	4	4	0	3	2	1
x_4	1	1	2	0	2	3
x_5	2	2	1	1	0	2
x_6	3	3	2	2	1	0

	$d(x_i)$
x_1	3
x_2	3
x_3	4
x_4	3
x_5	2
x_6	3

У розглянутому графі вершина x_5 є центром, а вершина x_3 є периферійної вершиною, відповідно $\rho(G) = 2$; $D(G) = 4$.

Центри й периферійні вершини

В неорієнтованих графах переміщатися можна в будь-якому напрямку, тут замість понять *шлях*, *відхилення* й *відхиленість* використовуються поняття *ланцюг*, *відстань* й *віддаленість*.

Замкнутий ланцюг називається циклом.

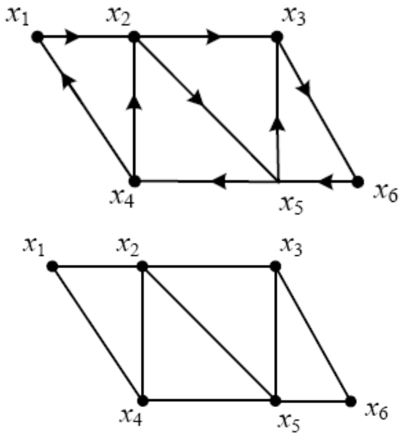
Центри й периферійні вершини

Відстанню $d(x_i, x_j)$ між двома вершинами x_i й x_j неорієнтованого графа G називається довжина найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує ці вершини: $d(x_i, x_j) = min\{l(x_i, ..., x_j)\}$.

Віддаленістю вершини x_i називається число $d(x_i) = maxd(x_i, x_j)$, відповідне найбільшій із відстаней від вершини x_i до всіх інших.

Центри й периферійні вершини

На рисунку представлені співвіднесені неорієнтований і орієнтований граф.



Центри й периферійні вершини

Матриця відстаней $d(x_i, x_j)$ й вектор віддалення $d(x_i)$ представлені таблицями.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	1	2	1	2	3
x_2	1	0	1	1	1	2
x_3	2	1	0	2	1	1
x_4	1	1	2	0	1	2
x_5	3	2	1	2	1	0
x_6	3	2	1	2	1	0

	$d(x_i)$
x_1	3
x_2	2
x_3	2
x_4	2
x_5	2
x_6	3

Центрами графа будуть вершини x_2, x_3, x_4 й x_5 з найменшою віддаленістю. Радіус $\rho(G) = 2$. Периферійними вершинами є вершини x_1 й x_6 з найбільшою віддаленістю. Діаметр графа $D(G) = 3$.

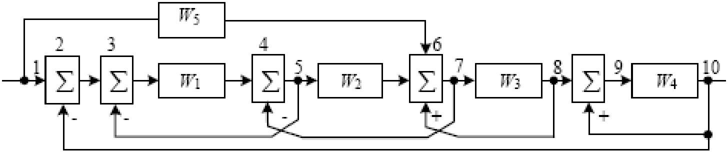
Числова функція на графі. Сигнальні графи

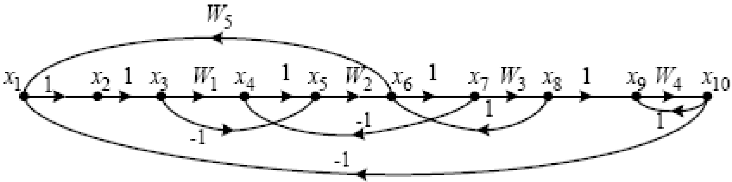
Числову функцію на графі ставлять або на вершинах, або на дугах графа. Числова функція на вершинах графа G вважається заданою, якщо кожній вершині x_i ставиться у відповідність деяке число q_i з деякої безлічі Q.

Числова функція на дугах графа G вважається заданою, якщо кожній дузі $v = (x_i, x_j)$ ставиться у відповідність число $l(v)$ з деякого безлічі L.

Кількісні значення, що приписуються вершинам або дугам, називаються вагами. У деяких випадках числова функція на графі задається комбінованим способом, як на вершинах, так і на дугах.

Для моделювання фізичних систем використовуються зважені орієнтовані графи, що називаються **сигнальними графами**, або графами потоків сигналів.





Числова функція на графі. Сигнальні графи

Вершини сигнального графа ототожнюються з деякими змінними x_i, що називаються сигналом вершини.

Дуги відображають зв'язки між змінними, й кожна дуга (x_i, x_j) характеризується величиною k_{ij}, що називається **передачею дуги**. Величина k_{ij} є чисельне або функціональне відношення, що характеризує передачу сигналу від однієї вершини до іншої. Для одиночної дуги $x_j = k_{ij} \cdot x_i$.

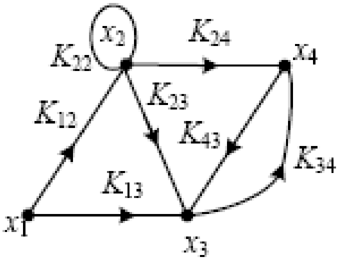
$$x_j = k_{1j} \cdot x_1 + k_{2j} \cdot x_2 + \ldots + k_{nj} \cdot x_n = \sum_{i=1}^{n} k_{ij} \cdot x_i \, .$$

Числова функція на графі. Сигнальні графи

Наявність дуг, що виходять, не впливає на сигнал вершини x_j, ці дуги впливають на сигнали інших вершин. Наведена рівність вказує на спосіб побудови графа по заданій системі лінійних алгебраїчних рівнянь й, навпаки, на спосіб запису алгебраїчних рівнянь, що відповідають даному графу.

Приклад сигнального графа і відповідна йому система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} x_2 = k_{12}x_1 + k_{22}x_2, \\ x_3 = k_{13}x_1 + k_{23}x_2 + k_{43}x_4, \\ x_4 = k_{24}x_2 + k_{34}x_3. \end{cases}$$

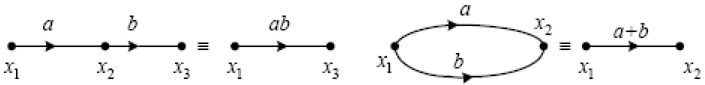


Числова функція на графі. Сигнальні графи

Вершина, що має лише вхідні дуги, називається стоком.
В цілому граф топологічно відображає передачу сигналу від джерел до стоків.
Розглянемо правила перетворення сигнальних графів, користуючись еквівалентними перетвореннями найпростіших підграфів

Числова функція на графі. Сигнальні графи

Послідовне з'єднання двох однаково спрямованих дуг з передачами a й b може бути замінено однією еквівалентною дугою, передача якої дорівнює добутку передач вихідних дуг.
При паралельному з'єднанні двох однаково спрямованих дуг його можна замінити однією дугою з передачею, яка дорівнює сумі передач вихідних дуг



а б