

Комп'ютерне моделювання задач прикладної математики

Коливальні та хвильові процеси

Лекція 12

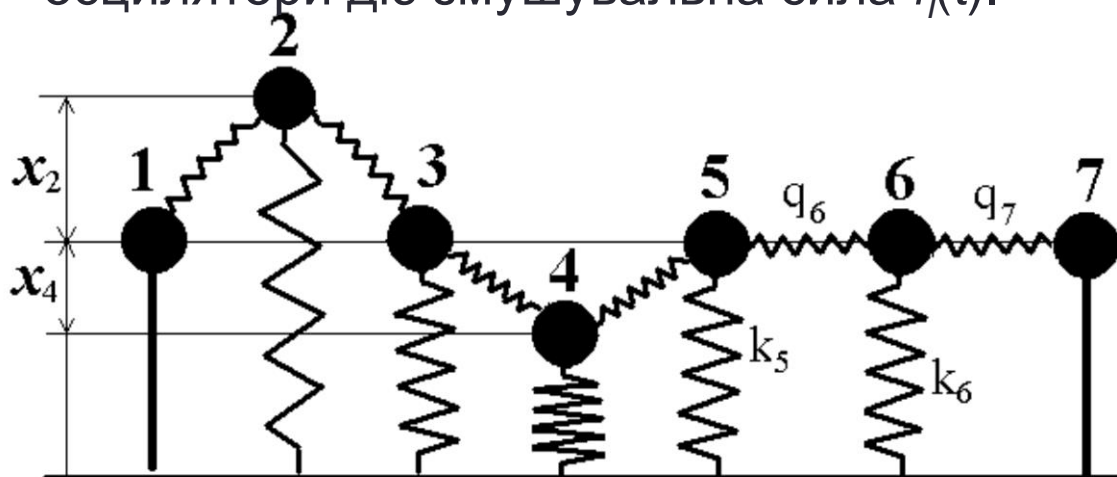
МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ

Моделювання системи зв'язаних осциляторів

У розділі розглядається методика моделювання системи зв'язаних осциляторів, які здійснюють одновимірні поперечні або поздовжні коливання.

Постановка задачі

Промоделювати рух системи із N осциляторів з масами m_i та жорсткістю пружин k_i , зв'язаних між собою пружинками жорсткістю q_i . Ланцюжок осциляторів розміщений у в'язкому середовищі. Нехай початковий зсув $x_i(t=0)$ та швидкість $v_i(t=0)$ кожного із осциляторів відомі. Розглянути випадки, коли на окремі осцилятори діє змушувальна сила $f_i(t)$.

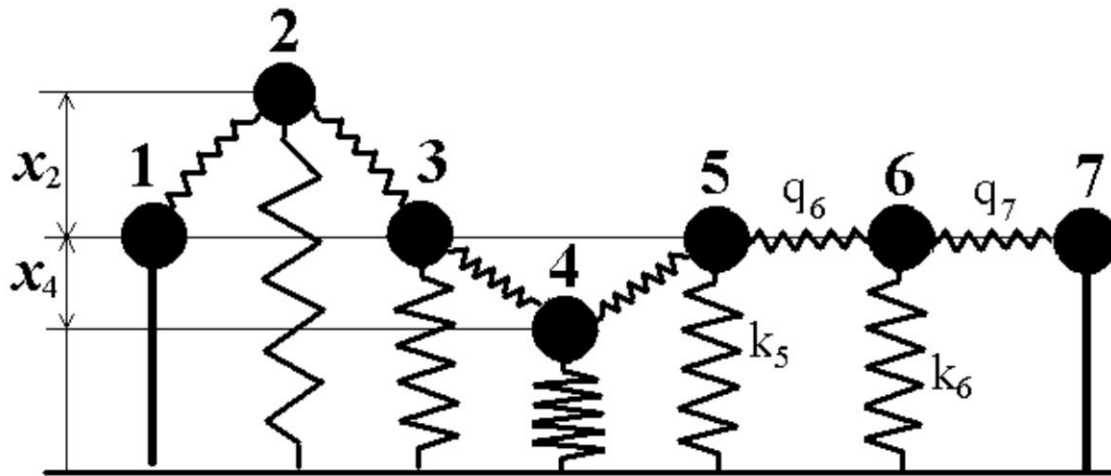


Поперечні коливання точкових осциляторів, з'єднаних пружинками. x_2, x_4 — відхилення від положення рівноваги відповідно другого та четвертого осциляторів; осцилятори 1 та 7 є закріпленими

Теоретичний матеріал

Поперечні коливання

Розглянемо ланцюжок осциляторів з масами m_i та коефіцієнтами жорсткості пружин k_i ; між окремими осциляторами існують пружні сили з коефіцієнтами q_i .



Сила, яка діє на окремий осцилятор, визначається стисканням та розтягуванням зв'язаних з ним пружин, силою пружності $-k_i x_i$ самого осцилятора та силою в'язкого тертя $-rv_i$ (v_i — швидкість i -го осцилятора).

Теоретичний матеріал

Поперечні коливання

- На кожний i -й осцилятор з боку сусідніх $(i+1)$ -го та $(i-1)$ -го осциляторів діє сила

$$F_i = q_i(x_{i-1} - x_i) + q_{i+1}(x_{i+1} - x_i)$$

де x_i — зсув i -го осцилятора від положення рівноваги.

- Отже, згідно з другим законом Ньютона рух окремого осцилятора описується рівнянням

$$m_i a_i = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i - r v_i - k_i x_i$$

де a_i — прискорення i -го осцилятора.

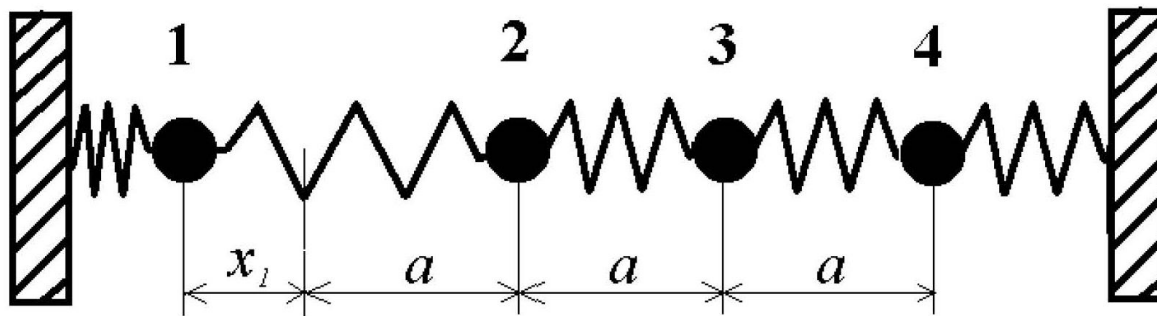
Отже, маємо систему N -рівнянь

Теоретичний матеріал

Поздовжні коливання

- Розглянемо коливальний рух лінійного ланцюжка частинок, з'єднаних пружинками з коефіцієнтами пружності q_j . Крайові осцилятори є закріпленими:

$$x_0 = x_{N+1} = 0$$



Поздовжні коливання точкових осциляторів, з'єднаних пружинками: x_1 — відхилення першого осцилятора від положення рівноваги; a — відстань між осциляторами

Теоретичний матеріал

Поздовжні коливання

Оскільки сила, що діє на i -й ($i = 2..N - 1$) осцилятор, визначається лише стисканням та розтягуванням пружинок ліворуч та праворуч і силою тертя, то рівняння руху i -го осцилятора набирає вигляду

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = q_i(x_{i-1} - x_i) + q_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - r v_i$$

Рівняння руху крайових осциляторів мають вигляд

$$m_1 \frac{d^2 x_{i1}}{dt^2} = -q_1 x_1 + q_2(x_2 - x_1) - r v_1$$

та

$$m_N \frac{d^2 x_N}{dt^2} = -q_{N+1} x_N + q_N(x_{N-1} - x_N) - r v_N$$

Алгоритм

- Задаємо параметри системи й початкові умови: число осциляторів N , їхні маси m_i , коефіцієнти пружних зв'язків k_i та q_i , зсув x_i та швидкість v_i частинок у початковий момент часу $t = 0$, крок за часом Δt , сили f_i , що діють на окремі частинки. Фіксуємо $t = 0$.
- У циклі за часом t перебираємо всі осцилятори і для кожного з них розраховуємо швидкість та зсув у наступний момент часу $t + \Delta t$, наприклад, за модифікованим методом Ейлера

$$F_i(t) = q_i[x_{i-1}(t) - x_i(t)] + q_{i+1}[x_{i+1}(t) - x_i(t)],$$

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \frac{F_i(t) - r v_i(t) - k_i x_i(t)}{m_i} \Delta t,$$

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + v_i(t + \Delta t) \Delta t$$

Виводимо результати у файл

Алгоритм

Однією з основних проблем чисельного розв'язання диференціальних рівнянь (ДР) і систем ДР є проблема вибору кроку інтегрування, оскільки при досить великому кроці інтегрування виникають нестійкі розв'язки, тобто розв'язки, похибка яких починає зростати у часі експоненціально швидко. Один із способів перевірки стійкості методу полягає у контролі величини повної енергії, що у разі вільних коливань повинна зберігатись. Отже для перевірки правильності вибору кроку інтегрування можна використовувати такий алгоритм:

1. Задаємо початкові зсуви і швидкості осциляторів
2. Задаємо часовий інтервал, на якому шукається розв'язок системи ДУ та число точок, в яких шукається чисельний розв'язок системи ДУ
3. Знаходимо розв'язок системи ДУ
4. Обчислюємо значення енергії системи зв'язаних осциляторів у кожен момент часу
5. Аналізуємо зміну енергії системи у часі на заданому часовому інтервалі та оцінюємо точність виконання закону збереження енергії
6. При незадовільній точності розв'язку змінюємо параметри розв'язку (п. 2) (або обираємо інший метод) та повторюємо пп.3-5.

Приклад

- Моделювання руху N однакових осциляторів з масами m . Крайні осцилятори є закріпленими. Програма моделює поширення імпульсу вздовж ланцюжка у випадку, коли крайній лівий осцилятор робить півколивання під дією вимушувальної гармонічної сили

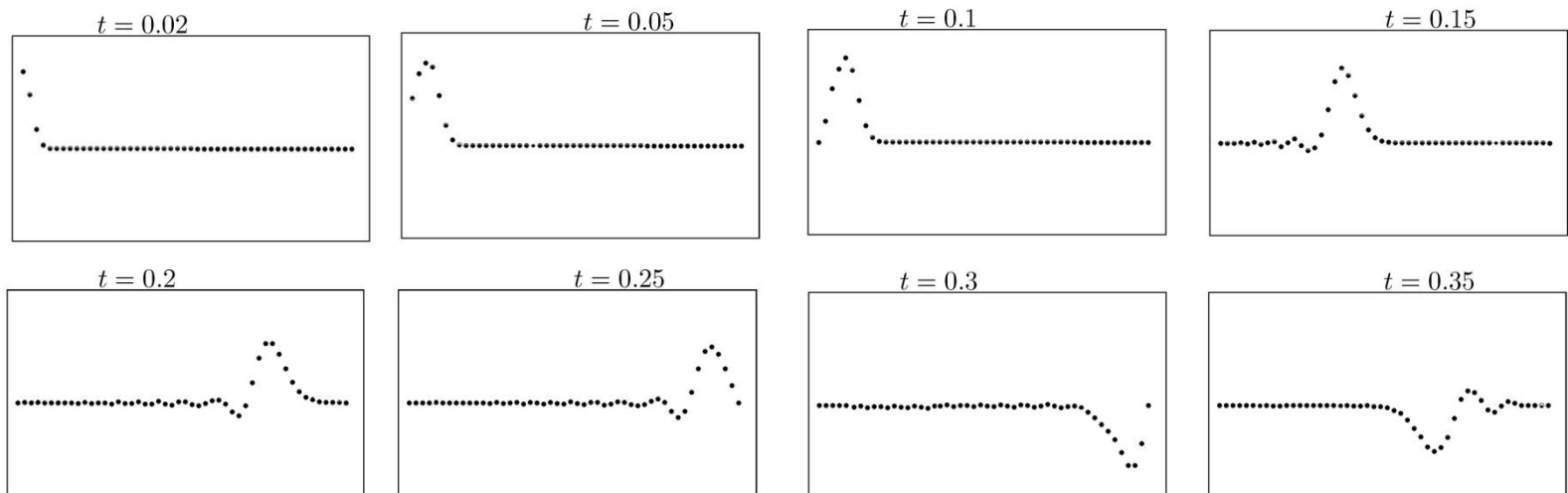
$$f_1 = A \sin(\omega t), \quad t \in [0 \dots T/2],$$

$T = 2\pi/\omega$ — період коливання;

A — амплітуда коливань;

ω — частота коливань.

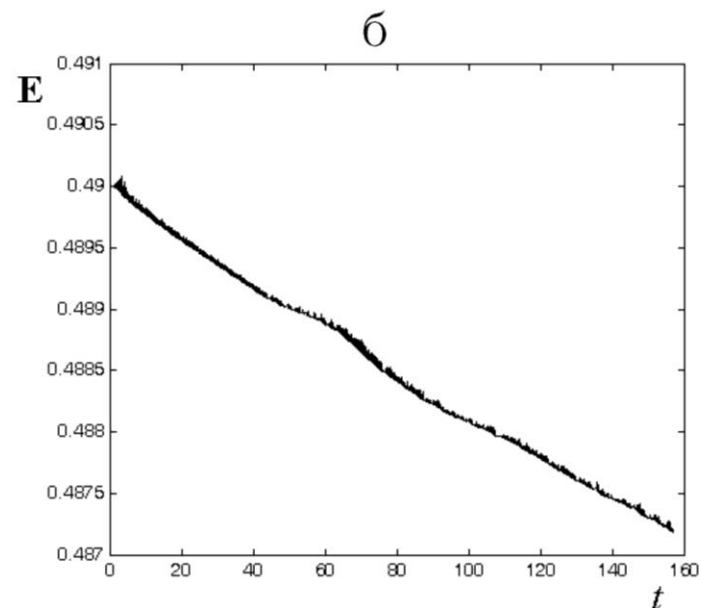
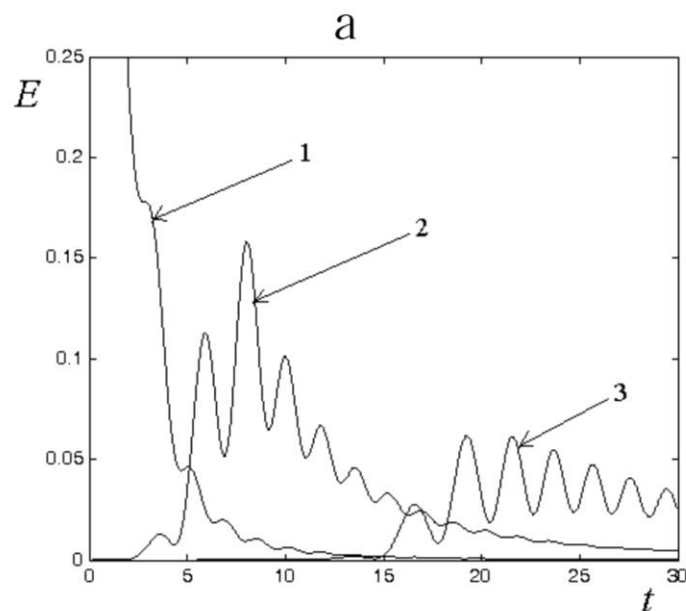
Через половину періоду лівий осцилятор повертається у вихідне положення й у наступні моменти часу він залишається нерухомим.



Середній час поширення фронту хвилі уздовж ланцюжка (від лівого осцилятора до крайнього правого осцилятора) при даних параметрах системи становить $t \approx 0.3$

Приклад

Перевірка стійкості обраного чисельного методу шляхом контролю величини повної енергії у випадку вільних коливань



Аналіз залежності повної енергії коливальної системи від часу показує, що повна енергія на обраному часовому інтервалі фактично не змінюється (не більше ніж на 1%). Отже, обрана кількість точок (крок інтегрування) є достатньою для проведення експериментів з даною моделлю.

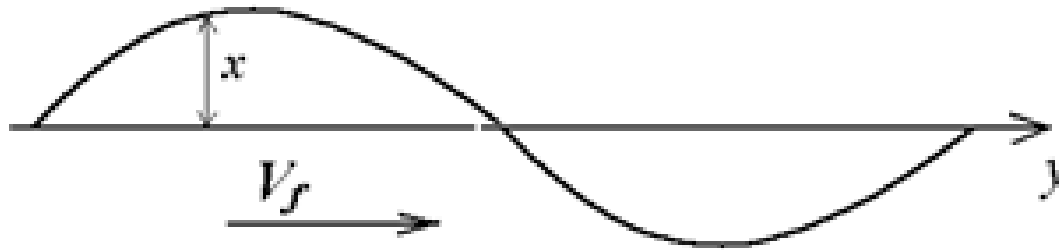
МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАЛЬНИХ ТА ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ

Моделювання поширення механічної хвилі

Розділ присвячений моделюванню одновимірних механічних хвиль у суцільних пружних середовищах. Моделювання проводиться на основі лінійного хвильового рівняння, яке виводиться у граничному випадку великого числа зв'язаних лінійних осциляторів.

Постановка задачі

- Провести моделювання поширення одновимірної хвилі у суцільному пружному середовищі. Як вихідні дані задачі взяти: закони руху (коливань) окремих ділянок середовища і швидкість поширення збурювання. Необхідно розрахувати зсув елементів середовища у наступні моменти часу.



Теоретичний матеріал

Побудова моделі

До цього ми розглянули мікроскопічну картину поширення механічної хвилі: коливальний рух ланцюжка із N зв'язаних осциляторів, який у спрощеному випадку може бути описаний системою рівнянь

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = q_i (x_{i-1} - x_i) + q_{i+1} (x_{i+1} - x_i)$$

де x_i — поперечний зсув i -го осцилятора від положення рівноваги; параметр q_i описує взаємодію i -го осцилятора з сусіднім $(i - 1)$ -м осцилятором. Для спрощення аналізу ми не враховуємо силу в'язкого тертя, яка легко може бути додана до правої частини кожного з рівнянь поданої системи. У випадку однакових осциляторів ($q = q_i$, $m = m_i$, $i = 1..N$) останнє рівняння переписується у вигляді

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = q_i (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$$

Теоретичний матеріал

Побудова моделі

Перейдемо тепер від коливального руху до хвильового, або, іншими словами, від мікроскопічного до макроскопічного опису процесу поширення хвилі. Використовуючи рівняння

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = q_i (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$$

отримаємо неперервне хвильове рівняння, яке буде базовим для моделювання процесів поширення одновимірних хвиль. Для цього розглянемо граничний випадок $N \rightarrow \infty$. Замінімо $x_i(t)$, де i — дискретна змінна на функцію $x(y, t)$, де y — неперервна змінна. Тоді еволюційне рівняння перепишеться у вигляді

$$\frac{d^2 x(y, t)}{dt^2} = \frac{q}{m} (x(y + a, t) - 2x(y, t) + x(y - a, t))$$

де a — відстань між окремими осциляторами. Домножимо та поділемо праву частину на a^2

$$\frac{d^2 x(y, t)}{dt^2} = \frac{qa^2}{m} \frac{1}{a^2} (x(y + a, t) - 2x(y, t) + x(y - a, t))$$

Теоретичний матеріал

Побудова моделі

Розвиваючи функцію $x(y \pm a, t)$ у ряд Тейлора (до другого порядку включно)

$$x(y \pm a, t) = x(y, t) \pm a \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$$

Та скорочуючи відповідні складові отримуємо замість

$$\frac{d^2 x(y, t)}{dt^2} = \frac{qa^2}{m} \frac{1}{a^2} (x(y + a, t) - 2x(y, t) + x(y - a, t))$$

Рівняння

$$\frac{d^2 x(y, t)}{dt^2} = \frac{qa^2}{m} \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2}$$

Задаючи фазову швидкість хвилі V_f : $V_f^2 = \frac{qa^2}{m}$ отримуємо рівняння, яке описує процес поширення одновимірної хвилі уздовж осі y

$$\frac{d^2 x(y, t)}{dt^2} = V_f^2 \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2}$$

Теоретичний матеріал

Побудова моделі

Хвильове рівняння

$$\frac{d^2 x(y, t)}{dt^2} = V_f^2 \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2}$$

може бути записане у вигляді системи двох рівнянь першого порядку

$$\frac{\partial v}{\partial t} = V_f \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = V_f \frac{\partial v}{\partial y},$$

де $v = \partial x / \partial t$ - швидкість зсуву; $\theta = \partial x / \partial y$ - кутове відхилення.

Перш ніж розглянути методи, які можуть бути використані для розв'язання даної системи рівнянь, зазначимо, що хвильове рівняння можна переписати так:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = V_f^2 \frac{\partial^2 x(y, t)}{\partial y^2}$$

і застосувати явну схему інтегрування.

Теоретичний матеріал

Огляд методів для гіперболічних рівнянь

Явний метод першого порядку точності.

Розглянемо найпростіший спосіб інтегрування одновимірного рівняння перенесення

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

за допомогою явної схеми першого порядку точності. Наближаючи це рівняння у межах кроку за часом Δt , маємо

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

Цій різницевій схемі властива нестійкість для будь-яких часових кроків Δt , і вона показує, що не всі явні та прості схеми є корисними.

Теоретичний матеріал

Огляд методів для гіперболічних рівнянь

Консервативний метод Лакса.

Замінюючи u_j^n у схемі

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n).$$

на просторове середнє, маємо

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{v\Delta t}{2\Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Запишемо умову застосованості даного методу:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{|v|}$$

Для цього методу крок за часом потрібно вибирати менше найменшого характерного фізичного часу задачі, що у випадку рівняння перенесення є не що інше, як час, за який швидкість v приводить до перебігу на відстань Δ .

Теоретичний матеріал

Огляд методів для гіперболічних рівнянь

Консервативний метод "з переступом".

При інтегруванні гіперболічних рівнянь з першим порядком точності за часом у рівняння вноситься дестабілізувальна складова, оскільки часовий інтервал не є центрованим за часом. Для стабілізації стійкості додають більш сильну просторову складову (метод Лакса). Як результат — сильно згладжений чисельний розв'язок.

Більш якісну апроксимацію дає метод "з переступом".

Допоміжний крок

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{v\Delta t}{\Delta} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

Основний крок

$$u_{j+1}^{n+2} = u_{j+1}^n - \frac{v\Delta t}{\Delta} (u_{j+2}^{n+1} - u_j^{n+1})$$

Зрозуміло, що при застосуванні даного методу необхідний об'єм пам'яті подвоюється у порівнянні з методом першого порядку. Виконуючи аналіз стійкості, можна довести, що метод може застосовуватися лише для рівнянь перенесення і лише при виконанні умови

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{|v|}$$

Теоретичний матеріал

Огляд методів для гіперболічних рівнянь

Двокрокова схема Лакса - Вендрофа.

Двокроковий метод Лакса-Вендрофа забезпечує центрування за часом шляхом визначення проміжних значень функцій на напівцілих кроках за часом $t^{n+1/2}$

Допоміжний крок

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j+1}^n) - \frac{v\Delta t}{2\Delta} (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

Основний крок

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{v\Delta t}{\Delta} (u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2})$$

Після кожного основного кроку проміжні значення величин $u_{j+1/2}^{n+1/2}$ стають непотрібними й у подальшому не використовуються. Умова стійкості методу:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{|v|}$$

Відзначимо, що у методі Лакса-Вендрофа не вноситься ніяких сторонніх і додаткових чисельних мод. Ця перевага методу визначає його широке застосування.

Алгоритм

1. Дискретизуємо модель: розбиваємо неперервне пружне середовище (вісь y в одновимірному випадку), у якому поширюється хвиля, ґраткою із N вузлів (в одновимірному випадку), відстань між якими (крок за ґраткою) Δy . Створюємо два масиви $X[N]$ та $V[N]$, в яких буде-мо зберігати відповідно зсув та швидкість точок середовища у N точках ґратки.
2. Задаємо параметри моделі: крок за часом Δt , швидкість поширення хвилі V_f , початкові координати та швидкості кожної із N точок середовища ($x_i(0)$, $y_i(0)$, $i = 1..N$), а також рівняння коливань окремих точок середовища, наприклад рівняння коливань крайньої лівої точки $x_1 = A \sin(\omega t)$. Припускаємо, що $t = 0$.
3. Цикл за t
 - 3.1. Збільшуємо час на Δt : $t = t + \Delta t$
 - 3.2. Цикл за i

Алгоритм

3.2.1. Розраховуємо швидкість i -тої точки середовища у даний момент часу згідно з методом Ейлера:

$$v_i(t + \Delta t) = v_i(t) + \frac{x_{i+1}(t) - 2x_i(t) + x_{i-1}(t)}{(\Delta y)^2} \Delta t$$

3.2.2. Записуємо розраховану швидкість i -ї точки у масив V .

3.2.3. Збільшуємо i на 1 та повертаємося до пункту 3.2.1. Якщо цикл за i закінчився, беремо $i = 1$ та переходимо до пункту 3.3.

3.3. Цикл за i .

3.3.1. Розраховуємо координату i -ї точки середовища у даний момент часу згідно з методом Ейлера:

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + v_i(t + \Delta t) \Delta t$$

3.3.2. Якщо відомі закони коливання окремих точок середовища, розраховуємо їхній зсув у даний момент часу згідно із заданими законами.

3.3.3. Записуємо розраховану координату i -ї точки у масив X .

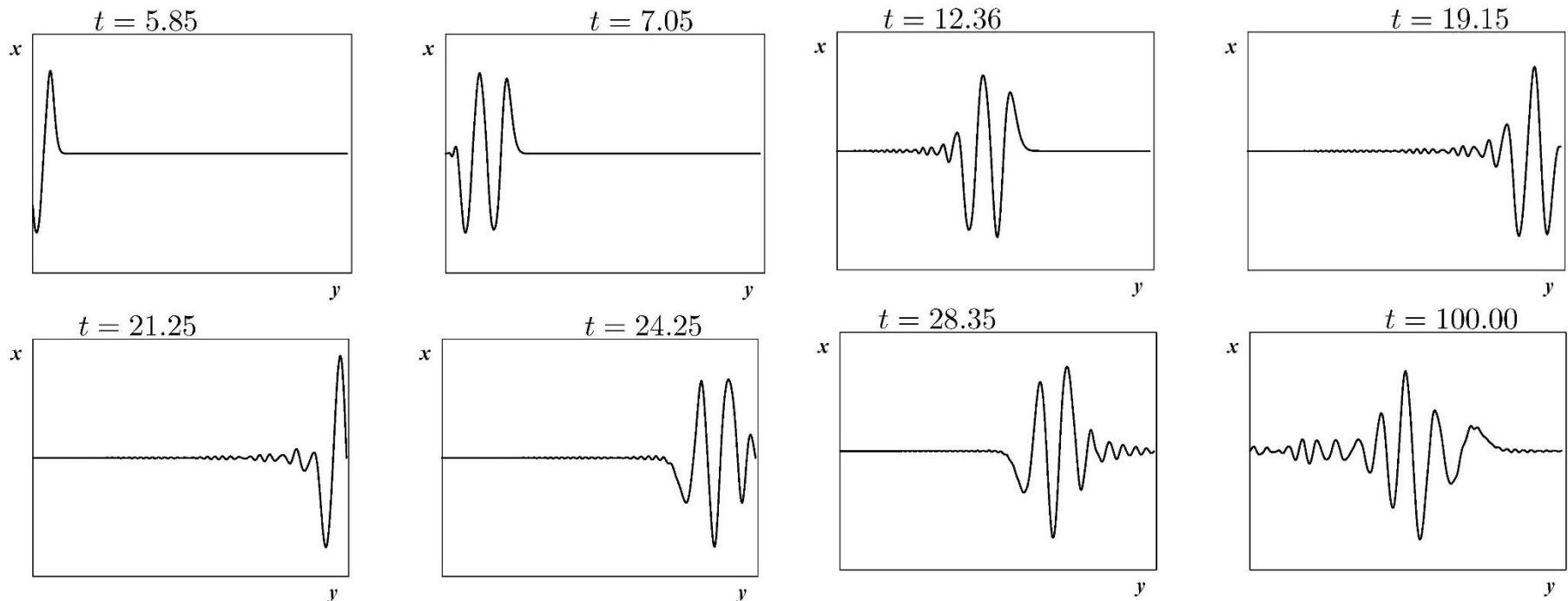
3.3.4. Збільшуємо i на 1 та повертаємося до пункту 3.3.1. Якщо цикл за i закінчився, переходимо до пункту 3.4.

3.4. Записуємо отримані дані (масив X та V) у файл.

3.5. Повернення до пункту 3.1.

Приклад

Початкові координати та швидкості елементів середовища ми беремо такими, що дорівнюють нулю. Крайня ліва точка виконує два повних коливання згідно із законом $A\sin(\omega t)$ та у подальшому є нерухомою. Правий кінець є закріпленим. Початкові дані: амплітуда коливань $A=4$, частота $\omega=1$, швидкість поширення хвилі $V_f=2$, крок за часом $dt=0.01$, крок за простором $dy=1$.



З рисунка бачимо, що середній час поширення фронту хвилі становить $t \approx 19$.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ