Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

5009 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт
із дисципліни «*Чисельна оптимізація»*
для студентів спеціальності 113 «Прикладна математика»
денної форми навчання

Суми
Сумський державний університет
2021

Методичні вказівки до лабораторних робіт із дисципліни «Чисельна оптимізація»/ укладач О. А. Гончаров. – Суми : Сумський державний університет, 2021. – 49 с.

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

ЗМІСТ

С.
ВСТУП 4
1. Програмування числових методів одновимірної оптимізації 5
1.1. Постановка задачі та приклади 5
1.1.1. Знаходження екстремуму унімодальної функції.....................................6
1.1.2. Знаходження екстремуму функції методом послідовного рівномірного перебору з уточненням 7
1.1.3. Пошук усіх екстремумів функції 8
1.2. Завдання до лабораторної роботи 1 10
2. Розв'язування одновимірних задач оптимізації методами послідовного пошуку 14
2.1. Метод дихотомії..14
2.2. Метод золотого перерізу...16
2.3. Завдання до лабораторної роботи 16
3. Градієнтні методи розв'язування багатовимірних задач оптимізації.....................19
3.1. Методика оптимізації функції методом найшвидшого спуску..........................19
3.2. Приклад мінімізації функції методом найшвидшого спуску 21
3.3. Завдання до лабораторної роботи 24
3.4. Застосування градієнтних методів для оптимізації математичних моделей об'єктів 25
3.4.1. Алгоритм оптимізації методом найшвидшого спуску................................25
3.4.2. Числовий метод знаходження градієнта функції 26
3.4.3. Завдання до лабораторної роботи 27
3.5. Методи нульового порядку розв'язування багатовимірних задач оптимізації 29
3.5.1. Алгоритм методу прямого пошуку 29
3.5.2. Завдання до лабораторної роботи 30
3.6. Методи випадкового пошуку розв'язування багатовимірних задач оптимізації...34
3.6.1. Алгоритм методу випадкового пошуку з перерахунком.............................34
3.6.2. Завдання до лабораторної роботи 35
4. Розв'язування багатоетапних задач методом динамічного програмування 38
4.1. Загальна методика розв'язування задачі методом динамічного програмування 38
4.2. Методика розв'язування задачі оптимального розподілу коштів на розширення виробництва методом динамічного програмування 39
4.3. Приклад розв'язування задачі оптимального розподілу коштів методом динамічного програмування...41
4.4. Завдання до лабораторної роботи 44
Список рекомендованої літератури 47

ВСТУП

Дослідження операцій – теорія використання числових методів аналізу в процесі ухвалення рішень в усіх галузях цілеспрямованої діяльності. Задачі теорії дослідження операцій (ДО) класифікують за їх теоретико-інформаційними властивостями. Якщо суб'єкт зберігає свій інформаційний стан (ніякої інформації не держуєі не втрачає), то задачі називають статичними. Якщо суб'єкт у процесі ухвалення рішення змінює свій інформаційний стан, то такі задачі називають динамічними.

Основний метод теорії дослідження операцій – метод математичного моделювання.

Лише окремі задачі ДО можна розв'язувати аналітично та порівняно невелику кількість – числовими методами «вручну». Основна частина цих задач вимагає використання обчислювальної техніки.

Для розв'язування таких задач існує досить багато різних алгоритмів та їх модифікацій. На жаль, жоден із них не має стосовно інших таких переваг, що дозволили б уважати його найбільш ефективним для розв'язування будь-якої задачі. За критерієм ефективності зазвичай беруть витрати машинного часу на розв'язування задачі із заданою точ- ністю, кількість обчислень функції для досягнення оптимальної точки та ін. Тому практика розв'язування складних задач оптимізації вимагає використання залежно від конкретної ситуації різних алгоритмів та їх програмних реалізацій.

Описані в цих методичних вказівках алгоритми оптимізації допоможуть значною мірою полегшити програмне конструювання й вибір придатних алгоритмів під час розв'язування екстремальних задач.

1. Програмування числових методів одновимірної оптимізації

1.1.Постановка задачі та приклади

Математично задачу пошуку оптимального значення X^* вектора X, за якою функція $f(X)$ досягає екстремуму, записують у такому вигляді:

$$f(X^*) = \underset{X}{extremum}\, f(X),$$

де *extremum* може означати максимум *(max)* або мінімум *(min)*. Задача пошуку максимуму будь-якої функції $f(X)$ легко зводиться до пошуку мінімуму заміною функції $f(X)$ на функцію $-f(X)$. Тому, не звужуючи узагальнення, будемо говорити лише про мінімізацію функції $f(X)$ і задачу пошуку оптимального значення вектора X^* можна записати так:

$$f(X^*) = \min_{X} f(X).$$

Один із найпростіших методів знаходження глобального екстремуму функції – це метод послідовного рівномірного перебору (сканування).

Покажемо застосування методу сканування на такому прикладі.

Знайти найменше значення функції

$$y = a \cdot \exp(-bx) \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$$

і відповідне значення аргументу в інтервалі $[x_0, x_k]$ з кроком h.

Пошук найменшого значення функції $y = f(x)$ потрібно виконати в циклі, в якому будемо обчислювати поточне значення функції і порівнювати його з найменшим з усіх попередніх її значень. Пошук найменшого значення функції можна описати математичною формулою так:

$$y_{min} = \begin{cases} y_i, & \text{якщо } y_i < y_{min}; \\ y_{min}, & \text{якщо } y_i \ge y_{min}. \end{cases} \qquad (1.1)$$

За початкове значення $y_{\min}$ можна брати довільне дуже велике число, щоб напевно виконувалася умова $y_1 < y_{\min}$, або перше значення функції. Після порівняння нове $y_{\min}$ набуде значення y_1. Цей процес повторюють послідовно для нових значень x_i, збільшуючи в кожному циклі аргумент на величину h, і в результаті одержують значення $y_{\min}$, яке буде найменшим з усіх обчислених значень функції. Водночас кількість обчислень функції можна визначити за формулою

$$n = [(x_k - x_0)/h] + 1,$$

де вираз у квадратних дужках – ціла частина числа.

Схема алгоритму розв'язування цієї задачі наведена на рисунку 1.1. Блок 3 задає перед циклом початкове значення $y_{\min} = 10^{20}$. Блок 5 обчислює поточне значення функції, блоки 6 і 7 реалізують формулу (1.1).

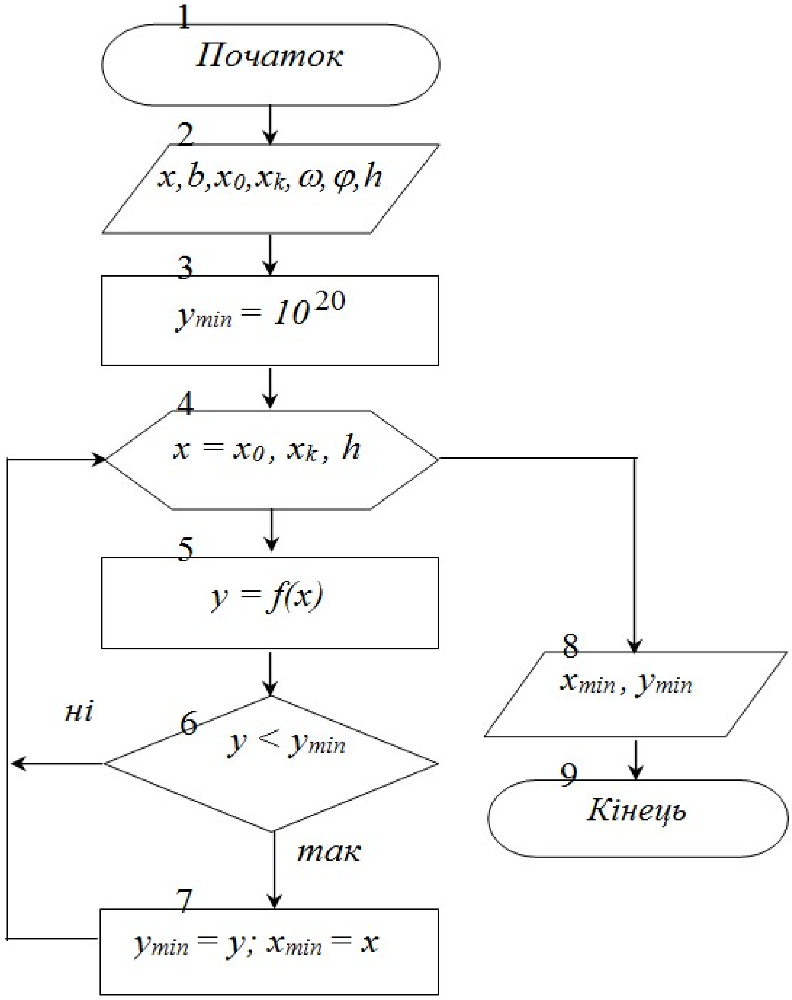


Рисунок 1.1 – Блок-схема алгоритму пошуку мінімуму функції методом сканування

1.1.1. Знаходження екстремуму унімодальної функції

З теорії відомо, якщо функція унімодальна (опукла чи ввігнута), то вона має один екстремум – мінімум або максимум. Тоді затрати машинного часу для визначення екстремуму функції можна зменшити використавши інший алгоритм. Розглянемо такий приклад.

Визначити екстремальне значення функції

$$y = |a|exp(bx - cx^2)$$

і відповідного аргументу на інтервалі $[x_0, x_k]$ з кроком h.

З теорії відомо, що така функція має один екстремум – максимум. Тому, обчислюючи її значення при наближенні до максимуму y^*, завжди будемо отримувати кожне наступне значення функції, більше від найбільшого з усіх попередніх (рис. 1.2), тобто $y_i > y_{max}$, де $y_{max} = max\ (y_1, y_2, \ldots, y_{i-1})$.

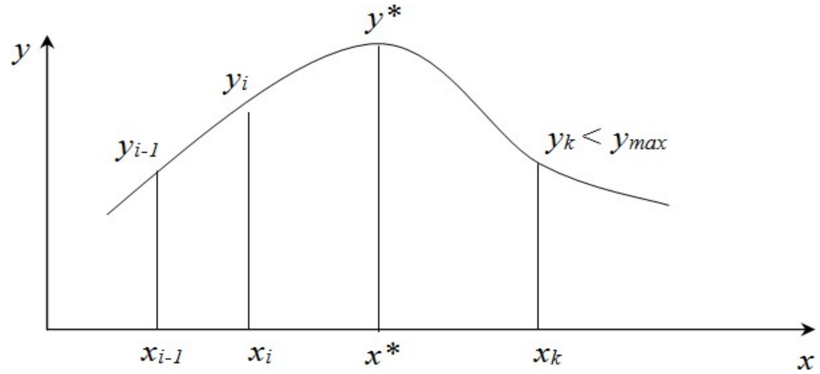


Рисунок 1.2 – Обчислення максимуму унімодальної функції

Після досягнення максимуму y^* функція почне зменшуватися, отже, умову $y_i \le y_{max}$ можна застосовувати для виходу з циклу. Цей процес можна описати формулою

$$y_{max} = \begin{cases} y_i, & \text{якщо } y_i > y_{max}; \\ \text{вихід з цикла}, & \text{якщо } y_i \le y_{max}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Алгоритм у цьому разі буде відрізнятися від показаного на рисунку 1.1 тим, що якщо умова $y_i > y_{max}$ не виконується, то перехід здійснюється не до оператора циклу (блок 4), а до оператора, що стоїть за циклом (блок 8).

Необхідно зазначити, що вихід із циклу може відбутися, якщо цикл буде виконано для всіх значень аргументу x. У цьому разі максимальне значення функції досягається на останньому кроці за значення $x^* = x_k$.

1.1.2. Знаходження екстремуму функції методом послідовного рівномірного перебору з уточненням

Застосуємо метод послідовного рівномірного перебору з уточненням до розв'язування такої задачі.

Визначити з точністю до $\varepsilon = 0{,}001$ значення аргументу, за якого функція $y = ax - b\ln x$ досягає мінімуму, якщо x змінюється на інтервалі $L = [0{,}3 - 8{,}0]$.

Для зменшення часу на знаходження екстремуму функції роділимо розв'язування задачі на два етапи: 1) визначення приблизного значення екстремуму за великого кроку зміни аргументу; 2) повторення процесу в районі екстремуму за меншого кроку зміни аргументу.

Для визначення приблизного значення мінімуму функції виберемо великий початковий крок h, наприклад $h = 0,2$. Починаючи з лівої границі інтервалу L, обчислимо екстремальне значення y із кроком h. Потім h зменшимо в $k = 10$ разів та встановимо новий інтервал $L_1 = [\, x_{min} - h, x_{min} + h]$ і визначимо повторно екстремум y на новому інтервалі з кроком h/k. Такий процес будемо повторювати до досягнення точності ε.

Блок-схема розв'язування задачі показана на рисунку1.3.

У внутрішньому циклі здійснюється пошук найменшого значення функції і значення аргументу, за якого його досягають. Оскільки функція має один мінімум, вихід із циклу відбувається за $y \geq y_{min}$. Після закінчення внутрішнього циклу перевіряється умова $h \leq \varepsilon$. Якщо умова виконується, то здійснюється вихід із зовнішнього циклу. Інакше задається новий інтервал зміни x, менший у k разів крок h, і зовнішній цикл повторюється до виконання умови $h \leq \varepsilon$.

1.1.3.Пошук усіх екстремумів функції

Іноді виникає необхідність визначити всі екстремуми (локальні максимуми й мінімуми) функції на деякому інтервалі $L = [a, b]$. Розглянемо таку задачу.

Знайти й запам'ятати в масиві Z, починаючи з першого мінімуму, усі мінімуми й максимуми функції

$$y = 5exp(-2x)cos4x$$

при зміні аргументу x в інтервалі $L = [0; 6]$ із кроком 0,1. Екстремальні значення x запам'ятати в масиві E.

Алгоритм розв'язування цієї задачі полягає в такому. Спочатку в циклі здійснюється пошук найменшого значення y_{min} і значення аргументу x_{min}, за якого його досягають.У разі виконання умови $y \geq y_{min}$ відбувається вихід з циклу, екстремальні значення y_{min} і x_{min} запам'ятовуються в масивах Z і E відповідно, та починається пошук екстремальних значень у циклах y_{max} і x_{max}. У разі виконання умови $y < y_{max}$ відбувається вихід із циклу, екстремальні значення y_{max} і x_{max} запам'ятовуються в масивах Z і E. Знову починається пошук y_{min} і x_{min}. Процес пошуку екстремальних значень припиняється за досягнення аргументом x значення $b = 6$.

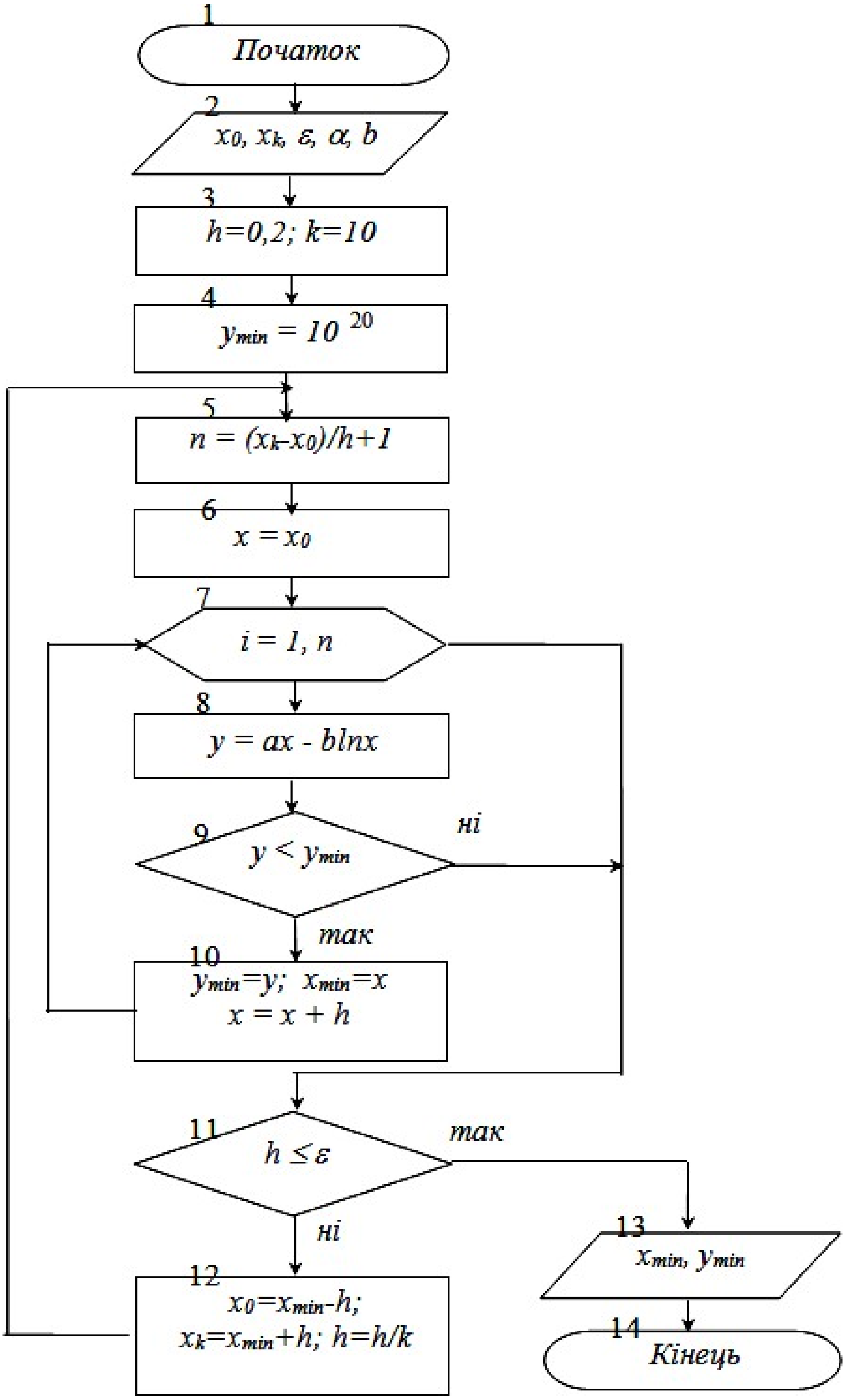


Рисунок 1.3 – Блок-схема алгоритму мінімізації унімодальної функції методом перебору з уточненням

1.2. Завдання до лабораторної роботи 1

Мета роботи – закріпити теоретичні знання і придбати практичні навички розроблення алгоритмів і програм для знаходження екстремальних значень функції однієї змінної методом перебору із застосуванням ПК.

Порядок виконання роботи:

1) ознайомитися з наведеними прикладами розв'язування задач знаходження екстремумів функції однієї змінної;
2) записати розрахункові формули для знаходження із заданою точністю екстремумів (локальних, глобального, в окремих варіантах найбільшого або найменшого значень) заданої формулою функції методом пере- бору за зміни аргументу в заданому інтервалі;
3) скласти блок-схему алгоритму розв'язування для свого варіанта;
4) скласти та налагодити програму розв'язування задачі відповідно до блок-схеми алгоритму;
5) виконати розрахунки та проаналізувати результати обчислень.

Зміст звіту:

1) мета роботи;
2) умова задачі;
3) розрахункові формули розв'язування задачі;
4) блок-схема алгоритму розв'язування задачі;
5) результати розв'язування задачі на ЕОМ з графіком досліджуваної функції;
6) стислі висновки з виконаної роботи;
7) роздрукування коду, що реалізує алгоритм.

Варіанти індивідуальних завдань

Варіанти 1–4. Знайдіть найбільше значення функції

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

і значення аргументу, за якого воно одержане, з точністю до 0,0001. Аргумент змінюється від –3 до 2.Ураховуйте, що функція не є унімодальною. Побудуйте графік функції. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Варіант	*a*	*b*	*c*	*d*
1	3,1	0	–2,8	10,3
2	2,1	–2,9	–11,4	–5,6
3	1,6	0,2	–4,8	16,6
4	2,0	4,6	–8,4	10,8

Варіанти 5–7. Визначте максимум і мінімум функції

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

за зміни аргументу від –4 до 3. Значення x_{max} і x_{min} визначити з точністю до 0,0001. Функція досягає максимуму за менших значень аргументу. Побудуйте графік функції. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Варіант	*a*	*b*	*c*	*d*
5	1,5	0	–2,5	8,7
6	2,4	–3,1	–10,8	4,8
7	1,5	0,4	–5,6	–10,8

Варіанти 8–11. Знайдіть і запам’ятайте в масиві *Z*, починаючи з першого максимуму, всі максимуми й мінімуми функції

$$y = a\,exp(-bx)sin(\omega x + \varphi)$$

за зміни аргументу від 0 до 7. Екстремальні значення *x*, визначені з точністю до 0,0001, запам’ятайте в масиві *W*. Побудуйте графік функції. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 1.3.

Таблиця 1.3

Варіант	*a*	*b*	*ω*	*φ*
8	14,5	0,8	2,5	π/9
9	15,0	0,6	3,0	π/8
10	15,5	0,4	3,5	π/7
11	16,0	0,2	4,0	π/6

Варіанти 12–14. Знайдіть екстремальне значення функції

$$y = a\ exp(bx + cx^2)$$

і значення аргументу, за якого його досягають, з точністю до 0,0001. Аргумент змінюється від –2 до 3. Функція такого виду має один екстремум: максимум або мінімум. Визначте, який із них. Побудуйте графік функції. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 1.4.

Таблиця 1.4

Варіант	*a*	*b*	*c*
12	8,0	7,5	–2,1
13	4,5	9,0	–3,1
14	5,0	–10,5	–4,2

Варіанти 15–18. Для функції

$$y = a\ exp(-bx)sin(\omega x + \varphi)$$

знайдіть перший максимум і перший мінімум та значення аргументу, за яких вони одержані, з точністю до 0,0002. Функція спочатку досягає максимуму, аргумент змінюється від 0 до 5. Побудуйте графік функції. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 1.5.

Таблиця 1.5

Варіант	*a*	*b*	*ω*	*φ*
15	25,0	0,3	3,0	π/10
16	30,0	0,8	3,5	π/9
17	35,5	0,7	4,0	π/8
18	40,0	0,9	4,5	π/7

Варіанти 19–21. Обчисліть найбільші значення функції

$$y_i = 5exp(b_i x - 2x^2),$$

де b_i – елементи масиву $(b_1, b_2, ..., b_8)$. Аргумент змінюється від –3 до 3. Усі y_{max} запам'ятайте в масиві *Z*, значення x_{max}, визначені з точністю до 0,001, запам'ятайте в масиві W. Побудуйте графік функції y_8. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 1.6.

Таблиця 1.6

Варіант	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
19	–4,4	–3,6	–2,1	–1,0	0,6	1,5	3,6	4,8
20	–5,8	–3,2	–1,8	0,5	1,6	2,4	3,8	4,6
21	–3,6	–2,1	–1,5	0	1,2	3,4	3,9	4,7

Варіанти 22–25. Знайдіть мінімальні значення функції

$$y = a\ exp(-bx)\ cos(\omega x + \varphi)$$

і значення аргументу, за яких вони одержані, з точністю до 0,0001. Аргумент змінюється від 0 до 8. Побудуйте графік функції. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 1.7.

Таблиця 1.7

Варіант	a	b	ω	φ
22	18,0	0,3	5,0	π/8
23	19,5	0,5	4,5	π/7
24	21,0	0,7	4,0	π/6
25	22,5	0,9	3,5	π/5

2. Розв'язування одновимірних задач оптимізації методами послідовного пошуку

Методи послідовного пошуку будуються в припущенні унімодальності функції $f(x)$ на заданому інтервалі $[a, b]$. Виходячи з властивостей унімодальності функції, можна побудувати таку стратегію послідовного пошуку екстремальної точки x^*, за якої будь-яка пара обчислень $f(x)$ дозволяє звузити інтервал пошуку екстремуму (інтервал невизначеності).

Стратегія вибору значень x_1 і x_2 для проведення обчислень $f(x)$ з урахуванням попередніх результатів визначає сутність різних методів послідовного пошуку.

2.1. Метод дихотомії

Нехай $f(x)$ унімодальна на інтервалі $[a, b]$ і $x^* \in (a, b)$ – точка мінімуму $f(x)$. У методі дихотомії (інша назва – метод половинного ділення) проміжні значення x_1 і x_2 вибирають на відстані $\delta/2$ $(0 < \delta < \varepsilon)$ зліва та справа від середини поточного інтервалу невизначеності:

$$x_1 = (a_k + b_k)/2 - \delta/2,$$
$$x_2 = (a_k + b_k)/2 + \delta/2, \qquad (2.1)$$

де δ – параметр методу;

ε – точність визначення екстремуму x^*;

a_k, b_k – граничні точки інтервалу на k-му кроці.

Обчисливши $f(x_1)$ і $f(x_2)$ і порівнявши ці значення, визначать новий інтервал невизначеності:

$$\text{якщо } f(x_1) \le f(x_2), \text{ то } a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_2;$$
$$\text{якщо } f(x_1) > f(x_2), \text{ то } a_{k+1} = x_1,\ b_{k+1} = b_k. \qquad (2.2)$$

Потім знову обчислюють координати x_1 і x_2 і продовжують пошук. Пошук припиняється під час виконання нерівності $b_k - a_k < \varepsilon$. Як екстремальне значення беруть точку

$$x^* = (a_k + b_k)/2. \qquad (2.3)$$

Блок-схема алгоритму мінімізації унімодальної функції методом дихотомії наведена на рисунку 3.1. В алгоритмі передбачений підрахунок кілько- сті обчислень функції, що мінімізується.

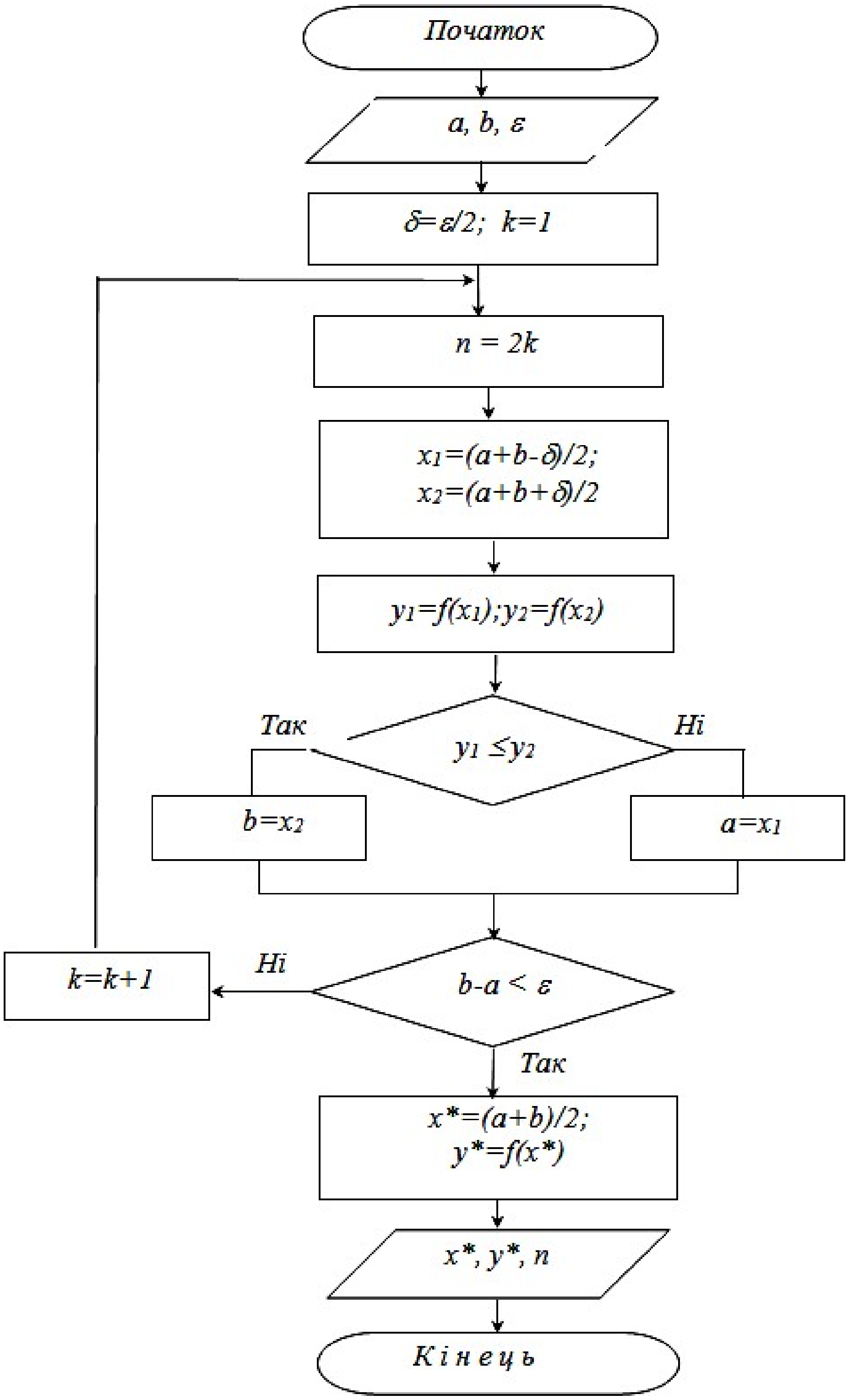


Рисунок 3.1 – Блок-схема методу дихотомії

2.2. Метод золотого перерізу

У методі золотого перерізу проміжні значення x_1 і x_2 вибирають симетрично щодо центра інтервалу невизначеності з урахуванням коефіцієнта пропорційності $\tau = 0,382$ у такий спосіб:

$$x_1 = a_k + 0,382(b_k - a_k),$$
$$x_2 = b_k - 0,382(b_k - a_k), \qquad (2.4)$$

де a_k , b_k – граничні значення інтервалу невизначеності на k-му кроці пошуку.

Потім у цих точках обчислюють значення цільової функції, аналізують умови (3.2) і пошук продовжують.

Варто відзначити, що в методі золотого перерізу немає необхідності визначати обидві нові точки (x_1, x_2) за формулами (3.4), одна з яких буде визначена на попередньому кроці. Пошук припиняють під час виконання нерівності $b_k - a_k < \varepsilon$, де ε – задана точність. Як екстремальне значення можна вибрати

$$x^* = (a_k + b_k)/2.$$

Блок-схема алгоритму мінімізації унімодальної функції методом золотого перерізу наведена на рисунку 3.2. В алгоритмі також передбачений підрахунок кількості обчислень мінімізованої функції, з урахуванням вищеведеного зауваження.

2.3. Завдання до лабораторної роботи 2

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів і програм для розв'язування одномірних задач оптимізації методами послідовного пошуку – дихотомії та золотого перерізу.

Порядок виконання роботи:

1) вивчіть методи одновимірної оптимізації: дихотомії та золотого перерізу;
2) запишіть розрахункові формули для визначення екстремуму унімодальної функції;
3) складіть блок-схему алгоритму мінімізації заданої функції;
4) складіть програму розв'язування задачі на одній з алгоритмічних мов;
5) налаштуйте програму і виконайте розрахунки на ПК.

Звіт повинен містити:

1) мету роботи;
2) умову задачі;
3) розрахункові формули розв'язування задачі;
4) блок-схему алгоритму розв'язування задачі;

5) результати розв’язування задачі на ЕОМ із графіком досліджуваної функції;

6) стислі висновки з виконаної роботи;

7) роздрукування коду, що реалізує алгоритм.

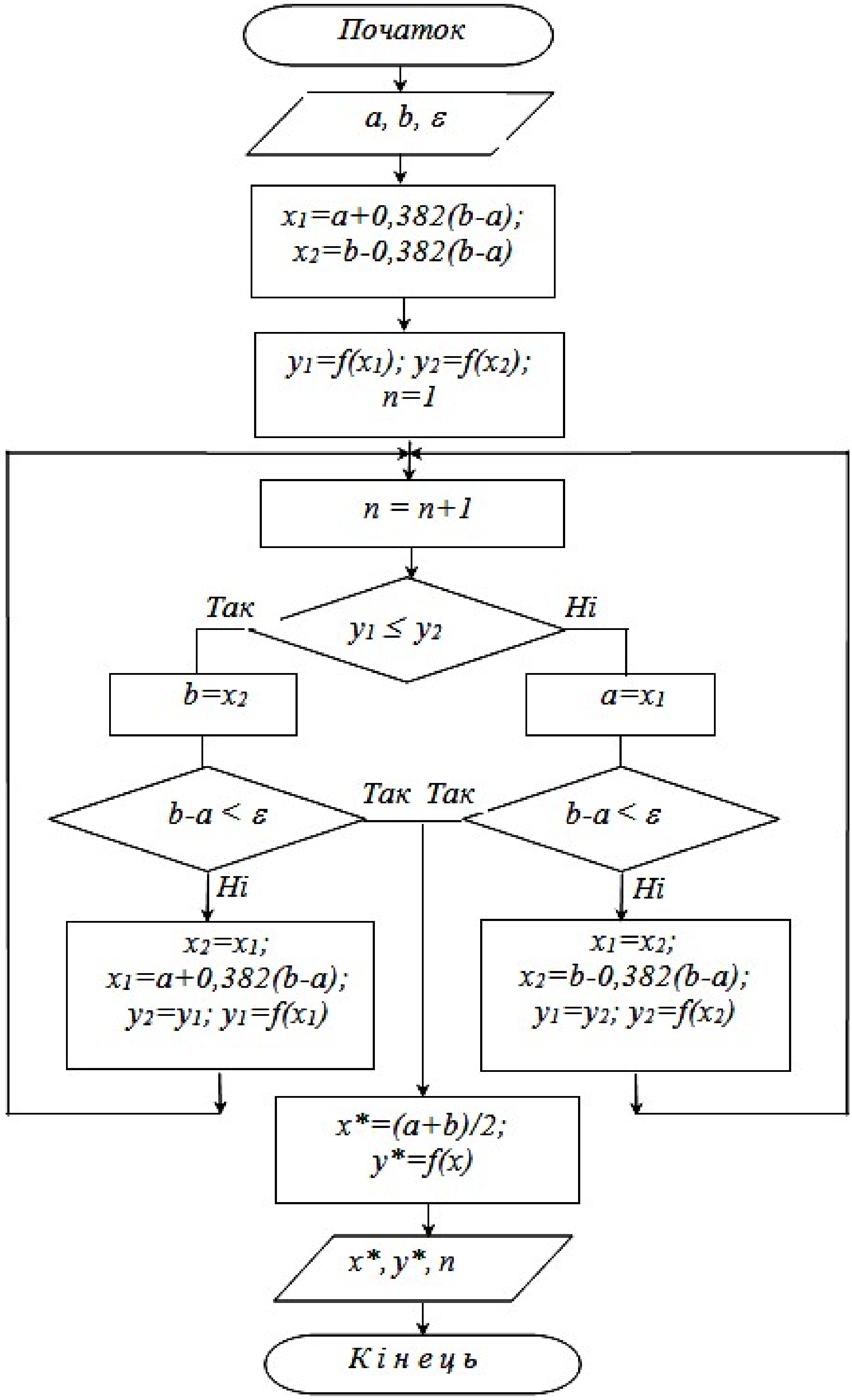


Рисунок 3.2 – Блок-схема методу золотого перерізу

Варіанти індивідуальних завдань

Визначте мінімум функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 3.1. Для мінімізації функцій із непарними номерами варіантів застосовуйте метод дихотомії, з парними – метод золотого перерізу. Побудуйте графік функції.

Таблиця 3.1

Варіант	Функція $f(x)$	a	b
1	$e^x + x^2$	–1	0
2	$e^x + 1/x$	0,5	2
3	$e^x - \ln x$	0,3	2
4	$e^x + 1/(x + 1)$	–0,5	1,5
5	$tgx + 1/x$	0,5	1
6	$tgx + e^{-x} + x$	–1	0
7	$x^2 + sinx$	–1	0
8	$e^x - sin(x)$	0	1
9	$x^4 + 2x^2 + 4x$	–1	0
10	$xe^x + x^2$	–1	0
11	$(x + 2)/x^2 - x$	–1	0,5
12	$x + 1/ln(x)$	1,5	2,5
13	$x + ln^2(x)$	0,3	1,5
14	$x^2 - xe^{-x}$	1,3	2,3
15	$x^4 + 2x^2 - 4x$	0,5	1,5
16	$e^{-x} + x^2$	0	1
17	$e^{-x} - 1/x$	–1	–0,5
18	$e^{1/x} + ln(x)$	1	3
19	$e^{-x} + 1/(1 - x)$	–0,5	0,5
20	$-tg(x) - 1/x$	–1	–0,5
21	$e^x - tg(x) - x$	0	1
22	$x^2 - sin(x)$	0	1
23	$e^{-x} + sin(x)$	–1	0
24	$x + 1/arctg(x)$	0	1
25	$X - ln(ln(x))$	0	1

3. Градієнтні методи розв'язування багатовимірних задач оптимізації

Для розв'язування задачі пошуку безумовного мінімуму функції широко застосовують методи спуску. Суть їх складається в побудові послідовності точок $X_0, X_1, \ldots, X_k, \ldots$, таких, що відповідають умові $f(X_0) > f(X_1) > \ldots f(X_k) > \ldots$

За початкову точку можна обрати будь-яку точку, однак краще, якщо точка X_0 буде розміщена не занадто далеко від точки мінімуму. Потім необхідно вибрати напрямок, уздовж якого передбачається розташувати наступну точку, і величину кроку уздовж цього напрямку. В ітераційних методах точки послідовності обчислюються за формулою

$$X_{k+1} = X_k + \gamma_k \cdot P_k, \qquad k = 0,1, \ldots, \tag{3.1}$$

де P_k– напрямок спуску

γ_k – величина, що визначає довжину кроку.

Ці методи дозволяють як кінцеве число кроків одержати точку мінімуму чи підійти досить близько до неї.

3.1. Методика оптимізації функції методом найшвидшого спуску

Нагадаємо деякі поняття. Якщо функція $f(X)$ має похідну в точці X_o, то градієнтом $f(X)$ у точці $X_o = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{no})$ називається вектор розмірності n:

$$\nabla f(x_0) = (\partial f(x_0)/\partial x_1, \ldots, \partial f(x_0)/\partial x_n) = (\nabla_1 f(x_0), \nabla_2 f(x_0), \ldots, \nabla_n f(x_0)).$$

Вектор градієнта спрямований по нормалі до лінії рівня поверхні $f(X) = C$ (рис. 3.3) і показує напрямок найшвидшого зростання функції в цій точці. Вектор $-\nabla f(X_0)$, протилежний градієнту, називається антиградієнтом і спрямований у напрямку найбільшого зменшення функції $f(X)$. У точці мінімуму градієнт функції дорівнює нулю. Тоді, вибравши за напрямок спуску P_k у виразі (3.5) антиградієнт функції $f(X)$ у точці X_k, одержимо формулу ітераційного процесу:

$$X_{k+1} = X_k - \gamma_k \nabla f(X_k), \quad \gamma_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.2}$$

У координатній формі цей процес можна записати:

$$x_{ik+1} = x_{ik} - \gamma_k \nabla_i f(X_k), \quad i = \overline{1,n}.$$

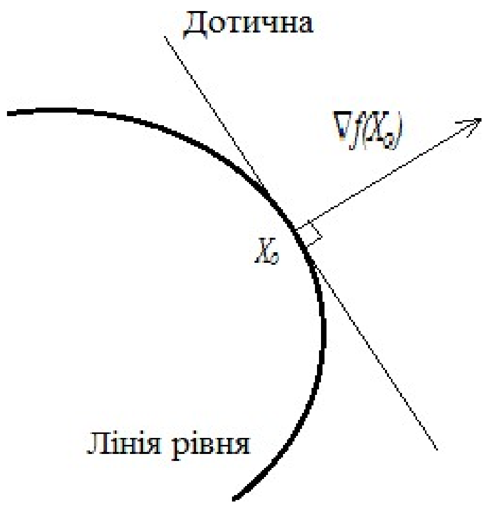


Рисунок 3.3 – Лінія рівня й напрямок градієнта функції

Усі ітераційні процеси, в яких напрямок руху на кожному кроці збігається з антиградієнтом (градієнтом) функції, називають градієнтними. Вони відрізняються між собою лише способами вибору величини кроку $\gamma_к$.

Найбільш економними за кількістю ітерацій і надійними є градієнтні методи зі змінним кроком, зокрема метод найшвидшого спуску. Тут величину кроку γ_k на кожній ітерації вибирають за умови мінімуму функції $f(X)$ у напрямку спуску, тобто

$$f(X_k - \gamma_k \nabla f(X_k)) = \min_{\gamma \geq 0} f(X_k - \gamma \nabla f(X_k)). \tag{3.3}$$

Отже, в цьому варіанті градієнтного методу на кожній ітерації необхідно розв'язати задачу одновимірної мінімізації цільової функції вздовж градієнтного напрямку.

Необхідну ознаку екстремуму функції $f(X)$ у напрямку спуска можна записати у вигляді скалярного добутку векторів:

$$(\nabla f(X_{k+1}),\ \nabla f(X_k)) = 0. \tag{3.4}$$

Алгоритм методу найшвидшого спуску полягає втакому:

Етап 1. Обчислити в початковій точці X_0 значення градієнта $\nabla f(X_0)$.

Етап 2. Визначити величину кроку γ_0 шляхом розв'язування задачі одновимірної мінімізації (3.7).

Етап 3. Перейти в напрямку антиградієнта $-\nabla f(X_0)$ з визначеним на етапі 2 кроком γ_0 у нову точку X_1 відповідно до формули

$$X_1 = X_0 - \gamma_k\ \nabla f(X_0).$$

Етап 4. Продовжити пошук: на *k-му* кроці в точці X_k обчислити значення градієнта $\nabla f(X_k)$ і величину кроку γ_k та здійснити спуск у точку

$$X_{k+1} = X_k - \gamma_k \nabla f(X_k).$$

Етап 5. Пошук оптимуму припинити під час виконання однієї з таких умов:

1) під час виконання критерію кінця ітераційного процесу $\gamma_k < \gamma_{min}$;

2) за значень норми вектор-градієнта менше від заданого значення

$$\| \nabla f(x) \| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \nabla_i^2 f(x_k)\right)} < \nabla_{min}.$$

3.2. Приклад мінімізації функції методом найшвидшого спуску

Мінімізувати функцію двох змінних

$$f(x_1, x_2) = -6x_1 - 4x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 18. \tag{3.5}$$

1. Вибрати довільну точку $X_0 = (1,5;\ 3)$. У цій точці $f(X_0) = 8,25$. Обчислити вектор-градієнт функції в точці X_0:

$$\begin{cases} \nabla_1 f(X) = \partial f(X) / \partial x_1 = -6 + 2x_1. \\ \nabla_2 f(X) = \partial f(X) / \partial x_2 = -4 + 2x_2. \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{cases} \nabla_1 f(X_0) = -6 + 2 \cdot 1.5 = -3, \\ \nabla_2 f(X_0) = -4 + 2 \cdot 3 = 2; \end{cases}$$

$$\nabla f(X_0) = (-3;\ 2).$$

Оскільки $\nabla f(X_0) \neq 0$, то X_0 не є точкою екстремуму.

2. Перейти з X_0 в напрямі антиградієнта $-\nabla f(X_0)$ у нову точку X_1 Відповідно до формули:

$$X_1 = X_0 - \gamma_0 \nabla f(X_0).$$

$$\begin{cases} x_{11} = x_{10} - \gamma_0 \nabla_1 f(X_0) = 1,5 + 3\gamma_0, \\ x_{21} = x_{20} - \gamma_0 \nabla_2 f(X_0) = 3 - 2\gamma_0, \end{cases}$$

тобто $X_1 = (1,5 + 3\gamma_0;\ 3 - 2\gamma_0)$.

Для визначення координат точки X_1 потрібно визначити значення кроку γ_0. Одержимо

$$\begin{cases} \nabla_1 f(X_1) = -6 + 2 \cdot (1{,}5 + 3\gamma_0) = -3 + 6\gamma_0, \\ \nabla_2 f(X_1) = -4 + 2 \cdot (3 - 2\gamma_0) = 2 - 4\gamma_0, \end{cases}$$

$$\nabla f(X_1) = (-3 + 6\gamma_0;\ 2 - 4\gamma_0).$$

Відповідно до виразу (3.8) $(\nabla f(X_{k+1}),\ \nabla f(X_k)) = 0$ маємо:

$$(-3+6\gamma_0)(-3)+(2-4\gamma_0)\cdot 2 = 0,$$
$$9 - 18\gamma_0 + 4 - 8\gamma_0 = 0;$$
$$13 - 26\gamma_0 = 0.$$

Звідси $\gamma_0 = 0{,}5$.

3. За $\gamma_0 = 0{,}5$ зменшення функції в напрямку антиградієнта досягає найбільшої величини. Здійснимо спуск з обраним кроком у точку X_1:

$$\begin{cases} x_{11} = 1{,}5 + 3 \cdot 0{,}5 = 3, \\ x_{21} = 3 - 2 \cdot 0{,}5 = 2; \end{cases}$$

$$X_1 = (3;\ 2).$$

Обчислимо значення функції в точці X_1 (підставимо координати точки X_1 у вираз (3.9)) та одержимо

$$f(X_1) = 5 < f(X_0).$$

4. Визначимо вектор-градієнт у точці X_1:

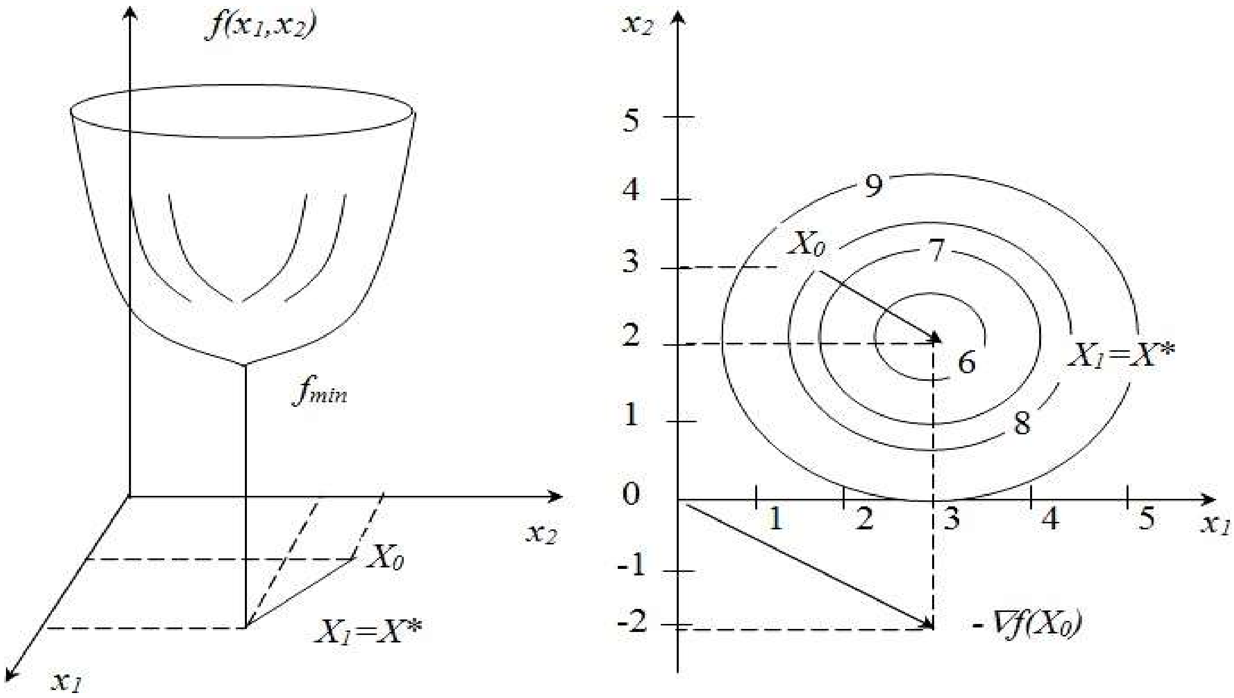
$$\nabla_1 f(X_1) = -6 + 2\cdot 3 = 0,$$
$$\nabla_2 f(X_1) = -4 + 2\cdot 2 = 0,$$

тобто $\nabla f(3;\ 2) = (0;\ 0)$.

Це означає, що ніякими переміщеннями з точки X_1 функцію $f(X)$ зменшити не можна і X_1 – шукана точка мінімуму X^*. Отже,

$$X^* = (x_1^*,\ x_2^*) = (3;\ 2);\ f_{min} = 5.$$

На рисунку 3.4 наведена геометрична інтерпретація розв’язування задачі. На рисунку 3.4, *а* наведене наглядне зображення поверхні $f(X)$ – параболоїд обертання, на рисунку 3.4, *б* поверхня $f(X)$ зображена лініями рівня – концентричними колами. Антиградієнт $-\nabla f(X_0) = (3; -2)$ побудовано на початку координат. Траєкторія найшвидшого спуску X_0X_1 у точку мінімуму X^* паралельна антиградієнту $-\nabla f(X_0)$



а *б*

Рисунок 3.4 – Ілюстрація пошуку екстремуму функції методом найшвидшого спуску

Відомо, що квадратичну функцію вигляду (3.9) можна подати в такому вигляді:

$$(x_1 - x_1^*)^2 + (x_2 - x_2^*)^2 = (f - f_{min})/a, \qquad (3.6)$$

де a – коефіцієнт при x_1^2 і x_2^2 у виразі (3.9).

Вираз (3.10) задає в загальному вигляді рівняння сім’ї кіл (ліній рівня) радіусом

$$R = \sqrt{(f - f_{min})/a}.$$

Отже, для побудови ліній рівня поверхні *f (X)* її рівняння (3.9) звести до такого вигляду *(для a = 1)*:

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 = f - 5. \qquad (3.7)$$

Лініями рівня поверхні (3.11) за $f = const$ будуть кола. За f = 6; 7; 8; 9 їх радіуси відповідно дорівнюють 1; 1,41; 1,73; 2. У проєкції на площину $x_1 0 x_2$ вони мають загальний центр з координатами (3; 2).

У розглянутому прикладі мінімум квадратичної функції був досягнутий методом найшвидшого спуску за один крок. За мінімізації більш складних функцій кількість ітерацій буде значно більшою.

3.3. Завдання до лабораторної роботи 3

Мета роботи – закріпити теоретичні відомості й набути практичних навичок пошуку безумовного екстремуму функції багатьох змінних градієнтним методом.

Порядок виконання роботи:

1) ознайомтеся з методикою і прикладом розв'язування задачі мінімізації функції градієнтним методом;

2) запишіть розрахункові формули й алгоритм мінімізації методом найшвидшого спуску;

3) мінімізуйте методом найшвидшого спуску задану функцію (табл. 3.2), супроводжуючи розв'язування графічною ілюстрацією.

Звіт повинен містити:

1) мету роботи;
2) умову задачі;
3) розрахункові формули розв'язування задачі;
4) блок-схему алгоритму розв'язування задачі;
5) розв'язування задачі вручну з графічною інтерпретацією результату;
6) стислі висновки з виконаної роботи.

Варіанти індивідуальних завдань

1. Знайти мінімум функції $f(x_1, x_2)$ методом найшвидшого спуску, вибравши початкову точку X_0. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 3.2. Дати геометричну інтерпретацію розв'язування задачі.

2. Збільшивши коефіцієнт за x^2 вдвічі, повторити обчислення та порівняти кількість ітерацій.

Таблиця 3.2

Варіант	Функція $f(x_1, x_2)$	X_0
1	$-2x_1 + 0{,}2x_1^2 - 3x_2 + 0{,}2x_2^2 + 4$	(2; 3)
2	$-2x_1 + 0{,}1x_1^2 + 3x_2 + 0{,}1x_2^2 - 3$	(5; 6)
3	$-3x_1 + 0{,}3x_1^2 - 6x_2 + 0{,}3x_2^2 + 5$	(10; 15)
4	$3x_1 + 0{,}2x_1^2 + x_2 + 0{,}2x_2^2 - 4$	(5; 0)
5	$2x_1 + 0{,}4x_1^2 - 2x_2 + 0{,}4x_2^2 - 5$	(0; 1)
6	$-3x_1 + 0{,}5x_1^2 + 6x_2 + 0{,}5x_2^2 + 3$	(0; –5)
7	$2x_1 + 0{,}2x_1^2 + 3x_2 + 0{,}2x_2^2 + 4$	(–2; –3)

Продовження таблиці 3.2

Номер варіанта	Функція $f(x_1, x_2)$	X_0
8	$-4x_1 + 2x_1^2 - 8x_2 + 2x_2^2 + 13$	(3; 0)
9	$-6x_1 + 3x_1^2 + 12x_2 + 3x_2^2 + 10$	(1; –1)
10	$-8x_1 + 2x_1^2 - 4x_2 + 2x_2^2 + 7$	(0; 4)
11	$-12x_1 + 3x_1^2 + 6x_2 + 3x_2^2 + 4$	(–2; 3)
12	$-8x_1 + 2x_1^2 - 12x_2 + 2x_2^2 + 18$	(–1; 0)
13	$-12x_1 + 4x_1^2 - 8x_2 + 4x_2^2 + 21$	(4; 0)
14	$4x_1 + 2x_1^2 + 8x_2 + 2x_2^2 + 10$	(5; 1)
15	$12x_1 + 3x_1^2 - 18x_2 + 3x_2^2 - 7 + 20$	(–5; 1)
16	$6x_1 + 3x_1^2 + 12x_2 + 3x_2^2 - 7$	(2; –1)
17	$-4x_1 + 0{,}4x_1^2 + 8x_2 + 0{,}4x_2^2 + 8$	(–5; 0)
18	$8x_1 + 0{,}4x_1^2 - 4x_2 + 0{,}4x_2^2 - 5$	(5; –2)
19	$2x_1 + 2x_1^2 - 4x_2 + 2x_2^2 + 9$	(2; 5)
20	$3x_1 + 3x_1^2 - 12x_2 + 3x_2^2 + 16$	(–5; 1)
21	$3{,}6x_1 + 0{,}6x_1^2 - 2{,}4x_2 + 0{,}6x_2^2 + 11$	(–1; 0)
22	$-1{,}4x_1 + 0{,}7x_1^2 + 5{,}6x_2 + 0{,}7x_2^2 + 16$	(–1; 1)
23	$3{,}2x_1 + 0{,}8x_1^2 - 4{,}8x_2 + 0{,}8x_2^2 + 17$	(0; 2)
24	$-12x_1 + 2x_1^2 - 8x_2 + 2x_2^2 + 18$	(2; –1)
25	$6x_1 + 3x_1^2 - 18x_2 + 3x_2^2 + 13$	(3; 2)

3.4. Застосування градієнтних методів для оптимізації математичних моделей об’єктів

3.4.1. Алгоритм оптимізації методом найшвидшого спуску

Обчислювальний алгоритм для *i-го* компонента вектора оптимізованих параметрів має вигляд

$$x_{ik+1} = x_{ik} - \gamma_k \nabla_i f(X_k) / \| \nabla f(X_k) \|, \tag{3.8}$$

де γ_k – величина оптимального кроку *k-ї* ітерації, визначається за допомогою одновимірної мінімізації цільової функції вздовж антиградієнтного напрямку;

$$||\nabla f(X_k)|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \nabla_i^2 f(X_k)}$$ – норма вектор-градієнта.

Алгоритм методу передбачає такі етапи.

Етап 1. Задати початкову точку X_0, кількість ітерацій k - такою, що дорівнює нулю.

Етап 2. Обчислити градієнт функції $\nabla f(X_k)$.

Етап 3. Знайти одним із методів одновимірної мінімізації оптимальний крок γ_k уздовж антиградієнтного напрямку. Наприклад, оптимальний крок γ_k визначається в результаті розв'язування задачі одновимірної мінімізації функції $f(X)$ по γ уздовж антиградієнтного напрямку методом сканування з уточненням.

Етап 4. Перевірити умови припинення пошуку. Пошук мінімуму припиняється під час виконання однієї з умов:

1) $||\nabla f(X_k)|| < \nabla_{min}$;

2) $\gamma_k < \gamma_{min}$;

3) вичерпано наперед заданий ресурс кількості ітерацій або кількості обчислень мінімізованої функції.

Якщо хоча б одна з умов припинення пошуку виконується, то перейти на етап 7, інакше – на етап 5.

Етап 5. Обчислити координати нової точки:

$$X_{k+1} = X_k - \gamma_k \nabla f(_k) / ||\nabla f(X_k)||.$$

Етап 6. Припустити, що $k = k+1$ і перейти на етап 2.

Етап 7. Припустити, що $X^* = X_k$, $f^* = f(X^*)$.

3.4.2. Числовий метод знаходження градієнта функції

У більшості практичних задач градієнт функції $f(X)$, що входить до алгоритмів оптимізації (етап 2), неможливо одержати в явній формі від оптимізованих параметрів. У таких випадках для обчислення градієнта необхідно застосовувати пошукові алгоритми, що обґрунтовуються засновані на заміні частинних похідних кінцевими різницями, наприклад видгляду

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \nabla_i f = \frac{f_{i+} - f_{i-}}{2a_i}, i = \overline{1,n}, \tag{3.9}$$

де $f_{i+} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$;

$f_{i-} = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i - a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$;

a_i – досить мала додатна константа, застосована для приблизного обчислення градієнта.

3.4.3.Завдання до лабораторної роботи 4

Мета роботи – набуття практичних навичок під час розроблення алгоритмів і програм оптимізації математичних моделей градієнтним методом.

Порядок виконання роботи:

1) ознайомтеся з методикою, наведеними програмами і прикладом розв'язування задачі мінімізації функції двох змінних градієнтним методом;
2) опишіть роботу алгоритму методу найшвидшого спуску;
3) виберіть вихідні дані для розв'язування задачі мінімізації функції двох змінних;
4) налаштуйте програму і виконайте розрахунки на ЕОМ.

Звіт повинен містити:

1) мету роботи;
2) умову задачі;
3) розрахункові формули методу найшвидшого спуску;
4) блок-схему алгоритму розв'язування задачі;
5) розв'язування задачі на ЕОМ з відображенням траєкторії найшвид шого спуску;
6) стислі висновки про ефективність методу найшвидшого спуску;
7) роздруківку коду, що реалізує алгоритм.

Варіанти індивідуальних завдань

Знайдіть мінімум функції $f(x_1, x_2)$ методом найшвидшого спуску, вибравши за початкову точку спочатку X_0, а потім симетричну їй точку з протилежного квадранта. Порівняйте кількість ітерацій. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 3.3. Для визначення оптимального кроку шляхом одновимірної мінімізації функції уздовж градієнтного напрямку у варіантах із непарними номерами застосуйте метод золотого перерізу, з парними – метод дихотомії. У програмі передбачте відтворення на екрані траєкторії найшвидшого спуску.

Таблиця 3.3

Варіант	Функція $f(x_1, x_2)$	X_0
1	$exp(x_1^2) + x_2 + (x_1 - x_2)^2$	(–4; 5)
2	$exp(x_2^2 - x_1) + exp(x_1)$	(–2; 3)
3	$exp(-x_1) + x_1^2 + x_2^2$	(3; –2)
4	$exp(x_2) + (x_2 - x_1^2)^2$	(2; 2)
5	$exp(-x_2) - cos(x_1^2 + x_2)$	(1; –2)
6	$exp(x_1) + x_2^2 - 2x_1$	(2; 4)
7	$x_2^2 + exp(-x_1) + 3x_1$	(3; –2)
8	$x_2^2 + exp(x_1) - 3x_1$	(4; 1)
9	$exp(x_1 - x_2) + x_1^2 + x_2^2$	(2; 3)
10	$exp(x_1^2 - x_2) + exp(x_2)$	(–2; –3)
11	$exp(x_1) + (x_1 - x_2^2)^2$	(3; –1)
12	$exp(x_1) + x_1^2 + x_2^2$	(–2; 2)
13	$exp(x_2^2 - x_1) + x_1^2$	(5; 1)
14	$exp(-x_1) - cos(x_1^2 + x_2^2)$	(2; 2)
15	$exp(-x_2) + (x_2 + x_1^2)^2$	(3; 3)
16	$exp(x_1 + x_2) + x_1^2 + x_2^2$	(–3; –5)
17	$x_1^2 + exp(-x_2) + 3x_2$	(3; 4)
18	$x_1^2 + exp(x_2) - 3x_2$	(4; 2)
19	$exp(x_2) + x_1^2 + x_2^2$	(3; 3)
20	$exp(-x_1) + x_2^2 + 2x_1$	(0; 5)
21	$exp(-x_2) + x_1^2 + x_2^2$	(3; –3)
22	$exp(x_2) + x_1^2 - 2x_2$	(2; –2)
23	$exp(-x_1) + (x_1 + x_2^2)^2$	(2; 2)
24	$x_1^2 + exp(-x_2) + 2x_2$	(–4; 2)
25	$exp(-x_1 - x_2) + x_1^2 + x_2^2$	(3; 1)

3.5. Методи нульового порядку розв’язування багатовимірних задач оптимізації

При оптимізації методами нульового порядку для визначення напрямку спуску не потрібно обчислювати похідні цільової функції. Напрямок мінімізації в цьому разі цілком визначається послідовним обчисленням значень мінімізованої функції. Одним із методів нульового порядку є метод прямого пошуку, що має також назву «метод Хука – Дживса».

3.5.1. Алгоритм методу прямого пошуку

Алгоритм методу прямого пошуку складається з таких етапів.

Етап 1. Задати значення координат x_{i0} , $i=\overline{1,n}$ початкової точки X_0 та вектор зміни координат $\Delta X=(\Delta x_1, \Delta x_2 ,..., \Delta x_n)$ для процесу обстеження околу точки, ε – найменше припустиме значення для компонент вектора ΔX.

Етап 2. Вважати, що X_0 є базисною точкою $X_Б$, і обчислити значення $f(X_Б)$.

Етап 3. Циклічно змінювати кожну координату точки $X_Б$ на величину Δx_i, тобто розглядати послідовність точок

$$X = (x_{1Б}, x_{2Б}, ..., x_{iБ} \pm \Delta x_i, ..., x_{nБ}). \tag{3.10}$$

У цьому разі обчислювати значення $f(X)$ і порівнювати їх зі значеннями $f(X_Б)$. Якщо $f(X)<f(X_Б)$, то відповідна координата $x_{iБ}$, $i=\overline{1,n}$ набуває нового значення, обчисленого за одним із виразів (3.14). В іншому разі значення цієї координати залишається незмінним. Після зміни останньої ко- ординати зафіксувати точку X_1. Якщо $f(X_1) < f(X_Б)$, то перейти до етапу 4, в іншому разі – до етапу 8.

Етап 4. Здійснити спуск із точки X_1 у точку X_2:

$$X_2 = X_1 + (X_1 - X_Б) = 2X_1 - X_Б \tag{3.11}$$

або в координатній формі –

$$x_{i2} = 2x_{i1} - x_{iБ}, \quad i=\overline{1,n}.$$

Обчислити значення $f(X_2)$.

Етап 5. Як і на етапі 3, циклічно змінювати кожну координату точки X_2 відповідно до формули (3.14), здійснюючи порівняння відповідних значень $f(X)$ зі значенням $f(X_2)$. Після зміни останньої координати зафіксувати точку X_3. Якщо $f(X_3) < f(X_1)$, то перейти до етапу 6; в іншому випадку – до етапу 7.

Етап 6. Уважати, що X_1 є новою базисною точкою $X_Б$, а X_3 є точкою X_1, і повернутися до етапу 4.

Етап 7. Уважати, що X_1 є базисною точкою $X_Б$, і повернутися до етапу 3.

Етап 8. Порівняти значення Δx_i і ε. Якщо $\Delta x_i < \varepsilon$, то обчислення припинити. В іншому разі зменшити значення Δx_i і повернутися до етапу 3.

3.5.2. Завдання до лабораторної роботи 5

Мета роботи – набути практичних навичок розроблення алгоритмів і програм оптимізації багатовимірних функцій методами нульового порядку, зокрема методом прямого пошуку; навчитися розв'язувати системи рівнянь методами оптимізації.

Порядок виконання роботи:

1) ознайомтеся з методикою розв'язування задачі мінімізації функції трьох змінних методом прямого пошуку;
2) опишіть роботу алгоритму прямого пошуку;
3) виберіть вихідні дані для розв'язування задачі мінімізації функції трьох змінних;
4) складіть програму оптимізації функції. Проілюструйте траєкторії руху базисної точки в координатах x_1Ox_2, x_1Ox_3, x_2Ox_3 (у програмі або вручну);
5) розв'яжіть систему рівнянь (табл. 3.5) одним із методів оптимізації (для варіантів із непарними номерами застосуйте метод найшвидшого спуску, з парними – метод прямого пошуку);
6) налаштуйте програму й виконайте розрахунки на ЕОМ.

Звіт для завдання 1 повинен містити:

1) мету роботи із завдання 1;
2) умову задачі;
3) розрахункові формули методу прямого пошуку;
4) блок-схему алгоритму розв'язування задачі;
5) результати розв'язування задачі на ЕОМ із відображенням траєкторії руху базисної точки;
6) стислі висновки про ефективність методу прямого пошуку;
7) роздруківку програми, що реалізує алгоритм.

Звіт для завдання 2 повинен містити:

1) мету роботи із завдання 2;
2) умову задачі;
3) розрахункові формули розв'язування системи рівнянь методом оптимізації;
4) блок-схему алгоритму розв'язування задачі;
5) результати розв'язування задачі на ЕОМ із відображенням траєкторії пошуку коренів системи рівнянь;
6) графіки функцій;

7) стислі висновки про ефективність розв’язування системи рівнянь методами оптимізації;

8) роздруківку програми, що реалізує алгоритм.

Варіанти індивідуальних завдань

Завдання 1. Обчисліть мінімум функції $f\,(x_1, x_2, x_3)$ методом прямого пошуку, вибравши за початкову точку спочатку X_0, а потім довільну точку з іншого квадранта. Порівняйте кількість ітерацій. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 3.4. У програмі передбачте відтворення траєкторії руху базисної точки в координатах $x_1\,O\,x_2$, $x_1\,O\,x_3$, $x_2\,O\,x_3$.

Таблиця 3.4

Варіант	Функція $f\,(x_1, x_2, x_3)$	X_0
1	$4(x_1 - 2)^2 + 16(x_2 + 1)^2 + 5(x_1 - x_3)^2 + 10$	(–4; 3;2)
2	$4(x_1 - 3)^2 + 25(x_2 + 2)^2 + 8(x_1 + x_3)^2 + 15$	(–3; 2; 4)
3	$9(x_1 - 4)^2 + 36(x_2 + 3)^2 + 3(x_2 - x_3)^2 - 18$	(–4; 1; 1)
4	$9(x_1 - 5)^2 + 49(x_2 + 4)^2 + 4(x_2 + x_3)^2 + 20$	(–2; 3; 1)
5	$9(x_1 + 1)^2 + 2(x_2 - 2)^2 + 6(x_3 - x_1)^2 - 5$	(3; 2; 0)
6	$16(x_1 + 2)^2 + 4(x_2 - 3)^2 + 5(x_3 - x_2)^2 - 8$	(3; –1; 2)
7	$25(x_1 + 3)^2 + 4(x_3 - 4)^2 +10(x_1 - x_2)^2 + 10$	(2; –3; 4)
8	$36(x_1 + 4)^2 + 9(x_3 - 5)^2 + 12(x_1 + x_2)^2 - 12$	(1; –2; 5)
9	$49(x_1 + 5)^2 + 9(x_3 - 6)^2 +16(x_2 - x_3)^2 - 15$	(0; 2; 1)
10	$2(x_1 - 2)^2 + 8(x_3 + 6)^2 + 25(x_2 + x_3)^2 + 18$	(4; 2; 0)
11	$9(x_1 - x_2)^2 + 36(x_2 - 3)^2 + 40(x_3 - 4)^2 + 4$	(–2; 1; 1)
12	$4(x_1 - x_2)^2 + 25(x_2 - 2)^2 + 16(x_3 + 3)^2 - 7$	(4; –1; 4)
13	$6(x_1 + x_2)^2 + 16(x_2 + 3)^2 + 25(x_3 - 4)^2 +10$	(1; 0; –1)
14	$2(x_1 + x_2)^2 + 8(x_1 - 4)^2 + 36(x_3 + 2)^2 - 6$	(1; –2; 3)
15	$16(x_1 - x_2)^2 + 4(x_1 + 2)^2 + 25(x_3 - 4)^2 + 9$	(2; –3; 2)
16	$4(x_1 + 2)^2 +16(x_2 + 5)^2 + 49(x_3 - x_1)^2 +10$	(3; 1; 0)
17	$4(x_1 + 3)^2 + 25(x_2 + 4)^2 + 30(x_3 + x_1)^2 - 19$	(1; –2; 3)
18	$9(x_1 - 2)^2 +2(x_2 - 1)^2 +15(x_1 - x_3)^2 + 8$	(–4; 2; 5)
19	$16(x_1 - 3)^2 + 4(x_2 - 2)^2 + 25(x_2 - x_3)^2 + 5$	(–3; –1; 4)
20	$25(x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 3)^2 + 36(x_2 + x_3)^2 + 6$	(–3; 1; 1)
21	$5(x_1 - 2)^2 +16(x_3 - 4)^2 + 2(x_1 - x_2)^2 + 5$	(–1; 2; –5)
22	$16(x_1 + 2)^2 + 4(x_3 + 3)^2 + 20(x_1 + x_2)^2 - 4$	(1; 1; –1)
23	$18(x_2 - 3)^2 + 3(x_3 - 2)^2 + 50(x_1 - x_3)^2 + 9$	(0; 1; 6)
24	$12(x_1 + 1)^2 + 5(x_3 + 4)^2 + 36(x_2 + x_3)^2 + 4$	(1; –1; 0)
25	$14(x_1 - 4)^2 + 16(x_2 - 3)^2 + 20(x_1 - x_3)^2 + 8$	(2; 1; 4)

Завдання 2. Розв'яжіть систему рівнянь (таблиці 3.5) одним із методів оптимізації (для варіантів із непарними номерами застосуйте метод найшвидшого спуску, з парними – прямого пошуку), взявши за цільову функцію

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(X),$$

де $f_i(X)$ – ліві частини системи рівнянь $f_i(X) = 0\ (i = \overline{1,n})$, вибравши за початкове наближення точку X_0. Точність обчислень 10^{-5}. У програмі передбачте друк точок X_k і похибок ρ_k. Відтворіть траєкторію пошуку, відзначте на траєкторії точки X_k. Перевірте збіжність методу для трьох - чотирьох початкових наближень.

Змініть початкове наближення, знайдіть інший розв'язок системи або доведіть, що знайдений розв'язок один. Для цього побудуйте графіки для рівнянь системи.

Таблиця 3.5

Варіант	Система рівнянь	X_0
1	$\begin{cases} e^y - x^2 + 1 = 0, \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$	(0,5; –1,5)
2	$\begin{cases} e^{-x} - e^y + 1 = 0, \\ x^3 - y^3 - 1 = 0 \end{cases}$	(2; 2)
3	$\begin{cases} e^{-x} - e^y - 1 = 0, \\ x^3 + y^3 - 1 = 0 \end{cases}$	(0; 1)
4	$\begin{cases} \sin x - \sin y + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$	(0,5; 1,5)
5	$\begin{cases} e^{-y} - e^x + 1 = 0, \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$	(0,5; 1)
6	$\begin{cases} \sin x - \sin y - 1 = 0, \\ x^2 - y^2 + y = 0 \end{cases}$	(–1; 1)
7	$\begin{cases} e^{-y} - e^{-x} + 1 = 0, \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$	(–1; 0,5)
8	$\begin{cases} e^{-x} - y^2 + 1 = 0, \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$	(1; 0)
9	$\begin{cases} e^{-x} - y^2 + 1 = 0, \\ y - \operatorname{tg} x = 0 \end{cases}$	(2; 2)
10	$\begin{cases} xy^2 + 1 = 0, \\ y - e^{-1} = 0 \end{cases}$	(2; 2)
11	$\begin{cases} xy^2 - 1 = 0, \\ y - e^x = 0 \end{cases}$	(1; 0)
12	$\begin{cases} e^x - y^2 + 1 = 0, \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$	(1,5; 0,5)

Продовження таблиці 3.5

Варіант	Система рівнянь	X_0
13	$\begin{cases} e^x - y^2 + 1 = 0, \\ y + \operatorname{tg} x = 0 \end{cases}$	(1; 0,5)
14	$\begin{cases} xy^2 - 1 = 0, \\ y - e^x = 0 \end{cases}$	(1; –1)
15	$\begin{cases} e^x - e^y + 1 = 0, \\ x^3 + y^3 - 1 = 0 \end{cases}$	(–0,5; –1)
16	$\begin{cases} e^x - e^y + 1 = 0, \\ x^3 + y^3 + 1 = 0 \end{cases}$	(0; 1)
17	$\begin{cases} e^x + e^y - 1 = 0, \\ x^3 - y^3 + 1 = 0 \end{cases}$	(–2; 2)
18	$\begin{cases} \sin x + \sin y - 1 = 0, \\ x^2 - y^2 - 1 = 0 \end{cases}$	(–2; 2)
19	$\begin{cases} e^y - e^x + 1 = 0, \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$	(0; 1)
20	$\begin{cases} e^y - x^2 + 1 = 0, \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$	(–0,5; 1,5)
21	$\begin{cases} xy^2 - 1 = 0, \\ y + e^x = 0 \end{cases}$	(–0,5; 1)
22	$\begin{cases} x^2y - 1 = 0, \\ y - e^x = 0 \end{cases}$	(1; 1)
23	$\begin{cases} e^x - e^y - 1 = 0, \\ x^3 + y^3 - 1 = 0 \end{cases}$	(1; –0,5)
24	$\begin{cases} e^x - e^y - 1 = 0, \\ x^3 + y^3 + 1 = 0 \end{cases}$	(–1; 0)
25	$\begin{cases} e^x + e^y - 1 = 0, \\ x^3 - y^3 - 1 = 0 \end{cases}$	(2; 2)

3.6. Методи випадкового пошуку розв'язування багатовимірних задач оптимізації

В основу методів випадкового пошуку покладені елементи випадковості в процедурі формування пробних точок, що визначають напрямок пошуку. До того ж не потрібно прикладати значних зусиль для розрахунку розміщення пробних точок. Просування до мінімуму здійснюється на основі мінімальної інформації, яку досить просто одерждати. Найбільш ефективним є застосування алгоритмів випадкового пошуку для мінімізації функцій із великою кількістю змінних та функцій із багатьма локальними екстремумами.

3.6.1. Алгоритм методу випадкового пошуку з перерахунком

Ітераційна процедура мінімізації функції $f(X)$ за допомогою цього алгоритму задається формулою

$$X_{k+1} = X_k + \begin{cases} \gamma_k \cdot S \cdot \xi, & якщо \quad f(X_k + \gamma_k \cdot S \cdot \xi) < f(X_k), \\ 0 - в\ іншому\ разі, \end{cases} \tag{3.12}$$

де γ_k – крок пошуку; S – вектор масштабних коефіцієнтів; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ – випадковий вектор із рівномірним законом розподілу в інтервалі $[-1; 1]$.

Обчислювальний алгоритм для *i-го* компонента вектора оптимізованих параметрів записують у такому вигляді:

$$x_{ik+1} = x_{ik} + \begin{cases} \gamma_k \cdot s_i \cdot \xi_i, якщо \quad f(X_k + \gamma_k \cdot S \cdot \xi) < f(X_k), \\ 0 - в\ іншому\ разі. \end{cases} \tag{3.13}$$

Елементи s_i вектора S (масштабні коефіцієнти) знаходять із співвідношення

$$s_i = \frac{x_{imax} - x_{imin}}{b}, \quad i = \overline{1,n},$$

де x_{imin}, x_{imax} – обмеження на оптимізовані параметри знизу і зверху. Константу b для визначення масштабних коефіцієнтів необхідно вибирати так, щоб $s_i \le 1$, тобто з умови

$$b = \max_{1 \le i \le n} (x_{imax} - x_{imin}). \tag{3.14}$$

Якщо в процесі пошуку мінімуму який-небудь із компонентів x_i вектора оптимізованих параметрів X виходить за припустимі межі, тобто $x_i > x_{imax}$ або $x < x_{imin}$, то цьому компоненту присвоюється граничне значення:

$$x_i = \begin{cases} x_{imax}, \text{ якщо } x_i > x_{imax}, \\ x_{imin}, \text{ якщо } x_i < x_{imin}. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Завдяки умові (3.19) забезпечується пошук уздовж границі області параметрів при порушенні обмежень.

Якщо при оптимізації пошукова точка виходить за межі припустимої області, тобто $X > X_{max}$ або $X < X_{min}$, то цей крок вважається невдалим, а значення всіх компонентів оптимізованого вектора – такими, що дорівнюють граничним. Якщо на якій-небудь ітерації робиться підряд m невдалих спроб, то крок пошуку зменшується в r разів $(r > 1)$: $\gamma_{k+1} = \gamma_k / r$. Якщо в процесі пошуку на якій-небудь ітерації виявиться, що для всіх m пробних кроків мінімізована функція, не спадає, то крок пошуку також зменшують: $\gamma_{k+1} = \gamma_k / r$.

Процес оптимізації припиняється, якщо виконується умова $\gamma_k < \gamma_{min}$ (γ_{min} – константа, що визначає закінчення оптимізації при досягненні заданої точності).

3.6.2. Завдання до лабораторної роботи 6

Мета роботи – набути практичних навичок пошуку на ЕОМ умовного екстремуму функції багатьох змінних методом випадкового пошуку з перерахунком.

Порядок виконання роботи:

1) ознайомтеся з методикою, наведеними програмами і прикладом розв'язування задачі мінімізації функції методом випадкового пошуку;
2) опишіть роботу алгоритму методу випадкового пошуку;
3) виберіть вихідні дані для розв'язування задачі мінімізації функції трьох змінних (таблиці 3.6, 3.7);
4) складіть програму оптимізації функції; проілюструйте траєкторії пошуку мінімуму в координатах $x_1\,O\,x_2$, $x_1\,O\,x_3$, $x_2\,O\,x_3$ (у програмі або вручну);
5) налагодьте програму й виконайте розрахунки на ЕОМ.

Звіт повинен містити:

1) мету роботи;
2) умову задачі;
3) розрахункові формули методу випадкового пошуку з перерахуванням;

4) блок-схему алгоритму розв’язування задачі;

5) розв’язування задачі на ЕОМ з відтворенням траєкторії пошуку мінімуму;

6) стислі висновки з роботи, порівняльний аналіз;

7) роздруківку програми, що реалізує алгоритм.

Варіанти індивідуальних завдань

Знайти мінімум функції $f\ (x_1,\ x_2,\ x_3)$ (див. табл. 3.4) методом випадкового пошуку, вибравши початкову точку $X_0\ \ (0;\ 0;\ 0)$, за зміни аргументів x_i у межах $[a_i,\ b_i]$. Вихідні дані й номери варіантів наведені в таблиці 3.7. У програмі передбачити відтворення траєкторії пошуку мінімуму в координатах $x_1 O\, x_2$, $x_1 O\, x_3$, $x_2 O\, x_3$ і заданих межах зміни x_i.

Провести порівняльний аналіз за кількістю обчислень функції, змінюючи параметр m = 10; 15; 20 за фіксованого кроку h = 1 і крок h = 0,5; 1; 2 за фіксованого m = 15.

Таблиця 3.6

Параметр	Значення	Межі зміни
m	Ресурс кількості невдалих кроків	10 - 2 5
mf	Ресурс кількості обчислень функції, що мінімізується	(0,5 -) × 10^3
h	Початковий крок пошуку	0,5 - 2,0
h_{min}	Задана додатна константа, що визначає кінець пошуку й точність оптимізації	10^{-3} - 10^{-5}

Таблиця 3.7

Варіант	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
1	–5	1	–4	3	–2	4
2	–6	3	–5	2	–1	5
3	–4	8	–2	4	–5	2
4	–8	10	–3	5	–2	5
5	–7	3	–4	2	–3	4
6	–6	2	–5	1	–4	3
7	–5	7	–6	4	–5	2
8	–4	6	–2	9	–6	3
9	–3	5	–3	10	–7	2

Продовження таблиці 3.7

Варіант	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3
10	–2	1	–2	8	–5	3
11	–1	3	–3	6	–2	4
12	–2	2	–2	5	–10	2
13	–3	3	–6	4	–8	3
14	–4	2	–5	3	–7	2
15	–5	4	–4	2	–6	3
16	–6	3	–3	1	–5	2
17	–7	3	–2	2	–4	5
18	–8	1	–1	3	–3	5
19	–9	2	–2	4	–2	6
20	–5	9	–3	5	–1	7
21	–8	4	–4	6	–2	3
22	–1	1	–5	2	–3	5
23	–4	2	–6	4	–1	4
24	–2	3	–2	9	–3	3
25	–1	4	–8	6	–6	2

4. РОЗВ’ЯЗУВАННЯ БАГАТОЕТАПНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Динамічне програмування - це математичний метод для пошуку оптимальних розв’язків багатокрокових (багатоетапних) задач.

Метод динамічного програмування дозволяє одну задачу з багатьма змінними замінити рядом задач, які треба розв’язувати послідовно, але кожна з яких має меншу кількість змінних. Процес розв’язування розбивається на кроки. Водночас нумерація кроків, зазвичай, здійснюється від кінця розв’язування до початку.

Основним принципом, на якому базується оптимізація багатокрокового процесу, є *принцип оптимальності Р. Беллмана*: оптимальна стратегія має ту властивість, що, які б не були початковий стан і початковий розв’язок, наступні розв’язки повинні бути оптимальними щодо стану, одержаного в результаті початкового розв’язування. Інакше кажучи, оптимальна стратегія залежить лише від поточного стану і не залежить від передісторії.

Цей принцип безпосередньо свідчить про процедуру знаходження оптимального розв’язку. Математично його можна записати так:

$$f_{n-l}(S_l) = \underset{X_{l=1}}{extremum} \left[R_{l+1}(S_l, X_{l+1}) + f_{n-(l+1)}(S_{l+1})\right], \quad l = \overline{0, n-1}, \qquad (4.1)$$

де $X_l = (x_{1l}, x_{2l}, \ldots, x_{ml})$ – розв’язок (керування), обраний на l-му кроці;

$S_l = (S_{1l}, S_{2l}, \ldots, S_{ml})$ – стан системи на l-му кроці;

R_l – безпосередній ефект, що досягається на l-му кроці;

f_{n-l} – оптимальне значення ефекту, що досягається за $(n – l)$ кроків;

n – кількість кроків (етапів).

Extremum у виразі (4.1) означає мінімум або максимум залежно від умови задачі.

Усі обчислення, які дають можливість знайти оптимальне значення ефекту $f_n(S_0)$,, що досягається за n кроків, проводять за формулою (4.1) – *основним функціональним рівнянням (рекурентним співвідношенням) Беллмана*.

Процес обчислення значень функції f_{n-l} здійснюється за початкової умови $f_0(S_n) = 0$, це означає, що за межами кінцевого стану системи ефект дорівнює нулю.

4.1. Загальна методика розв’язування задачі методом динамічного програмування

Оптимальне розв’язування задачі методом динамічного програмування знаходять за допомогою функціонального рівняння (4.20). Відповідно до нього опишемо алгоритм методу динамічного програмування.

Етап 1. Записати функціональне рівняння для останнього стану процесу (йому відповідає $l = n - 1$):

$$f_1(S_{n-1}) = \underset{X_n}{extremum}\,[R_n(S_{n-1}, X_n) + f_0(S_n)]\ .$$

Етап 2. Знайти $R_n(S_{n-1}, X_n)$ з дискретного набору його значень за деяких фіксованих S_{n-1} і X_n – з відповідних допустимих областей їх значень. Оскільки $f_0(S_n) = 0$, то

$$f_1(S_{n-1}) = \underset{X_n}{extremum}\,[R_n(S_{n-1}, X_n)]\ .$$

У підсумку після першого кроку буде відомий оптимальний розв'язок X_n і відповідне йому значення функції $f_1(S_{n-1})$.

Етап 3. Зменшити значення l на одиницю й записати відповідне функціональне рівняння. За $l = n - k\ (k = \overline{2, n})$ воно має вигляд

$$f_k(S_{n-k}) = \underset{X_{n-k+1}}{extremum}\,[R_{n-k+1}(S_{n-k}, X_{n-k+1}) + f_{k-1}(X_{n-k+1})]\ . \qquad (4.2)$$

Етап 4. Знайти умовно-оптимальний розв'язок на основі виразу (4.2).

Етап 5. Перевірити значення l. Якщо $l = 0$, розрахунок умовно-оптимальних розв'язків закінчено, водночас знайдено оптимальний розв'язок задачі для першого стану процесу. Якщо $l > 0$, перейти до виконання етапу 3.

Етап 6. Обчислити оптимальний розв'язок задачі для кожного наступного кроку процесу, рухаючись від кінця розрахунків до початку.

4.2. Методика розв'язування задачі оптимального розподілу коштів на розширення виробництва методом динамічного програмування

Широкий клас складають задачі, в яких йде мова про найбільш доцільний розподіл у часі тих чи інших ресурсів (коштів, робочої сили, сировини й т. ін.).

Нехай групі підприємств виділяють додаткові кошти на реконструкцію й модернізацію виробництва. За кожний з n підприємств відомий можливий приріст $g_i(x)\ (i = \overline{1, n})$ випуску продукції залежно від виділеної йому суми х. Потрібно так розподілити кошти с між підприємствами, щоб загальний приріст $f_n(c)$ випуску продукції був максимальним.

Відповідно до обчислювальної схеми динамічного програмування розглянемо спочатку випадок $n = 1$, тобто припустимо, що всі наявні кошти виділяються на реконструкцію й модернізацію одного підприємства.

Позначимо через $f_1(x)$ максимально можливий приріст випуску продукції на цьому підприємстві, який відповідає виділеній сумі x. Кожному значенню x відповідає певне значення $g_1(x)$ випуску, тому можна записати

$$f_1(x) = max[g_1(x)] = g_1(x). \qquad (4.3)$$

Нехай тепер $n = 2$, тобто кошти розподіляються між двома підприємствами. Якщо другому підприємству виділена сума x, то приріст продукції на ньому становитиме $g_2(x)$. Кошти, що залишилися другому підприємству, становитимуть $(c - x)$ (залежать від величини x) і дозволять збільшити приріст випуску продукції на двох підприємствах:

$$g_2(x) + f_1(c - x). \qquad (4.4)$$

Оптимальному значенню $f_2(c)$ приросту продукції при розподілі суми c між двома підприємствами відповідає таке x, за якого одержана сума (4.4) буде максимальною. Це можна записати так:

$$f_2(c) = \max_{0 \le x \le c}\left[g_2(x) + f_1(c - x)\right].$$

Значення $f_3(c)$ можна обчислити, якщо відомі значення $f_2(c)$ і т. д.

Функціональне рівняння Беллмана для цієї задачі запишемо так:

$$f_n(c) = \max_{0 \le x \le c}\left[g_n(x) + f_{n-1}(c - x)\right]. \qquad (4.5)$$

Отже, максимальний приріст випуску продукції на n підприємствах визначається як максимум суми приросту випуску на n-му підприємстві і приросту випуску на інших ($n - 1$) підприємствах за умови, що залишок коштів після n-го підприємства розподіляється між іншими підприємствами оптимально.

Виходячи з функціональних рівнянь (4.3), (4.5), ми зможемо послідовно знайти спочатку f_1, потім $f_2, \dots, f_n$ для різних варіантів розподілу загальної суми коштів.

Для пошуку оптимального розподілу коштів насамперед знаходимо оптимальний розмір $x^*_n(c)$ інвестицій n-му підприємству, які дозволяють досягти максимального значення f_n приросту продукції. Залишком коштів $c - x^*_n$ і вже відомим нам значенням f_{n-1} знаходимо $x^*_{n-1}(c)$ – оптимальний розмір інвестицій $(n - 1)$-му підприємству і т. д. і, нарешті, знаходимо $x^*_2(c)$ та $x^*_1(c)$.

4.3.Приклад розв’язування задачі оптимального розподілу коштів методом динамічного програмування

Між чотирма підприємствами потрібно розподілити інвестицію в 100 тис. грн. Значення $g_i\ (x)$ приросту випуску продукції на кожному з підприємств залежно від суми інвестиції наведені в таблиці 4.1. Скласти план розподілу коштів, який дасть загальний максимальний приріст випуску продукції на всіх підприємствах.

Таблиця 4.1

Інвестиція, тис. грн	Підприємство			
	1	2	3	4
	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Нехай $n = 1$. Відповідно до формули (4.3), залежно від розміру інвестиції одержуємо з урахуванням таблиці 4.1 значення $f_1\ (c)$, наведені в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

$x_1^*(c)$	20	40	60	80	100
$f_1(c)$	10	31	42	62	76

Припустимо тепер, що кошти вкладають у два підприємства. Тоді відповідно до формули (4.5) маємо

$$f_2(c) = \max_{0 \le x \le c} \left[g_2(x) + f_1(c - x) \right]. \tag{4.6}$$

Чергова задача – знайти значення функції (4.6) для всіх допустимих комбінацій *c* та *x*. Для спрощення розрахунків значення *x* будемо брати кратними 20 тис. грн, а результати оформляти у вигляді таблиць. Кожному кроку буде відповідати своя таблиця. У таблиці 4.3 подана інформація під час розподілу інвестицій між 2-м та 1-м підприємствами.

Таблиця 4.3

c	x							
	0	20	40	60	80	100	$f_2(c)$	$x^*_2(c)$
20	0 + 10	12 + 0	–	–	–	–	12	20
40	0 + 31	12 + 10	26 + 0	–	–	–	31	0
60	0 + 42	12 + 31	26 + 10	36 + 0	–	–	43	20
80	0 + 62	12 + 42	26 + 31	36 + 10	54 + 0	–	62	0
100	0 + 76	12 + 62	26 + 42	36 + 31	54 + 10	78 + 0	78	100

Для кожного значення c (20, 40, 60, 80, 100) початкової суми розподілених коштів у таблиці 4.3 відведений окремий рядок, а для кожного можливого значення x(0; 20; 40; 60; 80; 100) – стовпець. Деякі клітинки таблиці залишаються незаповненими, тому що відповідають неможливим поєднанням c і x. Такою, наприклад, буде клітинка, що відповідає рядку c = 40 та стовпцю x = 80, тому що за наявності 40 тис. грн інвестицій відпадає варіант, за якого одному з підприємств виділяють суму 80 тис. грн.

У кожну клітинку таблиці будемо записувати значення

$$g_2(x) + f_1(c - x).$$

Перший доданок беремо з умови задачі (див. табл. 4.1), другий – із таблиці 4.2. Так, наприклад, при розподілі інвестиції c = 80 тис. грн одним із варіантів може бути наступний: другому підприємству виділяють 60 тис. грн (x = 60), тоді першому залишиться 80 – 60 = 20 тис. грн. За такого розподілу інвестиції на другому підприємстві буде забезпечений приріст продукції на суму 36 тис. грн (див. табл. 4.1), на першому – 10 тис. грн (див. таблиці 4.2).

Загальний приріст становитиме (36 + 10) тис. грн, що й записано у відповідній клітинці таблиці 4.3. У двох останніх стовпцях таблиці проставлені максимальний за рядком приріст продукції (у стовпці $f_2(c)$) і відповідна йому оптимальна сума коштів, що виділена другому підприємству (у стовпцях $x_2^*(c)$). Так, за початкової суми c= 60 тис. грн максимальний приріст випуску продукції становить 43 тис. грн (12 + 31), і це досягається виділенням другому підприємству 20 тис. грн, а першому – 40 тис. грн.

Розрахунок значень $f_3(c)$ ведений у таблиці 4.4. Тут використана формула, що відповідає рівнянню (4.5) при n = 3:

$$f_3(c) = \max_{0 \le x \le c} \left[g_3(x) + f_2(c - x) \right] .$$

Перший доданок у таблиці 4.4 узято з таблиці 4.1, другий – з таблиці 4.3.

Таблиця 4.4

c	x							
	0	20	40	60	80	100	$f_3(c)$	$x^*_3(c)$
20	0 + 12	11 + 0	–	–	–	–	12	0
40	0 + 31	11 + 12	36 + 0	–	–	–	36	40
60	0 + 43	11 + 31	36 + 12	45 + 0	–	–	48	40
80	0 + 62	11 + 43	36 + 31	45 + 12	60 + 0	–	67	40
100	0 + 78	11 + 62	36 + 43	45 + 31	60 + 12	77 + 0	79	40

Аналогічно знаходяться значення *f4 (c)*, які заносять до таблиці 4.5.

Таблиця 4.5

c	$x^*_1(c)$	$f_1(c)$	$x^*_2(c)$	$f_2(c)$	$x^*_3(c)$	$f_3(c)$	$x^*_4(c)$	$f_4(c)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	20	10	$\boxed{20}$	$\boxed{12}$	0	12	20	16
40	40	31	0	31	40	36	40	37
60	60	42	20	43	$\boxed{40}$	$\boxed{48}$	20	52
80	80	62	0	62	40	67	40	73
100	100	76	100	78	40	79	$\boxed{40}$	$\boxed{85}$

З таблиці 4.5видно, що найбільший приріст випуску продукції, що можуть дати чотири підприємства під час розподілу між ними інвестицій 100 тис. грн (c = 100), становить 85 тис. грн ($f_4(100) = 85$).

Водночас четвертому підприємству потрібно виділити 40 тис. грн, а іншим трьом 100 – 40 = 60 тис. грн.

З цієї самої таблиці бачимо, що оптимальний розподіл 60 тис. грн (c = 60) між трьома підприємствами забезпечить загальний приріст продукції на них на суму 48 тис. грн за умови, що третьому підприємству буде виділено 40 тис. грн, а іншим двом 60 – 40 = 20 тис. грн. Ті, що залишилися, 20 тис. грн під час оптимального розподілу між двома підприємствами дадуть приріст продукції на суму 12 тис. грн. Другому підприємству потрібно асигнувати 20 тис. грн, а на частку першого коштів не залишиться: 20 – 20 = 0.

Отже, максимальний приріст випуску продукції на чотирьох підприємствах під час розподілу між ними 100 тис. грн становить 85 тис. грн і буде отриманий, якщо першому підприємству коштів не виділяти, другому виділити 20 тис. грн, а третьому й четвертому – по 40 тис. грн. Цей розв’язок можна записати так:

$$X^*=(0,\ 20,\ 40,\ 40); \qquad f^* = f_4(100) = 85 \text{ тис. грн.}$$

4.4. Завдання до лабораторної роботи 7

Мета роботи – набути практичних навичок розв'язування багатоетапних задач методом динамічного програмування.

Порядок виконання роботи:

1) вивчити алгоритм розв'язування багатоетапних задач методом динамічного програмування;
2) розібрати приклад розв'язування задачі оптимального розподілу коштів на розширення виробництва методом динамічного програмування;
3) розв'язувати задачу оптимального розподілу коштів між підприємствами методом динамічного програмування за початковими даними з таблиці 4.6 відповідно до свого варіанту;
4) провести аналіз розв'язування, вибрати оптимальний варіант розподілу коштів.

Звіт повинний містити:

1) мету роботи;
2) умову задачі за своїм варіантом;
3) функціональні рівняння Беллмана для всієї задачі та для кожного з етапів;
4) розв'язування задачі оптимального розподілу коштів між підприємствами методом динамічного програмування (поетапне розв'язування подати у формі таблиць із поясненнями про їх заповнення);
5) аналіз результатів та оптимальний варіант розподілу коштів між підприємствами (всі оптимальні варіанти, якщо розв'язків декілька).

Варіанти індивідуальних завдань

У таблиці 4.6 приведені значення $g_i(x)$ можливого приросту продукції на чотирьох підприємствах залежно від виділеної на реконструкцію і модернізацію виробництва суми x.

Розподілити між підприємствами наявні 100 тис. грн, щоб загальний приріст $f_4(100)$ випуску продукції був максимальним. Для спрощення обчислень значення x брати кратними 20 тис. грн.

Номер завдання вибрати відповідно до варіанта, наведеного в таблиці 4.7.

Таблиця 4.6

Підприємство	Приріст випуску продукції, тис. грн	Кошти c, тис. грн					Номер завдання
		20	40	60	80	100	
1	$g_1(x)$	6	18	24	38	50	1
		9	17	29	39	47	2
		7	29	37	41	59	3
		10	20	35	50	57	4
		9	18	29	41	60	5
		11	21	40	54	62	6
		12	26	40	60	72	7
		14	24	37	55	68	8
		16	28	36	49	60	9
		12	28	39	47	69	0
2	$g_2(x)$	11	19	30	44	59	1
		11	34	46	53	75	2
		9	19	28	37	46	3
		12	25	34	46	57	4
		8	19	30	47	63	5
		13	20	42	45	61	6
		16	21	36	49	63	7
		12	30	42	58	71	8
		10	29	42	50	74	9
		14	26	40	51	63	0
3	$g_3(x)$	16	32	40	57	70	1
		13	28	37	49	61	2
		17	27	37	48	66	3
		11	20	32	48	61	4
		12	25	51	58	69	5
		12	22	34	55	60	6
		9	17	35	51	69	7
		13	25	45	62	70	8
		15	27	46	58	65	9
		11	24	43	51	68	0
4	$g_4(x)$	13	27	44	69	73	1

Продовження таблиці 4.6

Підприємство	Приріст випуску родукції, тис. грн	Кошти *c*, тис. грн.					Номер завдання
		20	40	60	80	100	
		12	35	40	54	72	2
		16	30	42	63	65	3
		14	23	40	50	58	4
		7	15	52	55	60	5
		10	27	33	57	69	6
		15	25	51	62	73	7
		8	33	46	60	72	8
		17	23	38	53	67	9
		16	21	38	49	70	0

Таблиця 4.7

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	1111	2	2222	3	3333
4	4444	5	5555	6	6666
7	7777	8	8888	9	9999
10	1010	11	1122	12	1212
13	1313	14	1414	15	1515
16	1616	17	1717	18	1818
19	1919	20	2020	21	2121
22	2233	23	2323	24	2424
25	2525	26	2626	27	2727

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособие для экон. спец. вузов / И. Л. Акулич. – Москва : Высш. шк.,1986. – 317 с.

2. Аттетков А. В. Методы оптимизации : учебник / А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин. – Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2001. – 440 с.

3. Банди Б. Основы линейного программирования : пер. с англ. / Б. Банди. – Москва : Радио и связь, 1989. – 176 с.

4. Барвінський А. Ф. Математичне програмування : навч. посіб. / А. Ф.Барвінський та ін. – Львів : Інтелект-Захід, 2004. – 448 с.

5. Білик Г. Б. Методи синтезу та оптимізації : навч. посіб. / Г. Б. Білик, О. В. Веремій. – Краматорськ : ДДМА, 2000. – 100 с.

6. Васильєва Л.В. Використання комп'ютерних технологій для розв'язування оптимізаційних задач в економіці / Л. В. Васильєва, І. А. Гетьман. – Краматорськ : ДДМА, 2011. – 200 с.

7. Вітлінський В. В. Математичне програмування / В. В. Вітлінсь- кий, С. І Наконечний, Т. О. Терещенко. – Київ. : КНЕУ, 2001. – 248 с.

8. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения) / С. Гасс – Москва, 1961. – 305 с.

9. Глухов В. В. Математические методы и модели для менеджмента / В. В. Глухов, М. Д. Медников, С. Б. Коробко. – Санкт - Петербург.: Лань, 2000. – 480 с.

10. Горчаков А. А. Компьютерные экономико-математические мо- дели / А. А. Горчаков, И. В. Орлова. – Москва : Компьютер, 1995. – 135 с.

11. Горчаков А. А. Методы экономико-математического моделирова-ния и прогнозирования в новых условиях хозяйствования / А. А. Горчаков, И. В. Орлова, В. А. Плотников. – Москва : ВЗВЭИ, 1991. –181 с.

12. Данциг Дж. Линейное программирование / Дж. Данциг. – Москва, 1981. – 242 с.

13. Зайченко, Ю. П. Исследование операций / Ю. П. Зайченко. – 6-е изд,, перераб. и доп. – Киев : Слово, 2003. – 688 с.

14. Идрисов Ф. Ф. Линейное программирование / Ф. Ф. Идрисов. – Томск : Изд-во ТГПУ, 2004. – 124 с.

15. Исследование операций – учебн. пос. в 2 т. Т. 1 Методологические основы и математические методы / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Москва : Мир, 1981. – 712 с.

16. Исследование операций– учебн. пос. в 2 т. Т. 2 Модели и применения / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – Москва : Мир, 1981. – 677 с.

17. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник / А. В. Катренко ; за ред. В. В. Пасічника. – 2-ге вид., випр. та допов. – Львів : Маг- нолія 2006, 2007. – 480 с.

18. Каллихман И. Л. Сборник задач по математическому програм-

мированию / И. Л. Каллихман. – Москва : Высш. школа, 1975. – 270 с.

19. Карасев А. И. Математические методы и модели в планировании/ А. И. Карасев. – Москва : Экономика, 1987. – 221 с.

20. Коробов П. Н. Математическое программирование и моделирование процессов : учеб. / П. Н. Коробов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Санкт - Петербург: ДНК, 2003. – 376 с.

21. Костевич Л. Математическое программирование / Л. Костевич. – Москва : Новое знание, 2003. – 424 с.

22. Кузнецов А. В. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод. – Минск : Вышейш. школа, 1984. – 221 с.

23. Куликов Ю. Г. Экономико-математические методы и модели (раздел «Линейное программирование») : учеб. пособ. для практ. занятий / Ю. Г. Куликов, Н. Ф. Шеховцова, Л. П. Зикеева. – Москва : Моск. психол.- социал. ин-т ; Воронеж : МОДЭК, 2000. – 96 с.

24. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгорит- мы : пер. с фр. / М.Мину. – Москва : Наука, Гл. ред. физ.- мат. лит., 1990. – 488 с.

25. Охріменко М. Г. Дослідження операцій : навч. посіб. / М. Г. Охріменко, І. Ю. Дзюбан. – Київ : ЦНЛ, 2006. – 184 с.

26. Пантелеев А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособ. / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – Москва : Высш. шк., 2002. – 544 с.

27. Плис А. И. MATHCAD: математический практикум для экономистов и инженеров : учеб. пособ. / А. И. Плис, Н. А. Сливина. – Москва : Финансы и статистика, 1999. – 656 с.

28. Солодовников А. С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование / А. С. Солодовников. – Москва : Просвещение, 1966. – 184 с.

29. Спицнадель, В.Н. Теория и практика принятия оптимальных решений: учеб. пособ. / В. Н. Спицнадель. – Санкт - Петербург : Изд. дом «Бизнес- пресса», 2002. – 394 с.

30. Степанюк В. В. Методи математичного програмування / В. В. Степанюк – Київ. : Вища школа, Головне в-во, 1984. – 272 с.

31. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования: Учеб.пос. в 2 т. / А. Схрейвер; пер с англ. – Москва : Мир, 1991. – 360 с.

32. Таха Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха. – 7-е изд. – Москва : Изд. дом «Вильямс», 2007. – 912 с.

33. Тынкевич М. А. Экономико-математические методы (исследование операций) / М. А. Тынкевич. – Изд. 2-е, испр. и доп. – Кемерово, 2000. – 177 с.

34. Федосеев В. В. Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособ. для вузов / В. В. Федосеев. – Москва : ЮНИТИ, 2002. – 391 с.

35. Черноруцкий И. Г. Методы оптимизации в теории управления : учеб. пособ. / И. Г. Черноруцкий. – Санкт - Петербург : Питер, 2004. – 256 с.

36. Шмырев В. И. Введение в математическое программирование / В. И. Шмырев. – Москва : РХД, 2002. – 192 с

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт
із дисципліни **«*Чисельна оптимізація*»**
для студентів спеціальності 113 *«Прикладна математика»*
денної форми навчання

Відповідальний за випуск І. В. Коплик
Редактори: Н. З. Клочко, С. Н. Симоненко
Комп’ютерне верстання О. А. Гончаров

Формат 60×84/8. Ум. друк. арк.6,05 Обл.-вид. арк. 5,52.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.