NÚMEROS COMPLEXOS

Prof. Walter Pereira Carpes Jr.

Departamento de Engenharia Elétrica e Eletrônica - UFSC

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE SANTA CATARINA

OBJETIVOS

- Apresentar os números complexos (definição, forma retangular e trigonométrica, representação no plano complexo, etc.).

- Ilustrar as operações com números complexos.

- **Tópicos suplementares:** representação de subconjuntos no plano complexo, fórmula de Euler, fasores, aplicação na análise de circuitos de corrente alternada.

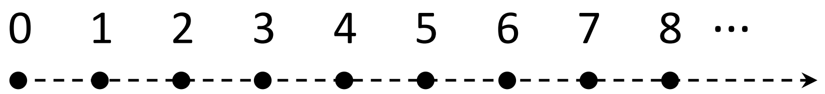
PRÉ-REQUISITOS

- Manipulações algébricas simples
- Funções trigonométricas

INTRODUÇÃO: Conjuntos numéricos

1 - Números Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

- São números inteiros não negativos.
- Usados para contagem e ordenamento.



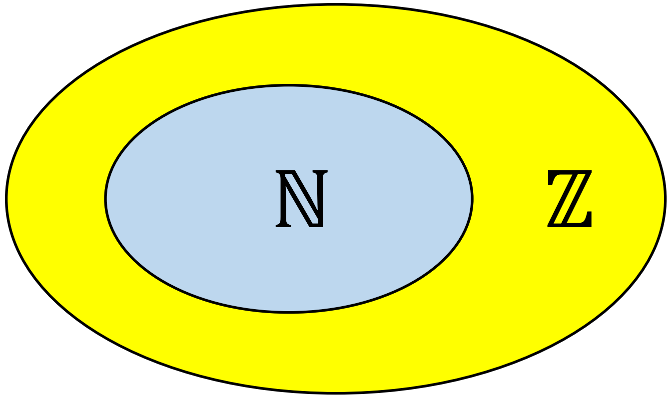
Exemplos de operações:

- **Soma:** $3+2=5$ $0+4=4$
- **Multiplicação:** $3\times 8=24$ $3\times 3=9$
- **Subtração:** $7-4=3$ $4-7=?$

2 - Números Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Zahlen = números

… -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 …



$\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

Exemplos de operações:

- **Soma e subtração:** $-4+6=2$ $\quad$ $3-7=-4$
- **Multiplicação:** $-3\times 3=-9$ $\quad$ $(-2)\times(-3)=6$
- **Divisão:** $12\div 4=3$ $\quad$ $7\div 4=?$

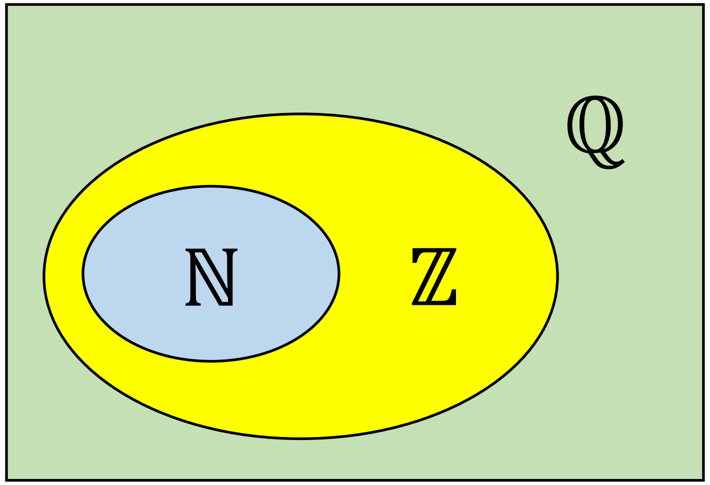
3 - Números Racionais:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x = \frac{p}{q}, \text{com } p \text{ e } q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$$

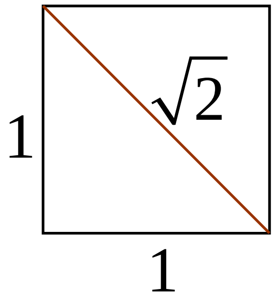
- A expansão decimal de um número racional sempre termina após um número finito de dígitos ou resulta numa dízima periódica.

Exemplos:

$\frac{5}{1} = 5$ $\frac{9}{4} = 2{,}25$ $\frac{1412}{999} = 1{,}413413413\ldots = 1{,}\overline{413}$



Contraexemplo:



$\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$

$\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

4 - Números Irracionais: $\mathbb{I}$

- Não podem ser escritos como uma razão de dois números inteiros.

Exemplos:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420969807\ldots$$

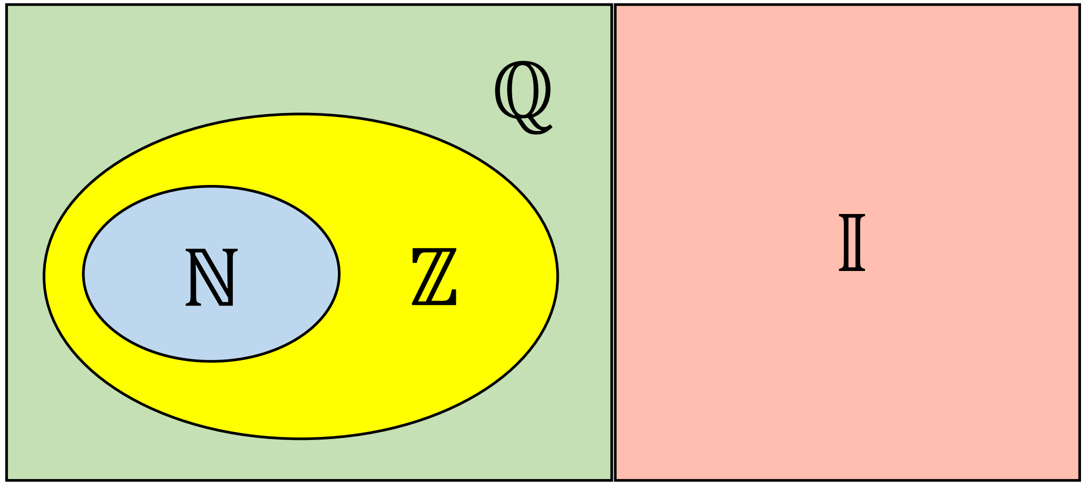
$$\sqrt[3]{5} = 1{,}70997594667669698935310887254386010\ldots$$

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288841\ldots$$

$$e = 2{,}71828182845904523536028747135266249775\ldots$$

$$\cos(20°) = 0{,}93969262078590838405410927732473\ldots$$

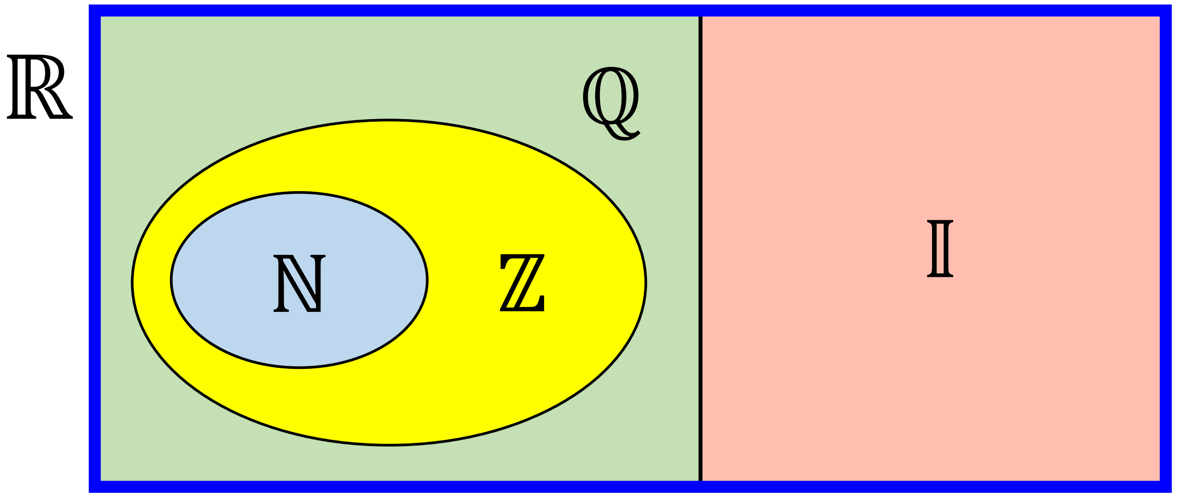
$$\log_{10} 3 = 0{,}47712125471966243729502790325511 53\ldots$$



$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

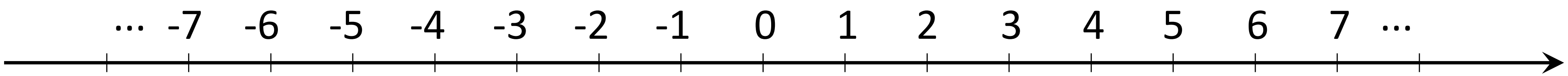
5 - Números Reais: $\mathbb{R}$

- Conjunto que inclui os números racionais e os irracionais.



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

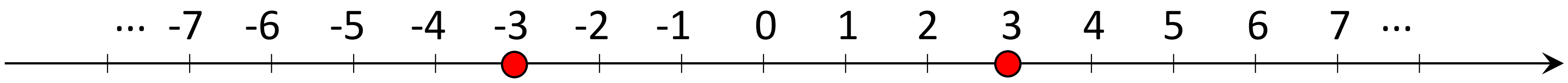
Reta real: linha reta contínua em que cada ponto representa um único número real.



Exemplos: resolver as equações abaixo.

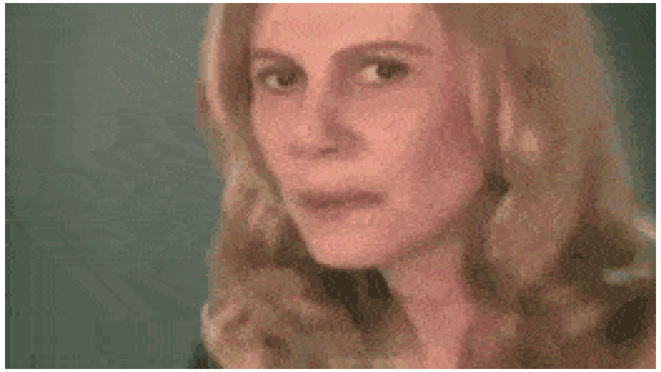
1) $x^2 - 9 = 0$

Solução: $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x_1 = +3$ e $x_2 = -3$



2) $x^2 + 1 = 0$

Solução: $x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow$



Nenhum número real elevado ao quadrado resulta num número negativo.

6 - Números Complexos: $\mathbb{C}$

- **Definição: unidade imaginária** $\Rightarrow$ $i = \sqrt{-1}$

Assim: $i^2 = -1$

Observação: é também usual denotar a unidade imaginária como “j”.

Voltando à equação anterior: $x^2 + 1 = 0$

Solução: $x^2 = -1$ $\Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{-1}$ $\Rightarrow$ $x_1 = +i$ e $x_2 = -i$

Observação: $(-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = +i^2 = -1$

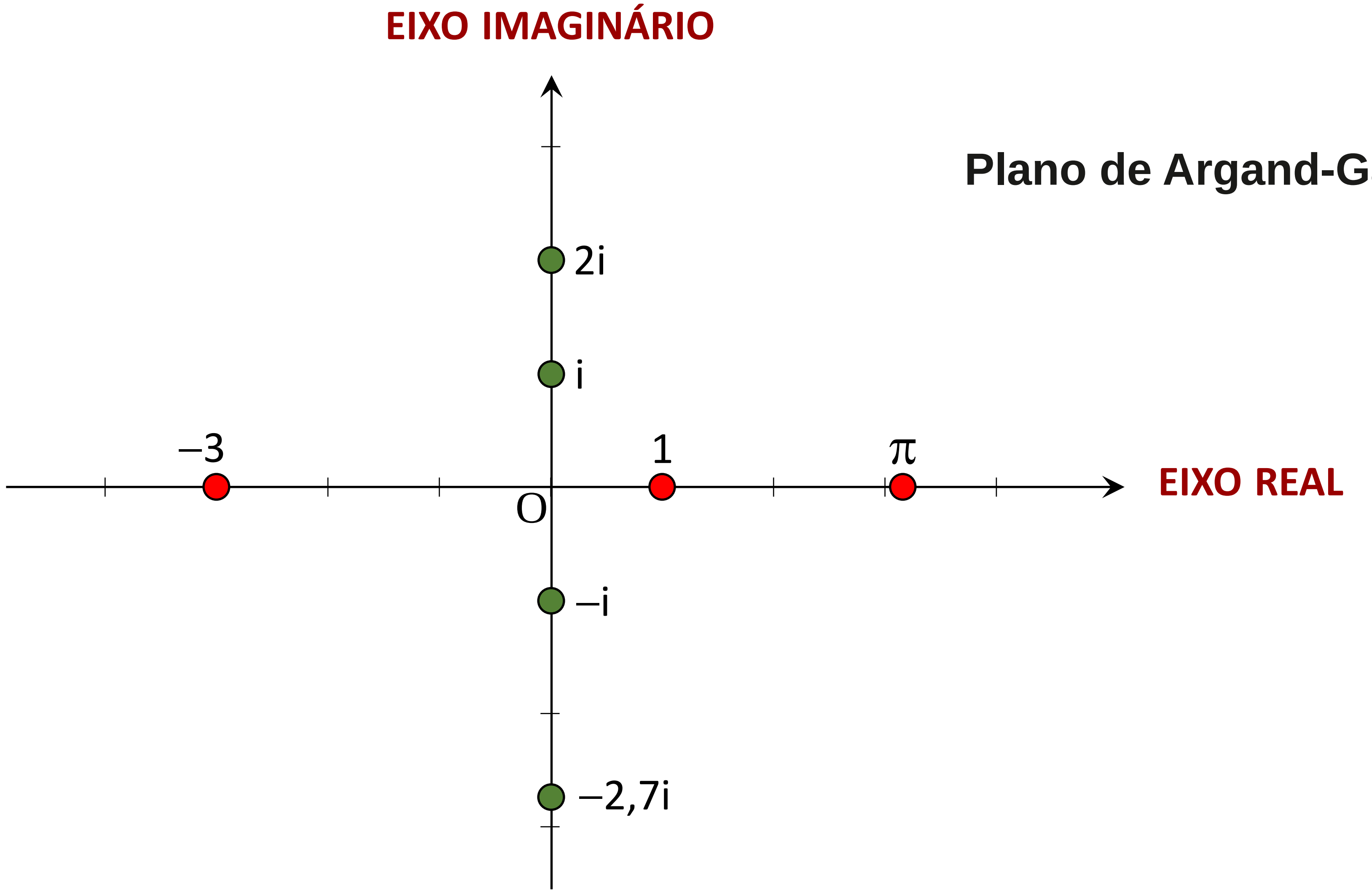
Exemplo: calcular as raízes quadradas abaixo.

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{9\cdot(-1)} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} = 3\cdot i \Rightarrow \boxed{\sqrt{-9} = 3i}$

b) $\sqrt{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(-1)} = \sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\cdot i \Rightarrow \boxed{\sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}i = \frac{i}{2}}$

c) $\sqrt{-2} = \sqrt{2\cdot(-1)} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{2}\cdot i \Rightarrow \boxed{\sqrt{-2} = i\sqrt{2}}$

Representação no Plano Complexo:

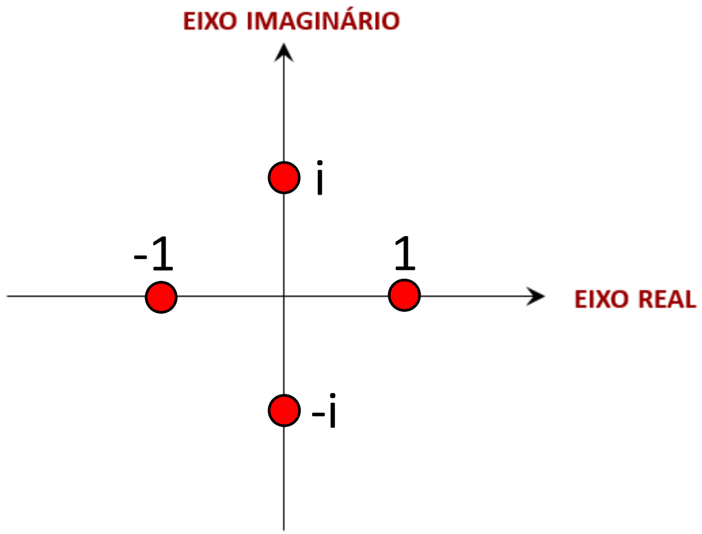


Plano de Argand-Gauss

Potências naturais de i: $i = \sqrt{-1}$

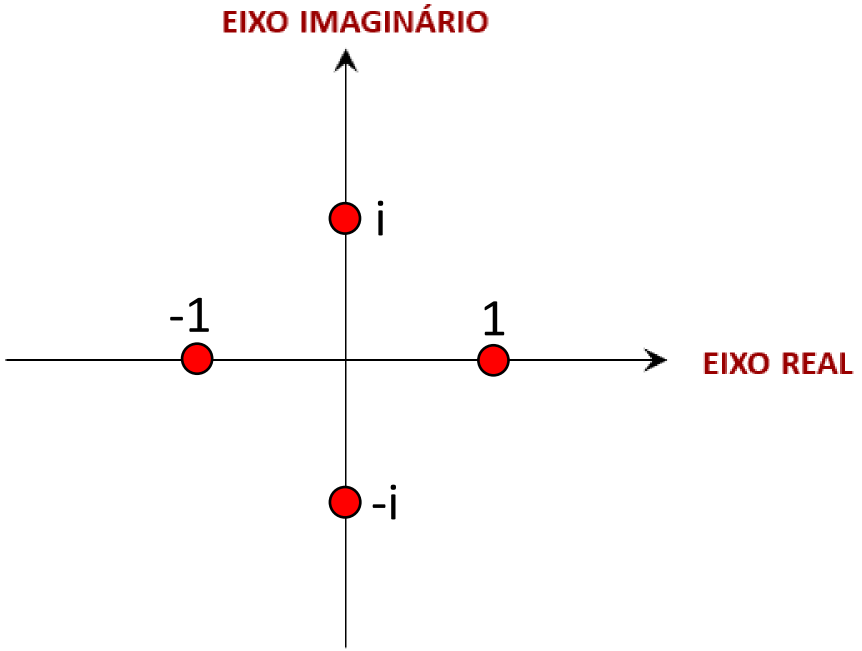
- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1).i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$
- $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1.(-i) = -i$
- $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$
- $i^9 = i^8 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$
- $i^{10} = i^8 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
- $i^{11} = i^8 \cdot i^3 = 1.(-i) = -i$
- $i^{12} = i^8 \cdot i^4 = 1.1 = 1$

$\vdots$



Potências naturais de i: Generalização

- $i^{4k} = 1$ $(i^0,\ i^4,\ i^8,\ i^{12}, \ldots)$ k = número natural
- $i^{4k+1} = i$ $(i^1,\ i^5,\ i^9,\ i^{13}, \ldots)$
- $i^{4k+2} = -1$ $(i^2,\ i^6,\ i^{10},\ i^{14}, \ldots)$
- $i^{4k+3} = -i$ $(i^3,\ i^7,\ i^{11},\ i^{15}, \ldots)$



Conclusão: Para calcular $\mathbf{i^n}$, divide-se $\mathbf{n}$ por 4 $\Rightarrow$ o novo expoente de $\mathbf{i}$ será o resto dessa divisão.

Exemplo: Calcular a) i^{307} e b) i^{1302}.

Solução: a)

$$\begin{array}{r|l} 307 & 4 \\ \cline{2-2} 27 & 76 \\ 3 & \end{array} \Rightarrow \quad 307 = 4 \times 76 + 3$$

Portanto, $\boxed{i^{307} = i^{3} = -i}$

b)

$$\begin{array}{r|l} 1302 & 4 \\ \cline{2-2} 10 & 325 \\ 22 & \\ 2 & \end{array} \Rightarrow \quad 1302 = 4 \times 325 + 2$$

Portanto, $\boxed{i^{1302} = i^{2} = -1}$

Exemplo: resolver a equação $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Solução: Equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a = 1$, $b = -6$ e $c = 13$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(fórmula de Bhaskara)

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$\sqrt{-16} = 4i$$

$$x = \frac{6 \pm 4i}{2} \Rightarrow x_1 = 3 + 2i \quad \text{e} \quad x_2 = 3 - 2i$$

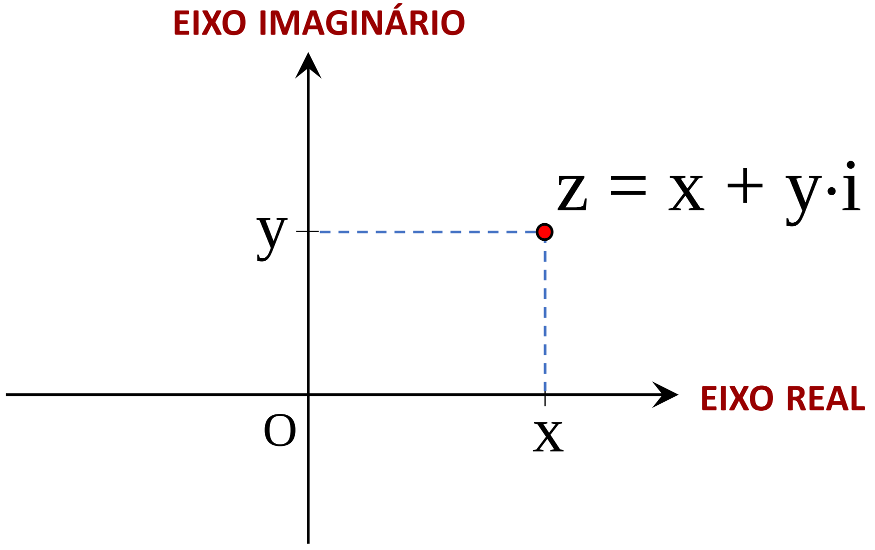
Forma algébrica (ou retangular) de um número complexo:

$$z = x + y \cdot i$$

$x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

- x é a **parte real** de z. **Notação:** $x = \text{Re}(z)$
- y é a **parte imaginária** de z. **Notação:** $y = \text{Im}(z)$

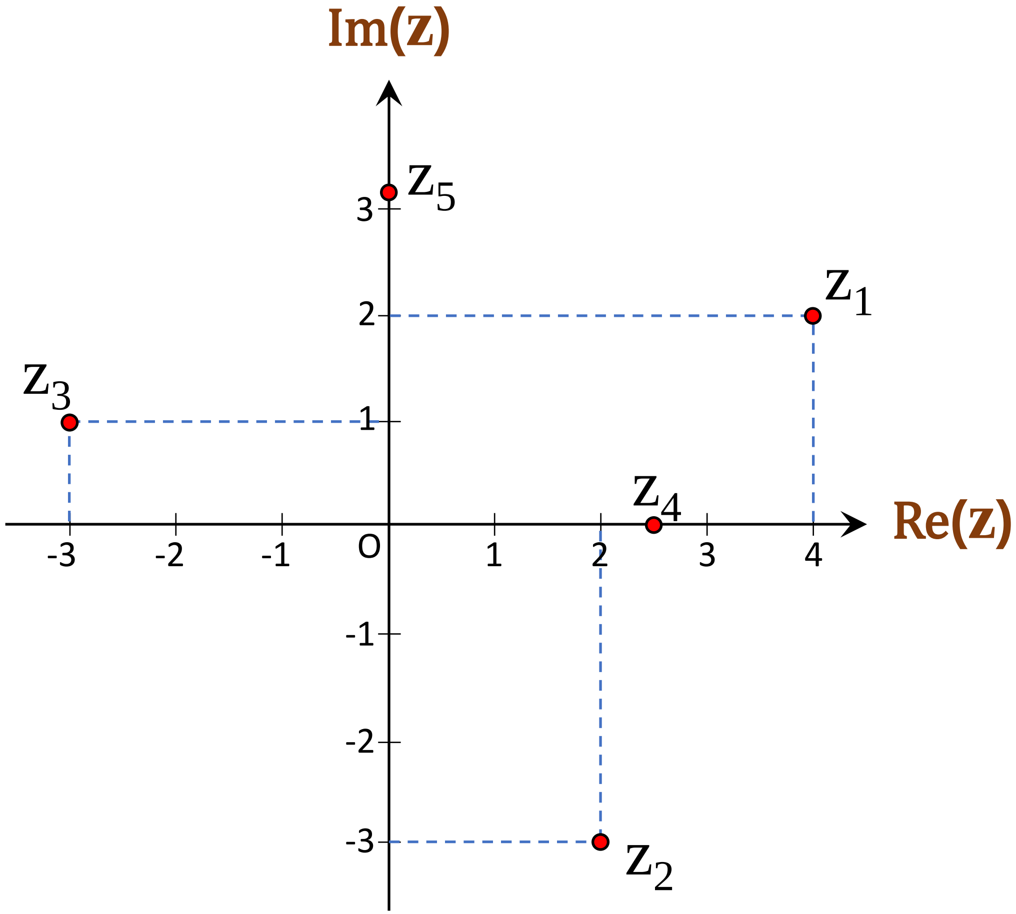
Representação no Plano Complexo:



Pode-se denotar um número complexo como um par ordenado: $z = (x,\ y)$

Exemplos:

- $z_1 = 4 + 2i$ $\Rightarrow$ $Re(z_1) = 4$ e $Im(z_1) = 2$
- $z_2 = 2 - 3i$ $\Rightarrow$ $Re(z_2) = 2$ e $Im(z_2) = -3$
- $z_3 = -3 + i$ $\Rightarrow$ $Re(z_3) = -3$ e $Im(z_3) = 1$
- $z_4 = 2,5$ $\Rightarrow$ $Re(z_4) = 2,5$ e $Im(z_4) = 0$
- $z_5 = 3,2i$ $\Rightarrow$ $Re(z_5) = 0$ e $Im(z_5) = 3,2$

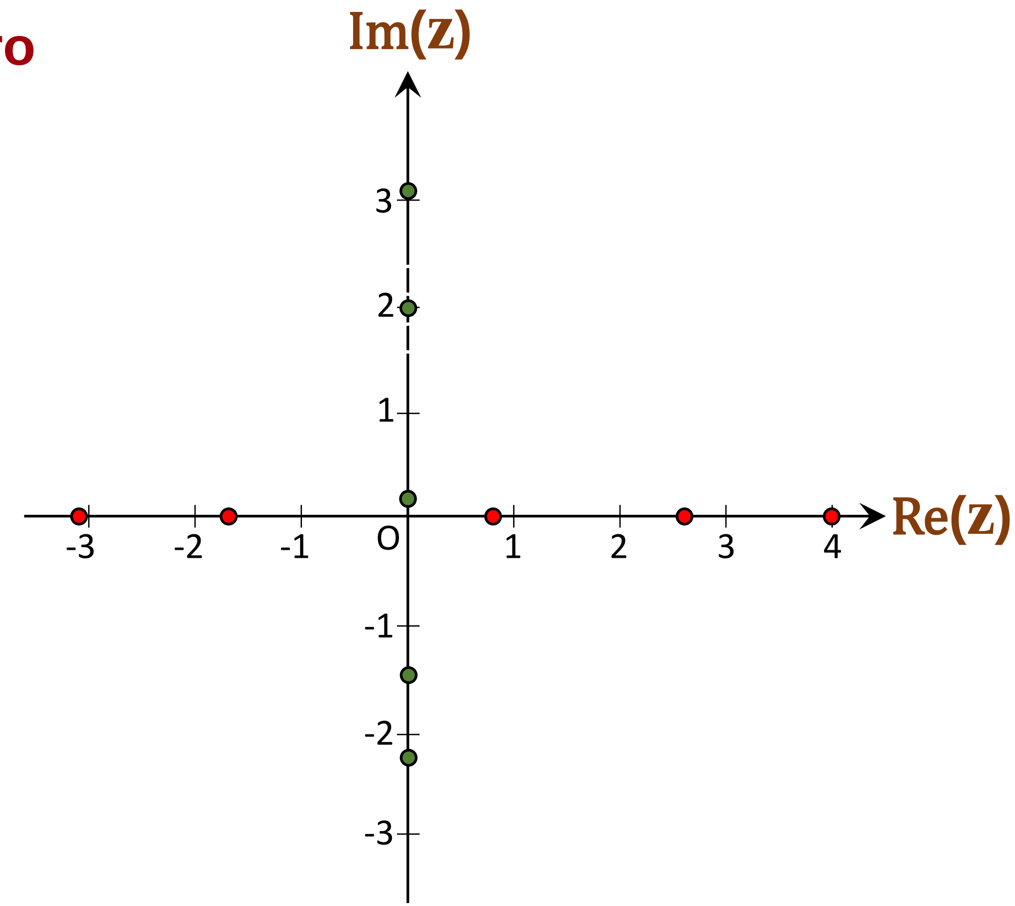


Dado o número complexo:

$z = x + y \cdot i$ $\qquad x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

- Se $x = \mathrm{Re}(z) = 0$ $\Rightarrow$ z é um **número imaginário puro**

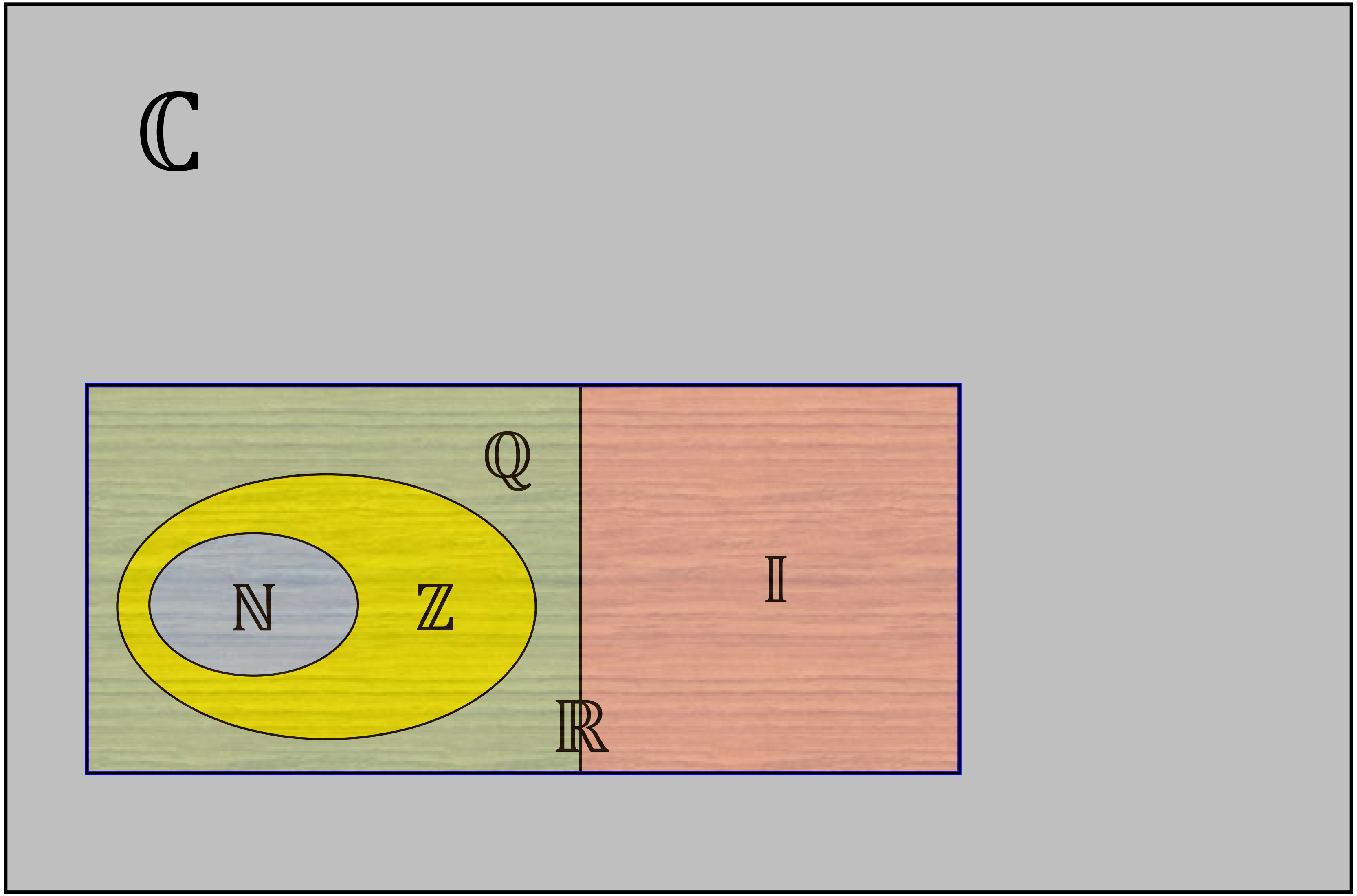
Exemplos: $2i$ $\quad -1{,}4i$ $\quad \pi i$ $\quad -\sqrt{5}\, i$ $\quad 0{,}2i$



- Se $y = \mathrm{Im}(z) = 0$ $\Rightarrow$ z é um **número real**

Exemplos: 4 $\quad -1{,}72$ $\quad -\pi$ $\quad \sqrt{7}$ $\quad 7/9$

Representação dos conjuntos numéricos:



$\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$

Igualdade de números complexos (forma retangular):

Sejam os números complexos: $z_1 = a + b\,i$ e $z_2 = c + d\,i$

Se $z_1 = z_2$ $\Leftrightarrow$ $a = c$ e $b = d$

Dois números complexos são iguais se, e somente se, têm partes reais iguais e partes imaginárias iguais.

Exemplo: Dados $z_1 = 6 + (2y + 1)i$ e $z_2 = (x - 2) + (2x - 3y)i$, determinar x e y para que $z_1 = z_2$.

Solução:

$$\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \Rightarrow 6 = x - 2 \Rightarrow x = 8$$

$$\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \Rightarrow 2y + 1 = 2x - 3y \Rightarrow 2y + 1 = 16 - 3y \Rightarrow y = 3$$

Soma e subtração de números complexos:

Sejam os números complexos: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$

Soma:

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + bi + di \Rightarrow z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

Subtração:

$$z_1 - z_2 = a + bi - (c + di) = a - c + bi - di \Rightarrow z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplo: Dados $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = -5 + 6i$, determinar $z_1 + z_2$ e $z_1 - z_2$.

Solução:

$$z_1 + z_2 = (1 - 5) + (3 + 6)i \Rightarrow z_1 + z_2 = -4 + 9i$$

$$z_1 - z_2 = [1 - (-5)] + (3 - 6)i \Rightarrow z_1 - z_2 = 6 - 3i$$

Multiplicação de números complexos:

Sejam os números complexos: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)\cdot(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

Mas $i^2 = -1$

Portanto $z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd$ $\Rightarrow$ $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Exemplo: Dados $z_1 = 1 + 3i$ e $z_2 = -5 + 6i$, determinar $z_1 \cdot z_2$ e $(z_1)^2$.

Solução: $z_1 \cdot z_2 = (1+3i)\cdot(-5+6i) = [1\cdot(-5) - 3\cdot 6] + [1\cdot 6 + 3\cdot(-5)]i$ $\Rightarrow$ $z_1 \cdot z_2 = -23 - 9i$

$(z_1)^2 = (1+3i)\cdot(1+3i) = (1\cdot 1 - 3\cdot 3) + (1\cdot 3 + 3\cdot 1)i$ $\Rightarrow$ $(z_1)^2 = -8 + 6i$

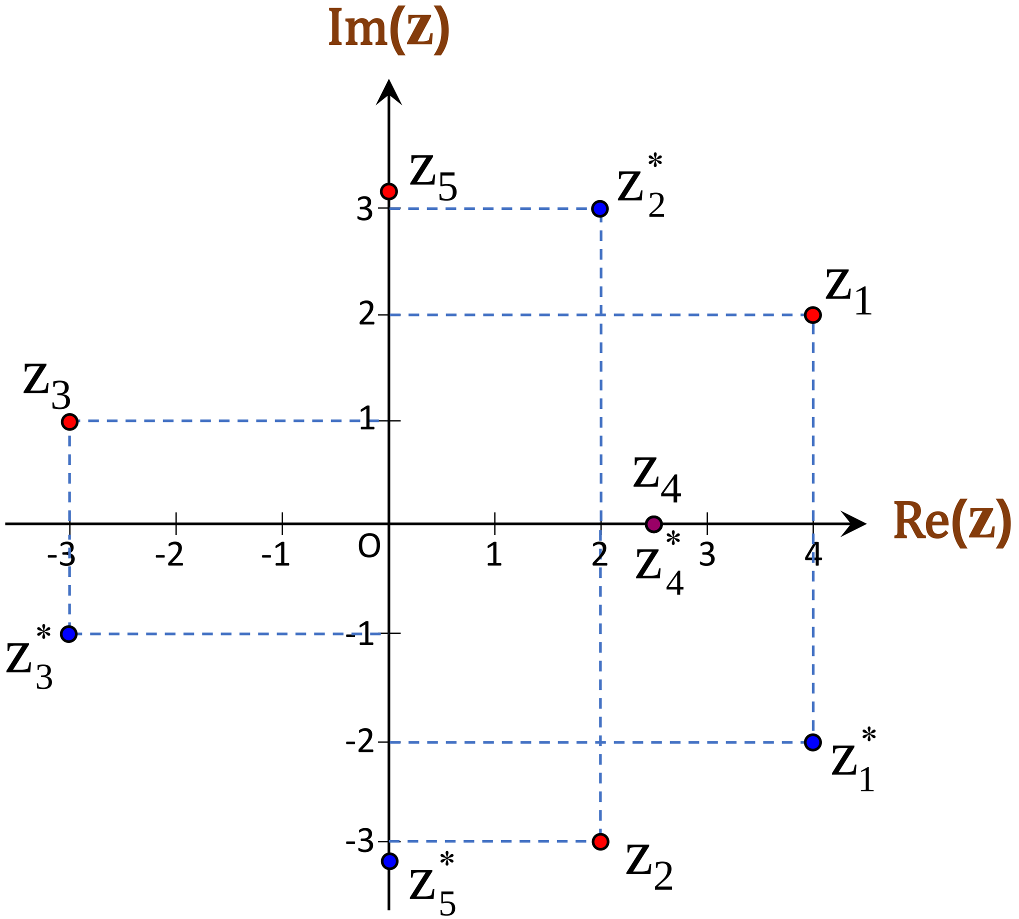
Conjugado de um número complexo:

Seja o número complexo: $z = a + b\,i$ $\quad a \in \mathbb{R} \quad$ e $\quad b \in \mathbb{R}$

Complexo conjugado de z: $z^* = \bar{z} = a - bi$

Exemplos:

- $z_1 = 4 + 2i \quad \Rightarrow \quad z_1^* = 4 - 2i$
- $z_2 = 2 - 3i \quad \Rightarrow \quad z_2^* = 2 + 3i$
- $z_3 = -3 + i \quad \Rightarrow \quad z_3^* = -3 - i$
- $z_4 = 2,5 \quad \Rightarrow \quad z_4^* = 2,5$
- $z_5 = 3,2i \quad \Rightarrow \quad z_5^* = -3,2i$



Propriedades do complexo conjugado: $z = a + bi$ $\quad z^* = \bar{z} = a - bi$

1) Se $z = z^*$, então z é um número real.

$$a + bi = a - bi \quad \Rightarrow \quad b = -b \quad \Rightarrow \quad b = 0$$

2) $(z^*)^* = z$

3) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

$$z_1 = a + bi \qquad z_2 = c + di \qquad \Rightarrow \qquad z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i \;\Rightarrow\; (z_1 + z_2)^* = (a+c) - (b+d)i$$

$$z_1^* = a - bi \qquad z_2^* = c - di \qquad \Rightarrow \qquad z_1^* + z_2^* = (a+c) - (b+d)i$$

4) $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \Rightarrow \qquad (z_1 \cdot z_2)^* = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$z_1^* \cdot z_2^* = (a - bi)(c - di) \;=\; ac - adi - bci + bdi^2 \;=\; (ac - bd) - (ad + bc)i$$

Propriedades do complexo conjugado: $z = a + bi$ $z^* = \overline{z} = a - bi$

5) $z + z^* = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$

$$(a + \cancel{bi}) + (a - \cancel{bi}) = 2a$$

6) $z - z^* = 2bi = 2\,\mathrm{Im}(z)i$

$$(\cancel{a} + bi) - (\cancel{a} - bi) = 2bi$$

7) $z \cdot z^* = a^2 + b^2$

$$(a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - \cancel{ab}i + \cancel{ba}i - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Divisão de números complexos:

Sejam os números complexos: $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por z_2*:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2}$$

Portanto:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i$$

Exemplo 1: Dados $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 5 + 2i$, determinar z_1/z_2.

Solução:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{5+2i} \cdot \frac{5-2i}{5-2i} = \frac{10-4i-15i+6i^2}{5^2+2^2} = \frac{10-4i-15i-6}{29}$$

Portanto: $$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29}i}$$

Exemplo 2: Calcular o inverso de i.

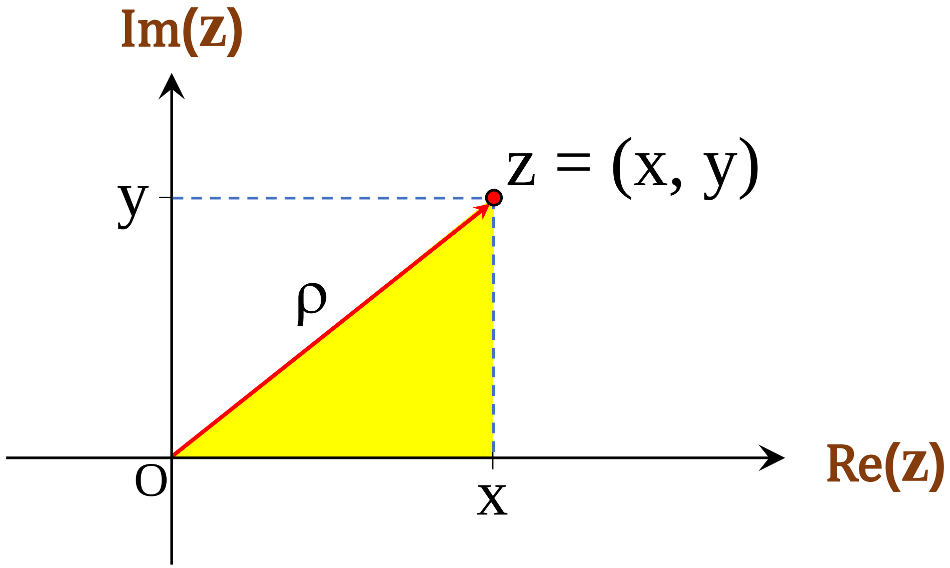
Solução: $z = i = 0 + 1 \cdot i \quad \Rightarrow \quad z^* = 0 - 1 \cdot i = -i$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{-(-1)}$$

Portanto: $$\boxed{\frac{1}{i} = -i}$$

Módulo de um número complexo:

Forma retangular: $z = x + yi$ $\qquad x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$



ρ = "rô"

Módulo de z: $|z| = \rho$ $\Rightarrow$ Corresponde à distância da imagem de z à origem do plano complexo.

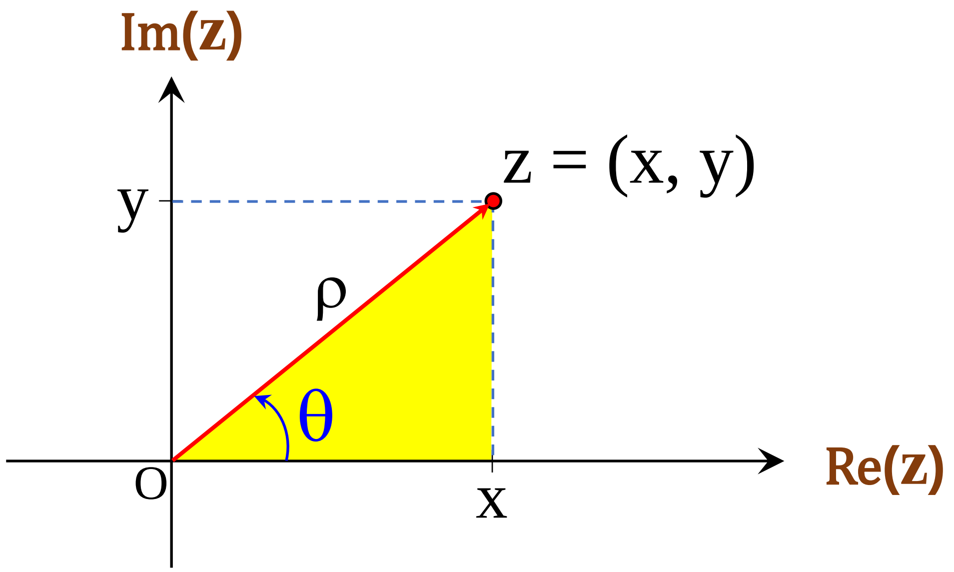
Usando Pitágoras: $\rho^2 = x^2 + y^2$ $\Rightarrow$ $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow$ $\rho = \sqrt{z \cdot z^*}$

- $\rho \in \mathbb{R}$
- $\rho \geq 0$

Ângulo (ou argumento) de um número complexo:

Forma retangular: $z = x + yi$ $\qquad x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$

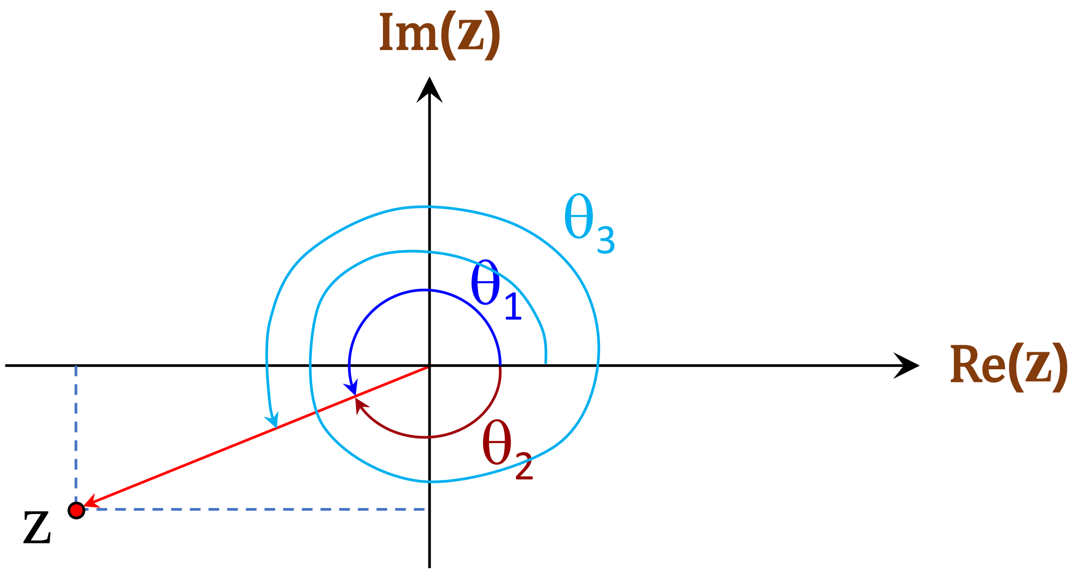


Ângulo de z: $\arg(z) = \theta$ $\Rightarrow$ Corresponde ao ângulo que o segmento Oz faz com o eixo real positivo.

Do triângulo retângulo: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\rho}$ $\qquad \cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$ $\qquad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$

- Ângulos **positivos** são medidos no sentido **anti-horário**.

- Ângulos **negativos** são medidos no sentido **horário**.

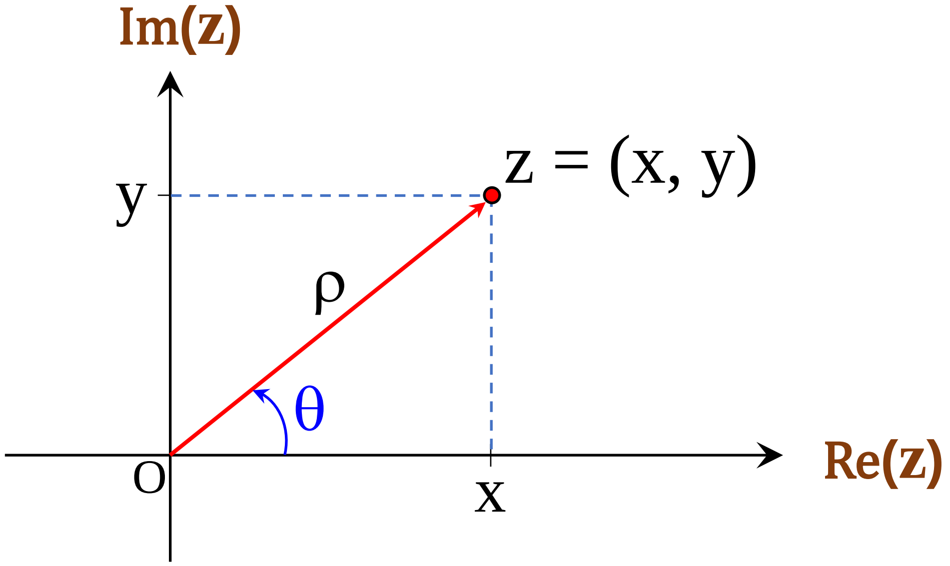


$$\theta_2 = \theta_1 - 360^o$$

$$\theta_3 = \theta_1 + 360^o$$

- Os ângulos θ_1, θ_2 e θ_3 são **congruentes**, pois têm a mesma medida: $\theta_1 \equiv \theta_2 \equiv \theta_3$ $\cong$

Exemplos de ângulos congruentes: $210° \equiv -150° \equiv 570° \equiv -510° \equiv 930° \equiv \cdots$



- θ é o **argumento principal de z** se $0 \le \theta \le 360^o$ ou $-180^o \le \theta \le 180^o$.

- Se z tem argumento principal θ_0, então todos os ângulos congruentes a θ_0 são também argumentos de z:

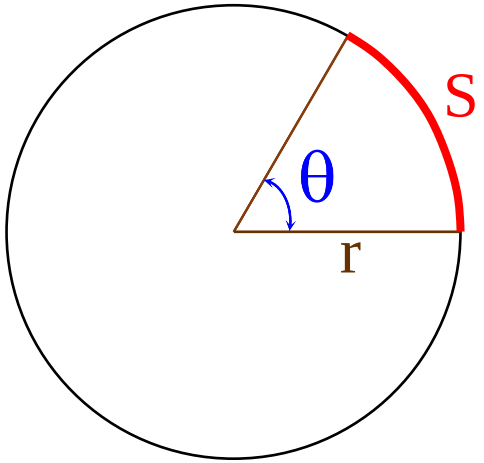
$$\theta = \arg(z) \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_0 + k \cdot 360^o$$

(k = número inteiro)

Ângulo em radianos:

Definição: razão entre o comprimento do arco e o raio.

$$\theta = \frac{S}{r} \quad \text{[rad]}$$



- Para uma volta completa, $S = 2\pi r$. Portanto, o ângulo correspondente é 2π radianos.

Conversão de grau para radiano: regra de três simples $360^o \longleftrightarrow 2\pi$

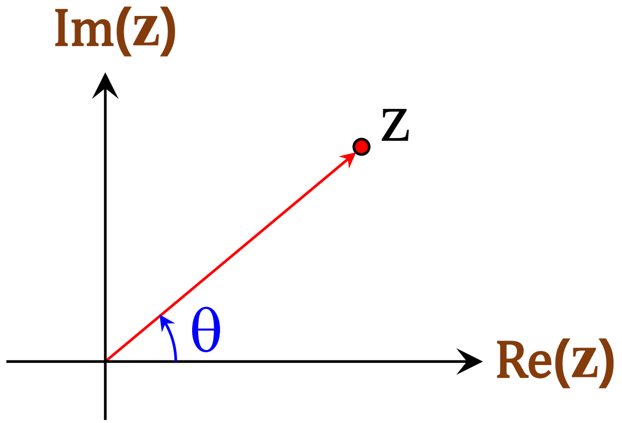
$$180^o \longleftrightarrow \pi$$

$$\theta_{graus} \longleftrightarrow \theta_{rad}$$

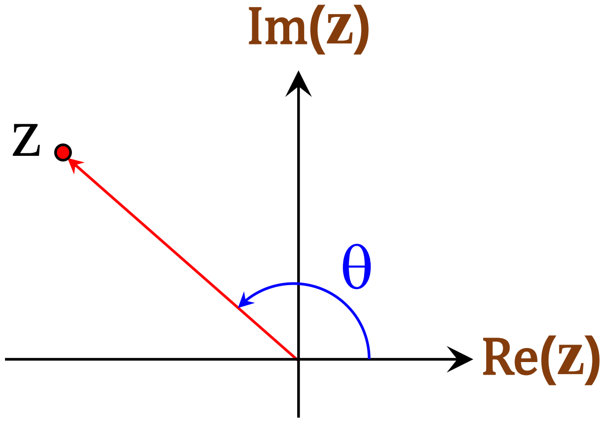
$$\theta_{rad} = \left(\frac{\pi}{180}\right)\theta_{graus} \qquad \theta_{graus} = \left(\frac{180}{\pi}\right)\theta_{rad}$$

Exemplos: $90^o = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$ $\quad 60^o = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$ $\quad 45^o = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$ $\quad 30^o = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$ $\quad 1\ \text{rad} \cong 57°$

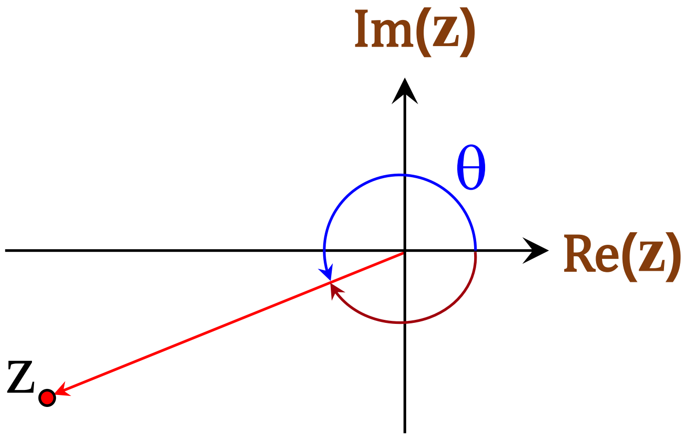
Representações do argumento principal: $z = x + yi$



1º quadrante: $x > 0$ e $y > 0 \;\Rightarrow\; 0° < \theta < 90°$

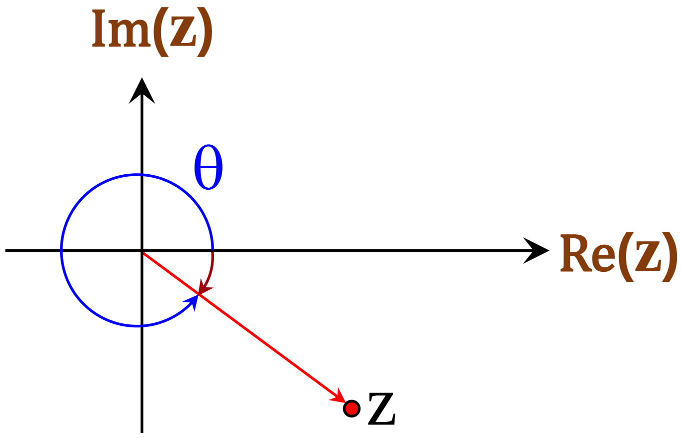


2º quadrante: $x < 0$ e $y > 0 \;\Rightarrow\; 90° < \theta < 180°$



3º quadrante: $x < 0$ e $y < 0 \;\Rightarrow\; 180° < \theta < 270°$

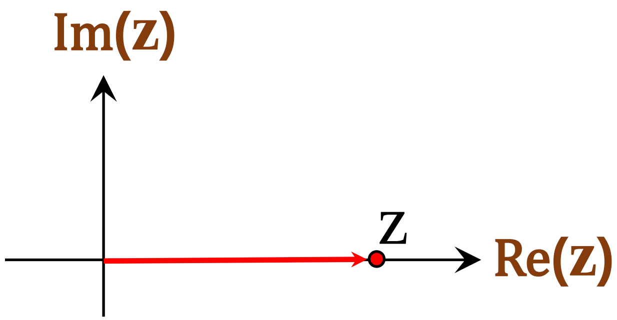
$-90° > \theta > -180°$



4º quadrante: $x > 0$ e $y < 0 \;\Rightarrow\; 270° < \theta < 360°$

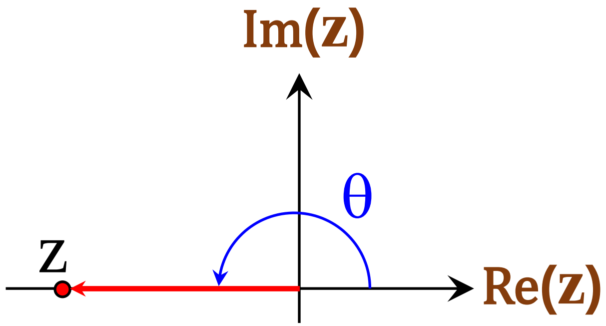
$0° > \theta > -90°$

$$z = x + y\,i$$



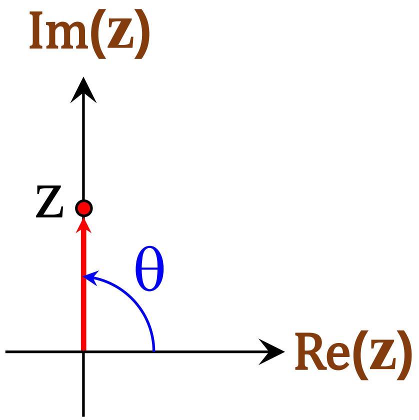
Número real positivo:

$x > 0$ e $y = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0°$



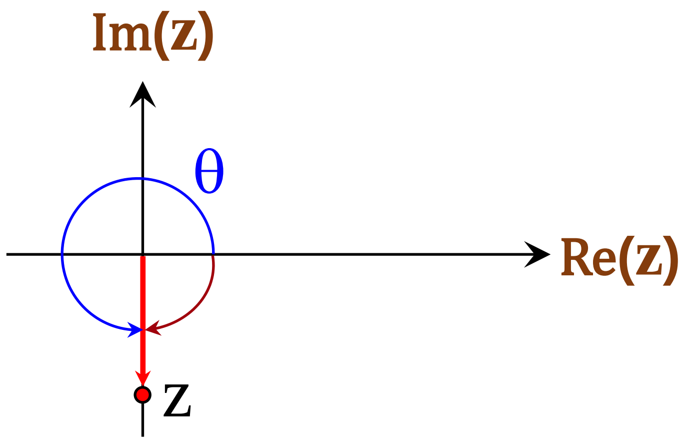
Número real negativo:

$x < 0$ e $y = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 180°$



Número imaginário positivo:

$x = 0$ e $y > 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 90°$



Número imaginário negativo:

$x = 0$ e $y < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 270° \equiv -90°$

Exemplo: Calcular o módulo e o ângulo dos números complexos.

a) $z_1 = 5 + 5\sqrt{3}\,i$

b) $z_2 = -2 + 2i$

c) $z_3 = 7{,}25 - 3{,}38i$

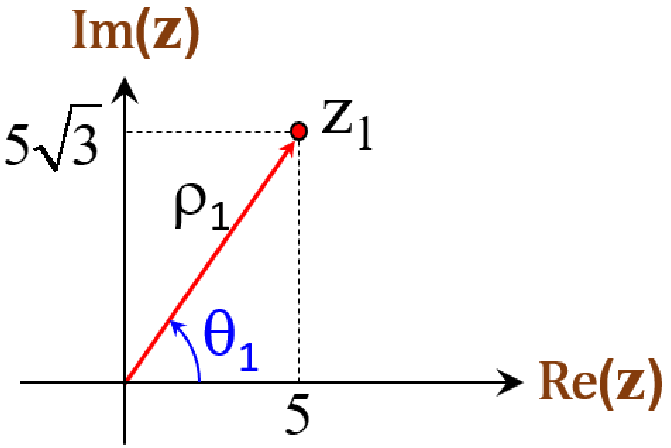
d) $z_4 = -6i$

$z = x + yi$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}$

Solução: a) $\boxed{z_1 = 5 + 5\sqrt{3}\,i}$



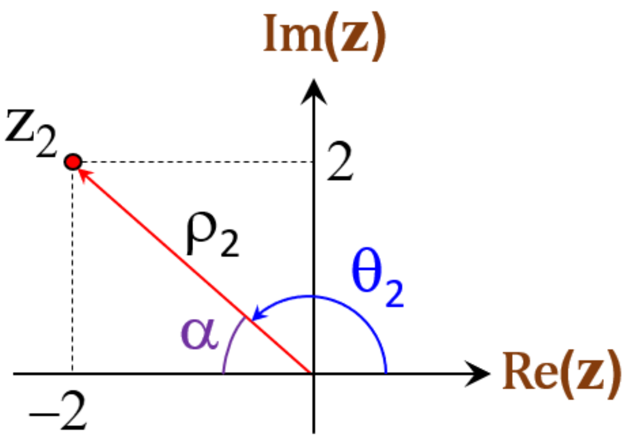
$$\rho_1 = \sqrt{5^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{25 + 25\cdot 3} \Rightarrow \rho_1 = 10$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_1 = \frac{\cancel{5}\sqrt{3}}{\cancel{5}} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_1 = 60^\circ$$

ângulo	0°	30°	45°	60°	90°
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tangente	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Prof. Walter P. Carpes Jr. - UFSC

b) $\boxed{z_2 = -2 + 2i}$



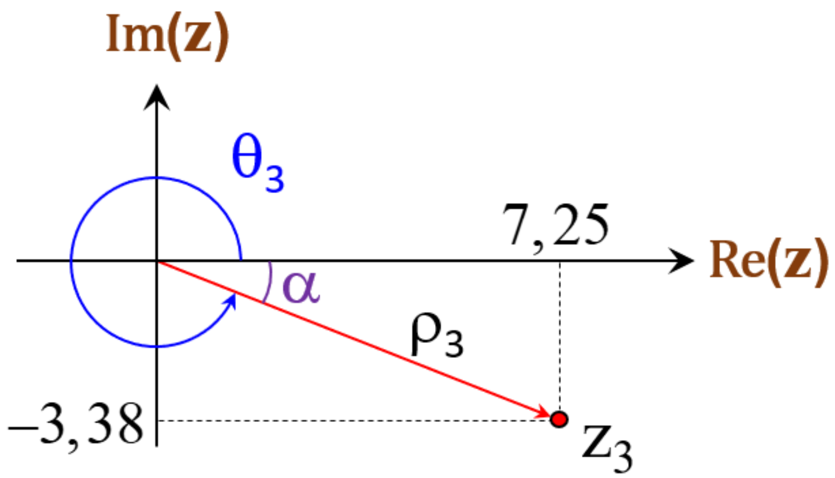
$$\rho_2 = \sqrt{2^2 + 2^2}$$

$$\rho_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^o$$

$$\theta_2 = 180^o - \alpha \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = 135^o$$

c) $\boxed{z_3 = 7{,}25 - 3{,}38i}$



$$\rho_3 = \sqrt{7{,}25^2 + 3{,}38^2} \quad \Rightarrow \quad \rho_3 \cong 8$$

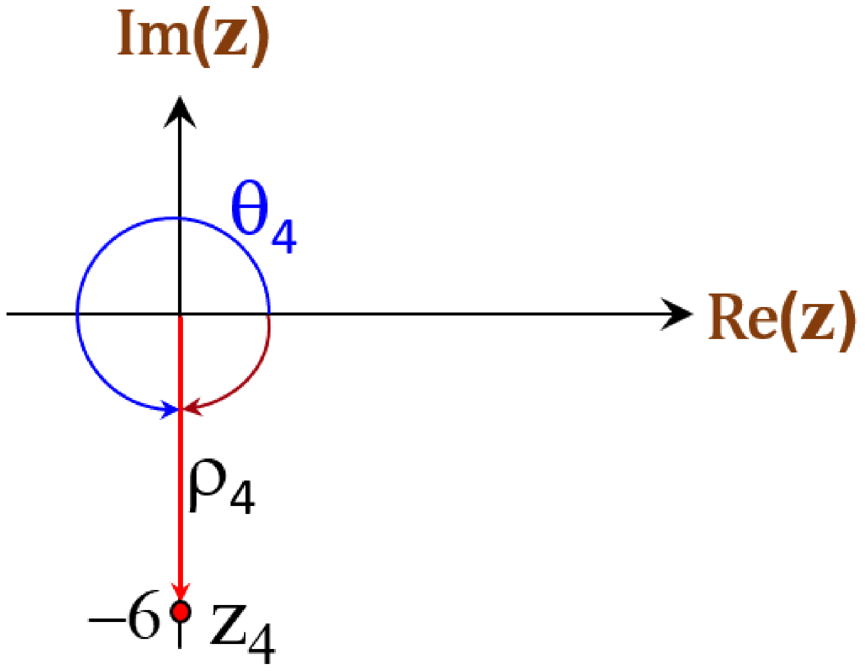
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3{,}38}{7{,}25} = 0{,}466$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(0{,}466) \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 25^o \qquad \operatorname{tg}(25^o) = 0{,}466$$

$$\theta_3 = 360^o - \alpha \quad \Rightarrow \quad \theta_3 = 335^o \equiv -25^o$$

d) $\boxed{z_4 = -6i}$

$$z_4 = 0 - 6i$$



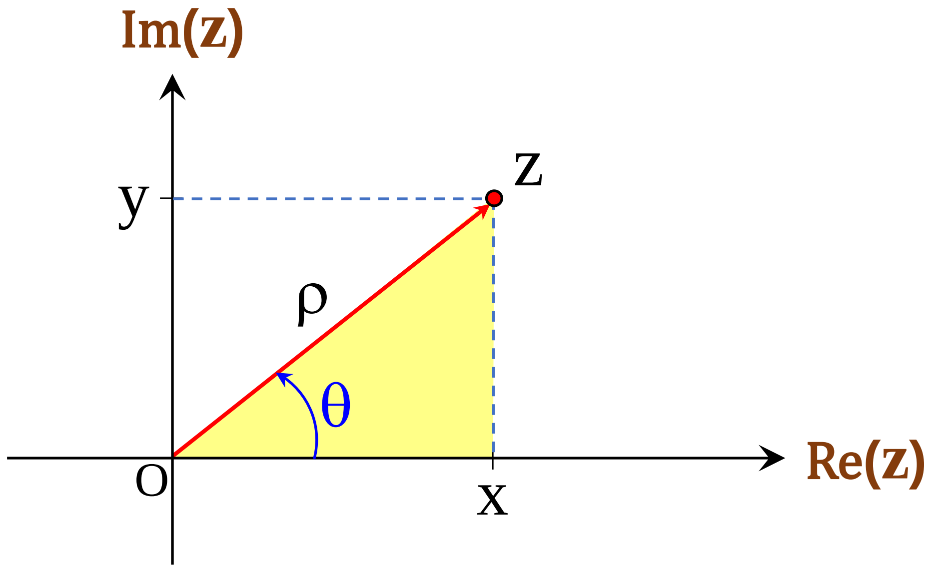
$$\rho_4 = \sqrt{0^2 + 6^2} \quad \Rightarrow \quad \rho_4 = 6$$

$$\theta_4 = 270^o \equiv -90^o$$

Forma polar (ou trigonométrica) de um número complexo:

Forma retangular:

$$z = x + yi$$



$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} \quad \Rightarrow \quad x = \rho \cdot \cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\rho} \quad \Rightarrow \quad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$z = \rho \cdot \cos\theta + (\rho \cdot \operatorname{sen}\theta)\, i \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)}$$

Forma polar:

Notação simplificada: $z = \rho\angle\theta$

Exemplo: Escrever os números abaixo na forma polar.

a) $z_1 = 5 + 5\sqrt{3}\,i$

b) $z_2 = -2 + 2i$

c) $z_3 = 7,25 - 3,38i$

d) $z_4 = -6i$

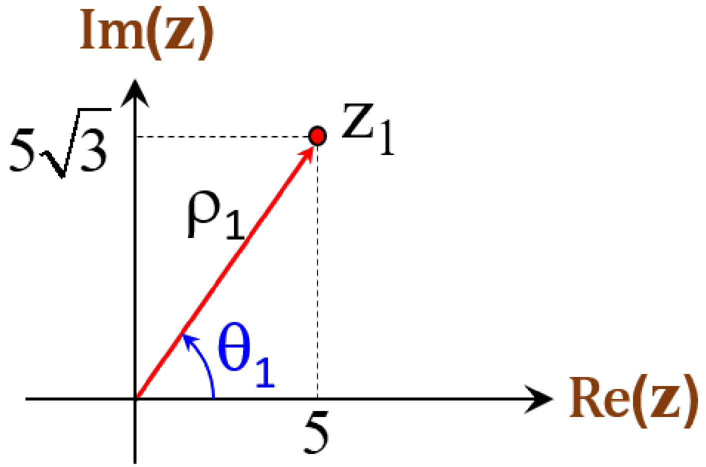
e) $z_5 = i$

f) $z_6 = 5$

g) $z_7 = -1$

$$z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

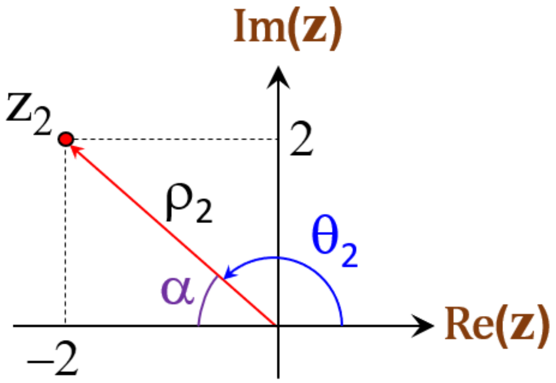
Solução: a) $\boxed{z_1 = 5 + 5\sqrt{3}\,i}$



Do exemplo anterior: $\rho_1 = 10$ $\theta_1 = 60^o$

Portanto: $z_1 = 10 \cdot (\cos 60^o + i \cdot \operatorname{sen} 60^o)$ ou $z_1 = 10\angle 60^o$

b) $\boxed{z_2 = -2 + 2i}$

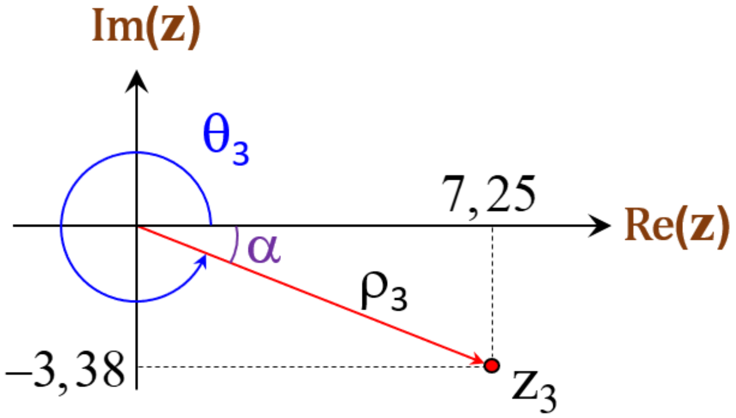


$\rho_2 = 2\sqrt{2}$

$\theta_2 = 135^o$

Portanto: $z_2 = 2\sqrt{2}\cdot\left(\cos 135^o + i\cdot \operatorname{sen} 135^o\right)$ ou $z_2 = 2\sqrt{2}\angle 135^o$

c) $\boxed{z_3 = 7{,}25 - 3{,}38i}$



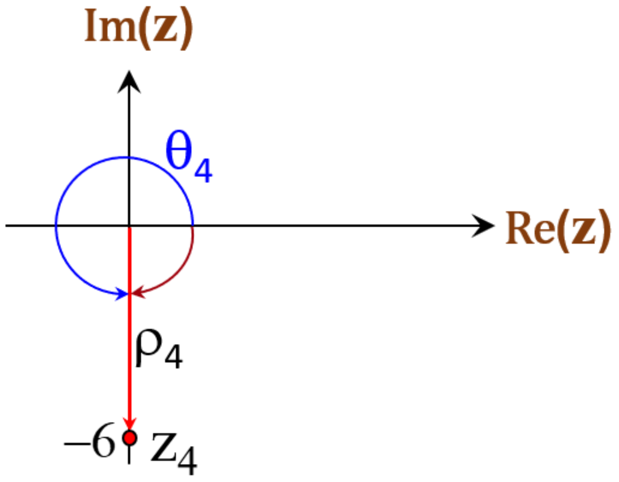
$\rho_3 \cong 8$

$\theta_3 = 335^o \equiv -25^o$

Portanto: $z_3 = 8\cdot\left(\cos 335^o + i\cdot \operatorname{sen} 335^o\right)$ ou $z_3 = 8\angle 335^o = 8\angle -25^o$

d) $\boxed{z_4 = -6i}$

$z_4 = 0 - 6 \cdot i$



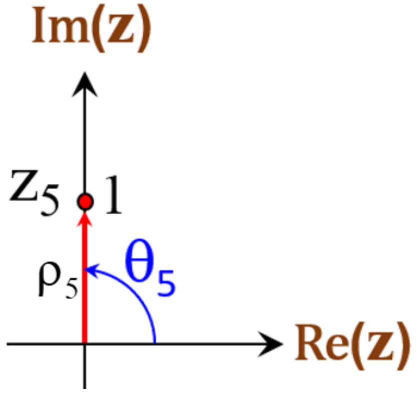
$\rho_4 = 6$

$\theta_4 = 270^o \equiv -90^o$

Portanto: $z_4 = 6 \cdot \left(\cos 270^o + i \cdot \text{sen}\, 270^o \right)$ ou $z_4 = 6 \angle 270^o = 6 \angle -90^o$

e) $\boxed{z_5 = i}$

$z_5 = 0 + 1 \cdot i$



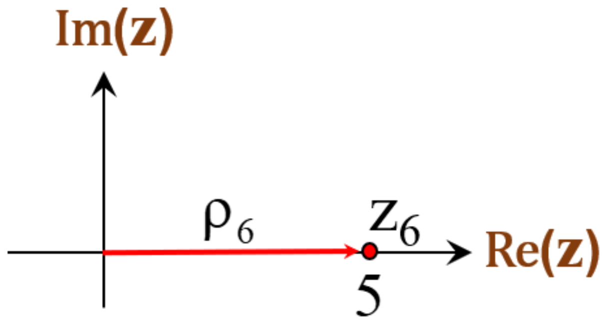
$\rho_5 = 1$

$\theta_5 = 90^o$

Portanto: $z_5 = 1 \cdot \left(\cos 90^o + i \cdot \text{sen}\, 90^o \right)$ ou $z_5 = 1 \angle 90^o$

f) $\boxed{z_6 = 5}$

$$z_6 = 5 + 0 \cdot i$$



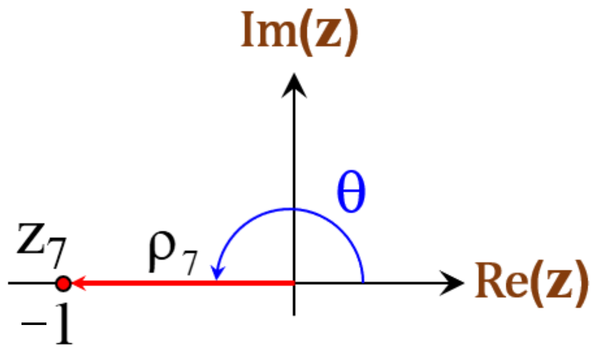
$$\rho_6 = 5$$

$$\theta_6 = 0^o$$

Portanto: $z_6 = 5 \cdot \left(\cos 0^o + i \cdot \operatorname{sen} 0^o \right)$ ou $z_6 = 5 \angle 0^o$

g) $\boxed{z_7 = -1}$

$$z_7 = -1 + 0 \cdot i$$



$$\rho_7 = 1$$

$$\theta_7 = 180^o$$

Portanto: $z_7 = 1 \cdot \left(\cos 180^o + i \cdot \operatorname{sen} 180^o \right)$ ou $z_7 = 1 \angle 180^o$

$$180^o \equiv -180^o$$

Exemplo: Escrever os números abaixo na forma retangular.

a) $z_1 = 10\angle 30^o$

b) $z_2 = 4\angle 135^o$

c) $z_3 = 2\angle -45^o$

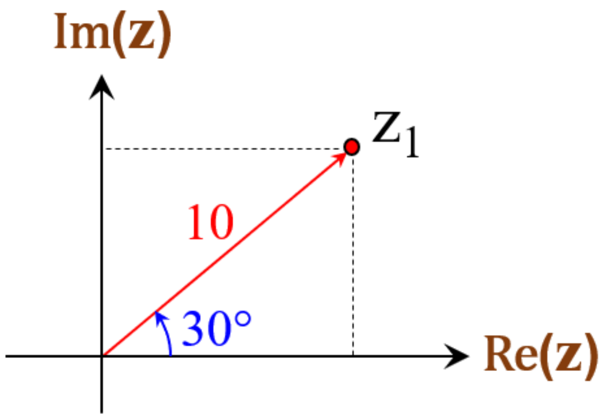
d) $z_4 = 5\angle 270^o$

e) $z_5 = 7\angle 0^o$

f) $z_6 = 1\angle 180^o$

$$z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Solução: a) $\boxed{z_1 = 10\angle 30^o}$



$$z_1 = 10 \cdot \left(\cos 30^o + i \cdot \operatorname{sen} 30^o\right)$$

$$z_1 = 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad z_1 = 5\sqrt{3} + 5i$$

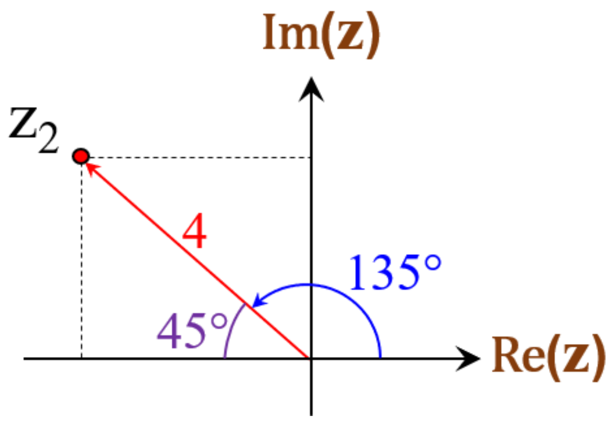
ângulo	0°	30°	45°	60°	90°
seno	0	$^1/_2$	$^{\sqrt{2}}/_2$	$^{\sqrt{3}}/_2$	1
cosseno	1	$^{\sqrt{3}}/_2$	$^{\sqrt{2}}/_2$	$^1/_2$	0
tangente	0	$^1/_{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

b) $\boxed{z_2 = 4\angle 135^\circ}$

$$z_2 = 4\cdot\left(\cos 135^\circ + i\cdot \operatorname{sen} 135^\circ\right)$$

$$z_2 = 4\cdot\left(-\cos 45^\circ + i\cdot \operatorname{sen} 45^\circ\right)$$

$$z_2 = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow z_2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,i$$

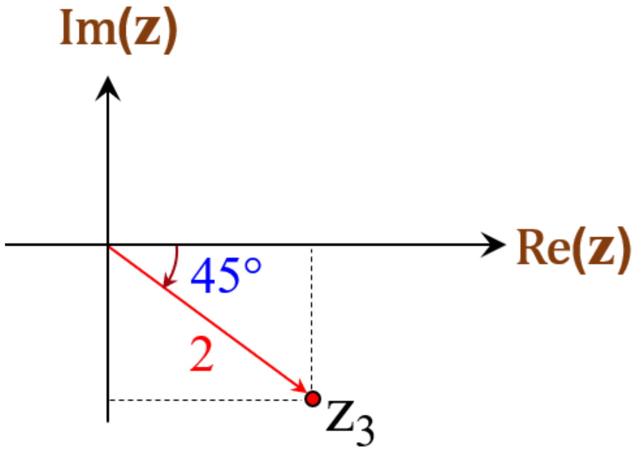


c) $\boxed{z_3 = 2\angle -45^\circ}$

$$z_3 = 2\cdot\left[\cos\left(-45^\circ\right) + i\cdot \operatorname{sen}\left(-45^\circ\right)\right]$$

$$z_3 = 2\cdot\left[\cos 45^\circ - i\cdot \operatorname{sen} 45^\circ\right]$$

$$z_3 = 2\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow z_3 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

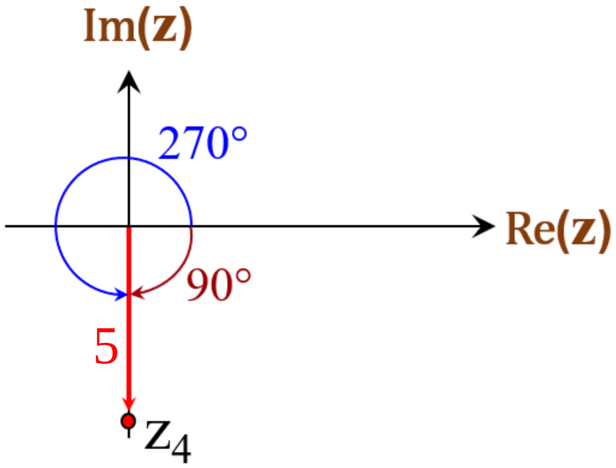


ângulo	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tangente	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

d) $\boxed{z_4 = 5\angle 270^\circ}$ $\boxed{z_4 = 5\angle -90^\circ}$

$$z_4 = 5\cdot\left[\cos\left(-90^\circ\right) + i\cdot \text{sen}\left(-90^\circ\right)\right]$$

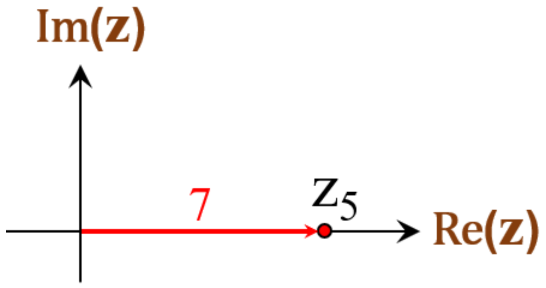
$$z_4 = 5\cdot\left[0 + i\cdot(-1)\right] \quad \Rightarrow \quad z_4 = -5i$$



e) $\boxed{z_5 = 7\angle 0^\circ}$

$$z_5 = 7\cdot\left(\cos 0^\circ + i\cdot \text{sen}\, 0^\circ\right)$$

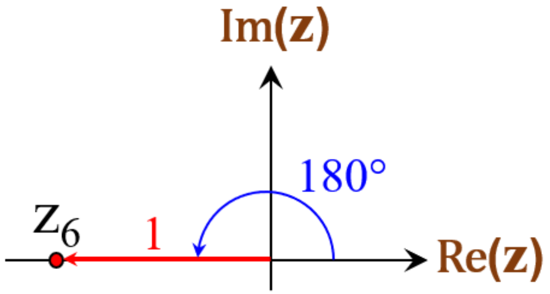
$$z_5 = 7\cdot(1 + i\cdot 0) \quad \Rightarrow \quad z_5 = 7$$



f) $\boxed{z_6 = 1\angle 180^\circ}$

$$z_6 = 1\cdot\left(\cos 180^\circ + i\cdot \text{sen}\, 180^\circ\right)$$

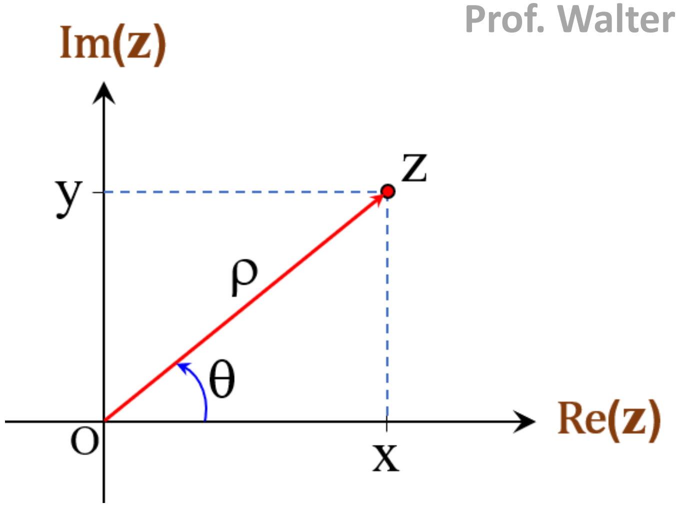
$$z_6 = 1\cdot(-1 + i\cdot 0) \quad \Rightarrow \quad z_6 = -1$$



Igualdade de números complexos:

Sejam os números complexos: $z_1 = a + b\,i = \rho_1 \angle \theta_1$

$z_2 = c + d\,i = \rho_2 \angle \theta_2$



Forma retangular:

Dois números complexos são iguais se, e somente se, têm partes reais iguais e partes imaginárias iguais.

Se $z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = c$ e $b = d$

Forma polar:

Dois números complexos são iguais se, e somente se, têm módulos iguais e ângulos congruentes.

Se $z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2$ e $\theta_1 \equiv \theta_2$

$\theta_1 = \theta_2 + k \cdot 360^o$

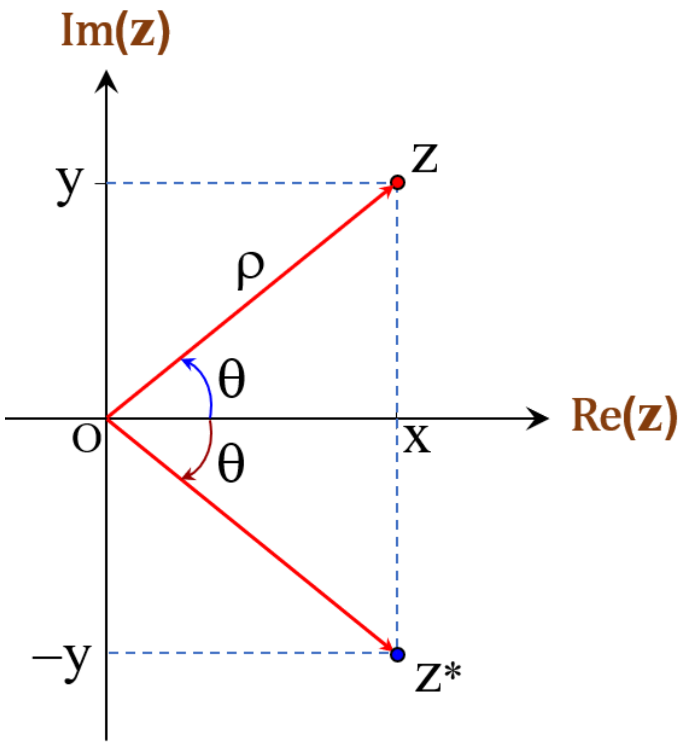
Exemplo: $10\angle -40^o = 10\angle 320^o = 10\angle 680^o$

Conjugado de um número complexo:

Seja o número complexo: $z = a + b\,i = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) = \rho\angle\theta$

- **Na forma retangular:** $z^* = \bar{z} = a - bi$
- **Na forma polar:** $z^* = \bar{z} = \rho \cdot (\cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta)$

$$z^* = \rho \cdot \left[\cos(-\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(-\theta)\right] = \rho\angle -\theta$$



Exemplos:

a) $z_1 = 2\angle 30^o \quad \Rightarrow \quad z_1^* = 2\angle -30^o$

b) $z_2 = 5\angle -135^o \quad \Rightarrow \quad z_2^* = 5\angle 135^o$

c) $z_3 = 4\angle 180^o \quad \Rightarrow \quad z_3^* = 4\angle -180^o \;= z_3$

Multiplicação de números complexos:

Sejam os números complexos: $z_1 = a + b\,i = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1) = \rho_1 \angle\theta_1$

$z_2 = c + d\,i = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2) = \rho_2 \angle\theta_2$

Forma retangular: $z_1 \cdot z_2 = (a + b\,i) \cdot (c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Forma polar: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_1) \right]$$

Sabe-se que: $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2$

e $\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_1$

Assim: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \right]$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$z = \rho\,(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Portanto: $z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \angle \theta_1)\cdot(\rho_2 \angle \theta_2) = \rho_1 \cdot \rho_2 \angle (\theta_1+\theta_2)$

Conclusão:

Na multiplicação na forma polar, multiplicam-se os módulos e somam-se os ângulos.

Exemplo: Dados $z_1 = 5\sqrt{3} + 5i = 10\angle 30^o$ e $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i = 2\angle -45^o$, determinar $z_1 \cdot z_2$.

Solução:

$$z_1 \cdot z_2 = (10\angle 30^o)\cdot(2\angle -45^o)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (10 \cdot 2)\angle(30^o - 45^o)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 20\angle -15^o$$

$$z_1 \cdot z_2 = 20\left[\cos(-15^o) + i\operatorname{sen}(-15^o)\right]$$

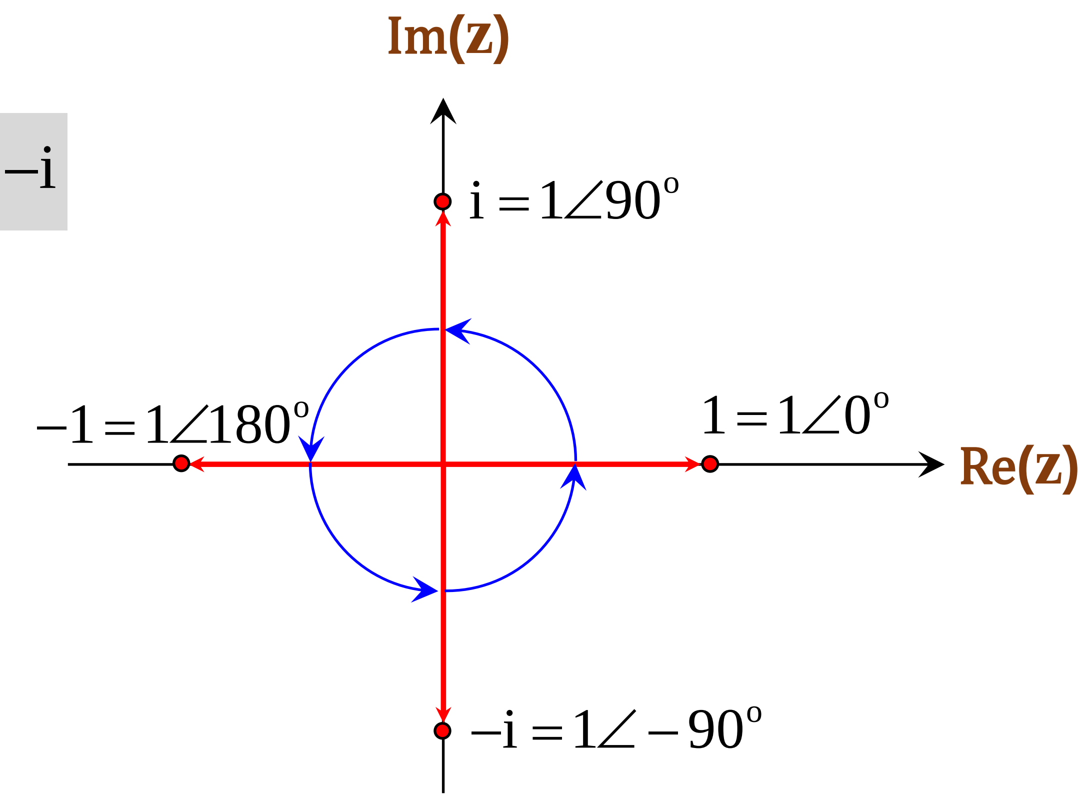
$$z_1 \cdot z_2 = 20\left[\cos 15^o - i \cdot \operatorname{sen} 15^o\right]$$

$$z_1 \cdot z_2 = 19{,}32 - 5{,}18i$$

Potências naturais de i (forma polar):

$i = 1\angle 90^o$

- $i^0 = 1 = 1\angle 0^o$
- $i^1 = i = 1\angle 90^o$
- $i^2 = i \cdot i = \left(1\angle 90^o\right)\cdot\left(1\angle 90^o\right) = 1\angle 180^o = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = \left(1\angle 180^o\right)\cdot\left(1\angle 90^o\right) = 1\angle 270^o = 1\angle -90^o = -i$
- $i^4 = i^3 \cdot i = \left(1\angle 270^o\right)\cdot\left(1\angle 90^o\right) = 1\angle 360^o = 1\angle 0^o = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = \left(1\angle 0^o\right)\cdot\left(1\angle 90^o\right) = 1\angle 90^o = i$ …



Conclusão: Uma multiplicação por **i** representa uma rotação de 90° no plano complexo.

Divisão de números complexos:

Sejam os números complexos: $z_1 = a + bi = \rho_1 \angle\theta_1$ e $z_2 = c + di = \rho_2 \angle\theta_2$

Forma retangular: $$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

Forma polar: Seja $z_3 = \rho_3 \angle\theta_3$ tal que $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ $\Rightarrow$ $z_1 = z_2 \cdot z_3$

Portanto: $\rho_1 = \rho_2 \cdot \rho_3$ $\Rightarrow$ $\rho_3 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ e $\theta_1 = \theta_2 + \theta_3$ $\Rightarrow$ $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$

Assim: $$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \angle(\theta_1 - \theta_2)$$

Conclusão: na divisão na forma polar, dividem-se os módulos e subtraem-se os ângulos.

Exemplo 1: Dados $z_1 = 10 + 10\sqrt{3}\,i = 20\angle 60^o$ e $z_2 = \sqrt{3} + i = 2\angle 30^o$, determinar z_1 / z_2.

Solução: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{20\angle 60^o}{2\angle 30^o} = \dfrac{20}{2}\angle\left(60^o - 30^o\right) \Rightarrow \boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = 10\angle 30^o}$

$$\frac{z_1}{z_2} = 10\left(\cos 30^o + i\,\text{sen}\,30^o\right) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2} = 5\sqrt{3} + 5i}$$

Exemplo 2: Calcular o inverso de i.

Solução:

$$\frac{1}{i} = \frac{1\angle 0^o}{1\angle 90^o} = \frac{1}{1}\angle\left(0^o - 90^o\right) = 1\angle -90^o = -i$$

Portanto: $\boxed{\dfrac{1}{i} = -i}$

Potências naturais de um número complexo:

Seja o número complexo: $z = a + b\,i = \rho\left(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta\right) = \rho\angle\theta$

n = 2: $z^2 = z \cdot z = \left(\rho\angle\theta\right)\cdot\left(\rho\angle\theta\right) = \rho^2\angle 2\theta = \rho^2\left[\cos\left(2\theta\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(2\theta\right)\right]$

n = 3: $z^3 = z^2 \cdot z = \left(\rho^2\angle 2\theta\right)\cdot\left(\rho\angle\theta\right) = \rho^3\angle 3\theta = \rho^3\left[\cos\left(3\theta\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(3\theta\right)\right]$

n = 4: $z^4 = z^3 \cdot z = \left(\rho^3\angle 3\theta\right)\cdot\left(\rho\angle\theta\right) = \rho^4\angle 4\theta = \rho^4\left[\cos\left(4\theta\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(4\theta\right)\right]$ **...**

Portanto: $z^n = \rho^n\angle n\theta = \rho^n\left[\cos\left(n\theta\right) + i \cdot \operatorname{sen}\left(n\theta\right)\right]$ **(Primeira Fórmula de Moivre)**

Prof. Walter P. Carpes Jr. - UFSC

Exemplo: Dado $z = \sqrt{3} + i = 2\angle 30^o$, determinar z^2, z^3, z^6 e z^{25}.

Solução: $z^2 = 2^2\angle(2\cdot 30^o) \;=\; 4\angle 60^o \;=\; 4(\cos 60^o + i\,\mathrm{sen}\,60^o)$

$$z^2 = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad \boxed{z^2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i}$$

$$z^3 = 2^3\angle(3\cdot 30^o) \;=\; 8\angle 90^o \;=\; 8(\cos 90^o + i\,\mathrm{sen}\,90^o) \quad\Rightarrow\quad \boxed{z^3 = 8i}$$

$$z^6 = 2^6\angle(6\cdot 30^o) \;=\; 64\angle 180^o \;=\; 64(\cos 180^o + i\,\mathrm{sen}\,180^o) \quad\Rightarrow\quad \boxed{z^6 = -64}$$

$$z^{25} = 2^{25}\angle(25\cdot 30^o) = 2^{25}\angle 750^o = 2^{25}\angle 30^o$$

$$\begin{array}{r|l} 750 & 360 \\ \hline \boxed{30} & 2 \end{array}$$

$$z^{25} = 2^{25}(\cos 30^o + i\,\mathrm{sen}\,30^o) \;=\; 2^{25}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z^{25} = 2^{24}\sqrt{3} + 2^{24}\,i}$$

ângulo	0°	30°	45°	60°	90°
seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cosseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tangente	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Raízes de um número complexo:

Sejam os números complexos: $z_1 = \rho_1 \angle \theta_1$ e $z = \rho \angle \theta_0$ tais que $z = (z_1)^n$

Portanto: $\rho = (\rho_1)^n \quad \Rightarrow \quad \rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$

$$\theta_0 = n\,\theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \frac{\theta_0}{n}$$

Logo: $z_1 = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \angle \frac{\theta_0}{n}$ **(RAIZ PRINCIPAL)**

Exemplo: Dado $z = 8 + 8\sqrt{3}\,i = 16\angle 60^o$, determinar a raiz quadrada principal de z.

Solução: $\sqrt[2]{z} = \sqrt{16\angle 60^o} = \sqrt{16}\angle \frac{60^o}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} = 4\angle 30^o$

$$\sqrt{z} = 4\left(\cos 30^o + i\,\mathrm{sen}\,30^o\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{z} = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$z = \rho \angle \theta_0$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \angle \frac{\theta_0}{n}$$

(RAIZ PRINCIPAL)

Entretanto, conforme já visto, se z tem argumento principal θ_0, então todos os ângulos congruentes a θ_0 são também argumentos de z:

$$\theta = \arg(z) \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \theta_0 + k \cdot 360^o$$

(k = número inteiro)

Assim:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho \angle \theta_0} = \sqrt[n]{\rho} \angle \left(\frac{\theta_0}{n} + k \cdot \frac{360^o}{n} \right)$$

(SEGUNDA FÓRMULA DE MOIVRE)

$$k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Exemplo 1: Obter todas as soluções da equação $x^3 + 8 = 0$.

Solução: $x = \sqrt[3]{-8} \quad = \sqrt[n]{z}$ com $n = 3$ e $z = 8\angle 180°$ $\begin{cases} \rho = 8 \\ \theta_0 = 180° \end{cases}$

$$x = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho\angle\theta_0} = \sqrt[n]{\rho}\angle\left(\frac{\theta_0}{n} + k\cdot\frac{360^o}{n}\right)$$

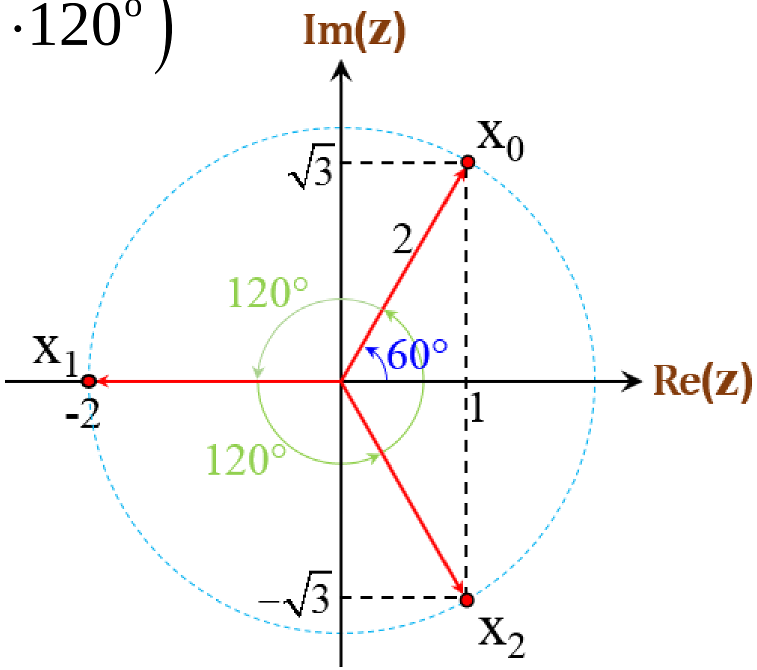
$k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$x = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8\angle 180^o} = \sqrt[3]{8}\angle\left(\frac{180^o}{3} + k\cdot\frac{360^o}{3}\right) = 2\angle\left(60^o + k\cdot 120^o\right)$$

$k = 0$: $\quad x_0 = 2\angle\left(60^o + 0\cdot 120^o\right) \Rightarrow x_0 = 2\angle 60^0$

$k = 1$: $\quad x_1 = 2\angle\left(60^o + 1\cdot 120^o\right) \Rightarrow x_1 = 2\angle 180^o = -2$

$k = 2$: $\quad x_2 = 2\angle\left(60^o + 2\cdot 120^o\right) \Rightarrow x_2 = 2\angle 300^o$



Exemplo 2: Obter todas as soluções da equação $x^6 - 1 = 0$.

Solução: $x = \sqrt[6]{1} = \sqrt[n]{z}$ com $n = 6$ e $z = 1\angle 0°$ $\begin{cases} \rho = 1 \\ \theta_0 = 0° \end{cases}$

$$x = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho\angle\theta_0} = \sqrt[n]{\rho}\ \angle\left(\frac{\theta_0}{n} + k\cdot\frac{360^o}{n}\right)$$

$k = 0, 1, ..., n-1$

$$x = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1\angle 0^o} = \sqrt[6]{1}\ \angle\left(\frac{0^o}{6} + k\cdot\frac{360^o}{6}\right) = 1\angle\left(k\cdot 60^o\right)$$

$k = 0$: $x_0 = 1\angle\left(0\cdot 60^o\right) \Rightarrow x_0 = 1\angle 0^0 = 1$

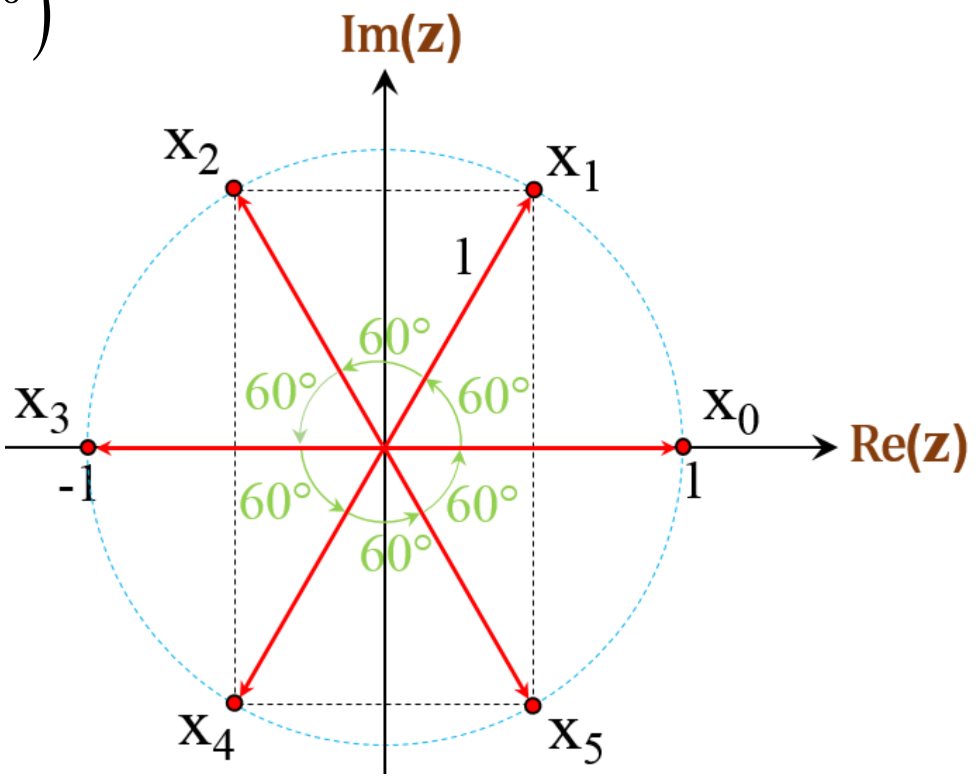
$k = 1$: $x_1 = 1\angle\left(1\cdot 60^o\right) \Rightarrow x_1 = 1\angle 60^0$

$k = 2$: $x_2 = 1\angle\left(2\cdot 60^o\right) \Rightarrow x_2 = 1\angle 120^0$

$k = 3$: $x_3 = 1\angle\left(3\cdot 60^o\right) \Rightarrow x_3 = 1\angle 180^0 = -1$

$k = 4$: $x_4 = 1\angle\left(4\cdot 60^o\right) \Rightarrow x_4 = 1\angle 240^0$

$k = 5$: $x_5 = 1\angle\left(5\cdot 60^o\right) \Rightarrow x_5 = 1\angle 300^0$



NÚMEROS COMPLEXOS

TÓPICOS SUPLEMENTARES

Representação de Subconjuntos de $\mathbb{C}$ no Plano Complexo:

Exemplo 1: Representar os seguintes conjuntos no plano complexo.

a) $A = \{z \in \mathbb{C};\ \text{Re}(z) = 1\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C};\ \text{Im}(z) = -2\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C};\ \theta = 45°\}$

d) $D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 3\}$

e) $E = \{z \in \mathbb{C};\ |z - 1| = 2\}$

Solução: $z = x + yi = |z|\angle\theta$

a) $x = 1$

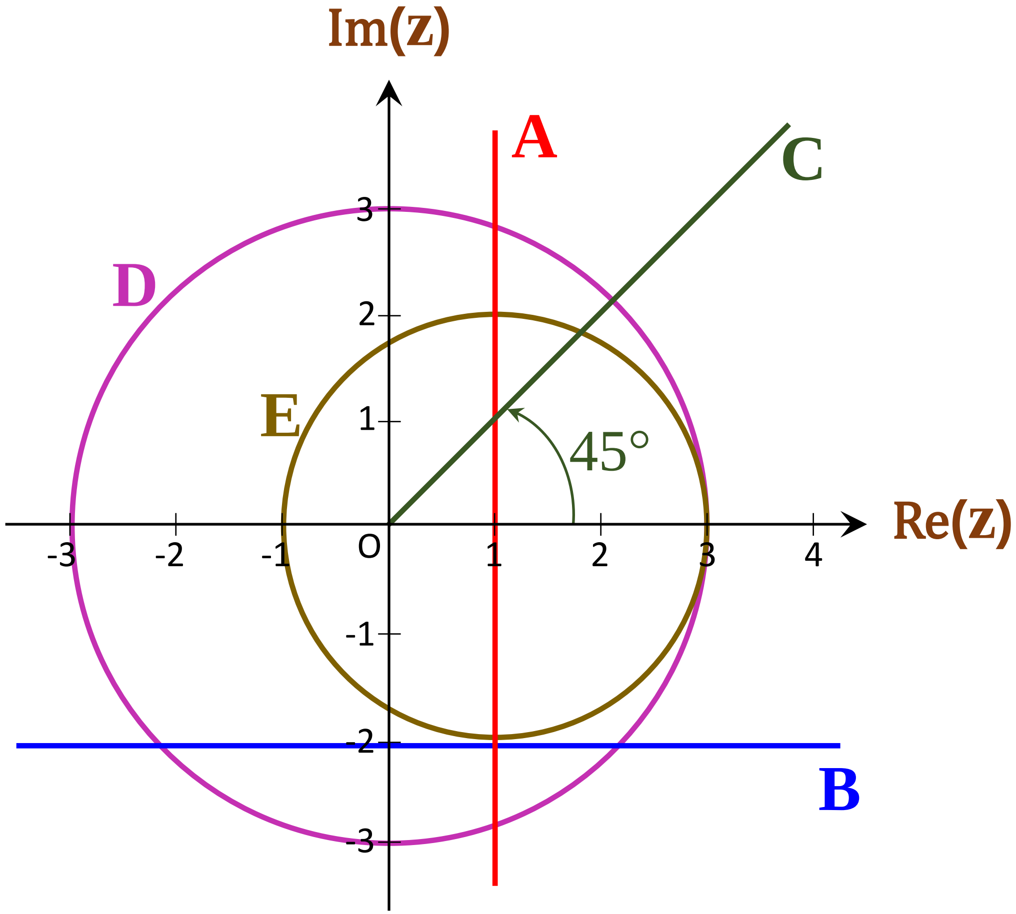
b) $y = -2$

c) $\theta = 45°$

d) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 3^2$

e) $z - 1 = (x - 1) + yi$

$|z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = 2^2$



Exemplo 2: Representar os seguintes conjuntos no plano complexo.

a) $\mathbf{A} = \{z \in \mathbb{C};\ 1 \leq \mathrm{Re}(z) < 3\}$

b) $\mathbf{B} = \{z \in \mathbb{C};\ |z+1| \leq 2\}$

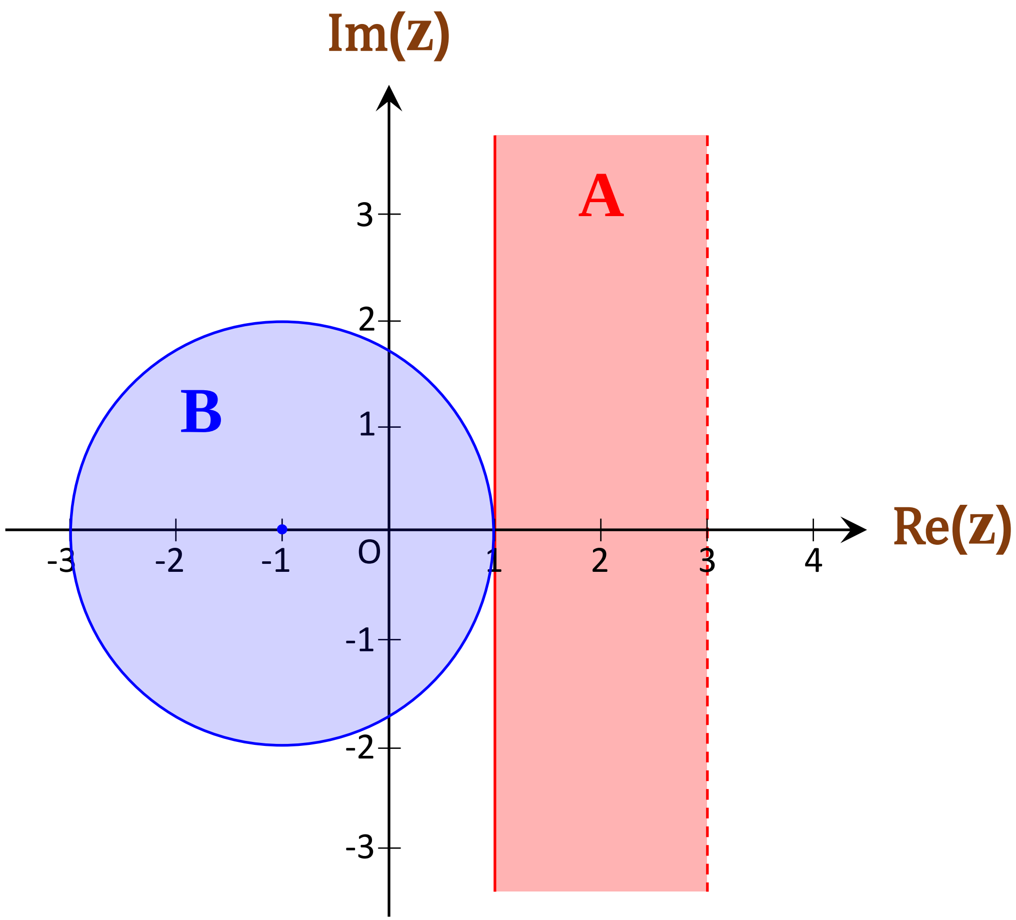
Solução: $z = x + yi = |z|\angle\theta$

a) $1 \leq x < 3$

b) $z + 1 = (x+1) + yi$

$$|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \leq 2$$

$$(x+1)^2 + y^2 \leq 2^2$$

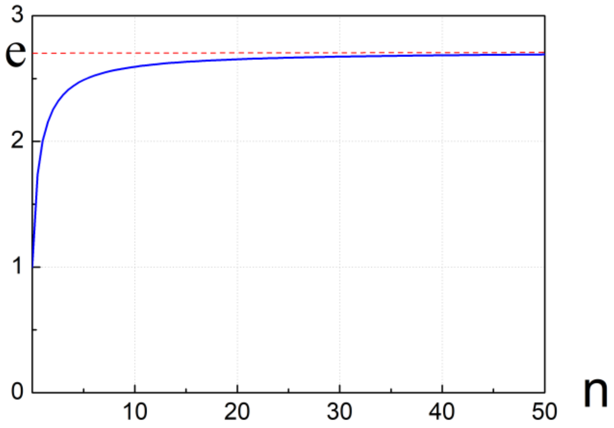


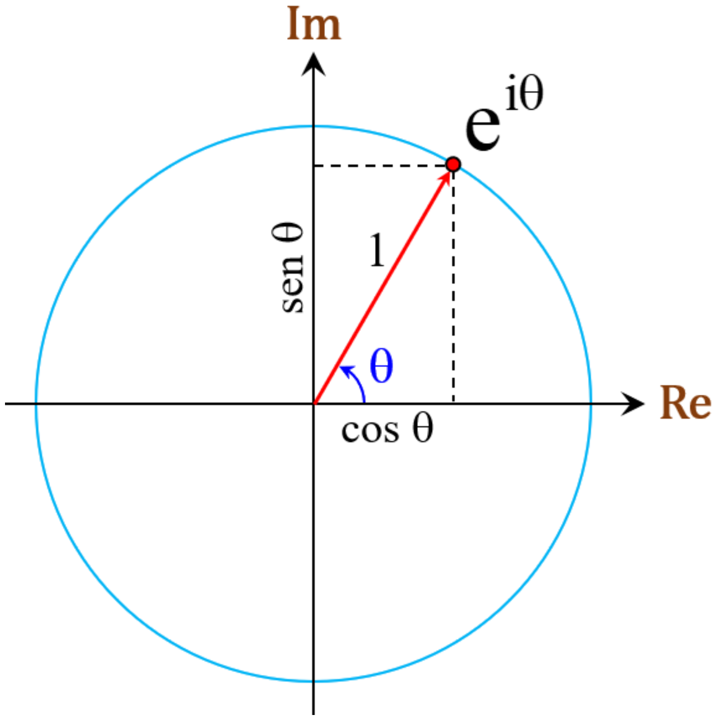
A Fórmula de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e = número de Euler (base dos logaritmos naturais) = 2,718281828459045235360287471352662497...

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$





Tem-se que:

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}\right\} = \cos\theta$$

$$\mathrm{Im}\left\{e^{i\theta}\right\} = \mathrm{sen}\,\theta$$

$$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\mathrm{sen}\,\theta)^2} \quad\Rightarrow\quad \left|e^{i\theta}\right| = 1$$

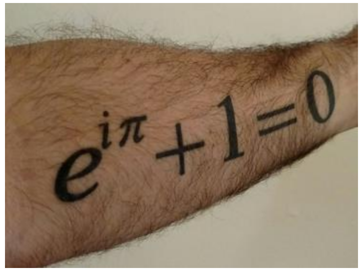
A Identidade de Euler:

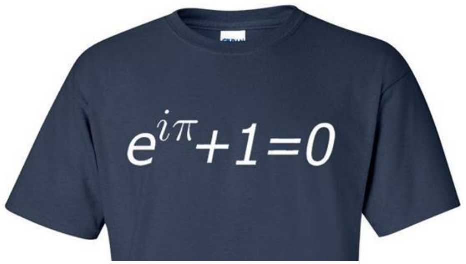
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$ (Fórmula de Euler)

Para $\theta = \pi$: $$e^{i\pi} = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi$$

$$e^{i\pi} = -1 + i\cdot 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

"A fórmula mais notável da matemática" (Richard Feynman)





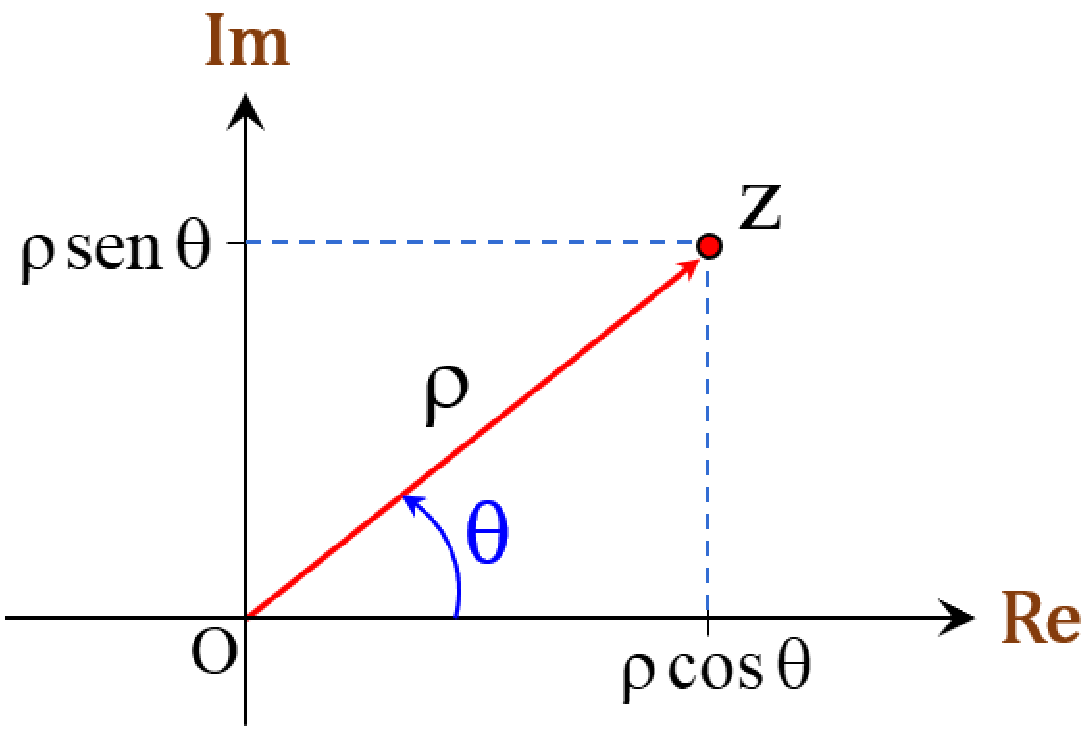
Número complexo na forma polar:

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad \text{com} \quad \begin{cases} \rho = |z| \\ \theta = \arg(z) \end{cases}$$

Como: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

Portanto: $\boxed{z = \rho e^{i\theta}}$

Notação simplificada: $z = \rho\angle\theta$



Exemplos:

a) $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i \;=\; 4\angle 60^o \;=\; 4\,e^{i60^o} \;=\; 4\,e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $z_2 = -2 + 2\,i \;=\; 2\sqrt{2}\angle 135^o \;=\; 2\sqrt{2}\,e^{i135^o} \;=\; 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

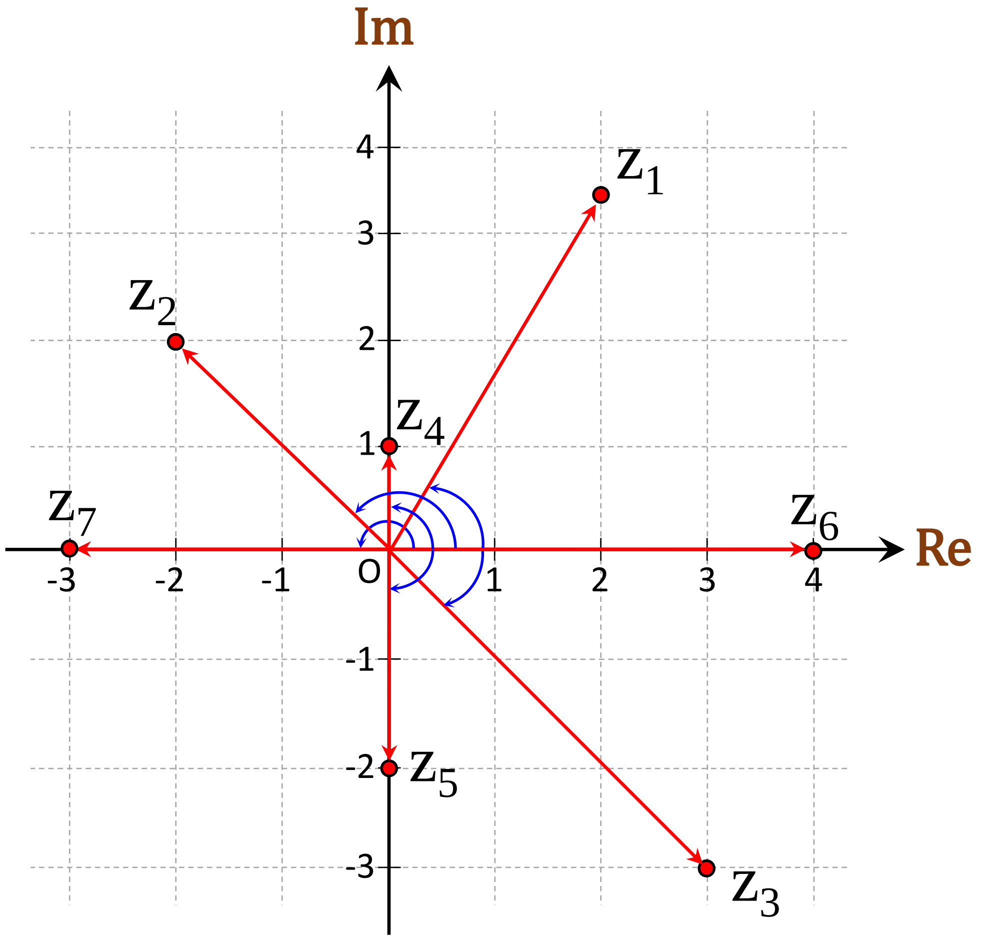
c) $z_3 = 3 - 3i \;=\; 3\sqrt{2}\angle -45^o \;=\; 3\sqrt{2}\,e^{-i45^o} \;=\; 3\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$

d) $z_4 = i \;=\; 1\angle 90^o \;=\; e^{i90^o} \;=\; e^{i\frac{\pi}{2}}$

e) $z_5 = -2i \;=\; 2\angle -90^o \;=\; 2\,e^{-i90^o} \;=\; 2\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$

f) $z_6 = 4 \;=\; 4\angle 0^o \;=\; 4\,e^{i0}$

g) $z_7 = -3 \;=\; 3\angle 180^o \;=\; 3\,e^{i180^o} \;=\; 3\,e^{i\pi}$



Complexo conjugado de $e^{i\theta}$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Trocando o sinal do ângulo, tem-se:

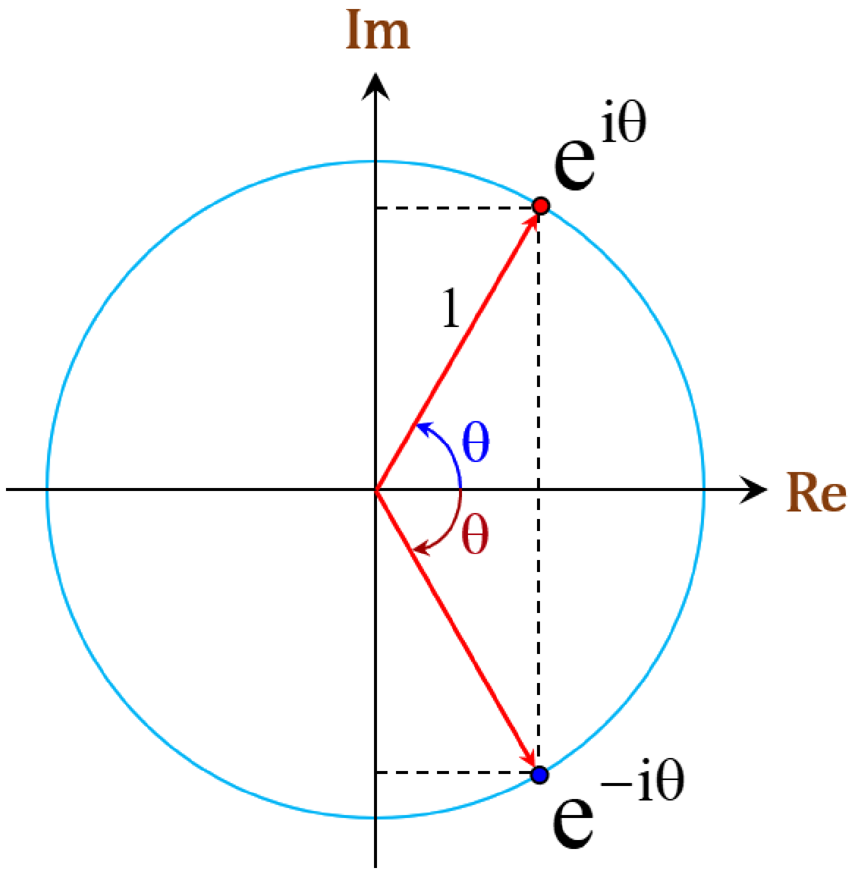
$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)$$

Assim:

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Portanto:

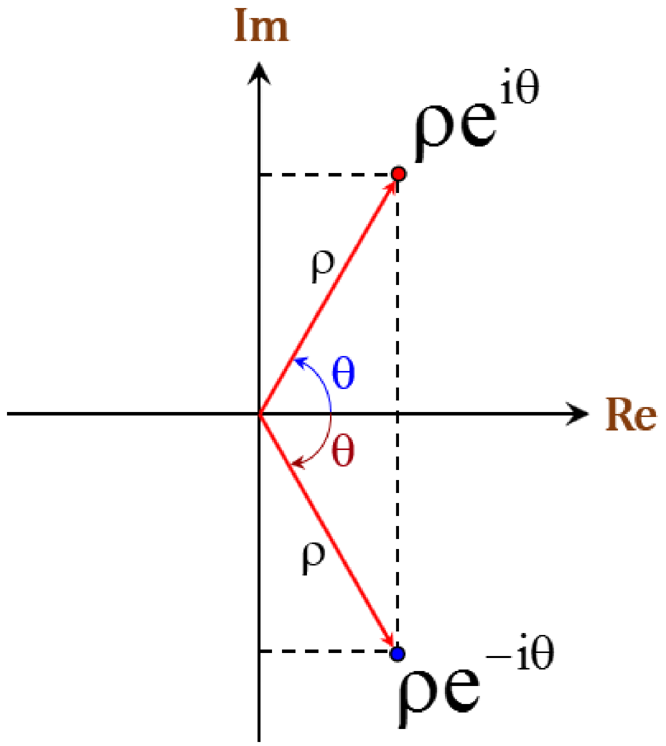
$$\left(e^{i\theta}\right)^{*} = e^{-i\theta}$$



Complexo conjugado na forma polar:

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \rho e^{i\theta} = \rho\angle\theta$$

$$z^* = \rho(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \rho e^{-i\theta} = \rho\angle -\theta$$



Exemplos:

a) $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z_1^* = 2 - 2\sqrt{3}\,i = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$

b) $z_2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z_2^* = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Multiplicação e divisão na forma polar:

Sejam os números complexos: $z_1 = \rho_1\, e^{i\alpha} = \rho_1 \angle \alpha$

e $z_2 = \rho_2\, e^{i\beta} = \rho_2 \angle \beta$

Multiplicação:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\rho_1\, e^{i\alpha}\right)\left(\rho_2\, e^{i\beta}\right) = \rho_1 \rho_2 e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 \angle(\alpha + \beta)$$

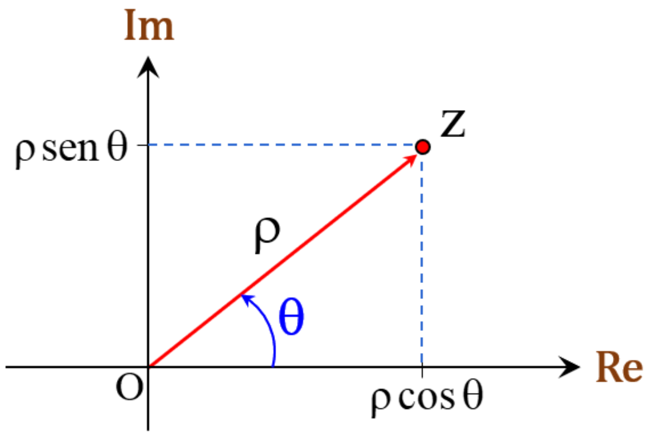
Divisão:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\, e^{i\alpha}}{\rho_2\, e^{i\beta}} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{i(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \angle(\alpha - \beta)$$

Potência de um número complexo:

Seja o número complexo: $z = \rho e^{i\theta} = \rho \angle \theta$



Portanto: $z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}$ $\qquad z^n = \rho^n \angle n\theta$

Exemplo 1: Dado $z = \sqrt{3} + i = 2\angle 30^o$, determinar z^3 e z^π.

Solução: $z = 2e^{i30^o} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$z^3 = \left(2\,e^{i30^o}\right)^3 = 2^3 e^{i3\cdot 30^o} = 8\,e^{i90^o} = 8\,e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{z^3 = 8i}$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1$$

$$z^\pi = \left(2\,e^{i30^o}\right)^\pi = 2^\pi e^{i\pi\cdot 30^o} = 2^\pi e^{i94,25^o} = 2^\pi\, e^{i\frac{\pi^2}{6}}$$

$$z^\pi = 2^\pi\left(\cos 94,25^o + i\,\mathrm{sen}\,94,25^o\right) \Rightarrow \boxed{z^\pi \cong -0,65 + 8,8i}$$

Exemplo 2: Calcular as potências: a) 2^{2+i} b) i^i

Solução: a) $2^{2+i} = 2^2 \cdot 2^i = 4 \cdot 2^i$

É necessário escrever 2 como uma potência de e.

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$2 = e^x \quad \Rightarrow \quad \ln 2 = \ln e^x = x \cdot \ln e = x \quad \Rightarrow \quad 2 = e^{\ln 2}$$

Portanto: $2^i = \left(e^{\ln 2}\right)^i = e^{i \ln 2} = \cos(\ln 2) + i\,\mathrm{sen}(\ln 2) = \cos(0{,}693) + i\,\mathrm{sen}(0{,}693)$

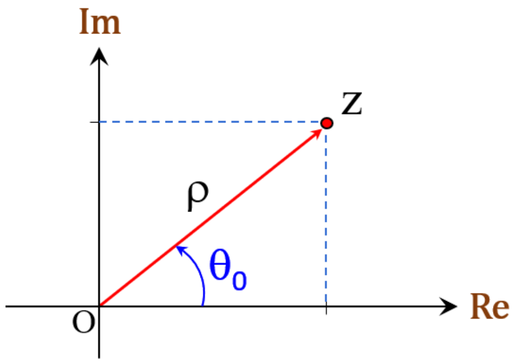
Atenção: 0,693 é um número real adimensional = 0,693 rad $0{,}693\ \text{rad} \cong 39{,}7°$

Assim: $2^{2+i} = 4 \cdot 2^i = 4\left(\cos 39{,}7° + i\,\mathrm{sen}\,39{,}7°\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{2^{2+i} \cong 3{,}08 + 2{,}56i = 4\angle 39{,}7°}$

b) i^i com $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Portanto: $i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \cong 0{,}208}$

Raízes de um número complexo:



Seja o número complexo: $$z = \rho\, e^{i\theta_0} = \rho \angle \theta_0$$

Considerando também os argumentos congruentes a θ_0:

$$z = \rho\, e^{i(\theta_0 + k\cdot 2\pi)} = \rho \angle (\theta_0 + k\cdot 2\pi)$$

$$e^{i(\theta_0 + k\cdot 2\pi)} = e^{i\theta_0}\cdot e^{i2k\pi} = e^{i\theta_0}\left(\cos 2k\pi + i\,\mathrm{sen}\, 2k\pi\right) = e^{i\theta_0}\left(1 + i\cdot 0\right) = e^{i\theta_0}$$

Portanto: $$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \left[\rho\, e^{i(\theta_0 + k\cdot 2\pi)}\right]^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, \angle \left(\frac{\theta_0}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

Raiz principal $(k = 0)$**:** $$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta_0}{n}\right)} = \sqrt[n]{\rho}\, \angle \frac{\theta_0}{n}$$

Exemplo : Obter todas as raízes de quarta ordem de i. $z^4 = i$

Solução: $i = e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)}$ $\rho = 1$ $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

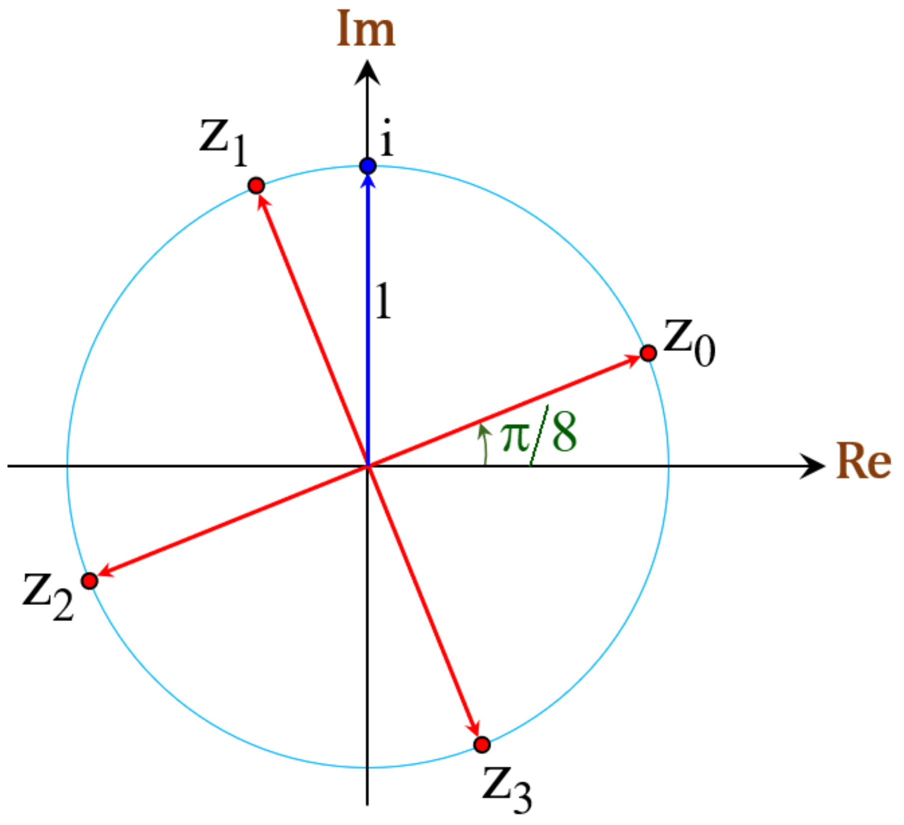
$$\sqrt[4]{i} = i^{\frac{1}{4}} = \left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi\right)}\right]^{\frac{1}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\cdot\frac{2\pi}{4}\right)}$$

$k = 0$: $z_0 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+0\cdot\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{8}\right)} \Rightarrow \boxed{z_0 = 1\angle \pi/8}$

$k = 1$: $z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+1\cdot\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{5\pi}{8}\right)} \Rightarrow \boxed{z_1 = 1\angle 5\pi/8}$

$k = 2$: $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+2\cdot\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{9\pi}{8}\right)} \Rightarrow \boxed{z_2 = 1\angle 9\pi/8}$

$k = 3$: $z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{8}+3\cdot\frac{2\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{13\pi}{8}\right)} \Rightarrow \boxed{z_3 = 1\angle 13\pi/8}$



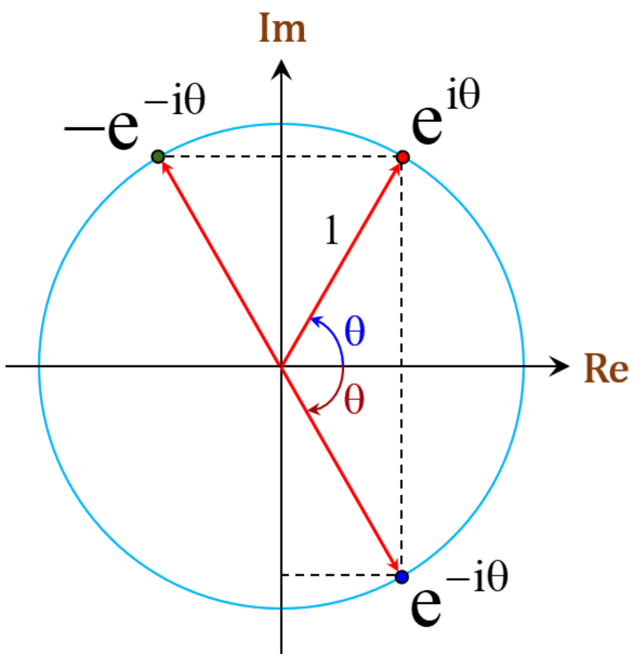
Funções trigonométricas escritas como exponenciais complexas:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \qquad (1)$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \qquad (2)$$

Fazendo (1) + (2): $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Fazendo (1) - (2): $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\,\text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$



Exemplo: Calcular cos(i).

Solução: $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(i) = \dfrac{e^{i\cdot i} + e^{-i\cdot i}}{2} = \dfrac{e^{-1} + e^{1}}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(i) \cong 1{,}543$

Logaritmo complexo:

Seja o número complexo: $$z = \rho\, e^{i\theta_0} = \rho \angle \theta_0$$

Considerando também os argumentos congruentes a θ_0:

$$z = \rho\, e^{i(\theta_0 + k\cdot 2\pi)} = \rho \angle \left(\theta_0 + k\cdot 2\pi\right)$$

O logaritmo natural de z é dado por:

$$\ln z = \ln\left[\rho\, e^{i(\theta_0 + k\cdot 2\pi)}\right] = \ln \rho + \ln e^{i(\theta_0 + k\cdot 2\pi)} \quad \Rightarrow \quad \ln z = \ln \rho + i\left(\theta_0 + k\cdot 2\pi\right)$$

Valor principal $(k = 0)$: $$\ln z = \ln \rho + i\,\theta_0$$

Exemplo: Calcular o valor principal do logaritmo natural de $z = 5\sqrt{3} + 5i$.

Solução: $$z = 5\sqrt{3} + 5i = 10\angle 30° = 10\, e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$\ln z = \ln\left(10\, e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \ln 10 + \ln\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln z = \ln 10 + i\,\pi/6 \cong 2{,}303 + 0{,}524i$$

Obtenção de identidades trigonométricas com a fórmula de Euler:

Sejam os números complexos: $$z_1 = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$z_2 = e^{i\beta} = \cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta$$

Produto: $$z_1 \cdot z_2 = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} = \boxed{\cos(\alpha+\beta)} + i\,\boxed{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)} \quad (1)$$

Ou também: $$z_1 \cdot z_2 = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$$

$$z_1 \cdot z_2 = \boxed{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \mathrm{sen}\,\beta} + i\,\boxed{(\mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha)} \quad (2)$$

A partir de (1) e (2):

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \mathrm{sen}\,\beta$$

$$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha$$

Se $\alpha = \beta$:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\,\alpha$$

$$\mathrm{sen}(2\alpha) = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$$

Demonstrações da fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

1 – Usando séries de potências:

Série de Taylor (em torno do ponto $x = x_0$):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

Série de Mclaurin (caso particular da Série de Taylor para $x_0 = 0$):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

- **Função exponencial:** $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots$$
- **Função seno:** $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
- **Função cosseno:** $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$i^2 = -1 \qquad i^5 = i$$

$$i^3 = -i \qquad i^6 = -1$$

$$i^4 = 1 \qquad i^7 = -i$$

Fazendo $x = i\theta$ na função exponencial:

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \frac{i^7\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

2 – Usando diferenciação:

Seja a função: $f(\theta) = e^{-i\theta}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

Derivando em relação a θ (usando a regra do produto): $(uv)' = u'v + uv'$

$$f'(\theta) = \left(e^{-i\theta}\right)'(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) + \left(e^{-i\theta}\right)(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)'$$

$$f'(\theta) = \left(-ie^{-i\theta}\right)(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) + \left(e^{-i\theta}\right)(-\mathrm{sen}\,\theta + i\cos\theta)$$

$$-i^2 = +1$$

$$f'(\theta) = \cancel{-ie^{-i\theta}\cos\theta} \cancel{- i^2e^{-i\theta}\mathrm{sen}\theta} \cancel{- e^{-i\theta}\mathrm{sen}\theta} \cancel{+ ie^{-i\theta}\cos\theta} \Rightarrow f'(\theta) = 0 \Rightarrow f(\theta) = \text{constante}$$

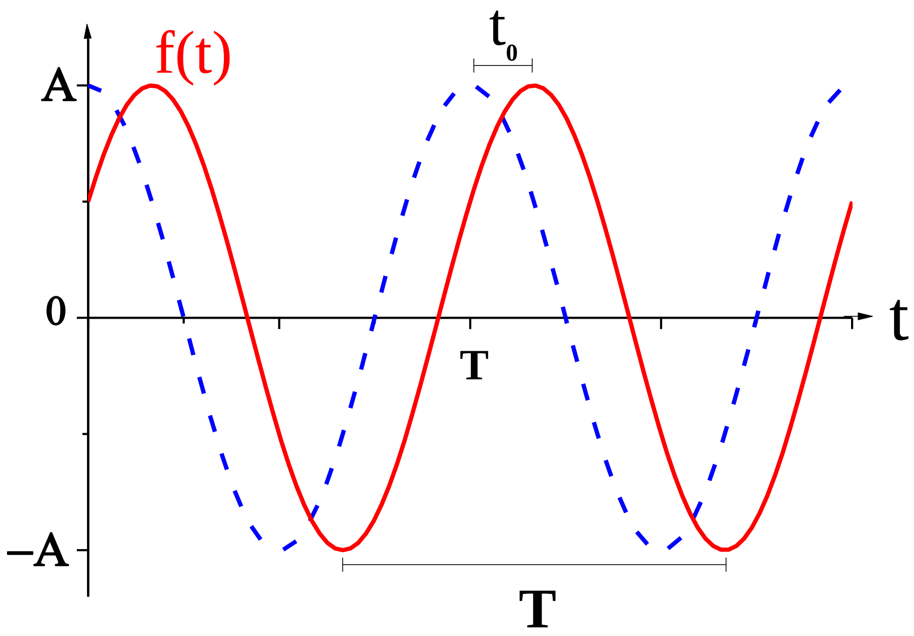
Para θ = 0, tem-se: $f(0) = e^0(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0) = 1$

Assim: $e^{-i\theta}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = 1 \Rightarrow \cancel{e^{i\theta}e^{-i\theta}}(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = e^{i\theta} \Rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

Fasores

Definição: fasor é um número complexo que representa um sinal com variação cossenoidal no tempo.

Seja $f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$



A = **amplitude** (valor máximo ou valor de pico)

T = **período**: tempo correspondente a um ciclo completo

f = **frequência**: número de ciclos por segundo

$1\ Hz$ = 1 ciclo por segundo.

$$f = \frac{1}{T}$$

ω = **frequência angular**: variação da fase por unidade de tempo

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (rad/s)$$

ϕ = **fase**: associada ao deslocamento horizontal do sinal (atraso t_0)

$$\phi = -\omega t_0$$

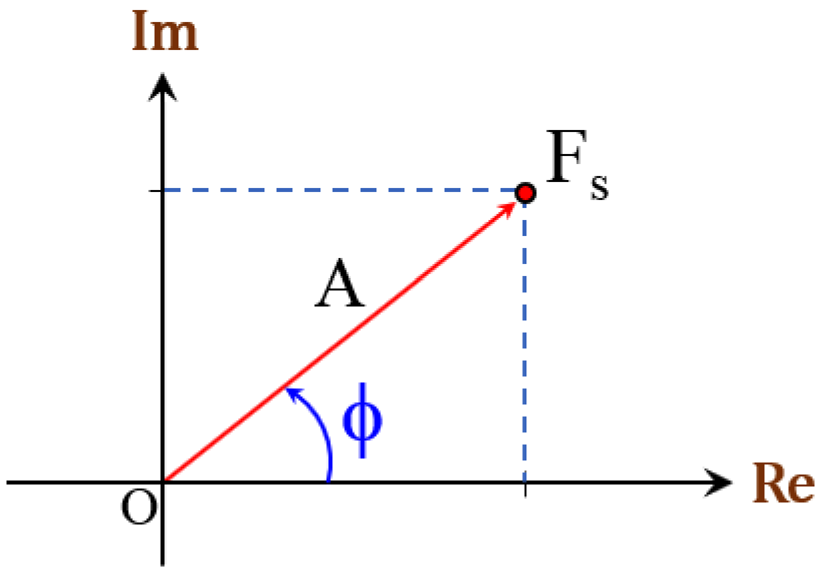
$$f(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$f(t) = \mathcal{Re}\{A\cos(\omega t + \phi) + jA\,\text{sen}(\omega t + \phi)\}$$

$$j = i = \sqrt{-1}$$

Mas $e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta$

Logo: $f(t) = \mathcal{Re}\left\{A\,e^{j(\omega t + \phi)}\right\} = \mathcal{Re}\left\{\boxed{Ae^{j\phi}}\,e^{j\omega t}\right\}$



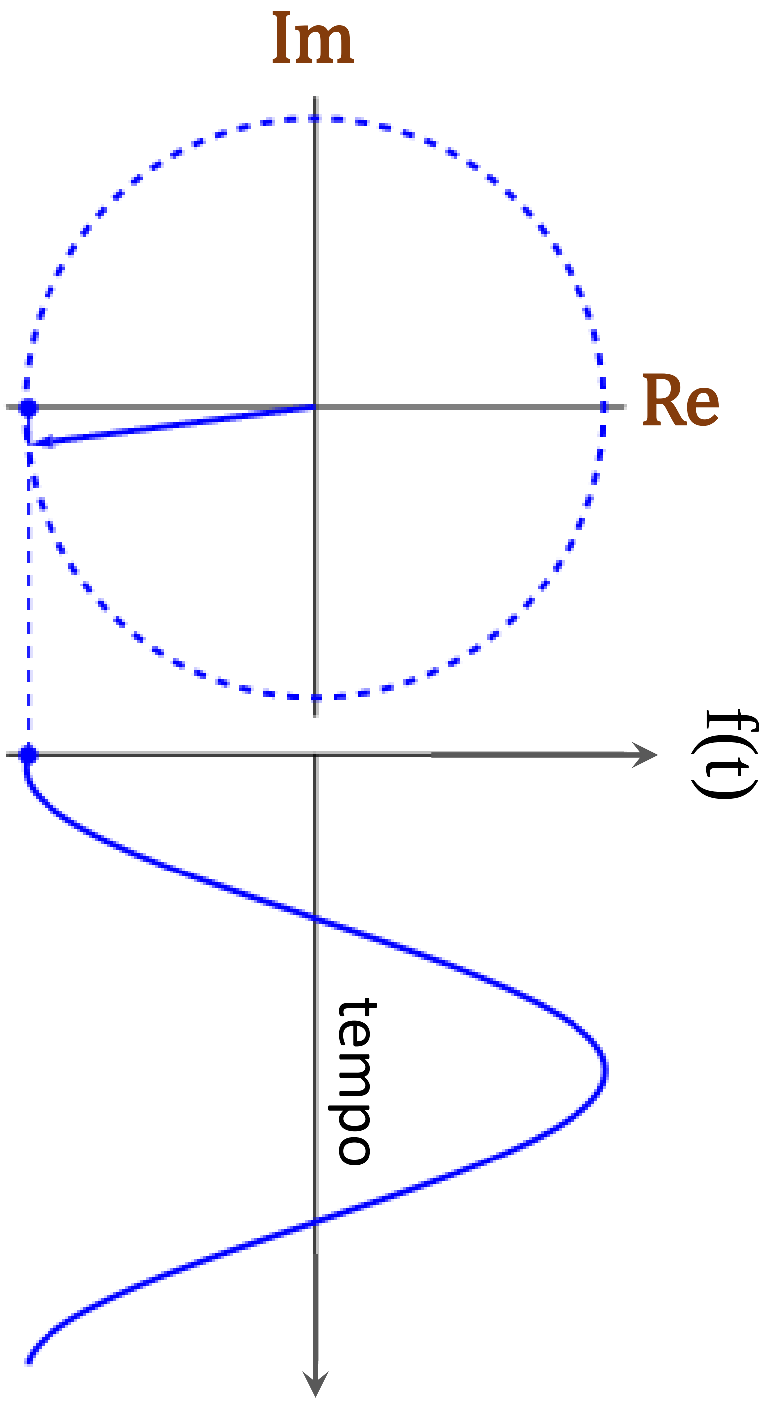
Fasor: $F_s = Ae^{j\phi} = A\angle\phi$

Assim: $f(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \leftrightarrow \quad F_s = Ae^{j\phi} = A\angle\phi$

(sinal no tempo) (fasor correspondente)

$$f(t) = \mathcal{R}e\left\{Ae^{j\phi}\, e^{j\omega t}\right\}$$

Visualização:



- O fasor é a representação de $f(t)$ no **domínio da frequência**.

- O sinal no tempo pode ser obtido a partir do fasor fazendo a operação inversa, ou seja, multiplicando o fasor por $e^{j\omega t}$ e tomando a parte real:

$$f(t) = \mathcal{Re}\left\{F_s e^{j\omega t}\right\}$$

Exemplos:

1) $f(t) = 10\cos(\omega t + \pi/3)$ $\leftrightarrow$ $F_s = 10e^{j\frac{\pi}{3}} = 10\angle 60^{o}$

2) $E_s = 5e^{j\frac{\pi}{4}}$ $\leftrightarrow$ $E(t) = 5\cos(\omega t + \pi/4) = 5\cos(\omega t + 45^{o})$

3) $v(t) = 2\,\mathrm{sen}(\omega t)$ $=$ $2\cos(\omega t - \pi/2)$ $\leftrightarrow$ $V_s = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = 2\angle -90^{o}$

Uso de fasores na soma de sinais harmônicos:

Exemplo: Escrever o sinal $f(t) = 10 \cos \omega t + 6 \operatorname{sen} \omega t$ sob forma cossenoidal.

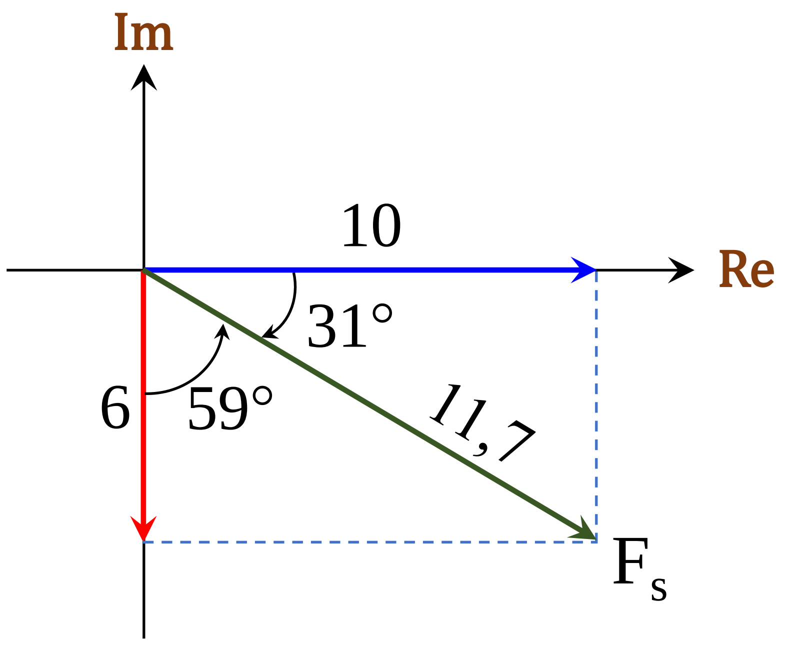
Solução: $f(t) = 10 \cos \omega t + 6 \cos(\omega t - 90°)$

Fasor correspondente: $F_s = 10\angle 0° + 6\angle -90°$

$$F_s = 10(\cos 0° + \cancel{j \operatorname{sen} 0°}) + 6[\cancel{\cos(-90°)} + j \operatorname{sen}(-90°)]$$

$$F_s = 10 - j6 = \sqrt{10^2 + 6^2} \angle -\operatorname{arctg}(6/10)$$

$$\boxed{F_s = 11{,}7\angle -31°}$$

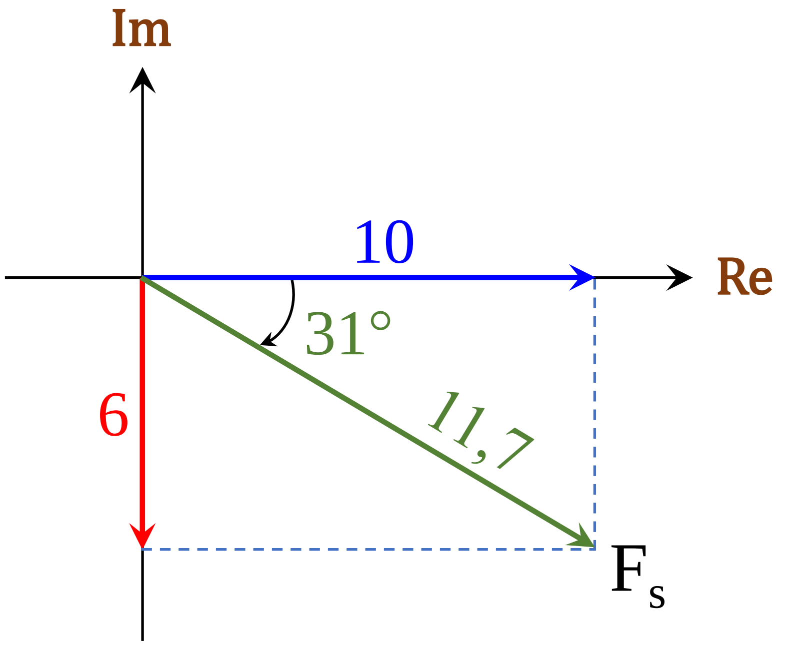


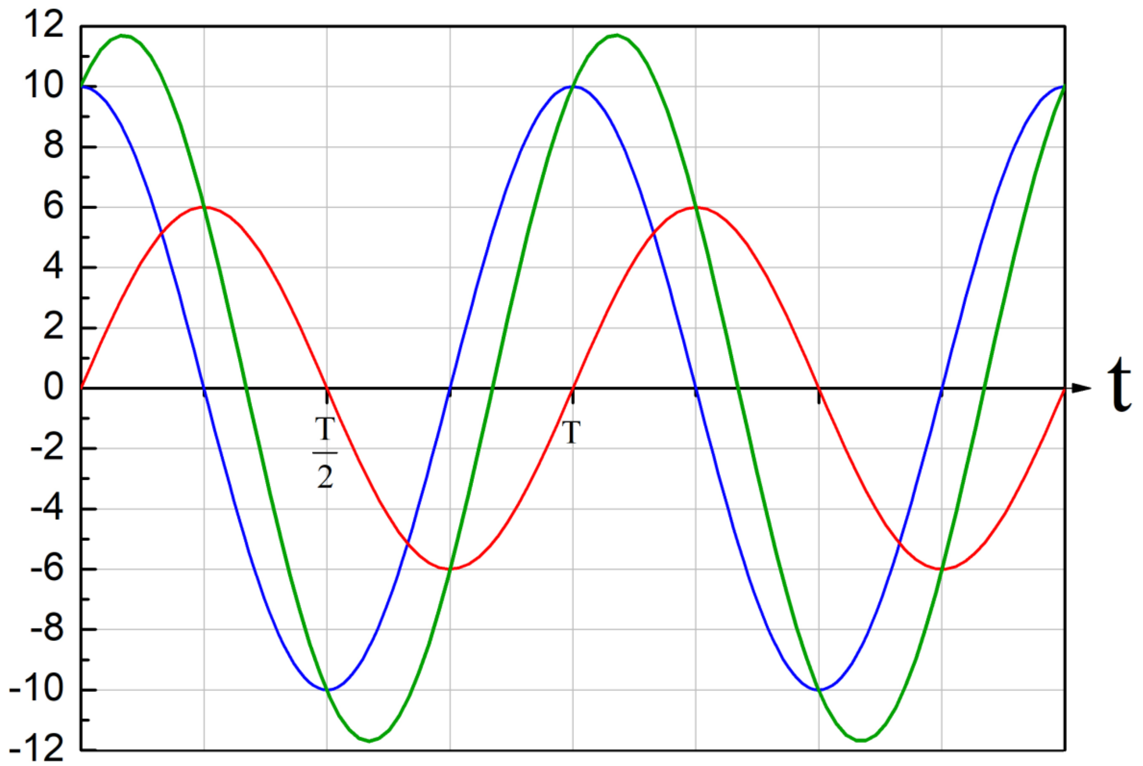
Sinal no tempo: $f(t) = 11{,}7 \cos(\omega t - 31°)$

Ou também: $f(t) = 11{,}7 \operatorname{sen}(\omega t + 59°)$

$$f(t) = 10\cos\omega t + 6\,\mathrm{sen}\,\omega t = 11{,}7\cos(\omega t - 31°)$$

$$F_s = 10\angle 0° + 6\angle{-90°} = 11{,}7\angle{-31°}$$





Derivada do sinal no tempo e fasor correspondente:

$$f(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \leftrightarrow \quad F_s = Ae^{j\phi} = A\angle\phi$$

Derivando f(t) em relação ao tempo: $$\frac{df(t)}{dt} = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \omega A\cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Fasor correspondente: $$\omega A e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)} = \omega A\, e^{j\phi}\, e^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega A e^{j\phi} = j\omega F_s$$

A derivação de um sinal no domínio do tempo corresponde a uma multiplicação por $j\omega$ no domínio da frequência.

$$\frac{df(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad j\omega F_s$$

Aplicação: obtenção da solução particular de uma equação diferencial linear com excitação senoidal

Exemplo: Resolver a EDO $$\frac{d^2f(t)}{dt^2}+3\frac{df(t)}{dt}+2f(t)=20\cos 2t$$

Solução:

- **Equação característica:** $s^2+3s+2=0$
- **Raízes:** $s_1=-1$ e $s_2=-2$
- **Solução homogênea (excitação nula):** $f_H(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}$
- **Solução particular:** $f_P(t)=K_1\cos 2t+K_2\,\text{sen}\,2t$

Deve-se substituir $f_P(t)$ na equação diferencial de modo a obter os coeficientes K_1 e K_2.

- **Solução geral:** $f(t)=f_H(t)+f_P(t)$

C_1 e C_2 são determinados usando as condições iniciais: $f(0)$ e $f'(0)$.

- **Usando fasores para obter a solução particular:**

$$\boxed{\frac{d^2f(t)}{dt^2}} + \boxed{3\frac{df(t)}{dt}} + \boxed{2f(t)} = \boxed{20\cos 2t}$$

$$f_P(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \leftrightarrow \quad F_P = Ae^{j\phi} = A\angle\phi$$

com $\omega = 2\,\text{rad/s}$

- **Fasores correspondentes a cada termo da EDO:**

$$\boxed{(j\omega)^2 F_P} + \boxed{3\,j\omega F_P} + \boxed{2F_P} = \boxed{20\angle 0°}$$

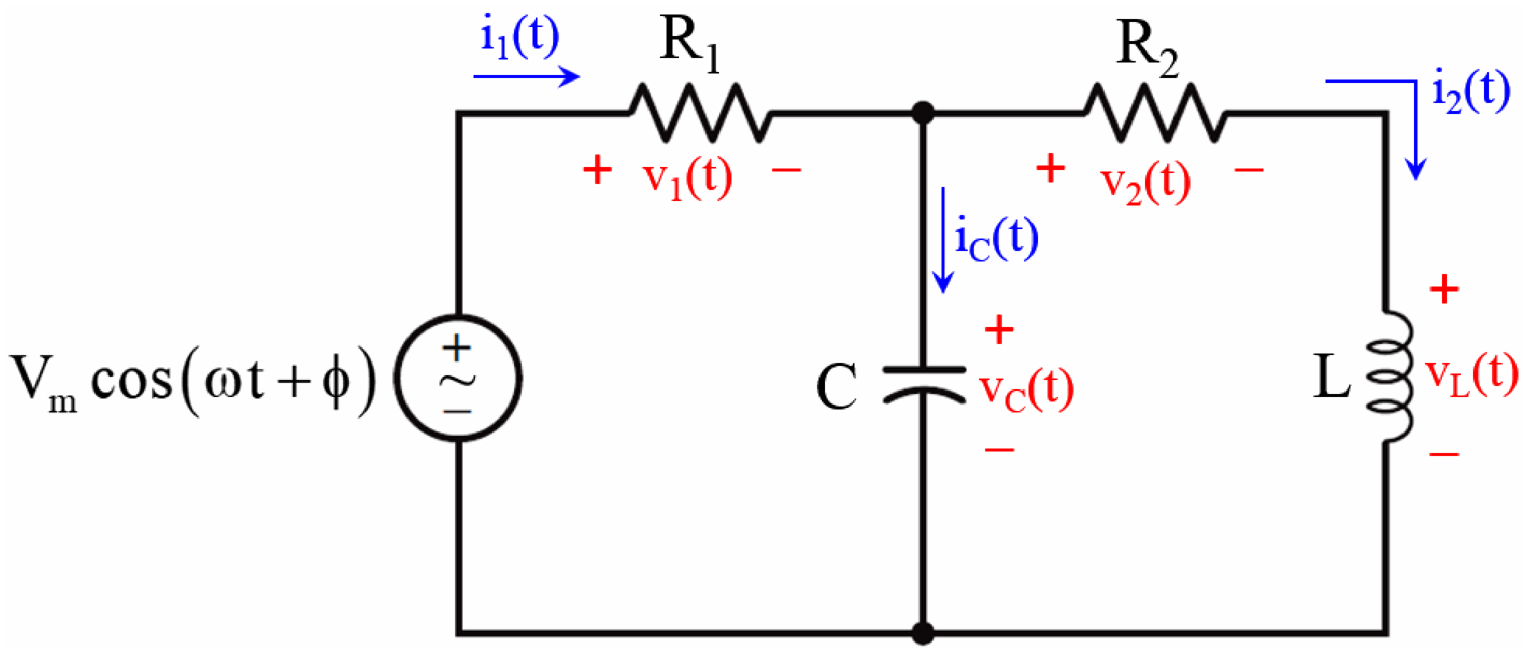
Para ω = 2 rad/s: $F_P(-4 + j6 + 2) = 20\angle 0°$ $\Rightarrow$ $F_P = \dfrac{20\angle 0°}{-2 + j6} = \dfrac{20\angle 0°}{2\sqrt{10}\angle 108,4°}$

$$F_P = \sqrt{10}\angle -108,4° \quad \Rightarrow \quad f_P(t) = \sqrt{10}\cos(2t - 108,4°)$$

Uso de fasores na análise de circuitos AC:

- A análise consiste em obter a resposta em regime permanente de um circuito elétrico excitado por fonte(s) de corrente alternada.
- Isso corresponde a obter a solução particular da equação diferencial linear com excitação senoidal que descreve o circuito.

Exemplo:

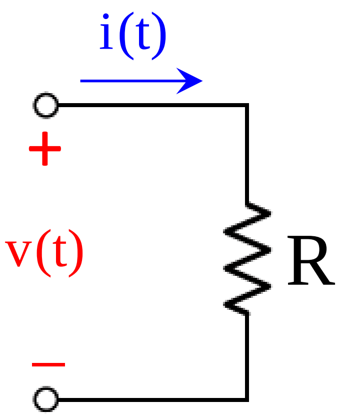


Num circuito linear excitado com fonte AC, todas as tensões e correntes, em regime permanente, são também AC.

Relações tensão × corrente nos elementos passivos:

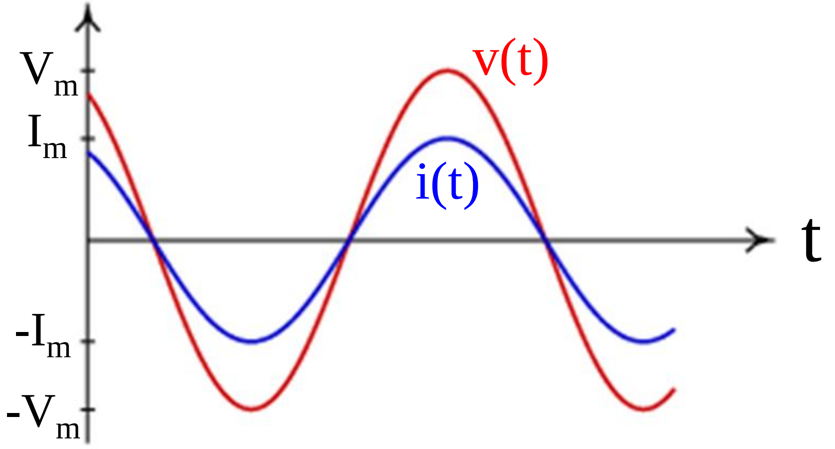
1 – Resistor:

$$v(t) = R\, i(t) \quad (1)$$

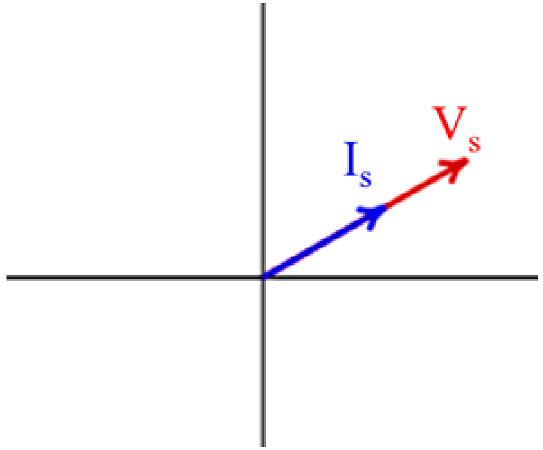


Para $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \quad v(t) = R\, I_m \cos(\omega t + \phi)$$



No resistor: tensão e corrente estão em fase.



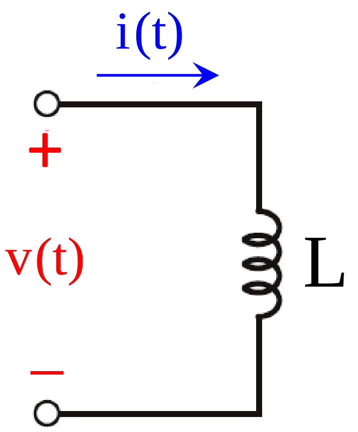
Relação fasorial correspondente à equação (1):

$$\left.\begin{array}{l} v(t) \leftrightarrow V_s \\ i(t) \leftrightarrow I_s \end{array}\right\} \quad V_s = R\, I_s$$

2 – Indutor:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad (2)$$

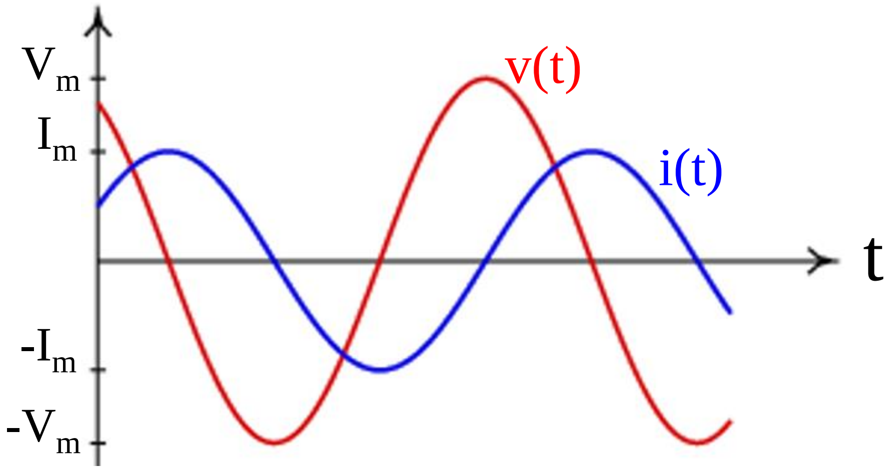
$$\Phi_B = L \cdot i$$



Para $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \quad v(t) = -L\,\omega\, I_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

ou $v(t) = \omega L\, I_m \cos(\omega t + \phi + 90°)$

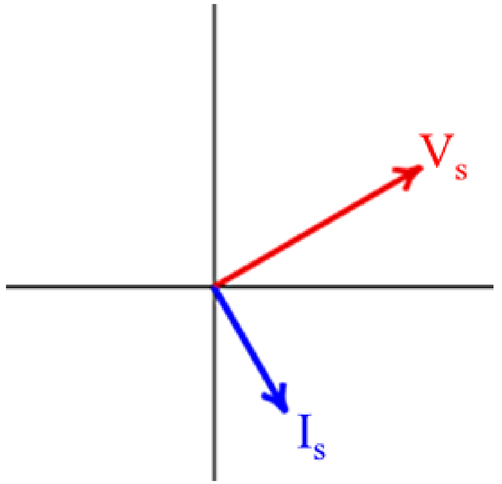


No indutor: a tensão está adiantada de 90° em relação à corrente.

Relação fasorial correspondente à equação (2):

$$V_s = L\, j\omega I_s \quad \Rightarrow \quad V_s = j\omega L\, I_s$$

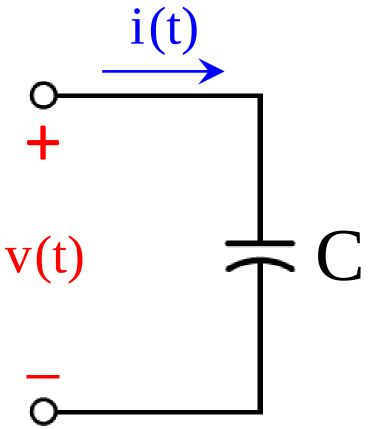
$$j = 1\angle 90°$$



3 – Capacitor:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \quad (3)$$

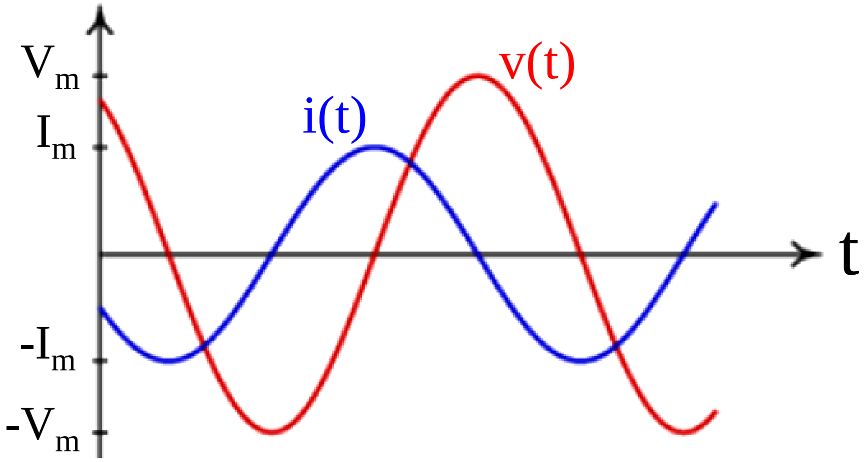
$$q = C \cdot v$$



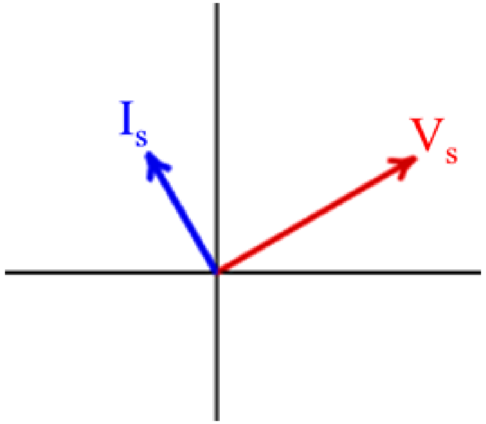
Para $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \quad i(t) = -C\,\omega V_m \mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$

ou $i(t) = \omega C\, V_m \cos(\omega t + \phi + 90°)$



No capacitor: a corrente está adiantada de 90° em relação à tensão.



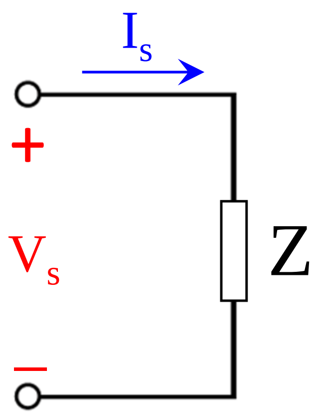
Relação fasorial correspondente à equação (3):

$$I_s = C\, j\omega V_s \quad \Rightarrow \quad V_s = \frac{1}{j\omega C} I_s$$

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{1\angle 90°} = 1\angle -90° = -j$$

Impedância (Z):

Definição: relação entre o fasor tensão e o fasor corrente num elemento.



$$Z = \frac{V_s}{I_s}$$

$$V_s = Z I_s$$

$$I_s = \frac{V_s}{Z}$$

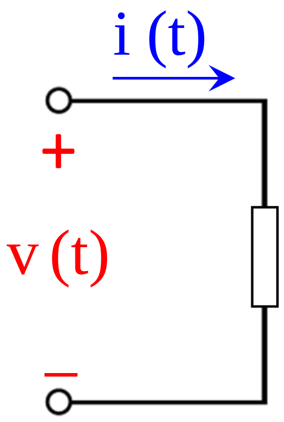
Unidade: ohm (Ω)

A impedância é um grandeza complexa: $Z = |Z| \angle \theta_z$

- **módulo:** $|Z| = \dfrac{V_m}{I_m}$ = razão entre as magnitudes de tensão e corrente no elemento

- **ângulo:** $\theta_z = \theta_v - \theta_i$ = defasagem da corrente em relação à tensão no elemento

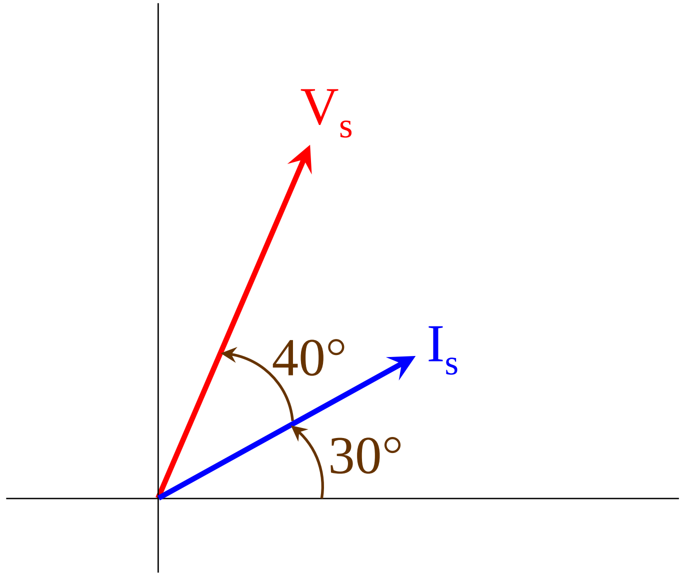
Exemplo: Qual a impedância do elemento se $v(t) = 50\cos(\omega t + 70°)$ e $i(t) = 2\cos(\omega t + 30°)$?



Solução:

$$Z = \frac{V_s}{I_s} = \frac{50\angle 70°}{2\angle 30°} = \frac{50}{2}\angle\left(70° - 30°\right)$$

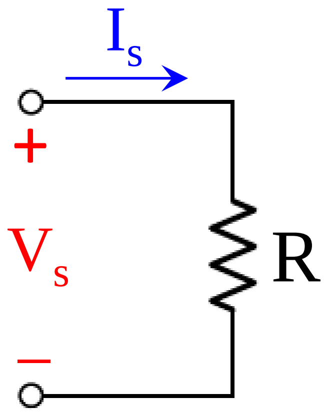
$$\Rightarrow \boxed{Z = 25\angle 40°\ \Omega = 19{,}15 + j16{,}07\ \Omega}$$

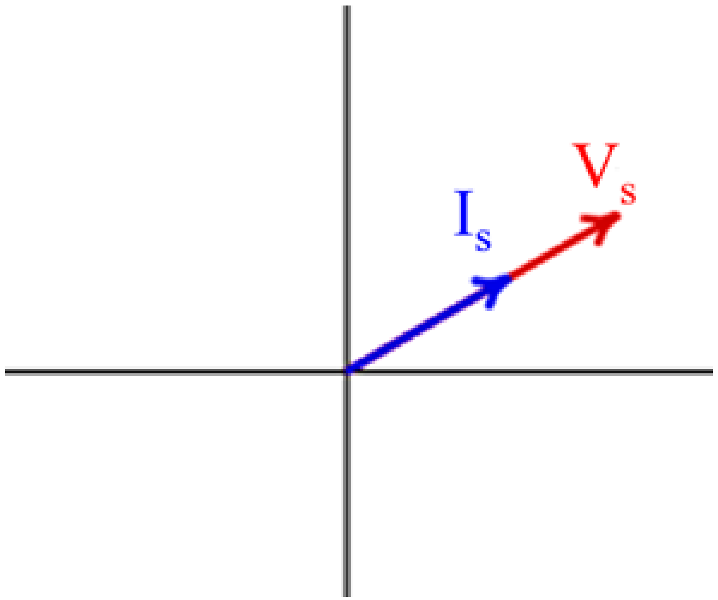


Impedância dos elementos passivos:

$$Z = \frac{V_s}{I_s}$$

1 – Resistor:



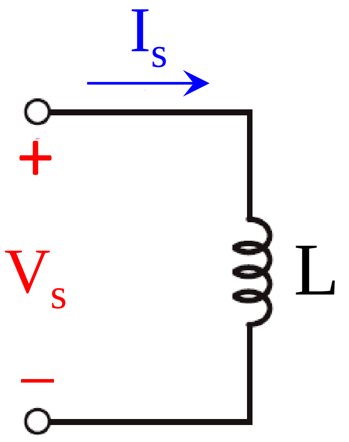


$$V_s = R\, I_s$$

Portanto:

$$Z_R = R$$

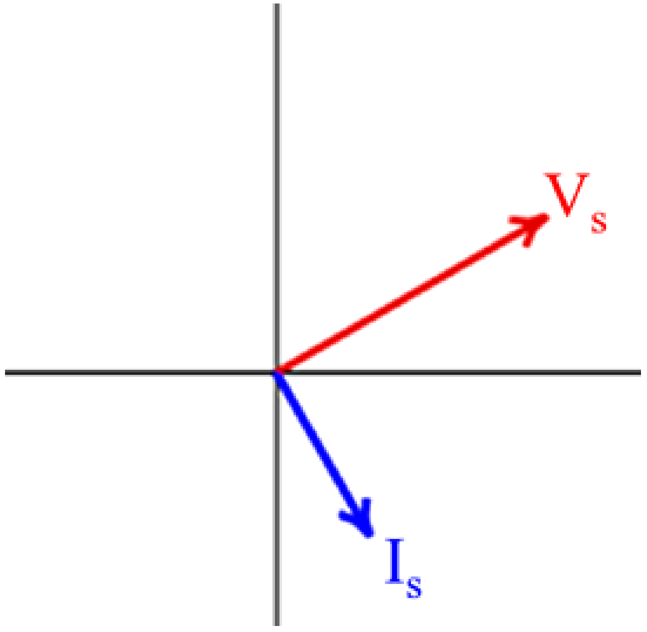
2 – Indutor:



$$Z = \frac{V_s}{I_s}$$

$$V_s = j\omega L\, I_s$$

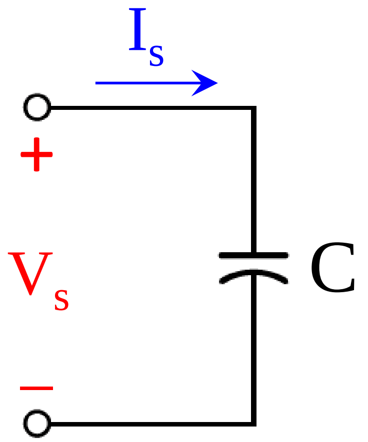
Portanto: $Z_L = j\omega L$ ou $Z_L = \omega L \angle 90°$



Reatância indutiva: $X_L = |Z_L| = \omega L$ **Unidade:** ohm (Ω)

- Para $\omega = 0$ (DC) $\Rightarrow$ $Z_L = 0$ **(curto-circuito)**
- Para $\omega \to \infty$ $\Rightarrow$ $Z_L \to \infty$ **(circuito aberto)**

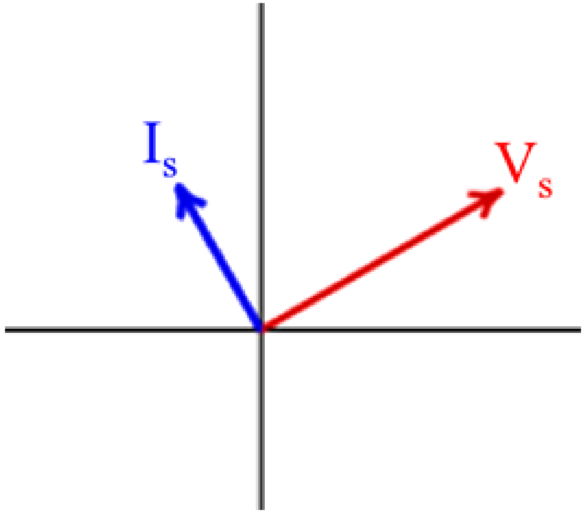
3 – Capacitor:



$$Z = \frac{V_s}{I_s}$$

$$V_s = \frac{1}{j\omega C} I_s$$

Portanto: $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ ou $Z_C = -j\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle -90°$



Reatância capacitiva: $X_C = |Z_C| = \frac{1}{\omega C}$ **Unidade:** ohm (Ω)

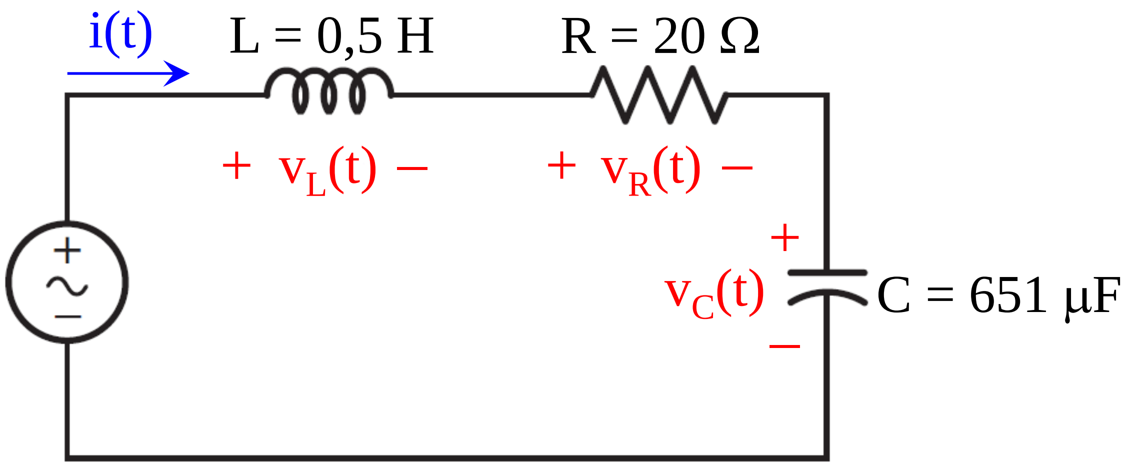
- Para $\omega = 0$ (DC) $\Rightarrow$ $Z_C \to \infty$ **(circuito aberto)**
- Para $\omega \to \infty$ $\Rightarrow$ $Z_C = 0$ **(curto-circuito)**

Exemplo: No circuito abaixo, obter a corrente e as tensões (em regime permanente).

$v_f(t) = 80\cos(100t)$

[V]

$\omega = 100$ rad/s



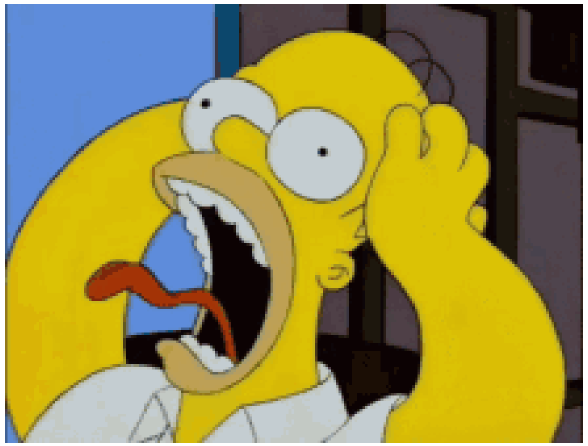
Solução: **LTK:**

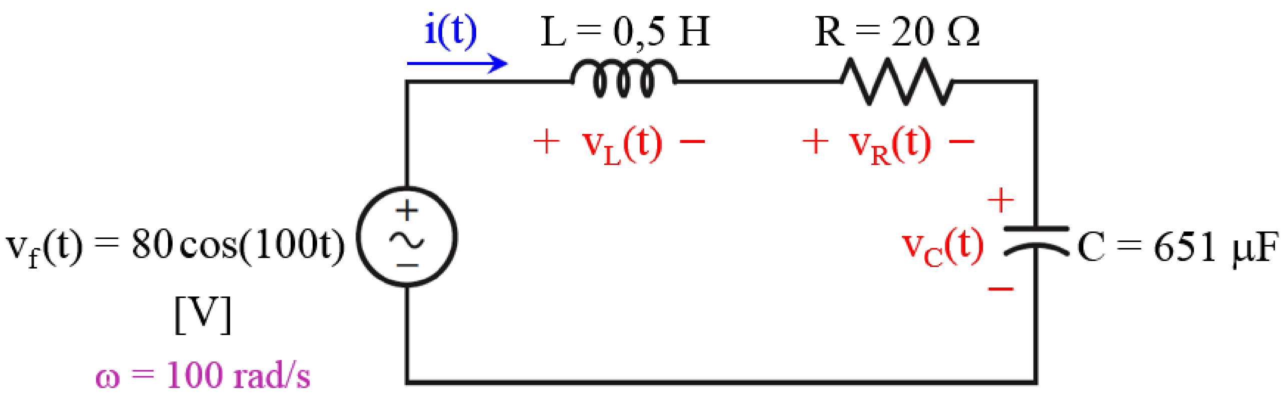
$$-v_f(t) + v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = v_f(t)$$

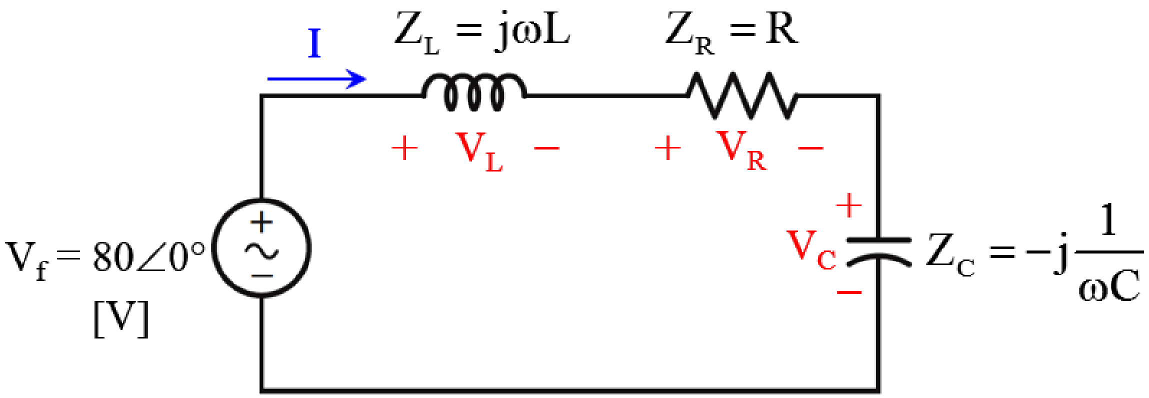
$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = 80\cos(100t)$$

Derivando em relação ao tempo:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = -8000\,\text{sen}(100t)$$







Análise no "domínio da frequência":

LTK: $$-V_f + V_L + V_R + V_C = 0$$

$$-V_f + Z_L I + Z_R I + Z_C I = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(Z_L + Z_R + Z_C\right) I = V_f$$ (Impedâncias em série se somam)

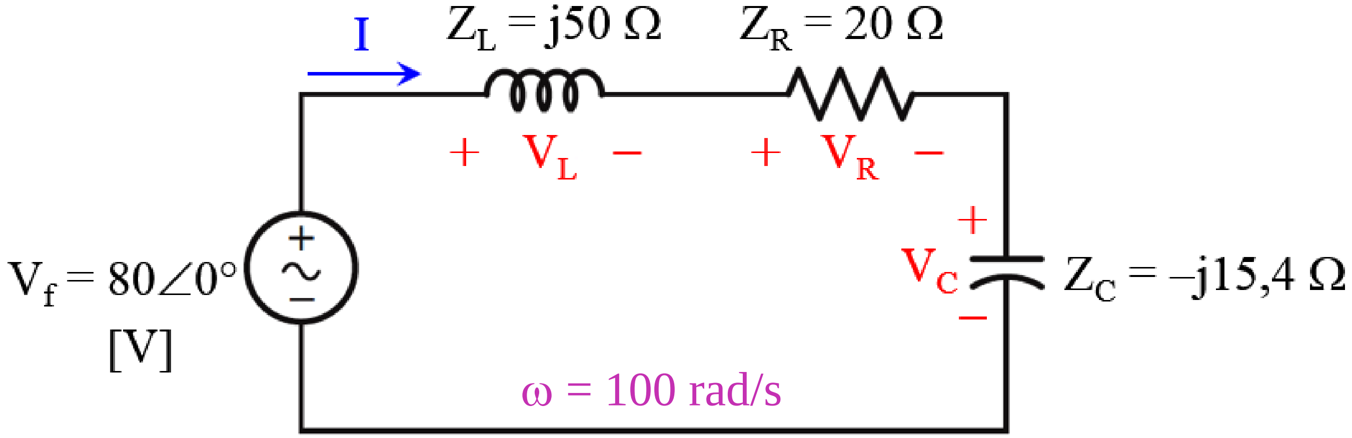
$$\left(j\omega L + R - j\frac{1}{\omega C}\right) I = V_f \quad \Rightarrow \quad \left(j100 \cdot 0,5 + 20 - j\frac{1}{100 \cdot 651 \cdot 10^{-6}}\right) I = 80\angle 0°$$

$$\left(j50 + 20 - j15,4\right) I = 80\angle 0° \quad \Rightarrow \quad \left(20 + j34,6\right) I = 80\angle 0°$$

$$(20+j34,6)\,I = 80\angle 0°$$

$$I = \frac{80\angle 0°}{20+j34,6}$$

$$I = \frac{80\angle 0°}{40\angle 60°}$$



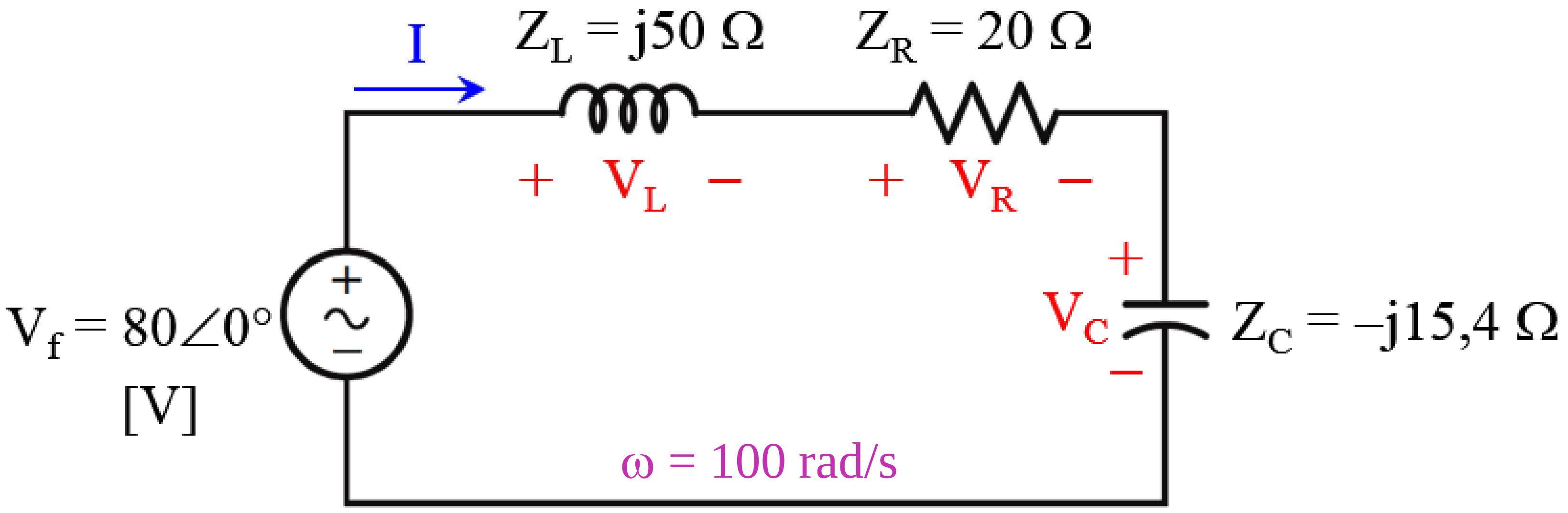
Portanto: $I = 2\angle -60°$ [A]

Tensões:

$$V_L = Z_L I = (j50)(2\angle -60°) = (50\angle 90°)(2\angle -60°) \Rightarrow V_L = 100\angle 30° \text{ [V]}$$

$$V_R = Z_R I = 20\,(2\angle -60°) \Rightarrow V_R = 40\angle -60° \text{ [V]}$$

$$V_C = Z_C I = (-j15,4)(2\angle -60°) = (15,4\angle -90°)(2\angle -60°) \Rightarrow V_C = 30,8\angle -150° \text{ [V]}$$



Fasores:

Sinais no tempo:

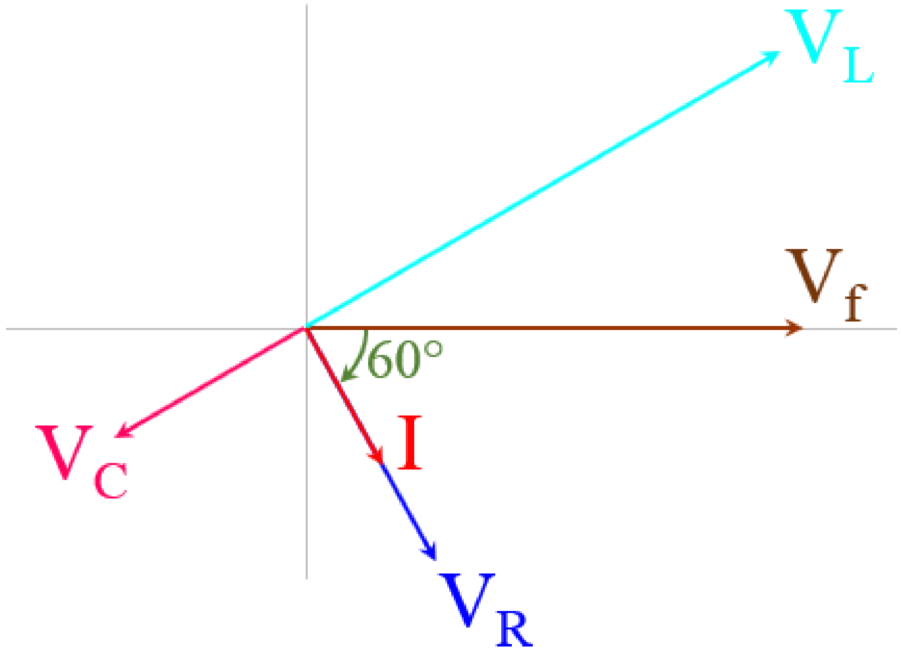
$I = 2\angle -60° \Rightarrow i(t) = 2\cos(100t - 60°)$

$V_L = 100\angle 30° \Rightarrow v_L(t) = 100\cos(100t + 30°)$

$V_R = 40\angle -60° \Rightarrow v_R(t) = 40\cos(100t - 60°)$

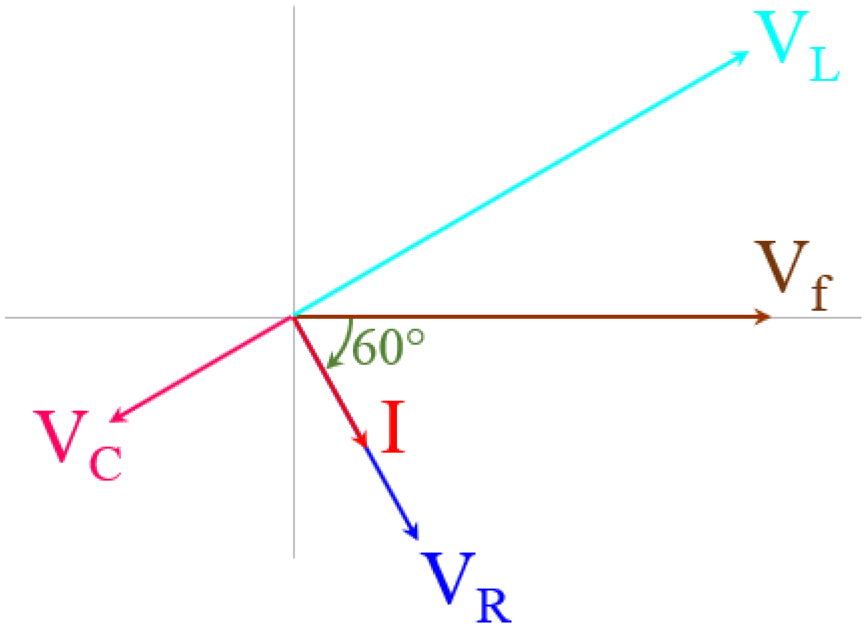
$V_C = 30{,}8\angle -150° \Rightarrow v_C(t) = 30{,}8\cos(100t - 150°)$

Diagrama fasorial

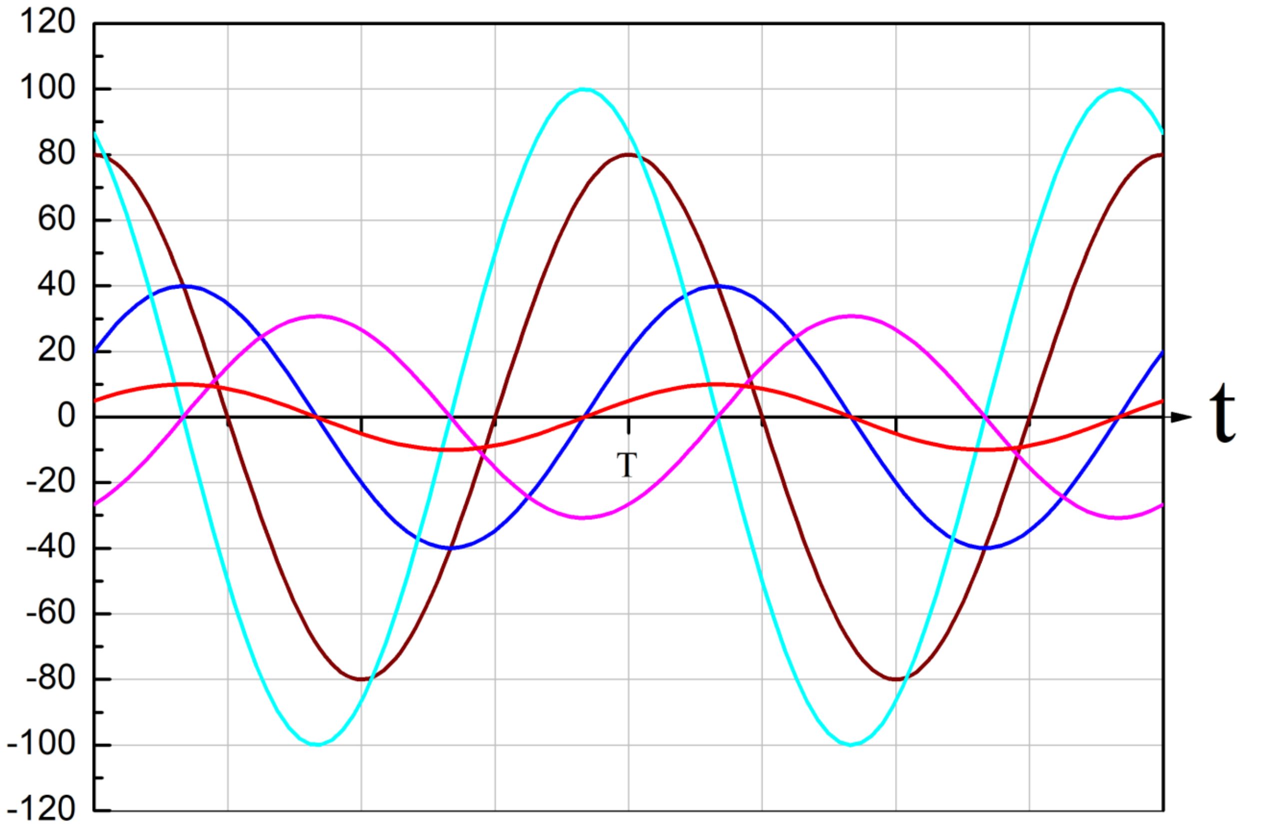


Visualização:

Diagrama fasorial



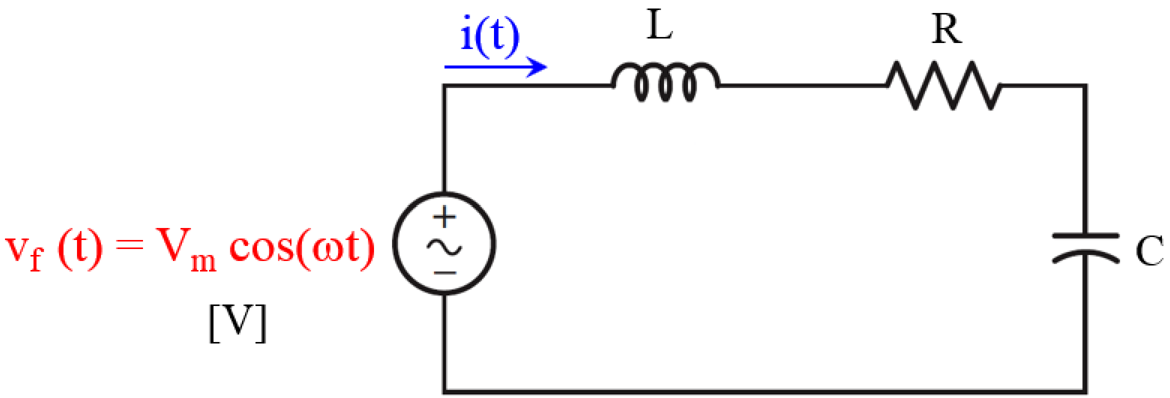
Sinais no tempo



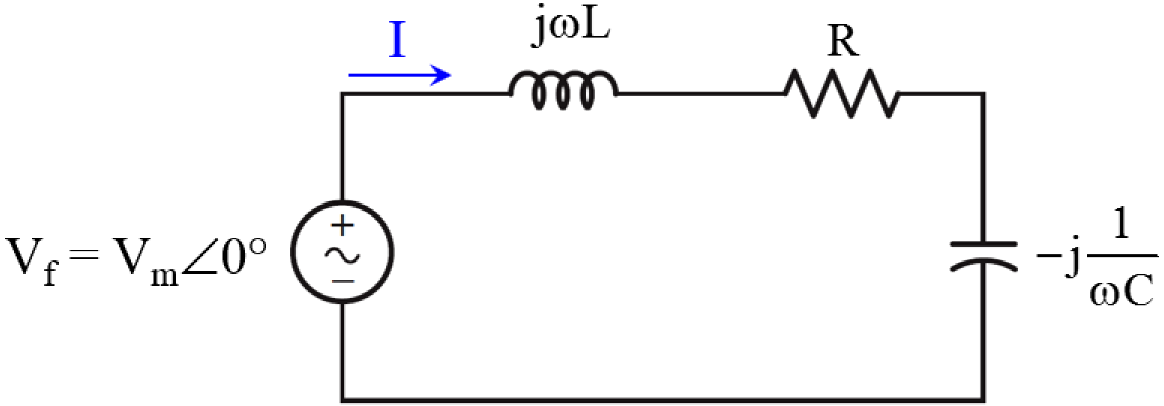
Resposta em frequência:

Mostra como o circuito se comporta para diferentes valores da frequência da fonte.

Exemplo: Analisar o comportamento da corrente no circuito em função da frequência da fonte.



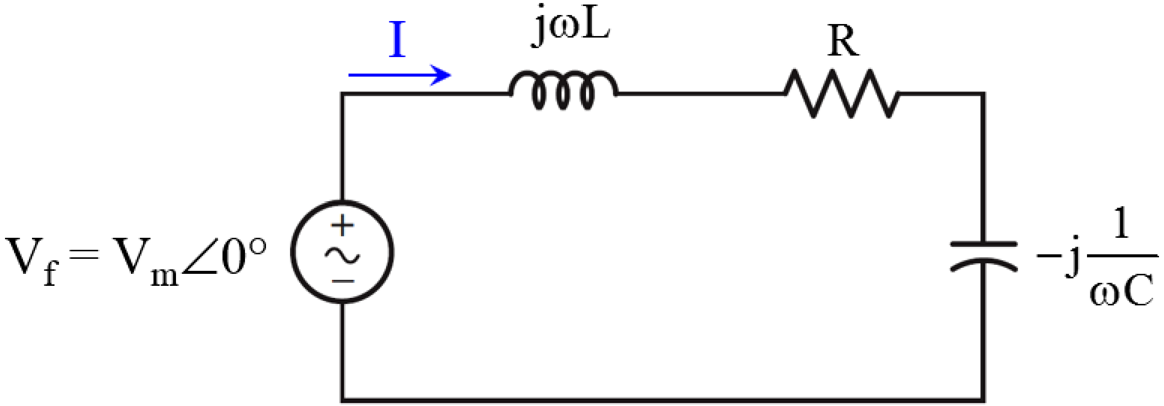
No domínio da frequência:



Solução:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

$$I = I_m \angle \phi$$



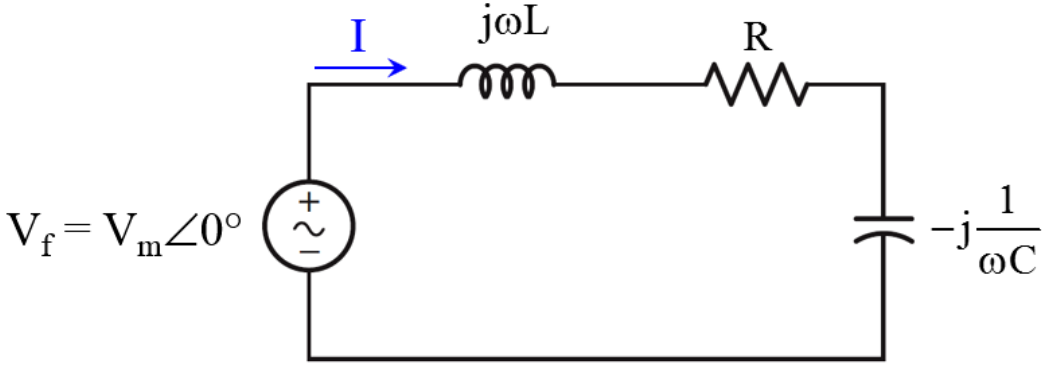
$$I = \frac{V_f}{Z_L + Z_R + Z_C} = \frac{V_m\angle 0°}{j\omega L + R - j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{V_m\angle 0°}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)} = I_m\angle\phi$$

- **módulo:**

$$|I| = I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

- **ângulo:**

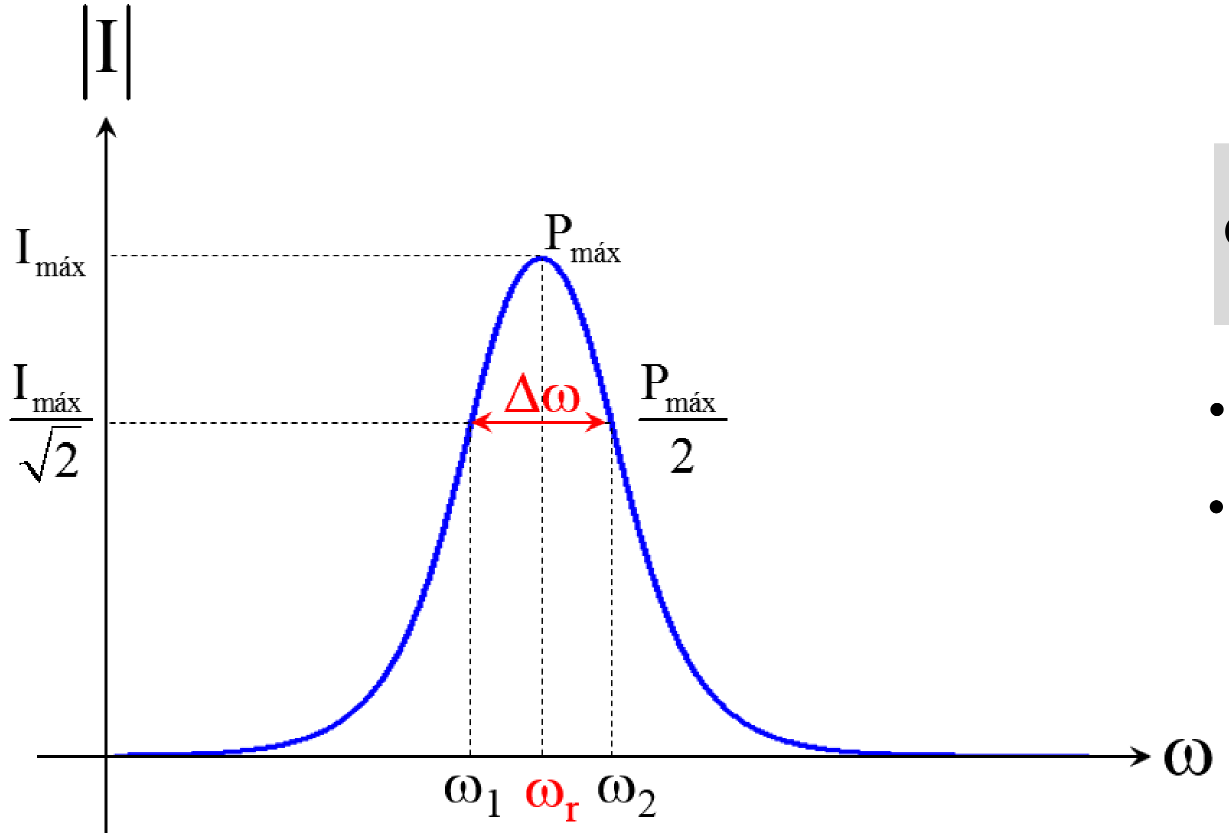
$$\phi = 0 - \text{arctg}\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\Big/ R\right]$$



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Módulo (amplitude):

$$|I| = I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

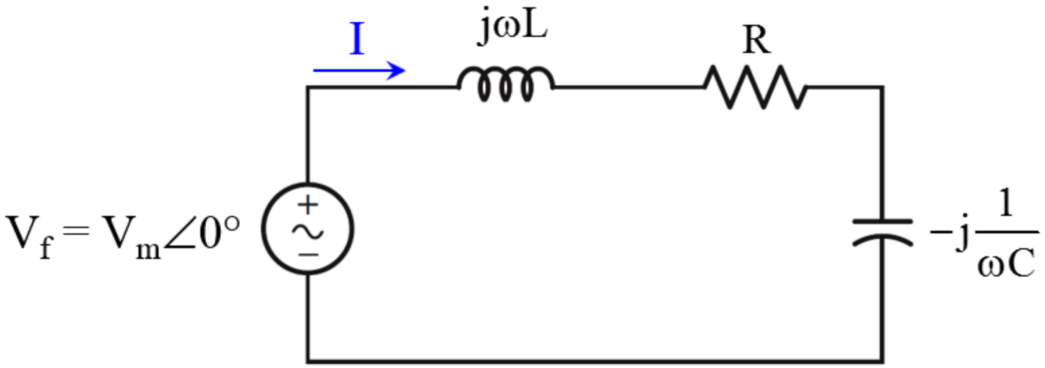


- **Na frequência de ressonância:** $\omega = \omega_r$

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad |I| = I_{máx} = \frac{V_m}{R}$$

- Impedância real $\Rightarrow$ tensão e corrente em fase
- A potência absorvida pelo circuito é máxima.

- **Frequências de meia potência:** ω_1 e ω_2
- **Largura de banda:** $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$



$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Ângulo:

$$\phi = -\mathrm{arctg}\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\Big/ R\right]$$