Física 1 – Turno 05

<u>**Docentes**</u>

- Profesor: Eduardo Acosta
- Jefe de Trabajos Prácticos: María Beatriz Roble
- Ayudantes: Patricia Roux - Romina Valeria Ibañez Bustos - Julio Mendieta – Vicente Najardo Narea

Horario: Miércoles y Viernes 15:00-19:00 hs.
Aula: Meet y Campus Virtual

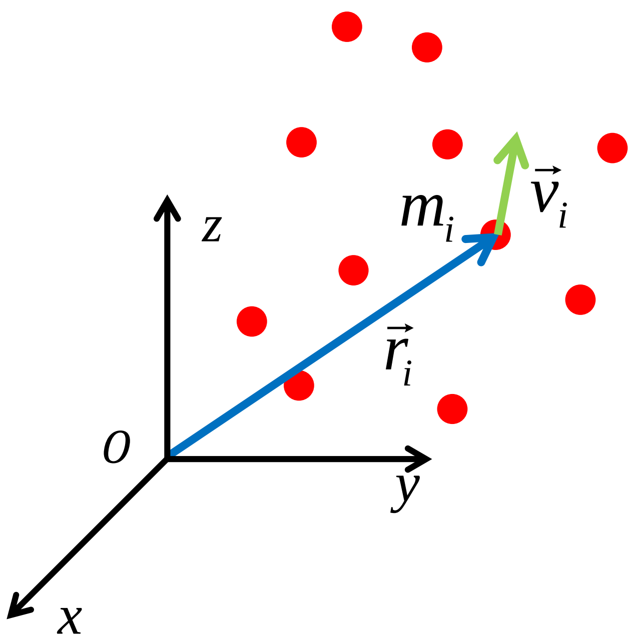
Física 1 – Turno 05

Temario: 21/05/2020

Sistema de Partículas

- Momento cinético
- Energía cinética

Sistemas de partículas



Cantidad de movimiento $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$

Centro de masa

$$\vec{V}_{CM} \equiv \frac{\vec{p}}{M} \qquad \vec{F}_{EXT} = M\vec{a}_{CM}$$

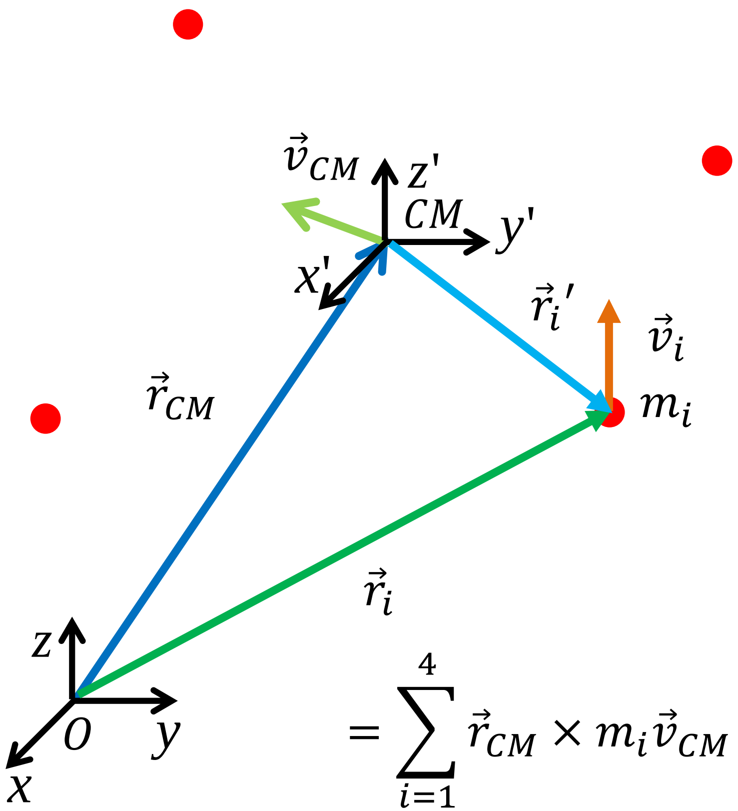
Momento cinético $\vec{L}_O$

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Energía cinética $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Momento cinético de un sistema de partículas



$$\boxed{\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\, \vec{v}_i}$$

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i' \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{4} (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i') \times m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_{CM} \times m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') + \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i' \times m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

$$= \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \right) \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{v}_i' \right) + \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{r}_i' \right) \times \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

Momento cinético de un sistema de partículas

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \, \vec{v}_i$$

$$= \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \right) \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{v}_i' \right) + \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{r}_i' \right) \times \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

$$\sum_{i=1}^{4} m_i = M$$

$$\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{v}_i' = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{r}_i' = 0$$

$$\sum_{i=1}^{4} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' = \vec{L}_{CM}$$

$$\vec{L}_O = \boxed{\vec{r}_{CM} \times M \, \vec{v}_{CM}} + \boxed{\vec{L}_{CM}}$$

Momento cinético orbital (debido a la traslación)

Momento cinético intrínseco o de Spín (debido a la rotación alrededor del CM)

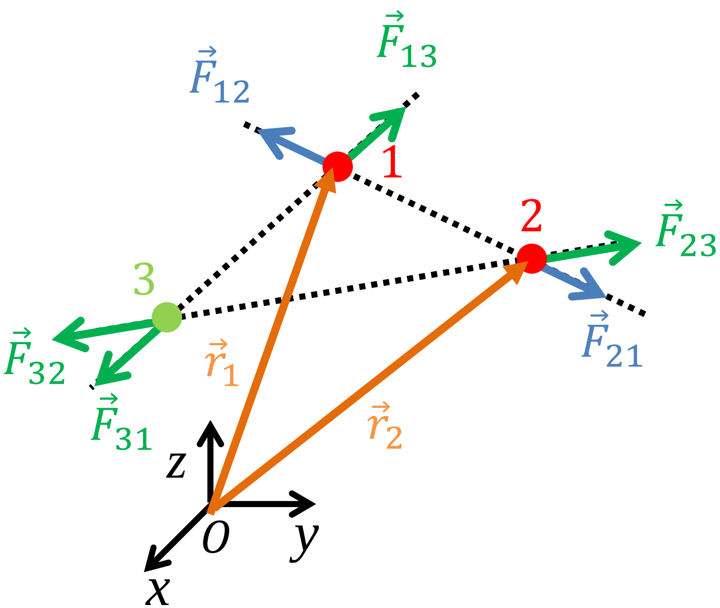
Momento cinético de un sistema de partículas

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \, \vec{v}_i$$

Hip: masa constante

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \, \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \, \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \, \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \times m_i \, \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \, \vec{a}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$



Hip: SR inercial

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

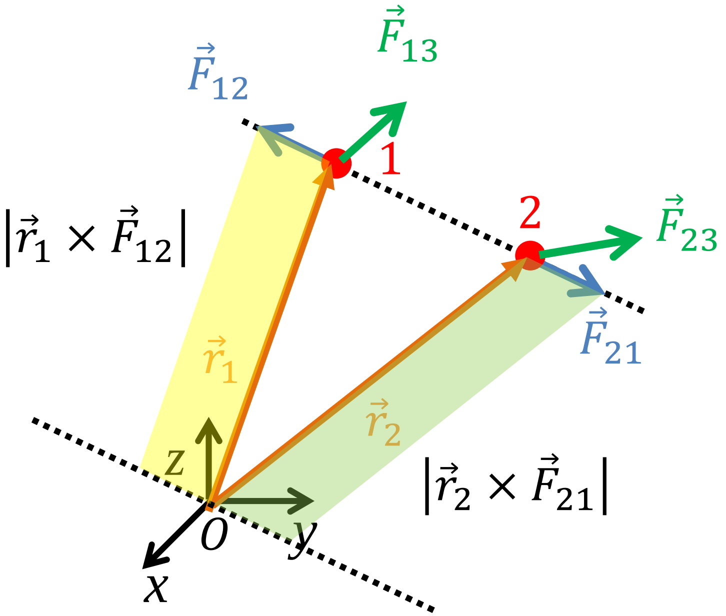
$$= \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}\right) + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{24}\right)$$

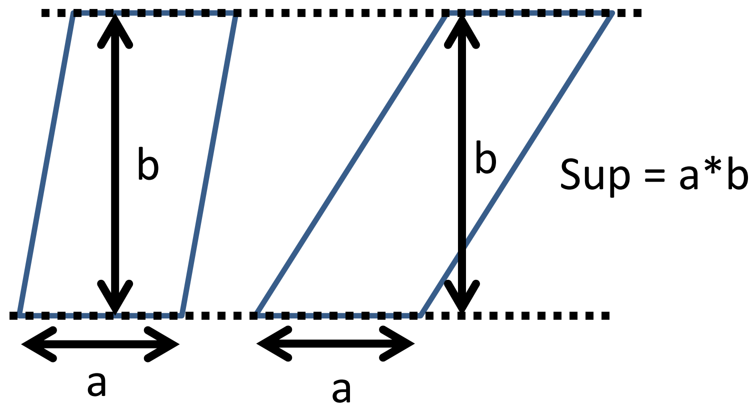
$$= \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{14}\right) + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{24}\right)$$

Momento cinético de un sistema de partículas

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}\right) + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{23}$$

$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{23}$$





$$|\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}| = |\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}|$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = 0$$

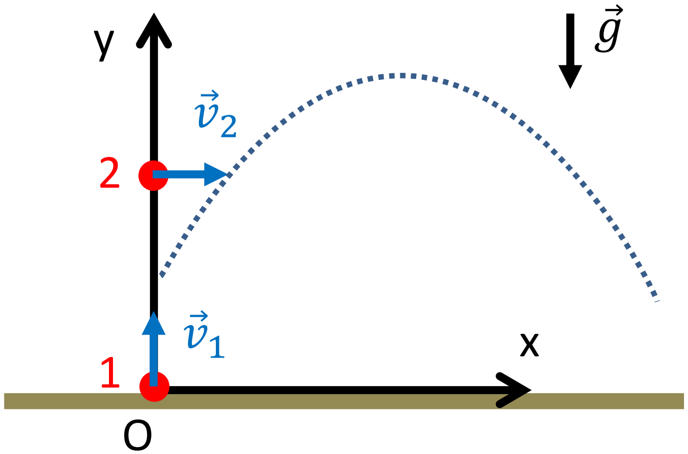
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{13} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{23}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_{O,EXT}}$$

Problema

Dos partículas de masas 1kg que están unidas a un resorte de longitud natural 30 cm y constante elástica 200N/m es lanzado al aire. Se selecciona un sistema de coordenadas tal que $\vec{g} = -9{,}8\ m/s^2\ \hat{j}$. Si en el instante inicial las partículas estaban en la posición $\vec{r}_1 = 0{,}00\ m\hat{\imath}$ y $\vec{r}_2 = 0{,}30\ m\hat{\imath}$ con velocidades $\vec{v}_1 = 5{,}0\ m/s\ \hat{j}$ y $\vec{v}_2 = 5{,}0\ m/s\ \hat{\imath}$.
Calcular:

a) El torque de las fuerzas exteriores para todo instante de tiempo



$$\vec{a}_{CM} = -g\ \hat{j}$$

$$\vec{v}_{CM} = 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\hat{\imath} + \left(2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - gt\right)\hat{j}$$

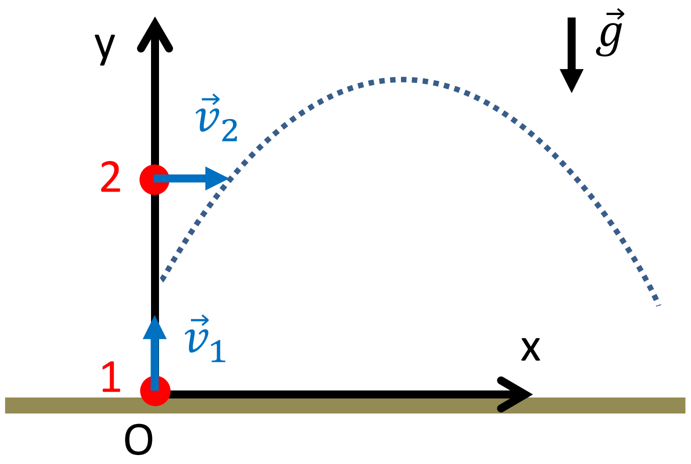
$$\vec{r}_{CM} = 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t\hat{\imath} + \left(0{,}15\mathrm{m} + 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t - \frac{1}{2}\ gt^2\right)\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_{EXT} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = \vec{r}_1 \times m\vec{g} + \vec{r}_2 \times m\vec{g} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \times m\vec{g} = 2\vec{r}_{CM} \times m\vec{g}$$

Problema

Dos partículas de masas 1kg que están unidas a un resorte de longitud natural 30 cm y constante elástica 200N/m es lanzado al aire. Se selecciona un sistema de coordenadas tal que $\vec{g} = -9{,}8\ m/s^2\ \hat{j}$. Si en el instante inicial las partículas estaban en la posición $\vec{r}_1 = 0{,}00\ m\hat{\imath}$ y $\vec{r}_2 = 0{,}30\ m\hat{\imath}$ con velocidades $\vec{v}_1 = 5{,}0\ m/s\ \hat{j}$ y $\vec{v}_2 = 5{,}0\ m/s\ \hat{\imath}$.
Calcular:

a) El torque de las fuerzas exteriores para todo instante de tiempo
b) El momento cinético respecto de O para todo instante de tiempo



Problema

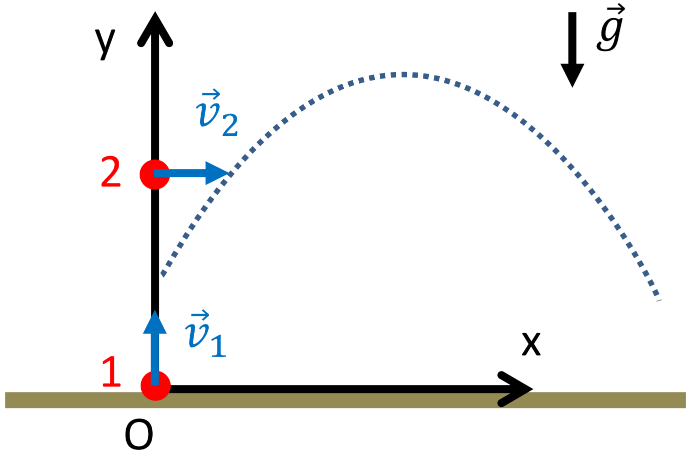
Dos partículas de masas 1kg que están unidas a un resorte de longitud natural 30 cm y constante elástica 200N/m es lanzado al aire. Se selecciona un sistema de coordenadas tal que $\vec{g} = -9{,}8\, m/s^2\, \hat{j}$. Si en el instante inicial las partículas estaban en la posición $\vec{r}_1 = 0{,}00\, m\hat{\imath}$ y $\vec{r}_2 = 0{,}30\, m\hat{\imath}$ con velocidades $\vec{v}_1 = 5{,}0\, m/s\, \hat{j}$ y $\vec{v}_2 = 5{,}0\, m/s\, \hat{\imath}$.

Calcular:

a) El torque de las fuerzas exteriores para todo instante de tiempo

b) El momento cinético respecto de O para todo instante de tiempo

c) El momento cinético orbital para todo instante de tiempo



$$\vec{a}_{CM} = -g\,\hat{j}$$

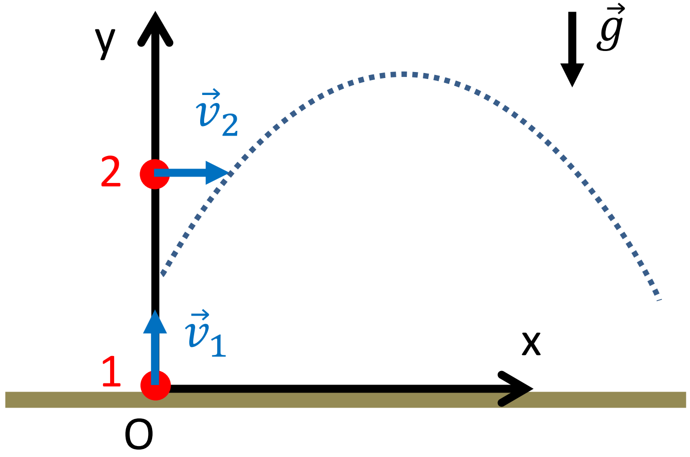
$$\vec{v}_{CM} = 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\hat{\imath} + \left(2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - gt\right)\hat{j}$$

$$\vec{r}_{CM} = 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t\hat{\imath} + \left(0{,}15\mathrm{m} + 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t - \frac{1}{2}\,gt^2\right)\hat{j}$$

Problema

Dos partículas de masas 1kg que están unidas a un resorte de longitud natural 30 cm y constante elástica 200N/m es lanzado al aire. Se selecciona un sistema de coordenadas tal que $\vec{g} = -9{,}8\ m/s^2\ \hat{j}$. Si en el instante inicial las partículas estaban en la posición $\vec{r}_1 = 0{,}00\ m\hat{\imath}$ y $\vec{r}_2 = 0{,}30\ m\hat{\imath}$ con velocidades $\vec{v}_1 = 5{,}0\ m/s\ \hat{j}$ y $\vec{v}_2 = 5{,}0\ m/s\ \hat{\imath}$.
Calcular:

a) El torque de las fuerzas exteriores para todo instante de tiempo
b) El momento cinético respecto de O para todo instante de tiempo
c) El momento cinético orbital para todo instante de tiempo
d) El momento cinético intrínseco para todo instante de tiempo

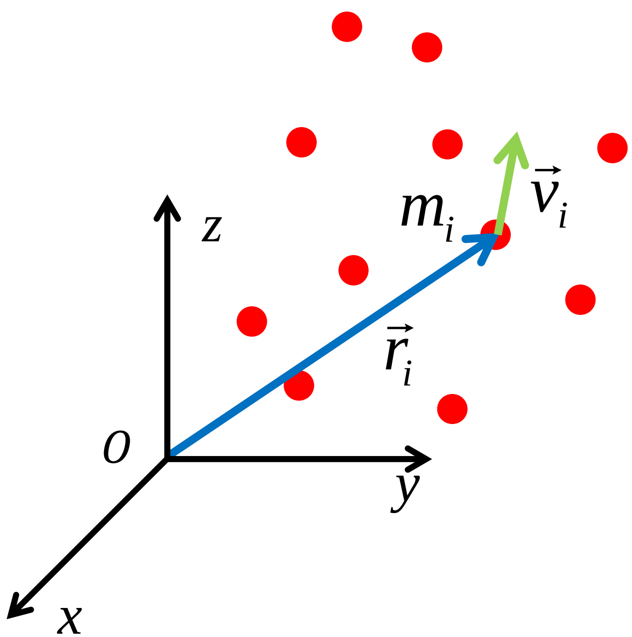


$$\vec{a}_{CM} = -g\ \hat{j}$$

$$\vec{v}_{CM} = 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\hat{\imath} + \left(2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - gt\right)\hat{j}$$

$$\vec{r}_{CM} = 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t\hat{\imath} + \left(0{,}15\mathrm{m} + 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t - \frac{1}{2}\ gt^2\right)\hat{j}$$

Sistemas de partículas



Cantidad de movimiento $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$

$$\vec{V}_{CM} \equiv \frac{\vec{p}}{M} \qquad \vec{F}_{EXT} = M\vec{a}_{CM}$$

Momento cinético $\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

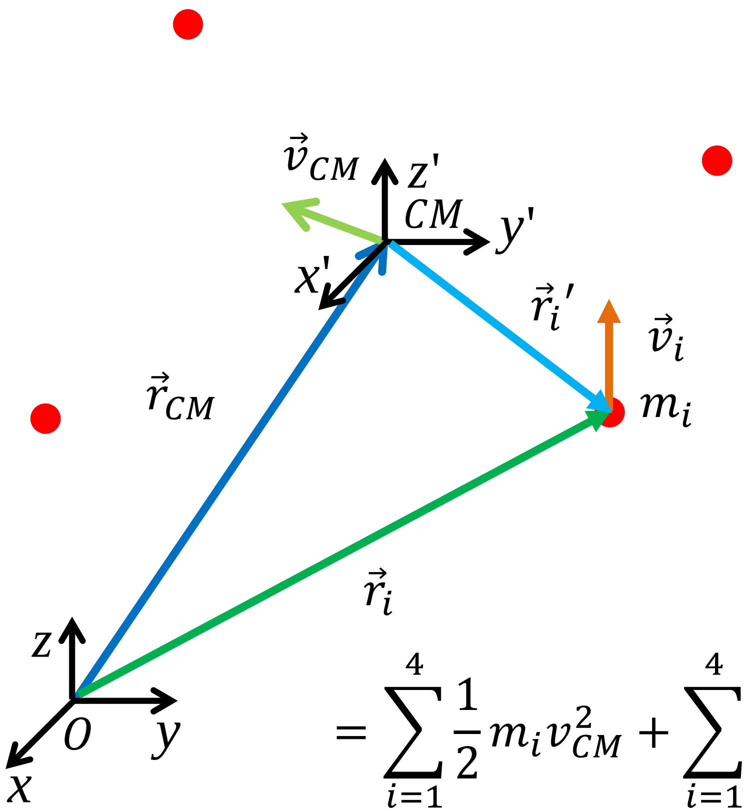
$$\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM} \qquad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_{O,EXT}$$

Energía cinética $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Energía cinética de un sistema de partículas

$$\boxed{\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2}$$



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i' \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i'$$

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM} \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i') + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i' \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM} + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \right) v_{CM}^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{v}_i' \right) + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

Energía cinética de un sistema de partículas

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{4} m_i\right) v_{CM}^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \vec{v}_i'\right) + \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{2} m_i {v_i'}^2$$

$$\sum_{i=1}^{4} m_i = M \qquad \sum_{i=1}^{4} m_i \vec{v}_i' = 0 \qquad \mathcal{E}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i {v_i'}^2$$

$$\mathcal{E} = \boxed{\frac{1}{2} M v_{CM}^2} + \boxed{\mathcal{E}_{CM}}$$

Energía cinética de traslación

Energía cinética respecto del CM (asociada a la rotación y al cambio de volumen del sistema)

Energía cinética de un sistema de partículas

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\mathcal{E}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \frac{d\left(m_i v_i^2\right)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \frac{d v_i^2}{dt}$$

Hip: masa constante

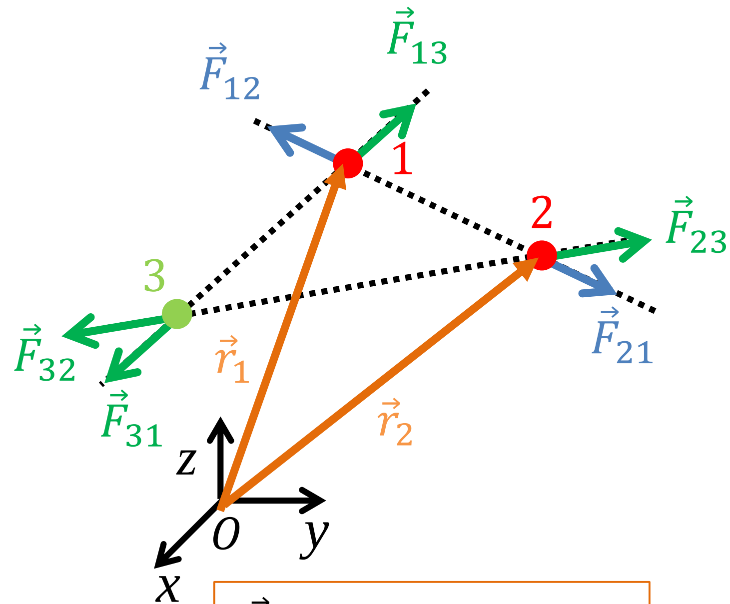
$$\frac{d v_i^2}{dt} = \frac{d \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = 2 \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$$

Hip: SR inercial

Energía cinética de un sistema de partículas

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{2} \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}\right) \cdot \vec{v}_1 + \left(\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}\right) \cdot \vec{v}_2$$

$$= \vec{F}_{12} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{13} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{21} \cdot \vec{v}_2 + \vec{F}_{23} \cdot \vec{v}_2$$

$$= \vec{F}_{12} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \vec{F}_{13} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{23} \cdot \vec{v}_2$$

$$\boxed{\vec{F}_{12} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \neq 0}$$

$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i =$ Suma de la potencia de todas las fuerzas

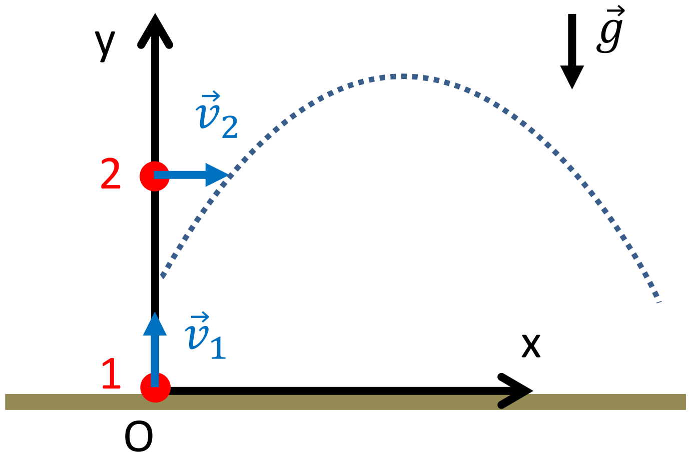
Todas las fuerzas: internas y
externas al sistema

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum Pot_{Internas} + \sum Pot_{externas}$$

Problema

Dos partículas de masas 1kg que están unidas a un resorte de longitud natural 30 cm y constante elástica 200N/m es lanzado al aire. Se selecciona un sistema de coordenadas tal que $\vec{g} = -9{,}8\ m/s^2\ \hat{\jmath}$. Si en el instante inicial las partículas estaban en la posición $\vec{r}_1 = 0{,}00\ m\hat{\imath}$ y $\vec{r}_2 = 0{,}30\ m\hat{\imath}$ con velocidades $\vec{v}_1 = 5{,}0\ m/s\ \hat{\jmath}$ y $\vec{v}_2 = 5{,}0\ m/s\ \hat{\imath}$.
Calcular:

a) El torque de las fuerzas exteriores para todo instante de tiempo
b) El momento cinético respecto de O para todo instante de tiempo
c) El momento cinético orbital para todo instante de tiempo
d) El momento cinético intrínseco para todo instante de tiempo
e) La energía cinética de traslación del sistema para todo instante de tiempo

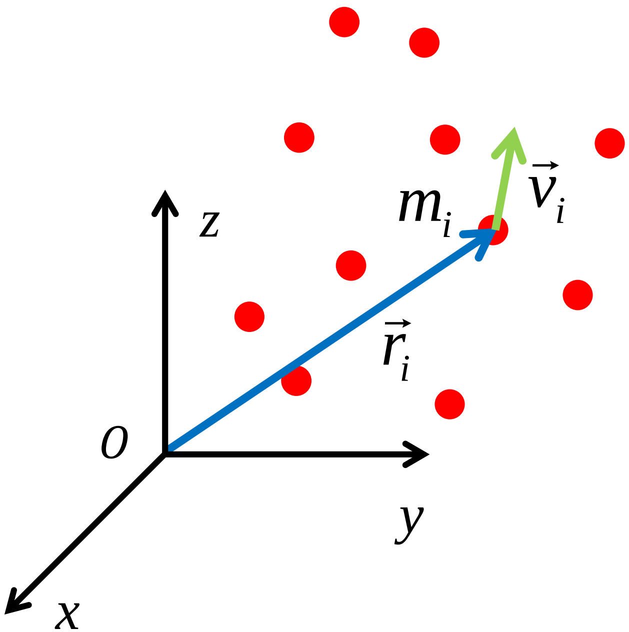


$$\vec{a}_{CM} = -g\ \hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_{CM} = 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\hat{\imath} + \left(2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - gt\right)\ \hat{\jmath}$$

$$\vec{r}_{CM} = 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t\hat{\imath} + \left(0{,}15\mathrm{m} + 2{,}5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t - \frac{1}{2}\ gt^2\right)\ \hat{\jmath}$$

Sistemas de partículas



Cantidad de movimiento $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$

$$\vec{V}_{CM} \equiv \frac{\vec{p}}{M} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{EXT} = M\vec{a}_{CM}$$

Momento cinético $\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM} \qquad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_{O,EXT}$$

Energía cinética $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \mathcal{E}_{CM} \qquad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum Pot_{Internas} + \sum Pot_{externas}$$