1　線形空間

以下，K は実数全体 $\mathbb{R}$ か複素数全体 $\mathbb{C}$ であるとする．

定義 1.1. 集合 V に対して，二項演算 $+$ と，K の元によるスカラー倍が定義されていて，以下の性質をすべて満たすとき，V は K **上のベクトル空間** (vector space)，もしくは K **上の線形空間** (linear space) であるという．[1]

(1)　任意の $v_1, v_2 \in V$ に対して，$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ である．(加法に関する交換律)
(2)　任意の $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対して，$(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ である．(加法に関する結合律)
(3)　ある $0_V \in V$ で，任意の $v \in V$ に対して，$0_V + v = v$ となるものが存在する．このような 0_V を V の**零元**もしくは**零ベクトル**という．[2]
(4)　任意の $v \in V$ と $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ に対して，$\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1\alpha_2)v$ である．
(5)　任意の $v_1, v_2 \in V$ と $\alpha \in K$ について，$\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ である．
(6)　任意の $v \in V$ と $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ について，$(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$ である．
(7)　任意の $v \in V$ に対し，$1v = v$ である．

記号・記法 1.2. $K = \mathbb{R}$ のときは「**実ベクトル空間**」，$K = \mathbb{C}$ のときは「**複素ベクトル空間**」と呼ぶ．また，「K 上のベクトル空間」を，「**K-ベクトル空間**」と略すことも多い．

以下，今後の講義でも用いる例を挙げる．

例 1.3. 一番最小のベクトル空間は，零ベクトルのみからなる空間 $\{0\}$ である．加法は $0 + 0 = 0$ で，スカラー倍は $\alpha 0 = 0$ で定義すれば，定義 1.1 の条件をすべて満たす．これを**自明な** (trivial) ベクトル空間という．[3]

例 1.4. K の元を n 個 (n は 1 以上の整数) 並べてできる (数) ベクトル全体のなす空間

$$K^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; x_1, \dots, x_n \in K \right\}$$

は，和とスカラー倍を，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

---

1)　K が文脈から明らかにわかる場合，単にベクトル空間もしくは線形空間と言ってしまうことが多い．
2)　ここでも，考えているベクトル空間がどれかが明らかな場合，0 と書いてしまう事が多い．場合によっては o(小文字のオー) で書くこともある．
3)　英語の trivial の方には，“not serious, important, or valuable”(from Longman Dictionary of Contemporary English, Fifth Edition) とあるように，価値がないとか重要ではないという意味がある．つまり，この空間は確かにベクトル空間ではあるが，あまり考える価値がないし，実質無視してもよいというニュアンスが伴う．

と定義することで，K 上のベクトル空間になる．これを，**K 上の n 次元ユークリッド空間**という．このときの零ベクトルは，成分がすべて 0 のベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

例 1.5. K の元を係数とする 1 変数の多項式全体

$$K[x] := \{a_n x^n + \dots a_1 x + a_0\,;\, a_0, \dots, a_n \in K\}$$

は，和とスカラー倍を，通常の多項式の和と定数倍で定義することで K 上のベクトル空間になる．

例 1.6. K の元からなる数列の全体

$$K^{\mathbb{N}} := \{(a_j)_{j \geq 0} = (a_0, a_1, a_2, \dots)\,;\, a_j \in K\ (j \geq 0)\}$$

は，和とスカラー倍を，

$$(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j), \quad \alpha(a_j) = (\alpha a_j)$$

で定義することで，K 上のベクトル空間となる．

ベクトル空間の公理から，次のことがわかる．これらの性質は当たり前のことに思えるが，すべてベクトル空間の定義に基づいて証明できることである．

命題 1.7. V を K-ベクトル空間とする．

(1) V の零ベクトルはただ 1 つしかない．[4]

(2) 任意の $v \in V$ に対して，$0v = 0_V$ である．

(3) 任意の $v \in V$ に対して，ある $-v \in V$ で，$v + (-v) = 0_V$ となるものがただ一つ存在する．これを v の**逆元**という．

証明

(1) 0_V と $0'_V$ を V に零ベクトルとする．すると，零ベクトルの定義から，任意の $v \in V$ に対して，$v + 0_V = v$ である．ここで，$v = 0'_V$ とおくと，$0'_V + 0_V = 0'_V$ となる．

一方，$0'_V$ も零ベクトルなので，任意の $v' \in V$ に対して，$v' + 0'_V = v'$ である．ここで，$v' = 0_V$ とおくと，$0_V + 0'_V = 0_V$ となる．交換律より，$0'_V + 0_V = 0'_V + 0_V$ が成り立つので，$0_V = 0'_V$ が成り立つ．[5]

(2) 分配律より，$1v + 0v = (1+0)v = 1v = v$ である．従って，任意の $v \in V$ に対して，$v + 0v = v$ が成立する．つまり，$0v$ は零ベクトルの性質を満たしており，(1) で示したことから，$0v = 0_V$ であることがわかる．

(3) $v \in V$ に対して，$(-1)v$ が逆元の性質を満たすことはすぐにわかる．実際，分配律と (2) を用いて，

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0_V$$

となるからである．

4） 定義 1.1 においては，零ベクトルが「ある」ということしか言っておらずこれが 1 つしかないかどうかについてはまったく言及されていないことに注意．零ベクトルが 1 個しかないということも，真面目に証明しなければならないことなのである．

5） ここで行っている論法は「ただ一つであること」(**一意性**) を証明するための基本的なテクニックである．つまり，その性質を満たすものが 2 つ存在したとして，実はそれらは同じものだったということを示すやり方である．

よって，逆元は存在することがわかったので，これがただ一つしかないことを示せばよい．$v \in V$ に対して，$v + v_1 = 0_V$ を満たす元 $v_1 \in V$ を取る．両辺に $(-1)v$ を足すと，$v + (-1)v = 0_V$ であることより，

$$\begin{aligned} (-1)v + v + v_1 &= (-1)v + 0_V \\ 0_V + v_1 &= (-1)v \\ v_1 &= (-1)v \end{aligned}$$

となるので，逆元はただ一つしかないことがわかった．

□

ベクトル空間の中で，特別な性質を持つような部分集合を考えることができる．

定義 1.8. V を K 上のベクトル空間として，$W \subset V$ を部分集合とする．W は次の 2 つの条件をすべて満たすとき，V の**部分空間** (subspace) であるという．

(1) 任意の $w_1, w_2 \in W$ に対して，$w_1 + w_2 \in W$ である．
(2) 任意の $w \in W$ と，$\alpha \in K$ に対して，$\alpha w \in W$ である．

上の定義の 2 つの主張はそれぞれ，

- W に属する 2 つの元の和を取ると，その結果も W に属する．
- W に属する元をスカラー倍すると，その結果も W に属する．

ということを意味している．このように，ある集合の元に対して，何らかの演算をした結果が再びもとの集合に属している状況を，その演算で「**閉じている**」と表現する．この言い回しを使うなら，「**部分空間とは，和とスカラー倍で閉じているような部分集合のことである**」と短く表現できる．

まず具体例を示そう．

例 1.9. 任意の K-ベクトル空間 V に対して，V 自身と，V の零ベクトルのみからなる部分集合 $\{0_V\}$ は V の部分空間である．これらを V の**自明な**部分空間という．

例 1.10. n 次元ユークリッド空間 K^n に対して，

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} ; a \in K \right\}$$

という部分集合，つまり，すべての成分が同じであるようなベクトル全体のなす部分集合を考えると，これは K^n の部分空間になる．

実際，和とスカラー倍で閉じていることを確認する．まず，W の 2 つの元を $w_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix}$，$w_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，$w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ \dots \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}$ は，すべての成分が同じなのでやはり W に属している．一方で，

任意の $\alpha \in K$ と $w = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix} \in W$ に対して，$\alpha w = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \vdots \\ \alpha a \end{pmatrix}$ は，すべての成分が同じなのでやはり W に属している．以上で W が部分空間になることが証明できた．

「W が V の部分空間ではない」ということの定義も確認しておく必要がある．そのためには定義 1.8 の否定を取ればよい．従って，W が V の部分空間ではないということは，次の 2 つの条件のうち**少なくとも 1 つ**が満たされることである:

- ある $w_1, w_2 \in W$ で，$w_1 + w_2 \notin W$ となるものが存在する．
- ある $w \in W$ と，$\alpha \in K$ で，$\alpha w \notin W$ となるものが存在する．

例 1.11. K^n に対して，

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a+1 \end{pmatrix} ; a \in K \right\}$$

という部分集合は K^n の部分空間にはならない．

これを示すには，W の元の和，もしくはスカラー倍によって，その結果が W に属さなくなる例を作ればいい．実際，$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ は W の元だが，$2w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix}$ は W に属さない．

基本的に，部分空間であるかどうかを確認するためには，和とスカラー倍で閉じていることを確認すればいいが，実は以下のような判定方法がある．

命題 1.12. V を K-ベクトル空間，$W \subset V$ を部分集合とする．このとき，以下は同値である．

(1) W は V の部分空間である．

(2) 任意の $w_1, w_2 \in W$ と，$\alpha_1, \alpha_2 \in K$ に対して，$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W$ である．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): W が V の部分空間であるとする．このとき，任意の $w_1, w_2 \in W$ と，$\alpha_1, \alpha_2 \in K$ に対して，部分空間の定義から，$\alpha_1 w_1$ と $\alpha_2 w_2$ はともに W の元である．すると，その和である $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ も W の元であるので，(2) が成り立つ．

(2) $\Rightarrow$ (1): 任意の $w_1, w_2 \in W$ と，$\alpha_1, \alpha_2 \in K$ に対して，$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W$ が成り立つとする．ここで，特に $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ とすれば，任意の $w_1, w_2 \in W$ に対して，$w_1 + w_2 \in W$ であることがわかる．また，$\alpha_2 = 0$ とすれば，任意の $w_1 \in W$ と $\alpha_1 \in K$ に対して，$\alpha_1 w_1 \in W$ であることがわかる．以上で W が V の部分空間であることがわかった． □

このことを用いて部分空間であることを証明してみる．

例 1.13. K^3 の部分集合

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3\,;\, x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$$

が部分空間であることを示そう．$w_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $w_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ を W の元とする．このとき，W の定義から，$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ と $y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$ が成り立つことに注意する．

任意の $\alpha, \beta \in K$ について，$\alpha w_1 + \beta w_2 = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix}$ である．これが W の元であることを確認すればよいが，それは，

$$\begin{aligned}
&(\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + 2(\alpha x_3 + \beta y_3) \\
&= \alpha(x_1 + x_2 + 2x_3) + \beta(y_1 + y_2 + 2y_3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となることから言える．

例 1.14. 多項式全体が作るベクトル空間 $K[x]$ の部分集合

$$W = \{ f(x) \in K[x]\,;\, f(x) \text{ は } x+1 \text{ で割り切れる } \}$$

は，$K[x]$ の部分空間である．

実際，任意の $f_1(x), f_2(x) \in W$ と，α_1, α_2 に対して，$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ が $x+1$ で割り切れることを確認すればよい．これにはいくつか方法があるが，真面目に証明すると以下の通りである．$f_1(x)$ と $f_2(x)$ は $x+1$ で割り切れるので，ある多項式 $g_1(x)$ と $g_2(x)$ で，

$$f_1(x) = (x+1)g_1(x), \quad f_2(x) = (x+1)g_2(x)$$

となるものが存在する．このとき，

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = (x+1)(\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x))$$

であり，$\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)$ は多項式だから，$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ が $x+1$ で割り切れることがわかった．

部分空間から別の部分空間を作る方法として，和と共通部分がある．

命題 1.15. V を K-ベクトル空間とする．

(1) 任意の部分空間 $W \subset V$ に対して，$0_V \in W$ である．

(2) W_1, W_2 を V の 2 つの部分空間とする．このとき，共通部分 $W_1 \cap W_2$ も V の部分空間になる．

(3) W_1, W_2 を V の 2 つの部分空間とする．このとき，

$$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \in V\,;\, w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2 \}$$

で与えられる集合は V の部分空間となる．これを，W_1 と W_2 の和という．

証明

(1) $w \in W$ を任意に一つ取る．このとき，W は V の部分空間なので，$-w = (-1)w \in W$ が成り立つ．よって，$w + (-w) = 0_V$ も W の元である．

(2) $w_1, w_2 \in W_1 \cap W_2$，$\alpha_1, \alpha_2 \in K$ を任意に取る．このとき，$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ も $W_1 \cap W_2$ の元であることを示せばよい．そのためには，$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ が W_1 に属し，かつ W_2 にも属していることを示せばよい．

$w_1, w_2 \in W_1 \cap W_2$ なので，w_1, w_2 は W_1 に属している．W_1 は V の部分空間なので，$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ は W_1 に属している．同様の議論で $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$ は W_2 に属していることもわかるので，以上で結論を得る．

(3) $v, v' \in W_1 + W_2$，$\alpha, \alpha' \in K$ を任意に取る．このとき，$\alpha v + \alpha' v'$ も $W_1 + W_2$ の元であることを示せばよい．

v, v' は $W_1 + W_2$ の元なので，$w_1, w_1' \in W_1$ と，$w_2, w_2' \in W_2$ で，

$$v = w_1 + w_2, \quad v' = w_1' + w_2'$$

となるものが存在する．このとき，

$$\begin{aligned} \alpha v + \alpha' v' &= \alpha(w_1 + w_2) + \alpha'(w_1' + w_2') \\ &= (\alpha w_1 + \alpha' w_1') + (\alpha w_2 + \alpha' w_2') \end{aligned}$$

と変形できる．$w_1, w_1' \in W_1$ であることと，W_1 が V の部分空間であることから，$\alpha w_1 + \alpha' w_1' \in W_1$ である．同様にして，$\alpha w_2 + \alpha' w_2' \in W_2$ もわかる．よって，$\alpha v + \alpha' v'$ は W_1 の元と W_2 の元の和で書けることがわかるので，$\alpha v + \alpha' v' \in W_1 + W_2$ であることが証明できた．

□

2　基底

物理で力学を勉強すると，力の分解というのが非常に重要であることは承知できると思う．ある力を表すベクトルを，2 つの方向に分解する場合は，図のように平行四辺形を作ってやればいい．そして，方向ごとに力の釣り合いなどを考えるのが力学の問題の典型的な解き方である．

力学に限らず，あるものをもっと単純なものの和に分解するということは効果的である．

例 2.1. K^2 の任意のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ というベクトルと $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ というベクトルを用いて，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書くことができる．しかし別の表現もできる．例えば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を採用すれば，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

という分解もできる．しかし，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ では，上のように表現できないベクトルもある．例えば，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は，第 2 成分が 0 でないため，どうやってもこの 2 つのベクトルのスカラー倍と和で書くことは不可能である．

さらに，ベクトルの数を増やして，例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ というベクトル 3 つで分解することを考えると，もちろんどんなベクトルも分解できるが，

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，分解の仕方が複数存在することになる．

例 2.2. 漸化式 $a_{j+2} = 2a_{j+1} + 3a_j$ を満たす数列 (a_j) を考える．

$a_j = \alpha^j$ という形の等比数列で，上の漸化式を満たすものを探してみると，α は $\alpha^2 = 2\alpha + 3$ を満たす必要があることがわかる．よって，$\alpha = -1, 3$ であって，$((-1)^j)$ と (3^j) という数列は上の漸化式を満たす．

すると，この 2 つの数列をスカラー倍して足し合わせた $(\beta_1(-1)^j + \beta_2 3^j)$ という形の数列も，漸化式を満たしていることが直接計算で確認できる．さらに実は，上の漸化式を満たすような数列は，この形のものに限られるということも証明できる．実際，漸化式を変形すると，

$$a_{j+2} + a_{j+1} = 3(a_{j+1} + a_j)$$

となるので，$(a_{j+1}+a_j)$ は公比 3 の等比数列であり，$a_{j+1}+a_j=b_2 3^j$ と書けることがわかる．一方で，

$$a_{j+2}-3a_{j+1}=-(a_{j+1}-3a_j)$$

とも変形できるので，$(a_{j+1}-3a_j)$ は公比 -1 の等比数列であり，$a_{j+1}-3a_j=b_1(-1)^j$ と書ける．よって，

$$a_j=\frac{b_1}{4}(-1)^j+\frac{b_2}{4}3^j$$

となるので，結論を得る．

こうした，「和とスカラー倍で分解できるかどうか」ということを，一般の K-ベクトル空間上で議論するための概念が次の**線形結合**と**基底**の考え方である．

定義 2.3. V を K-ベクトル空間とする．

(1) $v_1,v_2,\dots,v_n\in V$ と $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in K$ に対して，$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n$ という形の元を，$v_1,\dots,v_n$ の**線形結合** (linear combination) という．

(2) V を K-ベクトル空間とし，$B\subset V$ を部分集合とする．B が V 上**線形独立** (linearly independent)[6] であるとは，任意の有限個の B の元 $v_1,\dots,v_n\in B$ と，スカラー $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ に対して，

$$\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_n v_n=0$$

ならば，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ となることである．

(3) V の部分集合 $B\subset V$ に対して，B が V を**生成する** (generate) とは，0 でない任意の V の元が，B に属する有限個の元の線形結合として表現できることをいう．つまり，任意の $v\in V$ に対して，ある有限個の B の元 $v_1,\dots,v_m\in B$ と，スカラー $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in K$ で，

$$v=\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_m v_m$$

となるものが存在することをいう．

(4) V の部分集合 $B\subset V$ が，V の**基底** (basis) であるとは，B が V を生成していて，なおかつ B が V 上線形独立であることをいう．

例 2.4. 各 $1\le j\le n$ に対して，$e_j\in K^n$ を，第 j 成分のみ 1 で，それ以外の成分は 0 であるようなベクトルとする．そして，

$$B=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$$

と置く．このとき，B は K^n の基底になる．

線形独立であることを確認するには，

$$\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n=0$$

となる $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ はすべて 0 しかないということを示せばよい．実際，任意の $1\le j\le n$ に対して，上の式の左辺の第 j 成分は α_j になる．従って，$\alpha_j=0$ が言える．

6） **一次独立**という言い方をすることもある．

また，生成することを確認するには，任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ が，$e_1, \dots, e_n$ の線形結合で書けることを示せばいいが，これは，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

となることから言える．

このような基底を K^n の**標準基底**という．

例 2.5. まず，$V = K^3$ として，

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

という集合を考える．

B は線形独立である．実際，

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となったとする．すると，これを満たす $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ は，連立方程式

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \end{cases}$$

の解である．これを解くと $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ であるので，B は線形独立である．

一方で，B は V を生成しない．実際，任意のベクトル $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3$ が，

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と表せるかどうかを考える．これは，β_1, β_2 に対する連立方程式

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 & = x_1 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 & = x_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 & = x_3 \end{cases} \tag{1}$$

が解を持つかどうかを調べることに帰着する．この方程式の拡大係数行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 2 & 3 & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{pmatrix}$$

であり，これを階段行列に変形すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3x_1 + 2x_2 \\ 0 & 1 & 2x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & -5x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

となる．したがって，連立方程式 (1) が解を持つための必要十分条件は，$-5x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$ である．よって，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ がこれを満たさなければ，(1) は解を持たない．

例 2.6. 同じく $V = K^3$ 上で，

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

という集合を考える．

B は線形独立にはならない．実際

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in K$ をとったとする．この方程式の係数行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり，これを階段行列に変形すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

となるから，例えば $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, -1, 2, 3)$ とすれば，これは上の (2) を満たしている．よって B は線形独立にはならない．

一方，B は K^3 を生成している．これは，任意の $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K^3$ について，

$$\beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる $\beta_1, \dots, \beta_4$ があることを示せばよい．拡大係数行列は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & x_3 \end{pmatrix}$$

となり，これを階段行列に変形すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1+x_2+x_3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{x_1+x_3}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{5x_1-3x_2-x_3}{6} \end{pmatrix}$$

となる．拡大係数行列と係数行列の階数が一致するので，(3) は必ず解を持つことがわかる．

例 2.7. n を正の整数として，$K_n[x]$ を，n 次以下の多項式全体のなす K-ベクトル空間とする．つまり，

$$K_n[x] := \{\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x_1 + \alpha_0 \,;\, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K\}$$

とする．このとき，集合

$$B = \{1, x, \dots, x^n\}$$

は $K_n[x]$ の基底になる．実際，B が線形独立であることは，

$$\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x_1 + \alpha_0 = 0$$

が多項式として成り立つような $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ が自明なものしかないことから言える．また，B が $K_n[x]$ を生成することは，$K_n[x]$ の定義から明らかである．

定理 2.8. V を K-ベクトル空間とし，$B \subset V$ を 0 を含まない部分集合とする．このとき，以下はすべて同値である．

(1)　B は V の基底である．

(2)　任意の 0 でない $v \in V$ に対して，v は B の有限個の元の線形結合として表すことができ，さらにそれは 1 通りに定まる．

(3)　B は V を生成し，さらに B の真部分集合で V を生成するものは存在しない．

(4)　B は V 上線形独立で，B を含む V の部分集合で線形独立になるようなものは存在しない．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): 仮定より B は V の基底なので，特に B は V を生成する．従って，任意の $0 \neq v \in V$ は B の有限個の元の線形結合として表すことができる．次にその表し方が 1 通りしかないことを示す．今，v が B の元による線形結合で以下のように 2 つに表せたとしよう．

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$
$$v = \alpha'_1 v'_1 + \cdots + \alpha'_{n'} v'_{n'}.$$

ここで，$v_1, \ldots, v_n$ と $v'_1, \ldots, v'_{n'}$ の中には，共通する元があるかもしれない．今 m 個のベクトルが共通していたとすると，番号付けを適切に変えることによって，

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n,$$
$$v = \alpha'_1 v_1 + \cdots + \alpha'_m v_m + \alpha'_{m+1} v'_{m+1} + \cdots + \alpha'_{n'} v'_{n'}.$$

と書けていると考えてよい．このとき，両辺の差を取って整理すると，

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) v_1 + \cdots + (\alpha_m - \alpha'_m) v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n + (-\alpha'_{m+1}) v'_{m+1} + \cdots + (-\alpha'_{n'}) v'_{n'} = 0$$

となる．$v_1, \ldots, v_n, v'_{m+1}, \ldots, v'_{n'}$ は B の元であるので，特に線形独立でもある．従って，上の式の左辺に出てくるスカラーはすべて 0 にならなければならない．従って，

$$\alpha_j = \alpha'_j, \qquad (1 \leq j \leq m)$$
$$\alpha_k = 0, \qquad (m+1 \leq k \leq n)$$
$$\alpha'_\ell = 0, \qquad (m+1 \leq \ell \leq n')$$

が成り立つ．従って，v の表示は 1 通りに定まることがわかった．

(2) $\Rightarrow$ (1): (2) の仮定から，B が V を生成することは明らかなので，B が V 上線形独立であることを示せば十分である．有限個の元 $v_1, \ldots, v_n \in B$ と，スカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ で，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

となるものが存在したと仮定する．もし，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の中に 0 でないものが存在したとする．必要であれば番号をつけ直すことで，$\alpha_1 \neq 0$ と仮定しても構わない．すると，

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

である．ここで，$v_1, \ldots, v_n \in B$ であるので，この式の両辺はどちらも B の元による線形結合である．しかしこれは，同じ元を B の元の線形結合として表す方法が 2 通りあることになり，(2) の仮定と矛盾する．以上で B の線形独立性がわかる．

(1) $\Rightarrow$ (3): B が V を生成することは基底の定義から明らかである．もし，B の真部分集合 $B' \subset B$ で，B' が V を生成するものが存在したと仮定する．そこで，B に含まれるが B' には含まれない元 v を取る．仮定から，これは B' の元の線形結合で書けるので，有限個の元 $v'_1, \ldots, v'_n \in B'$ と，スカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ で，

$$v = \alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_n v'_n$$

となるものが存在する．左辺を右辺に移項して，

$$-v + \alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_n v'_n = 0$$

を得る．ところで，$B' \subset B$ なので，$v, v'_1, \ldots, v'_n$ はすべて B の元である．B は基底なので，特に線形独立でもある．なので，$v, v'_1, \ldots, v'_n$ の線形結合で 0 が作れたとすれば，すべてのベクトルの係数は 0 にならなければいけない．しかし，上の式で v の係数は $-1 \neq 0$ なので，矛盾する．以上で結論を得る．

(3) $\Rightarrow$ (1): これも B が線形独立であることを証明すればよい．有限個の元 $v_1, \ldots, v_n \in B$ と，スカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ で，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

となるものが存在したと仮定する．先程と同じく，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の中に 0 でないものが存在したとして，必要であれば番号をつけ直して，$\alpha_1 \neq 0$ と仮定しておく．すると，

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n \tag{4}$$

であることは先程見たとおりである．すると，B から v_1 を除いた集合 $B \setminus \{v_1\}$ も V を生成する．実際，もしも，ある $v \in V$ が，v_1 と他の元 $v_2', \ldots, v_m' \in B$ によって，

$$v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2' + \cdots + \beta_m v_m'$$

と書けたとする．このとき，(4) を代入すると，

$$v = -\frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n \beta_1}{\alpha_1} v_n + \beta_2 v_2' + \cdots + \beta_m v_m'$$

となり，v は v_1 以外の B の元の線形結合として表せることがわかる．しかし，$B \setminus \{v_1\}$ は B の真部分集合なので，この事実は (3) に反する．以上で結論を得る．

(1) $\Rightarrow$ (4): B を含む V の部分集合 $B \subset B'$ を任意に取る．すると，$v \in B' \setminus B$ が取れる．B は基底なので，v が B の元の線形結合として，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = v$$

と書ける．すると，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n - v = 0$$

であるが，この式の左辺は B' の元の線形結合である．v の係数が 0 でないので，ないことがわかる．B' は線形独立ではないことがわかる．

(4) $\Rightarrow$ (1): B が V を生成することを示せばよい．もし，V の元 v で，B の元の線形結合で書けないものが存在したと仮定する．このとき，$B \cup \{v\}$ が線形独立であることを示す．$B \cup \{v\}$ の有限個の元 $v_1, \ldots, v_n$ とスカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ で，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

となるものが存在したとする．もし $v_1, \ldots, v_n$ がすべて B の元であるなら，B の線形独立性より，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ である．そこで，$v_1, \ldots, v_n$ のどれかが v であると仮定する．必要であれば番号をつけかえることで，$v_1 = v$ としてもよい．このとき，$\alpha_1 = 0$ だとすると，残りの $v_2, \ldots, v_n$ はすべて B の元だから，再び B の線形独立性から $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ が言える．なので，$\alpha_1 \neq 0$ と仮定してよい．このとき，

$$v = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

となるが，これは v が B の元 $v_2, \ldots, v_n$ の線形結合で表せるということを意味し，v が B の元の線形結合で書けないという仮定に反する．よって，$B \cup \{v\}$ は線形独立であるが，これは (4) の仮定に反している．以上で結論を得る．□

どんなベクトル空間でも基底が存在するが知られているが，その証明には予備知識が必要となる．

定理 2.9. 任意の K-ベクトル空間には基底が存在する．

3　線形写像

2 つのベクトル空間が与えられたとき，その間の写像であって，ベクトル空間の性質を保つようなものを考える．

定義 3.1. V, W を K-ベクトル空間とする．写像 $f\colon V \to W$ が**線形写像**であるとは，次の 2 つの条件を満たすことである．

(1)　任意の $v_1, v_2 \in V$ に対して，$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ である．

(2)　任意の $v \in V$ と $\alpha \in K$ に対して，$f(\alpha v) = \alpha f(v)$ である．

部分空間の場合と同じく，上の 2 条件は一つの条件に直すことが可能である．

命題 3.2. V, W を K-ベクトル空間とする．写像 $f\colon V \to W$ について，以下の 2 つの条件は同値である．

(1)　f は線形写像である．

(2)　任意の $v_1, v_2 \in V$ と，スカラー $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ に対して，

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

である．

証明 (1) ⇒ (2): 線形写像の定義を使うと，

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= f(\alpha_1 v_1) + f(\alpha_2 v_2) \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \end{aligned}$$

となるので (2) が導ける．

(2) ⇒ (1): (2) の式で $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ とすると，

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

を得る．一方，$\alpha_2 = 0$ とおけば，

$$f(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 f(v_1)$$

を得る．　$\square$

例 3.3. K^3 から K^2 への写像 f を，

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

で定めると，これは線形写像になる．実際，命題 3.2 を確認してみればよく，任意の $v := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K$，

$w := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in K^3$ と $\alpha, \beta \in K$ に対して，

$$\begin{aligned} f(\alpha v + \beta w) &= f \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha x_1 + \beta y_1) - 2(\alpha x_2 + \beta y_2) \\ (\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_3 + \beta y_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha(x_1 - 2x_2) + \beta(y_1 - 2y_2) \\ \alpha(x_1 - x_3) + \beta(y_1 - y_3) \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 - 2y_2 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(v) + \beta f(w) \end{aligned}$$

となるので，f の線形性がわかる．

今の例 3.3 の写像 f は，行列を使って次のように表すことも可能である:

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

実は，一般に，K^n から K^m への線形写像は，すべて行列の掛け算として表されることが以下の定理からわかる．

定理 3.4. ユークリッド空間 K^n から K^m への写像 f について，以下は同値である．

(1) f は線形写像である．

(2) ある $m \times n$ 行列 $A \in M_{m,n}(K)$ で，任意の $v \in K^n$ に対して，$f(v) = Av$ となるものが存在する．この A を f の**表現行列**という．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): $e_1, \dots, e_n$ を K^n の標準基底として，

$$f(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

とおき，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

で行列 A を定義する．このとき，$f(v) = Av$ となることを示す．$v \in K^n$ を成分表示して，$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ と書く．すると，

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

であるので，f が線形写像であることから，

$$\begin{aligned} f(v) &= f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\ &= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが，この最後の式は Av のことである．以上で結論を得る．

(2) $\Rightarrow$ (1): 命題 3.2 を確認すればよい．$v_1, v_2 \in K^n$ と $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ に対して，

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= \alpha_1 A v_1 + \alpha_2 A v_2 \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \end{aligned}$$

となるので，結論を得る． □

注意 3.5. この証明の (2) $\Rightarrow$ (1) で標準基底を考える理由を，例 3.3 に沿って説明しておく．例 3.3 の f を標準基底に適用すると，

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり，これは (5) の右辺に出てくる行列の第 1 列〜第 3 列に対応している．このように，$f\colon K^n \to K^m$ から定理 3.4 に現れる行列 A を作るためには，「標準基底に f を適用した結果のベクトルを横に並べる」という操作をすればよい．

以下の定理はほぼ明らかであるが，表現行列を使うことで，行列の積を線形写像の言葉で特徴づけることができることは重要である．

命題 3.6. $f\colon K^n \to K^\ell$，$g\colon K^\ell \to K^m$ を線形写像とし，$A \in M_{\ell,n}(K)$ と $B \in M_{m,n}(K)$ をそれぞれ f, g の表現行列とする．このとき，$g \circ f\colon K^n \to K^m$ の表現行列は BA である．

証明 $v \in K^\ell$ に対して，$(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(Av) = BAv$ なので明らかである． □

線形写像に関する基本的な性質をまとめておく．

命題 3.7. V, V_1, V_2, V_3, W を K-ベクトル空間とする．

(1) $f\colon V \to W$ が線形写像ならば，$f(0) = 0$ である．

(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ は線形写像である．

(3) $f\colon V_1 \to V_2$ と $g\colon V_2 \to V_3$ が線形写像ならば，合成 $g \circ f\colon V_1 \to V_3$ も線形写像である．

(4) $f\colon V \to W$ が単射であるための必要十分条件は，$f(v) = 0$ ならば $v = 0$ となることである．

(5) $f\colon V \to W$ が全単射ならば，その逆写像 $f^{-1}\colon W \to V$ も線形写像である．

証明

(1) $v \in V$ を任意に 1 つ取る．このとき，$v + (-v) = 0$ なので，

$$f(v + (-v)) = f(0)$$

である．左辺は f の線形性を用いて，

$$f(v + (-v)) = f(v) - f(v) = 0$$

となるので，$f(0) = 0$ が示せる．

(2) $v_1, v_2 \in V$ と $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ に対し，

$$\mathrm{id}_V(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 \mathrm{id}_V(v_1) + \alpha_2 \mathrm{id}_V(v_2)$$

となるので結論を得る．

(3) f, g はともに線形なので，$v_1, v_2 \in V$ と $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ に対し，

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= g(f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) \\ &= g(\alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)) \\ &= \alpha_1 g(f(v_1)) + \alpha_2 g(f(v_2)) \\ &= \alpha_1 (g \circ f)(v_1) + \alpha_2 (g \circ f)(v_2)\end{aligned}$$

となるので，結論を得る．

(4) (必要性) (1) と単射の定義から明らかである．

(十分性) $f(v) = 0$ を満たす v は $v = 0$ しかないと仮定する．$v_1, v_2 \in V$ を $f(v_1) = f(v_2)$ となるように取る．このとき，f の線形性から，

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0$$

となる．よって，$v_1 - v_2 = 0$，つまり，$v_1 = v_2$ となるので，f は単射である．

(5) $w_1, w_2 \in W$ と，$\beta_1, \beta_2 \in K$ を任意に取って，$f^{-1}(w_1) = v_1$，$f^{-1}(w_2) = v_2$ とおく．このとき逆写像の定義から，$f(v_1) = w_1$，$f(v_2) = w_2$ である．

今，$v' = f^{-1}(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2)$ とおくと，$f(v') = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$ である．

一方で，

$$\begin{aligned}f(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) &= \beta_1 f(v_1) + \beta_2 f(v_2) \\ &= \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2\end{aligned}$$

なので，$f(v') = f(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)$ が成立する．f は全単射なので，$v' = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$ であり，これは，

$$f^{-1}(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 f^{-1}(w_1) + \beta_2 f^{-1}(w_2)$$

ということなので，結論を得る．

□

命題 3.7 の (4) と (5) について，もう少し簡潔に述べるための用語をいくつか準備しよう．

定義 3.8. V, W を K-ベクトル空間，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．

(1) f を適用すると 0 に行くような V の元全体のなす V の部分集合を，f の**核** (kernel) といい，$\ker f$ と書く．これはつまり，

$$\ker f = \{v \in V \,;\, f(v) = 0\}$$

ということである．

(2) $f(v)$ という形の元全体のなす W の部分集合を，f の**像** (image) といい，$\operatorname{Im} f$ と書く．つまり，

$$\operatorname{Im} f = \{f(v) \in W \,;\, v \in V\}$$

ということである．

(3) f が全単射であるとき，f を**同型写像** (isomorphism) といい，V と W は**同型** (isomorphic) であるという．V と W が同型であることを，$V \cong W$ と書く．

以上の用語を定義すれば，線形写像における全射や単射といった概念は次のように簡潔に述べることができる．

命題 3.9. V, W を K-ベクトル空間，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．

(1) $\ker f$ は V の部分空間である．

(2) $\operatorname{Im} f$ は W の部分空間である．

(3) f が単射であることと，$\ker f = \{0\}$ であることは同値である．

(4) f が全射であることと，$\operatorname{Im} f = W$ であることは同値である．

証明

(1) $v_1, v_2 \in \ker f$ と $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ を任意に取る．このとき，命題 1.12 より，$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \ker f$ であることを示せばよいことがわかる．$v_1, v_2 \in \ker f$ なので，$f(v_1) = f(v_2) = 0$ である．従って，

$$f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = 0$$

となるので，$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \ker f$ である．

(2) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f$ と $\beta_1, \beta_2 \in K$ を任意に取る．$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \in \operatorname{Im} f$ を示せばよい．$w_1, w_2 \in \operatorname{Im} f$ なので，ある $v_1, v_2 \in V$ で，

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2$$

となるものが存在する．すると，

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 = \beta_1 f(v_1) + \beta_2 f(v_2) = f(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2)$$

となるので，$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \in \operatorname{Im} f$ が証明できた．

(3) 命題 3.7(4) より明らかである．

(4) 全射の定義から明らかである．

□

定理 3.4 の示すとおり，ユークリッド空間の間の線形写像は，表現行列とベクトルの積で表されるのであった．なので，その線形写像が全射であるか単射であるかという性質も，対応する表現行列の性質に帰着される．

命題 3.10. $f\colon K^n \to K^m$ を線形写像とし，$A \in M_{m,n}(K)$ を f の表現行列とする．

(1) f が単射であるための必要十分条件は，$\operatorname{rank} A = n$ となることである．

(2) f が全射であるための必要十分条件は，$\operatorname{rank} A = m$ となることである．

(3) f が全単射であるための必要十分条件は，A が正則になることである．またこのとき，f^{-1} の表現行列は A^{-1} である．

証明

(1) f が単射であるということは，$f(v) = 0$ となる v は 0 しかないということである．これは，$Av = 0$ となる v が 0 しかないということを意味している．斉次連立方程式の解の存在定理より，これは $\operatorname{rank} A = n$ と同値である．

(2) f が全射であるということは，任意の $w \in K^m$ に対して，$v \in K^n$ で $f(v) = Av = w$ を満たすものが存在するということである．つまり，任意の $w \in K^m$ に対して，$Av = w$ という方程式が解を持つということと同値である．このためには，任意の $w \in K^m$ に対して，拡大係数行列 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & w \end{pmatrix}$ と係数行列 A のランクが一致することが必要十分条件である．これが成り立つためには，$\operatorname{rank} A = m$ が必要十分であることを示す．

$\operatorname{rank} A = m$ ならば，どのような $w \in K^m$ を付け加えて拡大係数行列を作っても，そもそも行数が m で不変なので，$\operatorname{rank} A$ は m にしかなり得ない．

一方，逆に $r := \operatorname{rank} A < m$ であったと仮定する．すると，行基本変形を行うことで，ある正則行列 $P \in M_m(K)$ で，PA が階段行列になるものが存在することがわかる．すると，$P\widetilde{A}$ は，

$$P\widetilde{A} = \begin{pmatrix} PA & Pw \end{pmatrix}$$

と書けることがわかる．今，PA は階段行列で，$r < m$ なので，PA の $r+1$ 行目以降はすべて 0 である．

そこで，w を標準基底の $r+1$ 番目である e_{r+1} を使って，$w = P^{-1}e_{r+1}$ と選べば，

$$P\widetilde{A} = \begin{pmatrix} PA & PP^{-1}e_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PA & e_{r+1} \end{pmatrix}$$

となるが，この行列のランクは $r+1$ となるため，$r = \operatorname{rank} A$ と一致しない．以上で結論を得る．

(3) (1) と (2) より，全射かつ単射であることと，$m = n$ であり $\operatorname{rank} = m$ であることが同値になるので，A は正則である．また，f^{-1} の表現行列を B とすると，$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{K^m}$ なので，$AB = BA = E_m$ となるから，$B = A^{-1}$ である．

□

3.1 線形写像の表現行列

V を K-ベクトル空間として，B を V の有限部分集合とし，B の元を $v_1, \ldots, v_n$ と順序付けしておく．このとき，K^n から V への写像 ϕ_V を，

$$\varphi_{V,B} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \tag{6}$$

と定義する．この写像は線形写像である．実際，$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$ と $\alpha, \beta \in K$ に対して，

$$\begin{aligned}
\varphi_{V,B}\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) &= \varphi_V \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{pmatrix} \\
&= (\alpha x_1 + \beta y_1)v_1 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)v_n \\
&= \alpha(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n) + \beta(y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n) \\
&= \alpha\varphi_V \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta\varphi_V \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるからである．

B の性質と $\varphi_{V,B}$ の性質には以下のような対応がある．

命題 3.11． (1) $\varphi_{V,B}$ が単射であることと，B が一次独立であることは同値である．

(2) $\varphi_{V,B}$ が全射であることと，B が V を生成することは同値である．

(3) $\varphi_{V,B}$ が同型であることと，B が V の基底であることは同値である．

証明 (3) は (1) と (2) から直ちに言えるので，(1) と (2) のみ示す．

(1) 命題 3.7(4) より，

$$\begin{aligned}
&\varphi_{V,B} \text{ が単射である．} \\
&\iff \varphi_{V,B}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \text{ ならば，} x_1 = \cdots = x_n = 0 \text{ である．} \\
&\iff x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0 \text{ ならば } x_1 = \cdots = x_n = 0 \text{ である．}
\end{aligned}$$

この最後の主張は B の一次独立性の定義そのものだから，結論を得る．

(2) $\varphi_{V,B}$ が全射であることと，任意の $v \in V$ に対して，ある $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ で，$\varphi_{V,B}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v$ となるものが存在することは同値である．この式は $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = v$ と同値なので，これは任意の $v \in V$ が $v_1, \ldots, v_n$ の線形結合で書けるということを意味しており，従って，B は V を生成するという定義そのものである．以上で結論を得る．

□

そこでこの $\varphi_{V,B}$ を使って，次のような定義をする．

定義 3.12. V を K-ベクトル空間とする．V の元を並べた有限列 $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ が，V の**順序付き基底**であるとは，$\{v_1, \ldots, v_n\}$ が V の基底をなすことをいう．

定義 3.13. V, V' を K-ベクトル空間，$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ をそれぞれ V, V' の順序付き基底であるとし，それぞれの元の個数を n, n' とする．また，$\varphi_{V,\mathcal{B}}$ と $\varphi_{V',\mathcal{B}'}$ を先ほどの (6) で定めると，命題 3.11 より，これらは同型になる．

このとき，任意の線形写像 $f\colon V\to V'$ について，合成

$$\psi := \varphi_{V',\mathcal{B}'}^{-1}\circ f\circ \varphi_{V,\mathcal{B}}\colon K^n\to K^{n'}$$

は，ユークリッド空間の線形写像を与える．そこで，定理 3.4 を用いて，ψ の表現行列 A を考えることができるが，これを **f の $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ に関する表現行列**という．

このように，基底を用いることで，線形写像は行列の形で表現することができる．ただ，この定義では，具体的に表現行列をどう求めればいいかは教えてくれない．そこで，具体的な計算方法を以下の命題で与えよう．

命題 3.14. V,V' を K-ベクトル空間，$\mathcal{B},\mathcal{B}'$ をそれぞれ V,V' の順序付き基底であるとし，

$$\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$$
$$\mathcal{B}'=(v'_1,\dots,v'_{n'})$$

とする．$f\colon V\to V'$ を線形写像として，$\mathcal{B}$ に属している各 v_j について，

$$f(v_j)=\alpha_{1j}v'_1+\dots\alpha_{n'j}v'_{n'}$$

と線形結合で表示できたと仮定する．このとき，f の $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ に関する表現行列は，

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n'1} & \dots & \alpha_{n'n}\end{pmatrix}$$

で与えられる．

証明 定義 3.13 に現れる写像 $\psi\colon K^n\to K^{n'}$ の表現行列を計算してみる．任意の $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in K^n$ に対して，

$$\begin{aligned}(f\circ\varphi_{V,\mathcal{B}})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} &= f(x_1v_1+\dots+x_nv_n)\\ &= x_1f(v_1)+\dots+x_nf(v_n)\\ &= \sum_{j=1}^n x_jf(v_j)\\ &= \sum_{j=1}^n x_j(\alpha_{1j}v'_1+\dots+\alpha_{n'j}v'_{n'})\\ &= \sum_{j=1}^n(\alpha_{1j}x_jv'_1+\dots+\alpha_{n'j}x_jv'_{n'})\\ &= \left(\sum_{j=1}^n\alpha_{1j}x_j\right)v'_1+\dots+\left(\sum_{j=1}^n\alpha_{n'j}x_j\right)v'_{n'}\end{aligned}$$

であるから，

$$\varphi_{V',\mathcal{B}'}^{-1}\circ f\circ\varphi_{V,\mathcal{B}})\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n\alpha_{1j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n\alpha_{n'j}x_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n'1} & \dots & \alpha_{n'n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

となるので結論を得る． $\square$

例 3.15. $f\colon K^2 \to K^3$ を，

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

で定める．K^2 と K^3 の順序付き基底 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を，

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$
$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

で定める．$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ に関する f の表現行列を求めよう．

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．表現行列は，命題 3.14 より，各式の係数を縦に並べてしまえばよく，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

例 3.16. n を 1 以上の整数とする．$K_n[x]$ を，n 次以下の多項式全体の作るベクトル空間とする．$K_2[x]$ と $K_3[x]$ の順序付き基底 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を，

$$\mathcal{B} = \left(1, x, x^2\right),$$
$$\mathcal{B}' = \left(1, x, x^2, x^3\right)$$

で定める．$f\colon K_2[x] \to K_3[x]$ を，$f(\varphi(x)) = (x-1)\varphi(x)$ で定めるとき，$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ に関する f の表現行列を求めよう．

$$\begin{aligned} f(1) &= x - 1 &&= (-1) \cdot 1 \quad + 1 \cdot x \\ f(x) &= x(x-1) &&= \qquad\qquad (-1)x \quad + 1 \cdot x^2 \\ f(x^2) &= x^2(x-1) &&= \qquad\qquad\qquad\qquad (-1)x^2 \quad + 1 \cdot x^3 \end{aligned}$$

となるので，表現行列は，

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

表現行列の中で特別なものを考える．

定義 3.17. V を線形空間とし，$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ を V の 2 つの順序付き基底であるとし，それぞれの元の個数を n, n' とする．このとき，恒等写像 id_V の $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ に関する表現行列 A を，**$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ の間の基底の変換行列**という．表現行列の定義から，この A は

$$\psi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} := \varphi_{V,\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi_{V,\mathcal{B}} \colon K^n \to K^{n'} \tag{7}$$

の変換行列であり，従って同型を与える．これを $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ の間の**基底の入れ替え行列**という．

以上の定義から，実は以下のことがわかる．

定理 3.18. V が n 個の元からなる基底 B を持つとする．このとき，V の任意の基底の元の個数は n である．

証明 $\mathcal{B}$ を B の元を適当に順序付けしてできる順序付き基底とする．また，$\mathcal{B}'$ を V の別の順序付き基底とする．$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ それぞれの元の個数を n, n' とする．このとき，(7) で定義される $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ の間の基底の入れ替え写像 $\psi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \colon K^n \to K^{n'}$ は同型である．すると，命題 3.10 の (3) より，$n = n'$ でなければならないことがわかる．つまり，$\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}'$ の元の個数は一致する． $\square$

4 次元

定理 3.18 より，基底が有限個からなるのであれば，その個数はどの基底をとっても同じであることがわかる．従って次のような定義ができる．

定義 4.1. V を K-ベクトル空間とする．V の基底が有限個のベクトルからなるとき，その個数は基底の選び方によらず不変である．その個数を V の**次元** (dimension) といい，$\dim_K V$，もしくは K が明らかな場合は $\dim V$ と書く．

例 4.2. ユークリッド空間 K^n の次元は n である．これは，K^n の標準基底が n 個のベクトルからなることから明らかである．

例 4.3. n 次以下の多項式全体からなる K-ベクトル空間

$$K_n[x] := \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \,;\, a_j \in K \ (j = 0, \ldots, n)\}$$

は，$\{1, x, \ldots, x^n\}$ を基底として持つため，次元は $n+1$ である．

例 4.4. $K_4[x]$ の部分空間

$$V := \{p(x) \in K_4[x] \,;\, p(1) = p(3) = 0\}$$

の次元を考える．そのためには，V の基底を一つ求めればよい．$p(x) \in V$ とするとき，$p(1) = p(3) = 0$ なので，ある $a_0, a_1, a_2 \in K$ で，

$$p(x) = (x-1)(x-3)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$$

となるものが存在する．すると，これを展開して，

$$p(x) = a_0(x-1)(x-3) + a_1 x(x-1)(x-3) + a_2 x^2 (x-1)(x-3)$$

と書けば，V は $\{(x-1)(x-3), x(x-1)(x-3), x^2(x-1)(x-3)\}$ で生成されることがわかる．これらは一次独立でもあるので，V の基底となる．よって，$\dim V = 3$ である．

4.1 ベクトルの集合の性質と次元の関係

ベクトルの集合に対して，一次独立や生成するといった性質をすでに知っているが，これらが次元とどういう関係にあるのかについてここでは議論する．まず，ベクトルの集合が与えられたときに，それらから自然に作られる部分空間を定義する．

定義 4.5. V を K-ベクトル空間とし，$X \subset V$ を部分集合とする．

$$\langle X \rangle := \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \,;\, n \leq 0, a_j \in K, v_j \in X\} \tag{8}$$

と定義すると，$\langle X \rangle$ は V の部分空間になる．これを，**X の生成する V の部分空間**という．もし，X が有限集合で，$X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ である場合，$\langle X \rangle$ を $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ と書くこともある．

つまり，$\langle X \rangle$ とは，X の有限個の元の線形結合で表わすことのできるベクトル全体のなす部分空間である．

命題 4.6. V を K-ベクトル空間とするとき，次が成り立つ．

(1) $X \subset Y \subset V$ ならば，$\langle X \rangle \subset \langle Y \rangle$ である．

(2) $X \subset V$ を n 個の元からなる部分集合で，一次独立であるようなものであるとする．このとき，$\dim \langle X \rangle = n$ である．

(3) $X \subset V$ を部分集合とする．このとき，$v \in \langle X \rangle$ であるための必要十分条件は，$\langle X \cup \{v\} \rangle = \langle X \rangle$ となることである．

(4) $X \subset V$ を部分集合とする．このとき，X が一次独立でないための必要十分条件は，ある $v \in X$ で，$v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$ となるものが存在することである．つまり，ある X の元 v で，v が v 以外の X の元の線形結合で書けるものが存在することである．

(5) $X \subset V$ を部分集合として，$|X| = r$ とする．部分集合 $X' \subset \langle X \rangle$ に対して，$|X'| \geq r+1$ ならば，X' は一次独立にならない．

証明

(1) X の線形結合で書ける元が Y の線形結合でも書けるということを示せばいいが，これは明らかである．

(2) X は $\langle X \rangle$ を生成しており，さらに一次独立なので，$\langle X \rangle$ の基底になる．従って結論を得る．

(3) $v \in \langle X \rangle$ であると仮定する．すると，ある $v_1, \ldots, v_n \in X$ と，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ で，

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \tag{9}$$

となるものが存在する．今，$w \in \langle X \cup \{v\} \rangle$ を任意に取ると，$w_1, \ldots, w_m \in X$ と $\beta_1, \ldots, \beta_m, \beta \in K$ で，

$$w = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m + \beta v \tag{10}$$

となるものが存在する．(10) に (9) を代入して整理すると，

$$w = \alpha_1 \beta v_1 + \cdots + \alpha_n \beta v_n + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m$$

となるので，$w \in \langle X \rangle$ である．よって，$\langle X \cup \{v\} \rangle \subset \langle X \rangle$ が成り立つ．(1) より，$\langle X \rangle \subset \langle X \cup \{v\} \rangle$ なので，結論を得る．

逆に $\langle X \cup \{v\} \rangle = \langle X \rangle$ であると仮定すると，$v \in \langle X \cup \{v\} \rangle$ なので，$v \in \langle X \rangle$ である．

(4) X が一次独立でないとすると，$v_1, \ldots, v_n \in X$ と，自明でない $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ で，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

となるものが存在する．$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ はすべて 0 ではない．必要ならば番号を付け替えることによって，$\alpha_1 \neq 0$ であると仮定してよい．このとき，

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

であるので，v_1 は v_1 以外の X の元の線形結合で表すことができる．

逆に $v \in X$ が v 以外の X の元 $v_1, \ldots, v_m \in X$ の線形結合で書けたとする．つまり，ある $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ で，

$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_m v_m$$

となるものが存在したと仮定する．このとき，

$$v - \beta_1 v_1 - \cdots - \beta_m v_m = 0$$

であり，これは X の元の自明ではない線形結合が 0 になるということなので，X は一次独立ではない．

(5) X の元を $v_1,\dots,v_r$，X' の元を $v'_1,\dots,v'_s$ と並べる．仮定より $s \geq r+1$ である．$X' \subset \langle X\rangle$ なので，α_{jk} $(1 \leq j \leq r, 1 \leq k \leq s)$ で，各 k に対して，

$$v'_k = \alpha_{1k}v_1 + \cdots + \alpha rkv_r$$

となるものが存在する．今，$\beta_1 v'_1 + \cdots + \beta_s v'_s = 0$ となったと仮定すると，上の式を代入してまとめることで，

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{s}\alpha_{jk}\beta_k\right)v_j = 0$$

となることがわかる．つまり，少なくともこの式で各 v_j の係数が 0 になるような自明でない $\beta_1,\dots,\beta_r$ が存在すれば証明は終わる．それは

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rs}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix} = 0$$

ということと同値である．ここで，行列 $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{r1} & \cdots & \alpha_{rs}\end{pmatrix}$ は $r \times s$ 行列であり，$r < s$ なので，上の連立方程式を満たすような 0 でない $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_s\end{pmatrix}$ が存在する．以上で結論を得る．

□

命題 4.6 (3) から，X の元の中には，$\langle X\rangle$ を構成するには余分な元が存在する可能性があることがわかる．具体例を示そう．

例 4.7. 今，K^3 の 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

で生成される部分空間を考えよう．$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ なので，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ は他の 2 つの元の一次結合で書くことができる．そうすると，命題 4.6(3) より，

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

である．つまり，$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ は $\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$ の構成には本来不要な元である．また，$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ は一次独立なので，命題 4.6(2) より，

$$\dim\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 2$$

である．

このように，部分集合 $X \subset V$ が与えられたとき，$\langle X \rangle$ の次元を知るには，X の中に上の例のような「余分な元」がいくつあるかを調べる必要がある．それを踏まえて，次のような定義をする．

定義 4.8. V を K-ベクトル空間とし，$X \subset V$ とする．X の**一次独立な最大個数が** m であるとは，以下の 2 つの条件がともに成り立つことをいう．

(1) X の部分集合 $X' \subset X$ で，$|X'| = m$ かつ，X' が一次独立になるようなものが存在する．

(2) $|X'| \geq m+1$ となる任意の X の部分集合 $X' \subset X$ に対して，X' は一次独立にならない．

ただし，$m = |X|$ の場合は，(1) のみをもって定義するものとする．

命題 4.9. V を K-ベクトル空間とし，$X \subset V$ とする．このとき，以下は同値である．

(1) X の一次独立な最大個数は m である．

(2) 一次独立な部分集合 $X' \subset X$ で，$|X'| = m$ であり，かつ $X \subset \langle X' \rangle$ となるものが存在する．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): X' を，$|X'| = m$ となるような一次独立な X の部分集合とする．そして，$X' = \{v_1, \dots, v_m\}$ とラベルづけしておく．$v \in X \setminus X'$ を一つとると，(1) の仮定と一次独立な最大個数の定義から，$X' \cup \{v\}$ は一次独立にはならない．よって，ある自明でない $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha \in K$ で，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha v = 0$$

となるものが存在する．

今，$\alpha = 0$ だったとすると，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = 0$$

となるが，X' は一次独立なので，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$ となって，$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha$ は自明でないという条件に反する．ゆえに，$\alpha \neq 0$ であって，

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\alpha} v_m$$

となるので，$v \in \langle X' \rangle$ となる．従って，$X \subset \langle X' \rangle$ である．

(2) $\Rightarrow$ (1): (2) の条件より，$|X'| = m$ となる一次独立な部分集合 $X' \subset X$ は存在するので，$|X''| \geq m+1$ となる任意の部分集合 $X'' \subset X$ が一次独立にならないことを示せばよい．ここで，条件より，$X'' \subset X \subset \langle X' \rangle$ であるので，命題 4.6 (5) より，X'' は一次独立にはならない． □

以上の準備のもと，以下が証明できる．

定理 4.10. V を K-ベクトル空間とし，$X \subset V$ とする．X の一次独立な最大個数が m であることと，$\dim \langle X \rangle = m$ は同値である．

証明 X の一次独立な最大個数が m であると仮定する．すると，命題 4.9 (2) より，一次独立な $X' \subset X$ で，$|X'| = m$ であり，なおかつ $X \subset |X'|$ となるものが存在する．よって，$\langle X \rangle = \langle X' \rangle$ が成り立つ．X' は一次独立だから，X' は $\langle X \rangle$ の基底となることがわかる．よって，$\dim \langle X \rangle = m$ である．

逆に $\dim \langle X \rangle = m$ であると仮定する．そして，X の一次独立な最大個数を r とおく．$X' \subset X$ を $|X'| \geq m+1$ となるような部分集合であるとする．このとき，$\langle X \rangle$ の基底 $\{w_1, \dots, w_m\}$ を一つとると，$X' \subset X \subset \langle X \rangle = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ であるので，命題 4.6 (5) より，X' は一次独立にはならない．よって，$r \leq m$ である．

一方で，$r < m$ であると仮定する．このとき，命題 4.9 (2) より，一次独立な部分集合 $X'' \subset X$ で，$|X''| = r$ かつ $X \subset \langle X'' \rangle$ となるものが存在する．このとき，$\langle X \rangle \subset \langle X'' \rangle$ である．命題 4.6 (2) より，$\dim \langle X'' \rangle = r$ なので，$m = \dim \langle X \rangle \leq r$ とならなければならない．しかしこれは $r < m$ と矛盾する．よって，$r = m$ である． □

この定理を用いると，次元と一次独立性の関係が次のようにわかる．

定理 4.11. V を K-ベクトル空間として，$B \subset V$ を $|B| = n$ であるような部分集合とするとき，以下は同値である．

(1) B は基底である．

(2) B は一次独立である．

(3) B は V を生成する．

証明 (2) かつ (3) は (1) と同値なので，(2) と (3) が同値であることを示せば証明が終わる．

(2) $\Rightarrow$ (3): $\dim V = n$ なので，V の一次独立な最大個数は n である．すると，任意の $v \in V \setminus B$ に対して，$B \cup \{v\}$ は一次独立にはならない．B 自身は一次独立なので，命題 4.9 の証明と同様の議論をすれば，$v \in \langle B \rangle$ であることがわかる．よって $V = \langle B \rangle$ である．

(3) $\Rightarrow$ (2): B は V を生成するので，$\langle B \rangle = V$ であり，$\dim \langle B \rangle = n$ となるから，B の一次独立な最大個数は n である．$|B| = n$ なので，B 自身が一次独立である． $\square$

4.2 斉次連立方程式から定まる部分空間の次元

$m \times n$ 行列 $A \in M_{m\times n}(K)$ に対して，A を係数行列とする斉次連立方程式の解の集合

$$\{v \in K^n \,;\, Av = 0\}$$

を考えると，これは K^n の部分空間になる．この空間の次元について考えよう．

例 4.12.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である場合を考える．A を階段行列に変形すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

となる．よって，$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$ となることと，

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_4 &= 0, \\ x_3 - \frac{1}{3}x_4 &= 0 \end{aligned}$$

は同値である．ここから，

$$x_1 = -x_2 + \frac{1}{3}x_4, \quad x_3 = \frac{1}{3}x_4$$

であることがわかる．よって，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_4/3 \\ x_2 \\ x_4/3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．これはつまり，$V = \{v \in K^4 \,;\, Av = 0\}$ という部分空間は，$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成されているということである．これらのベクトルは一次独立であるので，結局 $\dim V = 2$ がわかる．

以上の考え方を一般化することで，次のことが証明できる．

定理 4.13. $m \times n$ 行列 $A \in M_{m\times n}(K)$ に対して，A を係数行列とする斉次連立方程式の解全体が作る K^n の部分空間

$$V = \{v \in K^n \,;\, Av = 0\}$$

を考える．このとき，$\dim V = n - \operatorname{rank} A$ である．

証明 A を階段行列に変形したものを $\widetilde{A}$ とおく．$\operatorname{rank} A = r$ とすると $\widetilde{A}$ は以下を満たす行列である．

- $r+1$ 行目以降の成分はすべて 0
- j 行目 $(1 \leq j \leq r)$ について，第 1 列から見ていって初めて 0 でない成分が出てくる成分の値は 1 である．
- その成分を (j, r_j) とするとき，第 r_j 列は j 行目のみが 1 であり，それ以外は 0 である．

今，番号を適切に入れ替える，つまり，未知数 $x_1, \ldots, x_n$ の番号を入れ替えることにより，$r_j = j$ であると仮定してもよい．そうすると，この行列は次のような形をしている．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$Av = 0$ であるとき，$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ が満たすべき方程式は，

$$x_j + \alpha_{j,r+1} x_{r+1} + \cdots + \alpha_{j,n} x_n = 0 \, (1 \leq j \leq r)$$

となる．ただし，$\alpha_{k,\ell}$ は上の行列の $*$ の部分に相当する．このことから，各 $x_j \, (1 \leq j \leq r)$ について，

$$x_j = -\alpha_{j,r+1} x_{r+1} - \cdots - \alpha_{j,n} x_n$$

が成立する．そこで，$w_k \in K^m\,(j+1 \le k \le n)$ を，

$$w_k = \begin{pmatrix} -\alpha_{1,k} \\ \vdots \\ -\alpha_{r,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定義する．ただし，第 $r+1$ 成分以降は第 k 成分のみ 1 でそれ以外は 0 であるとする．すると，$Av = 0$ であるならば，

$$\begin{aligned} v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\alpha_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - \alpha_{1,n}x_n \\ \vdots \\ -\alpha_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - \alpha_{r,n}x_n \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_{r+1}w_{r+1} + \cdots + x_n w_n \end{aligned}$$

となる．すなわち，$V = \langle w_{r+1}, \ldots, w_n \rangle$ であることがわかる．

さらに，$w_{r+1}, \ldots, w_n$ は一次独立である．実際，$x_{r+1}w_{r+1} + \cdots + x_n w_n = 0$ となったとすると，任意の $r+1 \le k \le n$ に対して，左辺の第 k 成分は x_k であることがすぐにわかる．従って，$x_k = 0$ でなければならない．

以上より，$w_{r+1}, \ldots, w_n$ は V の基底であって，$\dim V = n - r$ であることから結論を得る． □

4.3 次元定理

先程の定理 4.13 は次のようにも解釈できる．$A \in M_{m\times n}(K)$ に対して，線形写像 $f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ で定めると，定理 4.13 に出てくる部分空間 V は $\ker f$ そのものである．つまり，定理 4.13 で主張したいことは，

$$\dim(\ker f) + \operatorname{rank} A = n = \dim K^n$$

ということである．

行列と線形写像は，行列表示によって密接に結びついており，有限次元のベクトル空間の間の線形写像は，適切な基底を考えることで行列表示できる．したがって，上の式を一般の線形写像に拡張することができないかどうかを考える．そのためにまず，線形写像の rank を定義する．

定義 4.14. V, W を K-ベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，f の像の次元 $\dim \operatorname{Im} f$ を，f の rank といい，$\operatorname{rank} f$ で表す．

ここで示すのは次の**次元定理**である．

定理 4.15. V, W を K-ベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．このとき，以下が成立する．

$$\dim(\ker f) + \operatorname{rank} f = \dim V \tag{11}$$

証明 $\ker f$ の次元を r として，その基底 $v_1, \dots, v_r \in V$ を取る．また $\operatorname{Im} f$ の次元を s として，その基底を $w_1, \dots, w_s \in W$ とする．各 $1 \le j \le s$ に対して，$w_j \in \operatorname{Im} f$ なので，ある $v'_j \in V$ で，$f(v'_j) = w_j$ となるものが存在する．そこで，以下，$v_1, \dots, v_r, v'_1, \dots, v'_s$ が V の基底であることを証明する．

まず V がこれらのベクトルで生成されることを示す．$v \in V$ とする．$f(v) \in \operatorname{Im} f$ なので，スカラー $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in K$ で，

$$f(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_s w_s$$

となるものが存在する．$f(v'_j) = w_j$ だったから，これは

$$f(v) = f(\alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_s v'_s)$$

と変形できる．従って，

$$f(v - (\alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_s v'_s)) = 0$$

となるので，$v - (\alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_s v'_s) \in \ker f$ である．従って，スカラー $\beta_1, \dots, \beta_r$ で，

$$v - (\alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_s v'_s) = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r$$

となるものが存在する．従って，左辺の第二項を右辺に移項すれば，

$$v = \alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_s v'_s + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r$$

であり，v は $v_1, \dots, v_r, v'_1, \dots, v'_s$ の線形結合で書けることがわかるので，結論を得る．

次に，一次独立であることを示すため，

$$\alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_s v'_s + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r = 0 \tag{12}$$

となるスカラー $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r \in K$ を取る．両辺に f を適用すると，$v_1, \dots, v_r \in \ker f$ と，$f(v'_j) = w_j$ であることから，

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_s w_s = 0$$

がわかる．$w_1, \dots, w_s$ は $\operatorname{Im} f$ の基底なので，$\alpha_1, \dots, \alpha_s$ はすべて 0 であることがわかる．従って，再び (12) を用いると，

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r = 0$$

であることがわかる．今度は $v_1, \dots, v_r$ が $\ker f$ の基底であることから，$\beta_1, \dots, \beta_r$ もすべて 0 になる．以上で一次独立性が示された．

以上の議論から，$v_1, \dots, v_r, v'_1, \dots, v'_s$ は V の基底をなすので，$r + s = \dim V$ である．$r = \dim \ker f$，$s = \operatorname{rank} f$ なので，結論を得る． □

次元定理を利用して次元を求める方法を以下の例で示す．

例 4.16. $n \ge 2$ として，$K_n[x]$ の部分空間

$$V = \{p(x) \in K_n[x] \,;\, p(0) = p(1) = 0\}$$

を考える．V の次元を計算することを考える．

今，線形写像 $f\colon K_n[x] \to K^2$ を，

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

で定義する．すると，$V = \ker f$ であることは容易にわかる．次元定理 (定理 4.15) によれば，$\dim \ker f + \operatorname{rank} f = \dim K_n[x] = n + 1$ なので，$\operatorname{rank} f$ を求めれば十分である．

ここで，f は全射である．実際，任意の $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in K^2$ に対して，$x(x-1)+(a_2-a_1)x+a_1 \in K_n[x]$ であり，

$$f(x(x-1)+(a_2-a_1)x+a_1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

となるからである．よって，$\operatorname{Im} f = K^2$ であり，$\operatorname{rank} f = 2$ となる．よって，次元定理より，$\dim V = (n+1)-2 = n-1$ がわかる．

4.4 直和

V を K-ベクトル空間とし，$W_1, W_2 \subset V$ を部分空間とすると，和 $W_1 + W_2$ という部分空間ができることはすでに命題 1.15 で扱った通りである．

和については，次の命題が成立する．

命題 4.17. 2 つのベクトルの集合 $X_1, X_2 \subset V$ があり，$W_1 = \langle X_1 \rangle$，$W_2 = \langle X_2 \rangle$ であるとする．このとき，$W_1 + W_2 = \langle X_1 \cup X_2 \rangle$ である．

証明 $v \in W_1 + W_2$ とすると，ある $w_1 \in W_1$ と $w_2 \in W_2$ で，$v = w_1 + w_2$ となるものが存在する．w_1 は X_1 の元の線形結合で書け，w_2 は X_2 の元の線形結合で書けるので，$w_1 + w_2$ は $X_1 \cup X_2$ の線形結合で書ける．つまり，$v \in \langle X_1 \cup X_2 \rangle$ である．

一方，$v \in \langle X_1 \cup X_2 \rangle$ であるとする．すると，ある $w_1, \ldots, w_{r_1} \in X_1$ と $w'_1, \ldots, w'_{r_2} \in X_2$，そしてスカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_1}, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{r_2} \in K$ で，

$$v = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{r_1} w_{r_1} + \alpha'_1 w'_1 + \cdots + \alpha'_{r_2} w'_{r_2}$$

となるものが存在する．ここで，$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{r_1} w_{r_1} \in \langle X_1 \rangle$ であり，$\alpha'_1 w'_1 + \cdots + \alpha'_{r_2} w'_{r_2} \in \langle X_2 \rangle$ であるので，$v \in \langle X_1 \rangle + \langle X_2 \rangle$ である．以上で結論を得る． □

この命題から，特に W_1 と W_2 の基底を B_1，B_2 とすれば，$W_1 + W_2 = \langle B_1 \cup B_2 \rangle$ であることはわかる．しかし，$B_1 \cup B_2$ は一次独立であるとは限らないので，これは基底になっているとは限らない．逆に，$B_1 \cup B_2$ が自動的に基底となってくれれば都合がいいので，そういう性質を定義する．

定義 4.18. V を K-ベクトル空間とし，W_1, W_2 をその部分空間とする．$W_1 + W_2$ が**直和** (direct sum) であるとは，任意の $v \in W_1 + W_2$ に対して，$v = w_1 + w_2$ となるような $w_1 \in W_1$ と $w_2 \in W_2$ の組がただ一つしかないことを言う．このとき，$W_1 + W_2$ を $W_1 \oplus W_2$ と表現する．[7)]

以下の補題は直和であることを証明する際に便利である．

補題 4.19. W_1, W_2 を V の部分空間であるとする．このとき，以下は同値である．

(1) $W_1 + W_2$ は直和である．

(2) $w_1 \in W_1$ と $w_2 \in W_2$ が $w_1 + w_2 = 0$ を満たすならば，$w_1 = w_2 = 0$ である．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): $0 \in W_1 + W_2$ なので，$0 = w_1 + w_2$ となるような $w_1 \in W_1$ と $w_2 \in W_2$ の組は唯一つである．明らかに，$0 \in W_1$，$0 \in W_2$ であり，$0 = 0 + 0$ なので，$w_1 = w_2 = 0$ である．

(2) $\Rightarrow$ (1): $v \in W_1 + W_2$ に対して，

$$v = w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2$$

7) $W_1 + W_2$ が直和であれば，$W_1 + W_2$ という書き方と $W_1 \oplus W_2$ という書き方は同じものを指す．ただ後者は直和であるということを強調しているだけである．

となる $w_1, w_1' \in W_1$ と $w_2, w_2' \in W_2$ をとる．このとき，$(w_1-w_1')+(w_2-w_2')=0$ であり，$w_1-w_1' \in W_1$，$w_2-w_2' \in W_2$ であるので，(2) から $w_1-w_1'=0$ かつ $w_2-w_2'=0$ がわかる．よって，$w_1=w_1'$，$w_2=w_2'$ となり，結論を得る． □

先程も言ったとおり，W_1+W_2 が直和である場合には，W_1 の基底と W_2 の基底の和集合が $W_1 \oplus W_2$ の基底になるという著しい事実がある．

命題 4.20. W_1, W_2 を V の部分空間であるとする．このとき，以下は同値である．

(1) W_1+W_2 は直和である．

(2) 任意に W_1 と W_2 の基底 B_1 と B_2 を選ぶと，B_1 と B_2 は共通部分を持たず，さらに $B_1 \cup B_2$ は W_1+W_2 の基底をなす．

証明 (1) ⇒ (2): B_1 を W_1 の，B_2 を W_2 の基底とする．まず $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ を示す．実際 $v \in B_1 \cap B_2$ とすると，当然 $v \in W_1+W_2$ でもあり，$v \in W_1 \cap W_2$ でもある．よって，v の W_1 と W_2 の元による分解の仕方として，$v=0+v=v+0$ の 2 通りが考えられるが，これは W_1+W_2 が直和であることに反する．

次に $B_1 \cup B_2$ が $W_1 \oplus W_2$ の基底であることを示す．実際，$B_1 \cup B_2$ が $W_1 \oplus W_2$ を生成することは 命題 4.17 で示した通りだから，$B_1 \cup B_2$ が一次独立であることを示せば十分である．そこで，$v_1, \ldots, v_{r_1} \in B_1$ と $v_1', \ldots, v_{r_2}' \in B_2$，そしてスカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_1}, \alpha_1', \ldots, \alpha_{r_2}' \in K$ で，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{r_1} v_{r_1} + \alpha_1' v_1' + \cdots + \alpha_{r_2}' v_{r_2}' = 0$$

となるものを取る．このとき，$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{r_1} v_{r_1} \in W_1$，$\alpha_1' v_1' + \cdots + \alpha_{r_2}' v_{r_2}' \in W_2$ であるから，(1) の仮定と補題 4.19 より，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{r_1} v_{r_1} = \alpha_1' v_1' + \cdots + \alpha_{r_2}' v_{r_2}' = 0$$

とならなければならない．B_1 と B_2 はそれぞれ一次独立なので，結局 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{r_1} = \alpha_1' = \cdots = \alpha_{r_2}' = 0$ である．以上で結論を得る．

(2) ⇒ (1): W_1 の基底 B_1 と W_2 の基底 B_2 を任意に取る．すると，(2) より，$B_1 \cup B_2$ は W_1+W_2 の基底であり，さらに B_1 と B_2 は共通部分を持たない．今，$w_1+w_2=0$ となる $w_1 \in W_1$ と $w_2 \in W_2$ を取る．そして，$v_1, \ldots, v_{r_1} \in B_1$ と $v_1', \ldots, v_{r_2}' \in B_2$，スカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r_1}, \alpha_1', \ldots, \alpha_{r_2}' \in K$ で，

$$w_1 = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{r_1} v_{r_1},\ w_2 = \alpha_1' v_1' + \cdots + \alpha_{r_2}' v_{r_2}'$$

と表現する．すると，

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{r_1} v_{r_1} + \alpha_1' v_1' + \cdots + \alpha_{r_2}' v_{r_2}' = 0$$

であり，これは $B_1 \cup B_2$ の線形結合であるから，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{r_1} = \alpha_1' = \cdots = \alpha_{r_2}' = 0$ である．よって，$w_1 = w_2 = 0$ であり，補題 4.19 を用いれば結論を得る． □

上の命題からただちに次のことがわかる．

命題 4.21. W_1+W_2 が直和であれば，$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ である．

では，W_1+W_2 が直和とは限らない場合，その次元はどうなるであろうか．W_1 の基底を B_1，W_2 の基底を B_2 とすると，命題 4.17 より，$B_1 \cup B_2$ は W_1+W_2 を生成することは言える．しかし今度は直和ではないので，$B_1 \cup B_2$ そのものが基底であるとは限らない．$B_1 \cup B_2$ の中には，基底を構成するためには不要なベクトルがある可能性があるので，一般に $\dim(W_1+W_2) \leq \dim W_1 + \dim W_2$ である．この差を評価するための定理が以下の定理である．

定理 4.22. W_1, W_2 を V の部分空間であるとする．このとき，

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) \tag{13}$$

が成り立つ．

この定理を証明するために，以下の補題をまず証明する．この補題自体も，**基底の延長**と呼ばれる重要な性質である．

補題 4.23. $W \subset V$ を部分空間とする．W の基底 B に対して，B を含む V の基底 B' が存在する．

証明 $\dim V = n$，$\dim W = |B| = r$ とする．r についての逆向き帰納法で証明する．

まず $r = n$ とすると，B 自身が V の基底でもあるので自明である．次に，一般の r で補題が成立しているとする．$\dim W = r-1$ として，B を W の基底とする．$r-1 < n$ なので，B の線形結合で書けない V の元 v が存在する．このとき，$B \cup \{v\}$ は一次独立であり，$W' = \langle B \cup \{v\} \rangle$ は r 次元の部分空間である．帰納法の仮定より，W' の基底 $B \cup \{v\}$ を含むような V の基底 B' を作ることができる．これは当然 B も含むので，$\dim W = r-1$ の場合も補題は成立する．以上で結論を得る． □

では定理 4.22 を証明しよう．

証明 [定理 4.22] $W_1 \cap W_2$ の基底 B を取る．$W_1 \cap W_2$ は W_1 の部分空間でもあり，W_2 の部分空間でもあるから，B を含むような W_1 の基底 B_1 と，B を含むような W_2 の基底 B_2 を取ることができる．すると，$B_1 \cup B_2$ が $W_1 + W_2$ を生成することが命題 4.17 からわかる．そこで，$B_1 \cup B_2$ が一次独立であることを示せば，$B_1 \cup B_2$ が $W_1 + W_2$ の基底であることが示される．すると，包除定理より，

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2|$$

であり，$B_1 \cap B_2 = B$ であることと，$|B_1| = \dim W_1$，$|B_2| = \dim W_2$，$|B_1 \cup B_2| = \dim(W_1 + W_2)$, $|B| = \dim(W_1 \cap W_2)$ であることから，結論が得られる．

$B_1 \cup B_2$ が一次独立であることを示そう．B の元を $w_1, \ldots, w_m$ とし，B を延長して W_1 の基底を作るときに追加された元を $v_{m+1}, \ldots, v_{n_1}$，W_2 の基底を作るときに追加された元を $v'_{m+1}, \ldots, v'_{n_2}$ とする．つまり，

$$\begin{aligned} B_1 &= \{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_{n_1}\}, \\ B_2 &= \{w_1, \ldots, w_m, v'_{m+1}, \ldots, v'_{n_2}\} \end{aligned}$$

であり，

$$B_1 \cup B_2 = \{w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_{n_1}, v'_{m+1}, \ldots, v'_{n_2}\}$$

である．そこで，

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m + \beta_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \beta_{n_1} v_{n_1} + \beta'_{m+1} v'_{m+1} + \cdots + \beta'_{n_2} v'_{n_2} = 0 \tag{14}$$

となるスカラー $\alpha_j, \beta_k, \beta'_\ell$ を取る．このとき，

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m + \beta_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \beta_{n_1} v_{n_1} = -(\beta'_{m+1} v'_{m+1} + \cdots + \beta'_{n_2} v'_{n_2})$$

であり，この式の左辺は B_1 の元，右辺は B_2 の元である．従って，右辺は $B_1 \cap B_2$ の元であるので，

$$-(\beta'_{m+1} v'_{m+1} + \cdots + \beta'_{n_2} v'_{n_2}) = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_m w_m$$

と書ける．再び移項して，

$$\beta'_{m+1} v'_{m+1} + \cdots + \beta'_{n_2} v'_{n_2} + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_m w_m = 0$$

と書けば，これは W_2 の基底 B_2 の元の線形結合であるので，$\beta'_{m+1} = \cdots = \beta'_{n_2} = \gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$ である．これを (14) に代入すれば，

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m + \beta_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \beta_{n_1} v_{n_1} = 0$$

となり，これは W_1 の基底 B_1 の元の線形結合である．従って，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_{m+1} = \cdots = \beta_{n_1} = 0$ となるから，結論を得る． □

定理 4.22 から，次のことがわかる．

命題 4.24. W_1, W_2 を V の部分空間とする。このとき、以は同値である。

(1) $W_1 + W_2$ は直和である。

(2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ である。

証明 (1) $\Rightarrow$ (2): $W_1 + W_2$ は直和なので，$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ である．定理 4.22 を用いると，$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$ がわかるので，(2) が得られる．

(2) $\Rightarrow$ (1): (2) の仮定と定理 4.22 より，$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$ であるので，$W_1 + W_2$ は直和である． □

さて，3 つ以上の部分空間に関しても，直和という概念は同様に定義される．最後にこのことに触れておくことにしよう．

定義 4.25. V を K-ベクトル空間とし，$W_1, \ldots, W_m$ をその部分空間とする．$W_1 + \cdots + W_m$ が**直和** (direct sum) であるとは，任意の $v \in W_1 + \cdots + W_m$ に対して，$v = w_1 + \cdots + w_m$ となるような $w_j \in W_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ の組がただ一つしかないことを言う．このとき，$W_1 + \cdots + W_m$ を $W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$ と表現する．

3 つ以上の部分空間の和が直和であるための必要十分条件は，2 つのときと比べるといささか複雑になってしまう．

命題 4.26. V を K-ベクトル空間とし，$W_1, \ldots, W_m$ をその部分空間とする．このとき，以下は同値である．

(1) $W_1 + \cdots + W_m$ は直和である．

(2) $w_1 + \cdots + w_m = 0$ となるような $w_j \in W_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ が存在すれば，$w_1 = \cdots = w_m = 0$ である．

(3) 任意の $j = 1, \ldots, m$ に対して，

$$W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_m) = \{0\}$$

となる．

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) は補題 4.19 の証明とほぼ同じであるので省略する．

(1) $\Rightarrow$ (3): ある j で，

$$W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_m) \neq \{0\}$$

となるものが存在したと仮定する．このとき，$0 \neq v \in W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_m)$ を一つ取ることができる．この v は W_j の元であり，なおかつ $W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_m$ の元であるから，$W_1, \ldots, W_m$ の元の和で書く方法は 2 通りあることになり，(1) に反する．よって結論を得る．

(3) $\Rightarrow$ (2): $w_1 + \cdots + w_m = 0$ となるような $w_j \in W_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ で，w_j のうちどれか一つは 0 にならないものが存在したと仮定する．そのような w_j に対し，$w_j = -w_1 - \cdots - w_{j-1} - w_{j+1} - \cdots - w_m$ なので，$w_j \in W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1} + W_{j+1} + \cdots + W_m)$ であることがわかる．これは (3) に反するから，結論を得る． □

この命題について勘違いしやすいことを注意しておこう．部分空間が 2 つの場合，$W_1 + W_2$ が直和であるための必要十分条件は，$W_1 \cap W_2 = \emptyset$ となることであった．なので，そこからの類推で，$W_1 + \cdots + W_m$ が直和になるための必要十分条件は，「任意の j, k に対して $W_j \cap W_k = \emptyset$ となることである」と言いたくなってしまうが，これは間違いである．

例 4.27. K^2 の 3 つの部分空間を，

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,\ W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,\ W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

で定める．すると，$W_1 \cap W_2 = W_2 \cap W_3 = W_3 \cap W_1 = \emptyset$ となることはすぐにわかるが，$W_1 + W_2 + W_3$ は直和にはならない．実際，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

であり，この式の左辺は W_1, W_2, W_3 の元の和になっているからである．

5　固有値と固有ベクトル

5.1　固有値と固有ベクトルの定義

まず固有値と固有ベクトルを線形写像に対して定義する．

定義 5.1. V を K-ベクトル空間，$f\colon V \to V$ を線形写像とする．$\lambda \in K$ が f の固有値であるとは，0 でないベクトル $v \in V$ で，$f(v) = \lambda v$ となるものが存在することを言う．このような v を，固有値 λ に対応する固有ベクトルという．

次の命題はすぐに証明できる．

命題 5.2. V を K-ベクトル空間，$f\colon V \to V$ を線形写像とする．$\lambda \in K$ が f の固有値である場合，λ に対応する f の固有ベクトル (と零ベクトル) 全体

$$E(\lambda; f) := \{v \in V\,;\, f(v) = \lambda v\}$$

は V の部分空間である．

そこで以下のように定義しておく．

定義 5.3. 上の $E(\lambda; f)$ を，λ に対応する固有空間という．

一方で，固有値という概念は $n \times n$ 行列に対して定義されるのが普通である．

定義 5.4. $A \in M_n(K)$ を $n \times n$ 行列とする．$\lambda \in K$ が A の固有値であるとは，0 でないベクトル $v \in K^n$ で，$Av = \lambda v$ となるものが存在することをいう．このような v を，固有値 λ に対応する A の固有ベクトルという．また，λ に対応する A の固有ベクトル (と零ベクトル) 全体

$$E(\lambda; A) := \{v \in K^n\,;\, Av = \lambda v\}$$

は K^n の部分空間であり，これを λ に対応する A の固有空間という．

有限次元のベクトル空間を考えている限り，線形写像の固有値と行列の固有値というのはほぼ同じものであることは，以下の命題から示される．

命題 5.5.
(1)　$A \in M_n(K)$ とし，線形写像 $f\colon K^n \to K^n$ を，$f(v) = Av$ で定める．このとき，$\lambda \in K$ が A の固有値であることと，λ が f の固有値であることは同値であり，さらにこのとき，$E(\lambda; f) = E(\lambda; A)$ である．

(2)　V を有限次元の K-ベクトル空間とし，$n = \dim V$ とする．$f\colon V \to V$ を線形写像とし，$B \subset V$ を V の基底とする．このとき，f の B に関する表現行列を $A \in M_n(K)$ とすると，$\lambda \in K$ が f の固有値であることと，λ が A の固有値であることは同値であり，さらにこのとき，$E(\lambda; f)$ と $E(\lambda; A)$ は同型になる．

証明

(1)　定義から明らかである．

(2)　λ が f の固有値であるとし，$v \in V$ をその固有ベクトルとする．$B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ として，v を B の線形結合の形で表現しておく．つまり，

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

となる $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ を取る．すると，表現行列の定義から，

$$f(v) = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．今，$f(v) = \lambda v$ なので，結局

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

となり，λ は A の固有値にもなる．

逆に，$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ が固有値 λ に対応する A の固有ベクトルであれば，$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ が $f(v) = \lambda v$ を満たすことは，上の議論を逆にたどればわかる．このとき，$\varphi\colon E(\lambda; A) \to E(\lambda; f)$ を，$\varphi \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ で定めれば，これが同型写像になることは上の議論と B が基底になることから証明できる．

□

行列の固有値は以下のように求めることができる．

命題 5.6. $A \in M_n(K)$ とする．λ が A の固有値であるための必要十分条件は，$\det(A - \lambda I_n) = 0$ となることである．$\det(A - \lambda I_n)$ は λ に関する n 次の多項式であり，これを A の固有多項式という．

証明 A が λ の固有値であることの定義は，0 でない $v \in K^n$ で，$Av = \lambda v$ となるものが存在することである．$Av = \lambda v$ は $(A - \lambda I_n)v = 0$ と変形できるので，A が λ の固有値であることは，$A - \lambda I_n$ が正則でないことと同値であり，これは $\det(A - \lambda I_n) = 0$ と同値になる． □

例 5.7. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

の固有値と固有ベクトルを求めてみる．

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -2 & -2 \\ 4 & 3-\lambda & 2 \\ 8 & 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$$

なので，固有値は $\lambda = 1, 3$ である．

固有値 1 に対応する固有空間は $(A - I)v = 0$ の解空間である．$A - I$ を階段行列に変形すると，

$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので，固有空間は

$$E(1;A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．

同様に，固有値 3 に対応する固有空間は $(A-3I)v=0$ の解空間である．$A-3I$ を階段行列に変形すると，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので，固有空間は

$$E(1;A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である．

5.2 行列の相似

天下り的ではあるが，次のような概念を定義する．

定義 5.8. $A, B \in M_n(K)$ を $n \times n$ 行列とする．B が A に相似であるとは，正則な $n \times n$ 行列 $P \in M_n(K)$ で，$B = P^{-1}AP$ となるものが存在することである．

この相似という関係については以下が成立する．

命題 5.9. 任意の $A, B, C \in M_n(K)$ について以下が成り立つ．

(1) A は A に相似である．

(2) B が A に相似であるならば，A は B に相似である．

(3) B が A に相似であり，C が B に相似であるならば，C は A に相似である．

注意 5.10. 上の 3 つの主張が満たされていることを，「相似という関係は同値関係である」という．

証明

(1) $P = I_n$ とおけば，P は正則であり，$A = P^{-1}AP$ である．

(2) $B = P^{-1}AP$ となる $P \in M_n(K)$ を取ると，$A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$ だから，$Q = P^{-1}$ とおけば，$A = Q^{-1}BQ$ となる．

(3) $B = P^{-1}AP$，$C = Q^{-1}BQ$ となる $P, Q \in M_n(K)$ を取る．すると，

$$C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ)$$

なので，$R = PQ$ とおけば，$C = R^{-1}AR$ である．

$\square$

行列どうしの相似という概念が重要なのは，相似な行列というのは線形写像としてほぼ同じものだからである．

命題 5.11. V を K-ベクトル空間とし，その次元を n とする．$f\colon V \to V$ を線形写像として，$\mathcal{B}$ を V の順序付き基底とし，$A \in M_n(K)$ を $\mathcal{B}$ に関する f の表現行列とする．このとき，$A' \in M_n(K)$ について以下は同値である．

(1) V の順序付き基底 $\mathcal{B}'$ で，f の $\mathcal{B}'$ に関する表現行列が A' であるものが存在する．

(2) A' は A と相似である．

証明 以下，

$$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n),\ \mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_n')$$

とし，同型写像 $\varphi_{\mathcal{B}}\colon K^n \to V$ を，$\varphi_{\mathcal{B}}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ で定める．$\varphi_{\mathcal{B}'}\colon K^n \to V$ も同様に定める．

(1) $\Rightarrow$ (2): 表現行列の定義から，$w \in K^n$ とするとき，$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}(w) = Aw$ かつ $\varphi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}'}(w) = A'w$ である．ここで，

$$\begin{aligned}
&\varphi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}'}(w)\\
&= \varphi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ (\varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}) \circ f \circ (\varphi_{\mathcal{B}} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}) \circ \varphi_{\mathcal{B}'}(w)\\
&= (\varphi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}}) \circ (\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}) \circ (\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}'})(w)\\
&= (\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}'})^{-1} \circ (\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}) \circ (\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}'})(w)
\end{aligned} \tag{15}$$

なので，$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}'}\colon K^n \to K^n$ の表現行列を P とすると，

$$A'w = \varphi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}'}(w) = P^{-1}APw$$

であるから，結論を得る．

(2) $\Rightarrow$ (1): 今，$A' = P^{-1}AP$ となる $P \in M_n(K)$ を取る．そして，P の (j, k) 成分を p_{jk} とする．このとき，$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ に対して，

$$v_j' = p_{1j}v_1 + \cdots + p_{nj}v_n \tag{16}$$

で $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_n')$ を定めると，これは V の順序付き基底となる．実際，V の次元は n なので，1 次独立であることを示せば十分である．$\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ で，

$$\beta_1 v_1' + \cdots + \beta_n v_n' = 0$$

となるものを取る．これに上の式を代入すると，

$$(p_{11}\beta_1 v_1 + \cdots + p_{n1}\beta_1 v_n) + \cdots + (p_{1n}\beta_n v_1 + \cdots + p_{nn}\beta_n v_n) = 0$$

であるので，v_j の係数は $p_{j1}\beta_1 + \cdots + p_{jn}\beta_n$ であり，これはベクトル $P\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$ の第 j 成分である．$v_1, \ldots, v_n$ は基底をなすので，v_j の係数はすべて 0 にならなくてはならない．つまり，$P\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix} = 0$ であり，P の正則性から $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix} = 0$ となるので結論を得る．

最後に $\mathcal{B}'$ による f の行列表示が A' であることを示す．任意の $w = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ について，

$$\varphi_{\mathcal{B}'}(w) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v'_k = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} p_{jk}\alpha_k \right) v_j$$

であるので，

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \varphi_{\mathcal{B}'}(w) = Pw$$

となることがすぐにわかる．故に，(15) より，$\mathcal{B}'$ による f の表現行列は $P^{-1}AP = A'$ となる． □

このように，**2 つの行列が相似であるとは，その 2 つの行列はある同一の線形写像を別の基底でそれぞれ行列表示したものであるということを意味している．** だから，行列が相似であるということは，線形写像の意味での性質がほぼ同一であるということにほかならない．

上の命題から導かれる帰結として，f が K^n からそれ自身への線形写像である場合に次が成り立つ．

命題 5.12. $A \in M_n(K)$ として，$f_A\colon K^n \to K^n$ を，$f_A(v) = Av$ で与えられる線形写像とする．このとき，$A' \in M_n(K)$ について以下は同値である．

(1) K^n の順序付き基底 $\mathcal{B}$ で，f_A の $\mathcal{B}$ に関する表現行列が A' であるものが存在する．

(2) A' は A と相似である．

また，(2) が成立するとき，$A' = P^{-1}AP$ となる $P \in M_n(K)$ をとり，$w_j \in K^n$ を P の第 j 列からなるベクトルであるとすれば，(1) の $\mathcal{B}$ は $(w_1, \ldots, w_n)$ で与えられる．

証明 命題 5.11 において，$V = K^n$，$f = f_A$ とし，$\mathcal{B}$ として K^n の標準基底を取る．そうすると，f_A の標準基底に関する表現行列は A であることに注意すれば，(1) と (2) が同値であることがわかる．またこのとき，(16) で，v_j を標準基底の e_j に取れば，$v'_j = w_j$ であることがわかる． □

このように，行列 A と行列 B が相似ならば，基底を取り替えることで，線形写像 $v \mapsto Av$ の表現行列が B になるようにすることができる．そこで，B としてどこまで単純なものが取れるかを考察してみる．

5.3 対角化

定義 5.13. 行列 $A \in M_n(K)$ について，A と相似な対角行列が存在するとき，A は対角化可能であるという．言い換えれば，A が対角化可能であるとは，正則行列 $P \in M_n(K)$ で，$P^{-1}AP$ が対角行列になるものが存在することを言う．

行列が対角化可能である場合，どのような対角行列に相似になるかは固有値と固有ベクトルが教えてくれる．

命題 5.14. 行列 $A \in M_n(K)$ が対角化可能であるとする．そして，正則行列 $P \in M_n(K)$ で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と表示できるとする．このとき，λ_j はすべて A の固有値であり，さらに P の第 j 列は A の λ_j に対応する固有ベクトルである．

証明 P の第 j 列に対応するベクトルを w_j とおく．$AP = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ であり，

$$AP = A\begin{pmatrix}w_1 & \dots & w_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Aw_1 & \dots Aw_n\end{pmatrix}$$
$$P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}w_1 & \dots & w_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 w_1 & \dots & \lambda_n w_n\end{pmatrix}$$

だから，第 j 列を比較して，$Aw_j = \lambda_j w_j$ を得る．ここから結論が従う． □

すべての行列が対角化可能であるとは限らない．

例 5.15. 行列 $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ を考える．この行列の固有多項式は $\det(A - \lambda I) = \lambda^2$ なので，固有値は 0 である．よって，もし A が対角化できたとすると，正則行列 $P \in M_2(K)$ で，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

となるものが存在するが，これは $A = O$ と同値になるので，矛盾する．

どのようなときに A が対角化可能であるのかについてこれから考える．まず，固有空間に関する次の性質を証明する．

命題 5.16. $A \in M_n(K)$ とし，$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を A の相異なる固有値であるとする．このとき，固有空間の和

$$E(\lambda_1; A) + \cdots + E(\lambda_m; A)$$

は直和になる．

証明 m についての帰納法で示す．$m = 1$ ならば証明すべきことはない．一般の m について，各固有空間から元 $w_j \in E(\lambda_j; A)$ を

$$w_1 + \cdots + w_m = 0$$

となるように取る．$w_1 = \cdots = w_m = 0$ であることを示せばよい．

この式の両辺に A を左からかけると，$Aw_j = \lambda_j w_j$ なので，

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0 \tag{17}$$

が成り立つ．

ここで，λ_j の中に 0 が含まれていたとする．一般性を失うことなく，$\lambda_1 = 0$ としてよい．すると，(17) は

$$\lambda_2 w_2 + \cdots + \lambda_m w_m = 0$$

と同値であり，$\lambda_2, \dots, \lambda_n$ はすべて 0 でないので，帰納法の仮定より，これが成立するならば $w_2 = \cdots = w_m = 0$ でなければならない．よって $w_1 = 0$ も成立する．

そこで，以下ではすべての λ_j は 0 にならないと仮定する．もう一度 (17) に A を左からかけると，

$$\lambda_1^2 w_1 + \cdots + \lambda_m^2 w_m = 0 \tag{18}$$

となる．(17) を λ_1 倍して，(18) との差を取ると，

$$\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)w_2+\cdots+\lambda_m(\lambda_1-\lambda_m)w_m=0$$

となる．$\lambda_1,\dots,\lambda_m$ は相異なるので，w_j の係数 $\lambda_j(\lambda_1-\lambda_j)$ は 0 にはならない．よって，帰納法の仮定より，$w_2=\cdots=w_m=0$ であって，従って $w_1=0$ も成り立つ．以上で結論を得る． □

以上をもとにして，対角化可能であるための必要十分条件を与える．

定理 5.17. $A\in M_n(K)$ とし，$\lambda_1,\dots,\lambda_m$ を A の相異なるすべての固有値とする．このとき，以下は同値である．

(1) A は対角化可能である．

(2) $K^n=E(\lambda_1;A)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m;A)$ である．

(3) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\dim E(\lambda_j;A)=n$ である．

証明 直和の次元の性質から，(2) と (3) の同値性はすぐ示せるので，(1) と (2) の同値性を示す．

(1) $\Rightarrow$ (2): A は対角化可能であるとし，$P\in M_n(K)$ を，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列とする．すると，命題 5.12 より，P の列を並べてできる順序付き基底 $\mathcal{B}$ に関して，線形写像 $f\colon K^n\to K^n\ (v\mapsto Av)$ を行列表示すると対角行列になる．このとき，$\mathcal{B}$ の元はすべて固有ベクトルになるので，K^n の任意の元は固有ベクトルの線形結合でかけるということがわかる．つまり，$K^n\subset E(\lambda_1;A)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m;A)$ である．逆の包含関係は明らかであるので[8)]，(2) が導かれる．

(2) $\Rightarrow$ (1): $K^n=E(\lambda_1;A)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m;A)$ なので，各 $E(\lambda_j;A)$ の基底をとってその和集合を考えると，それは K^n の基底となる．このとき，基底の各元はどれかの固有空間に入るので，固有ベクトルである．従って，K^n には固有ベクトルのみからなる基底が取れることになる．この基底に順序を入れて順序付き基底とし，$\mathcal{B}=(w_1,\dots,w_n)$ とする．各 w_j は固有ベクトルなので，$Aw_j=\mu_jw_j$ (μ_j は $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ のどれか) となる．すると，$w_1,\dots,w_n$ を並べてできる行列を P とすれば，

$$AP=\begin{pmatrix}Aw_1 & \dots & Aw_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1w_1 & \dots & \mu_nw_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix}$$

となるので，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n\end{pmatrix}$ が成り立つ．よって，A は対角化可能である． □

従って，対角化可能であるかどうかは，固有空間の次元を見ればいいことになる．さらに，この定理の証明は，具体的な対角化の方法まで与えていることに注意しよう．つまり，対角化可能性を調べて対角化するには，以下のステップを踏めばいい．

- その行列 A の固有値を計算する．
- 各固有値に対応する A の固有空間を計算する．
- 固有空間の次元の和が，行列 A のサイズに一致すれば対角化可能である．
- もし対角化可能ならば，各固有空間の基底を任意にとって並べてできる行列を P とすることで，$P^{-1}AP$ は対角行列になる．

8) $E(\lambda_j;A)$ は K^n の部分空間である．部分空間の和をとっても部分空間である．

例 5.18. 例 5.7 の A を再び考えると，

$$\dim E(1;A)+\dim E(3;A)=2+1=3$$

となり，A のサイズと一致するので，A は対角化可能である．$E(1;A)$ の基底 $\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2\\0\\1\end{pmatrix}$ と，$E(3;A)$ の基底 $\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$ を並べて，

$$P=\begin{pmatrix}-1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

とおけば，

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

となる．

例 5.19. $A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ を考える．$\det(A-\lambda I)=-(\lambda-1)^2(\lambda+1)$ なので，固有値は $\lambda=1,-1$ である．$E(1;A)$ と $E(-1;A)$ はそれぞれ

$$E(1;A)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle, E(-1;A)=\left\langle\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

となるが，これらの次元の合計は 2 であり，3 にはならないので，A は対角化可能にはならない．

5.4　最小多項式と Cayley-Hamilton の定理

以下では V を K-ベクトル空間とする．$f(x)$ を多項式とする．このとき，多項式に行列や線形写像を代入するという操作を次のように定義できる．

定義 5.20. $f(x)\in K[x]$ とし，$f(x)=a_mx^m+\cdots+a_0$ とする．$A\in M_n(K)$ について，

$$f(A)=a_mA^m+\cdots+a_0I_n$$

と定める．また，線形写像 $\varphi\colon V\to V$ に対して，線形写像 $f(\varphi)\colon V\to V$ を，

$$f(\varphi)(v):=a_mf^m(v)+\cdots+a_0v$$

で定義する．

このとき以下が成立することはすぐにわかる．

命題 5.21. (1) $f(x), g(x) \in K[x]$，$A \in M_n(A)$ ならば，

$$f(A) + g(A) = (f+g)(A), \quad f(A)g(A) = (fg)(A)$$

である．

(2) $f(x), g(x) \in K[x]$ とし，$\varphi\colon V \to V$ を線形写像とするならば，

$$f(\varphi) + g(\varphi) = (f+g)(\varphi), \quad f(\varphi) \circ g(\varphi) = (fg)(\varphi)$$

である．

(3) $f(x) \in K[x]$ とし，$\varphi\colon V \to V$ を線形写像として，$A \in M_n(K)$ を V のある基底 $\mathcal{B}$ に関する φ の表現行列とするならば，$f(\varphi)$ の $\mathcal{B}$ に関する表現行列は $f(A)$ である．

上の命題の (3) より，以下行列について成立することはすべて線形写像についても成立する．

さて，行列 $A \in M_n(K)$ について，A を代入すると O になる多項式を考える．そのようなものの中で一番次数が小さいものを考える．

命題 5.22. $A \in M_n(K)$ と表示できるとする．このとき，monic な (最高次の係数が 1 であるような) 多項式 $f(x) \in K[x]$ で，$f(A) = O$ となるもののうち，f の次数が最小のものが存在する．

証明 今，$\dim M_n(K) = n^2$ である．従って，$\{I_n, A, \ldots, A^{n^2}\}$ は n^2+1 個の行列からなるので一次独立ではない．よって，$\{I_n, A, \ldots, A^d\}$ が一次独立にならない最小の d を考える．この d について，$A^d \in \langle I_n, A, \ldots, A^{d-1}\rangle$ なので，

$$A^d = a_0 I_n + \cdots + a_{d-1}A^{d-1}$$

となる $a_0, \ldots, a_{d-1} \in K$ が取れる．すると，$f(x) = x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_0$ は $f(A) = O$ を満たす monic な多項式である．

一方で，$d-1$ 次以下の多項式 $g(x) = b_{d-1}x^{d-1} + \cdots + b_0$ で，$g(A) = O$ となるものが存在したと仮定する．すると，$g(A) = b_{d-1}A^{d-1} + \cdots + b_0 I_n = O$ であるが，d の定義から，$\{I_n, \ldots, A^{d-1}\}$ は一次独立なので，$b_0 = \cdots = b_{d-1} = 0$ となる．よって，$g(x)$ は monic になりえない．

よって $f(x)$ が求める多項式である． □

定義 5.23. 上の命題に出てくる f を A の最小多項式という．

最小多項式の重要な性質を以下に示す．

命題 5.24. $A \in M_n(K)$ とし，A の最小多項式を $f(x) \in K[x]$ とする．別の多項式 $g(x) \in K[x]$ が $g(A) = O$ を満たすならば，$g(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．

証明 $g(x)$ を $f(x)$ で割った商とあまりを $q(x), r(x)$ とすると，$g(x) = f(x)q(x) + r(x)$ であり，ここに A を代入すると，$g(A) = f(A) = O$ なので，$r(A) = O$ である．しかしながら，r の次数は f の次数より真に小さいので，これは f が最小多項式であることと矛盾する．以上で結論を得る． □

最小多項式を計算するために，以下の命題を用いる．

命題 5.25. $\varphi\colon V \to V$，$v \in V$ とする．m を，$\{v, \varphi(v), \ldots, \varphi^m(v)\}$ が一次独立でなくなるような最小の m とする．そして，$W = \langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v)\rangle$ とすると，以下が成り立つ．

(1) $\varphi(W) \subset W$ である．

(2) $\varphi^m(v) = a_{m-1}\varphi^{m-1}(v) + \cdots + a_0 v$ とすると，f の W への制限 $\varphi|_W$ の最小多項式は $F(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \cdots - a_0$ である．

証明

(1) W の元を $w = \alpha_0 v + \cdots + \alpha_{m-1}\varphi^{m-1}(v)$ とする．このとき，$\varphi(w) = \alpha_0 f(v) + \cdots + \alpha_{m-1}\varphi^m(v)$ であり，m の定義から，$\varphi^m(v) \in W$ であるので，$\varphi(w) \in W$ が成り立つ．

(2) $v_j = \varphi^j(v)$ と略記すると，[9]

$$(\varphi^m - a_{m-1}\varphi^{m-1} + \cdots + a_0 \mathrm{id}_V)(v) = 0$$

なので，$F(\varphi)(v) = 0$ である．ここで，$F(\varphi) \circ (\varphi^j) = \varphi^j \circ F(\varphi)$ なので，

$$F(\varphi)(v_j) = F(\varphi) \circ (\varphi^j)(v) = \varphi^j \circ F(\varphi)(v) = 0$$

となる．ここで，W は $\{v_0, \ldots, v_{m-1}\}$ を基底にもち，その元すべてが $F(\varphi)$ で 0 に行くので，結局 $F(\varphi|_W)$ は零写像である．

一方，$m-1$ 次以下の多項式 $G(x) = b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$ で，$G(\varphi|_W) = O$ となるものが存在したと仮定する．すると，

$$G(\varphi|_W)(v) = b_{m-1}v_{m-1} + \cdots + b_0 v_0 = 0$$

となるが，$\{v_0, \ldots, v_{m-1}\}$ は一次独立ゆえ，$b_0 = \cdots = b_{m-1} = 0$ である．以上から，F が $\varphi|_W$ の最小多項式であることが示された．

□

上の命題から，$\varphi(W) \subset W$ となるような部分空間を考えることが，最小多項式を考える上で重要であることがわかる．実際次が成り立つ．

命題 5.26. $\varphi\colon V \to V$ を線形写像とし，f を φ の最小多項式とする．また，部分空間 $W \subset V$ は $\varphi(W) \subset W$ を満たすとする．このとき，f は $\varphi|_W$ の最小多項式 g で割り切れる．

証明 $F(x) \in K[x]$ とするとき，$F(\varphi)|_W = F(\varphi|_W)$ が成立するので，$F(\varphi) = 0$ ならば $F(\varphi|_W) = 0$ でもある．よって $f(\varphi|_W) = 0$ であり，これと命題 5.24 より，f は g で割り切れる． □

ここから，最小多項式の作り方がわかる．

命題 5.27. $\varphi\colon V \to V$ を線形写像とする．V の部分空間 $W_1, \ldots, W_m$ は，$V = W_1 + \cdots + W_m$ を満たし，さらに，各 W_j について，$\varphi(W_j) \subset W_j$ を満たすとする．このとき，φ の最小多項式は，各 $\varphi|_{W_j}$ の最小多項式の最小公倍式になる．

証明 $\varphi|_{W_j}$ の最小多項式を f_j，φ の最小多項式を f とすると，命題 5.26 より，f は f_j で割り切れるので，f は $f_1, \ldots, f_m$ の最小公倍式 g で割り切れる．よって，$g(\varphi) = 0$ であることを示せばよい．今，$v \in V$ とすると，$w_j \in W_j$ で，$v = w_1 + \cdots + w_m$ となるものが存在する．今，各 j について，$g(x) = f_j(x)h_j(x)$ となる多項式 h_j が存在するので，$g(\varphi|_{W_j})(w_j) = f_j(\varphi|_{W_j})(h_j(\varphi|_{W_j})(w_j)) = 0$ である．よって，$g(\varphi)(w_j) = 0$ であるので，$g(\varphi)(v) = 0$ を得る． □

最小多項式を上の命題を使って計算してみよう．

9） $v_0 = v$ と約束しておく．

例 5.28. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を考える．K^3 の標準基底 e_1, e_2, e_3 を順番に適用していくことを考える．

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1,\ Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_2,\ Ae_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 + e_3$$

である．ここから，$W_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ とすれば，$AW_1 \subset W_1$，$AW_2 \subset W_2$ である．

$$A^2 e_2 = 2e_1 + e_2 = 2Ae_2 - e_2$$

であるので，$(A-I)^2 e_2 = (A^2 - 2A + I)e_2 = 0$ であり，このとき $(A-I)^2 e_1 = 0, (A-I)^2 e_3 = 0$ も成り立つので，最小多項式は $(x-1)^2$ である．

特に，行列が対角化可能である場合，最小多項式はすぐに計算できる．

命題 5.29. $A \in M_n(K)$ について，以下は同値である．

(1) A は対角化可能である．

(2) A の相異なる固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ とするとき，A の最小多項式は $(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$ である．

証明 以下，$\varphi \colon K^n \to K^n$ を $\varphi(v) = Av$ で定める．(1) $\Rightarrow$ (2): A が対角化可能であるとし，$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ を A の相異なる固有値とするとき，定理 5.17 より，$K^n = E(\lambda_1; A) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m; A)$ である．A の最小多項式は，$\varphi|_{E(\lambda_j;A)}$ の最小多項式の最小公倍式になる．ところで，任意の $v \in E(\lambda_j; A)$ について $(A - \lambda_j I)v = 0$ であるので，$\varphi|_{E(\lambda_j;A)}$ の最小多項式は $x - \lambda_j$ である．$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ は相異なるので，結論を得る．

(2) $\Rightarrow$ (1): もっと一般的な次の主張を示す．

主張 5.30. $\varphi \colon V \to V$ を線形写像とし，任意の相異なる $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ に対して，$F(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_\ell)$ とすれば，$\ker F(\varphi) = E(\alpha_1; \varphi) \oplus \cdots \oplus \ker E(\alpha_\ell; \varphi)$ である．

実際，これを φ の最小多項式 $G(x)$ に適用して，$\ker G(\varphi) = K^n$ であること[10]を用いれば証明は終わる．

上の主張を ℓ についての帰納法で示す．まず，$F_1(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{\ell-1})$ とおいて，$\ker F(\varphi) = E(\alpha_\ell; \varphi) \oplus \ker F_1(\varphi)$ であることを示す．$w \in E(\alpha_\ell; A) \cap \ker F_1(\varphi)$ であるような元を取る．すると，$w \in E(\alpha_\ell; A)$ なので，$\varphi(w) = \alpha_\ell w$ である．従って，$F_1(\varphi)(w) = F_1(\alpha_\ell) w$ となる．今，$\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ は相異なるので，$F_1(\alpha_\ell)$ は 0 にならない．従って，$F_1(\varphi)(w) = 0$ ならば $w = 0$ となる．命題 4.24 より，$E(\alpha_\ell; A) + \ker F_1(\varphi)$ は直和である．

次に，$v \in \ker F(\varphi)$ を任意に取り，$\varphi(v) - \alpha_\ell v = v'$ とする．すると，$F(x) = F_1(x)(x - \alpha_\ell)$ なので，$F_1(\varphi)(v') = 0$ であり，$v' \in \ker F_1(\varphi)$ がわかる．帰納法の仮定より，$\ker F_1(\varphi) = E(\alpha_1; \varphi) \oplus \cdots \oplus E(\alpha_{\ell-1}; \varphi)$ であるから，v' は $v_j \in E(\alpha_j; \varphi)$ の和 $v' = v_1 + \cdots + v_{\ell-1}$ として一通りに表せる．そこで，$\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ がすべて異なることを使って，

$$w = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_\ell} v_1 + \cdots + \frac{1}{\alpha_{\ell-1} - \alpha_\ell} v_{\ell-1}$$

とおくと，$w \in \ker F_1(\varphi)$ であり，$\varphi(w) - \alpha_\ell w = v'$ であることがすぐにわかる．従って，$\varphi(v - w) - \alpha_\ell (v - w) = 0$ であり，$v - w \in E(\alpha_\ell; \varphi)$ となる．以上で主張が証明できた． □

5.5 Cayley–Hamilton の定理

まず行列の固有多項式に関する次の性質に注意しよう．

10） $G(x)$ は φ の最小多項式だから，任意の $v \in K^n$ について，$G(\varphi)(v) = 0$ である．

命題 5.31. $A, B \in M_n(K)$ は互いに相似であるとする．このとき，A の固有多項式と B の固有多項式は一致する．

証明 $P \in M_n(K)$ を $B = P^{-1}AP$ となる行列とする．すると，

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

なので，両辺の行列式を取れば，結論を得る． □

さて，命題 5.11 より，V から V 自身への線形写像を 2 つの基底で行列表示すると，その行列は互いに相似になるのだった．このとき上の命題を用いると，それらの表現行列の固有多項式は同じである．従って，線形写像をそのものに対する固有多項式を次のように定義することができる．

定義 5.32. 線形写像 $\varphi\colon V \to V$ について，V のある順序付き基底 $\mathcal{B} \subset V$ による φ の表現行列の固有多項式を，φ の固有多項式という．この定義は，$\mathcal{B}$ の選び方によらない．

固有多項式についても，$\varphi(W) \subset W$ となるような部分空間への制限との関係が次のように示せる．

命題 5.33. $\varphi\colon V \to V$ を線形写像とし，$W \subset V$ を，$\varphi(W) \subset W$ となるような部分空間であるとする．このとき，φ の固有多項式は，$\varphi|_W$ の固有多項式で割り切れる．

証明 W の基底 $\mathcal{B}'$ を取り，これを延長して V の基底 $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ を作る．この基底について φ を行列表示すると，次のようになる．

$$\begin{pmatrix} A & \widetilde{A} \\ O & B \end{pmatrix}$$

ここで，A は $\varphi|_W$ を $\mathcal{B}'$ で行列表示したものであり，B は正方行列である．この行列の固有多項式は，

$$\det \begin{pmatrix} A - \lambda I & \widetilde{A} \\ O & B - \lambda I \end{pmatrix} = \det(A - \lambda I)\det(B - \lambda I)$$

であり，$\det(A - \lambda I)$ は $\varphi|_W$ の固有多項式なので，結論を得る． □

以上の準備のもと，次の定理を証明する．

定理 5.34. $A \in M_n(K)$ に対して，A の固有多項式 $\Phi(x)$ は，A の最小多項式 $f(x)$ で割り切れる．特に，$\Phi(A) = O$ である．

証明 線形写像 $\varphi\colon K^n \to K^n$ を $\varphi(v) = Av$ で定めると，A の固有多項式・最小多項式は，φ のそれらと等しい．$f(x)$ の次数を r とする．K^n の基底 $\{v_1, \dots, v_n\}$ を任意に一つ固定して，m_j を，$v_j, \varphi(v_j), \dots, \varphi^{m-1}v_j$ が線形独立となる最小の m と定めて，部分空間 $W_j\,(1 \le j \le n)$ を，$W_j := \langle v_j, \varphi(v_j), \dots, \varphi^{m_j-1}v_j \rangle$ で定めると，$\varphi(W_j) \subset W_j$ であり，さらに，$K^n = W_1 + \cdots + W_n$ である．すると，命題 5.33 より，φ の固有多項式は，$\varphi|_{W_j}$ の固有多項式で割り切れる．そこで，$\varphi|_{W_j}$ の固有多項式と最小多項式は一致することを示す．もしこれが示せれば，命題 5.27 より，φ の最小多項式は $\varphi|_{W_j}$ たちの最小公倍式であることから結論が得られる．

実際，$v_j, \varphi(v_j), \dots, \varphi^{m_j-1}v_j$ は W_j の基底であることから，この基底に関する W_j の行列表示は，

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & b_{m_j-1} \end{pmatrix}$$

という形で書ける．この行列の固有多項式は，$x^{m_j} - b_{m_j-1}x^{m_j-1} - \cdots - b_0$ である．一方，m の定義から，$\varphi|_{W_j}$ の最小多項式も同じ多項式になるので，結論を得る． □

6　内積空間

ここでは，ベクトル空間に対して，通常の平面ベクトルや空間ベクトルにおける内積に当たるものを導入して，その性質を調べる．

6.1　双線形形式・エルミート形式

まず集合の直積について定義をしておく．

定義 6.1. A, B を集合とするとき，A と B の順序対全体からなる集合

$$A \times B = \{(a, b)\,;\, a \in A,\ b \in B\}$$

を，A と B の**直積**という．

さて，内積に相当する概念を定義するわけだが，K-ベクトル空間の K が $\mathbb{R}$ であるか $\mathbb{C}$ であるかによって，微妙に定義が変わってくる．まずは $\mathbb{R}$ の場合を定義する．

定義 6.2. V を $\mathbb{R}$-ベクトル空間とする．写像 $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ が**双線形形式** (symmetric bilinear form) であるとは，以下の性質を満たすことをいう．

(1)　任意の $v_1, v_2, w \in V$ に対して，

$$\varphi(v_1 + v_2, w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$$
$$\varphi(w, v_1 + v_2) = \varphi(w, v_1) + \varphi(w, v_2)$$

である．

(2)　任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ と $v, w \in V$ に対して，

$$\varphi(\alpha v, w) = \alpha\varphi(v, w)$$
$$\varphi(v, \alpha w) = \alpha\varphi(v, w)$$

である．

この定義の意味するところは，簡単に言えば，

- $w \in V$ を固定すると，V から $\mathbb{R}$ への写像 $v \mapsto \varphi(v, w)$ は線形写像である．
- $v \in V$ を固定すると，V から $\mathbb{R}$ への写像 $w \mapsto \varphi(v, w)$ は線形写像である．

ということを意味する．φ の 2 つの引数のそれぞれについて線形写像になっているという意味を込めて，「**双線形**」という名前がついているのである．

上のことから，定義 6.2 が以下と同値であることはたやすいだろう．

命題 6.3. V を $\mathbb{R}$-ベクトル空間とする．写像 $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ について，以下は同値である．

(1)　φ は双線形形式である．

(2) 任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ と $v_1, v_2, w \in V$ に対して，

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 \varphi(v_1, w) + \alpha_2 \varphi(v_2, w)$$
$$\varphi(w, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \varphi(w, v_1) + \alpha_2 \varphi(w, v_2)$$

である．

また，定義 6.2 では関数であることを強調してわかりやすく記述するために $\varphi(\cdot,\cdot)$ という記号を使ったが，明示的に関数名は使わず，(v, w) や $\langle v, w\rangle$ という形の記号を用いることが多い．なので，例えば定義 6.2 の条件は，

$$(v_1 + v_2, w) = (v_1, w) + (v_2, w)$$
$$(w, v_1 + v_2) = (w, v_1) + (w, v_2)$$
$$(\alpha v, w) = \alpha(v, w)$$
$$(v, \alpha w) = \alpha(v, w)$$

という形でシンプルに書き表すことができる．

双線形形式の中でも，いくつか都合が良い性質を持つものを定義しておく．

定義 6.4. $(\cdot,\cdot)$ を $\mathbb{R}$-ベクトル空間 V 上の双線形形式とする．

(1) 任意の $v, w \in V$ について，$(v, w) = (w, v)$ であるとき，双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ は**対称** (symmetric) であるという．

(2) 任意の $0 \neq v \in V$ について，$(v, v) > 0$ であるとき，双線形形式 $(\cdot,\cdot)$ は**正定値** (positive definite) であるという．

正定値性の定義について一つコメントしておく．双線形形式の定義から，任意の $v \in V$ について，$(0, v) = (v, 0) = 0$ であることはすぐにわかる．従って，$(0, 0) = 0$ である．だから，正定値性の定義の中には，「$(v, v) = 0$ ならば $v = 0$」という命題も同時に含まれている．

次に $\mathbb{C}$-ベクトル空間の場合を考える．この場合，$\mathbb{R}$ 上の双線形形式とは少し異なる写像を考える必要がある．

定義 6.5. V を $\mathbb{C}$-ベクトル空間とする．写像 $\varphi\colon V \times V \to \mathbb{C}$ が**半双線形形式** (sesquilinear form[11)]) であるとは，以下の性質を満たすことをいう．

(1) 任意の $v_1, v_2, w \in V$ に対して，

$$\varphi(v_1 + v_2, w) = \varphi(v_1, w) + \varphi(v_2, w)$$
$$\varphi(w, v_1 + v_2) = \varphi(w, v_1) + \varphi(w, v_2)$$

である．

11） “sesqui-” とは「1 と 1/2」という意味のラテン語の接頭辞である．つまり 2 番目の引数については完全に線形で，最初の引数については「半分だけ」線形だから，「1 と 1/2 だけ線形」という意味で sesquilinear と名付けられているのである．ちなみに bilinear の “bi-” は「2」という意味の接頭辞である．

(2)　任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ と $v, w \in V$ に対して，

$$\varphi(\alpha v, w) = \overline{\alpha}\varphi(v, w)$$
$$\varphi(v, \alpha w) = \alpha\varphi(v, w)$$

である．

双線形形式との違いは，(2) の第 1 引数のスカラー倍に関する式のところで，複素共役がつくことである．先ほどと同様にまとめると，

- $w \in V$ を固定すると，V から $\mathbb{R}$ への写像 $v \mapsto \varphi(v, w)$ は**反線形**写像である．
- $v \in V$ を固定すると，V から $\mathbb{R}$ への写像 $w \mapsto \varphi(v, w)$ は線形写像である．

ということになる．[12] 双線形形式の対称性と同じような概念を，半双線形形式でも定義できる．まず対称性に相当するものとして以下があある．

定義 6.6. $(\cdot, \cdot)$ を $\mathbb{C}$-ベクトル空間 V 上の双線形形式とする．任意の $v, w \in V$ について，$(v, w) = \overline{(w, v)}$ であるとき，半双線形形式 $(\cdot, \cdot)$ は **Hermite 形式** (Hermitian form)[13] であるという．

この定義では，第 1 引数と第 2 引数を入れ替えると複素共役がかかることを要求しているが，これは正定値性をまともに定義するために必要なものである．実際次が成り立つ．

命題 6.7. $(\cdot, \cdot)$ を $\mathbb{C}$-ベクトル空間 V 上の Hermite 形式とする．このとき，任意の $v \in \mathbb{C}$ について，(v, v) は実数である．

証明 $(v, w) = \overline{(w, v)}$ において，$v = w$ とすると，$(v, v) = \overline{(v, v)}$ となるので，(v, v) は実数である．　□

こうして，正定値性は Hermite 形式に関して定義されることになる．

定義 6.8. $(\cdot, \cdot)$ を $\mathbb{C}$-ベクトル空間 V 上の Hermite 形式とする．任意の $0 \neq v \in V$ について，$(v, v) > 0$ であるとき，この Hermite 形式は正定値 (positive definite) であるという．

具体例をいくつか見ていこう．

例 6.9. $\mathbb{R}^n$ の標準内積

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

12）　もちろん，第 1 引数と第 2 引数のどちらを反線形にするかについては任意性がある．ここでは，量子力学などで一般に用いられる，第 1 引数を反線形にする定義を採用した．

13）　Hermite(,Charles 1822-1901) はフランスの数学者であり，フランス語読みすれば「エルミート」であり，これが一般的な呼び方である．ただ，英語圏だと英語読みで「ハーミット」などと呼ばれることがあるので聞き取りの際には注意しないといけない．

は双線形形式である．実際，

$$\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\alpha'\begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)=(\alpha x_1+\alpha' x'_1)y_1+\cdots+(\alpha x_n+\alpha' x'_n)y_n$$

$$=\alpha(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)+\alpha'(x'_1y_1+\cdots+x'_ny_n)$$

$$=\alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)+\alpha'\left(\begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)$$

であり，同様にして，$\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\alpha\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}+\alpha'\begin{pmatrix}y'_1\\\vdots\\y'_n\end{pmatrix}\right)=\alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)+\alpha'\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y'_1\\\vdots\\y'_n\end{pmatrix}\right)$ もわかる．

また，この双線形形式は明らかに対称である．また，$\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ が 0 でないならば，

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right)=x_1^2+\cdots+x_n^2>0$$

であるので，正定値でもある．

例 6.10. $\mathbb{C}^n$ **の標準 Hermite 内積**

$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)=\overline{x}_1y_1+\cdots+\overline{x}_ny_n$$

は半双線形形式である．実際，

$$\left(\alpha\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\alpha'\begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)=\overline{(\alpha x_1+\alpha' x'_1)}y_1+\cdots+\overline{(\alpha x_n+\alpha' x'_n)}y_n$$

$$=\overline{\alpha}(\overline{x}_1y_1+\cdots+\overline{x}_ny_n)+\overline{\alpha'}(\overline{x'}_1y_1+\cdots+\overline{x'}_ny_n)$$

$$=\overline{\alpha}\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)+\overline{\alpha'}\left(\begin{pmatrix}x'_1\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)$$

であり，同様にして，$\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\alpha\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}+\alpha'\begin{pmatrix}y'_1\\\vdots\\y'_n\end{pmatrix}\right)=\alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\right)+\alpha'\left(\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y'_1\\\vdots\\y'_n\end{pmatrix}\right)$ もわかる．

また，この半双線形形式は Hermite 形式である．実際，

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n = \overline{\overline{y}_1 x_1 + \cdots + \overline{y}_n x_n} = \overline{\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)}$$

となるからである．また，$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ が 0 でないならば，

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 > 0$$

であるので，正定値でもある．

例 6.11. $\mathbb{R}[x]$ において，

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

と定めると，$(\cdot, \cdot)$ は双線形形式である．実際両方の引数について線形であることはたやすい．しかもこの双線形形式は対称であり，正定値である．実際，$(f, f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)^2 \, \mathrm{d}x$ であるが，$f(x)^2$ は常に 0 以上の値を取るので $(f, f) \geq 0$ である．更に，$(f, f) = 0$ となったとすると，f は恒等的に 0 である．

例 6.12. $\mathbb{C}[x]$ において，

$$(f, g) := \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) \, \mathrm{d}x$$

と定めると，$(\cdot, \cdot)$ は半双線形形式である．実際最初の引数について反線形で，第 2 引数について線形であることはたやすい．しかもこの半双線形形式は対称であり，正定値である．実際，$(f, f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x$ であるが，$f(x)^2$ は常に 0 以上の値を取るので $(f, f) \geq 0$ である．更に，$(f, f) = 0$ となったとすると，f は恒等的に 0 である．

例 6.13. 正定値にならない双線形形式の例をあげる．例えば，$\mathbb{R}^2$ において，

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := -x_1 y_1 + x_2 y_2$$

と定めると，これは双線形形式になる上，対称でもある．しかし正定値ではない．実際，$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$ となってしまうからである．

注意 6.14. 一般に，$\mathbb{R}^n$ において，

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

という形の双線形形式は，Lorentz 計量と呼ばれており，相対性理論において重要なものである．

6.2 内積空間の定義

ここでは，内積の概念が導入されたベクトル空間を定義する．

定義 6.15. V を $\mathbb{R}(\mathbb{C})$-ベクトル空間とする．V とその上の正定値な対称双線形 (Hermite) 形式 $(\cdot,\cdot)$ の組を，$\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 上の**内積空間**，もしくは計量ベクトル空間という．

内積の概念がベクトル空間に導入されることによって，ベクトルの長さや角度といった概念が拡張されることになる．このことはベクトルを幾何学的に捉える上で非常に重要である．

定義 6.16. V を内積空間とする．

(1) $v \in V$ について，$\|v\| := \sqrt{(v,v)}$ を v の**長さ**，もしくは v の**ノルム** (norm) という．

(2) $v, w \in V$ について，$(v,w)=0$ であるとき，v と w は**直交する**という．

ノルムについては以下の性質を押さえておけばよい．

命題 6.17. V を内積空間とする．

(1) 任意の $\alpha \in K$ と $v \in V$ について，$\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$ である．

(2) 任意の $v, w \in V$ について，

$$|(v,w)| \leq \|v\|\,\|w\|$$

である．(**Cauchy–Schwarz の不等式**)

(3) 任意の $v, w \in V$ について，

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

である．(**三角不等式**)

証明 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間の Hermite 形式に対して証明をすれば十分である．[14)]

(1) $\|\alpha v\|^2 = (\alpha v, \alpha v) = \overline{\alpha}(v, \alpha v) = \overline{\alpha}\alpha(v,v) = |\alpha|^2\,\|v\|^2$ であるから，両辺の平方根を取れば結論を得る．

(2) 実数上の関数 $f(t) = \|v+tw\|^2$ を考える．t についてこれを整理すると，

$$\begin{aligned} f(t) &= (v+tw, v+tw) \\ &= (v, v+tw) + (tw, v+tw) \\ &= (v,v) + (v,tw) + (tw,v) + (tw,tw) \\ &= \|v\|^2 + t(v,w) + \bar{t}(w,v) + |t|^2\,\|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + t(v,w) + t\overline{(v,w)} + t^2\,\|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2t\Re(v,w) + t^2\,\|w\|^2 \end{aligned}$$

である．ここで，$t \in \mathbb{R}$ なので，$t = \bar{t}$ であることを用いた．最後の式を平方完成すると，

$$f(t) = \left(t\,\|w\| + \frac{\Re(v,w)}{\|w\|}\right)^2 + t^2\frac{\|v\|^2\,\|w\|^2 - (\Re(v,w))^2}{\|w\|^2}$$

14） $\mathbb{R}$ 上の場合はすべてのスカラーを $\mathbb{R}$ で読み替えれば証明できる．

を得るが，$f(t)$ は常に 0 以上なので，$\|v\|^2\|w\|^2-(\Re(v,w))^2\geq 0$ である．これを整理すると，

$$(\Re(v,w))^2\leq \|v\|^2\|w\|^2$$

を得る．

あとは，左辺を $|(v,w)|^2$ とすれば証明が終わる．そのために次のようなトリックを使う．まず，(v,w) を極表示して，

$$(v,w)=|(v,w)|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とおき，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく．$|\alpha|=1$ に注意する．すると，$(\alpha v,w)=\overline{\alpha}(v,w)=\overline{\alpha}\alpha|(v,w)|=|\alpha|^2|(v,w)|=|(v,w)|$ であるから，$\Re(\alpha v,w)=|(v,w)|$ となる．そこで，上の不等式を v を αv に変えて適用すると，

$$|(v,w)|^2=(\Re(\alpha v,w))^2\leq\|\alpha v\|^2\|w\|^2=\|v\|^2\|w\|^2$$

となるので，結論を得る．

(3) $\|v+w\|^2$ を定義に従って展開すると，

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2&(v+w,v+w)\\&=(v,v)+(v,w)+(w,v)+(w,w)\\&=\|v\|^2+2\Re(v,w)+\|w\|^2\end{aligned}$$

となる．ここで，(2) の証明中の不等式より，$|\Re(v,w)|\leq\|v\|\|w\|$ であるので，$\Re(v,w)\leq\|v\|\|w\|$ となるから，

$$\|v+w\|^2\leq\|v\|^2+2\|v\|\|w\|+\|w\|^2\leq(\|v\|+\|w\|)^2$$

であることがわかるので，両辺の平方根をとれば結論を得る．

□

6.3 正規直交基底と Gramm–Schmidt の直交化

内積を考えられるようになったことで，特にベクトルとベクトルの直交という概念が定義できるようになった．なので，例えば平面や空間座標における直交座標系のような，考えやすい座標のようなものを導入することは自然である．ここでは，特別な性質を満たす基底を導入して，ある意味において直交座標系のようなものを内積空間に定義できることを示す．

まず，直交性と基底であるという性質には関係があることを見る．

命題 6.18. V を内積空間とし，$\dim V=n$ とする．零ベクトルでない n 個のベクトル $v_1,\ldots,v_n\in V$ が互いに直交する，つまり，$j\neq k$ ならば $(v_j,v_k)=0$ を満たすのであれば，$v_1,\ldots,v_n$ は V の基底をなす．

証明 $v_1,\ldots,v_n$ は V の次元と同じ個数のベクトルからなるので，一次独立であることを示せば証明が終わる．スカラー $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ を $\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n=0$ となるように取る．$v_j\,(1\leq j\leq n)$ との内積を取ると，$j\neq k$ ならば $(v_j,v_k)=0$ なので，結局 $\alpha_j(v_j,v_j)=0$ となる．$v_j\neq 0$ なので，内積の正定値性から $(v_j,v_j)>0$ であるので，$\alpha_j=0$ を得る．j は任意に取れるので，結論を得る． □

以上の準備のもと，次のように定義をする．

定義 6.19. V を内積空間とし，$\dim V=n$ とする．$v_1,\ldots,v_n\in V$ が**正規直交基底** (orthonormal basis) であるとは，以下の性質を満たすことをいう．

(1) $v_1,\ldots,v_n$ は互いに直交する．

(2)　各 j について，$\|v_j\| = 1$ である．

上の定義の 2 つの条件は，**Kronecker のデルタ**と呼ばれる記号

$$\delta_{jk} := \begin{cases} 1 & j = k, \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

を用いると，$(v_j, v_k) = \delta_{jk}$ と短く書くことが可能である．

例 6.20. $\mathbb{R}^n$ や $\mathbb{C}^n$ の標準基底は正規直交基底である．しかし，正規直交基底はこれだけではない．例えば，$\mathbb{R}^3$ において，

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

も正規直交基底である．

例 6.21. $\mathbb{R}_2[x]$ に

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

で定まる内積を入れて内積空間だとみなす．この空間において，

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{6}}{2}x,\ \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

は正規直交基底をなす．

有限次元の内積空間において，正規直交基底は必ず存在する．そのことを，実際に通常の基底から正規直交基底を作ることで示そう．

定理 6.22. V を有限次元の内積空間とする．V には正規直交基底が存在する．

証明 V の次元を n とする．V の (正規直交基底とは限らない) 順序付き基底 $(v_1, \ldots, v_n)$ を一つ取る．そして，以下の操作を続けていって，新しい n 個のベクトル $w_1, \ldots, w_n$ を構成する．

(GS1)　$w_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ とする．

(GS2)　$w_1, \ldots, w_{r-1}$ までが構成されているとき，

$$\widetilde{v}_r = v_r - \sum_{j=1}^{r-1} (w_j, v_r) w_j \tag{19}$$

とおく．

(GS3)　$w_r = \dfrac{\widetilde{v}_r}{\|\widetilde{v}_r\|}$ とする．

こうしてできた $w_1, \ldots, w_n$ は正規直交基底であることを，r についての帰納法を用いて示す．$r = 1$ のとき，

$$\|w_1\| = \frac{\|v_1\|}{\|v_1\|} = 1$$

となる．次に，ある r について，$w_1, \ldots, w_{r-1}$ が，次の 3 つを満たすと仮定する．

- $j \neq k$ ならば $(w_j, w_k) = 0$.
- 各 $1 \leq j \leq r - 1$ について，$\|w_j\| = 1$.

- $w_1, \dots, w_{r-1}$ は $v_1, \dots, v_{r-1}$ の線形結合で書けている．

このとき，w_r が定義できて，これを加えてもこの性質が保たれることを示す．つまり，以下の 4 つを証明すればよい．

Claim 1)　w_r が定義可能である．つまり，$\widetilde{v}_r$ は 0 にならない．
Claim 2)　任意の $1 \leq j \leq r-1$ について，$(w_r, w_j) = 0$ である．
Claim 3)　$\|w_r\| = 1$ である．
Claim 4)　w_r は $v_1, \dots, v_r$ の線形結合で書ける．

まず (Claim 1) を示す．もしも $\widetilde{v}_r = 0$ になったとすると，(19) より，

$$v_r = \sum_{j=1}^{r-1} (v_j, w_j) w_j$$

である．帰納法の仮定より，$w_1, \dots, w_{r-1}$ は $v_1, \dots, v_{r-1}$ の線形結合で書けている．従って，これは v_r が $v_1, \dots, v_{r-1}$ の線形結合で表せるということを意味しており，$v_1, \dots, v_n$ が一次独立であることに反する．以上で (Claim 1) は証明できた．

次に (Claim 2) を示す．w_r は $\widetilde{v}_r$ のスカラー倍なので，$\widetilde{v}_r$ が $w_1, \dots, w_{r-1}$ と直交することを示せばよい．(19) の両辺の $w_k (1 \leq k \leq r-1)$ との内積を取ると，

$$(w_k, \widetilde{v}_r) = (w_k, v_r) - \sum_{j=1}^{r-1} (w_j, v_r)(w_k, w_j)$$

となる．帰納法の仮定より，(w_k, w_j) は $j = k$ のとき 1 で，それ以外 0 だから，

$$(w_k, \widetilde{v}_r) = (w_k, v_r) - (w_k, v_r)(w_k, w_k) = (w_k, v_r) - (w_k, v_r) = 0$$

となるので，(Claim 2) は示せた．

(Claim 3) は構成法の (GS3) から直ちに言える．

最後に (Claim 4) は，$\widetilde{v}_r$ は (19) で定義されており，この式の右辺が帰納法の仮定より $v_1, \dots, v_r$ の線形結合で書けていることからわかる．

以上より，$r = n$ でも上の主張は成立しており，$w_1, \dots, w_n$ は正規直交基底であることが示された．　□

この証明中にでてきた (GS1)-(GS3) のアルゴリズムを，**Gramm–Schmidt の直交化法**という．これを使うことで，任意の基底から正規直交基底を構成することができる．

例 6.23. $\mathbb{C}^3$ の順序付き基底 (v_1, v_2, v_3):

$$v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

に Gramm–Schmidt の直交化法を適用してみる．まず，v_1 を規格化する．$\|v_1\| = \sqrt{2}$ なので，

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である．次に，

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}_2 &= v_2 - (w_1, v_2)w_1 \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}(-i \cdot 1 + 1 \cdot 1)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-i)/2 \\ (1+i)/2 \\ -i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので，$\|\widetilde{v}_2\| = \sqrt{2}$ だから，

$$w_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2i \end{pmatrix}$$

である．そして，

$$\begin{aligned}
(w_1, v_3) &= \frac{1}{\sqrt{2}}((-i) \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
(w_2, v_3) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}((1+i) \cdot 0 + (1-i) \cdot 1 + 2i \cdot i) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1-i)
\end{aligned}$$

なので，

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}_3 &= v_3 - (w_1, v_3)w_1 - (w_2, v_3)w_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1-i) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2+i \\ 1+3i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である．$\|\widetilde{v}_3\| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ なので，

$$w_3 = \frac{\sqrt{5}}{10}\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2+i \\ 1+3i \end{pmatrix}$$

となる．以上で，正規直交基底

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2i \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{10}\begin{pmatrix} 1-2i \\ 2+i \\ 1+3i \end{pmatrix}$$

を得る．

例 **6.24.** $\mathbb{R}_2[x]$ に，

$$(f, g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

という内積を導入して内積空間とみなす．$\mathbb{R}_2[x]$ の順序付き基底 $(1, x, x^2)$ に Gramm–Schmidt の直交化法を適用しよう．今，$v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$ とおこう．まず，v_1 を規格化すると，

$$\|v_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x} = \sqrt{2}$$

なので，$w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ である．次に，

$$(w_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} x \,\mathrm{d}x = 0$$

なので，

$$\widetilde{v} = v_2 - (w_1, v_2) w_1 = x$$

である．$\|\widetilde{v}\| = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ であるから，$w_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} x$ を得る．次に

$$(w_1, v_3) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{3}$$
$$(w_2, v_3) = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{6}}{2} x^3 \,\mathrm{d}x = 0$$

であるので，

$$\widetilde{v}_3 = v_3 - (w_1, v_3) w_1 - (w_2, v_3) w_2 = x^2 - \frac{1}{3}$$

となる．これを規格化すると，$w_3 = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right)$ となるので，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} x, \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

は正規直交基底となる．

Gramm–Schmidt の直交化法における (19) の意味するところを，2 次元 Euclid 空間の場合に説明すると次のようになる．w_1 がすでに定まっているとき，(w_2, v_1) というのは，v_2 を w_2 の方向に射影してできるベクトルの長さである．[15] したがって，$(w_1, v_2) w_1$ はその射影してできるベクトルそのものである．だから，$\widetilde{v}_2 = v_2 - (w_1, v_2) w_1$ はちょうど w_1 と直交することが図からわかる．w_2 は $\widetilde{v}_2$ を規格化したものなので，やはり w_1 と直交する．多次元の場合も，各 w_j へ射影してできるベクトルを引くことで同じように次のベクトルを求めることができる．

正規直交基底を用いることで，V の部分空間 W について，特殊な補空間を考えることが可能である．

命題 6.25. V を内積空間とし，W をその部分空間とする．部分空間 $W^\perp$ を

$$W^\perp := \Big\{ v \in V \,;\, \text{任意の } w \in W \text{ に対して，} (w, v) = 0 \Big\}$$

とすると，$V = W \oplus W^\perp$ である．この $W^\perp$ を W の**直交補空間**という．

証明 まず $W + W^\perp$ は直和であることを示す．$W \cap W^\perp = \{0\}$ を示せばよい．$w \in W \cap W^\perp$ であるとすると，$w \in W^\perp$ なので，任意の $w' \in W$ に対して $(w', w) = 0$ である．ところが，$w \in W$ でもあるから，この w' として w 自身を取ることができ，$(w, w) = 0$ となる．内積の正定値性から $w = 0$ を得る．

15） v_2 と w_1 のなす角を θ とすると，$(w_1, v_2) = \|w_1\| \|v_2\| \cos\theta = \|v_2\| \cos\theta$ であるから．

次に $V = W \oplus W^{\perp}$ であることを証明する．W の正規直交基底 $w_1, \dots, w_r$ を取る．$v \in V$ に対して，

$$w = \sum_{j=1}^{r} (w_j, v) w_j,\ w' = v - w$$

と定義する．このとき，$w \in W$ は明らかである．一方，各 $w_k\,(1 \leq k \leq r)$ に対して，

$$(w_k, w') = (w_k, v) - \sum_{j=1}^{r} (w_j, v)(w_k, w_j) = (w_k, v) - (w_k, v) = 0$$

となるから，$w_1, \dots, w_r$ と w' は直交する．よって，w' は W の任意の元と直交するから，$w' \in W^{\perp}$ である．以上で，$v = w + w'$ は V の元の W と $W^{\perp}$ による分解を与えるので，結論を得る． □

6.4 自己共役写像とユニタリ写像

6.4.1 共役写像と自己共役写像

内積空間の間の線形写像を考える．

定義 6.26. V を内積空間とし，$f\colon V \to V$ を線形写像とする．このとき，線形写像 $g\colon V \to V$ で，任意の $v, w \in V$ に対して，

$$(f(v), w) = (v, g(w)) \tag{20}$$

となるものがただ一つ存在する．この線形写像 g を f の**共役写像**といい，f^* などと書く．

証明 V の正規直交基底 $v_1, \dots, v_n$ を取る．そして，$\rho_{kj} := (f(v_j), v_k)$ とおいて，線形写像 $g\colon V \to V$ を，

$$g(v_k) = \sum_{\ell=1}^{n} \rho_{k\ell} v_\ell$$

となるように定義する．[16] $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ と $w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ に対して，

$$(f(v), w) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(v_j), \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k \right) = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{\alpha_j} \beta_k \rho_{kj}$$

であり，一方で，

$$\begin{aligned}
(v, g(w)) &= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k g(v_k) \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \beta_k \rho_{k\ell} v_\ell \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \rho_{k\ell} \right) v_\ell \right)
\end{aligned}$$

16） 基底の元の行き先さえ定義しておけば，あとの元は基底の線形結合でかけるので自動的に行き先が求まる．つまり，$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ であるとき，

$$g(v) = \alpha_1 g(v_1) + \cdots + \alpha_n g(v_n)$$

という形で行き先を決めればよい．

でとなる．$v_1,\dots,v_n$ は正規直交基底であるので (v_j,v_ℓ) は $j=\ell$ のみ 1 で，それ以外は 0 であることに注意すると，

$$(v,g(w))=\sum_{j=1}^n\overline{\alpha_j}\left(\sum_{k=1}^n\beta_k\rho_{kj}\right)=\sum_{j,k=1}^n\overline{\alpha_j}\beta_k\rho_{kj}$$

となる．よって $(f(v),w)=(v,g(w))$ を得る．

次に，共役写像が一意に決まることを示す．$g_1,g_2\colon V\to V$ がともに eq. (20) を満たしているとする．このとき，任意の $v,w\in V$ に対して，

$$(v,g_1(w)-g_2(w))=(v,g_1(w))-(v,g_2(w))=(f(v),w)-(f(v),w)=0$$

となる．よって，$g_1(w)-g_2(w)$ は V のすべての元と直交するので，$g_1(w)-g_2(w)=0$ がわかる．w は任意だから，g_1 と g_2 は恒等的に等しい． □

特に，(標準内積の入った) ユークリッド空間上での線形写像はすべて行列をかける操作に帰着されてしまうので，その共役写像も行列の言葉で言い換えることができる．

命題 6.27. $A\in M_n(\mathbb{C})$ として，線形写像 $f\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ を $f(v)=Av$ で定める．$\mathbb{C}^n$ に標準内積を入れて内積空間とみなすとき，f の共役写像 f^* は，$f^*(v)=A^*v$ で与えられる．ここで，A^* は A の **Hermite 共役**と呼ばれ，A の全成分の共役をとって転置してできる行列である．また，$\mathbb{R}^n$ の場合，f^* は $f^*(v)={}^tAv$ で与えられる．

証明 $\mathbb{C}$ の場合のみ証明する．$\mathbb{C}^n$ の標準基底 $e_1,\dots,e_n$ を取ると，これは正規直交基底になっている．A の (j,k) 成分を a_{jk} と書くことにすれば，任意の $\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$ に対して，

$$\left(f\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\right)=\sum_{j=1}^n\overline{\left(\sum_{k=1}^n a_{jk}z_k\right)}w_j=\sum_{j,k=1}^n\overline{a_{jk}z_k}w_j$$

である．一方で，A^* の (j,k) 成分は $\overline{a_{kj}}$ なので，

$$\left(\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix},A^*\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\right)=\sum_{k=1}^n\overline{z_k}\left(\sum_{j=1}^n\overline{a_{jk}}w_j\right)=\sum_{j,k=1}^n\overline{a_{jk}z_k}w_j=\left(f\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\right)$$

となり，結論を得る． □

自分自身とその共役が等しい写像を考えることは重要である．

定義 6.28. V を内積空間とし，$f\colon V\to V$ を線形写像とする．f とその共役写像 f^* が等しいとき，f は**自己共役**であるという．

自己共役であるという性質をユークリッド空間上で考えることで，対応する行列の性質を導くことができる．

例 6.29. (1) $A\in M_n(\mathbb{C})$ として，$f\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ を $f(v)=Av$ で定義する．命題 6.27 より，f が自己共役になることと，$A=A^*$ であることは同値になる．このような行列 A は **Hermite 行列**であるという．

(2) $A\in M_n(\mathbb{R})$ として，$f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を $f(v)=Av$ で定義する．命題 6.27 より，f が自己共役になることと，$A={}^tA$ であることは同値になる．つまり A は対称行列になる．

6.4.2 ユニタリ写像

今度は，「内積を保存する」ような写像を考える．

定義 6.30. V を内積空間とし，$f\colon V\to V$ を線形写像とする．任意の $v_1, v_2 \in V$ について，

$$(f(v_1), f(v_2)) = (v_1, v_2) \tag{21}$$

となるとき，f は**ユニタリ** (unitary) であるという．

f がユニタリならば，内積を一切変えないので，特にノルムも保存している．実際，$v\in V$ について，

$$\|f(v)\|^2 = (f(v), f(v)) = (v, v) = \|v\|^2$$

となる．この意味で，f がユニタリならば f は**等長写像** (ノルムを変えない写像) になっている．

ユニタリ性のいいところは，正規直交基底を正規直交基底に移すという点にある．

命題 6.31. $f\colon V\to V$ を線形写像として，$v_1,\dots,v_n$ を V の正規直交基底とする．このとき以下は同値である．

(1) f はユニタリである．

(2) $f(v_1),\dots,f(v_n)$ は正規直交基底である．

証明 (1) ⇒ (2): f はユニタリであり，$v_1,\dots,v_n$ は正規直交基底だから，$(f(v_j), f(v_k)) = (v_j, v_k) = \delta_{jk}$ となり結論を得る．

(2) ⇒ (1): $f(v_1),\dots,f(v_n)$ が正規直交基底であるとする．$v, w\in V$ を任意にとって，$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$，$w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$ とおく．

$$(f(v), f(w)) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f(v_j), \sum_{k=1}^n \beta_k f(v_k)\right) = \sum_{j,k=1}^n \overline{\alpha_j}\beta_k (f(v_j), f(v_k)) = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j}\beta_j$$

である．一方，

$$(v, w) = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^n \beta_k v_k\right) = \sum_{j,k=1}^n \overline{\alpha_j}\beta_k (v_j, v_k) = \sum_{j=1}^n \overline{\alpha_j}\beta_j$$

であるので，$(f(v), f(w)) = (v, w)$ である．以上で結論を得る． □

ユークリッド空間の場合，ユニタリ性は行列の性質に置き換えられる．

命題 6.32. (1) $A\in M_n(\mathbb{C})$ として，線形写像 $f\colon \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ を $f(v) = Av$ で定める．f がユニタリであるための必要十分条件は，$A^*A = AA^* = I_n$ となることである．このような行列を**ユニタリ行列**という．

(2) $A\in M_n(\mathbb{R})$ として，線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を $f(v) = Av$ で定める．f がユニタリであるための必要十分条件は，${}^tAA = A{}^tA = I_n$ となることである．このような行列を**直交行列**という．

証明 (1) のみ示す．(2) も同様に示せる．まず f がユニタリであると仮定する．任意の $v, w\in\mathbb{C}^n$ に対して，$(f(v), f(w)) = (Av, Aw) = (v, w)$ である．命題 6.27 より，$(Av, Aw) = (v, A^*Aw)$ なので，$(v, A^*Aw) = (v, w)$ である．v は任意なので，$A^*Aw = w$ が成立する．w も任意なので，$A^*A = I_n$ を得る．両辺の Hermite 共役を取ると，$AA^* = I_n$ もわかる．[17]

一方，$A^*A = I_n$ とすると，$(v, w) = (A^*Av, w) = (Av, Aw) = (f(v), f(w))$ だから，f はユニタリである．以上で結論を得る． □

17） $(A^*)^* = A$ であることと，$(AB)^* = B^*A^*$ であることに注意．

ユニタリ行列の性質についての次の命題は，後で Hermite 行列や直交行列の対角化を考える上で必要である．

命題 6.33. (1) $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，v_j を A の第 j 列からなるベクトルとする．このとき，A がユニタリ行列であることと，$v_1, \ldots, v_n$ が $\mathbb{C}^n$ の標準内積に関して正規直交基底となることは同値である．

(2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して，v_j を A の第 j 列からなるベクトルとする．このとき，A が直交行列であることと，$v_1, \ldots, v_n$ が $\mathbb{R}^n$ の標準内積に関して正規直交基底となることは同値である．

証明 (1) のみ示す．A の (j,k) 成分を a_{jk} とおけば，$v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$ となる．$B = A^*$ として，その (j,k) 成分を b_{jk} とすると，$b_{jk} = \overline{a_{kj}}$ が成り立つ．よって，$A^*A = BA$ の (j,k) 成分は，

$$\sum_{\ell=1}^{n} b_{j\ell} a_{\ell k} = \sum_{\ell=1}^{n} \overline{a_{\ell j}} a_{\ell k} = (v_j, v_k)$$

となる．よって，$v_1, \ldots, v_n$ が正規直交基底ならば BA の (j,k) 成分は δ_{jk} なので $BA = I_n$ である．逆に $BA = I_n$ なら $(v_j, v_k) = \delta_{jk}$ なので $v_1, \ldots, v_n$ は正規直交基底である． □

例 6.34. $\mathbb{R}^2$ 上のユニタリ写像，つまり実数成分 2 次の直交行列をすべて決定しよう．$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が直交行列だとすると，$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は正規直交基底をなす．すると，$a^2 + c^2 = 1$ かつ $b^2 + d^2 = 1$ だから，ある $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ で，

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

となるものが存在する．$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ は直交するので，$ab + cd = 0$ であるから，$\cos(\theta - \varphi) = 0$ がわかる．従って，$\theta = \varphi + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \, (n \in \mathbb{Z})$ であることがわかるので，結局 A の形は以下の 2 通りしかないことがわかる．

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

このうち，左の行列は原点を中心として θ だけ回転する行列となっている．右の行列はわかりづらいが，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という積の形にすると，これは回転と y 軸に関する折り返しの合成であるとみなせる．つまり，$\mathbb{R}^2$ 上のユニタリ写像，つまり実数成分 2 次の直交行列は，回転とある軸に対する折り返し，そしてそれらの有限回の合成で尽くされる．

6.5　対称行列と Hermite 行列の固有値と対角化

前節で対称行列や Hermite 行列が，自己共役写像というクラスの線形写像の表現行列として実現されていることをみたが，こうした行列の固有値について考察する．実際のところ，対称行列や Hermite 行列は実は常に対角化することが可能であり，この点で非常に扱いやすい行列のクラスである．

まず，対称行列や Hermite 行列の固有値について考える．

命題 6.35. V を内積空間とし，$f\colon V \to V$ は自己共役写像であるとする．このとき，f の固有値はかならず実数になる．

証明 $f(v) = \lambda v$ となる $\lambda \in \mathbb{C}$ と $0 \neq v \in V$ が存在すると仮定する．このとき，$(f(v), v) = (\lambda v, v) = \overline{\lambda}(v, v)$ である．一方，f は自己共役だから，

$$(f(v), v) = (v, f(v)) = (v, \lambda v) = \lambda(v, v)$$

でもある．$(v, v) \neq 0$ なので，$\lambda = \overline{\lambda}$ となり，結論を得る． □