18AKS – CONTROLLI AUTOMATICI

Note sull'esercizio #2, punto 2, della II esercitazione in LAIB

Nell'esercizio di cui nel titolo, si propone di studiare la risposta al gradino della funzione di trasferimento

$$G(s)=\frac{5}{-z}\cdot\frac{s-z}{(s+1)(s+5)}$$

al variare dello zero z .

L'interpretazione analitica dei risultati che si ottengono graficamente discende dalle considerazioni seguenti.

La risposta al gradino, in trasformate di Laplace, vale

$$Y(s)=\frac{5}{-z}\cdot\frac{s-z}{(s+1)(s+5)}\cdot\frac{1}{s}$$

e la sua derivata prima

$$Y'(s)=s\cdot\frac{5}{-z}\cdot\frac{s-z}{(s+1)(s+5)}\cdot\frac{1}{s}=\frac{5}{-z}\cdot\frac{s-z}{(s+1)(s+5)}$$

Scomponendo quest'ultima in fratti semplici si ottiene

$$Y'(s)=\frac{5}{4z}\left[\frac{z+1}{s+1}-\frac{z+5}{s+5}\right]$$

e antitrasformando

$$y'(t)=\frac{5}{4z}\left[(z+1)e^{-t}-(z+5)e^{-5t}\right]$$

La prima considerazione (anche facendo riferimento al Teorema del valore iniziale) riguarda il valore della derivata prima in $t=0$, cioè la pendenza iniziale della risposta al gradino, che vale

$$y'(0)=-\frac{5}{z}=\lim_{s\to\infty} sY'(s)$$

Se lo zero z è positivo, la pendenza iniziale è negativa e quindi, essendo il valore a regime pari a 1, è sicuramente presente una sottoelongazione.

Al contrario, se lo zero z è negativo, la pendenza iniziale è positiva e quindi non possiamo trarre conclusioni.

Per uno studio più approfondito occorre verificare se la risposta al gradino presenta dei massimi (sovraelongazione) o dei minimi (sottoelongazione) e quindi occorre uguagliare a 0 la derivata prima

$$y'(t)=0\Rightarrow(z+1)e^{-t}=(z+5)e^{-5t}$$

Con la sostituzione $e^{-t}=X$ si ottiene

$$(z+1)X=(z+5)X^5\Rightarrow(z+1)=(z+5)X^4\Rightarrow X^4=\frac{z+1}{z+5}\Rightarrow\bar{X}=\sqrt[4]{\frac{z+1}{z+5}}$$

Considerando che, per definizione, si ha $0\leqslant X\leqslant 1$ perché consideriamo solo funzioni causali, cioè definite per $t \geq 0$, si deve imporre

$$0 < \frac{z+1}{z+5} < 1$$

I due estremi non li consideriamo perché corrispondono ai valori $t \to \infty$ e $t=0$ e noi cerchiamo un massimo o un minimo strettamente interno a questo intervallo. La disuguaglianza è soddisfatta se e solo se

$$z > -1$$

e, per le considerazioni precedenti sulla pendenza iniziale, avremo un minimo (sottoelongazione) per $z>0$ e un massimo (sovraelongazione) per $-1<z<0$.

Il valore del massimo o del minimo si ottiene calcolando la risposta al gradino

$$Y(s) = \frac{5}{-z} \cdot \frac{s-z}{s(s+1)(s+5)} = \frac{1}{s} - \frac{5(z+1)}{4z} \frac{1}{s+1} + \frac{z+5}{4z} \frac{1}{s+5}$$

cioè, antitrasformando

$$y(t) = \left[1 - \frac{5(z+1)}{4z} e^{-t} + \frac{z+5}{4z} e^{-5t} \right] \varepsilon(t)$$

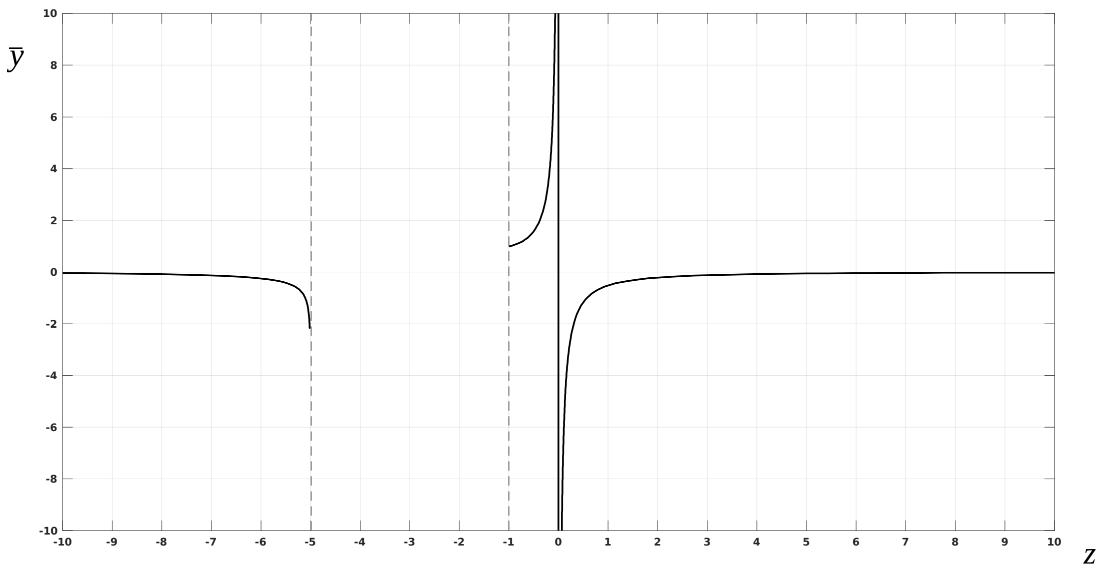
Sostituendo il valore di $\bar{X}$ in quest'ultima, si ottiene il valore del massimo o del minimo

$$\bar{y} = 1 - \frac{5(z+1)}{4z} \sqrt[4]{\frac{z+1}{z+5}} + \frac{z+5}{4z} \left(\sqrt[4]{\frac{z+1}{z+5}} \right)^5 = 1 - \frac{5(z+1)}{4z} \sqrt[4]{\frac{z+1}{z+5}} + \frac{z+1}{4z} \sqrt[4]{\frac{z+1}{z+5}} = 1 - \frac{(z+1)}{z} \sqrt[4]{\frac{z+1}{z+5}}$$

Il grafico della funzione

$$\bar{y} = 1 - \frac{(z+1)}{z} \sqrt[4]{\frac{z+1}{z+5}}$$

è il seguente



e conferma quanto trovato in precedenza, fornendo in più il valore del massimo o del minimo.

Si noti che la funzione non esiste nell'intervallo $[-5 \div -1]$ e che presenterebbe un minimo per $z<-5$, ma questo minimo si avrebbe per un istante di tempo $t<0$.

