

## III esercitazione presso il LAIB

**Esercizio #1: posizionamento dei poli mediante retroazione degli stati**

Si consideri un levitatore magnetico, il cui modello linearizzato nell'intorno del punto di funzionamento desiderato è dato dal seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= A \cdot \delta x(t) + B \cdot \delta u(t) \\ \delta y(t) &= C \cdot \delta x(t) + D \cdot \delta u(t)\end{aligned}$$

dove  $\delta u(t)$ ,  $\delta x(t)$  e  $\delta y(t)$  costituiscono gli scostamenti delle variabili di ingresso-stato-uscita del levitatore rispetto al punto di funzionamento, mentre le matrici della rappresentazione in variabili di stato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

Si supponga di voler progettare una retroazione degli stati tale che gli autovalori del sistema retroazionato siano in  $\bar{\lambda}_1 = -40$  e  $\bar{\lambda}_2 = -60$ . A tal proposito:

- 1) si analizzino le proprietà di raggiungibilità del sistema linearizzato, verificando che la coppia  $(A, B)$  sia raggiungibile e che quindi, utilizzando una legge di controllo del tipo:

$$\delta u(t) = - \underbrace{K \cdot \delta x(t)}_{\text{feedback}} + \underbrace{\alpha \cdot r(t)}_{\text{feedforward}}$$

gli autovalori di  $A - BK$  siano posizionabili ad arbitrio (suggerimento: utilizzare i comandi MATLAB `ctrb` e `rank`);

- 2) si progetti il vettore riga  $K$  tale che gli autovalori di  $A - BK$  siano in  $\bar{\lambda}_1 = -40$  e  $\bar{\lambda}_2 = -60$ , verificando che gli autovalori di  $A - BK$  siano effettivamente quelli desiderati (suggerimento: utilizzare i comandi MATLAB `place` oppure `acker`);
- 3) si applichi la retroazione degli stati, osservando che il sistema retroazionato è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) = A\delta x(t) + B[-K\delta x(t) + \alpha r(t)] \\ &= (A - BK)\delta x(t) + \alpha Br(t) = A_{rs}\delta x(t) + B_{rs}r(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t) = C\delta x(t) + D[-K\delta x(t) + \alpha r(t)] \\ &= (C - DK)\delta x(t) + \alpha Dr(t) = C_{rs}\delta x(t) + D_{rs}r(t)\end{aligned}$$

e che quindi gli autovalori del sistema retroazionato sono proprio gli autovalori di  $A - BK$ ;

- 4) si simuli l'evoluzione della risposta  $\delta y(t)$  del sistema retroazionato ad un ingresso  $r(t)$  ad onda quadra di frequenza 0.5Hz ed ampiezza 2VPP; si ponga  $\alpha = -1$  e si confrontino gli andamenti temporali corrispondenti ai seguenti valori dello stato iniziale  $\delta x(t=0)$ :

$$\delta x_o^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta x_o^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta x_o^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(suggerimento: l'onda quadra può essere generata come `r=sign(sin(2*pi*0.5*t))` ).

## Esercizio #2: progetto di un osservatore dello stato

Si consideri il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

in cui

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2400 & -100 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

(si tratta del modello linearizzato del levitatore magnetico controllato mediante retroazione degli stati come descritto nel precedente esercizio).

Si supponga di voler progettare un osservatore dello stato avente autovalori in  $\bar{\lambda}_{oss,1} = -120$  e  $\bar{\lambda}_{oss,2} = -180$ . A tal proposito:

- 1) si analizzino le proprietà di osservabilità del sistema, verificando che la coppia  $(A, C)$  sia osservabile e che quindi sia possibile progettare uno stimatore asintotico dello stato in cui la matrice  $A - LC$  abbia tutti gli autovalori asintoticamente stabili (suggerimento: utilizzare i comandi MATLAB `obsv` e `rank`);
- 2) si progetti il vettore colonna  $L$  tale che gli autovalori di  $A - LC$  siano in  $\bar{\lambda}_{oss,1} = -120$  e  $\bar{\lambda}_{oss,2} = -180$ , verificando che gli autovalori di  $A - LC$  siano effettivamente quelli desiderati (suggerimento: utilizzare i comandi MATLAB `place` e `acker`);
- 3) si osservi che l'osservatore dello stato è dato dal seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] = LCx(t) + (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t)\end{aligned}$$

dove  $\hat{x}(t)$  ed  $\hat{y}(t)$  sono rispettivamente le stime dello stato  $x(t)$  e dell'uscita  $y(t)$ ; il sistema complessivo, comprensivo dell'osservatore dello stato, è quindi descritto dal seguente sistema dinamico:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{tot}(t) &= \left[ \begin{array}{c|c} A & 0_{n \times n} \\ \hline LC & A - LC \end{array} \right] x_{tot}(t) + \left[ \begin{array}{c} B \\ B \end{array} \right] u(t) = A_{tot}x_{tot}(t) + B_{tot}u(t) \\ y_{tot}(t) &= \left[ \begin{array}{c|c} C & 0_{q \times n} \\ \hline 0_{q \times n} & C \end{array} \right] x_{tot}(t) + \left[ \begin{array}{c} D \\ D \end{array} \right] u(t) = C_{tot}x_{tot}(t) + D_{tot}u(t)\end{aligned}$$

in cui compaiono le variabili  $x_{tot}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$  ed  $y_{tot}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix}$ ;

- 4) si simuli l'evoluzione dello stato  $x_{tot}(t)$  e della risposta  $y_{tot}(t)$  ad un ingresso  $u(t)$  ad onda quadra di frequenza 0.5Hz ed ampiezza 2VPP, assumendo sempre nullo lo stato iniziale dell'osservatore  $\hat{x}(t=0)$ ; si confrontino in particolare gli andamenti temporali dello stato  $x(t)$  e della sua stima  $\hat{x}(t)$ , nonché dell'uscita  $y(t)$  e della sua stima  $\hat{y}(t)$ , corrispondenti ai seguenti valori dello stato iniziale  $x(t=0)$ :

$$x_o^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_o^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_o^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

osservando che l'errore di stima risulta trascurabile già dopo pochi centesimi di secondo dall'istante iniziale  $t = 0$ .

### Esercizio #3: posizionamento dei poli mediante regolatore

Si consideri un levitatore magnetico, il cui modello linearizzato nell'intorno del punto di funzionamento desiderato è dato dal seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= A \cdot \delta x(t) + B \cdot \delta u(t) \\ \delta y(t) &= C \cdot \delta x(t) + D \cdot \delta u(t)\end{aligned}$$

dove  $\delta u(t)$ ,  $\delta x(t)$  e  $\delta y(t)$  costituiscono gli scostamenti delle variabili di ingresso-stato-uscita del levitatore rispetto al punto di funzionamento, mentre le matrici della rappresentazione in variabili di stato sono le stesse considerate nel primo esercizio:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

Si supponga di voler progettare un regolatore tale che gli autovalori dell'osservatore dello stato siano in  $\bar{\lambda}_{oss,1} = -120$  e  $\bar{\lambda}_{oss,2} = -180$  e gli autovalori imposti dalla retroazione degli stati stimati siano in  $\bar{\lambda}_1 = -40$  e  $\bar{\lambda}_2 = -60$  e. A tal proposito:

- 1) si analizzino le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema linearizzato, verificando che la coppia  $(A, B)$  sia raggiungibile e che la coppia  $(A, C)$  sia osservabile, di modo che utilizzando una legge di controllo del tipo:

$$\delta u(t) = - \underbrace{K \cdot \delta \hat{x}(t)}_{\text{feedback}} + \underbrace{\alpha \cdot r(t)}_{\text{feedforward}}$$

sia gli autovalori di  $A - BK$  sia gli autovalori di  $A - LC$  possano essere posizionati ad arbitrio;

- 2) si progetti il vettore colonna  $L$  tale che gli autovalori di  $A - LC$  siano in  $\bar{\lambda}_{oss,1} = -120$  e  $\bar{\lambda}_{oss,2} = -180$ , verificando che gli autovalori di  $A - LC$  siano effettivamente quelli desiderati;
- 3) si progetti il vettore riga  $K$  tale che gli autovalori di  $A - BK$  siano in  $\bar{\lambda}_1 = -40$  e  $\bar{\lambda}_2 = -60$ , verificando che gli autovalori di  $A - BK$  siano effettivamente quelli desiderati;
- 4) si applichi la retroazione degli stati stimati, osservando che il sistema retroazionato è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) = A\delta x(t) + B[-K\delta \hat{x}(t) + \alpha r(t)] \\ &= A\delta x(t) - BK\delta \hat{x}(t) + \alpha Br(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t) = C\delta x(t) + D[-K\delta \hat{x}(t) + \alpha r(t)] \\ &= C\delta x(t) - DK\delta \hat{x}(t) + \alpha Dr(t)\end{aligned}$$

mentre l'osservatore dello stato è dato da questo sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\delta \dot{\hat{x}}(t) &= A\delta \hat{x}(t) + B\delta u(t) + L[\delta y(t) - \delta \hat{y}(t)] \\ &= A\delta \hat{x}(t) + B[-K\delta \hat{x}(t) + \alpha r(t)] + L[\delta y(t) - \delta \hat{y}(t)] \\ &= LC\delta x(t) + (A - BK - LC)\delta \hat{x}(t) + \alpha Br(t) \\ \delta \hat{y}(t) &= C\delta \hat{x}(t) + D\delta u(t) = C\delta \hat{x}(t) + D[-K\delta \hat{x}(t) + \alpha r(t)] \\ &= (C - DK)\delta \hat{x}(t) + \alpha Dr(t)\end{aligned}$$

dove  $\delta \hat{x}(t)$  ed  $\delta \hat{y}(t)$  sono rispettivamente le stime dello stato  $\delta x(t)$  e dell'uscita  $\delta y(t)$ ;

il sistema complessivo, comprensivo dell'intero regolatore, è quindi descritto dal seguente sistema dinamico:

$$\begin{aligned}\delta \dot{x}_{tot}(t) &= \left[ \begin{array}{c|c} A & -BK \\ \hline LC & A - BK - LC \end{array} \right] \delta x_{tot}(t) + \left[ \begin{array}{c} \alpha B \\ \alpha B \end{array} \right] r(t) = A_{tot}^* \delta x_{tot}(t) + B_{tot}^* r(t) \\ \delta y_{tot}(t) &= \left[ \begin{array}{c|c} C & -DK \\ \hline 0_{q \times n} & C - DK \end{array} \right] \delta x_{tot}(t) + \left[ \begin{array}{c} \alpha D \\ \alpha D \end{array} \right] r(t) = C_{tot}^* \delta x_{tot}(t) + D_{tot}^* r(t)\end{aligned}$$

in cui compaiono le variabili  $\delta x_{tot}(t) = \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta \hat{x}(t) \end{bmatrix}$  e  $\delta y_{tot}(t) = \begin{bmatrix} \delta y(t) \\ \delta \hat{y}(t) \end{bmatrix}$ ;

- 5) si simuli l'evoluzione dello stato  $\delta x_{tot}(t)$  e della risposta  $\delta y_{tot}(t)$  ad un ingresso  $r(t)$  ad onda quadra di frequenza 0.5Hz ed ampiezza 2VPP, ponendo  $\alpha = -1$  ed assumendo sempre nullo lo stato iniziale dell'osservatore  $\delta \hat{x}(t=0)$ ;

si confrontino in particolare gli andamenti temporali dello stato  $\delta x(t)$  e della sua stima  $\delta \hat{x}(t)$ , nonché dell'uscita  $\delta y(t)$  e della sua stima  $\delta \hat{y}(t)$ , corrispondenti ai seguenti valori dello stato iniziale  $\delta x(t=0)$ :

$$\delta x_o^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta x_o^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta x_o^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

osservando che l'errore di stima risulta trascurabile solo dopo alcuni decimi di secondo dall'istante iniziale  $t=0$ ;

si confrontino infine le uscite ottenute con quelle ricavate nel primo esercizio con il sistema controllato mediante retroazione degli stati.