Universidad Rey Juan Carlos de Madrid
Grado en Ingeniería de Robótica Software
Ampliación de Matemáticas Aplicada

22 de marzo de 2023 – Primer examen parcial

1. (**2.5 puntos**) Calcule la serie de Fourier trigonométrica de una función periódica $f(t)$ con período fundamental $T_0 = 2$, donde

$$f(t) = t \text{ si } -1 \leq t \leq 1.$$

Ayuda:

$$\int t\sin(at)dt = \frac{\sin(at) - at\cos(at)}{a^2} + \textit{ constante.}$$

2. (**2.5 puntos**) Calcule la transformada de Fourier de la siguiente función

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ t & \text{si } \ \ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ayuda:

$$\int te^{at}dt = \frac{e^{at}(at-1)}{a^2} + \textit{ constante.}$$

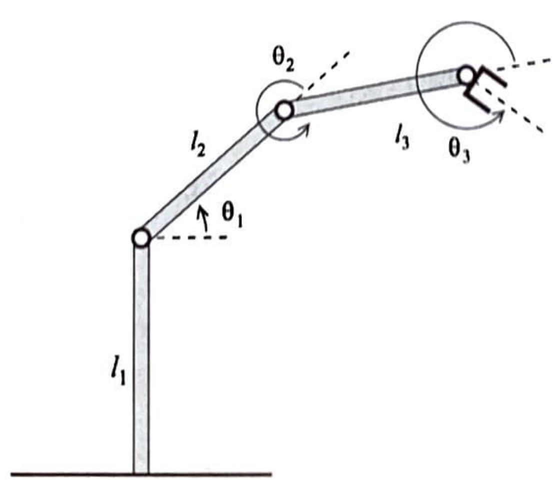
3. (**2 puntos**) Calcule la matriz de una transformación Euclídea dada por

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ayuda: La matriz de una transformación Euclídea tiene la siguiente forma:

$$H = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (**1.5 puntos**) Tenemos el siguiente brazo robot:



Sabiendo que la configuración de la mano de este robot viene dada por la función

$$f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \begin{pmatrix} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos\theta_1 \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin\theta_1 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{pmatrix},$$

plantee un sistema de ecuaciones polinómicas en las variables $c_1 := \cos\theta_1$, $c_2 := \cos\theta_2$, $s_1 := \sin\theta_1$ y $s_2 := \sin\theta_2$ para comprobar si la mano del robot puede alcanzar un punto de coordenadas $x = a$ e $y = b$. **NO resuelva el sistema de ecuaciones.**

Ayuda: Tenemos las siguientes identidades trigonométricas:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2,$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1,$$
$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

5. Considere el siguiente cuaternión:

$$q = \cos\theta + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} \sin\theta.$$

(a) (**0.5 puntos**) Demuestre que q es un cuaternión unidad.

(b) (**1 punto**) Rote 45° el vector $\vec{v} = \vec{i}$ alrededor del eje $\vec{q} = \vec{j}$ usando cuaterniones.

Ayuda: El vector $q\vec{v}q^*$ representa la rotación de de $\vec{v}$ un ángulo 2θ alrededor del eje $\vec{q}$.

Ejercicio Extra

El siguiente ejercicio es extra y sirve para subir la nota de este examen un punto (hasta un máximo de 10).

6. (**1 punto**) Compruebe que

$$t * \delta(t) = t.$$

Ayuda: La tranformada de Fourier de $\delta(t)$ es la función constante 1.

Sol: $\mathcal{F}[t * \delta(t)] = \mathcal{F}[t]\,\underbrace{\mathcal{F}[\delta(t)]}_{=1} = \mathcal{F}[t]$

$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[t * \delta(t)]] = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[t]]$

$\Rightarrow \boxed{t * \delta(t) = t}$

1. $f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right]$

$T_0 = 2 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$

$a_0 = a_n = 0$ ya que $f(t)$ es impar.

$$b_n = \int_{-1}^{1} t \sin(n\pi t)\, dt = \left.\frac{\sin(n\pi t) - n\pi t(\cos n\pi t)}{n^2\pi^2}\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{\sin(n\pi) - n\pi\cos n\pi}{n^2\pi^2} - \frac{\sin(-n\pi) + n\pi\cos(-n\pi)}{n^2\pi^2} =$$

$$= \frac{2\cancel{\sin n\pi}^{\,0} - 2n\pi\cos n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{-2\cancel{n}\pi\cos n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{-2n\pi(-1)^n}{n^2\pi^2} =$$

$$= \frac{-2}{n\pi}(-1)^n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi t)}$$

2. $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-1}^{0} -t e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{1} t e^{-i\omega t} =$$

$$= -\left.\frac{e^{-i\omega t}(-i\omega t - 1)}{-\omega^2}\right]_{-1}^{0} + \left.\frac{e^{-i\omega t}(-i\omega t - 1)}{-\omega^2}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left[-1 - e^{i\omega}(i\omega - 1) + -e^{-i\omega}(-i\omega - 1) - 1\right]$$

$$= \frac{-\left[e^{i\omega}(i\omega - 1) + e^{-i\omega}(-i\omega - 1)\right] - 2}{\omega^2} = \frac{-e^{i\omega}(i\omega - 1) + e^{-i\omega}(i\omega + 1) - 2}{\omega^2}$$

$\boxed{\text{A partir de aquí, opcional}}$:

$$= \frac{1}{\omega^2}\left(i\omega(-e^{i\omega} + e^{-i\omega}) + e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right) - \frac{2}{\omega^2}$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\left[2\omega\,\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} + 2\,\frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}\right] - \frac{2}{\omega^2} = \frac{2\omega\sin(\omega) + 2\cos(\omega)}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2}$$

$$= \frac{2}{\omega^2}\left(\omega\sin\omega + \cos\omega - 1\right)$$

3. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} 1 = t_x \\ 0 = t_y \end{matrix}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta + 1 \\ 2 = \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{matrix} \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta = 0 \\ 2 = \sqrt{2}\sin\theta + \sqrt{2}\cos\theta \end{matrix} \Rightarrow \cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \cancel{\theta = 45° ó 225°}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ ó $\frac{5\pi}{4}$

sustituimos en la 2ª ec

$2 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2.$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ es una sol.

sustituyo $\theta = \frac{5\pi}{4}$: $\left[2 = \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4} + \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{2} - \frac{2}{2} = -2\right]$

$2 = -2$ Falso

$\Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4}$ no es sol.

$\Rightarrow$ sol: $\boxed{t_x = 1,\ t_y = 0,\ \theta = \frac{\pi}{4}}$

4. $\begin{cases} a = l_3\cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2\cos\theta_1 \\ b = l_3\sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2\sin\theta_1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = l_3(c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 \\ b_2 = l_3(s_1 c_2 + s_2 c_1) + l_2 s_1 \\ s_1^2 + c_1^2 = 1 \\ s_2^2 + c_2^2 = 1 \end{cases}$

5. a) $q q^* = \left(\cos\theta + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\sin\theta\right)\left(\cos\theta - \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\sin\theta\right) = \cos^2\theta + \sin^2\theta -$

$- \cancel{\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\cos\theta\sin\theta + \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}\cos\theta\sin\theta} + \frac{\sin^2\theta}{|\vec{q}|^2}\cancelto{0}{\vec{q}\times\vec{q}} = 1. \Rightarrow q$ es unitario.

b) $\left(\cos\frac{\pi}{8} + \vec{j}\sin\frac{\pi}{8}\right)\vec{i}\left(\cos\frac{\pi}{8} - \vec{j}\sin\frac{\pi}{8}\right) =$

$= \left(0 - 0 + \cos\frac{\pi}{8}\vec{i} + 0 - \sin\frac{\pi}{8}\vec{k}\right)\left(\cos\frac{\pi}{8} - \vec{j}\sin\frac{\pi}{8}\right) = 0 + 0$

$+ \cos^2\frac{\pi}{8}\vec{i} - \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\vec{k} - \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\vec{k} - \sin^2\frac{\pi}{8}\vec{i} =$

$= (\cos^2\pi/8 - \sin^2\pi/8)\vec{i} - 2\sin\pi/8\cos\pi/8\,\vec{k} = \cos\pi/4\,\vec{i} - \sin\pi/4\,\vec{k}$