Solución del profesor

Universidad Rey Juan Carlos de Madrid
Grado en Ingeniería de Robótica Software
Ampliación de Matemáticas Aplicada

11 de mayo de 2023 – Primer examen parcial, convocatoria de mayo

1. **(2.5 puntos)** Calcule la serie de Fourier trigonométrica de una función periódica $f(t)$ con período fundamental $T_0 = 1$, donde
$$f(t) = t \text{ si } -0.5 \leq t \leq 0.5.$$
Ayuda:
$$\int t\sin(at)dt = \frac{\sin(at) - at\cos(at)}{a^2} + \textit{constante}.$$

2. **(2.5 puntos)** Calcule la transformada de Fourier de la siguiente función
$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } -2 \leq t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } \quad 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

3. **(1.5 puntos)** Calcule la matriz de una transformación Euclídea dada por
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Ayuda: La matriz de una transformación Euclídea tiene la siguiente forma:
$$H = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **(1.5 puntos)** Tenemos un brazo robot formado por dos varas de longitudes l_1 y l_2, con $l_1 > l_2$. La vara de longitud l_1 puede girar entre 0° y 180° alrededor de una articulación fija situada en el origen de coordenadas. En el otro extremo de la vara l_1 hay otra articulación en torno a la que puede girar la vara l_2, pudiendo dar una vuelta completa de 360°. Describa el espacio de puntos que pueden ser alcanzados por la mano del robot, que está situada en el extremo libre de la vara l_2.

5. **(2 puntos)** Rote 60° el vector $\vec{v} = \vec{j}$ alrededor del eje $\vec{q} = \vec{i}$ usando tanto cuaterniones como una matriz de rotación.

① Dada una señal $f(t)$ con propiedades suficientemente buenas y período T_0, su serie de Fourier es la suma infinita

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right]$$

donde $\omega_0 = 2\pi / T_0$ y

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t)\, dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt \quad n \geq 1,$$

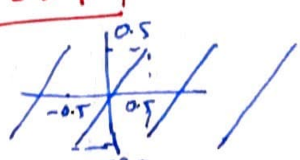
$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} f(t) \sin(n\omega_0 t)\, dt \quad n \geq 1.$$

La parte par de la serie es $f_p = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t)$

La parte impar de la serie es $f_{impar} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$

En el caso de $f(t) = t$ si $-0.5 \leq t \leq 0.5$, periódica con $T_0 = 1$:

- $\boxed{\omega_0 = 2\pi/1 = 2\pi}$ $\boxed{0.25p}$
- $f(t)$ es impar:



$\Longrightarrow \boxed{f_p = 0}$ $\boxed{0.75p}$

Calculamos f_{impar}:

$$\left[b_n = \frac{2}{1} \int_{-0.5}^{0.5} t \sin(2\pi n t)\, dt = \cancel{2} \left. \frac{\sin(2\pi n t) - 2\pi n t \cos(2\pi n t)}{2^{\cancel{2}} \pi^2 n^2} \right|_{-0.5}^{0.5} \right.$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 n^2} \left[\left(\sin(\pi n) - \pi n \cos(\pi n) \right) - \left(\underbrace{\sin(-\pi n)}_{= -\sin(\pi n)} + \pi n \underbrace{\cos(-\pi n)}_{= \cos(\pi n)} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}\pi^2 n^2} \left[\cancel{2} \cancelto{0}{\sin(\pi n)} - \cancel{2}\pi n \cos \pi n \right] = \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}} \leftarrow \boxed{1.5p}$$

$\Longrightarrow$ La serie de Fourier de $f(t)$ es: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2 n^2} \sin(2\pi n t)}$

② La transformada de Fourier de una función $f(t)$ es

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt.$$ En nuestro caso:

$$F(\omega)=\int_{-2}^{0} e^{t}e^{-i\omega t}\,dt+\int_{0}^{2} e^{-t}e^{-i\omega t}\,dt=$$

$$=\int_{-2}^{0} e^{(1-i\omega)t}\,dt+\int_{0}^{2} e^{-(1+i\omega)t}\,dt=$$

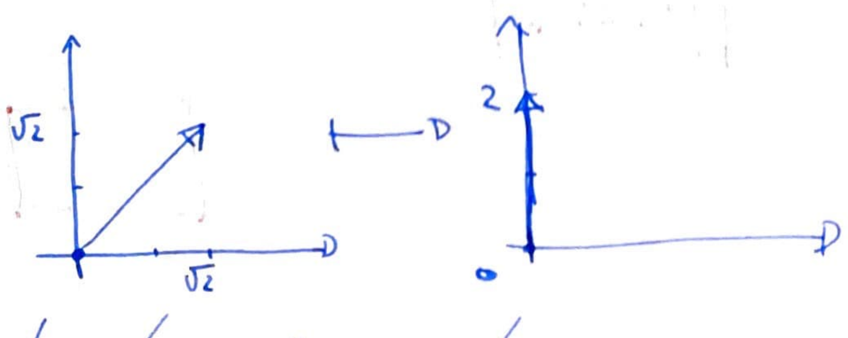
$$=\left.\frac{e^{(1-i\omega)t}}{1-i\omega}\right]_{-2}^{0}+\left.\frac{e^{-(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)}\right]_{0}^{2}=$$

$$=\frac{1-e^{2(1-i\omega)}}{1-i\omega}+\frac{e^{-2(1+i\omega)}-1}{-(1+i\omega)}=$$

$$=\frac{1}{1-i\omega}+\frac{1}{1+i\omega}-\left(\frac{e^{2-2i\omega}}{1-i\omega}+\frac{e^{-2-2i\omega}}{1+i\omega}\right)=$$

$$=\frac{2}{1+\omega^2}-\left[\frac{(1+i\omega)\,e^{2-2i\omega}+(1-i\omega)\,e^{-2-2i\omega}}{1+\omega^2}\right]$$ $\boxed{2.5p}$

③



La transformación proyectiva que corresponde a $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ es

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & t_x\\ \sin\theta & \cos\theta & t_y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}t_x=0\\ t_y=0\end{matrix}}$$ $\boxed{0.5p}$

La transformación proyectiva que corresponde a $\begin{pmatrix}\sqrt2\\\sqrt2\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ es teniendo en cuenta que $t_x=t_y=0$

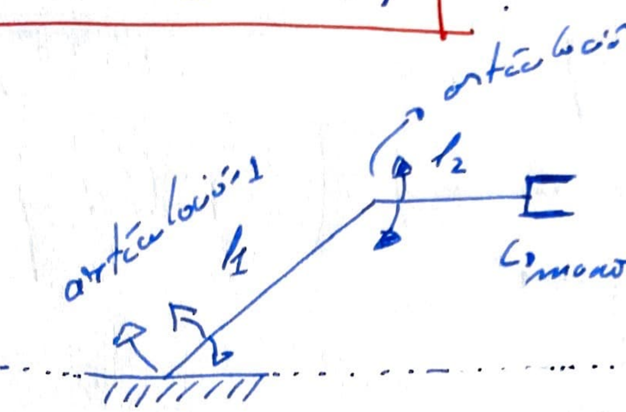
$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt2\\\sqrt2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\cos\theta=\sin\theta\\ \sqrt2\sin\theta+\sqrt2\cos\theta=2\end{matrix}}$$ $\boxed{0.25p}$

$$\Rightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{4}}$$ $\boxed{0.75p}$

⇒ La matriz de esta transformación es

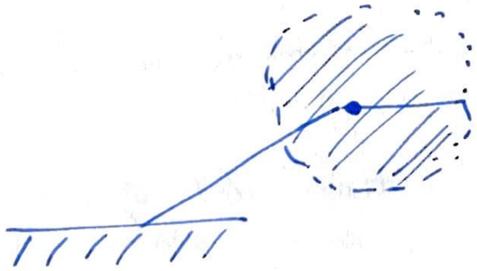
$$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

4



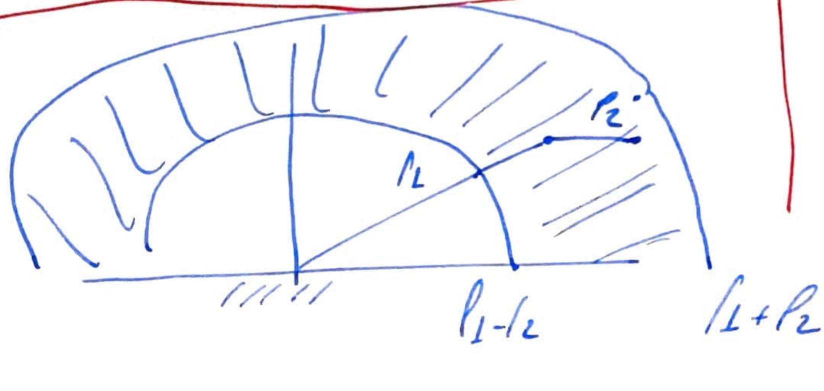
Para saber cuáles puntos pueden ser alcanzados por la mano del brazo robot, considérese que l_1 está en una posición dada.

En este caso l_2 puede girar libremente 360° alrededor de la articulación 1:



Es decir, en particular, los puntos que pueden ser alcanzados en la dirección de l_1 son l_1-l_2 y l_1+l_2. Si se gira ~~en parte~~ l_1, observamos que también pueden ser alcanzados todos los puntos del intervalo $[l_1-l_2, l_1+l_2]$. Puesto que 1 puede girar 180°, los puntos que alcanza la mano del ~~brazo~~ son todos los puntos de la mitad del interior de un anillo de radios l_1-l_2 y l_1+l_2

1.5P



(5) Realizamos la rotación primero usando cuaterniones: un ángulo 2θ alrededor del eje $\vec{q}$

El vector ya rotado es $\vec{v}' = q \vec{v} q^*$, donde $\vec{v}$ es el vector que se quiere rotar y $q = \cos\theta + \frac{\vec{q}}{q} \sin\theta$.

$\Rightarrow \vec{v}' = (\cos 30° + \vec{i} \sin 30°)\, \vec{j}\, (\cos 30° - i \sin 30°) =$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\vec{i}\right) \vec{j} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\vec{i}\right) = \cancel{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)})$

$\left(0 - 0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + 0 + \frac{1}{2}\vec{k}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\vec{i}\right) =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\vec{k} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \vec{j} =$

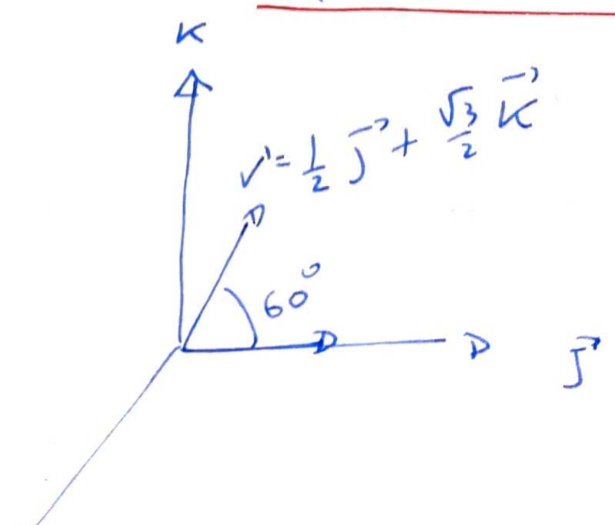
$= \boxed{\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}}$ $\boxed{+P}$

Ahora realizamos la rotación usando una matriz de rotación:

Para rotar el vector $\vec{j}$ alrededor del eje $\vec{i}$ 60°, hacemos:

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}$$



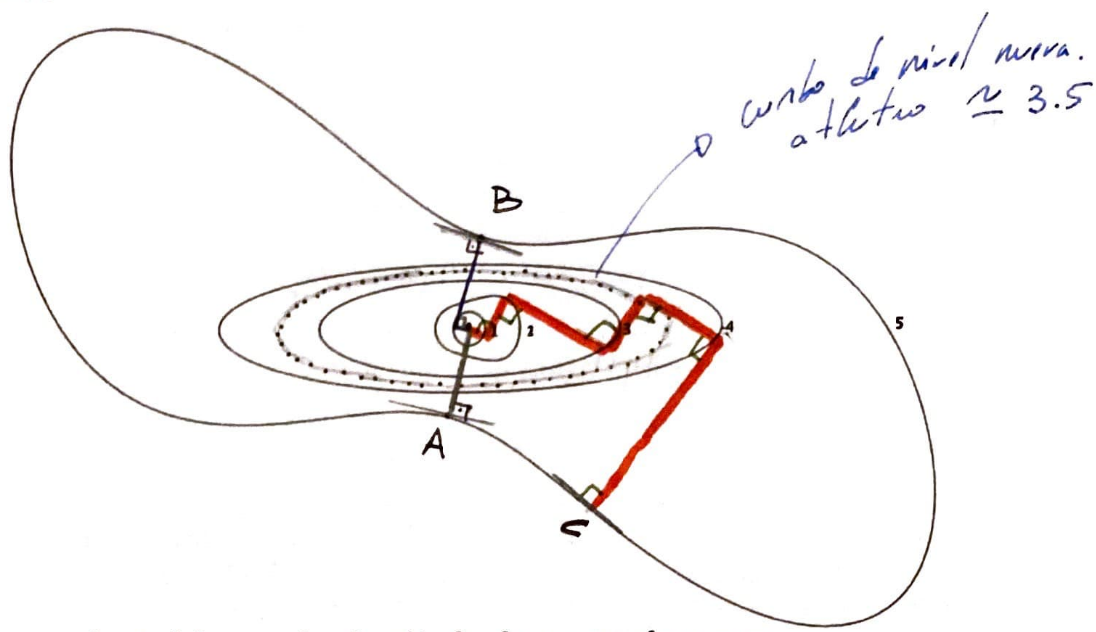
$\boxed{+P}$

Universidad Rey Juan Carlos de Madrid
Grado en Ingeniería de Robótica Software
Ampliación de Matemática Aplicada

11 de mayo de 2023 – Segundo examen parcial

Parte I – Tema 3

1. (~~1.5~~ **puntos**) Tenemos las siguientes curvas de nivel de cierta superficie. Queremos realizar, gráficamente, un descenso por gradiente para alcanzar el mínimo de la superficie.



En la curva de nivel 5, **usando el método de mayor descenso**:

(a) Encuentre un punto desde el cual el mínimo se alcance en una sola iteración.

(b) Encuentre un punto desde el cual el mínimo se alcance en dos iteraciones.

(c) Encuentre un punto desde el cual la convergencia sea lenta, es decir, el mínimo se alcance en más de tres iteraciones.

(Dibuje las correspondientes trayectorias sobre la gráfica dada. Para que sus respuestan puntuen, tienen que argumentar la elección de cada punto.)

2. (a) (~~0.75~~ **puntos**) Convierta el problema de encontrar la solución del siguiente sistema de ecuaciones en un problema de descenso por gradiente (**sin resolverlo numéricamente, pero sí planteando las correspodientes iteraciones**):

$$\begin{cases} y = e^x, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

(b) (~~0.75~~ **puntos**) Comente brevemente sobre la eficiencia de este método para resolver sistemas de ecuaciones (basándose, por ejemplo, en los ejercicios resueltos en clase).

3. (~~2~~ **puntos**) El siguiente sistema lineal es incompatible. Aproxime su solución por el método de mínimos cuadrados:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 2, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Parte II – Tema 4

Nota:

Esta parte solamente es obligatoria para las personas que no aprobaron el proyecto de programación sobre filtros de Kalman. Si elije entregar esta parte, se entiende que desiste de la nota que obtuvo en dicho proyecto.

Si **NO** entrega esta parte, y desea que se le guarde la nota obtenida en la práctica, firme.

Nombre con Apellidos, DNI y firma:

1. Suponga que tiene k medidas, $b_1, \ldots, b_k$, de cierto parámetro. La media de dichas medidas se denota por x_k. Ahora suponga que hace una nueva medida, b_{k+1} del parámetro.
   (a) **(1.5 puntos)** Demostrar, usando un filtro de Kalman, que la siguiente es la media correcta de $b_1, \ldots, b_{k+1}$:
   $$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{k+1}(b_{k+1} - x_k).$$
   (b) **(1 punto)** Asumiendo $W_k = \sigma^2/k$ y asumiendo una varianza de b_{k+1} con valor $V = \sigma^2$, demostrar que la varianza de la media x es
   $$W_{k+1} = \frac{\sigma^2}{k+1}.$$

2. Suponga que tiene un conjunto de n puntos en el plano para los cuales se ha realizado una regresión lineal por el método de mínimos cuadrados, obteniéndose la recta $r : y = mx + n$.
   (a) **(1.5 puntos)** Se mide un nuevo punto y se quiere calcular una nueva recta de regresión $\tilde{r} : y = \tilde{m}x + \tilde{n}$ para los $n + 1$ puntos, pero no se quiere realizar una regresión lineal para el cálculo de $\tilde{r}$. Argumente que $(\tilde{m}, \tilde{n})$ se puede expresar como una corrección de rango uno de (m, n).
   (b) **(1 punto)** ¿Por qué es más eficiente hacer esta corrección de rango uno que resolver el problema de mínimos cuadrados de todos los $n + 1$ puntos?

① Con el método de mayor descenso, ~~vamos~~ empezamos perpendiculares a una curva de nivel, y continuamos hasta el mínimo en dicha dirección. El mínimo se alcanza cuando tocamos otra curva de nivel tangencialmente, o cuando alcanzamos el mínimo local.

A todos los efectos prácticos, podemos suponer que el mínimo local se encuentra en el centro del círculo pequeño (curva de nivel de altura 1).

a) Solución: A : Si empezamos en A, alcanzamos el mínimo en una sola iteración

b) Solución: B : Si empezamos en B, alcanzamos el mínimo en dos iteraciones

c) Solución: C : Si empezamos en C, alcanzamos el mínimo en aproximadamente 5 iteraciones. Hemos tenido que introducir una curva de nivel entre las curvas de altura 3 y 4.

2. a) El sistema de ecuaciones es equivalente a

$$\frac{1}{2}(y-e^x)^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2-1)^2=0 \qquad x,y\in\mathbb{R}.$$

Si denotamos por $f(x,y) := (y-e^x)^2+(x^2+y^2-1)^2$

Resolver el sistema original de ecuaciones equivale a encontrar el mínimo ~~local~~ global de $f(x,y)$.

Planteando el problema de descenso por gradientes para encontrar un mínimo local de $f(x,y)$, obtenemos las siguientes iteraciones:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \alpha_k \nabla f(\vec{x}^{k}), \text{ donde}$$

$$\nabla f(x,y) = (\cancel{2}-(y-e^x)e^x + (x^2+y^2-1)2x,$$
$$(y-e^x)+(x^2+y^2)2y).$$

Eligiendo un $\vec{x}^{(0)}$ y un α_0 adecuados, podemos aproximar los mínimos locales de $f(x,y)$.

b) Como observamos en los experimentos realizados en las sesiones de ejercicios, este método es muy lento. Además, a menos que ya tengamos una buena idea sobre dónde está el límite, este problema es muy fácilmente divergente.

3) El sistema se escribe en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución del correspondiente problema de mínimos cuadrados es

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$