Tema 4 El filtro de Kalman

A. Revisitando el problema de mínimos cuadrados

[Biblio: Strang, Linear Algebra and Learning from Data (pag. 164)]

ecuaciones normales

Problema de mínimos cuadrados: $\Leftrightarrow A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$

$b \in \mathbb{R}^m$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

$A\vec{X} = \vec{b}$ ← no tiene solución.

Aproximamos una solución minimizando $\|\vec{b} - A\vec{x}\|$.

Ahora supongamos que tenemos una ecuación nueva que le añadimos a $Ax = b$.

$$Ax = b$$
$$r x = b_{m+1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A \\ r \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ b_{m+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A^T & r^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ r \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} A^T & r^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b} \\ b_{m+1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(A^T A + r^T r\right)}_{\text{matriz de las nuevas ecuaciones normales}} \vec{x} = A^T b + r^T b_{m+1}$$

Obs: Es una corrección de rango 1 de $A^T A$

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ añadir $\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} = 0$.

Calcular $A^T A + r^T r$

Pregunta: ¿Hay que resolver de nuevo el problema de mínimos cuadrados?

Respuesta: NO! Ya que:

$$\left[A^T A + r^T r\right]^{-1} = \left(A^T A\right)^{-1} - c\left(A^T A\right)^{-1} r^T r \left(A^T A\right)^{-1}$$

con $c = \dfrac{1}{1 + r\left(A^T A\right)^{-1} r^T}$

Así pues, actualizamos la solución $\vec{x}$ del problema de mín. cuadr. con $\vec{x}_{nuevo}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Mínimos cuadrados recursivo}}$

También se ... si en vez de r ... diversas ecs.

B. ~~INTRO AL~~ Filtro de Kalman

[Biblio: La anterior]

Kálmán (1930–2016): ingeniero y matemático húngaro.

Kalman se dio cuenta que este método se podía usar también para el problema dinámico de mínimos cuadrados.

Dinámico: supongamos que $\vec{x}$ puede cambiar con el tiempo

Ejemplo: si $\vec{x}$ representa la posición de un satélite, en un intervalo Δt de tiempo el satélite se mueve $\Delta \vec{x} = \vec{v}\Delta t$.

$$\Rightarrow \begin{cases} A\,\vec{x}_{viejo} = \vec{b} \\ {*}\ x_{nuevo} = x_{viejo} + v\Delta t \\ \vec{r}\, x_{nuevo} = b_{m+1} \quad \text{Nueva medida.} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ -I & I \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_{viejo} \\ \vec{x}_{nuevo} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{v}\Delta t \\ b_{m+1} \end{pmatrix}$$

(*) Sistema completo

Además, introducimos matrices de covarianza, V:

$$A^T V^{-1} A \vec{x} = A^T V^{-1} \vec{b}$$

↳ V se actualiza en cada paso

Recordar: Una matriz de covarianza es una matriz cuadrada que da la covarianza entre los entradas de un vector.

Es simétrica, semidefinida positiva y en la diagonal: varianza de un elemento consigo mismo.

(Mostrar imagen de wikipedia)

Idea de Kalman: En vez de resolver el sistema normal completo (*), usó:

$$\vec{x}_{nuevo} = \vec{x}_{estado} + K\left(b_{m+1} - M\vec{x}_{estado}\right)$$

donde x_{estado} es la predicción dada por

$$\underset{\substack{\| \\ x_{estado}}}{x_{nuevo}} = x_{antiguo} + \vec{V}\Delta t$$

K: matriz de ganancia de Kalman.

↳ creada a partir de A, M, y las matrices de covarianza V_{estado} V_b

C. Filtro de Kalman

[Biblio: Mianmo, pág. 308–309]

			matriz covarianza
medida 0:	$A_0\vec{x}_0=\vec{b}_0$		V_0
ec. estado 0:	$\vec{x}_1 = F_0\vec{x}_0$	(predicción)	C_0
	comparar		
medida 1:	$A_1\vec{x}_1=\vec{b}_1$		V_1
~~med~~ ec. estado 1:	$\vec{x}_2 = F_1\vec{x}_1$	(predicción)	C_1
	comparar		
medida 2:	$A_2\vec{x}_2=\vec{b}_2$		V_2

$\vdots$

$\boxed{\text{Subproblema}}$: $\boxed{\text{No existen } \vec{x}_{k+1} = F_k\vec{x}_k \text{ ni } C_k}$

$\Rightarrow$ Sist. Antiguo: $A_0\vec{x}_0=\vec{b}_0 \to A_0^T V_0^{-1} A_0\vec{x}_0 = A_0^T V_0^{-1}\vec{b}_0$

Sist. Nuevo: $\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \vec{b}_0 \\ \vec{b}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} A_0^T & A_1^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0^{-1} & 0 \\ 0 & V_1^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix}\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} A_0^T & A_1^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_0^{-1} & \\ & V_1^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{b}_0 \\ \vec{b}_1 \end{bmatrix}$$

Posible solución: Olvidarse del sistema antiguo y resolver el nuevo.

Problema: En el antiguo ya hicimos cálculos que no queremos repetir.

Solución de Kalman:

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + K_1(\vec{b}_1 - A_1\vec{x}_0)$$

W_0 : covarianza de errores en $\bar{x}_0^p$

W_1 — // — $\bar{x}_1'$

$$W_0 = \left(A_0^T V_0^{-1} A_0\right)^{-1}$$

$$W_1^{-1} = W_0^{-1} + A_1^T V_1^{-1} A_1$$

$$K_1 = W_1 A_1^T V_1^{-1}$$

$\boxed{\text{Deberes}}$: 5, 6 (Implementar)

Problema de mínimos cuadrados

~~1) Sin~~ Regresión lineal

1) sin predicción } · resolver sistema total

~~2) con predicción.~~ } · usar Filtro de Kalman.

Implementación de Matlab.

D. Filtro de Kalman en Matlab.