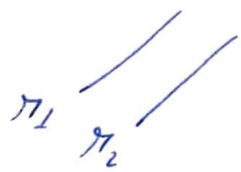
Tema 2: I El plano proyectivo

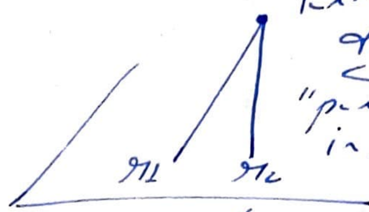
DÍA 1

A. Intro:

Mostrar imágenes de arte.



Dos rectas paralelas en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$



Punto de fuga "punto en el infinito".

Dos rectas paralelas se intersecan en $\mathbb{R}^2$

Notación: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ es un vector $\qquad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^T = (x \ \ y)$ es una matriz de transformación

B. Puntos y líneas:

Considérese una familia de rectas $ax+by+c=0$

Establecemos que $r_1: ax+by+c=0$

$r_2: kax+kby+kc=0$ son

la misma recta si $\boxed{k\neq 0}$

Obs: si en vez de (x,y) escribimos $(x,y,1)$ entonces la ec. de r_1 es: $\boxed{(x,y,1)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0}$

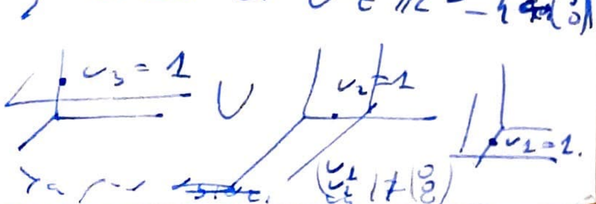
y la de r_2: $(kx,ky,k)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$

Obs: Un punto (x,y) cumple la ec. de una recta r_1 si $(x,y,1)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$

Extensión: (x,y,z) cumple la ec de r_1 si $(x,y,z)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$ $\quad (x:y:z)$

Def: Vector homogéneo $[\vec{v}]$, $\vec{v}\in\mathbb{R}^4$ es una clase de equivalencia $[\vec{v}]=\{\vec{w}\in\mathbb{R}^4 \mid \exists\lambda\in\mathbb{R}^*, \vec{w}=\lambda\vec{v}\}$.

Prop: El conjunto de clases de equivalencia de $\vec{v}\in\mathbb{R}^3-\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ tiene dim 2.



Prop: La intersección de dos rectas l_1, l_2 es el punto $\vec{x} = l \times l'$

Dem: $$\vec{x} = \vec{l} \times \vec{l'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ -ac' + ca' \\ ab' - bc' \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \dfrac{bc' - cb'}{ab' - bc'} \\ \dfrac{-ac' + ca'}{ab' - bc'} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en r_1:

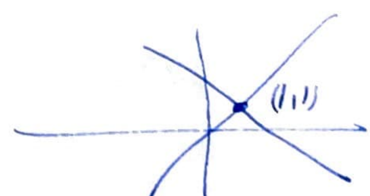
$$a \, \frac{bc' - cb'}{ab' - bc'} + b \, \frac{-ac' + ca'}{ab' - bc'} + c = 0$$

......

en r_2:

....

$\boxed{\text{Ej:}}$ $$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



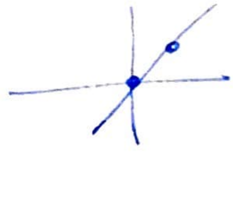
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2/-2 \\ -2/-2 \\ -2/-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y = 1}$$

Prop: Sean $\vec{x}, \vec{x'}$ dos puntos. La línea $\vec{l}$ pasando a través de $\vec{x}$ y $\vec{x'}$ es

$$\vec{l} = \vec{x} \times \vec{x'}.$$

Ej: $(0,0)$
$(1,1)$



$$\vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -x + y + 0 = 0$$

$$\boxed{y = x}$$

Intersección de líneas paralelas: $\leftarrow$ $\boxed{c \neq c'}$ paralelas.

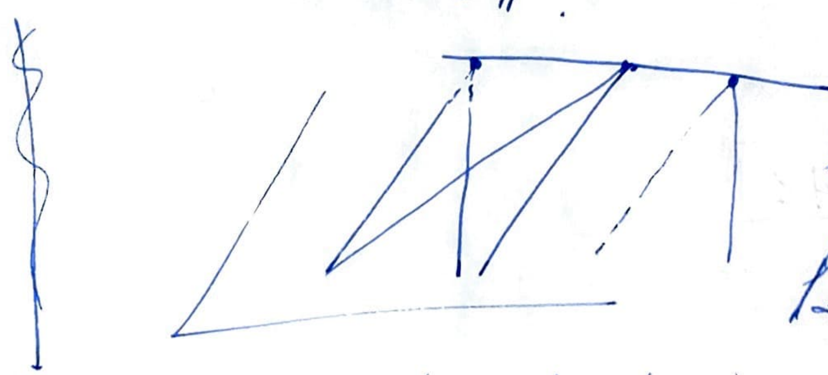
$\boxed{\text{Ejercicio}}$ intersectar: $\vec{l} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{l'} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c' \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \vec{l} \times \vec{l'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a & b & c' \end{vmatrix} = (c'-c)\begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} b/0 \\ -a/0 \\ 0/0 \end{pmatrix} \quad ???$$

$\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \nexists$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/0 \\ c/0 \end{pmatrix}$

Pertenece a $\mathbb{P}^2$. ↪ punto en el infinito.



línea en el infinito.

$l_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Todos los puntos en el infinito: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

l $\qquad \vec{x} \cdot \vec{l} = 0$

$$\mathbb{R}^2 \cup l_\infty = \mathbb{P}^2$$

Un modelo del plano proyectivo $\mathbb{P}^2$.

$\boxed{\text{Teorema}}$ Principio de la dualidad:

~~Dado~~ A cualquier teorema de $\mathbb{P}^2$ le corresponde un teorema dual, el cual se puede derivar intercambiando los roles de puntos y líneas.

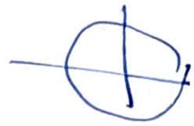
Ejemplo $\quad \vec{l} = \vec{x} \times \vec{x'}$

$\qquad \vec{x} = \vec{l} \times \vec{l'}$

Primero hablar de homogeneizar eqs; como líneas $x+y-1$, $x-y-3=0$

C: Cónicas: Solución de eqs. de grado 2

Ej: $x^2+y^2=1$



En general: $\boxed{ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0}$

Homogeneización: $x \mapsto \frac{x_1}{x_3}$

$y \mapsto \frac{x_2}{x_3}$

$\Rightarrow ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2+dx_1x_3+ex_2x_3+fx_3^2=0$

En forma matricial: $x^T C x = 0$

con $C = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$

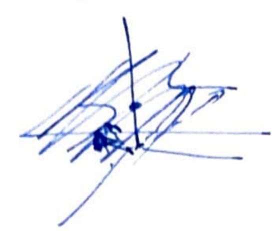
DÍA 2

Curiosidad: En $\mathbb{P}^2$ un círculo y un hipérbola son lo mismo como:

$\boxed{x^2-y^2=1} \rightarrow x_3=1$

$\rightarrow x \mapsto \frac{x_1}{x_3}$

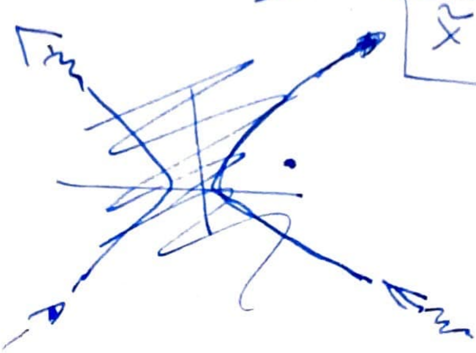
$y \mapsto \frac{x_2}{x_3}$

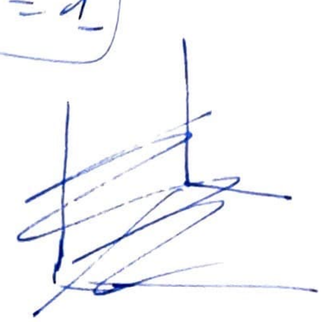


$x_1^2-x_2^2=x_3^2 \rightarrow x_1=1$

$x_2^2+x_3^2=1$

$\boxed{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2=1}$





En geometría: $x^2-y^2=z^2$ | $z=1$

$x=1$ $\quad y=1$

Def: posición general

Teorema En $\mathbb{P}^2$ si $\left\{\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix}\right\}_{i=1}^{5}$ son 5 puntos en posición general entonces determinan de manera única una cónica no degenerada

no hay 3 colineares

un elipse.

Demostración

• Una cónica se puede representar por un punto en $\mathbb{P}^5$: $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{P}^5$.

• Para fijar un punto en $\mathbb{P}^5$ necesitamos 5 condiciones lineales (5 hiperplanos)

la eq. ~~...~~

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

es lineal en a,b,c,d,e,f.

• Si $(x_i,y_i)_{i=1}^{5}$ es un conjunto de puntos en posición general, entonces ~~...~~ la matriz

$$M=\begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1\\ \vdots & & & & \vdots & \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1\end{pmatrix}$$ tiene rango 5.

$\Rightarrow M\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}$ tiene una única solución en $\mathbb{P}^5$.

• Además la cónica no es degenerada, de otra manera el polinomio se podría descomponer en 2 factores lineales, pero los puntos no son colineales.

Prop Sea C una cónica no degenerada y $x \in C$. La línea tangente a C en x es:

Lo $C = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$

$$\vec{l} = Cx.$$

Ej: $x^2+y^2=1$, tg en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

Dem: • Primero, $x \in l$, ya que $l^T x = 0$: ~~Pomo~~

~~ver esto~~ $l^T = x^T C^T = x^T C \Rightarrow l^T x = \underbrace{x^T C x}_{}$

eq. de la cónica ~~...~~

$x^T C x = 0$.

• Lema: Si l interseca C en un solo punto, entonces l es tangente a C.

Dem: Jugando con $z=1$ o $y=1$ o $x=0$ se puede demostrar que cualquier cónica es "equivalente" a una elipse. Para una elipse C', l es tg. a $C' \Leftrightarrow l$ interseca C' en un solo punto

• ~~Además~~ Al menos $\exists\, y \in C \cap l$. $x \neq y$.

$\Rightarrow y^T C y = 0$.

Además $x^T C x = l^T y = 0$

$y \in l$

$\Rightarrow y^T C y + \alpha^2 x^T C x = 0 \Rightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$(y^T + \alpha x^T) C (y + \alpha x^T) = 0$

$\Rightarrow$ toda la ~~...~~ $l = Cx \in C \Rightarrow C$ es degenerada.

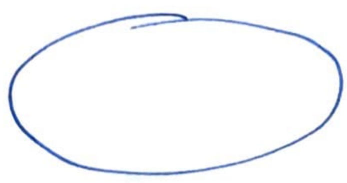
$\boxed{\text{Cónicas duales}}$:

$$\ell^T C^* \ell = 0 \quad \text{donde} \quad (C^*)_{ij} = (-1)^{i+j} \det \hat{C}_{ij}$$

La matriz adjunta

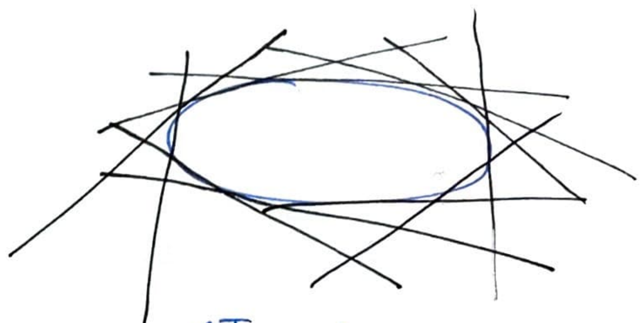
y $\hat{C}_{ij}$ es la matriz que resulta de quitar la fila i y columna j a C

Interpretación:
Intercambiamos puntos y líneas



Cónica

$x^T C x = 0$



$\ell^T C^* \ell = 0$

cónica dual: sus "puntos" son tangentes a C.

Ej: Calcula C^* de $x^2+y^2=1$

D. Transformaciones proyectivas

Felix Klein: (1849–1925 matemático alemán) La geometría es el estudio de las propiedades invariantes bajo grupos de transformaciones.

En geometría proyectiva las transformaciones se llaman proyectividades → otros nombres: colineación, transformación proyectiva, homografía

$\boxed{\text{Def}}$ Proyectividad en $\mathbb{P}^2$:

$h: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$

líneas → líneas

$$\to H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}$$

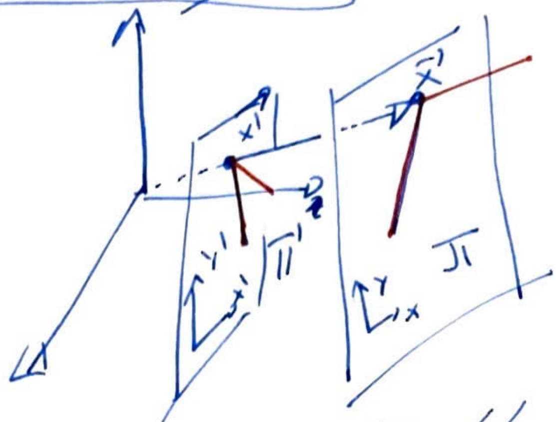
Thm: $h: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ es una proyectividad $\iff$ $\exists\, H$ matriz de 3×3 no singular tal que $h(x) = Hx$.

Ej: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Obs: H es una matriz homogénea: **DÍA 3**

$$\lambda H x \simeq H x. \quad \forall \lambda \neq 0. \quad \text{Ej: } 2H\dot{x} = 2h(x)$$

Distorsión de imágenes:



líneas ↦ líneas

las imágenes pueden ser distorsionadas.

* Mostrar imagen del libro de edición

Aquí hice varios ejemplos

$$\vec{x} \longmapsto \vec{x}' = H\vec{x}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

coordenadas homogéneas:

$$x = \frac{x_1}{x_3}$$

$$y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$z = 1 = x_3/x_3$$

$$\Rightarrow \vec{x}' = H\vec{x} \Rightarrow x' = \frac{x_1'}{x_3'} = \frac{h_{11}x + h_{12}y + h_{13}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}$$

Demostrar

$$y' = \frac{x_2'}{x_3'} = \frac{h_{21}x + h_{22}y + h_{23}}{h_{31}x + h_{32}y + h_{33}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x'(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) &= h_{11}x + h_{12}y + h_{13} \\ y'(h_{31}x + h_{32}y + h_{33}) &= h_{21}x + h_{22}y + h_{23} \end{aligned}}$$

4

eqs lineales en h_{ij}. Si tuviéramos 4 puntos $\Rightarrow$ 8 eqs.

tienen que estar en posición general

$\Rightarrow$ el sistema tiene sol. única en $\mathbb{P}$ en 9 incógnitas. $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$

Transformaciones de líneas y cónicas

Prop: Si $\vec{x} \in \vec{l} \Rightarrow H\vec{x} \in H^{-T} l$

Dem: $\vec{x} \in \vec{l} \Rightarrow l^T \vec{x} = 0 = \vec{l}^T H^{-1} H\vec{x} = 0$

$\Rightarrow H\vec{x} \in (H^{-T}\vec{l})^T$.

Corolario: si $h(l) = l'$

$\Rightarrow l' = H^{-T} l$.

Ej: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x' = ?$

$l' = ?$

Comprobar $\boxed{\vec{l}'^T x' = 0}$

Prop: ~~$C' = H$~~ Sea C una cónica

$C' = h(C) = H^{-T} C H^{-1}$.

Día 4 — PL(3)

El conjunto de las transformaciones tiene estructura de grupo, es decir, i) si hacemos varias transformaciones seguidas, la cadena de transformaciones es ella misma una transf. ii) toda transformación se puede deshacer con otra transformación inversa, iii) Hay una transformación que deja los objetos iguales, la identidad.

grupo lineal proyectivo.
matrices de 3x3 ~~diagonales~~ homogéneas de det $\neq 0$.

Invariante: Algo que no cambia tras aplicar una transformación.

Ej: ...

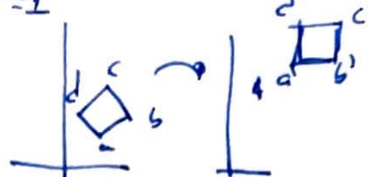
I Isometrías:

preserva de distancia Euclídea

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \cos\theta & -\sin\theta & t_x \\ \varepsilon \sin\theta & \cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon = \pm 1$: Si $\varepsilon = 1$: se preserva la orientación. Si $\varepsilon = -1$ se invierte la ~~t~~ orientación

$\varepsilon = 1$



→ transformación Euclídea

$\det R = 1$

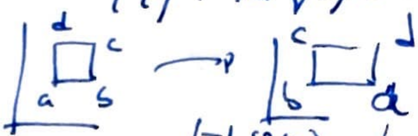
$$x' = H_E x = \begin{pmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} x$$

$R R^T = R^T R = 1$ → Ortonormal

Si $t = 0$: Rotación pura: ~~H~~

Hacer 2 ejemplos

(Ej.: Reflejo:



$$H = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-1,1,1)$$

$\det \tilde{R} = -1$

Hacer dos ejemplos

3 grados de libertad: θ, t_x, t_y : Solamente se necesitan 2 puntos.

II Invariantes: Longitud, ángulos, área.

Transformación de similaridad Isometría o ~~escalamiento~~ escalamiento isotrópico.

Si preserva la orientación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\cos\theta & -s\sin\theta & t_x \\ s\sin\theta & s\cos\theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = H_S x = \begin{pmatrix} sR & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} x$$

s = factor de escala isotrópico

Invariantes: preserva forma, perpendicular, la ratio entre longitudes y áreas. también ángulos.

III Transformaciones afines

(transformación lineal no singular) → perpendicular, no colapsa dos líneas en 1. o (traslación)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & t \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} x \quad \det A \neq 0.$$

6 grados de libertad. ⇒ 3 puntos

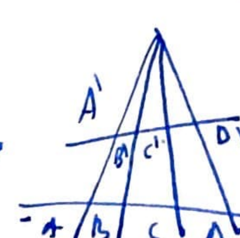
Invariantes:
- Líneas paralelas
- Ratio de longitudes en líneas paralelas.
- Ratio de áreas.

IV) Trans proyectiva

$$x' = H_p x = \begin{pmatrix} A & t \\ v^T & \upsilon \end{pmatrix} x$$

8 grados de libertad ⇒ 4 puntos

Invariante: .... Razón anarmónica de 4 puntos colineales



$$(A,B;C,D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = (A',B';C',D')$$

Ejemplo: