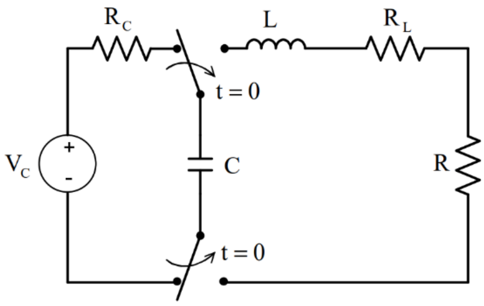
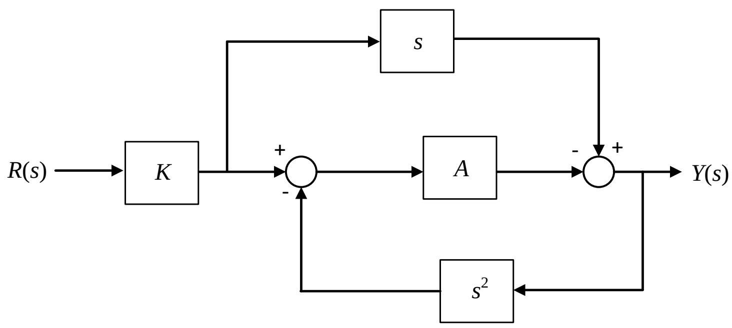
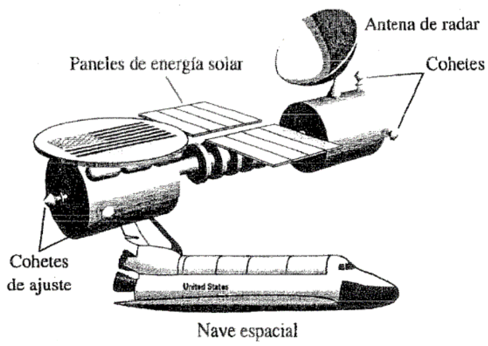
Ejercicio 1 (3 puntos)
Un desfibrilador es un dispositivo que trata de convertir un ritmo anormal del corazón, potencialmente mortal, en un ritmo normal. Dos electrodos iguales de unos 50 cm² de superficie se sitúan sobre el pecho de tal forma que la corriente atraviesa la región del corazón. La figura adjunta muestra el esquema básico de un desfibrilador. Un condensador *C*, inicialmente cargado, se descarga sobre el pecho del paciente a través de una bobina *L* de resistencia interna R_L. *R* engloba las resistencias de los electrodos y del tejido.



El circuito lleva un tiempo largo con los interruptores en la posición que se muestra en la figura. En el instante *t*=0, los interruptores cambian de posición para producir la descarga eléctrica sobre el paciente.
(i) Dibuja el circuito para *t*>0 y obtenga la ecuación diferencial de la corriente *i*(*t*) que atraviesa el tórax del individuo durante la descarga con sus adecuadas condiciones iniciales (tensión en el condensador). Aplicación numérica (valores típicos): V_C=5 kV, R_C=0,1 MΩ, *L*=100 mH, R_L=15 Ω, *C*=20 μF y *R*=50 Ω.
(ii) Si se quiere aplicar una segunda descarga, ¿cuánto tiempo mínimo tiene que transcurrir entre ambas descargas?.
(iii) El valor de *R* disminuye con descargas sucesivas (daño en el tejido). Explíquese cómo afecta a la corriente en el tórax a partir de la teoría de sistemas de segundo orden.
(iv) Partiendo del circuito equivalente en el dominio de *s* para *t*>0 (con *C* cargado inicialmente a 5 kV: *v*(0)=5000), obtenga la respuesta analítica de *i*(*t*) y un esbozo de la misma.

Ejercicio 2 (2,5 puntos)
Dado el sistema de control de la figura:
(i) Estudia su estabilidad en función de *K* y *A*.
(ii) Considerando *A*=1, determina el tipo de sistema y los errores verdaderos estacionarios, dependientes de *K*, ante escalón, rampa y parábola. Analiza los resultados.





Ejercicio 3 (3 puntos)
La ilustración de la figura muestra una versión de una estación espacial. El posicionamiento de la misma con respecto al sol y la Tierra es crítica ya que se requiere generar energía y comunicaciones adecuadamente. La orientación de la estación espacial se quiere controlar a través de un lazo cerrado constituido por una realimentación unitaria y un actuador y regulador representados por la siguiente función de transferencia:

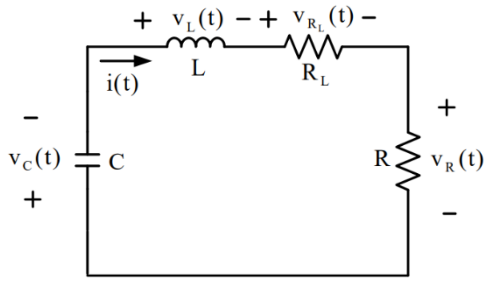
$$G(s)=\frac{25K}{s(s+5)(s+20)}$$

(i) Indica para qué valores de *K* el sistema es estable. Justifica tu respuesta utilizando la gráfica del lugar de las raíces que has dibujado.
(ii) Diseña un compensador $G_c(s)$ que permita obtener un error de velocidad del 1% y una respuesta estable.

Ejercicio 4 (1,5 puntos)
Dibuje los diagramas de Bode de módulo y fase de los siguientes términos:
(i) $1/[1+(s/a)]$, (ii) $1/[1+(s/a)]^{\alpha}$ con $0<\alpha<1$. ¿Qué evolución se observa en función de α?

Ejercicio 1

(i) Dibujamos el circuito para t>0:



Aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones (LKT) y expresando todas las tensiones en función de la corriente (todos los elementos están conectados en serie), se tiene:

$$v_C(t)+v_L(t)+v_{R_L}(t)+v_R(t)=0 \rightarrow \frac{1}{C}\int i(t)dt+L\frac{di(t)}{dt}+R_L i(t)+Ri(t)=0$$

Todos los términos se derivan para eliminar la integral y, posteriormente, se reordena y normaliza:

$$\frac{1}{C}i(t)+L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+(R_L+R)\frac{di(t)}{dt}=0 \rightarrow \frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{R_L+R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i(t)=0$$

Obsérvese que el condensador se ha tomado con criterio receptor (corriente $i(t)$ entra por el borne positivo de $v_C(t)$). Si hubiéramos tomado el condensador con criterio generador (pues es el que proporciona la energía al circuito), tendríamos el borne "+" de $v_C(t)$ en la placa superior y al aplicar la LKT hubiéramos obtenido:

$$-v_C(t)+v_L(t)+v_{R_L}(t)+v_R(t)=0$$

Sin embargo, la ecuación de definición del condensador se refiere al criterio receptor y al escribirla con criterio generador hay que poner un signo menos:

$$i_C(t)=-C\frac{dv_C(t)}{dt} \rightarrow v_C(t)=-\frac{1}{C}\int i(t)dt$$

que sustituido en la expresión anterior proporciona la misma ecuación diferencial para $i(t)$. Nótese, además, el miembro de la derecha de la ecuación diferencial resultante es nulo, pues no hay alimentación "independiente" del circuito, más allá de la energía almacenada en el condensador: $v_C(0)$=5 kV.

(ii) A partir de este apartado, se considera la aplicación numérica.
Si se quiere una nueva descarga, el condensador ha de cargarse otra vez y, por tanto, se deben conmutar los interruptores a la posición inicial. El condensador se carga a 5 kV a través de la resistencia de 0,1 MΩ. La constante de tiempo es $\tau = RC = 10^5 \times 20\cdot10^{-6} = 2$ s. Con tres constantes de tiempo (6 s) el condensador ya se ha cargado al 95% y con cinco (10 s) se ha cargado al 99%. Por tanto, antes de una nueva descarga deben transcurrir, por ejemplo, entre 6 y 10 segundos.

(iii) En cada descarga el tejido se daña más y disminuye su resistencia. Por tanto, R es cada vez más pequeña. Desde la ecuación diferencial podemos obtener la pulsación natural y el amortiguamiento:

$$\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y} \quad \xi=\frac{R_L+R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Al disminuir R, el amortiguamiento (ξ) se hace cada vez más pequeño. La frecuencia natural ω_n no cambia porque depende sólo de L y C que no varían. En efecto, la frecuencia del seno es la frecuencia natural amortiguada (ω_d):

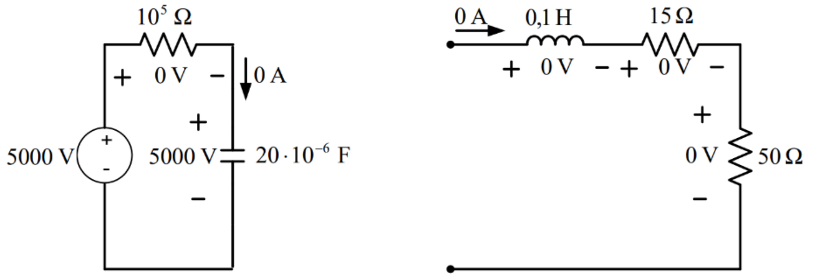
$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

y la exponencial que multiplica al seno es:

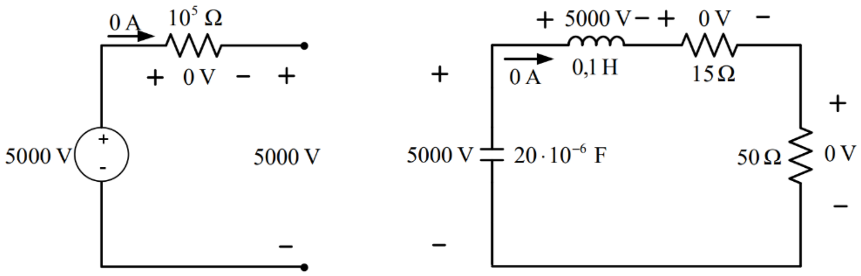
$$e^{-\xi\omega_n t}=e^{-t/(1/\xi\omega_n)}$$

cuya constante de tiempo $1/\zeta\omega_n$. Al decrecer ζ aumentan tanto ω_d como la constante de tiempo. La corriente es más rápida (en frecuencia) y tarda más en extinguirse. Al haber disminuido *R*, también la corriente será mayor en amplitud (valor de la sobreoscilación).

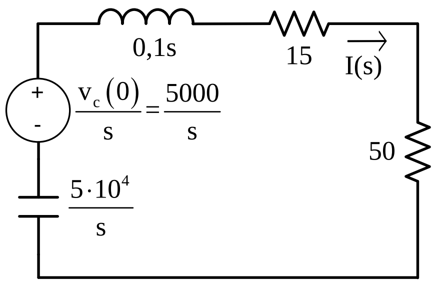
(iv) Circuito en $t=0^-$:



Circuito en $t=0^+$:



Por tanto, el circuito de interés en el dominio de *s* para $t>0$, resulta:



Con una inspección sencilla del circuito, se tiene que:

$$I(s)=\frac{5000/s}{\left(5\cdot10^4/s\right)+65+0{,}1s}=\frac{5\cdot10^4}{s^2+650s+5\cdot10^5}$$

Reordenando términos para comparar con las tablas de la transformada de Laplace, resulta:

$$I(s)=\frac{5\cdot10^4}{(s+325)^2+628^2}=\frac{5\cdot10^4}{628}\frac{628}{(s+325)^2+628^2}$$

Y, finalmente, antitransformando al dominio del tiempo:

$$i(t)=79{,}62e^{-325t}\mathrm{sen}(628t)$$

La corriente $i(t)$ parte de 0 A (pues $i_L(0^+)=0$ A) y la pendiente en el origen es de $5\cdot10^4$ A/s (pues $di_L(0^+)/d0^+=5\cdot10^4$ A/s, ver circuito en $t=0^+$). El valor tan elevado de la pendiente hace que visualmente la gráfica sea casi vertical al principio. Los máximos/mínimos se alcanzan en:

$$\frac{di(t)}{dt}=0\rightarrow 0=79{,}62(-325)e^{-325t}\mathrm{sen}(628t)+$$
$$+79{,}62e^{-325t}(628)\cos(628t)=$$
$$=79{,}62e^{-325t}[-325\mathrm{sen}(628t)+628\cos(628t)]\rightarrow$$

$$\rightarrow -325\mathrm{sen}(628t)+628\cos(628t)=0 \rightarrow \mathrm{tg}(628t)=\frac{628}{325} \rightarrow$$

$$\rightarrow t_p=\frac{1}{628}\mathrm{arctg}\left(\frac{628}{325}\right)=\frac{1}{628}(1{,}0932+k\pi)=0{,}0017+0{,}0050k \text{ s con } k=1,2,3...$$

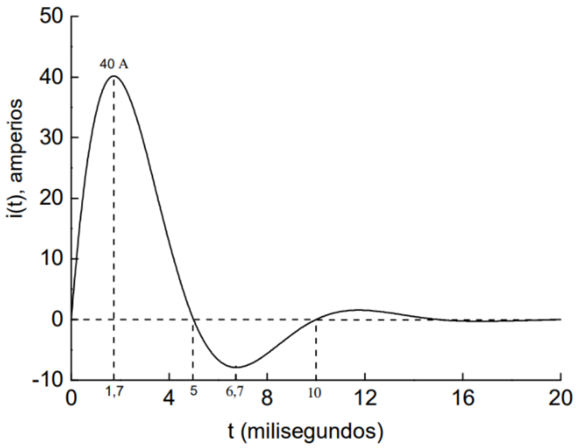
Vemos que el primer máximo lo alcanza en t=0,0017 s (k=0) y el mínimo siguiente en t=0,0067 (k=1). El valor máximo en t=0,0017 s es:

$$i(t_p)=79{,}62e^{-325\cdot(0{,}0017)}\mathrm{sen}(628\cdot 0{,}0017)=40 \text{ A}$$

Puede comprobarse que el valor del primer mínimo i(0,0067) es de aproximadamente -8 A. Los pasos por 0 se obtienen al resolver:

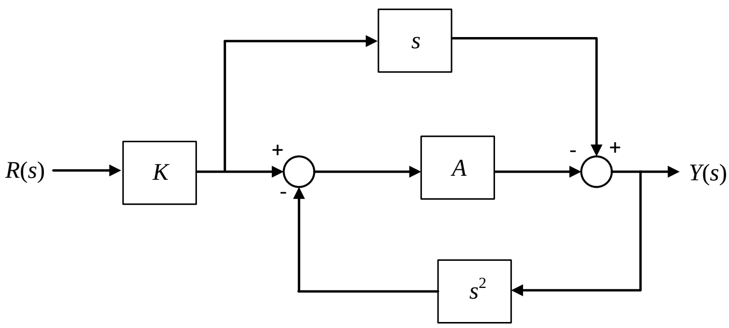
$$i(t)=79{,}62e^{-325t}\mathrm{sen}(628t)=0 \rightarrow \mathrm{sen}(628t)=0 \rightarrow t_a=\frac{k\pi}{628} \text{ s}=0{,}0050k \text{ s}$$

Se ha señalado el paso por 0 en el instante t=5 ms. El siguiente paso por 0 ocurre en t=10 ms. Obsérvese que la frecuencia de la señal sinusoidal es precisamente de 628 rad/s (frecuencia natural amortiguada, ω_d) que corresponde a un período de 10 ms (como se señala en la gráfica). La constante de tiempo es τ=1/325 s, que es lo que divide al "-t" en la exponencial, y es también la parte real, invertida y cambiada de signo, de las raíces complejas conjugadas obtenidas. Fijémonos que la corriente se puede considerar extinguida cuando han transcurrido aproximadamente 15 ms (tiempo equivalente a 5 veces la constante de tiempo). Como se observa en la gráfica, a partir de 15 ms, la corriente es prácticamente nula.

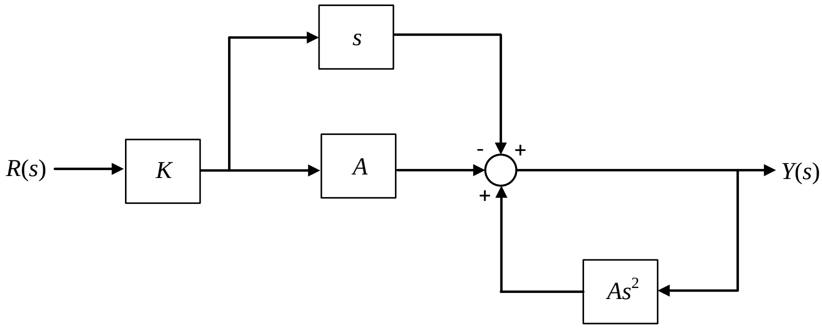


Ejercicio 2

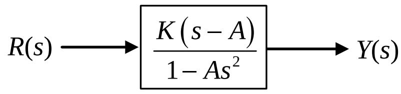
(i) En primer lugar, se debe extraer la función de transferencia en lazo cerrado, $Y(s)/R(s)$, aplicando el álgebra de bloques. Se tiene:



Aparece una asociación en paralelo y un *feedback* anidados, por lo que hay que "desenredar" dicho conjunto. Se propone "mover" el punto de resta correspondiente a la retroalimentación (izquierda) hacia la derecha "saltando" el bloque A. De este modo, los puntos de suma se unirían (teniendo cuidado con los signos) y se podría considerar tan solo uno con tres entradas y una salida:



Resolviendo el paralelo y el *feedback*, se obtienen tres bloques asociados en cascada: K, s-A y $1/[1-As^2]$, resultando:



Extrayendo el polinomio del denominador de la función de transferencia obtenida, $1-As^2$, se observa que no está completo, pues el coeficiente que multiplica al término s es 0, y además el que multiplica al término de mayor grado, s^2, es negativo. Por tanto:

- $A>0$: Sistema inestable.
- $A<0$: Sistema críticamente estable (frecuencia de oscilación: $\omega=\sqrt{A^{-1}}$ rad/s).

Nótese que si $A=0$, se tiene una función de transferencia no propia (grado del numerador mayor que el denominador). Finalmente, cabe destacar que el parámetro K no aparece en el denominador, por lo que no tiene impacto en la estabilidad del sistema.

(ii) Con $A=1$, se tiene:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K(s-1)}{1-s^2}$$

El error verdadero resulta:

$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)\left[1-\frac{K(s-1)}{1-s^2}\right]=R(s)\left[\frac{(1+K)-Ks-s^2}{1-s^2}\right]$$

Sustituyendo para cada una de las entradas solicitadas, se podrían obtener los errores verdaderos solicitados utilizando el teorema del valor final. Comenzamos considerando una entrada en escalón unitario:

$$e_{ss_{R(s)=\frac{1}{s}}}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\left[\frac{(1+K)-Ks-s^2}{1-s^2}\right]=1+K$$

Al obtener un error finito, se puede deducir que se trata de un sistema tipo 0 y que los errores frente a rampa y parábola son infinitos.

Ejercicio 3

(i) Nombramos los dos bloques principales:

$$G(s)=\frac{25}{s(s+5)(s+20)} \quad \text{y} \quad H(s)=1$$

A continuación, implementamos los pasos necesarios para realizar el bosquejo del LDR.

- Paso 1: Identificación y ubicación de polos y ceros en lazo abierto. Se tienen 3 polos en 0, -5 y -20 (semiplano negativo del eje real) y ningún cero.
- Paso 2: Número de ramas. Por lo dado anteriormente: $n=3$ y $m=0$. Por tanto, el número de ramas es: 3. Nótese que n y m denotan el número de polos y ceros, respectivamente.

- Paso 3: Identificación de segmentos sobre el eje real. A partir de los datos provistos en el paso 1, se identifica fácilmente que los segmentos que pertenecen al LDR son; de 0 a -5 y -20 a -∞. Nótese que los rangos dados no indican el sentido de las ramas.
- Paso 4: Cálculo de asíntotas.
  a) Número de asíntotas: n-m=3.
  b) Ángulo de las asíntotas: 60º, 180º y 300º.
  c) Centroide:

$$\sigma=\frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{\text{nº polos - nº ceros}}=\frac{(0\text{-}5\text{-}20)}{3\text{-}0}=\text{-}8{,}33$$

- Paso 5: Puntos de corte con el eje imaginario. Nos fijamos en el polinomio auxiliar:

$$1+KG(s)H(s)=1+K\frac{25}{s(s+5)(s+20)}=\frac{s(s+5)(s+20)+25K}{s(s+5)(s+20)}\rightarrow s^3+25s^2+100s+25K$$

  Estudiamos bajo qué condiciones, se pueden obtener raíces complejas conjugadas utilizando el criterio de Routh-Hurwitz:

s^3	1	100
s^2	25	25K
s	100-K	
s^0	25K	

  Se obtiene una fila de ceros si K=100 (fila de s). Por tanto, sustituyendo dicho valor en el polinomio auxiliar $P(s)$ -construido a partir de la fila de encima-, podemos obtener el valor de los puntos de corte.

$$P(s)=25s^2+2500=0 \rightarrow s=\pm j\sqrt{100}=\pm j10$$

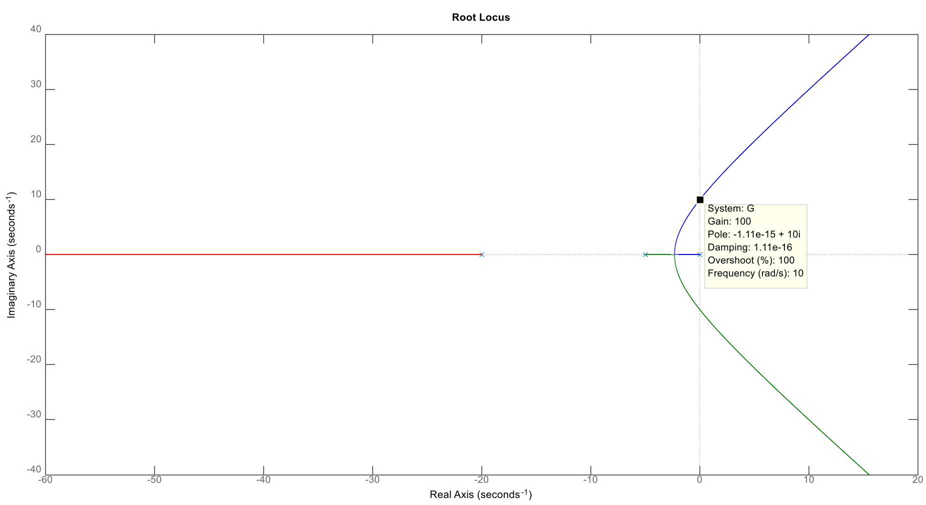
- Paso 6: Puntos de ruptura o salida del eje real. En este punto, es necesario conocer el sentido de las ramas. Para ello, imponemos:

$$1+KG(s)H(s)=0 \rightarrow 1+K\frac{25}{s(s+5)(s+20)}=0 \rightarrow K=-\left(\frac{1}{25}s^3+s^2+4s\right)$$

$$\frac{dK}{ds}=-\frac{3}{25}s^2\text{-}2s\text{-}4=0 \rightarrow s=\text{-}2{,}32 \text{ (s=-14,34 no pertenece al LDR)}$$

- Paso 7: Ángulo de salida o llegada de las raíces. Ya que no existen ni polos ni ceros con parte real y compleja conjugada, este paso no es necesario de llevar a cabo.

Por tanto, finalmente resulta:



A partir del bosquejo del LDR, se observa que el eje imaginario se rebasa (del semiplano negativo al positivo del eje real) justo cuando K=100 -véase paso 5-. Por tanto, se tiene:

- $0<K<100$: Sistema estable.
- K=100: Sistema críticamente estable (frecuencia de oscilación: ω=10 rad/s).
- $K>100$: Sistema inestable.

(ii) En primer lugar, se calcula la función de transferencia del error de control frente a la entrada, $E(s)/R(s)$, considerando un control proporcional K:

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+K\frac{25}{s(s+5)(s+20)}}=\frac{s^3+25s^2+100s}{s^3+25s^2+100s+25K}$$

Se aplica el teorema del valor final, considerando una entrada rampa (velocidad):

$$e_{ss_{R(s)=\frac{1}{s^2}}}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\left[\frac{s^3+25s^2+100s}{s^3+25s^2+100s+25K}\right]=\frac{100}{25K}$$

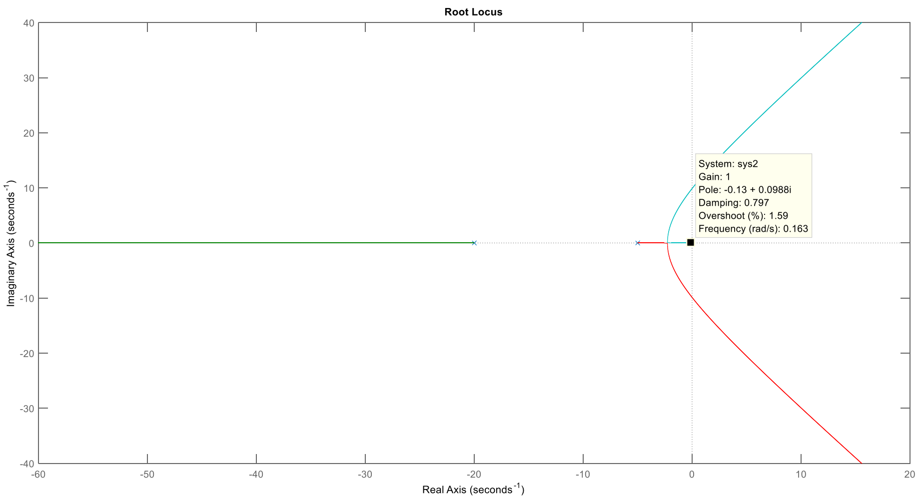
Fijando $100/25K$=0,01, resulta K=400. En este escenario, se tiene un sistema inestable -véase apartado (i)-. Por tanto, un control proporcional no es suficiente y por ello, se requiere implementar un control "más sofisticado". Se propone un compensador de adelanto/retardo.

A partir del requerimiento principal, se puede fijar:

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_c(s)\frac{25}{s(s+5)(s+20)}}=\frac{1}{1+K_c\frac{s+z_c}{s+p_c}\frac{25}{s(s+5)(s+20)}}$$

$$e_{ss_{R(s)=\frac{1}{s^2}}}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\left[\frac{1}{1+K_c\frac{s+z_c}{s+p_c}\frac{25}{s(s+5)(s+20)}}\right]=\frac{1}{K_c\frac{z_c}{p_c}\frac{25}{100}}=0{,}01$$

Si, por ejemplo, K_c=1, se obtiene la relación: z_c/p_c=400. Para no "modificar" en exceso la respuesta dinámica, seleccionamos componentes que se encuentren muy cerca del origen. Por ejemplo: z_c=-0,1 y p_c=-0,00025. En efecto, se tiene, además, un sistema estable:



Ejercicio 4

Para el análisis de respuesta en frecuencia, se realiza la sustitución s=jω (frecuencias físicas).

(i) Se tiene:

$$T_1(j\omega)=\frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}$$

Diagrama de Bode de módulo:

$$|T_1(j\omega)|_{dB}=20\log\left|\frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}\right|=20\log\frac{|1|}{\left|1+\frac{j\omega}{a}\right|}=20\log|1|-20\log\left|1+\frac{j\omega}{a}\right|=-20\log\left|1+\frac{j\omega}{a}\right|$$

Dos aproximaciones:

$$-20\log\left|1+\frac{j\omega}{a}\right|\approx\begin{cases}-20\log|1|=0, & \frac{\omega}{a}<<1\\ -20\log\left|1+\frac{j\omega}{a}\right|=-20\log\sqrt{0^2+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2}=-20\log\left(\frac{\omega}{a}\right), & \frac{\omega}{a}>>1\end{cases}$$

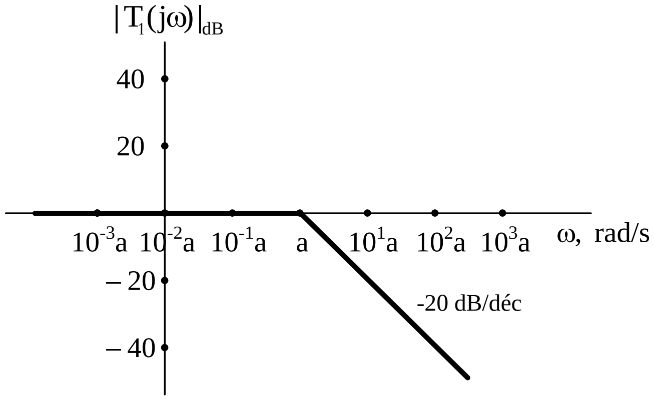


Diagrama de Bode de fase:

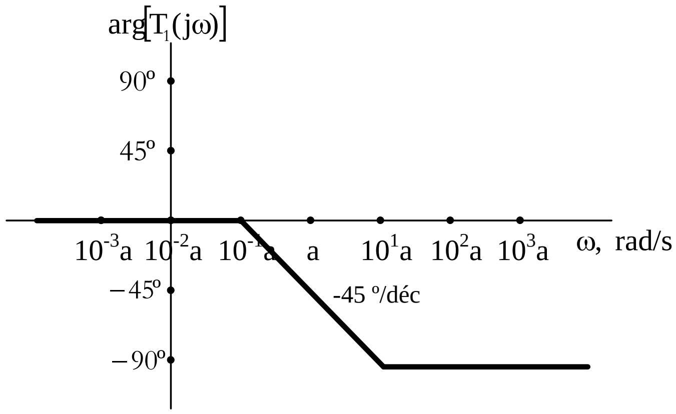
$$\arg[T_1(j\omega)]=\arg\left[\frac{1}{1+\frac{j\omega}{a}}\right]=\arg[1]-\arg\left[1+\frac{j\omega}{a}\right]=-\arg\left[1+\frac{j\omega}{a}\right]$$

Para dibujar este término, se realizan dos aproximaciones, y un cálculo a una determinada frecuencia:

$$-\arg\left[1+\frac{j\omega}{a}\right]\approx\begin{cases}-\arg[1]=0^o, & \frac{\omega}{a}<<1\\ -\arg\left[\frac{j\omega}{a}\right]=-90^o, & \frac{\omega}{a}>>1\end{cases}$$

$$\omega=a\rightarrow -\arg\left[1+\frac{ja}{a}\right]=-\arg[1+j]=-45^o$$

Resultando:



(ii) Análogamente, se analiza el mismo polo simple pero elevado a un número no entero, $0<\alpha<1$:

$$T_2(j\omega)=\frac{1}{\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}}$$

Diagrama de Bode de módulo:

$$|T_2(j\omega)|_{dB}=20\log\left|\frac{1}{\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}}\right|=20\log\frac{|1|}{\left|\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}\right|}=20\log|1|-20\log\left|\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}\right|=-20\log\left|\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}\right|$$

$$-20\log\left|\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}\right|\approx\begin{cases}-20\log|1^{\alpha}|=0, & \frac{\omega}{a}<<1\\ -20\log\left|\left(\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}\right|=-20\alpha\log\sqrt{0^2+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2}=-20\alpha\log\left(\frac{\omega}{a}\right), & \frac{\omega}{a}>>1\end{cases}$$

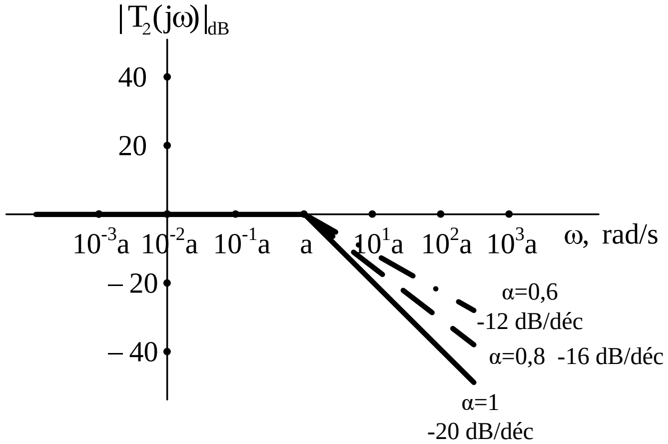
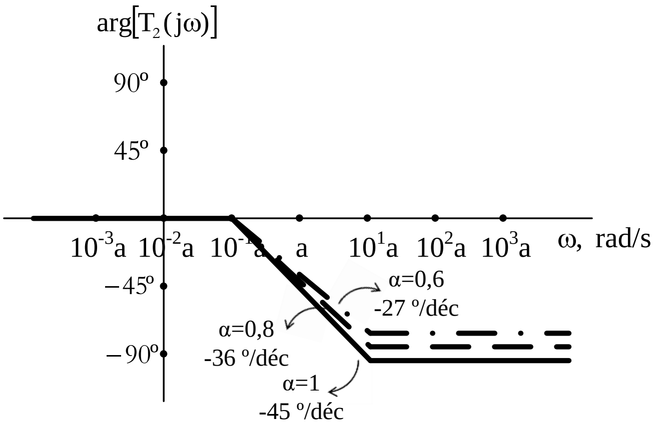


Diagrama de Bode de fase:

$$\arg[T_2(j\omega)]=\arg\left[\frac{1}{\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}}\right]=\arg[1]-\arg\left[\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}\right]=-\arg\left[\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}\right]$$

$$-\arg\left[\left(1+\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}\right]\approx\begin{cases}-\arg[1^{\alpha}]=0^{o}, & \frac{\omega}{a}<<1\\ -\arg\left[\left(\frac{j\omega}{a}\right)^{\alpha}\right]=-\alpha\arg\left[\frac{j\omega}{a}\right]=-90\alpha^{o}, & \frac{\omega}{a}>>1\end{cases}$$

$$\omega=a\rightarrow-\arg\left[\left(1+\frac{ja}{a}\right)^{\alpha}\right]=-\arg[(1+j)^{\alpha}]=-\alpha\arg[1+j]=-45\alpha^{o}$$



Nótese que se obtienen caídas de 20α dB/déc en el diagrama de Bode de módulo. Por otro lado, si nos fijamos en la figura del diagrama de Bode de fase, se observan rectas con una pendiente de -45αº/déc. Una década después del polo en *a*, la fase se estabiliza en -90αº.