SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 2

Fundamentos matemáticos: Ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace y función de transferencia

Problema 2.1.

a) $\dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 23\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 132x(t) = 7f(t)$

b) $\dfrac{\mathrm{d}^3 x(t)}{\mathrm{d}t^3} + 10\dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 11\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 18x(t) = \dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t)$

Problema 2.2.

a) $\dfrac{Y(s)}{F(s)} = \dfrac{32}{s^2 + 12s + 32}$

b) La respuesta a un impulso unitario es: $y(t) = 8e^{-4t} - 8e^{-8t}$, con $t \geq 0$.

c) La respuesta a un escalón unitario es: $y(t) = 1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}$, con $t \geq 0$.

Problema 2.3.

a) La respuesta a un escalón unitario es: $y(t) = 1 - \frac{9}{8}e^{-10t} + \frac{1}{8}e^{-50t}$, con $t \geq 0$.

b) Cuando $t \to \infty$, $y(t) \to 1$.

Problema 2.4.

a) $G_1(s)$ tiene tres polos reales y distintos: $y(t) = \frac{2}{3} + \frac{5}{6}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-5t}$, con $t \geq 0$.

b) $G_2(s)$ tiene un polo real doble (s=-3) además del polo simple en s=0:
$y(t) = \frac{10}{9} + \frac{5}{3}t \cdot e^{-3t} - \frac{10}{9}e^{-3t}$, con $t \geq 0$.

c) $G_3(s)$ tiene un par de polos complejos conjugados (ver hoja aparte para más detalles):
$y(t) = 2e^{-t}\cos(2t) + 5e^{-t}\sin(2t)$, con $t \geq 0$.

d) Al igual que en el apartado anterior, $G_4(s)$ tiene un par de polos complejos conjugados:
$y(t) = e^{-3t}\left[\cos(5t) - \frac{14}{5}\sin(5t)\right]$, con $t \geq 0$.

e) $G_5(s)$ tiene un polo simple en s=0 y un par de polos complejos conjugados (los mismos que en el apartado d):
$y(t) = \frac{5}{17} - \frac{5}{17}e^{-3t}\left[\cos(5t) - \frac{14}{5}\sin(5t)\right]$, con $t \geq 0$.

Modelado de sistemas eléctricos

Problema 2.5. La función de transferencia $G(s)=V_s(s)/V_e(s)$ para cada una de las seis combinaciones de circuitos en serie es:

- Circuito RC en serie: $G(s)=\dfrac{V_s(s)}{V_e(s)}=\dfrac{1}{RCs+1}$
- Circuito CR en serie: $G(s)=\dfrac{V_s(s)}{V_e(s)}=\dfrac{RCs}{RCs+1}$
- Circuito RL en serie: $G(s)=\dfrac{V_s(s)}{V_e(s)}=\dfrac{Ls}{Ls+R}$
- Circuito LR en serie: $G(s)=\dfrac{V_s(s)}{V_e(s)}=\dfrac{R}{Ls+R}$
- Circuito CL en serie: $G(s)=\dfrac{V_s(s)}{V_e(s)}=\dfrac{1}{LCs^2+1}$
- Circuito LC en serie: $G(s)=\dfrac{V_s(s)}{V_e(s)}=\dfrac{LCs^2}{LCs^2+1}$

Problema 2.6. La función de transferencia del circuito CLR de segundo orden es:

$$G(s)=\frac{5s}{s^2+5s+4}=\frac{5s}{(s+1)(s+4)}$$

Como la función impulso unitario tiene transformada de Laplace $V_i(s) = 1$, en el sistema la salida $V_o(s) = G(s)$. Realizando la descomposición en fracciones simples de $V_o(s)$ y tomando su transformada inversa de Laplace, la expresión de la salida en función del tiempo es:

$$v_o(t)=\frac{20}{3}e^{-4t}-\frac{5}{3}e^{-t}$$

Problema 2.7. La función de transferencia del circuito CRL es $G(s)=V_o(s)/V_i(s)$ y viene dada por:

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{s^2}{s^2+\frac{L}{R}s+\frac{1}{LC}}=\frac{s^2}{s^2+2s+5}$$

Si la entrada es un escalón unitario, la transformada de Laplace de la salida es:

$$V_o(s)=G(s)\cdot V_i(s)=\frac{s^2}{s^2+2s+5}\frac{1}{s}=\frac{s}{s^2+2s+5}$$

En este caso, hay un par de polos complejos conjugados. Descomponiendo en fracciones simples y utilizando la tabla de transformadas inversas de Laplace, se obtiene:

$$V_o(t)=e^{-t}\left[\cos(2t)-\frac{1}{2}\sin(2t)\right], \text{ con } t\geq 0$$

Problema 2.8.

a) La función de transferencia del circuito LCR es de nuevo $G(s)=V_o(s)/V_i(s)$:

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{RCs+1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$

b) Si la entrada es un impulso unitario:

$$V_o(s)=G(s)\cdot V_i(s)=\frac{2s+1}{s^2+2s+1}\cdot 1=\frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$

En este caso hay un polo doble en s=-1. Descomponiendo en fracciones simples y utilizando la tabla de transformadas inversas de Laplace:

$$v_o(t)=e^{-t}\left[2-t\right],\ \text{con } t\geq 0$$

Modelado de sistemas mecánicos de traslación y rotación

Problema 2.9.

a) El sistema mecánico de traslación de la figura es similar al visto en la teoría, considerando que el muelle no existe, es decir, que k=0, por lo que la función de transferencia es:

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{(Ms+B)s}$$

b) Para una entrada impulso unitario, la salida es: $x(t)=\frac{1}{B}\left[1-e^{-\frac{B}{M}t}\right]$, con $t\geq 0$.

c) Para una entrada escalón unitario, la salida es: $x(t)=\frac{1}{B}\left[t+\frac{M}{B}e^{-\frac{B}{M}t}-\frac{M}{B}\right]$, con $t\geq 0$.

Problema 2.10.

From this, the transfer function, $X_2(s)/F(s)$, is

$$\frac{X_2(s)}{F(s)}=G(s)=\frac{(f_{v_3}s+K_2)}{\Delta} \tag{2.119}$$

as shown in Figure 2.17(b) where

$$\Delta=\begin{vmatrix} [M_1s^2+(f_{v_1}+f_{v_3})s+(K_1+K_2)] & -(f_{v_3}s+K_2) \\ -(f_{v_3}s+K_2) & [M_2s^2+(f_{v_2}+f_{v_3})s+(K_2+K_3)] \end{vmatrix}$$

Este ejercicio, de una complejidad muy elevada, viene resuelto paso por paso como Ejemplo 2.17 en el libro de texto "*Control Systems Engineering*" de Norman S. Nise. La solución es la siguiente:

Problema 2.11.

a) Hay que tener en cuenta que la fuerza ejercida tanto por el muelle como por el amortiguador dependen de la diferencia entre la posición (en vertical) del suelo $x_i(t)$ y la del coche $x_o(t)$.

Por ello $F_{\text{MUELLE}} = k(x_i(t) - x_o(t))$ y $F_{\text{AMORT}} = b\left(\frac{dx_i(t)}{dt} - \frac{dx_o(t)}{dt}\right)$.

Tomando transformadas de Laplace con condiciones iniciales iguales a cero, se obtiene: $G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$, por lo que es un sistema de segundo orden.

b) $G(s) = \frac{4000s+4000}{1000s^2+4000s+4000} = \frac{4(s+1)}{s^2+4s+1}$. Tiene un polo doble en s=-2.

La transformada de Laplace de la salida, para una entrada escalón unitario, es:

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \Rightarrow X_o(s) = G(s)\cdot X_i(s) = \frac{4(s+1)}{s^2+4s+1}\cdot\frac{1}{s} = \frac{4(s+1)}{s(s+2)^2}.$$

Descomponiendo en fracciones simples y utilizando la tabla de transformadas inversas de Laplace obtenemos que:

$$x_o(t) = \left[1 - e^{-2t} + 2te^{-2t}\right]u_0(t)$$

c) Ahora, $G(s) = \frac{1000}{1000s^2+1000} = \frac{1}{s^2+1}$. Tiene dos polos imaginarios puros en s=± j.

La entrada sigue siendo un escalo unitario, luego la transformada de Laplace de la salida es la siguiente:

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \Rightarrow X_o(s) = G(s)\cdot X_i(s) = \frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s}$$

Descomponemos en fracciones simples y operado hallamos que A=-1, B=0 y C=1. Utilizando la tabla de transformadas, obtenemos que la salida es $x_o(t) = (1-\cos(t))u_0(t)$

En el tema siguiente, se verá que se trata de un sistema críticamente estable (y que por ello su salida oscila indefinidamente, con una frecuencia natural de 1 rad/s), ya que su coeficiente de amortiguamiento es igual a 0.

Problema 2.12. La función de transferencia buscada $G(s)=\theta_1(s)/T_1(s)$ es:

$$G(s) = \frac{\theta_1(s)}{T_1(s)} = \frac{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2}{Js^2 + Ds + K}$$

Diagramas de bloques: Simplificación mediante álgebra de bloques

Problema 2.13. Para el motor de corriente continua controlado por campo y su diagrama de bloques de control en lazo abierto, tenemos:

a) Si $T_d(s)$=0, $G(s) = \frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(R_f + L_f s)(Js + b)} = \frac{K_m}{L_f Js^3 + (R_f J + L_f b)s^2 + R_f bs}$.

b) Asumiendo que J=R_f=L_f=1, K_m = 2, b=3, se tiene que $G(s) = \frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{2}{s(s+1)(s+3)}$.

La transformada de Laplace de la entrada impulso unitario es igual a uno, por tanto, descomponiendo en fracciones simples y calculando la transformada inversa de Laplace de la salida obtenemos que: $\theta(t) = \frac{2}{3} - e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-3t}$.

Problema 2.14. Aplicando las reglas del álgebra de bloques al sistema de la figura, la función de transferencia del sistema completo reducido es:

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + ABs + AC}$$

Problema 2.15. Aplicando las reglas del álgebra de bloques al sistema de la figura, la función de transferencia del sistema completo reducido es:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + (1 - A)}$$

Problema 2.16. La reducción del diagrama de bloques de la figura puede llevarse a cabo siguiendo diferentes pasos. La solución se corresponde con el siguiente bloque único:

$$T(s) = \frac{G_3(s) + G_1(s)G_2(s)}{1 + [G_3(s) + G_1(s)G_2(s)]\left[H + \frac{G_2(s)G_4(s)}{G_3(s) + G_1(s)G_2(s)}\right]}$$

$$= \frac{G_3(s) + G_1(s)G_2(s)}{1 + H[G_3(s) + G_1(s)G_2(s)] + G_2(s)G_4(s)}$$

Problema 2.17. La función de transferencia que relaciona la variable de salida $F_f(s)$ con la entrada $R(s)$ es:

$$\frac{F_f(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H_2 + G_1 G_3 H_2}$$

Problema 2.18. Reduciendo mediante el álgebra de bloques, la función de transferencia $G_{LC}(s) = Y(s)/R(s)$ del sistema de dirección completo es:

$$\frac{KG_1(s)G_2(s)/s}{1 + G_1(s)G_2(s)\left[(H_2(s) + H_1(s)\right] + G_1(s)H_3(s) + KG_1(s)G_2(s)/s}.$$

Problema 2.19. Al igual que ocurre en la figura del enunciado de este ejercicio, la siguiente solución (función de trasferencia del sistema completo) omite las dependencias con "*s*" de todos los bloques individuales, resultando:

$$G_{LC} = \frac{ABC + A(1 - CD) - AE(1 - CD)}{1 - CD + FC}$$