

EJERCICIOS ENTREGABLES PRÁCTICA 3

Estudio de la respuesta temporal de sistemas de control con MATLAB: Polos y ceros de una función de transferencia, respuesta transitoria con LTIViewer, precisión y error en estado estacionario

Ejercicio 1 (2,75 puntos). Estudio de la respuesta transitoria de sistemas de control: Respuesta temporal a entrada en impulso unitario. Aproximación por polos dominantes. Se tiene:



(i) Construye un sistema de control cuya función de transferencia $G_1(s)$ no tenga ceros, exhiba un par de polos complejos conjugados en $s = -\xi \pm j(1-\xi^2)$ y tenga una ganancia K de valor variable, de 0 a 100. Explique el impacto de la variación de ξ y K en la localización de polos y ceros.

Ya que el ejercicio especifica que se tienen polos con parte compleja conjugada, el sistema contendrá oscilaciones en su respuesta y, por tanto, será subamortiguado u oscilatorio sostenido. Por la expresión de los polos, se tiene que $\omega_n = 1 \frac{\text{rad}}{s}$ (constante) y el factor de amortiguamiento y la ganancia serán variables:

$0 \leq \zeta < 1$ y $0 < K < 100$. Consideramos la expresión general de la función de transferencia de sistemas de

segundo orden:
$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Declaramos los valores fijos:

```
wn=1 ;
```

A continuación se implementan dos bucles anidados donde se "barren" los valores establecidos de K y ζ . Téngase en cuenta que, como valores iniciales y finales "problemáticos" se asumen: $K=0,1$ y $\zeta=0,9$ por la claridad de visualización de los resultados.

Se declaran tres valores de K extremos:

```
K=[0.1 50 100];
```

Se implementa el "corazón" del programa:

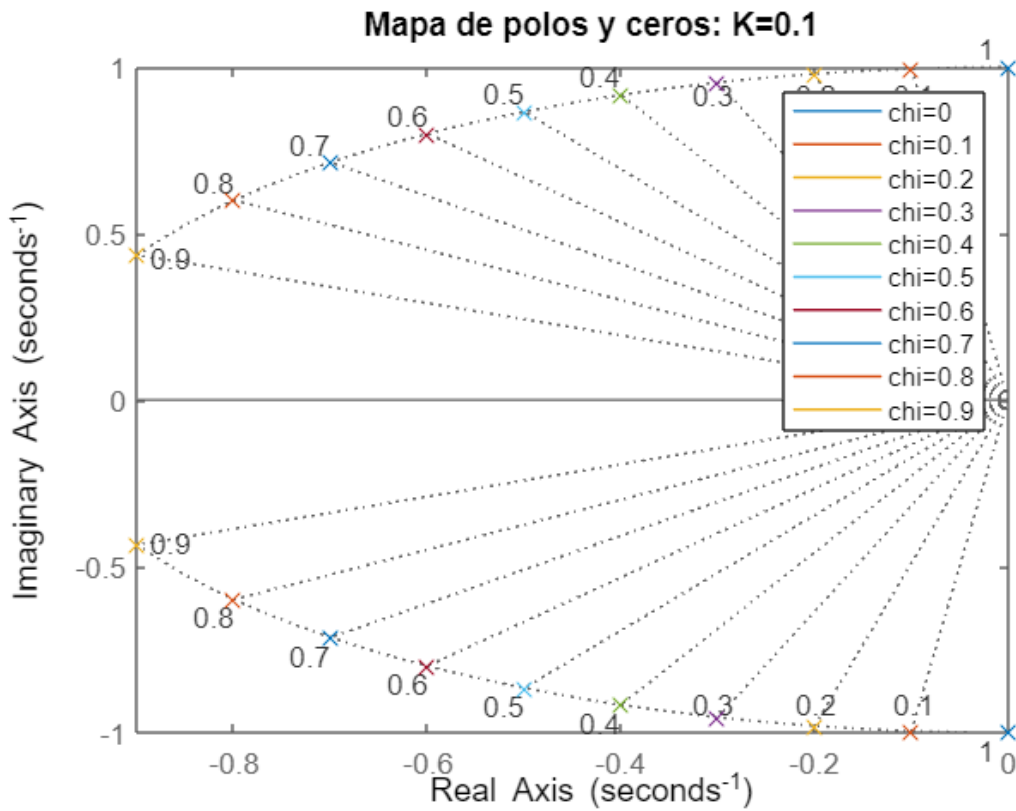
```
for i=1:length(K)
    figure; hold on % representación gráfica de los resultados en el
    % mismo plot para cada valor de K
    for chi=0:0.1:0.9
        G1=tf(K(i)*(wn^2), [1 2*chi*wn wn^2]); % función de transferencia
        pzmap(G1); % se representa el mapa de polos y ceros para la
        % función de transferencia
    end
end
```

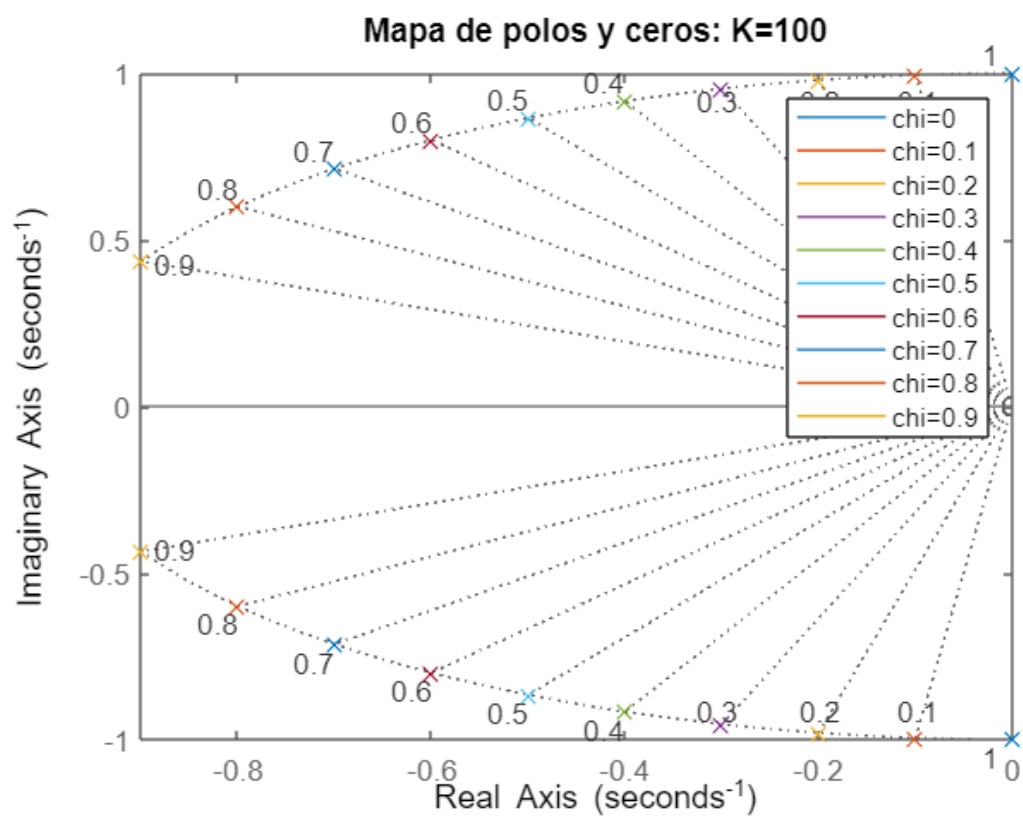
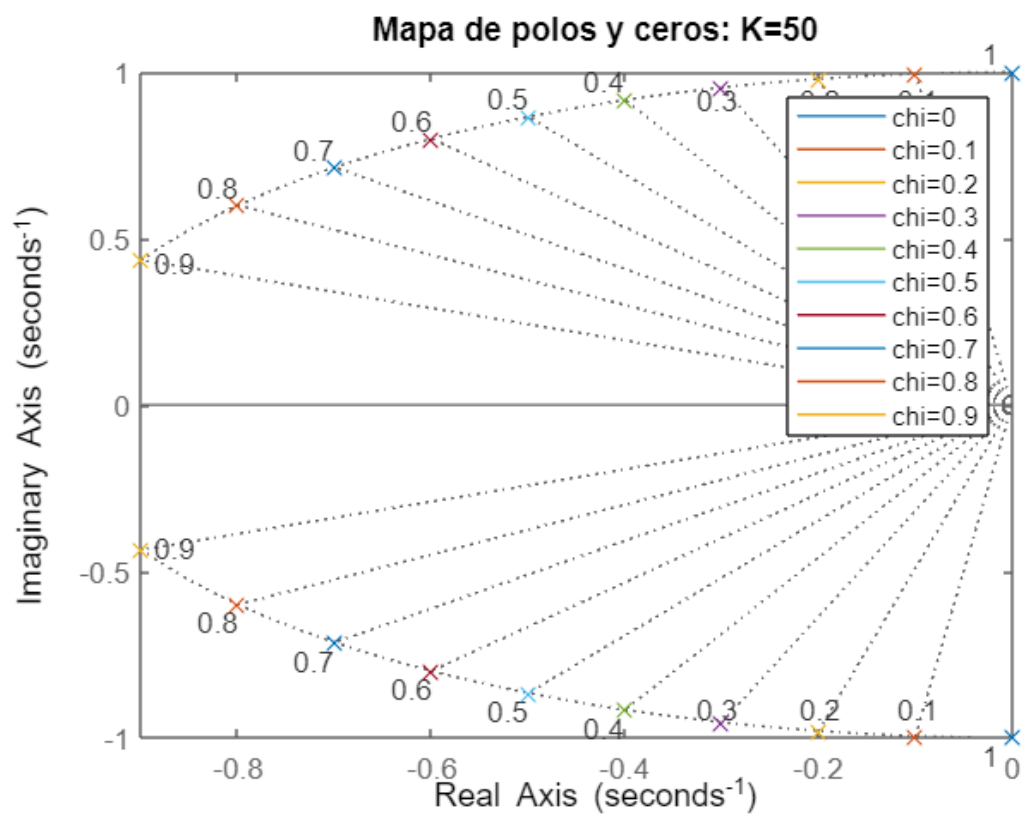
```

sgrid([0:0.1:0.9],1); % mallado de los valores "barridos" del
% factor de amortiguamiento y la pulsación natural no amortiguada
hold off % se deja de graficar en el mismo plot
% título de los gráficos
title(['Mapa de polos y ceros: K=',num2str(K(i))]);
% introducción de la leyenda
lgd=legend('chi=0','chi=0.1','chi=0.2','chi=0.3','chi=0.4','chi=0.5', ...
'chi=0.6','chi=0.7','chi=0.8','chi=0.9');

```

end



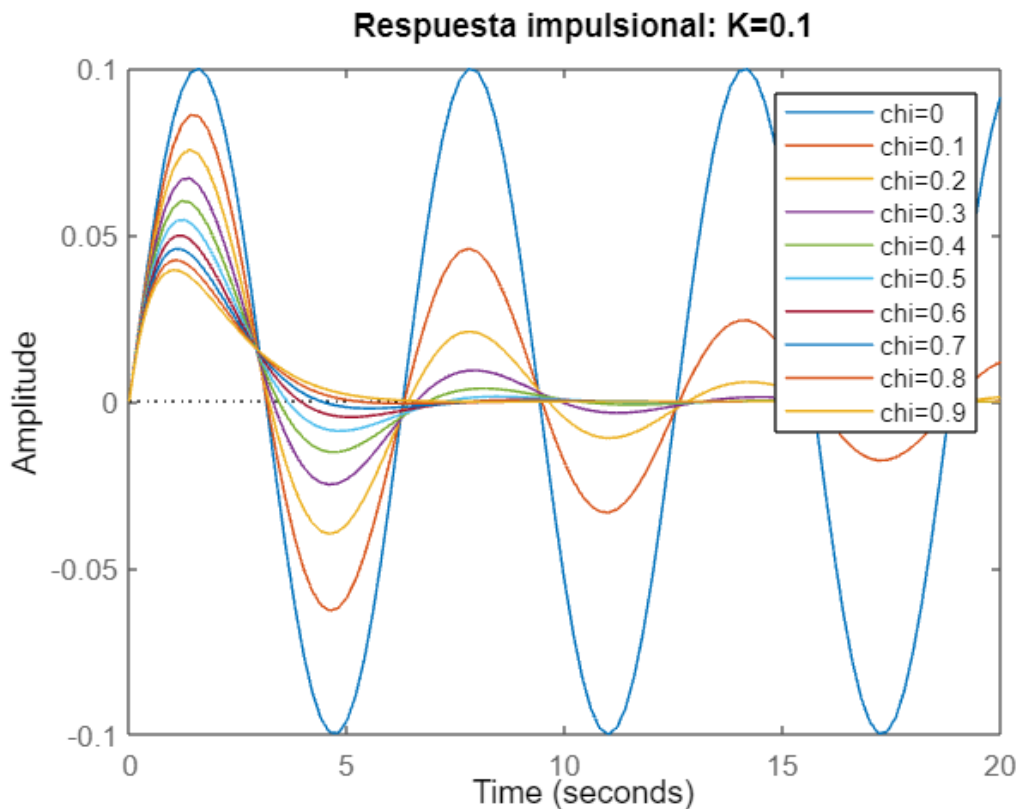


Tal y como se puede visualizar, la variación del valor de K no induce cambios en el mapa de polos y ceros: se obtienen los mismos gráficos para los tres valores de K extremos considerados. Por otro lado, variar el factor de amortiguamiento, manteniendo constante la frecuencia natural no amortiguada, introduce un cambio alrededor de la línea constante radial de ω_n . El factor de amortiguamiento, al cambiar, "salta" a través de las líneas constantes diagonales de ζ .

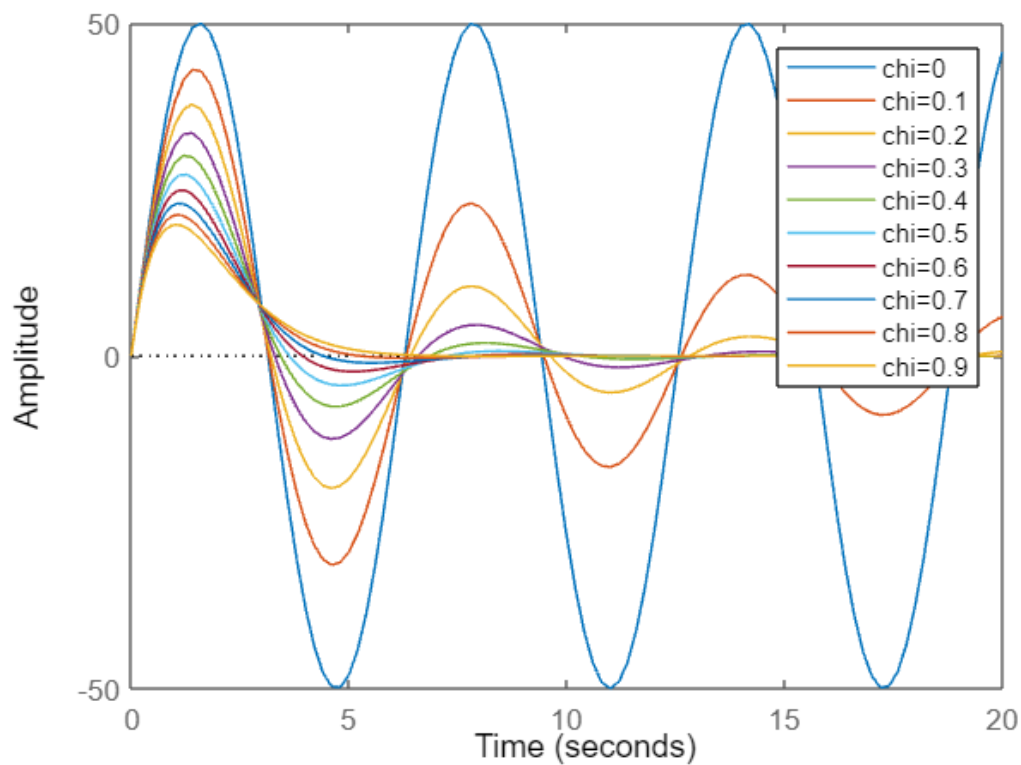
(ii) Se somete ahora $G1(s)$ a una entrada impulso unitario $r(t)=\delta(t)$ con condiciones iniciales iguales a cero. ¿Cómo se modifica la respuesta con ξ y K ?

Se procede de igual manera que en el apartado (i). Por tanto:

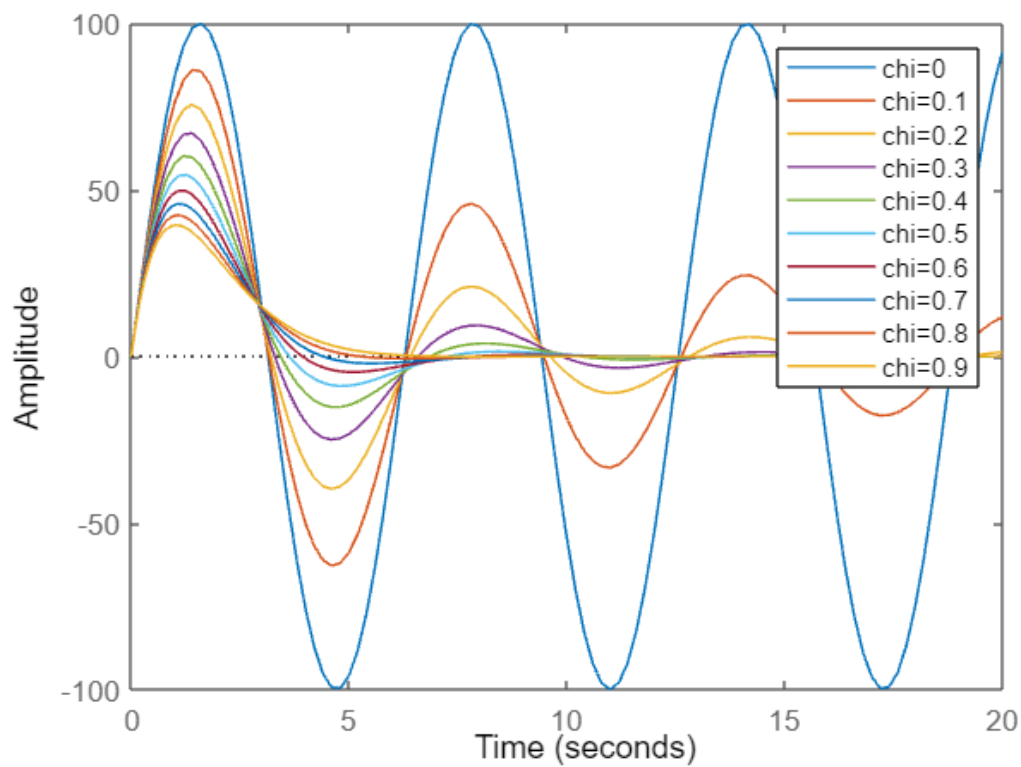
```
wn=1;
K=[0.1 50 100];
for i=1:length(K)
    figure; hold on
    for chi=0:0.1:0.9
        G1=tf(K(i)*(wn^2), [1 2*chi*wn wn^2]);
        impulse(G1,20);
    end
    hold off
    title(['Respuesta impulsional: K=',num2str(K(i))]);
    lgd=legend('chi=0','chi=0.1','chi=0.2','chi=0.3','chi=0.4','chi=0.5', ...
        'chi=0.6','chi=0.7','chi=0.8','chi=0.9');
end
```



Respuesta impulsional: K=50



Respuesta impulsional: K=100



Fácilmente se deduce que el factor de amortiguamiento condiciona las oscilaciones de la respuesta (parte imaginaria de los polos) y la rapidez de "eliminación" o amortiguamiento de las mismas (parte real de los polos) evidenciado, matemáticamente, a través de los términos sinusoidales y exponenciales, respectivamente. La modificación del valor de K, por último, tiene impacto en la amplitud de la respuesta (p.ej., picos de oscilaciones). Sin embargo, no cambia la forma de onda de las respuestas. Estas conclusiones, lógicamente, concuerdan con lo obtenido en el apartado (i).

(iii) Finalmente, $G_1(s)$ se transforma en $G_2(s)$ al añadir un polo simple adicional y variable, de 0 a 10. ¿Qué dependencias se encuentran entre ξ y el valor del polo para que sea factible aplicar la aproximación por polos dominantes? Apóyese en el trazado de respuestas para exponer la solución.

En la misma línea que en los apartados previos, se resuelve el (iii) del ejercicio 1. El enunciado no habla de un valor de ganancia específico; por lo que se asume, $K=1$.

```
wn=1; K=1;
```

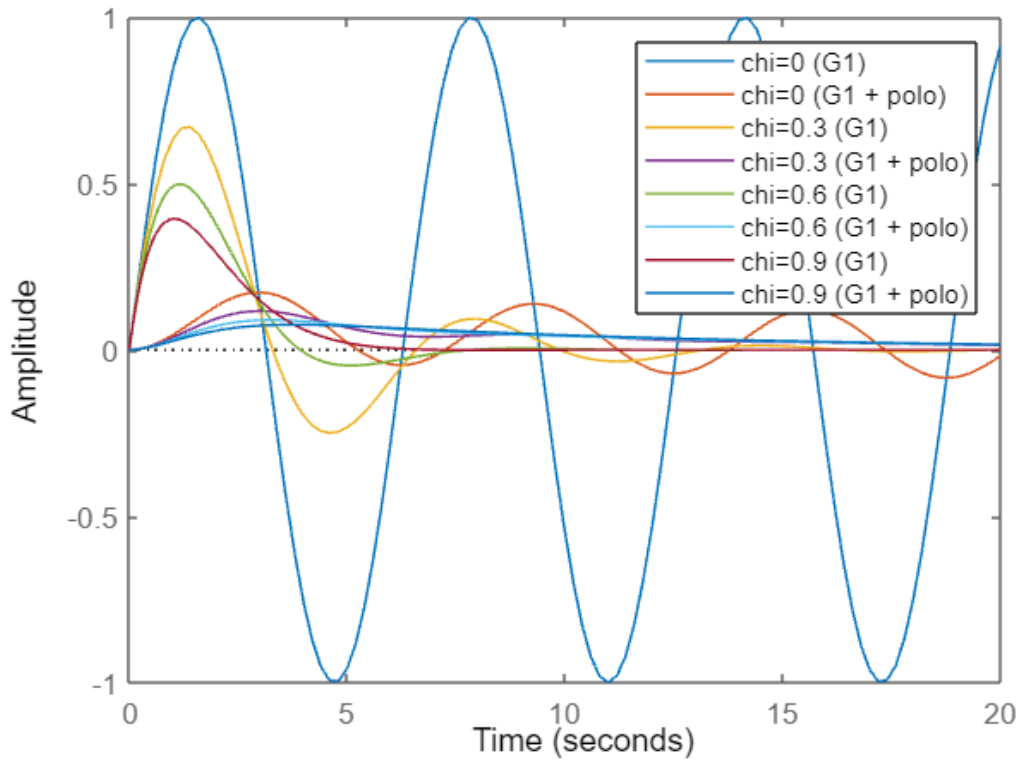
Se consideran cuatro valores para los polos simples que se añaden a la función de transferencia de segundo orden. Se tienen en cuenta valores que "barren" todo el rango marcado.

```
p=[0.1 2.5 5 10];
```

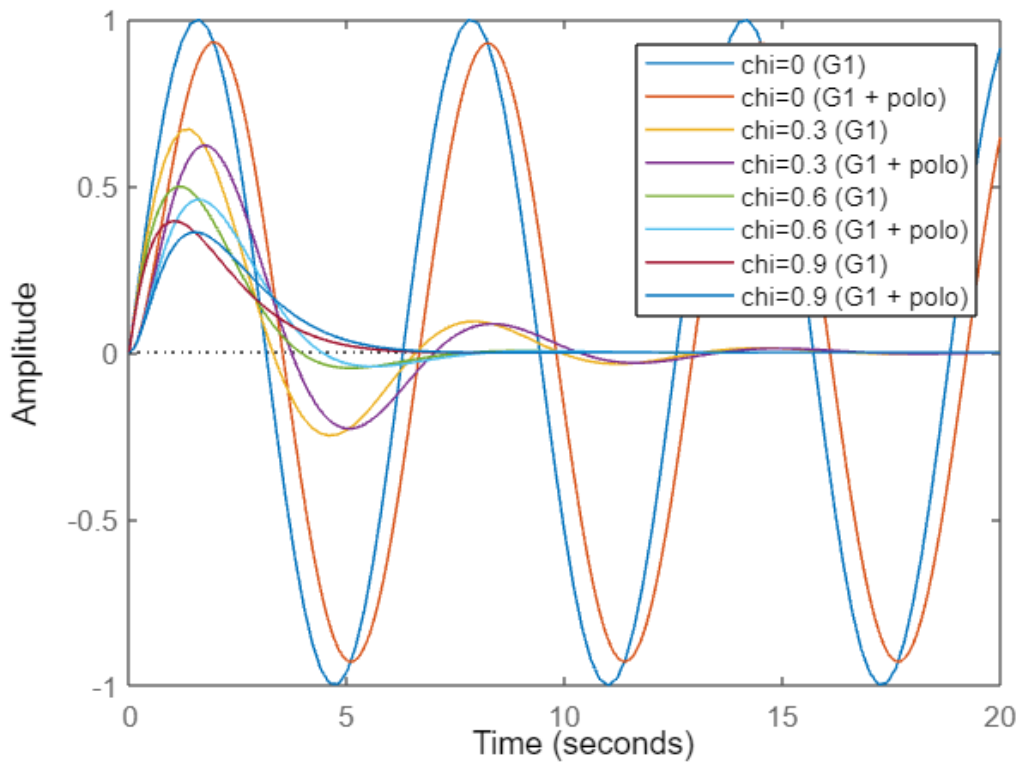
Se aplican dos bucles anidados que consideren los valores del polo ($0 < \text{polo} < 10$) y ζ ($0 \leq \zeta < 1$), a la vez.

```
for i=1:length(p)
    figure; hold on % representación gráfica de los resultados en el
    % mismo plot para cada valor del polo simple
    for chi=0:0.3:0.9
        % función de transferencia original + respuesta impulsional
        G1=tf(K*(wn^2),[1 2*chi*wn wn^2]); impulse(G1,20);
        % función de transferencia de orden superior + respuesta impulsional
        G1p=tf(K*(wn^2)*p(i),conv([1 2*chi*wn wn^2],[1 p(i)]));
        impulse(G1p,20);
    end
    hold off % se deja de graficar en el mismo plot
    % título de los gráficos
    title(['Respuesta impulsional: p=-',num2str(p(i))]);
    % introducción de las leyendas
    lgd=legend('chi=0 (G1)', 'chi=0 (G1 + polo)', 'chi=0.3 (G1)', 'chi=0.3 (G1 + polo)', .
        'chi=0.6 (G1)', 'chi=0.6 (G1 + polo)', 'chi=0.9 (G1)', 'chi=0.9 (G1 + polo)');
end
```

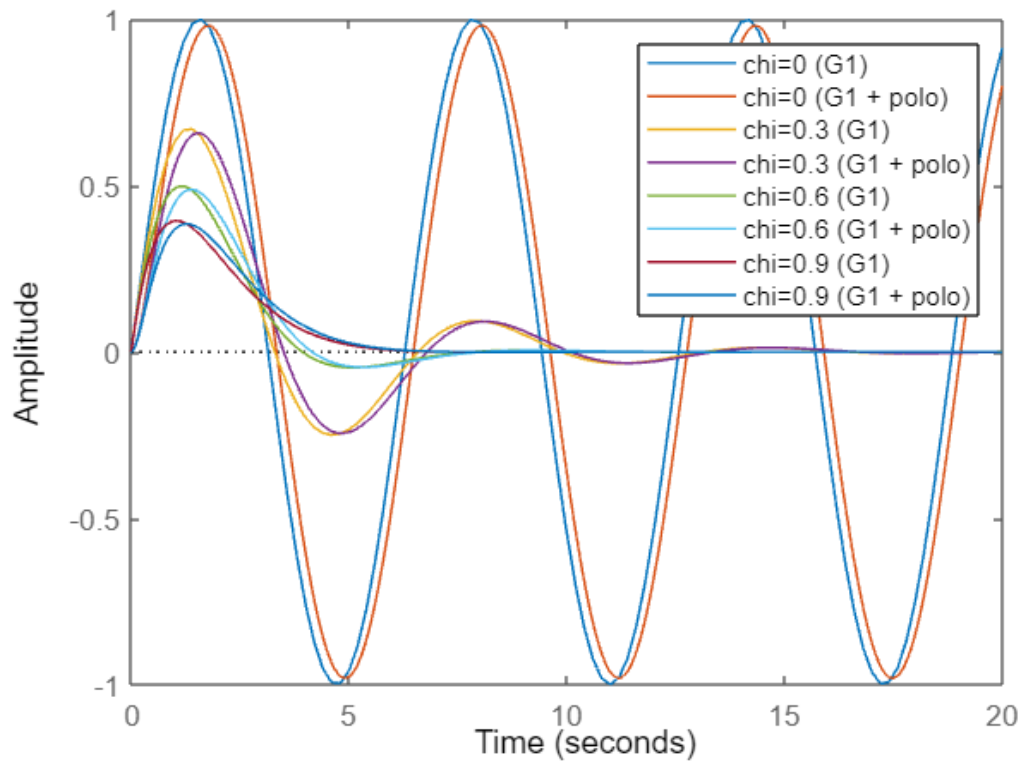
Respuesta impulsional: $p=-0.1$



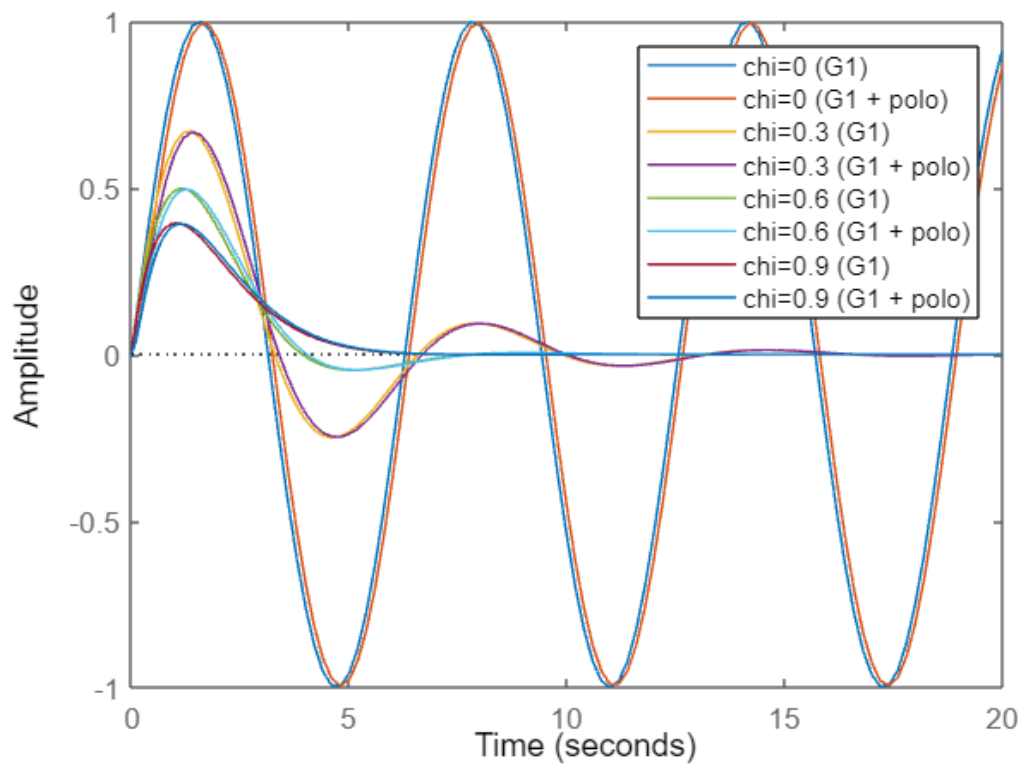
Respuesta impulsional: $p=-2.5$



Respuesta impulsional: $p=-5$



Respuesta impulsional: $p=-10$



En el ejercicio se muestran cuatro gráficos. En cada uno de ellos, se varía el factor de amortiguamiento pero se mantiene constante el valor de polo, cambiando, tan solo, entre gráficos. Cuando el polo se encuentra muy cerca del origen ($p=-0,1$), domina sobre los polos de segundo orden y, por tanto, no se puede aplicar la aproximación por polos dominantes. A medida que se aleja ($p=-5$ o $p=-10$), los polos con parte compleja conjugada van "tomando importancia" en la forma de la respuesta. Su parte real solo varía entre 0 y -1. Sin embargo, el polo simple adicional puede llegar hasta -10.

Con carácter general, cuando se cumpla que el polo simple es 10 veces mayor, en términos absolutos, que la parte real de los polos del sistema de orden, se podrá utilizar la aproximación por polos dominantes:

$\frac{\text{polo simple}}{10} > \zeta$. Nótese que valores inferiores pero cercanos a 10 pueden arrojar también aproximaciones satisfactorias.

Ejercicio 2 (2 puntos). Estudio de la respuesta transitoria de sistemas de control: Respuesta temporal a entradas escalón unitario y otro tipo de entradas (rampa unitaria).

Si la función de transferencia de un sistema de control en lazo cerrado exhibe un numerador consistente en un polinomio de características "particulares", se pueden obtener resultados inesperados en la respuesta temporal. Estúdiese la siguiente función de transferencia

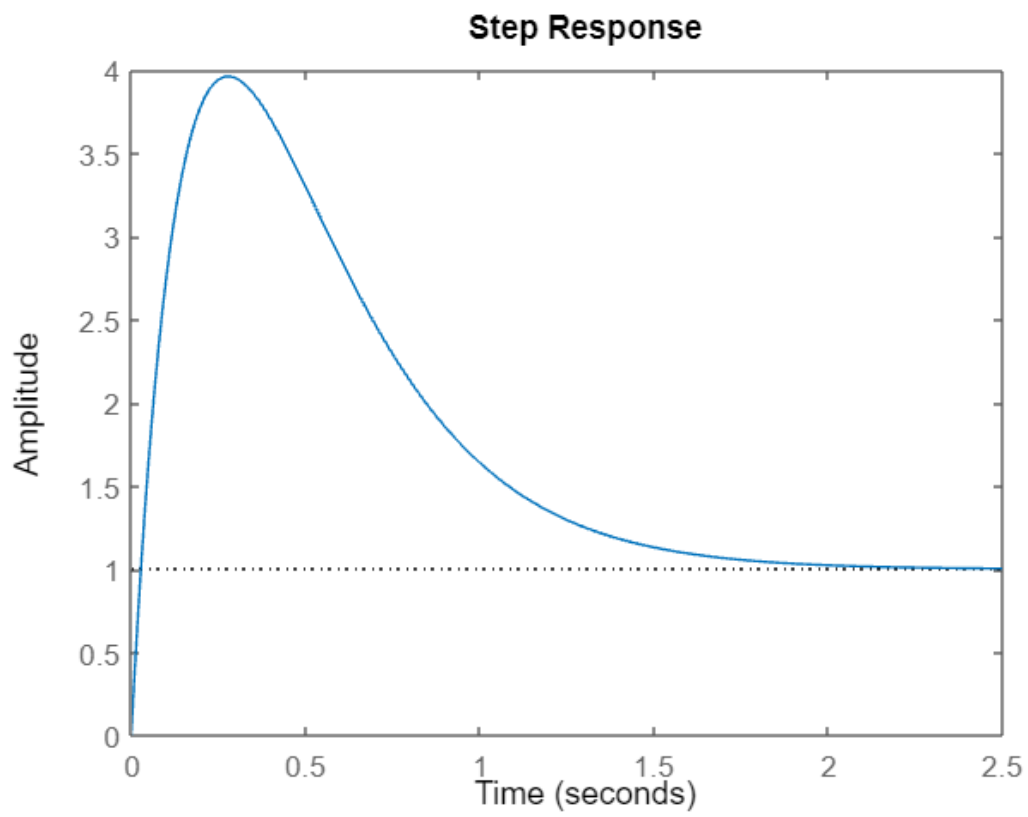
$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{40s + 16}{s^2 + 8s + 16}$ ante una entrada en escalón y rampa unitaria. Esboce las respuestas, analice su forma ayudándose de la solución analítica y exponga de una manera precisa los resultados esperados, lo que se obtiene y a qué es debido.

Se define la función de transferencia:

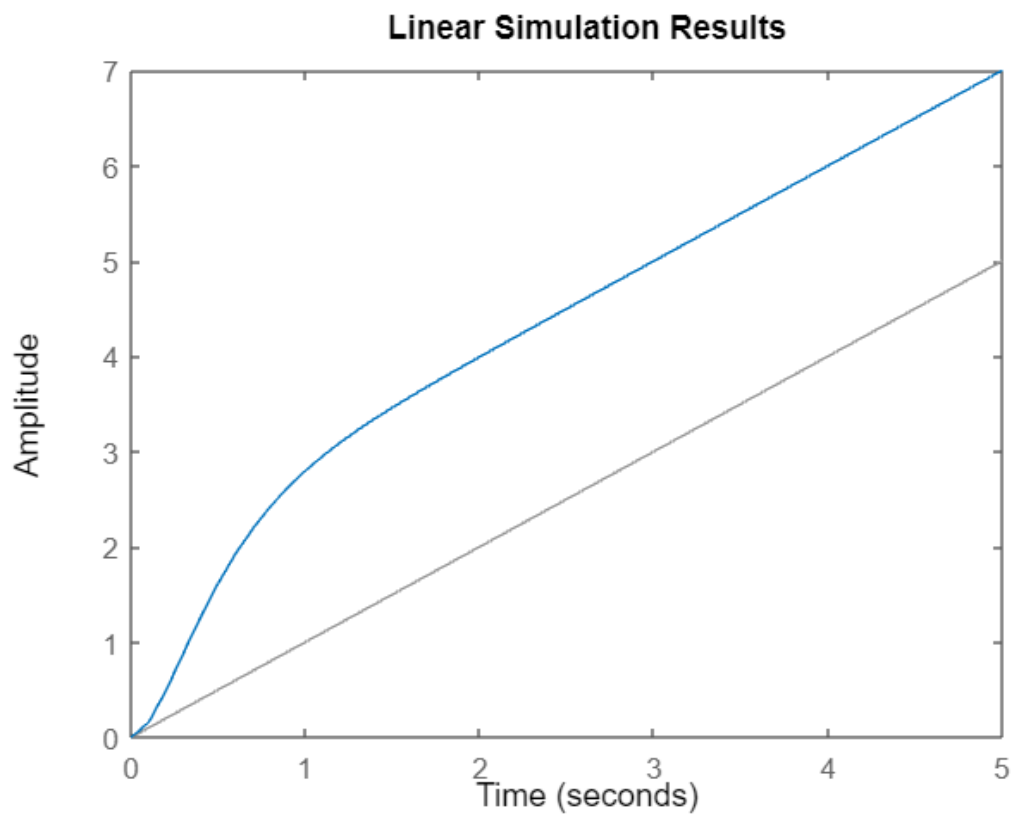
```
G=tf([40 16],[1 8 16]);
```

Se representan las respuestas ante escalón y rampa:

```
figure; step(G); % respuesta ante escalón unitario
```



```
t=0:0.1:5; rampa=t;  
figure; lsim(G,rampa,t); % respuesta ante rampa unitaria
```

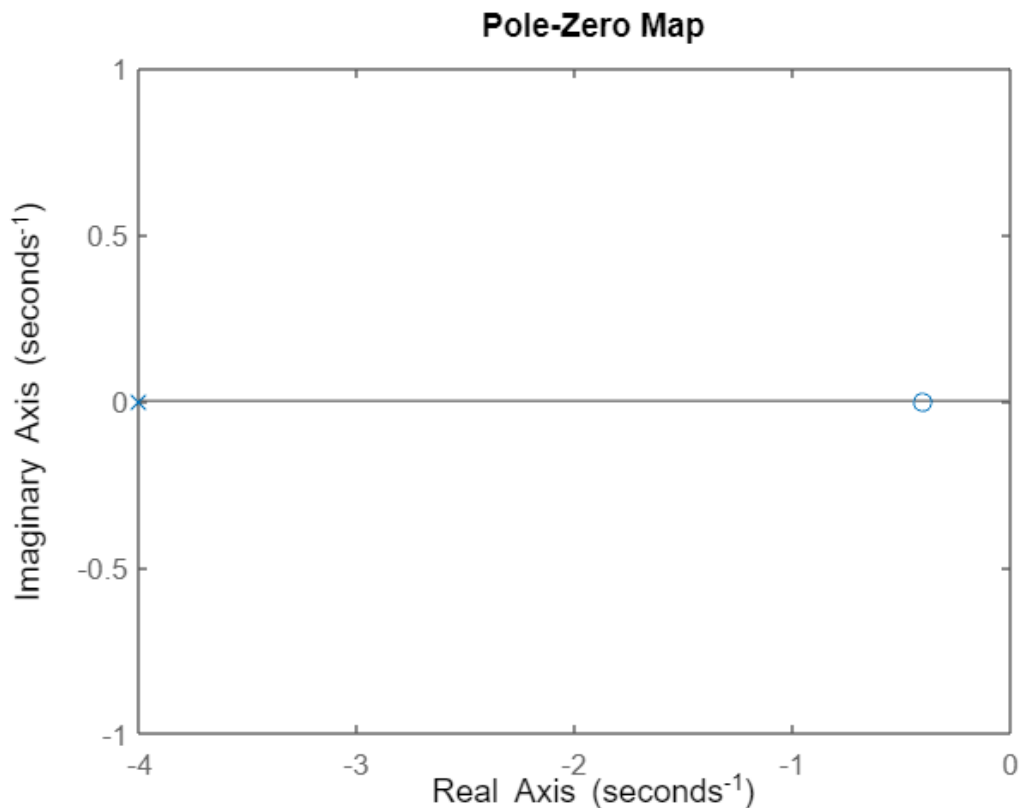


De los esbozos de las respuestas, es posible extraer el comportamiento anómalo del sistema. Aparecen picos de oscilación en las respuestas. Sin embargo, el sistema de segundo orden no es subamortiguado. Véase:

```
[poles,zeros]=pzmap(G)
```

```
poles = 2x1  
    -4  
    -4  
zeros = -0.4000
```

```
pzmap(G)
```



Además, se indican las respuestas en un contexto analítico:

```
syms s
G=(40*s+16)/(s^2+8*s+16);
X1=1/s; X2=1/(s^2);
Y1=G*X1; Y2=G*X2;
y1=ilaplace(Y1) % respuesta ante escalón unitario
```

$$y1 = 36te^{-4t} - e^{-4t} + 1$$

```
y2=ilaplace(Y2) % respuesta ante rampa unitaria
```

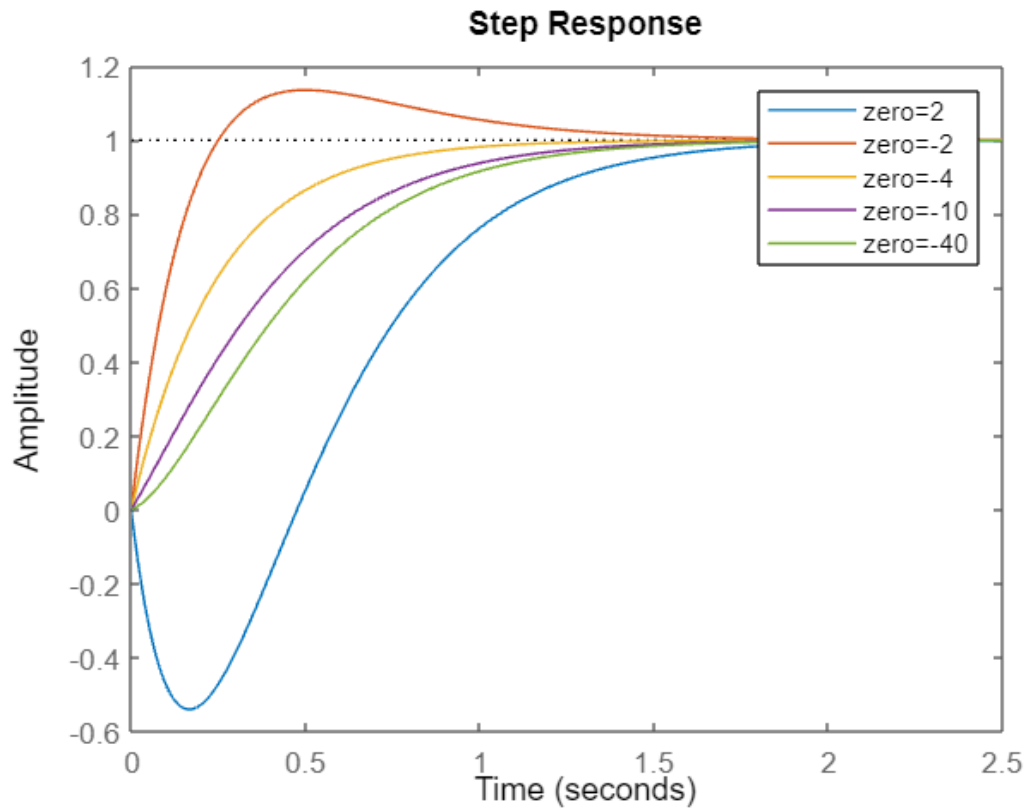
$$y2 = t - 2e^{-4t} - 9te^{-4t} + 2$$

```
% a través del comando fplot, se obtendrían los mismos resultados
% que los mostrados previamente con step y lsim
```

Se tiene un polo doble real y negativo en $s=-4$, además de un cero en $s=-0,4$. Por la posición de los polos, el sistema es críticamente amortiguado (sistema muy rápido sin sobreoscilaciones), pero el cero "perturba" el escenario ideal visto en teoría. En concreto, su valor. La cercanía al origen de dicho elemento (mucho más que los polos) hace que tome importancia en la forma de las respuestas obtenidas, gobernando y dominando el comportamiento del sistema.

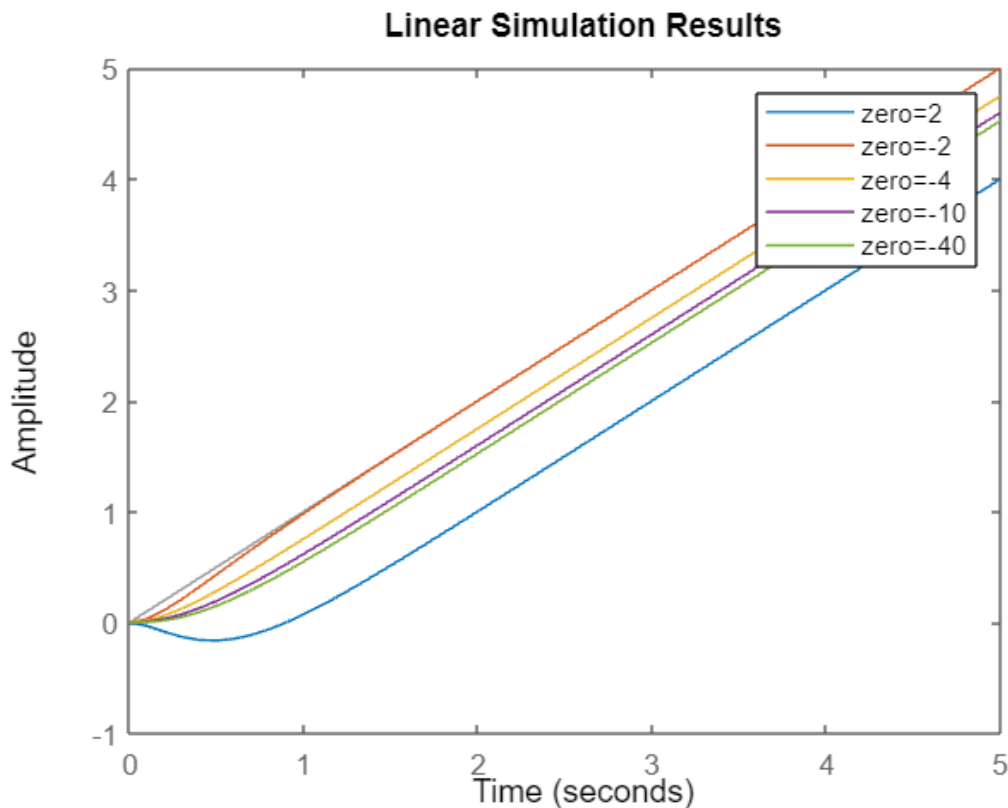
A continuación, se representa, de nuevo, la respuesta temporal ante el escalón unitario considerando diferentes posiciones del cero:

```
figure;
zero=[2 -2 -4 -10 -40]; % vector de ceros fijado
for i=1:length(zero)
    step(zpk([zero(i)],[-4 -4],-4*4/zero(i))); hold on
end
legend('zero=2','zero=-2','zero=-4','zero=-10','zero=-40');
```



Ahora, ante rampa unitaria:

```
figure;
for i=1:length(zero)
    lsim(zpk([zero(i)],[-4 -4],-4*4/zero(i)),rampa,t); hold on
end
legend('zero=2','zero=-2','zero=-4','zero=-10','zero=-40');
```



A través de esta simple comprobación, se extrae que, a medida que el polo está más alejado del origen (y de los polos), "perturba" menos la respuesta temporal obtenida con respecto a la teoría clásica general de los sistemas de segundo orden. Si el cero toma valores positivos, el sistema presenta inicialmente una respuesta negativa. Cuando $s=-2$, la respuesta del sistema presenta picos de sobreoscilación como en $s=-0,4$, pero menos evidentes. En $s=-4$, se obtuvo un sistema de primer orden; es decir, una respuesta exponencial debido a que un polo y el cero de la función de transferencia se cancelan. Cuando $s=-10$, se obtiene una respuesta críticamente amortiguada y, por último, en $s=-40$ se obtiene un retardo para tiempos cortos debido a la "lentitud extrema" inducida por el cero en comparación con la posición de los polos.

Ejercicio 3 (1,75 puntos). Estudio de la respuesta en régimen permanente de sistemas de control: Precisión y error en estado estacionario de un sistema de control.

Obténgase la respuesta temporal del siguiente sistema, cuya función de transferencia en lazo cerrado

es $\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3}{s^2 + s + 3}$, cuando la entrada tiene la forma de $3 + t + \frac{1}{3}t^2$. ¿Qué tipo de sistema es?

Representa la respuesta temporal y razone los resultados obtenidos, principalmente, apoyándose en la teoría de errores (función de transferencia de $E(s)$, teorema del valor final, etc.). ¿Qué propiedades exhibe el sistema que conducen a los resultados obtenidos?.

El sistema bajo estudio es:

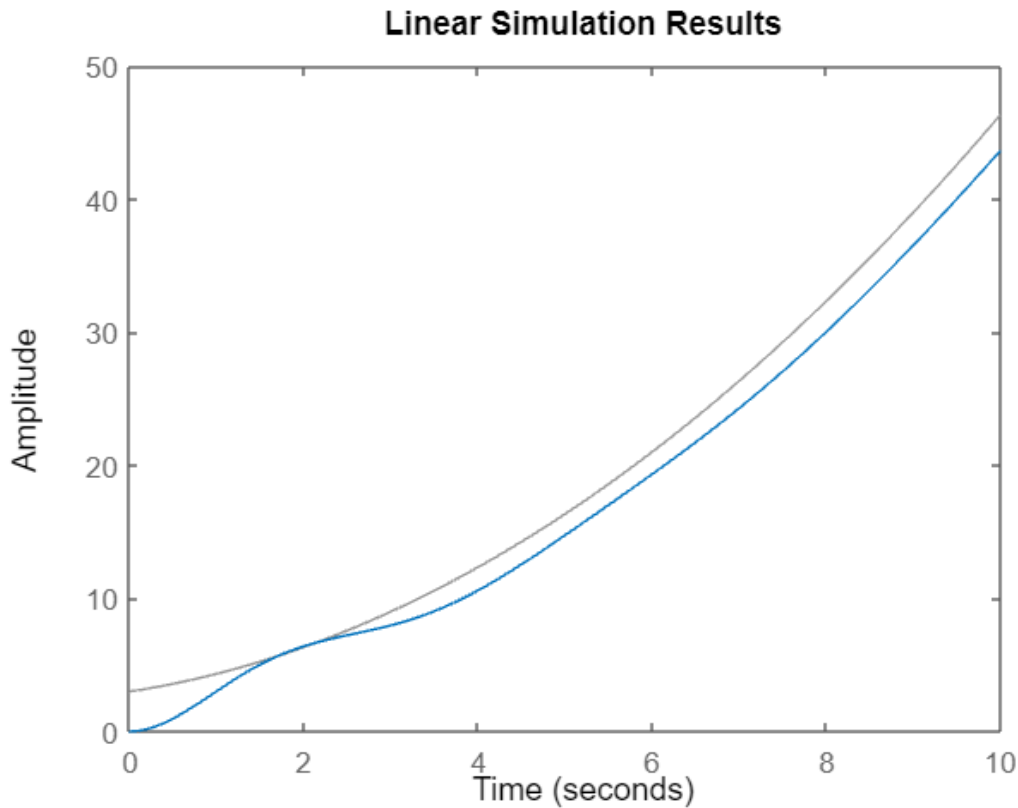
```
G=tf([3],[1 1 3]);
```

La entrada que combina características de posición, velocidad y aceleración es:

```
t=0:0.1:10;
x=3+t+(1/3).*t.^2;
```

Por tanto, la respuesta resulta:

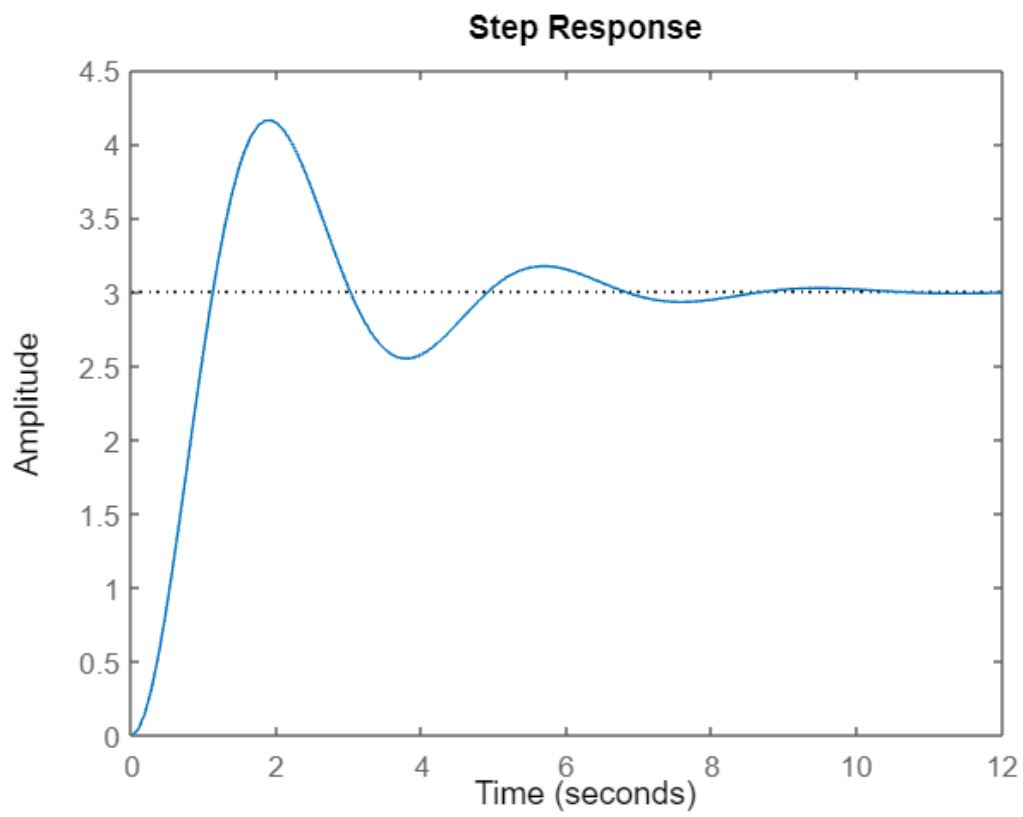
```
figure; lsim(G,x,t);
```



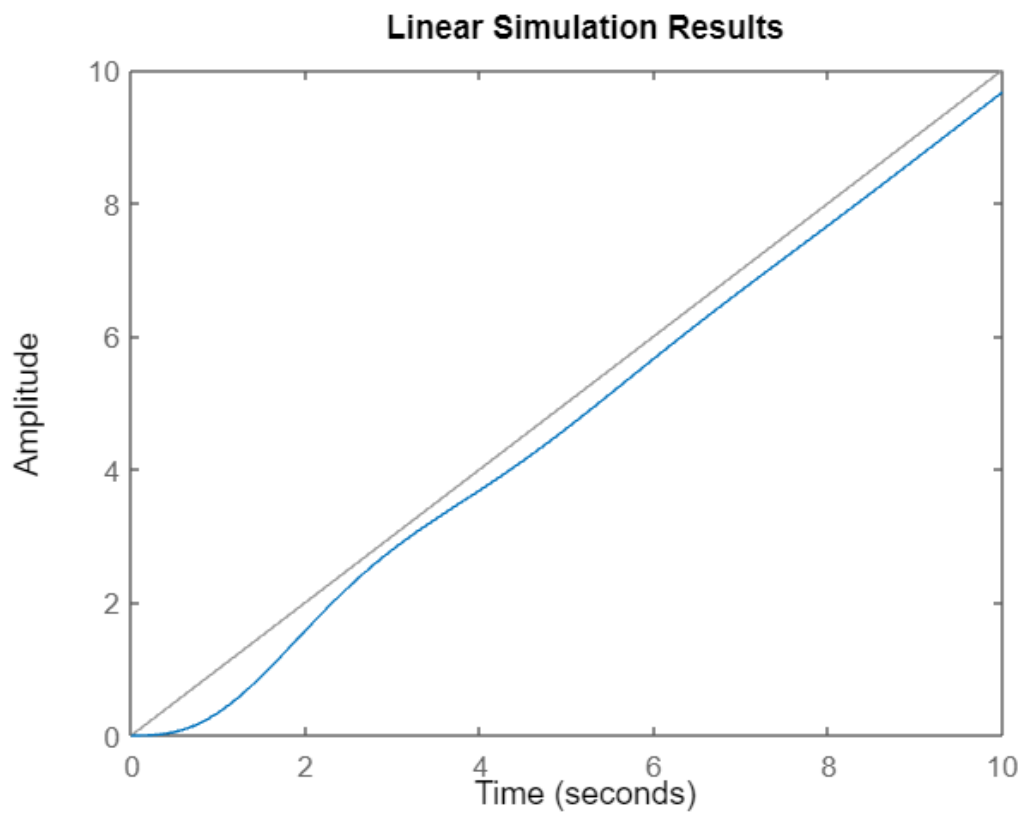
Al tratarse de una combinación de entradas de tipo polinómico, sería necesario aplicar el principio de superposición para identificar el tipo de sistema y así obtener el error en estado estacionario. Nótese que la función de transferencia dada cuantifica la relación salida-entrada en lazo cerrado. No se trata de la función de transferencia en lazo abierto, la cual sería la función de transferencia utilizada para calcular el error en el dominio de s , $E(s)$, y después aplicar el teorema del valor final para extraer, ess .

Si representamos las respuesta ante el escalón de fuerza 3, la rampa unitaria y la señal parabólica separadamente, tenemos:

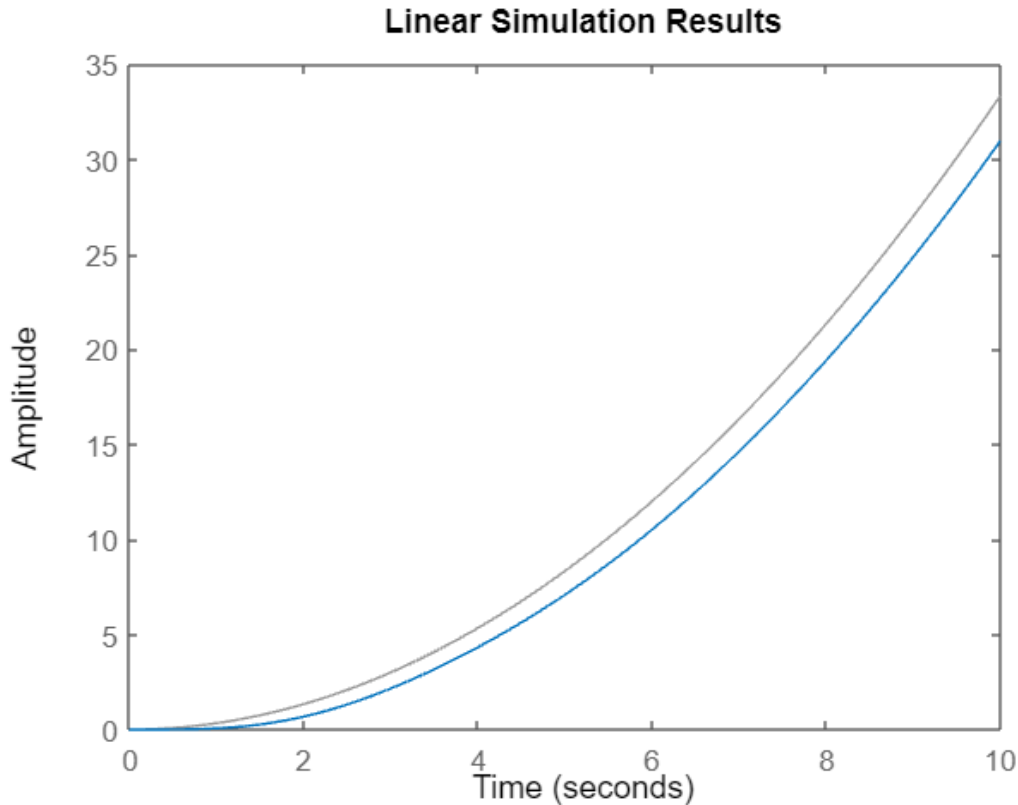
```
figure; step(3*G);
```



```
x2=t; figure; lsim(G,x2,t);
```



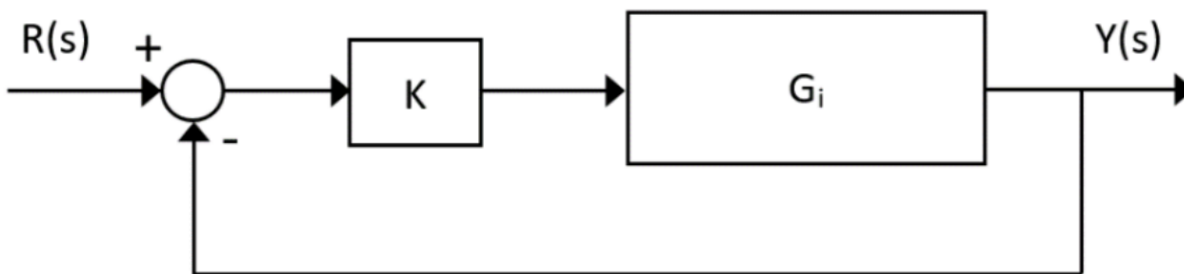

```
x3=(1/3).*t.^2; figure; lsim(G,x3,t);
```



En la respuesta ante escalón, no se obtiene error para un tiempo largo, por lo que no es un sistema tipo 0. Sería un sistema tipo 1 o 2. En la respuesta ante rampa unitaria, se obtiene un error finito, por lo que se tiene un sistema tipo 1. Nótese que esto se puede comprobar si se extrae la función de transferencia en lazo abierto considerando, por ejemplo, $H(s)=1$. Finalmente, es importante destacar que el sistema está especialmente bien diseñado para seguir esta entrada, es decir, el valor del error es muy bajo. Esto conduce a que el error de aceleración y el general, ante la entrada original, no sea extremadamente alto.

Ejercicio 4 (3,5 puntos). Diseño de sistemas de control en base a los requisitos de la respuesta temporal.

Se tiene el siguiente lazo de control:



(i) A partir de comandos de control de flujo, calcule el valor que debe tener la ganancia estática de un sistema de primer orden que representa la planta $G_1(s)$ de un bucle cerrado, para que el error ante una

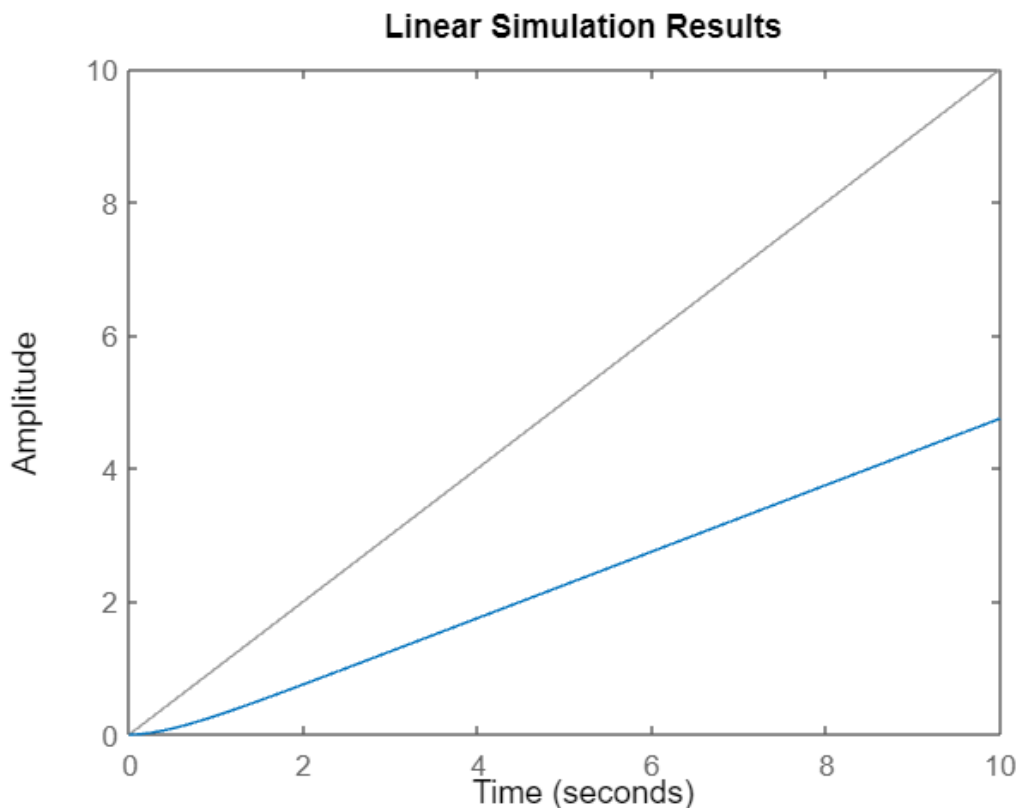
entrada rampa unitaria $r(t)=t$, sea despreciable (error menor que 5%). ¿Tiene importancia la constante de tiempo de $G1(s)$? Considérese $H(s)=1$ (ver figura).

Se declara la función de transferencia de primer orden generalizada:

```
Kest=1; T=1; % se considera ganancia estática y constante  
% de tiempo unitarias  
G1=tf([Kest],[1 T]); % función de transferencia, G1(s)  
H=1; % realimentación unitaria
```

Se calcula la función de transferencia en lazo cerrado y se representa la respuesta ante rampa unitaria:

```
GFTlc=feedback(G1,H); % función de transferencia en lazo cerrado  
t=0:0.01:10; rampa=t; % entrada en rampa unitaria  
figure; lsim(GFTlc,rampa,t); % respuesta ante rampa unitaria
```



Tal y como se observa en el esbozo de la figura, se tiene una respuesta con un régimen permanente que conduce a un error infinito ante la entrada rampa. Por tanto, se trata de un sistema tipo 0. No se puede modular el error y, por tanto, la constante de tiempo T no tiene impacto en la consecución de los objetivos marcados en el ejercicio.

Extraemos la respuesta en un contexto analítico para verificar lo establecido:

```
syms s  
G1=Kest/(s+T); X=1/(s^2);  
Y=X*G1/(1+G1*H); y=ilaplace(Y)
```

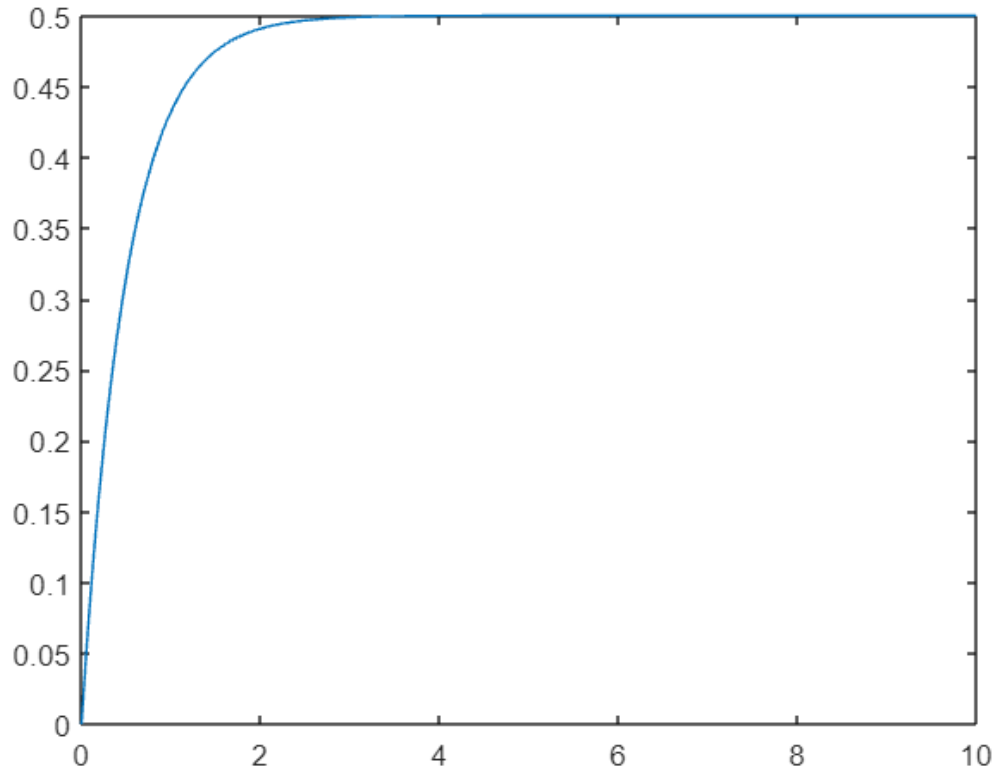
y =

$$\frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} - \frac{1}{4}$$

En régimen permanente, se obtiene una rampa de pendiente 1/2 que conduce a un error infinito. Nunca se podría obtener un error finito de valor, 5% en términos relativos.

Finalmente, determinamos el tipo de sistema a partir de la teoría de errores de sistemas LTI:

```
E=X/(1+G1*H); % función error en el dominio de s
```

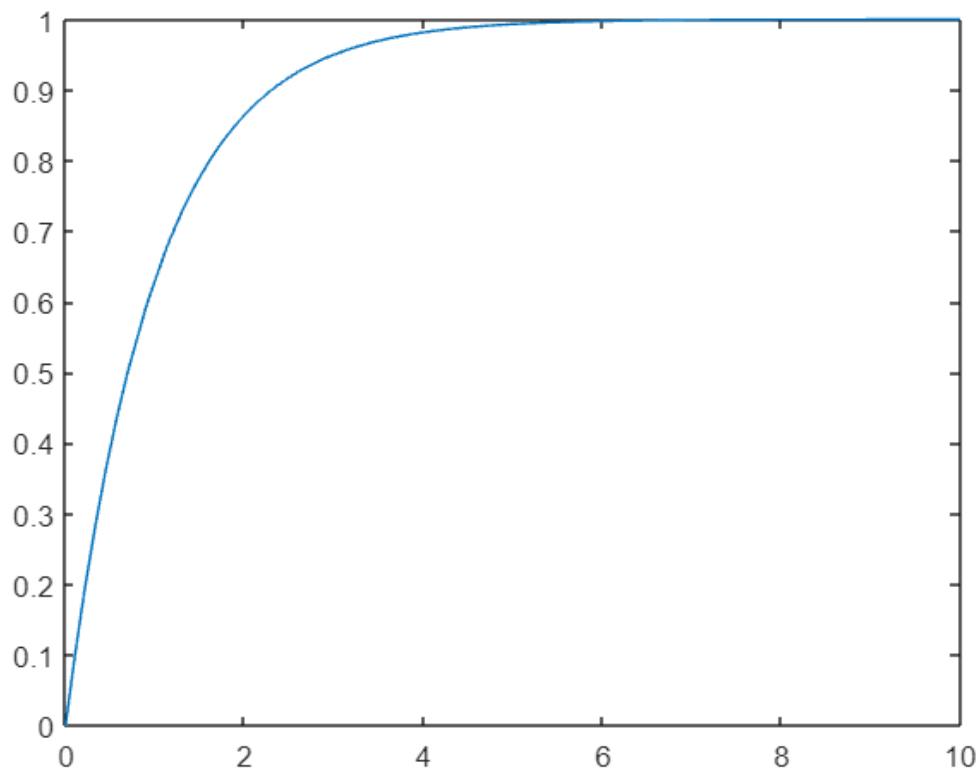


```
ess_rampa=limit(s*E,s,0) % teorema del valor final
```

```
ess_rampa = NaN
```

En efecto, se obtiene un valor indeterminado (NaN) o infinito ante rampa unitaria. ¿Y ante una entrada de posición (escalón)?

```
fplot([ilaplace((G1/s)/(1+G1*H))],[0 10])
```



```
X=1/s; E=X/(1+G1);
ess_escalon=limit(s*E,s,0)
```

```
ess_escalon =
```

$$\frac{1}{2}$$

Este error sí sería modulable a través de la constante de tiempo y la ganancia de la función de transferencia de $G1(s)$.

(ii) En la misma dinámica del apartado anterior, extraiga el valor de ξ óptimo que haga que la función de transferencia en lazo cerrado presente una sobreoscilación del 5% ante una entrada en escalón unitario

$r(t)=u(t)$, teniendo en cuenta que $G_2(s) = \frac{2\zeta s + 1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$.

Se realiza un primer cálculo de la sobreoscilación a partir de un valor muy pequeño del factor de amortiguamiento:

```
K=1; H=1; % ganancia y realimentación unitarias
chi=0.01; % factor de amortiguamiento prueba
G2=tf([2*chi 1],[1 2*chi 1]); % función de transferencia
% de la planta
GTFlc=feedback(K*G2,H); % función de transferencia en lazo
% cerrado
Mp=stepinfo(GTFlc).Overshoot; % sobreoscilación
```

Ahora, se va cambiando el valor del factor de amortiguamiento hasta que se obtenga una sobreoscilación inferior al límite de 5% establecido en el enunciado. Para ello se utiliza un comando de control de flujo while.

```
chi=0.1; % inicialización del factor de amortiguamiento
while Mp>5
    G2=tf([2*chi 1],[1 2*chi 1]);
    GTFlc=feedback(series(K,G2),H);
    Mp=stepinfo(GTFlc).Overshoot;
    chi=chi+0.1; % incremento del valor del amortiguamiento
end
```

Finalmente, se muestra por pantalla el factor de amortiguamiento resultante, la sobreoscilación (a modo de verificación) y la respuesta ante escalón unitario:

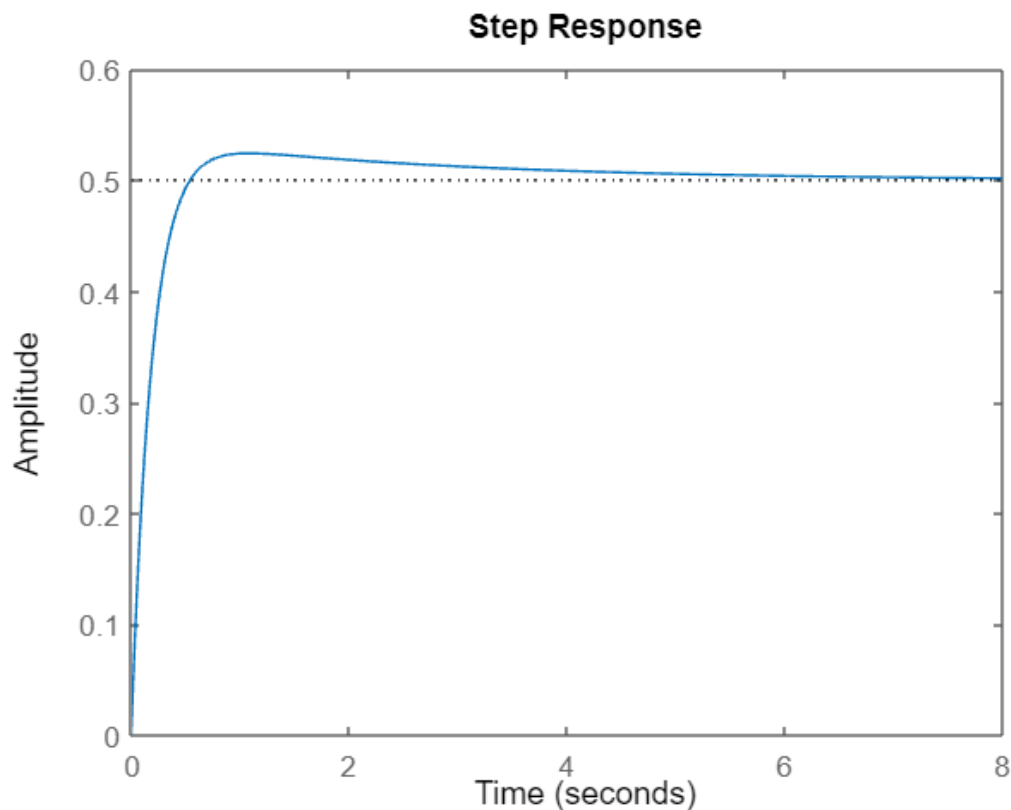
```
chi % factor de amortiguamiento
```

```
chi = 1.5000
```

```
Mp % sobreoscilación
```

```
Mp = 4.8572
```

```
step(GTFlc) % respuesta ante escalón unitario
```



Para cumplir el requerimiento de obtener una sobreoscilación del 5%, es necesario trabajar con $\zeta = 1,5$, pero, ¿sería un sistema sobreamortiguado con sobreoscilación? Sucede como en el ejercicio 2. Se tiene un cero

que "perturba" la respuesta. Siendo $\zeta = 1,5$ se tiene un cero en $s=-2$ y dos polos en $s=-2,62$ y $s=-0,38$. Al encontrarse el cero "situado" entre los polos, se modifica la respuesta, pero no en exceso. Consúltase el ejercicio 2 para más detalles. Por último, es necesario destacar que se trata de un sistema tipo 0.

Para los apartados (i) y (ii) considere $K=1$. Ahora:

(iii) Tomando $G2(s)$ en situación de amortiguamiento crítico, determine el valor de K para que el error relativo de posición del sistema en lazo cerrado de la figura sea igual aproximadamente 2%. Argumenta tu código con detalle (if, for, while) y razona los resultados.

Análogamente al apartado anterior, se resuelve (iii). Téngase en cuenta que $\zeta = 1$, es decir, sistema críticamente amortiguado.

```
K=1; H=1; chi=1;
G2=tf([2*chi 1],[1 2*chi 1]);
GTFlc=feedback(K*G2,H);
t=0:0.1:10; [y,t]=step(GTFlc);
ess_pos_abs=1-y(end);
ess_pos_rel=100*(1-y(end));
```

Se implementa el bucle de control:

```
while ess_pos_rel>2
    GTFlc=feedback(K*G2,H);
    [y,t]=step(GTFlc);
    ess_pos_rel=100*(1-y(end));
    K=K+0.1;
end
```

Se muestran los resultados obtenidos por pantalla:

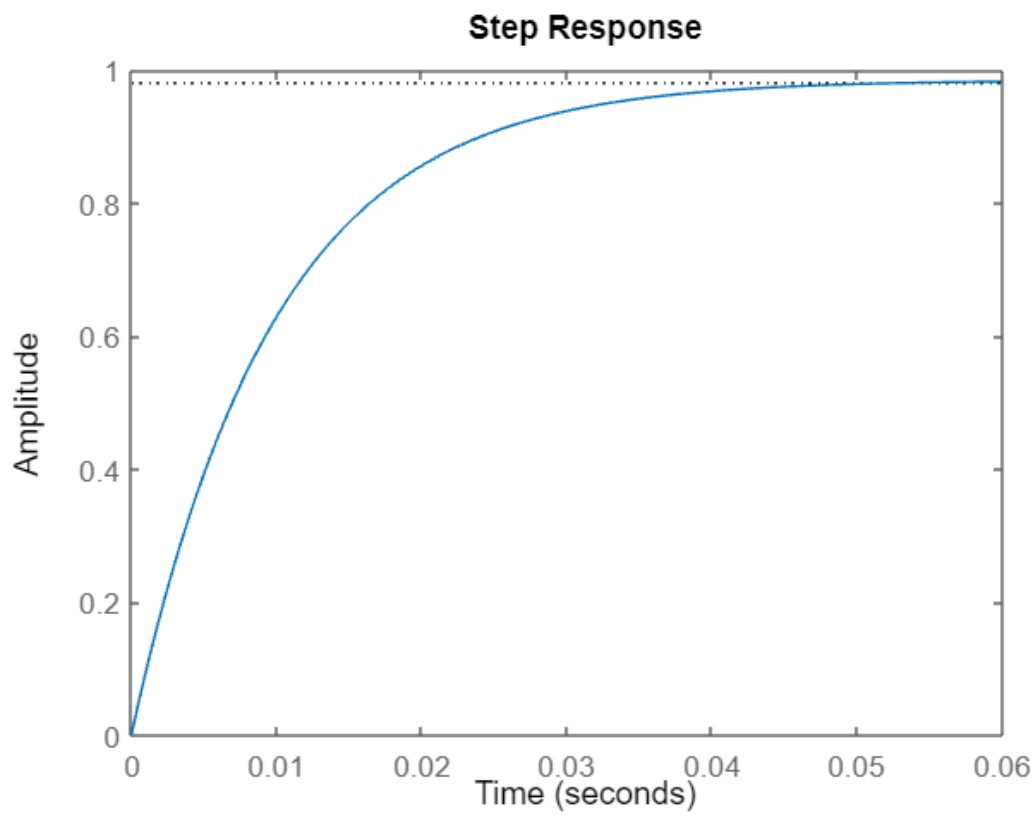
K

K = 50.2000

ess_pos_rel

ess_pos_rel = 1.9997

step(GTFlc)



Los resultados indican que con una ganancia de, aproximadamente, $K=50$, se obtendría el requerimiento solicitado.