

Ejercicio 1 (2,75 puntos)

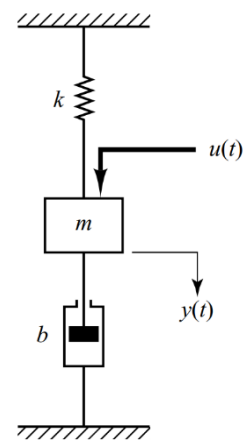
El sistema mecánico de la figura constituye un sistema de control, siendo: (i) $G(s)=1/[ms^2+k]$ (planta constituida por el conjunto masa-muelle); y (ii) $C(s)=bs$ (el amortiguador actúa como controlador).

(i) Ayudándose de la función de transferencia $Y(s)/U(s)$, donde $u(t)$ es una perturbación, especifique la estructura del diagrama de bloques, indicando los bloques y señales que constituyen el sistema.

Nota: Considere realimentación negativa y unitaria, $H(s)=1$.

(ii) Considerando $u(t)$ una señal en escalón unitario, explique, de forma descriptiva, cuál es la evolución de la respuesta temporal del desplazamiento vertical $y(t)$ y el impacto del amortiguador regulable (lazo abierto sin amortiguador *vs.* lazo cerrado con amortiguador).

(iii) Determine el error de control del sistema en lazo cerrado (véase figura). ¿Se obtienen resultados acordes con el análisis mecánico realizado en el apartado (ii)? Razone la respuesta.



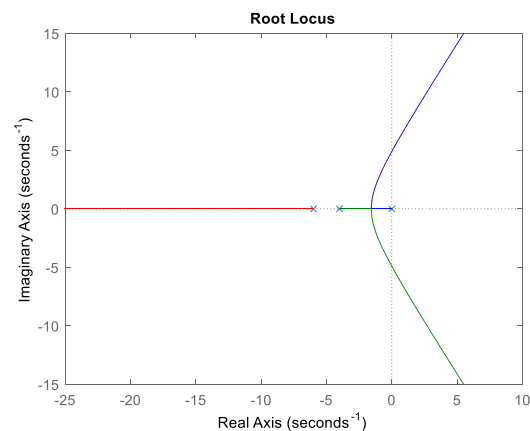
Ejercicio 2 (3,5 puntos)

La figura adjunta muestra el lugar de las raíces del sistema de control, en lazo cerrado y con realimentación negativa unitaria, de la guiñada de un avión de combate. Se pide:

(i) ¿Es posible controlar dicho sistema utilizando un control proporcional haciendo que tenga un error nulo frente a una entrada escalón? Justifica tu respuesta.

(ii) Sabiendo que la ganancia crítica del sistema es $K_C=240$, determine el valor de la ganancia de la planta $G(s)$; sabiendo que $H(s)=1$, y las raíces sobre el eje $j\omega$ asociadas a dicha ganancia.

(iii) En una aplicación más compleja, se requiere que dicho sistema tenga sus polos dominantes situados en $s=-3,613\pm 6,193j$, sin tener en cuenta el error inducido a la salida del sistema. Diseña el controlador más sencillo que cumpla dicho requerimiento.



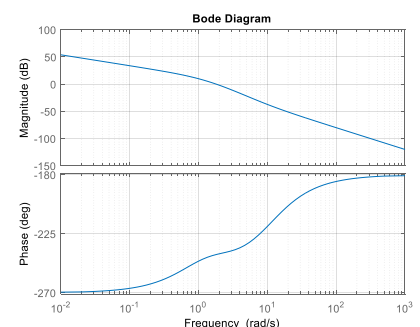
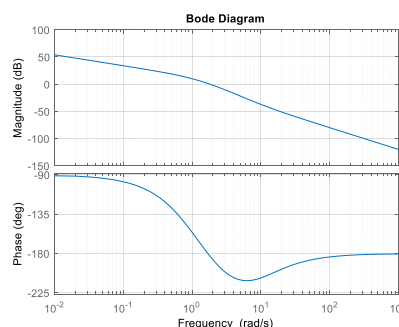
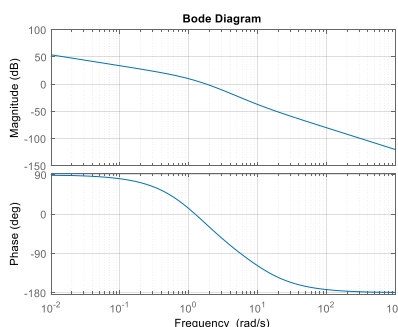
Ejercicio 3 (1,5 puntos)

Se tienen las siguientes funciones de transferencia:

$$G_1(s) = \frac{s+10}{s(s+1)(s+2)}$$

$$G_2(s) = \frac{s-10}{s(s+1)(s+2)}$$

$$G_3(s) = \frac{s+10}{s(s-1)(s+2)}$$



En la figura se han dibujado sus respectivos diagramas de Bode.

¿A qué función corresponde cada diagrama? Justifica tu respuesta detalladamente.

Ejercicio 4 (2,25 puntos)

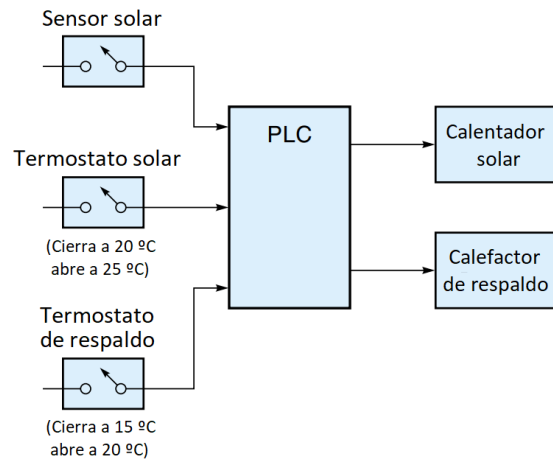
El control domótico de una pequeña vivienda se realiza mediante un PLC.

Se solicitan las siguientes funcionalidades:

(i) La casa cuenta con tres ventanas y dos puertas. Cada una de ellas tiene un interruptor NA asociado, %I1.x (siendo x el valor referido a cada elemento; puerta o ventana). Dibuja un diagrama de lógica de escalera que encienda una lámpara %Q2.0 si una o más ventanas están abiertas o si ambas puertas se encuentran abiertas.

(ii) Adicionalmente, dicho autómatas programable controla el sistema de calefacción, basado en energía solar, que se muestra en el esquema de la figura. El sistema tiene dos partes interrelacionadas: (a) el termostato solar enciende y apaga el calentador solar si el sensor solar dice que el sol está brillando; y (b) el termostato de respaldo se encarga de encender y apagar el horno o calefactor de apoyo si la energía del sol es insuficiente.

Ambos sistemas de calefacción comparten el mismo sistema de conductos, por lo que si el termostato de respaldo se apaga, el PLC debe encender el calefactor de respaldo (y apagar el calentador solar si está encendido). Dibuja el diagrama de escalera correspondiente para este sistema.



Ejercicio 1

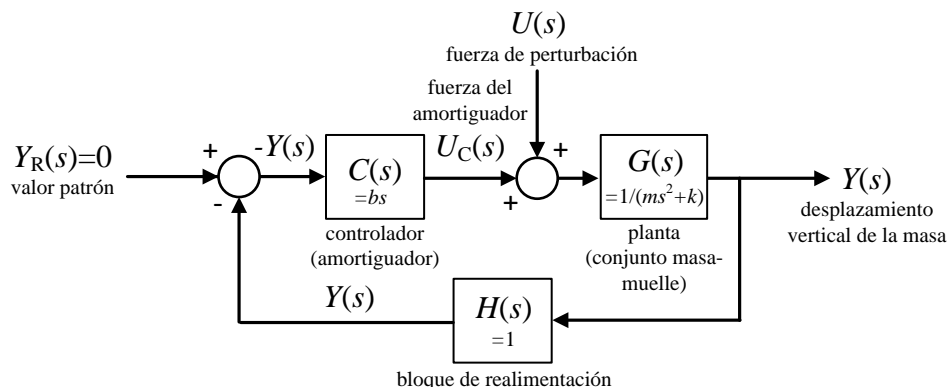
(i) Con el fin de esbozar el diagrama de bloques asociado al sistema mecánico de la figura, en primer lugar, identificamos cada uno de los “actores” del sistema. La planta se constituye por el conjunto masa-muelle. A partir de la ecuación constitutiva de este tipo de circuitos mecánicos, sea la 2ª ley de Newton, se obtiene:

$$\sum f=ma \rightarrow m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -ky(t) + u(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace, resulta la función de transferencia que relaciona el desplazamiento vertical de la masa (salida) y la fuerza aplicada a modo de perturbación (entrada) en bucle abierto:

$$Y(s)[ms^2+k]=U(s) \rightarrow G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{ms^2+K}=\frac{1/m}{s^2+\frac{K}{m}}$$

En efecto, la planta $G(s)$, que representa la función de transferencia en lazo abierto sin controlador (al ser $H(s)=1$), es un sistema críticamente estable. Ciertamente, si nos fijamos en el denominador de dicha función de transferencia, falta el término en s , por lo que el amortiguamiento es nulo, $\xi=0$, y la respuesta ante la perturbación será una oscilación sostenida (ver después).



El controlador es el amortiguador, cuya entrada es el desplazamiento vertical de la masa $y(t)$ cambiado de signo, y la salida es una señal de control de oposición a la perturbación aplicada, $u_C(t)$, la cual debe ser lo más parecida a la perturbación (con signo cambiado) y así, poder contrarrestarla:

$$u_C(t) = b \frac{dy(t)}{dt} \rightarrow U_C(s) = bsY(s) \rightarrow C(s) = \frac{U_C(s)}{Y(s)} = bs$$

Teniendo en cuenta que la entrada patrón o referencia es $y_R(t)=0$ (no se desea un desplazamiento de la masa), el diagrama de bloques resultante, junto con las señales constituyentes del mismo, resulta el indicado en la página anterior. En efecto, la entrada de la planta es una señal de control del error, $e(t)=u(t)+u_C(t)$, siendo $u_C(t)<0$ para $t>0$. Como último paso, se propone la verificación y comparación de la función de transferencia en lazo cerrado del sistema, aplicando la 6ª regla del álgebra de Boole,

$$G_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} = \frac{\frac{1}{ms^2+K}}{1+\frac{1}{ms^2+K}bs} = \frac{1}{ms^2+bs+K}$$

con la función de transferencia extraída del sistema mecánico completo:

$$\sum f=ma \rightarrow m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -ky(t) - b \frac{dy(t)}{dt} + u(t) \rightarrow Y(s)[ms^2+bs+k]=U(s) \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2+bs+K}$$

resultando, lógicamente, análogas.

(ii) A partir de la función de transferencia en lazo cerrado, podemos extraer el factor de amortiguamiento del sistema, dependiente de cada uno de los elementos del sistema mecánico. Se obtiene:

$$G_{LC}(s) = \frac{1}{ms^2+bs+K} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{K}{m}} \rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ rad/s} \\ 2\xi\omega_n = \frac{b}{m} \rightarrow \xi = \frac{b}{2\sqrt{km}} \end{cases}$$

En efecto, el factor de amortiguamiento y el valor característico del amortiguador son proporcionales y, además, verifica la relación expuesta en (i) del escenario en lazo abierto: Oscilación sostenida si $b=0$. Nótese que ξ presenta una relación cuadrática inversa con k y m . Por ello, a medida que aumente b (tenga en cuenta que m y k son estáticas ya que constituyen la planta) dentro del rango $0 < b < 2\sqrt{km}$, se irá teniendo un sistema menos oscilatorio (y menos subamortiguado, $0 < \xi < 1$), siendo un sistema críticamente amortiguado ($\xi=1$) sin oscilaciones, cuando $b=2\sqrt{km}$ y sobreamortiguado si $b > 2\sqrt{km}$. Por todo ello, la inclusión del amortiguador mitiga o elimina las oscilaciones sostenidas que presentaría el sistema masa-muelle. Tenga en cuenta que el valor en régimen permanente de $y(t)$ es 0 (valor referencia). Por ello, la rapidez con la que la salida llegue a dicho valor y la masa deje de moverse verticalmente, dependerá de la selección del amortiguador (valor de b).

(iii) El error de control de posición del sistema en lazo cerrado, resulta:

$$E(s) = -U(s) \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)} \rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(-s \frac{1}{s} \frac{\frac{1}{ms^2+K}}{1+\frac{bs}{ms^2+K}} \right) = -\frac{1}{K}$$

Sin embargo, este error tan solo es extrapolable para el caso en que se tenga amortiguador, por tanto, el sistema no sea críticamente estable y, matemáticamente, la parte real de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado sean estrictamente negativos. En caso contrario (error verdadero del sistema en lazo abierto), no se puede aplicar el teorema del valor final ya que se tiene una respuesta oscilatoria, no se llega a un régimen estacionario y, por tanto, se tiene un error variable con el tiempo.

Ejercicio 2

(i) A partir del esbozo del LDR del enunciado y considerando la estructura típica de un bucle de control, podemos extraer la función de transferencia en lazo abierto del sistema como:

$$G(s)H(s) = \frac{K_{LA}}{s(s+4)(s+6)}$$

En efecto, no es posible extraer la ganancia del producto de $G(s)$ y $H(s)$, K_{LA} , utilizando tan solo el LDR. Dicho valor se estimará en el apartado (ii).

Considerando $E(s)$ como salida y $R(s)$ como entrada (valor patrón), no se tienen bloques en la trayectoria que comprende ambos bloques. Por tanto en el numerador de la función de transferencia $E(s)/R(s)$ se tiene un 1. Por otro lado, en el denominador resulta “1 + la función de transferencia en lazo abierto (ya conocida a partir del LDR)”. Por tanto, el error de control de posición (siendo una entrada escalón) se puede hallar como:

$$E(s)=R(s) \frac{1}{1+G(s)H(s)} \rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{K_{LA}}{s(s+4)(s+6)}} \right) = 0$$

Ciertamente, es posible controlar el sistema propuesto utilizando un control proporcional haciendo que tenga un error nulo frente a una entrada escalón ya que el sistema es tipo I: La función de transferencia en lazo abierto contiene un polo en el origen.

(ii) La determinación del punto de corte con el eje imaginario asociado al valor de ganancia del controlador $K_C=240$, además de la ganancia de la planta K_G sabiendo que $H(s)=1$, se llevará a cabo utilizando el paso 5 del bosquejo del LDR. Partimos del polinomio característico:

$$1+K_C \frac{K_G}{s(s+4)(s+6)} = \frac{s(s+4)(s+6)+K_C K_G}{s(s+4)(s+6)} = \frac{s^3+10s^2+24s+K_C K_G}{s(s+4)(s+6)}$$

Tenga en cuenta que la ganancia del controlador y de la planta es diferente. Además, K_{LA} (producto de K_G y K_H) se ha convertido en K_G debido a que $K_H=1$. Utilizando el numerador del cociente de polinomios en s , se construye la tabla de Routh-Hurwitz:

s^3	1	24
s^2	10	$K_C K_G$
s	$24-(K_C K_G/10)$	
s^0	$K_C K_G$	

Si nos fijamos en la fila de s , su único valor debe ser 0 (polos imaginarios puros asociados a una fila de ceros) cuando $K_C=240$. A partir de dicha consideración, se puede obtener la ganancia de la planta:

$$24 - \frac{K_C K_G}{10} = 0 \rightarrow K_G = 1, \quad K_C = 240$$

Finalmente, construimos el polinomio característico utilizando la fila de s^2 y los valores de las ganancias de la planta y el controlador obtenidos previamente, resultando las raíces sobre el eje $j\omega$:

$$P(s)=10s^2+240=0 \rightarrow s=j\sqrt{24}=\pm 4,89j$$

(iii) Con el objetivo de cumplir los requerimientos de diseño, implementamos un compensador de adelanto/retardo, determinando sus variables características y/o simplificándolo/ampliándolo (familia de los PID) en caso de que sea necesario. Por tanto, el polinomio característico en lazo cerrado del sistema, es:

$$1+K_C \frac{(s+z)}{(s+p)} \frac{1}{s(s+4)(s+6)} = \frac{s^4+(10+p)s^3+(24+10p)s^2+(24p+K_C)s+K_C z}{s^4+(10+p)s^3+(24+10p)s^2+24ps}$$

El numerador de dicho polinomio característico (que será el denominador de la función de transferencia en lazo cerrado), se debe comparar con aquel polinomio cuyas raíces sean $s=-3,613 \pm 6,193j$:

$$(s+3,613-6,193j)(s+3,613+6,193j) = s^2-7,23s+51,41$$

En este punto, el polo del compensador debe estar alejado lo suficiente de las raíces solicitadas utilizando la aproximación por polos dominantes (muy alejados del origen): $p=36$ (aproximadamente, 10 veces más que la parte real de los polos en lazo cerrado). De esta forma, la rama que “circulará a través de la asíntota de 180° ”, tendrá como valor mínimo de polo, $s=-36$.

Finalmente, de las condiciones de ángulo

$$\arg \left[K_C \frac{(s+z)}{(s+36)} \frac{1}{s(s+4)(s+6)} \right] = \pm 180^\circ(2k+1), \quad k=0,1,2\dots$$

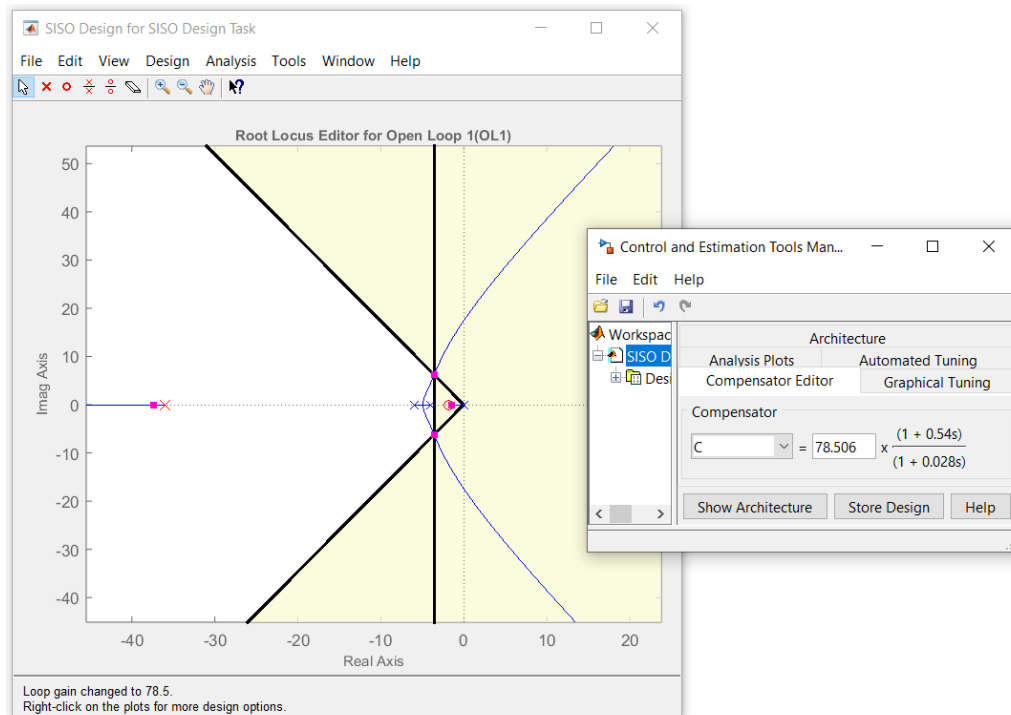
y magnitud del bosquejo del LDR,

$$\left| \frac{(s+z)}{(s+36)} \frac{1}{s(s+4)(s+6)} \right| = \frac{1}{K_C}$$

sustituyendo $s = -3,613 \pm 6,193j$, podemos extraer el valor del cero y la ganancia del controlador, resultando: $z = 1,86$ y $K_C = 1519$. Por tanto, el controlador sería:

$$C(s) = 1519 \frac{(s+1,86)}{(s+36)}$$

Se comprueba en MATLAB:



El resultado *arroja* un cero muy cercano al origen para “subir” las asíntotas de 60° y 300° , que parten entre el segmento del LDR que comprende -4 y -6, haciéndolo pasar por los polos solicitados. Tenga en cuenta que el valor de ganancia sale muy elevado debido a la situación de las componentes seleccionadas en el diseño del controlador.

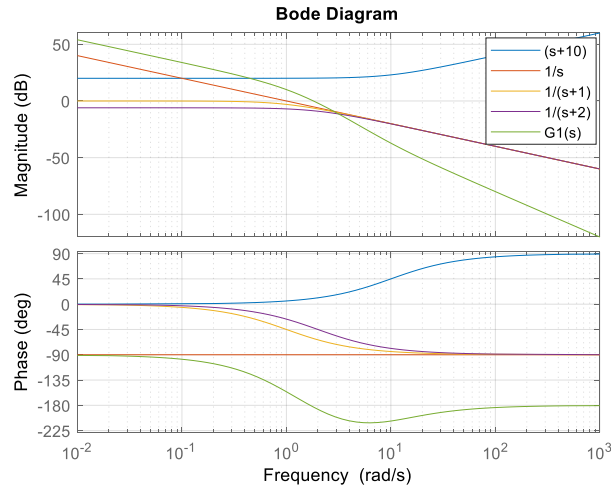
Ejercicio 3

Tal y como se puede visualizar en los diagramas de Bode propuestos, en módulo, todas las funciones de transferencia trazan el mismo espectro. Sin embargo, en fase cambian, debido al efecto del polo o cero, situado en el semiplano positivo del eje real.

Estudiemos el diagrama de Bode de fase de:

$$G_1(s) = \frac{s+10}{s(s+1)(s+2)}$$

que contiene cuatro componentes: un cero en $s = -10$ y tres polos localizados en $s = 0$, -1 y -2. Trazando, individualmente, cada una de los componentes y realizando la suma de las mismas, resulta la siguiente figura adjunta:



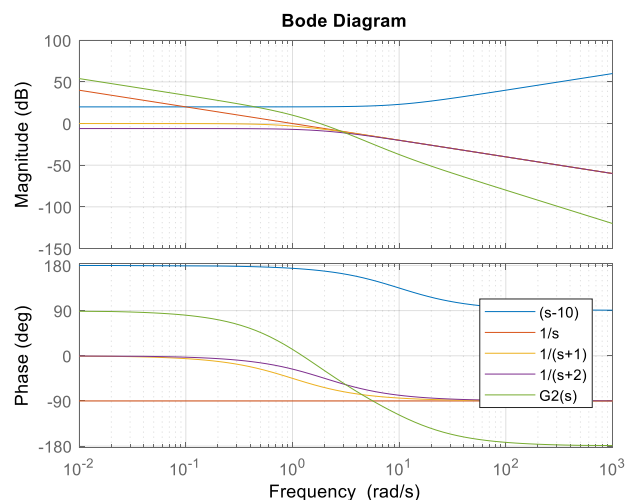
En efecto, el diagrama de Bode de fase comienza en -90° (efecto del polo en el origen). A partir de $\omega=0,1$ rad/s (una década antes de 1 rad/s), la respuesta en frecuencia comienza a bajar con una tendencia de $-45^\circ/\text{década}$, incrementándose aún más, poco después (a 0,2 rad/s debido al polo situado en $s=-2$: $-90^\circ/\text{década}$). Sin embargo, a frecuencias próximas a $\omega=1$ rad/s (una década antes del polo en $s=-10$), vuelve al origen de bajada ($-45^\circ/\text{década}$), produciéndose un cambio de tendencia (subida de $45^\circ/\text{década}$) a partir de 20 rad/s, cuando el efecto de los polos en $s=-1$ y -2 remite y el cero en $s=-10$ gobierna la respuesta en frecuencia. Su efecto “dura” hasta $\omega=100$ rad/s, cuando la subida de $45^\circ/\text{década}$ finaliza y el diagrama de Bode de fase se mantiene constante en -180° . Por tanto, $G_1(s)$ se relaciona con el diagrama de Bode de la figura central.

A continuación, estudiamos la respuesta de fase en frecuencia de la función de transferencia:

$$G_2(s) = \frac{s-10}{s(s+1)(s+2)}$$

donde se tienen las mismas componentes que en el caso anterior, con la salvedad de que el cero ha cambiado de signo. Ahora se encuentra localizado en $s=10$. En módulo, este cambio no tiene ningún efecto, pues al realizar el módulo de dicho componente, se obvia el signo de la parte real de $j\omega \pm 10$ (siendo $s=j\omega$). Sin embargo, esto en fase no sucede. Por ello, vamos a estudiar, individualmente, esta componente, sustituyendo $s=j\omega$ (frecuencias físicas):

$$\arg[j\omega-10] \approx \begin{cases} \arg[-10]=180^\circ & \omega \ll 10 \text{ rad/s} \\ \arg[j\omega]=90^\circ & \omega \gg 10 \text{ rad/s} \end{cases}$$



En efecto, el cero de $G_2(s)$ no se visualiza entre 0° y 90° , sino que, a bajas frecuencias, ahora se ha “desplazado” $+180^\circ$, debido al cambio de signo del cero. Ahora el cero, ¡actúa como un polo con una

bajada de $-45^\circ/\text{década}$ entre $\omega=1$ y 100 rad/s ! Por ello, todas las componentes de $G_2(s)$ aportan decrementos de fase a la función de transferencia total, siendo el rango de fases barrido para toda frecuencia, superior a $G_1(s)$. Ahora, “va” de 90° a -180° (270° en lugar de, aproximadamente, 135° en $G_1(s)$).

Por ello, la función de transferencia $G_2(s)$ se relaciona con el diagrama de Bode izquierdo.

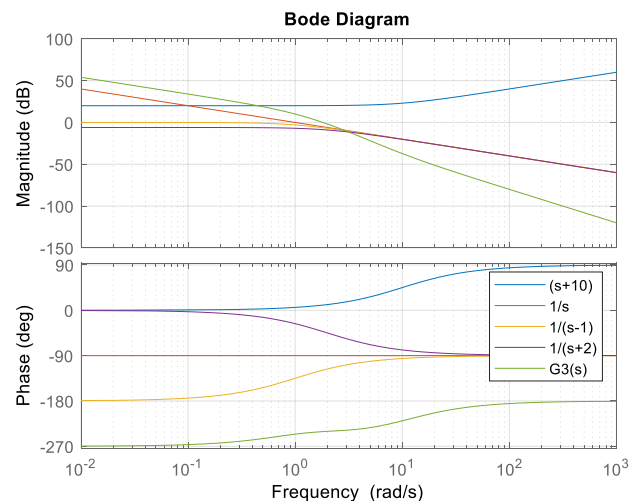
Finalmente, estudiamos la función de transferencia $G_3(s)$, sabiendo que su diagrama de Bode es el situado a la derecha:

$$G_3(s) = \frac{s+10}{s(s-1)(s+2)}$$

Tomando como referencia $G_1(s)$, $G_3(s)$ contempla las mismas componentes, salvo el cambio de signo de uno de los polos, pasando a ser $s=1$, en lugar de $s=-1$. En efecto, ahora tenemos un sistema inestable. Como en $G_2(s)$, analizamos individualmente dicha componente:

$$-\arg[j\omega-1] \approx \begin{cases} -\arg[-1] = -180^\circ & \omega \ll 1 \text{ rad/s} \\ -\arg[j\omega] = -90^\circ & \omega \gg 1 \text{ rad/s} \end{cases}$$

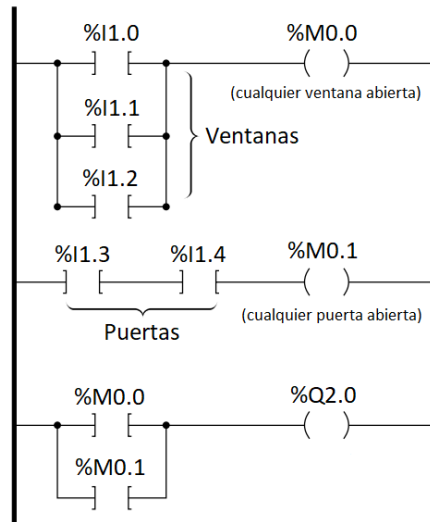
Tenga en cuenta que el signo del argumento ahora es negativo debido a que se estudia el efecto de un polo (denominador de la función de transferencia). Como pasaba en $G_2(s)$ pero inversamente en comportamiento frecuencial, ahora el polo “inestable” se asimila a un cero, marcando una tendencia de $+45^\circ/\text{década}$ entre una década previa y posterior a $\omega=1 \text{ rad/s}$. A frecuencias suficientemente bajas, la fase ahora es -270° (-90° del polo en el origen -180° de la contribución de polo inestable previamente analizado). Teniendo esto en cuenta, trazamos cada una de los componentes y sumamos, para toda frecuencia, resultando:



Ahora el diagrama de Bode de fase, ¡sube y no baja, teniendo más polos que ceros!. Al cambiar de signo la tendencia del polo situado en torno a $\omega=1 \text{ rad/s}$, las subidas priman sobre las bajas (1 cero + 1 polo “reconvertido” vs. 1 polo) a frecuencias muy negativas por lo reflejado anteriormente. Recuerda que el polo en el origen, $s=0$, exhibe una tendencia constante para toda frecuencia.

Ejercicio 4

(i) En primer lugar, direccionamos las ventanas con los números de canales 0, 1 y 2, respectivamente, de las entradas digitales del controlador del módulo 1. De igual forma, asignamos los direccionamientos %I1.3 e %I1.4 a las puertas. Si una o más ventanas están abiertas (conexión en paralelo a modo de lógica booleana OR), se activará la marca %M0.0. Análogamente, %M0.1 se activará cuando %I1.3 e %I1.4 se encuentran simultáneamente a 1 (lógica booleana AND). Por tanto, la salida %Q2.0, asociada a la lámpara, se activará cuando algunas de las marcas auxiliares estén activadas. Nótese que la utilización de las marcas auxiliares no es necesaria para la resolución del ejercicio.



(ii) La ejecución del programa solicitado se puede implementar en dos instrucciones. La primera se apoya en el escenario de que, si el sensor solar detecta que el sol está brillando, el termostato solar está encendido (temperatura de 20 a 25 °C) y, lógicamente, si el termostato de respaldo está apagado, se activa el calentador solar. Por otro lado, el calentador de respaldo se encenderá con la condición suficiente de que el termostato lo indique (gobierna por sí solo el horno de apoyo) a temperaturas dentro del rango de 15 a 20 °C.

