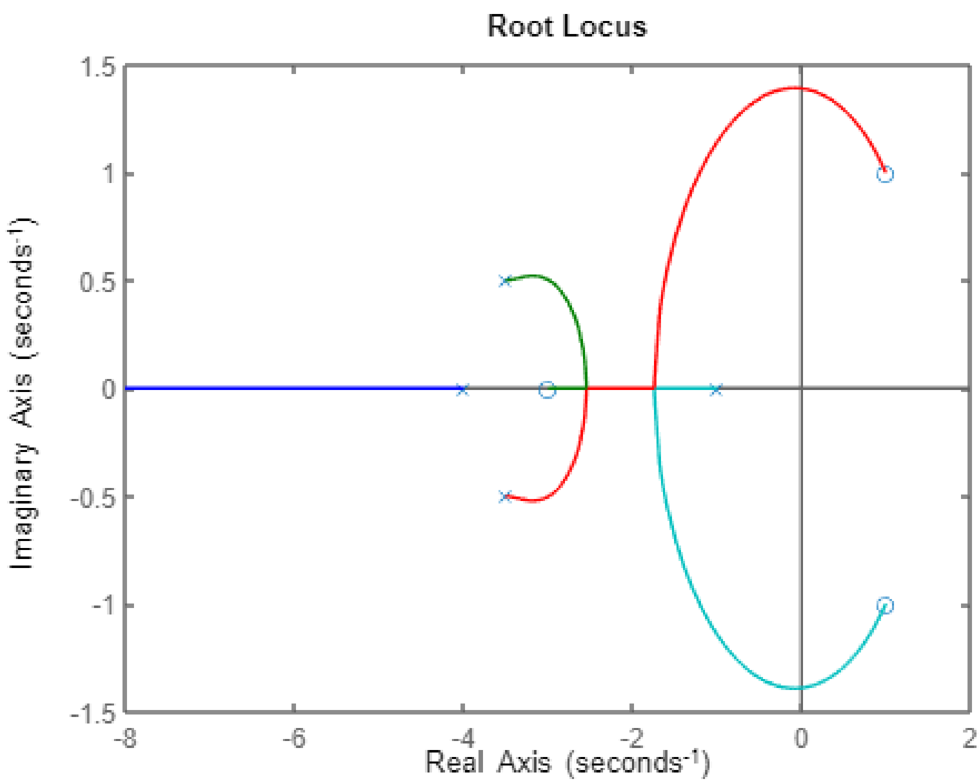
Ejercicio 1 (3 puntos). Dado el sistema

$$G = \frac{(s+3)(s^2-2s+2)}{(s+1)(s+4)(s^2+7s+12.5)}$$

Dibujar con detalle (a mano) el lugar de las raíces indicando puntos de dispersión y confluencia, cortes con el eje imaginario, ángulos de salida y ángulos de llegada.

```
close all
clear
G=tf(conv([1 3],[1 -2 2]),conv(conv([1 1],[1 4]),[1 7 12.5]));
rlocus(G);
```



Puntos de corte 3
puntos de dispersión y confluencia 3
ángulos de entrada y salida 3
Resto del diagrama 1

-Numero de ramas:el sistema tiene 4 ramas, que corresponden al número de polos.

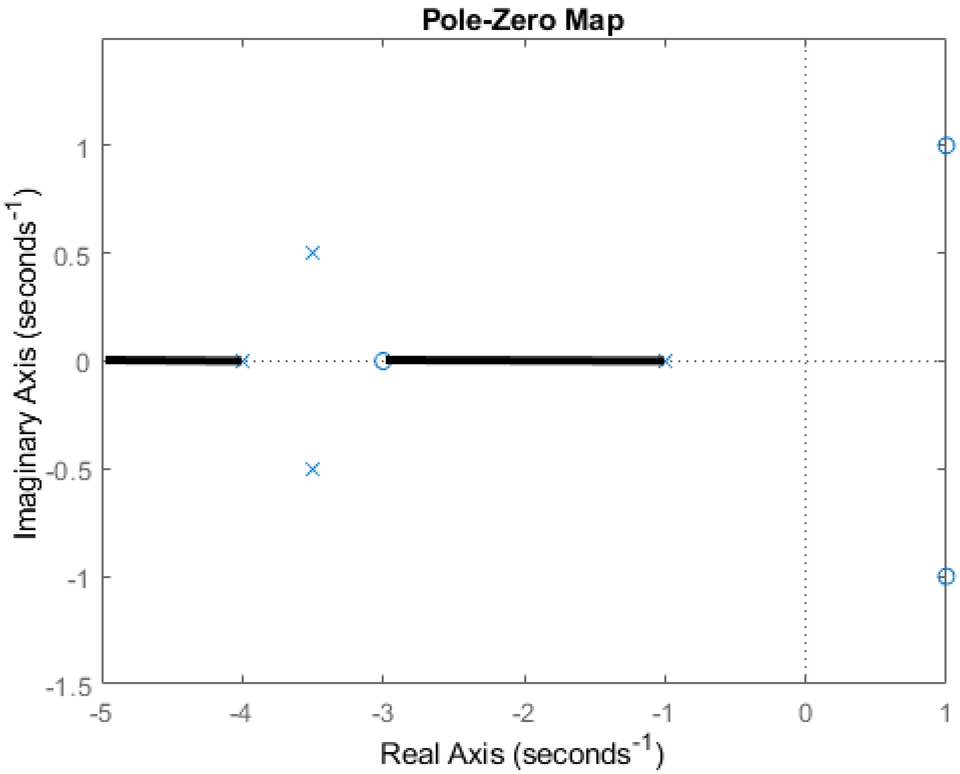
-Puntos de inicio: Lo polos del sistema, ubicados en

$[-1, -3 \pm 0.5j, -4]$

-Puntos Finales: tenemos tres puntos de final ubicados en los ceros del sistema

$[1 \pm 1j, -3]$

Existencia sobre el eje real



Desde el polo en -1 hasta el cero en -3 y desde el polo en -4 hacia menos infinito

-Numero de asintotas= $N_p - N_z = 1$

-Angulo de la asintota= $\frac{(2q+1)\pi}{n_p - n_z}$ para q=1 el angulo es 180

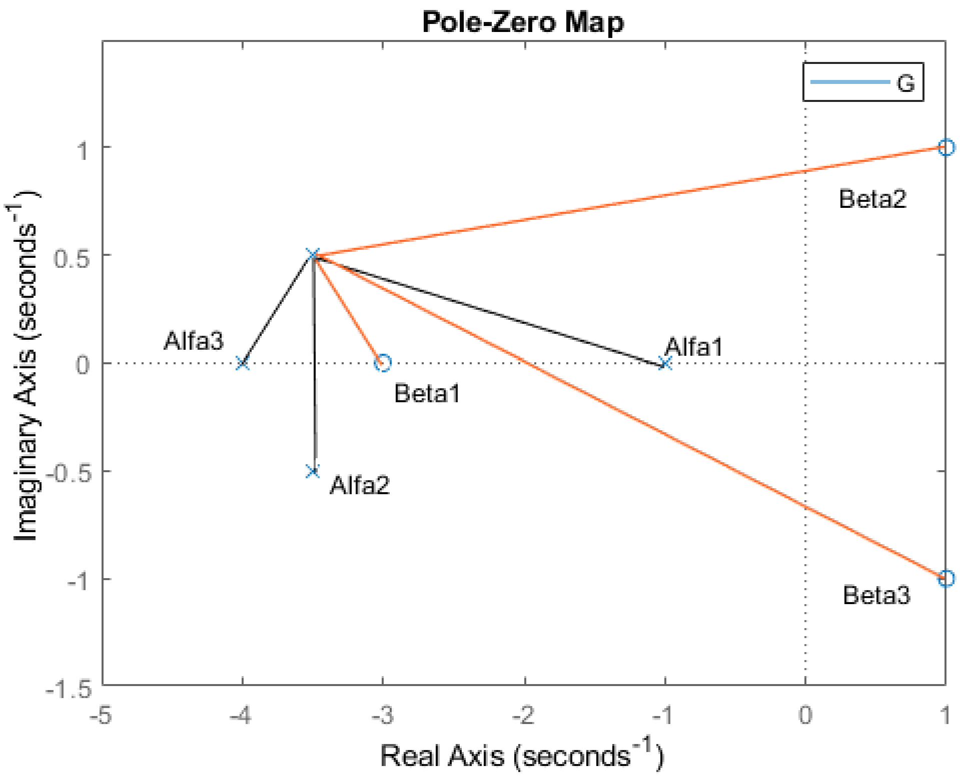
-Centroide: Al ser un sistema con asintota unica, no es necesario encontrarlo

AngSalida:

$$\sum (ang(s - p_i)) - \sum (ang(s - z_i)) = 180$$

Nos interesan los angulos de salidad de los polos complejos conjugados, los angulos de los polos reales se abarcan al encontrar la existencia del locus sobre el eje real

y como el diagrama es simetrico, basta con encontrar uno de los dos casos



Forma Manual

```
alfa1=pi-atan(0.5/(3.5-1));
alfa1*180/pi
```

```
ans = 168.6901
```

```
alfa2=pi/2;
alfa2*180/pi
```

```
ans = 90
```

```
alfa3=atan(0.5/(4-3.5));
alfa3*180/pi
```

```
ans = 45
```

```
beta1=pi+atan(0.5/4.5);
beta1*180/pi
```

```
ans = 186.3402
```

```
beta2=pi-atan(1.5/4.5);
beta2*180/pi
```

```
ans = 161.5651
```

```
beta3=3*pi/4;
beta3*180/pi
```

```
ans = 135
```

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 180$

$\alpha_4 = 180 - 168.7 - 90 - 45 + 186.34 + 161 + 135 = 360.2(2^o)$

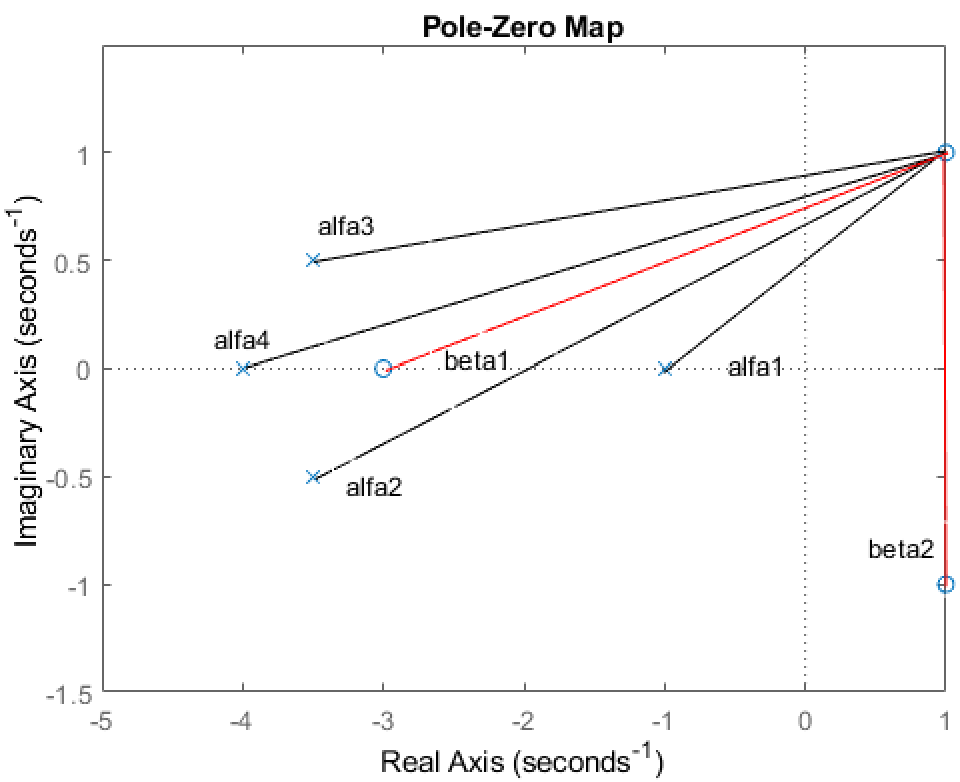
usando matlab podemos evaluar el angulo evaluando el angulo del fasor del sistema en el punto de interes

```
angle(evalfr(G,-3.5001+0.5j))*180/pi
```

```
ans = -0.7908
```

Angulos de llegada.

Usamos el mismo principio



Forma Manual

```
alfa1=atan(1/(2));
alfa1*180/pi
```

```
ans = 26.5651
```

```
alfa2=atan(1.5/(4.5));
alfa2*180/pi
```

```
ans = 18.4349
```

```
alfa3=atan(0.5/(4.5));
alfa3*180/pi
```

```
ans = 6.3402
```

```
alfa4=atan(1/(5));
alfa4*180/pi
```

```
ans = 11.3099
```

```
beta1=atan(1/4);
beta1*180/pi
```

```
ans = 14.0362
```

```
beta2=pi/2;
beta2*180/pi
```

```
ans = 90
```

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 = 180$

$\beta_3 = -(180 - 26.56 - 18.43 - 6.3 - 11.3 + 14 + 90) = -221(139^o)$

usando matlab podemos evaluar el angulo evaluando el angulo del fasor del sistema en el punto de interes

```
angle(evalfr(G,0.9991-1j))*180/pi
```

```
ans = 138.6021
```

Puntos de dispersión y confluencia

$$\frac{\delta K}{\delta s} = \frac{\delta}{\delta s}\frac{\prod_i (s-p_i)}{\prod_i (s-z_i)} = 0$$

$$\frac{\delta K}{\delta s} = \frac{\delta}{\delta s}\frac{(s+1)(s+4)(s^2+7s+12.5)}{(s+3)(s^2-2s+2)}=0$$

$$\frac{\delta K}{\delta s} = \frac{\delta}{\delta s}\frac{s^4+12s^3+51.5s^2+90.5s+50}{s^3+s^2-4s+6} = 0$$

$$\frac{\delta K}{\delta s} = \frac{s^6+2s^5-51.5s^4-253s^3-230.5s^2+518s+743}{(s+3)(s^2-2s+2)} = 0$$

Entonces igualo el numerador a cero el cual tiene raices en

```
roots([1 2 -51.4 -253 -230 518 743])
```

```
ans = 6×1 complex
   8.2412 + 0.0000i
   1.4647 + 0.0000i
  -3.7585 + 0.4995i
  -3.7585 - 0.4995i
  -2.4185 + 0.0000i
  -1.7703 + 0.0000i
```

Tomo las dos raices reales negativas como los puntos de interes uso el criterio del modulo para encontrar el valor de K en esas dos raices

$$K = \frac{\prod_i |s - p_i|}{\prod_i |s - z_i|} |\_2.41, -1.77$$

$$K = \frac{(-2.41 + 1)(-2.41 + 4)(-2.41^2 + 7(-2.41) + 12.5)}{(-2.41 + 3)(-2.41^2 - 2(-2.41) + 2)}$$=0.42

$$K = \frac{(-1.7 + 1)(-1.7 + 4)(-1.7^2 + 7(-1.7) + 12.5)}{(-1.7 + 3)(-1.7^2 - 2(-1.7) + 2)}$$=0.52

Usando matlab

```
real(evalfr(1/G,-2.54))
```

```
ans = -0.4232
```

```
real(evalfr(1/G,-1.77))
```

```
ans = -0.5220
```

Opcion 2, por tanteo encontrando k maximos sobre el eje real para el punto de dispersion y minimos de k para el punto de confluencia

```
real(evalfr(1/G,-2.5))
```

```
ans = -0.4245
```

```
real(evalfr(1/G,-2.6))
```

```
ans = -0.4252
```

```
real(evalfr(1/G,-2.55))
```

```
ans = -0.4232
```

```
real(evalfr(1/G,-2.53))
```

```
ans = -0.4234
```

```
real(evalfr(1/G,-2.54))
```

```
ans = -0.4232
```

```
real(evalfr(1/G,-2.545))
```

```
ans = -0.4232
```

Tenemos el minimo para S=-2.54 que corresponde a un K=-0.4232 para un punto de dispesión

```
real(evalfr(1/G,-1.6))
```

```
ans = -0.5116
```

```
real(evalfr(1/G,-1.8))
```

```
ans = -0.5210
```

```
real(evalfr(1/G,-1.7))
```

```
ans = -0.5214
```

```
real(evalfr(1/G,-1.74))
```

```
ans = -0.5223
```

```
real(evalfr(1/G,-1.75))
```

```
ans = -0.5223
```

```
real(evalfr(1/G,-1.76))
```

```
ans = -0.5222
```

Con máximo en -1.75 que corresponde a un K=0.5223

Una opción es hacer un loop en matlab para realizar dicha evaluación de forma mas eficiente

Ahora procedemos a encotrar los cortes con el eje imaginario a traves de routh hurwitz.

Para ello encontramosel polinimio caracteristico de lazo cerrado del sistema cuando el sistema se multiplica por una ganancia K

$$\frac{KG}{1+GK}$$

entoces su denominador será

$$EcC = K * (s+3)(s^2-2s+2) + (s+1)(s+4)(s^2+7s+12.5)$$

$$EcC = s^4 + s^3(K+12) + s^2(K+51.5) + s(90.5-4K) + (50.5+6K)$$

Construimos la table de routh y llevamos una de las filas a ceros para evaluae el corte con el eje imaginario

$$\begin{bmatrix} s^4 & 1 & k+51.5 & 50.5+6k \\ s^3 & k+12 & 90.5-4k & 0 \\ s^2 & b & 50.5+6k & \\ s & & & \end{bmatrix}$$

En la primera FIla si K=-12 el segundo termino es diferente de cero

Debo continuar

$$b = \frac{(k+12)(k+51.5)-(90.5-4k))}{k+12} = \frac{k^2+67k+527.5}{k+12}$$

Si evaluamos K en 50.5/6=8.41 para formar una fila de ceros en esta linea vemos que no es posible

por lo tanto seguimos construyendo la tabla

$$\begin{bmatrix} s^4 & 1 & k+51.5 & 50.5+6k \\ s^3 & k+12 & 90.5-4k & 0 \\ s^2 & b & 50.5+6k & 0 \\ s & C & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = b*(50.5-4k)-(k+12)(50.5+6k) = \frac{-10k^3-371.5k^2+1877k+40467}{k+12}$$

Las raices del polinomio son

```
roots([-10 -371.5 1877 40467])
```

```
ans = 3×1
  -39.3061
   11.2817
   -9.1257
```

Tomo k>0 entonces K=11.28

Contruyo el polinomio auxiliar en k=11.28

$$b = \frac{k^2+67k+527.5}{k+12} = \frac{11.28^2+67*11.28+527.5}{11.28+12}$$=60.58

50.5+6*11.28=118.18

El polinomio auxiliar es

$$60.58s^2+118.18=0$$

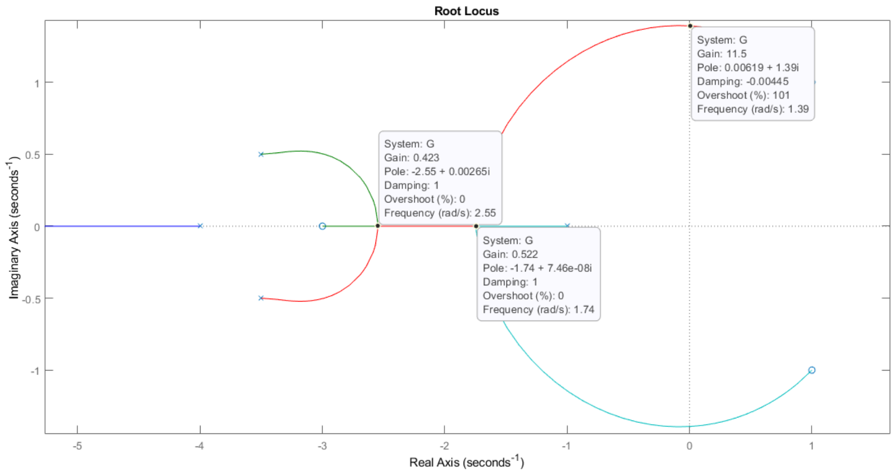
cuyas raices son

```
roots([60.58 0 118.18])
```

```
ans = 2×1 complex
   0.0000 + 1.3967i
   0.0000 - 1.3967i
```

Obteniendo así el punto de corte

Comparamos con matlab




```
%rlocus(G) %seleccionamos los puntos de interes
```

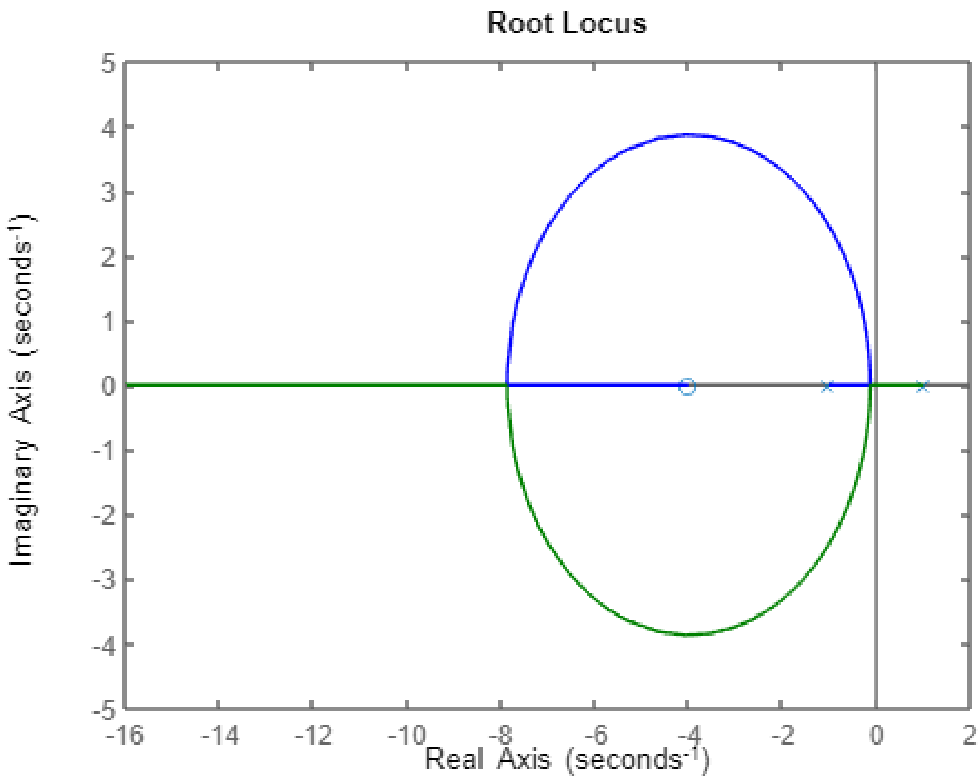
Ejercicio 2 (4 puntos). Dado el sistema definido como

$$G = \frac{s+4}{(s+1)(s-1)}$$

a) Dibujar el Lugar de las raíces del sistema y analizar el mismo.

```
figure;
G=tf([1 4],conv([1 1],[1 -1]));
rlocus(G);
```

Apendice a 0.5
Apendice b 1 solución usando matlab
                 3 calculos manuales
apendice c 0.5
apendice d 2
apendice e 3



Se observa en el sistema que cuando K sea cero, esl sistema tendrá un comportamiento inestable debido al polo en 1. A medida que K crece el sistema alcanzará estabilidad con un comportamiento sobreamortiguado y posteriormente tendrá un comportamiento sub amortiguado, ya que los polos tendrán parte imaginaria diferente 0, este comportamiento finaliza en el punto de confluencia cerca a -8 donde el sistema para a tener un comportamiento criticamente amortiguado y a partir de ese punto para k mayores el comportamiento será sobreamortiguado.

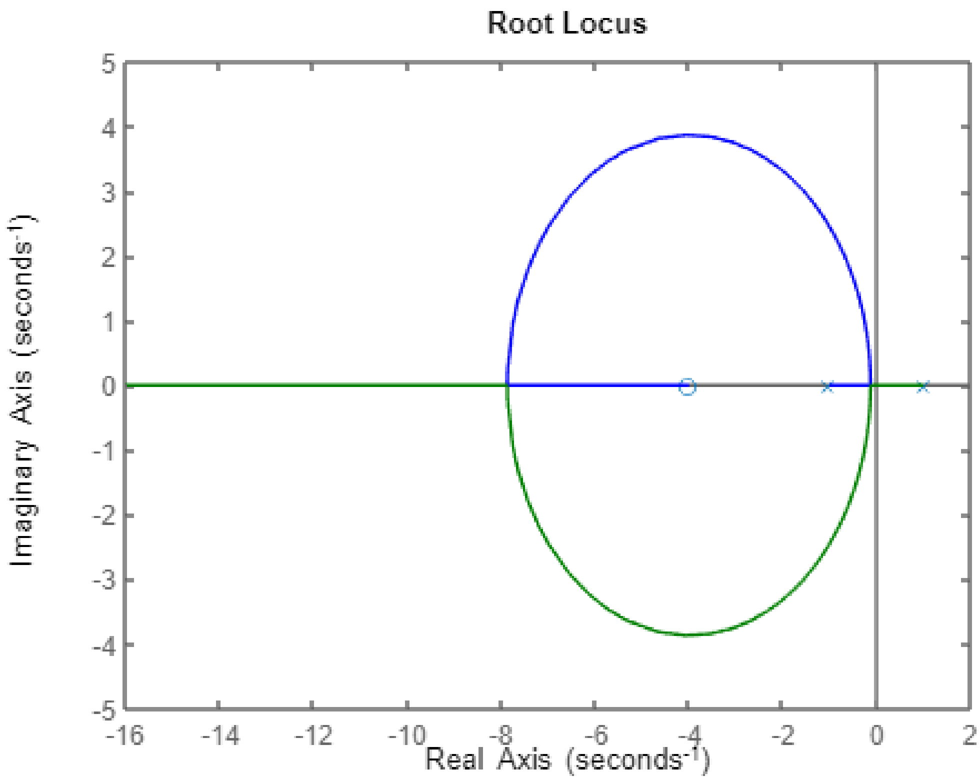
b) Encontrar utilizando Matlab las ganancias del sistema que generan un comportamiento

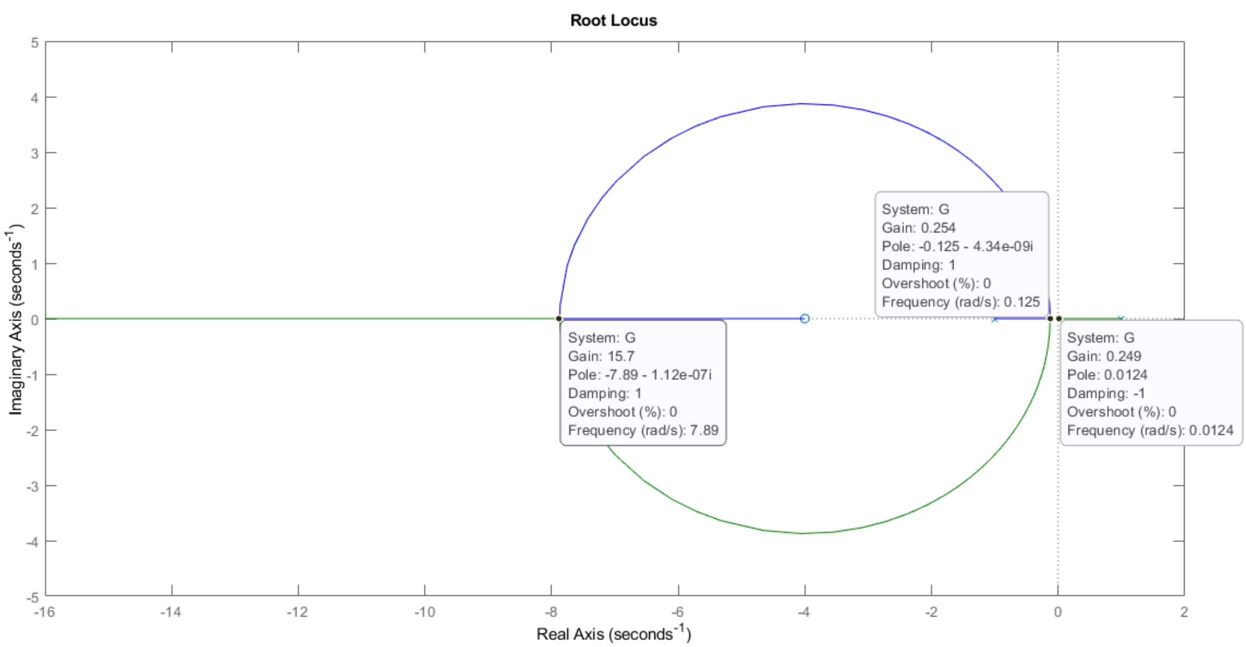
a. Inestable
b. Marginalmente estable
c. Sub-Amortiguado
d. Críticamente amortiguado
e. Para ello deberá usar Matlab usando rlocus, rlocfind y otros comandos si lo considera necesario. Estos valores se deben corroborar numéricamente con cálculos manuales que serán entregados.

Graficamente podemos generar un locus y dar click en los puntos de interes.

Usando rlocfind podemos dar click y obtener la ubicación de polos y ceros en cada punto de ganancia.

```
rlocus(G)
```





A partir de la información de la grafica

Inestable K<0.249

criticamente estable k=0.249

sobre amortiguado 0.249<k<0.254   k>15.7

criticamente amortiguado K=0.254 y K=15.7

subamrotiguado 0.254<K<15.7

Para encontrar los puntos matematicamente.

corte con el eje imaginario. Usamos el criterio del modulo y evaluamos K en s=0

$$K = \frac{\prod |s-p_i|}{\prod |s-p_i} |_{s=0}$$

$$K = \frac{|0^2-1|}{|0+4|} = 0.25$$

Los siguiente puntos de interes son los de dispersión y confluencia

$$\frac{\delta K}{\delta s} = \frac{\delta}{\delta s}\frac{\prod_i (s-p_i)}{\prod_i (s-z_i)} = 0$$

$$\frac{\delta K}{\delta s} = \frac{\delta}{\delta s}\frac{s^2-1}{s+4} = \frac{(2s(s+4)-(s^2-1))}{(s+4)^2} = \frac{2s^2+8s-s^2+1}{(s+4)^2}$$

igualo el numerador a 0

$$s^2+8s+1=0$$

con raices en

```
roots([1 8 1])
```

```
ans = 2×1
   -7.8730
   -0.1270
```

Evaluo usando el criterio del modulo

$$K = \frac{\prod |s-p_i|}{\prod |s-z_i|} |_{s=-7.78, s=-0.127}$$

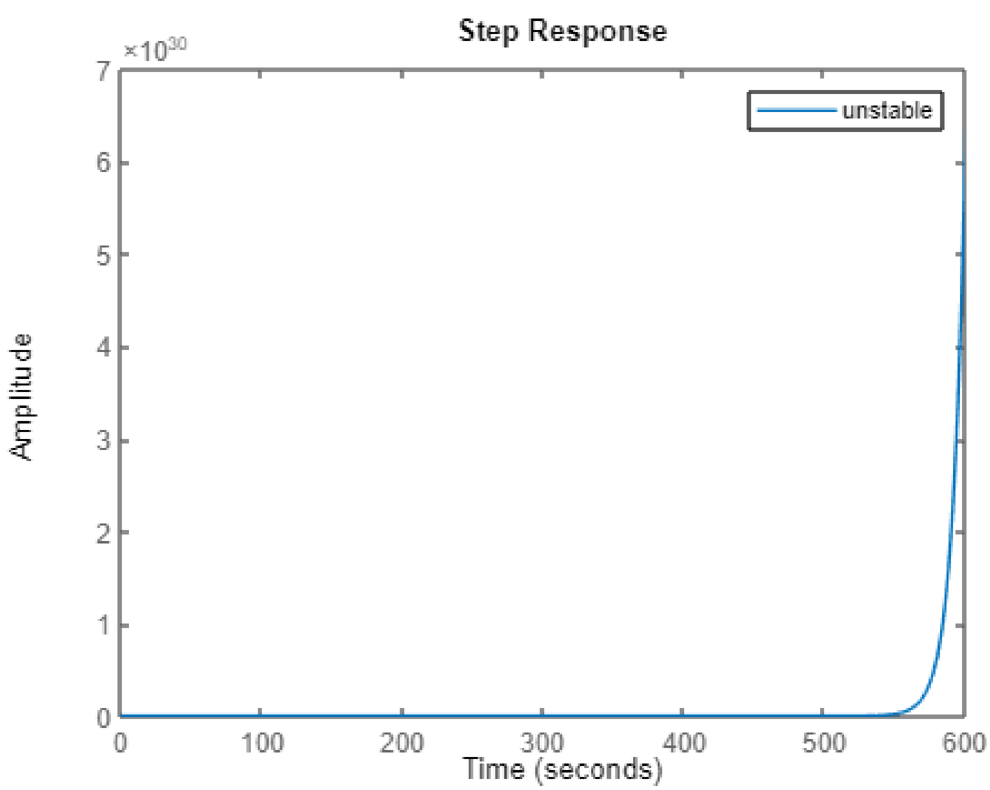
$$K = \frac{\prod |-7.87^2-1|}{\prod |-7.87+4} | = 15.74$$

$$K = \frac{\prod | -0.127^2 - 1|}{\prod | -0.127 + 4} | = 0.254$$

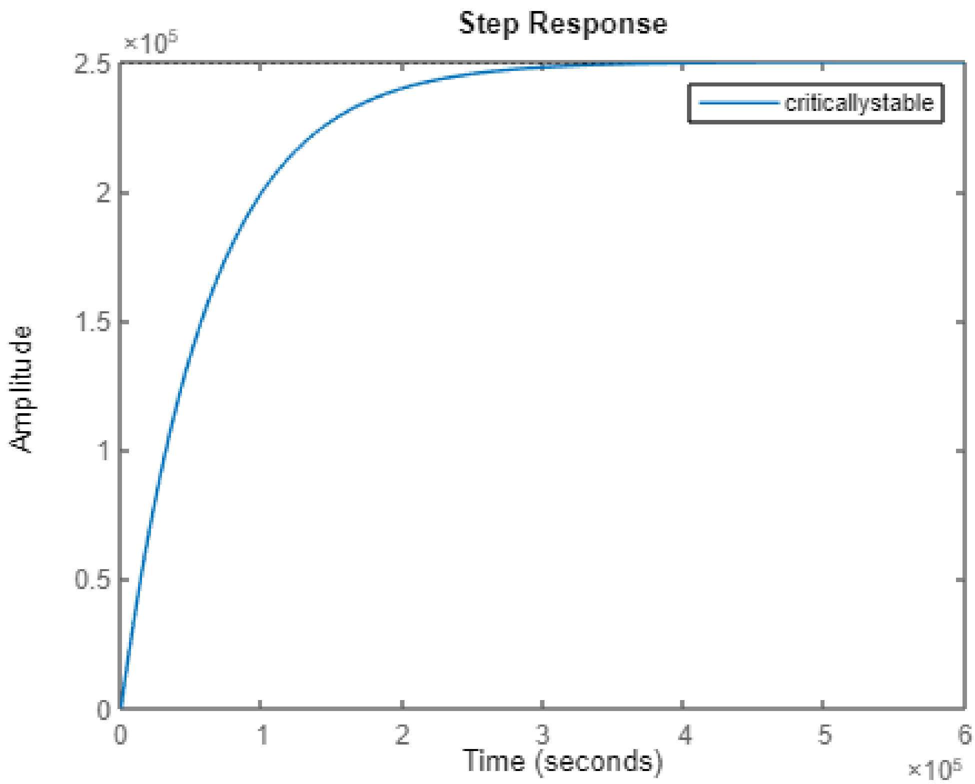
Obteniendo así los puntos de interes en coherencia con los resultados graficos.

c) En cada uno de los casos de estabilidad del apartado anterior, analizar la respuesta paso del sistema para un K dentro del rango de funcionamiento encontrado en el apartado b.

```
close all;
clear;
figure;
G=tf([1 4],conv([1 1],[1 -1]));
k=[0.24 0.250001 0.252 0.254 10 15.74 30];
step(feedback(k(1)*G,1));
legend('unstable')
```

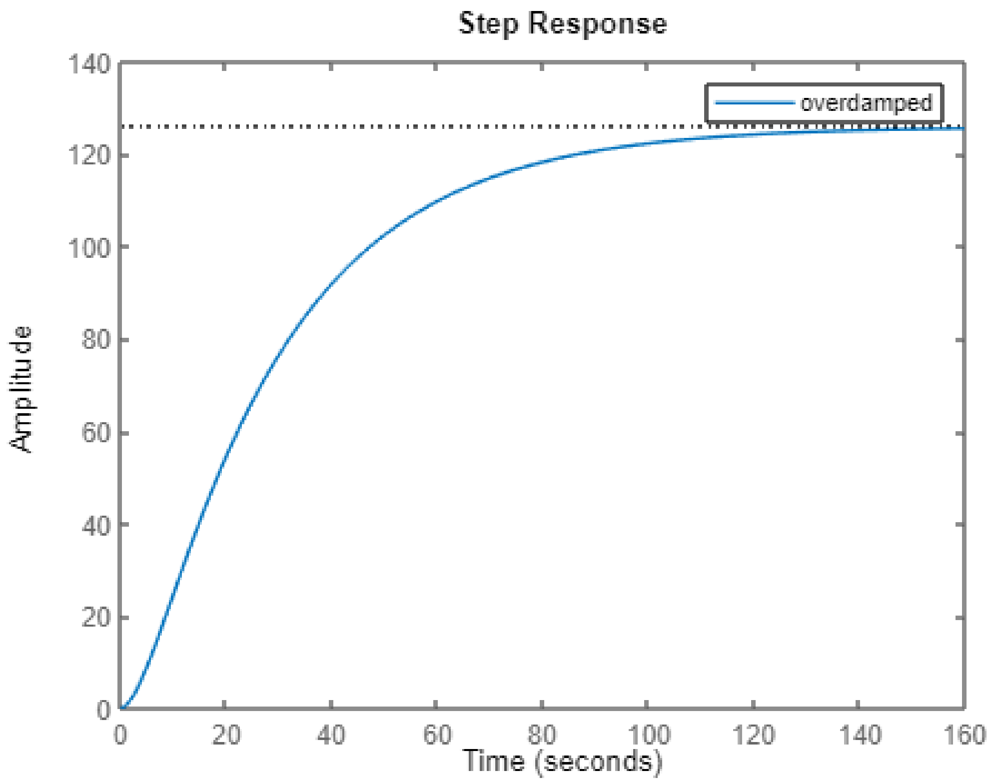



```
figure;
step(feedback(k(2)*G,1));
legend('criticallystable')
```



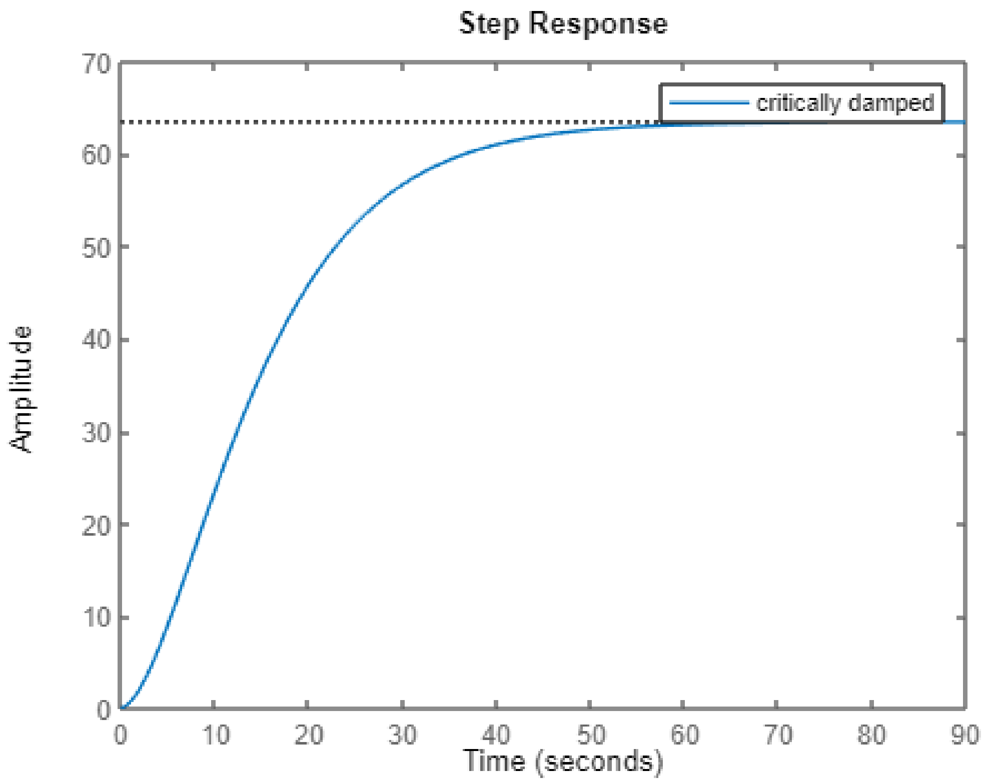
En esta se observa como la magnitud de salida esta levemente acotada si el valor de K es el critico se tiene una rampa

```
figure;

step(feedback(k(3)*G,1));
legend('overdamped')
```



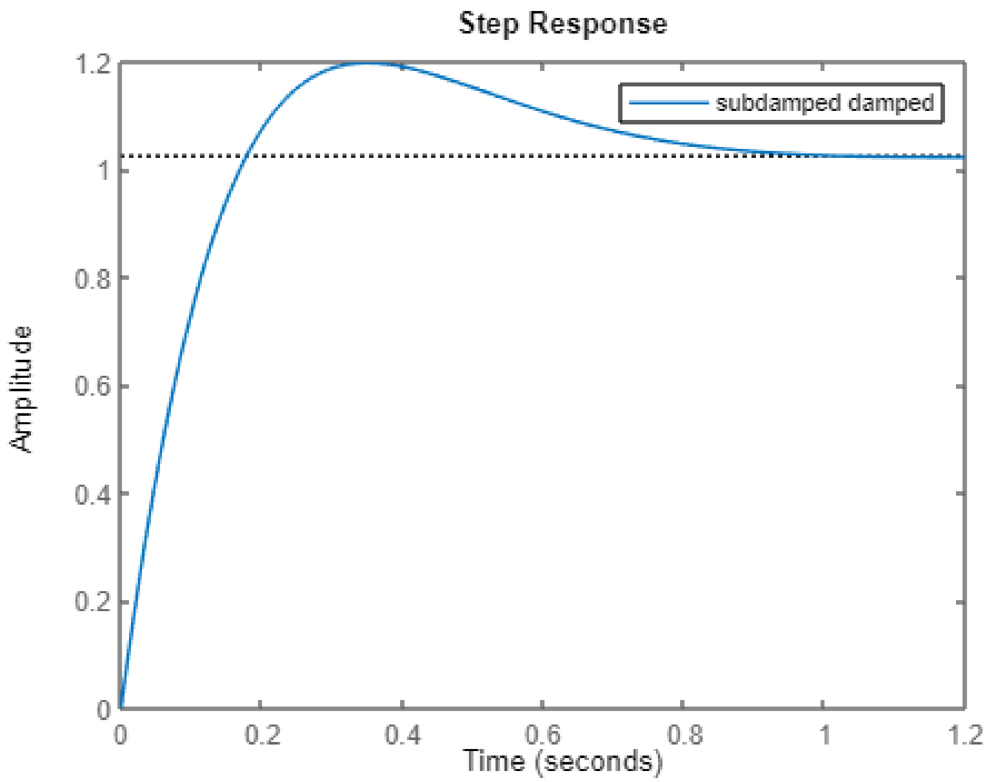
Salida acotada con tiempo de estabilización de 60s

```
figure;
step(feedback(k(4)*G,1));
legend('critically damped')
```

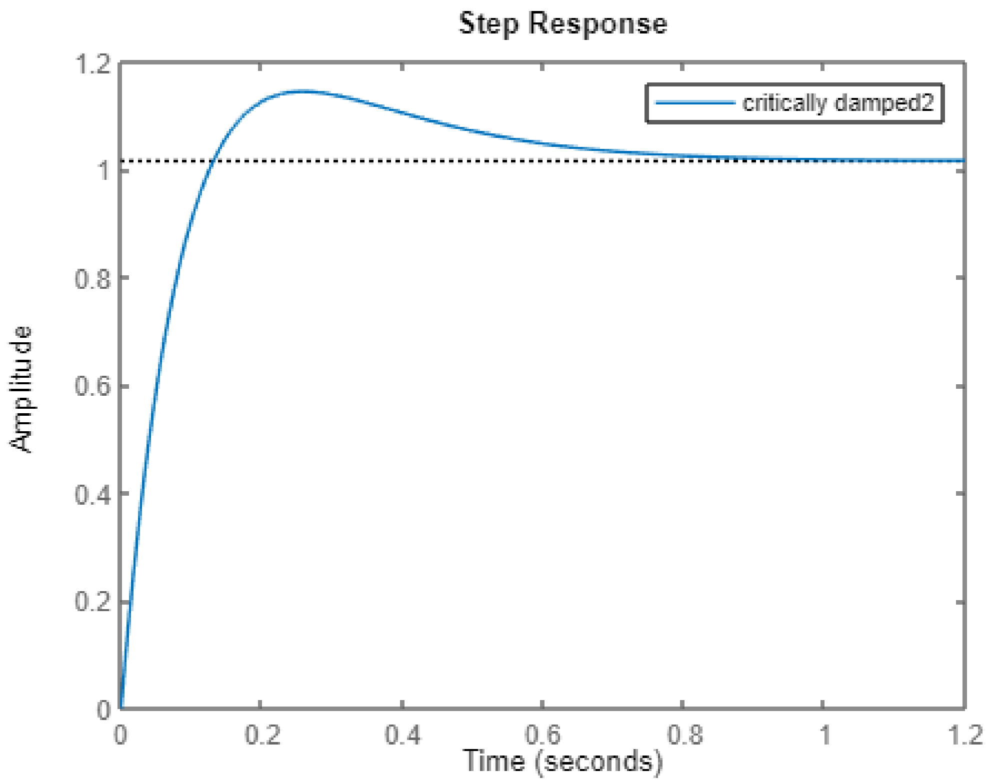


Salida acotada con tiempo de estabilización de 60s, dada la cercania al caso overdamped sus respuestas son similares

```
figure;
step(feedback(k(5)*G,1));
legend('subdamped damped')
```

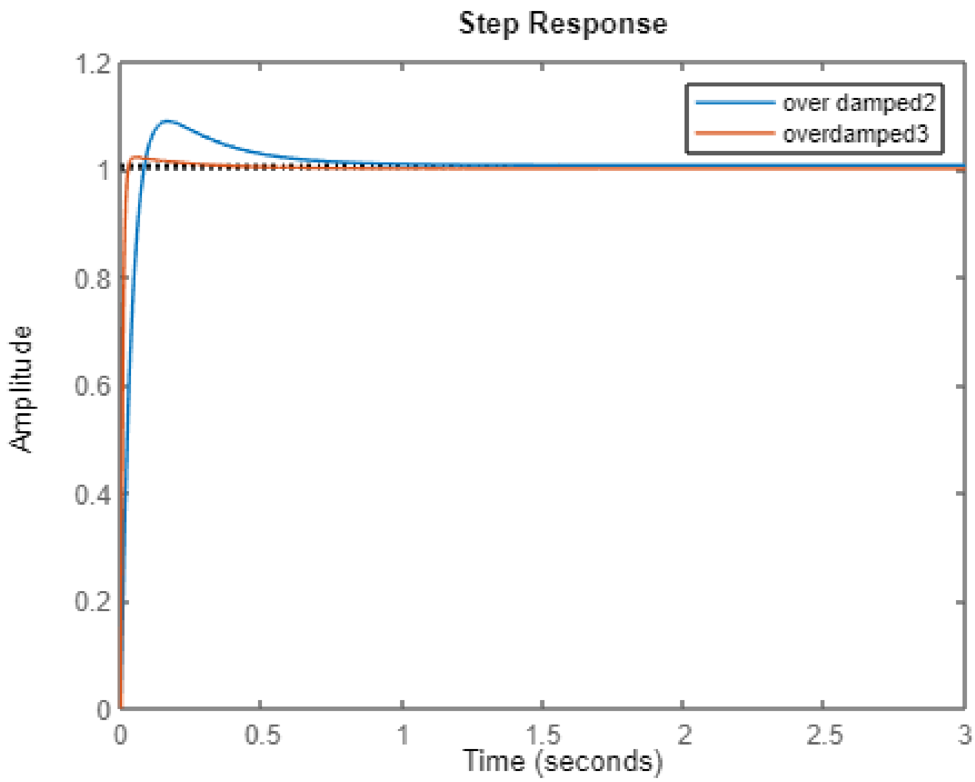



```
figure;
step(feedback(k(6)*G,1));
legend('critically damped2')
```



A pesar de ser una respuesta cuyos polos son reales, se tiene un pico de amortiguación, Esto debido a la cercania con el comportamiento subamortiguado y la inercia del sistema. Si usamos una ganancia mayor

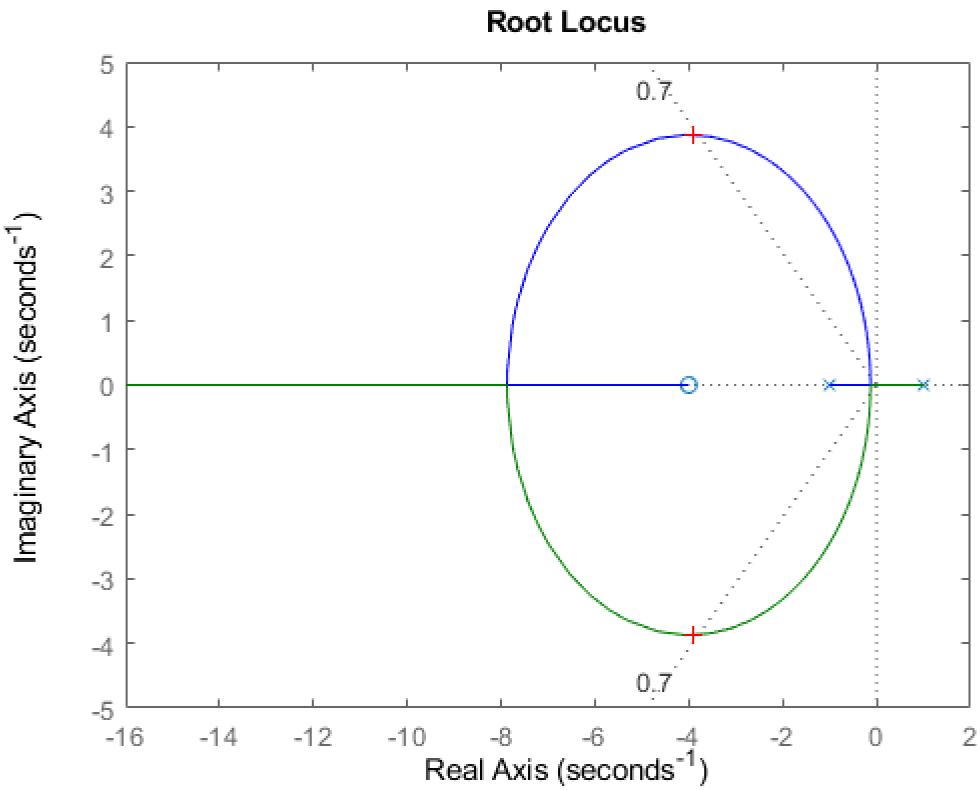
```
figure;
step(feedback(k(7)*G,1),feedback(k(7)*5*G,1),3);
legend('over damped2','overdamped3')
```



d) Diseñar un controlador proporcional tal que el sistema tenga un coeficiente de amortiguamiento $\zeta = 0.707$.

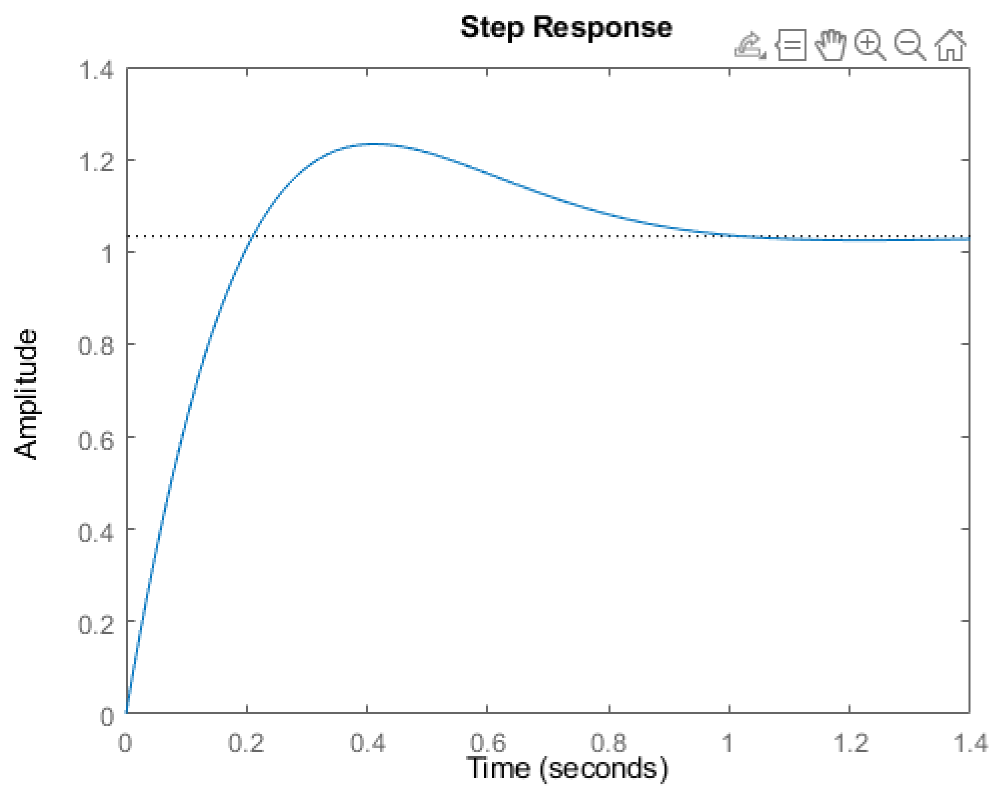
```
close all;
clear;
clc;
G=tf([1 4],conv([1 1],[1 -1]));
rlocus(G);
sgrid([0.7],[]);
K=rlocfind(G)
```

```
Select a point in the graphics window
```




```
selected_point = -3.9076 + 3.8700i
K = 7.8151
```

```
step(feedback(K*G,1));
```

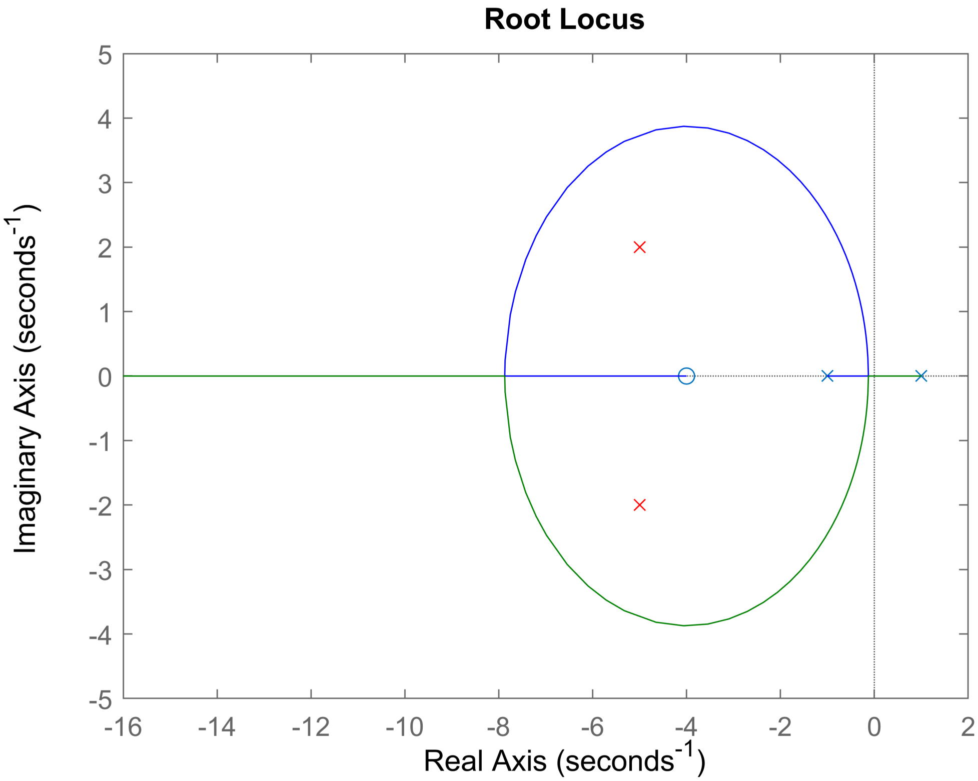



```
stepinfo(feedback(K*G,1));
```

e) Diseñar el controlador PD tal que los polos del sistema pasen por los puntos

$$s = -5 \pm 2i$$

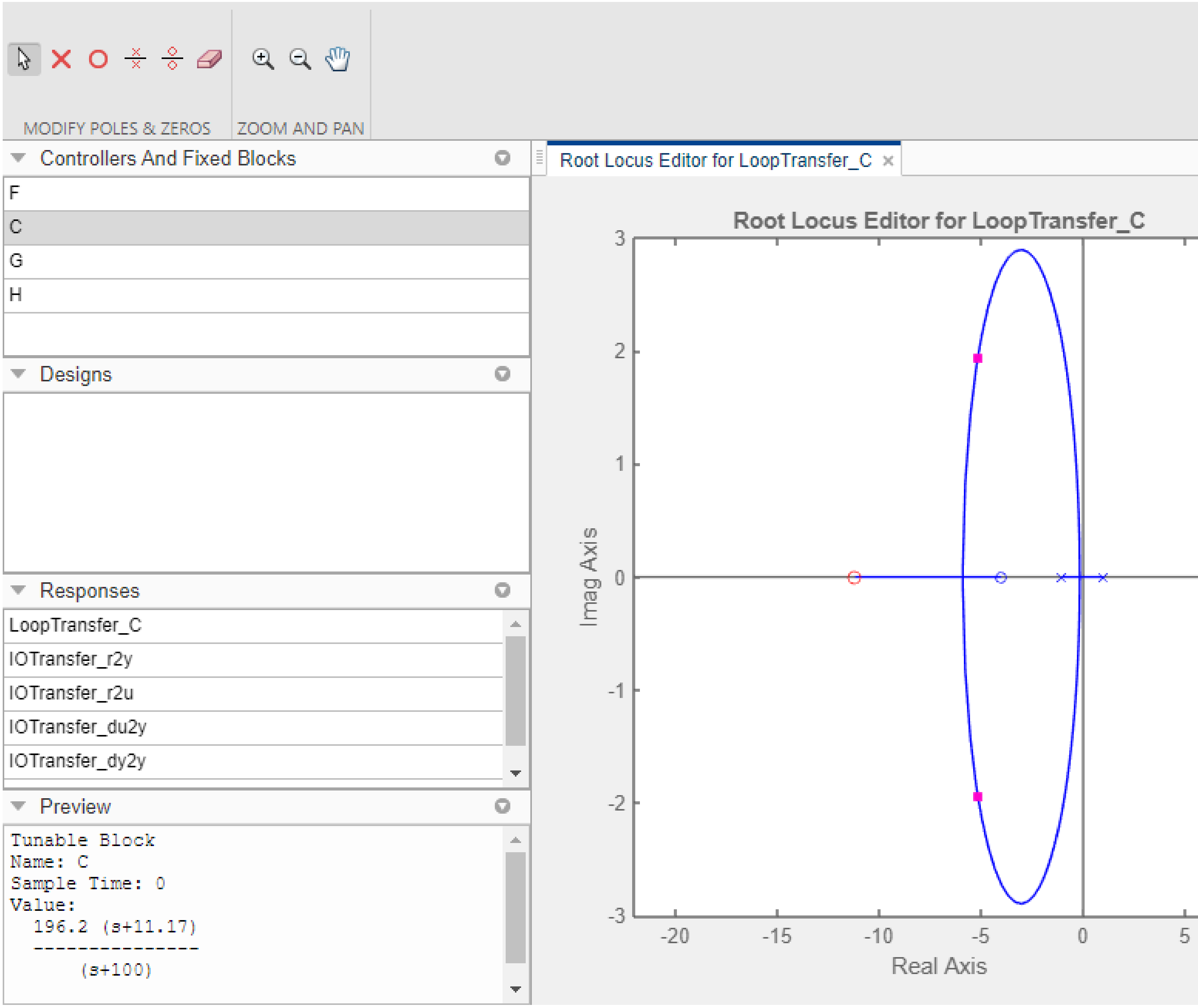
```
close all;
clear;
clc;
poles=[-5+2i, -5-2i];
G=tf([1 4],conv([1 1],[1 -1]));
rlocus(G);
hold on;
plot(poles,'rx');
```



Para diseñar el controlador PD debemos ubicar un cero talque modifiquemos el lugar de las raices para ello podemos usar el comando rltool y diseñar graficamente. Se puede usar el criterio del argumetno para ubicar el polo tal que el locus pase por el lugar de las raices como diseño analitico.

Para garantizar implementabilidad el controlador debe tener un polo alejado del sistema

rltool(G)



Así, un posible controlado es una ganancia de 196 con un cero en -11.17 y un polo en -100

Para usar el criterio del argumento de forma manual se haría

$\sum(ang(s-p_i))-\sum(ang(s-z_i))-(s-a)=180$ respecto al punto de interes en -5+ 2j, -5-2j

Otra opcion de diseño es:

Donde a define el angulo del polo deseado respecto al polo de interes

podemos usar el comando evalfr para ello

```
a=-pi+angle(evalfr(1/G,-5+2i));
angle=a*180/pi
```

```
angle = -341.5651
```

Teniendo el angulo (19º) encontramos la posición del cero sobre el eje real

```
c=sym('c');
eq1=a+2*pi==atan(2/(-5-c));
solution=solve(eq1,c);
posCero=eval(solution)
```

```
posCero = -11.0000
```

Entonces el regulador tendrá un cero en -11, para garantizar causalidad, un polo adicional pero no tan lejos como -100 (40 (8 veces el polo de trabajo)) resulta en un controlador causal

y para encontrar la ganancia aplicamos el criterio del modulo

(Si no se considera el polo la solución dará 2)

```
Reg=zpk([posCero],[-40],1);
K=1/abs(evalfr((G*Reg),-5+2i))
```

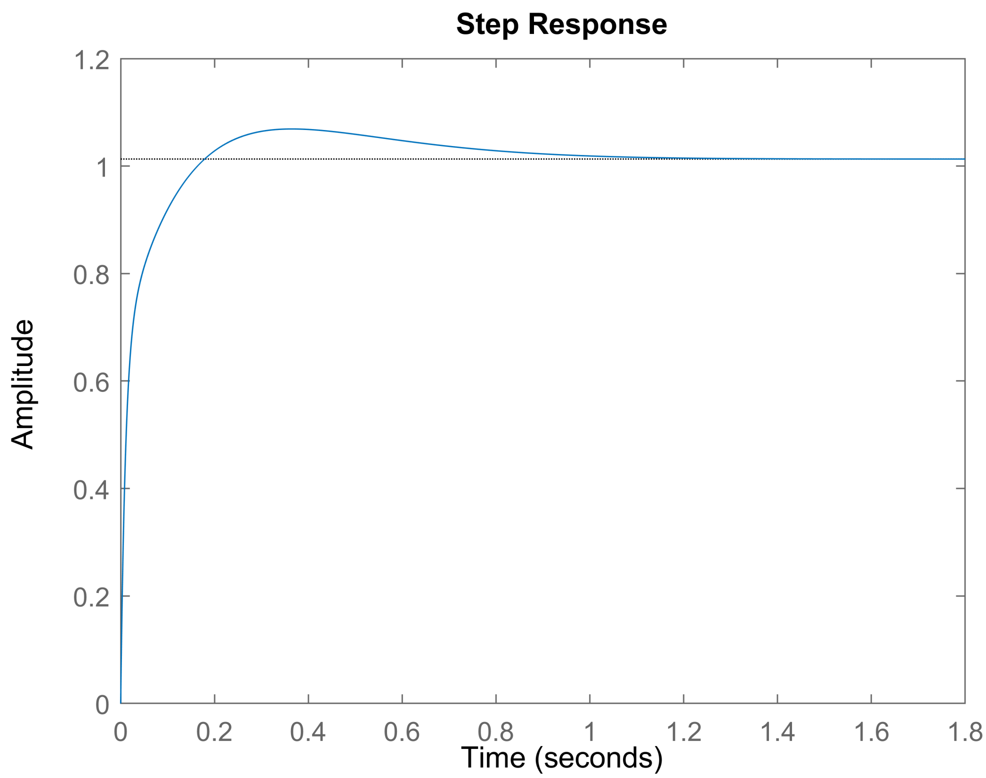
```
K = 70.1142
```

regulador será

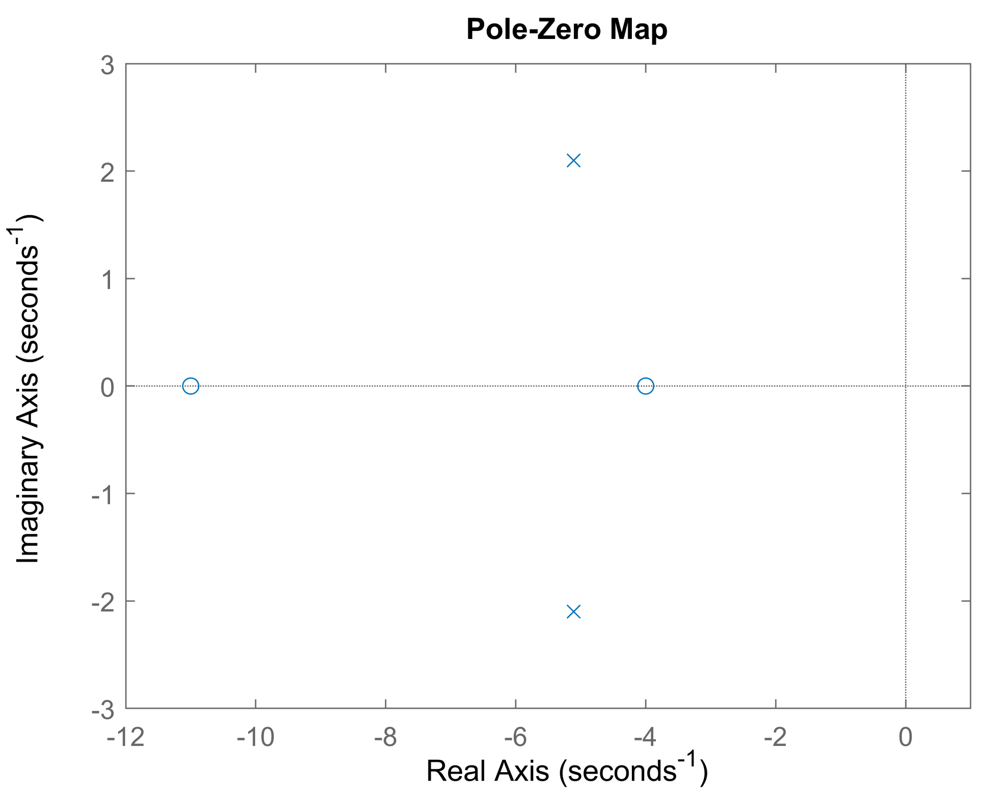
```
Reg=zpk([posCero],[-40],K)
```

```
Reg =

  70.114 (s+11)
  -------------
     (s+40)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
figure;
step(feedback(Reg*G,1))
```




```
pzmap(feedback(Reg*G,1))
axis([-12 1 -3 3])
```

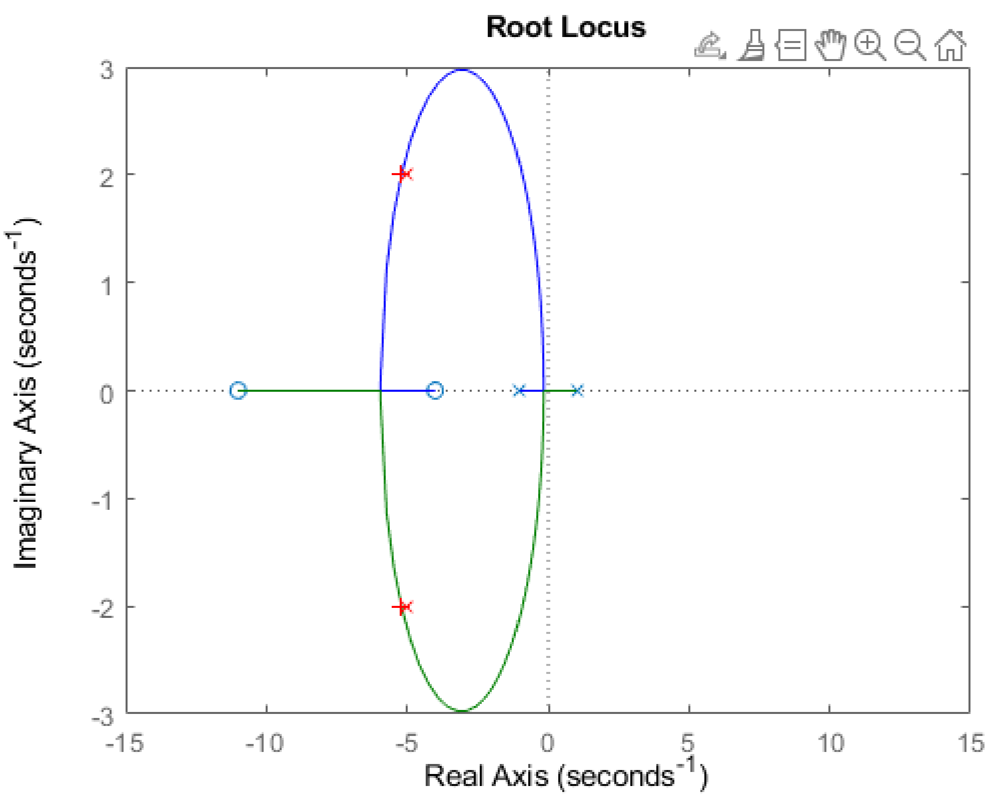


```
figure;
rlocus(Reg*G);
axis([-12 1 -3 3])
rlocfind(Reg*G)
```

```
Select a point in the graphics window
selected_point = -5.2073 + 2.0062i
ans = 1.0530
```

COmo se ve, al usar rlocfind en el punto de operación la ganancia es 1, queriendo decir que el controlador diseñado ya cumple los criterios de diseño

```
hold on;
plot(poles,'rx');
axis([-15 15 -3 3])
```



Ejercicio 3 (3 puntos). Dado el sistema

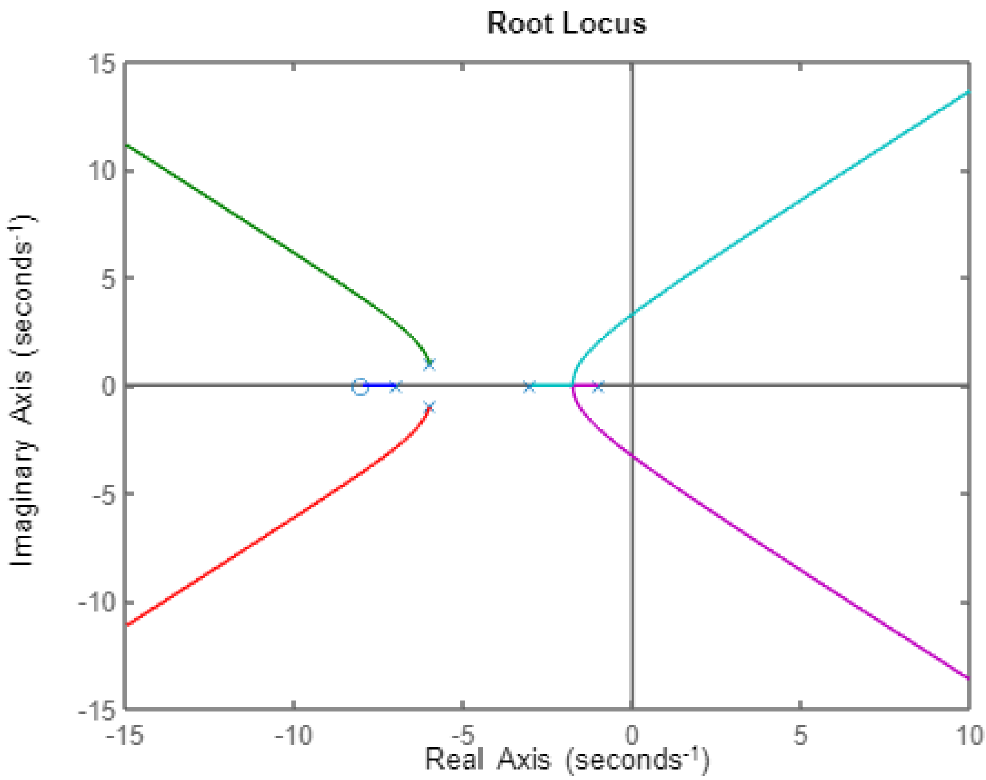
$$G = \frac{s+8}{(s+1)(s+3)(s+7)(s^2+12s+37)}$$

1 a) Dibuje el lugar de las raíces del sistema.
3 b) Dibuje el lugar de las raíces para un sistema reducido de segundo orden
3 c) Diseñe un controlador proporcional para el sistema de orden reducido tal que $\zeta = 0.8$
3 **d)** Aplique el controlador diseñado sobre la planta original y discuta los resultados.

```
clear;
clc;
close all
G=tf([1 8],conv([1 1],conv([1 3],conv([1 7],[1 12 37]))))
```

```
G =
 
            s + 8
  -------------------------
  s^5 + 23 s^4 + 200 s^3
          + 800 s^2
              + 1399 s + 777
 
Continuous-time transfer function.
```

```
rlocus(G);
```



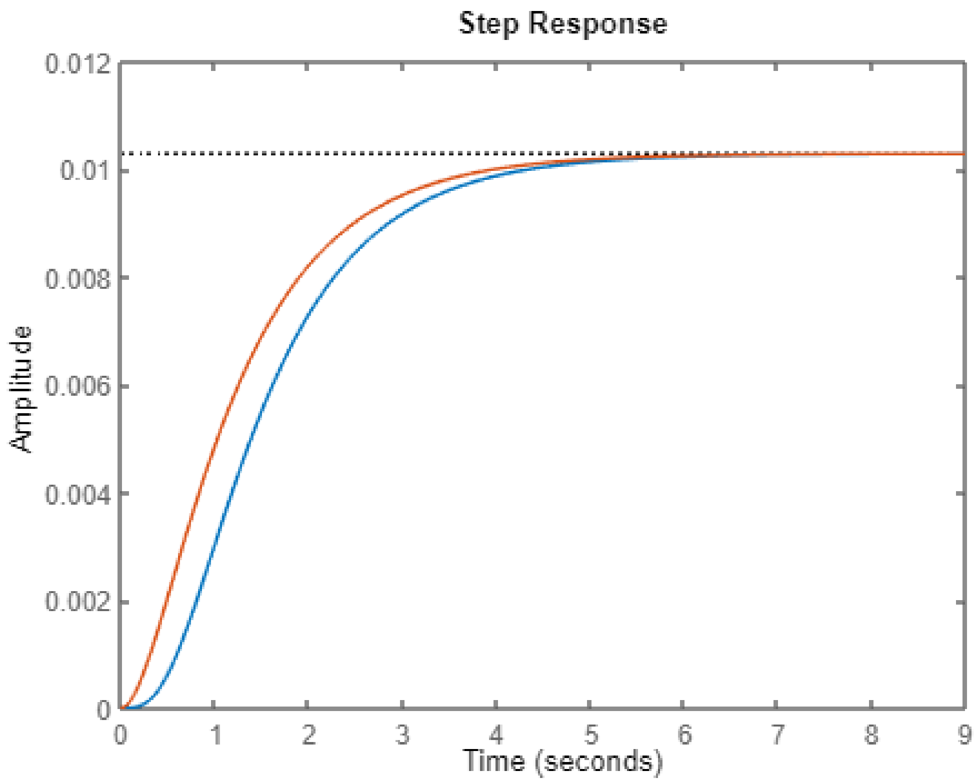
Tenemos que los polos dominantes del sistema estan entre -1 y -2, como los polos complejos conjugados estan aproximadamente a 3 veces la disctancia de el polo dominante, no debería cancelarce pero el objetivo del ejercicio es justamente ver el efecto de las cancelaciones hechas descuidadamente.

Por otro lado esta la dinamica del polo cero en 7 y menos 8 cuya distancia respecto al origen puede dar lugar a una cancelación. El sistema de segundo orden sera

```
GainG=evalfr(G,0);
Gred=zpk([],[-3 -1],1);
GainR=evalfr(Gred,0);
Gred=Gred*GainG/GainR
```

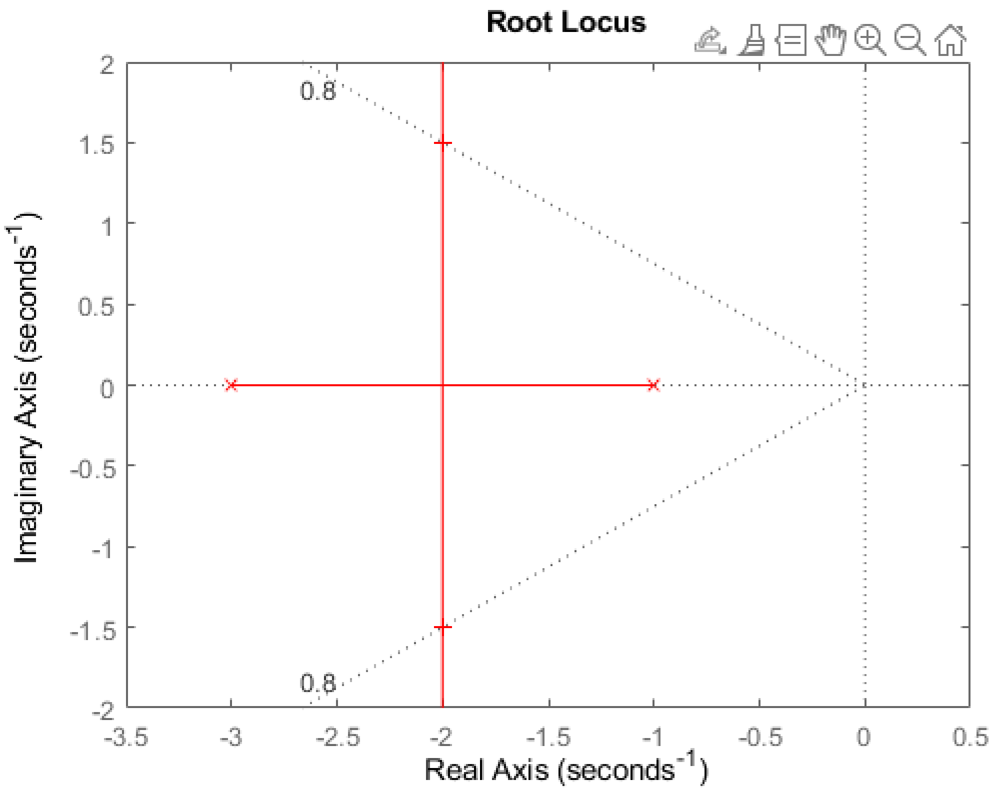
```
Gred =

   0.030888
  -----------
  (s+3) (s+1)

Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
figure;
step(G,Gred);
```




```
figure;

hold on;
rlocus(Gred,'r')
sgrid([0.8],[])
K=rlocfind(Gred)
```

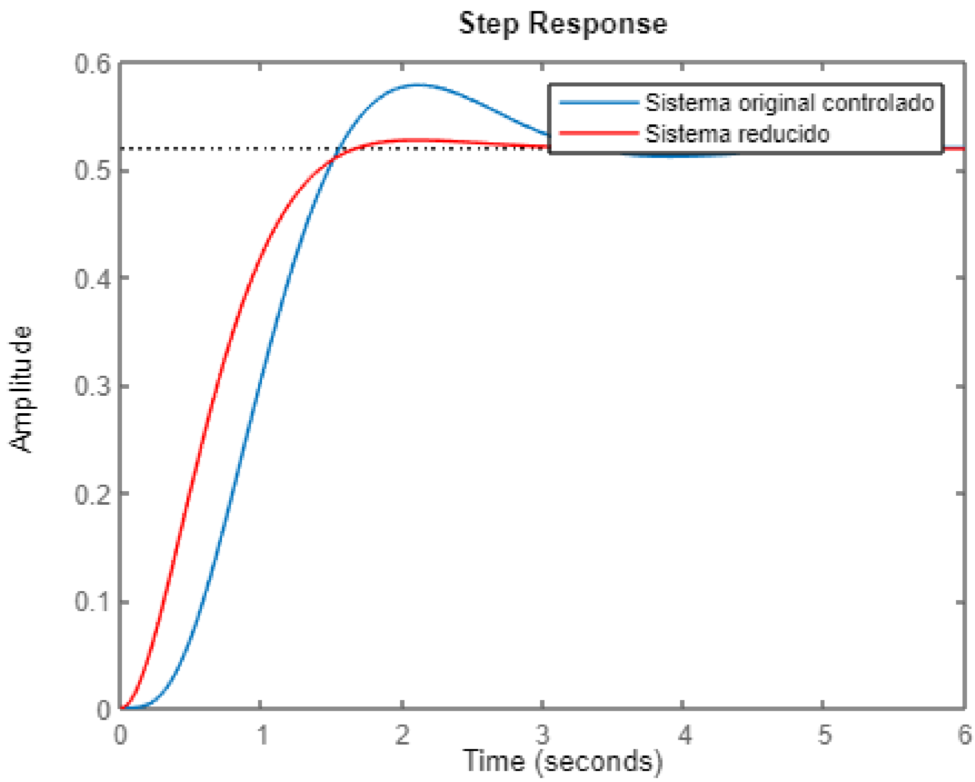
```
Select a point in the graphics window
```




```
selected_point = -2.0071 + 1.4985i
K = 105.0691
```

Diseñamos el compensador P para zeta=0.8, para el sistema de orden reducido

```
figure;
step(feedback(K*G,1))
hold on;
step(feedback(K*Gred,1),'r')
legend('Sistema original controlado','Sistema reducido')
```



Como puede apreciarse, la condición de tiempo de establecimiento aún se satisface. Sin embargo, El requerimiento dinámico se ve afectado por los polos de orden superior que se cancelarón puesto que eran muchos (multiplicando lo efectos de estos sobre los polos dominantes) y estaban en el limite del criterio, por lo que las aproximaciones aplicadas pueden no ser validas. Si bien el resultado no es completemente el deseado, vemos que el control aún es un control que puede dar una respuesta adecuada en diversas aplicaciones.