

Anotaciones de Fundamentos de Automática

Enrique Hernández Balaguera

enrique.hernandez@urjc.es

Área de Tecnología Electrónica
Universidad Rey Juan Carlos (URJC)



Tema 2:

Modelado de sistemas dinámicos: Fundamentos matemáticos, función de transferencia y diagramas de bloques

1. Ecuaciones diferenciales y transformada de Laplace

Considere la siguiente ecuación diferencial lineal y de coeficientes constantes,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Sea $y(t)$ una variable de interés para la que se plantea su ecuación diferencial y $x(t)$ la entrada o excitación del sistema.

Se observa:

- (i) La ecuación diferencial tiene orden “ n ”. En efecto, la máxima derivada de la variable de interés, $y(t)$ es “ n ”.
- (ii) Como se observa en la ecuación diferencial, ésta solo depende de la variable de interés $y(t)$, de las derivadas de $y(t)$, de la señal $x(t)$ de alimentación del sistema y de las derivadas de $x(t)$.
- (iii) Ya que los sistemas con los que se tratara son lineales e invariantes en el tiempo, la ecuación diferencial es lineal y de coeficientes constantes. Además para que la ecuación diferencial represente una variable de un sistema físico real, los coeficientes a_i y b_i han de ser valores reales (no valores complejos).
- (iv) Obsérvese que la ecuación diferencial está normalizada: el coeficiente del término de mayor orden de la variable de interés $y(t)$ es la unidad; es decir, $a_n=1$.
- (v) En general, a la variable de interés $y(t)$ para la que planteamos la ecuación diferencial se denomina salida o respuesta y $x(t)$ es la señal de alimentación o estímulo.
- (vi) Es necesario indicar que la ecuación diferencial anterior puede describir cualquier sistema dinámico (eléctrico, mecánico, etc.) siempre y cuando dichos sistemas sean lineales e invariantes en el tiempo (abreviadamente, LTI de “linear time invariant”).

- **Fundamentos de la transformada de Laplace:**

En el contexto de la teoría de control, para conocer el comportamiento de un sistema se utiliza la transformada de Laplace. Se trata de una herramienta muy útil para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y de coeficientes constantes.

La transformada de Laplace hace corresponder a una función del tiempo $x(t)$, una función $X(s)$ donde “ s ” es una variable compleja: $s = \sigma + j\omega$ (frecuencia compleja). Se define como:

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Obsérvese que:

- (i) $x(t)$ es una función que depende del tiempo.
- (ii) $X(s)$ es la función transformada de $x(t)$ y depende de s , no del tiempo t , pues el tiempo desaparece al evaluar la integral entre los dos límites.
- (iii) La transformada que definida previamente es la transformada unilateral. Ciertamente, la transformada bilateral de Laplace se extiende desde $-\infty$ a $+\infty$. Ahora bien, cuando se utilizan funciones analíticas pero sistemas causales es conveniente definir la transformada de Laplace como se ha indicado arriba: transformada unilateral con el extremo inferior en 0^- . De esta manera se pueden tratar señales que incluyan cualquier discontinuidad en $t=0$, como el impulso cuya integral es no nula entre 0^- y 0^+ .

En general, para las señales que utilizaremos a lo largo de la asignatura (exceptuando la función impulso y sus derivadas), la integral $\int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$ puede escribirse como:

$$\int_{0^-}^{0^+} x(t) e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt,$$

ya que la integral $\int_{0^-}^{0^+} x(t) e^{-st} dt$ es nula incluso para funciones con discontinuidad finita en $t=0$ (excepto para la función impulso y sus derivadas).

• Propiedades de la transformada de Laplace:

Ya que la transformada de Laplace es una integral, se tendrá que: “La transformada de una suma es la suma de las transformadas y la transformada de una constante por una función es la constante por la transformada de la función”. Véase:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Ax_1(t) + Bx_2(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} [Ax_1(t) + Bx_2(t)] e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} Ax_1(t) e^{-st} dt + \int_{0^-}^{\infty} Bx_2(t) e^{-st} dt \\ &= A \int_{0^-}^{\infty} x_1(t) e^{-st} dt + B \int_{0^-}^{\infty} x_2(t) e^{-st} dt = A\mathcal{L}[x_1(t)] + B\mathcal{L}[x_2(t)] = AX_1(s) + BX_2(s) \end{aligned}$$

Aquí, se han demostrado las propiedades 1 y 2 de las diapositivas. Ambas, indican la característica de linealidad de la transformada de Laplace.

Transformada de la derivada: Por definición, se sabe que la transformada de $x(t)$ es $X(s)$. Pero, ¿cuánto vale la transformada de la derivada $dx(t)/dt$? Veremos que una derivada en el tiempo se convierte en una multiplicación por s .

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

Se integra por partes: $u = e^{-st}$ y $dv = [dx(t)/dt]dt$. Por tanto: $du = -se^{-st}dt$ y $v = x(t)$. Sustituyendo, resultaría:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = [e^{-st}x(t)]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} (-s)x(t) e^{-st} dt = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} [e^{-st}x(t)] - e^{-s \cdot 0^-} x(0^-)\right] + s \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= -x(0^-) + sX(s) = sX(s) - x(0^-)$$

Esta transformada se puede encontrar en la lista de propiedades de la transformada de Laplace (nº 3). Un proceso análogo se seguiría para encontrar la transformada de la derivada de orden n .

Transformada de la integral: En las diapositivas, vemos que la integral en el tiempo se transforma en una división por s . Considerando condiciones iniciales, se tendría:

$$\mathcal{L}\left[\int x(t) dt\right] = \frac{X(s)}{s} + \frac{[\int x(t) dt]_{t=0^-}}{s}$$

Esta transformada se puede encontrar en la tabla nº 3 de las propiedades (diapositiva nº 13). La integración de orden 2 y de orden n , pueden ser localizados en tablas más avanzadas.

Transformada de un desplazamiento en el tiempo: Se considera que tenemos una señal $x(t)$ causal y que dicha señal la retrasamos " a " unidades. Por tanto, la nueva señal retrasada será $x(t-a)$. La pregunta es: Si la transformada de $x(t)$ es $X(s)$, ¿cuál es la transformada de $x(t-a)$?

$$\mathcal{L}[x(t-a)] = \int_{0^-}^{\infty} x(t-a) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t-a) e^{-s(t-a)} e^{-as} d(t-a) = e^{-as} \int_{0^-}^{\infty} x(t-a) e^{-s(t-a)} d(t-a)$$

$$= e^{-as} X(s)$$

Nota: Para resolver esta integral, hemos implementado el truco matemático: $dt = d(t-a)$. Se trata de la propiedad de la transformada de Laplace nº 5. Resulta que hemos obtenido que la transformada de $x(t-a)$ es la transformada $X(s)$ de la función sin desplazar, multiplicada por la exponencial de argumento $-as$. ¡Ojo! que $x(t)$ ha de ser causal para que al retrasarla " a " unidades, todos los puntos que se desplazan desde la izquierda del origen hacia la derecha valgan cero.

El resto de propiedades de la transformada de Laplace pueden ser demostradas de forma análoga a la propuesta en los anteriores casos. En las siguientes páginas del documento, utilizaremos la inmensa mayoría.

- **Algunas transformadas de Laplace:**

Transformada de Laplace del escalón unitario, $u(t)$:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_{0^-}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} 1 e^{-st} dt = \frac{1}{(-s)} \int_{0^+}^{\infty} (-s) e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s} [e^{-st}]_{0^+}^{\infty} = -\frac{1}{s} [e^{-s \cdot \infty} - e^{-s \cdot 0^+}] = -\frac{1}{s} [0 - 1] = \frac{1}{s}$$

Tal y como se ha comentado anteriormente, la integral entre 0^- e ∞ puede escribirse como la integral desde 0^- a 0^+ , que es nula y la que se extiende desde 0^+ a ∞ . Además, fijémonos que el escalón es una función discontinua en $t=0$. Distinguimos entre el valor inicial del escalón $u(0^+)=1$ y la condición inicial del escalón $u(0)=0$.

Transformada de la rampa unidad, $x(t)=tu(t)$:

$$\mathcal{L}[tu(t)] = \int_{0^-}^{\infty} tu(t) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} tu(t) e^{-st} dt$$

Se integra por partes: $u=t$ y $dv=e^{-st}dt$. Por tanto: $du=dt$ y $v=-(1/s)e^{-st}$. Sustituyendo, resultaría:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[tu(t)] &= \left[-\frac{1}{s}te^{-st} \right]_{0^+}^{\infty} - \int_{0^+}^{\infty} \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} [te^{-st}] - 0^+ e^{-s \cdot 0^+} \right] - \frac{1}{s^2} \int_{0^+}^{\infty} (-s) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} [0-0] - \frac{1}{s^2} [e^{-s \cdot \infty} - e^{-s \cdot 0^+}] = -\frac{1}{s^2} (0-1) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Obsérvese que $\lim_{t \rightarrow \infty} [te^{-st}] = 0$, pues el crecimiento de t hacia infinito es mucho más lento que el decrecimiento de e^{-st} hacia cero.

Transformada de Laplace del impulso, $x(t)=\delta(t)$:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) e^{-s \cdot 0} dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

Se trata de una señal básica por tener transformada unidad.

Examen 28/02/2020. Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

Ejercicio 4a: Obtenga la transformada de Laplace de la señal de la Figura 1.

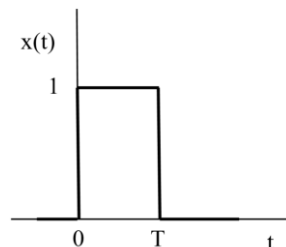


Figura 1. Pulso rectangular de altura 1 y duración T.

Utilizando la definición de la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} X(s) = \mathcal{L}[x(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^T 1 e^{-st} dt = \frac{1}{(-s)} \int_0^T (-s) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} [e^{-st}]_0^T \\ &= -\frac{1}{s} [e^{-s \cdot T} - e^{-s \cdot 0}] = \frac{1}{s} [1 - e^{-sT}] \end{aligned}$$

- **Descomposición en fracciones simples:**

Una fracción propia, en el dominio de s , es por definición aquella en donde,

$$\frac{P(s)}{Q(s)},$$

el grado del polinomio en el denominador $Q(s)$ es mayor que el grado del polinomio en el numerador $P(s)$. En el contexto de la transformada de Laplace y con el objetivo de utilizar

directamente las tablas de la transformada de Laplace para aplicar la transformada inversa, se hace necesario escribir el cociente como una suma de fracciones en donde el denominador es lineal o cuadrático (en el caso de que no existan raíces reales). En función de la naturaleza de las raíces del denominador, seguiremos diferentes procedimientos, los cuales se generalizan a través de las fórmulas de Heaviside (ver diapositivas).

A continuación, mostramos ejemplos de cada uno de ellos:

- **Raíces reales simples:** En este caso, el polinomio $Q(s)$ factoriza y la fracción se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{P(s)}{(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)\dots(s-a_k)},$$

donde $a_i, i=1, 2, 3, \dots, k$, denotan las raíces de $Q(s)$. A continuación, ejemplificamos:

$$\frac{s-1}{s^2+s-6} = \frac{s-1}{(s+3)(s-2)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2)+B(s+3)}{s^2+s-6}$$

La fracción última y la primera tienen el mismo denominador, luego los numeradores son iguales. Es una identidad que se cumple para cualquier valor dado a la variable s . Aquí, se identifican coeficientes: $A=4/5$ y $B=1/5$. Por tanto:

$$\frac{s-1}{s^2+s-6} = \frac{4/5}{s+3} + \frac{1/5}{s-2}$$

Con este resultado, se podrían aplicar directamente las tablas de la transformada de Laplace (suma de funciones exponenciales en el dominio del tiempo).

- **Raíces reales múltiples:** En este caso el polinomio $Q(s)$ tiene un factor de multiplicidad n ,

$$\frac{P(s)}{(s-a)^n},$$

La descomposición en fracciones parciales propuesta, a través de un ejemplo, de este caso, es:

$$\frac{3s^2-5}{s^3-9s^2+27s-27} = \frac{3s^2-5}{(s-3)^3} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2} + \frac{C}{(s-3)^3} = \frac{A(s-3)^2+B(s-3)+C}{s^3-9s^2+27s-27}$$

Resultando: $A=3$, $B=18$ y $C=22$. Por tanto:

$$\frac{3s^2-5}{s^3-9s^2+27s-27} = \frac{3}{s-3} + \frac{18}{(s-3)^2} + \frac{22}{(s-3)^3}$$

Análogamente al caso previo, ahora se podría aplicar directamente la transformada inversa o antitransformada de Laplace (suma de funciones exponenciales del mismo coeficiente multiplicadas por 1 , t y t^2 , respectivamente).

- **Raíces complejas simples:** Ese caso particular consiste en que el denominador cuenta con un factor cuadrático irreducible (que no tiene raíces reales). Por ejemplo:

$$\frac{3s^2-5s+1}{(s-2)(s^2+4s+5)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+4s+5} = \frac{A(s^2+4s+5)+Bs(s-2)+C(s-2)}{(s-2)(s^2+4s+5)}$$

Resultando: $A=3/17$, $B=48/17$ y $C=-1/17$. Por tanto:

$$\frac{3s^2-5s+1}{(s-2)(s^2+4s+5)} = \frac{3/17}{s-2} + \frac{(48/17)s+(-1/17)}{(s^2+4s+5)}$$

Antitransformando al dominio del tiempo, se puede comprobar que el primer término corresponde a una función exponencial, y el segundo a una función exponencial multiplicada por la suma de un seno y un coseno (se ampliará en el Tema 3).

Examen 17/12/2019. *Grado en Ingeniería de Robótica Software.*

Test: Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

La teoría de control clásica (modelado en la frecuencia compleja) se aplica a sistemas discretos, no lineales, con parámetros variables en el tiempo y con muchas entradas y salidas. Si los sistemas son continuos, lineales e invariantes en el tiempo sólo se puede aplicar la teoría de control moderno (modelado en el espacio de estados). **Falso**

Un sistema de control en lazo abierto presenta algunas ventajas con respecto a un sistema de control en lazo cerrado: mejor corrección de las perturbaciones internas y externas, más tolerancia a variaciones, mejor comportamiento incluso con incertidumbre en el modelo, etc. **Falso**

2. Función de transferencia y modelado de sistemas eléctricos

Apoyados en el concepto de la transformada de Laplace, a continuación se exponen un concepto más específico relativo a los sistemas de control.

- **Concepto de función de transferencia:**

Se considera un sistema donde $y(t)$ es la variable de interés, respuesta o salida y la excitación $x(t)$ o entrada. Se denomina función de transferencia a la relación entre la transformada de Laplace $Y(s)$ de la salida y la transformada de Laplace $X(s)$ de la entrada. Si se nota dicha función por $G(s)$, se tiene que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Consideremos que el sistema es de orden “ n ”. Tal y como se comentó previamente, la ecuación diferencial que relaciona la salida (variable $y(t)$ de interés) con la entrada $x(t)$, puede escribirse como:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Consideramos que el sistema tiene condiciones iniciales nulas (equilibrio antes de $t=0$). Es decir, las señales de la salida $y(t)$ y $x(t)$ son ambas señales causales.

La transformada de Laplace de la ecuación anterior es:

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \dots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

Obsérvese que al no existir condiciones iniciales, las derivadas son directamente multiplicaciones por s . Entonces, es posible obtener $Y(s)$ y $X(s)$ como factor común en los miembros de la izquierda y derecha, respectivamente:

$$Y(s) [s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = X(s) [b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0]$$

Por tanto:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Resulta que la función de transferencia de un sistema LTI es un cociente de polinomios en s . Destacamos los siguientes aspectos:

- (i) La función de transferencia se define para condiciones iniciales nulas.
- (ii) La función de transferencia se define exclusivamente para sistemas LTI, aunque existen algunas extensiones limitadas.
- (iii) Las raíces del polinomio del numerador de la función de transferencia se denominan ceros.
- (iv) Las raíces del polinomio del denominador de la función de transferencia se denominan polos. Tanto el punto (iii) como el (iv), se ampliarán en el Tema 3.
- (v) Obsérvese que el denominador de la función de transferencia coincide con el polinomio característico de la ecuación diferencial. Por tanto, los polos son las raíces del polinomio característico.
- (vi) La existencia de ceros indican que la ecuación diferencial depende de las derivadas de la entrada. En efecto, si la ecuación diferencial solo depende de la entrada (y no de sus derivadas) aparece simplemente el término b_0 .
- (vii) Si el grado del numerador es menor o igual que el grado del denominador, la función de transferencia se conoce como función de transferencia propia.
- (viii) Si en la función de transferencia obtenida no se cancelan ceros y polos (no existen raíces comunes al numerador y denominador), el sistema se conoce como sistema de orden mínimo. Estos son los sistemas usuales que se tratan. En caso contrario se trataría de un sistema de orden no mínimo.

A lo largo de la asignatura y utilizando el concepto de función de transferencia, se definirán los modelos básicos de sistemas de primer, segundo orden y superiores.

• ¿Qué es un impulso unitario?:

Se propone analizar el impulso unitario $\delta(t)$ o delta de Dirac de una manera no rigurosa. Ciertamente, para realizar un estudio riguroso hay que recurrir a la teoría de distribuciones.

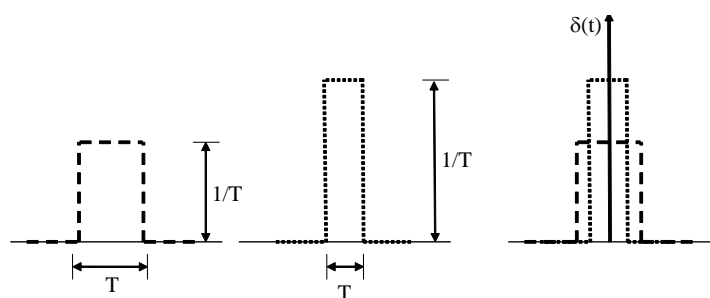


Figura 2. Proceso para convertir un pulso en un impulso unitario.

El impulso puede definirse como un proceso llevado al límite donde un pulso de área unidad se hace tender a cero su duración. En la Figura 2 se representa un pulso rectangular de anchura T y amplitud (altura) $1/T$ (línea de trazos discontinua). Observamos que su área es la unidad: $T \times (1/T) = 1$. Si se acorta la base (T más pequeño) la altura es mayor y el área sigue siendo 1 (línea de puntos discontinua). En el límite se obtiene el impulso $\delta(t)$. La última figura de la derecha representa todas las figuras juntas con el fin de visualizar cómo se obtiene el proceso del límite. Por tanto, el impulso tiene duración nula, amplitud (altura) infinita y área unidad. Su representación gráfica es:

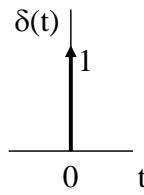


Figura 3. Representación de un impulso unitario.

Al lado de la flecha que representa el impulso se ha colocado un “1” para indicar que se trata de un impulso unitario (fuerza 1). Si el área hubiera sido de valor A , se hubiera obtenido la señal $A\delta(t)$ y se tendría un impulso de fuerza A . La Figura 2 representa el proceso para conseguir un impulso como un proceso límite del pulso rectangular, pero lo cierto es que la forma del pulso es indiferente. Podemos utilizar, por ejemplo, un pulso gaussiano, pulso triangular o un pulso exponencial. El lector puede dibujar estos pulsos y observar qué ocurre cuando T se hace cada vez más pequeño.

A la vista de lo anterior y de una manera heurística o no rigurosa, se puede considerar: $\delta(0)=\infty$ y $\delta(t)=0$ si $t \neq 0$. Por tanto, se visualiza que el área bajo la función impulso es la unidad, lo que se escribe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Ya que el impulso está, por decirlo así, concentrado en $t=0$, vemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

Por tanto cualquier integral que no considere el 0 es nula. Así:

$$\int_{-\infty}^{0^-} \delta(t) dt = \int_{0^+}^{\infty} \delta(t) dt = 0$$

Pero, ¿por qué es importante el impulso?. El impulso es importante como excitación porque hay señales reales que se aproximan a él. Una posible analogía física de una excitación impulsional corresponde a un pulso de una duración mucho menor que la constante de tiempo (ver después) más rápida del sistema de estudio.

Ciertamente, el impulso constituye la derivada del escalón unitario: $\delta(t)=du(t)/dt$ y, por tanto, el impulso nos permite definir la derivada en un punto de discontinuidad (desde el punto de vista de la teoría de funciones generalizadas). Fijémonos que la fuerza del impulso coincide con el valor de la discontinuidad finita (en este caso el valor de la discontinuidad es 1 pues el escalón pasa de 0 a 1). En el contexto de las funciones de transferencia, considerando una entrada impulsional, resulta que $X(s)=1$ y por tanto: $G(s)=Y(s)/X(s)=Y(s)$, haciendo corresponder $g(t)$ con la respuesta impulsional, $y(t)$.

- **Modelado de sistemas eléctricos:**

Si se parte de las ecuaciones constitutivas de los tres principales elementos utilizados en análisis de redes, considerando condiciones de linealidad e invarianza en el tiempo, es posible conocer el comportamiento dinámico de cualquier circuito eléctrico.

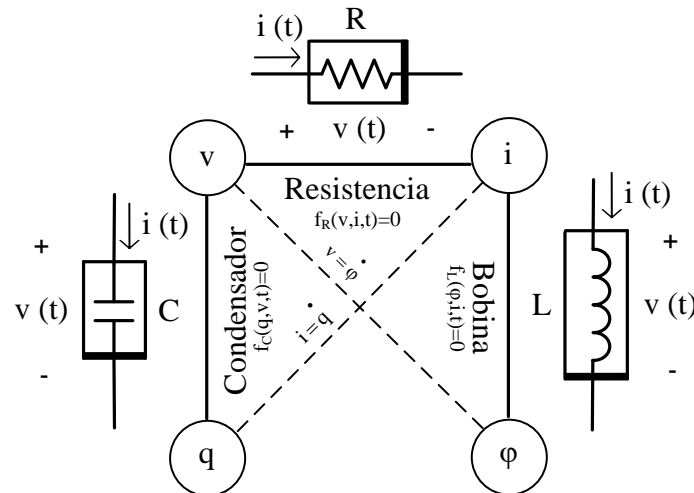


Figura 4. Variables y elementos básicos de la teoría de circuitos.

- **¿Circuitos eléctricos nLvT (no lineal y variante en el tiempo)?** Es necesario saber que cualquier dispositivo que impone una relación entre la carga $q(t)$ y la tensión $v(t)$ se denomina condensador y, además, que un inductor es un dispositivo que impone una relación entre el flujo $\phi(t)$ y la corriente $i(t)$.

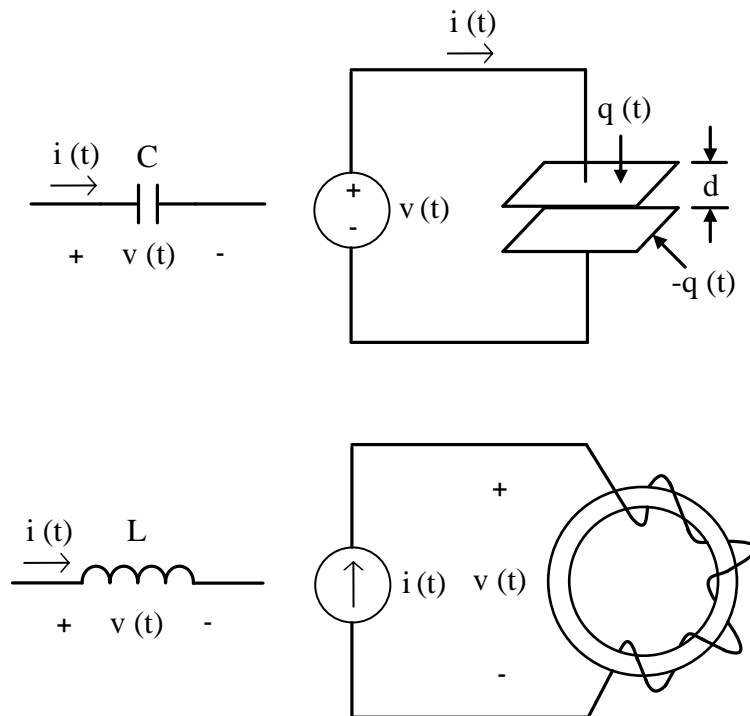


Figura 5. Condensador plano formado por placas paralelas y bobina toroidal con su respectiva simbología.

Las ecuaciones conocidas en la teoría de circuitos clásica corresponden con simplificaciones obtenidas considerando condiciones LTI. De hecho, en condensadores y bobinas no lineales y variantes en el tiempo (ver Figura 4), respectivamente, se tendría:

$$\begin{aligned}
 i_C(t) &= \frac{dq_C(t)}{dt} = C(t) \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \frac{dC(t)}{dt} \\
 v_L(t) &= \frac{d\phi_L(t)}{dt} = L(t) \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) \frac{dL(t)}{dt}
 \end{aligned}$$

donde $C(t)$ y $L(t)$ representan la capacidad e inductancia dependientes del tiempo, respectivamente. Por tanto, fácilmente se puede deducir que un condensador o inductancia lineal (características $q-v$ y $\varphi-i$ líneas rectas) e invariante en el tiempo (características $q-v$ y $\varphi-i$ no cambian con el tiempo), verifican las ya conocidas relaciones:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

Sin pérdida de generalidad, a continuación se analiza un circuito RLC en serie:

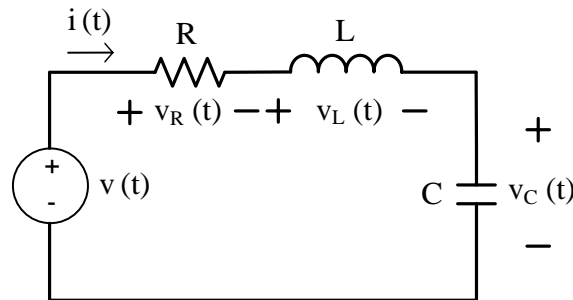


Figura 6. Circuito RLC en serie en el dominio del tiempo.

Un circuito de segundo orden tiene dos elementos que almacenan energía (en este caso contiene C y L) o tiene más elementos que almacenan energía pero que pueden reducirse a dos. Puesto que los circuitos estudiados son lineales e invariantes en el tiempo (LTI), la ecuación diferencial que describe cualquier variable de interés será una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes y de segundo orden.

Para describir formalmente el comportamiento dinámico de la tensión $v_C(t)$ del condensador es necesario plantear la ecuación diferencial de $v_C(t)$ en el circuito para $t > 0$, dibujado anteriormente. ¡Ojo! Es vital dibujar las tensiones y corrientes de cada uno de los elementos que componen el circuito a analizar. ¿Por qué? Circuito generador *vs.* criterio receptor. Esto es, si la corriente entra por el “+” y sale por el “-” se considera el elemento como receptor. En caso contrario, sería como generador y por tanto, habría que añadir un signo “-” a la ecuación constitutiva del elemento en cuestión. Nótese que el resultado final en términos de ecuación diferencial que modela la dinámica del circuito eléctrico o respuesta temporal (Tema 3) no se verá perturbado por el planteamiento inicial.

Por tanto, según las polaridades indicadas en el circuito de la Figura 6, la ley de Kirchhoff de tensiones (LKT) establece:

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_L(t) \rightarrow v(t) = Ri(t) + v_C(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

En general, la ecuación diferencial ha de quedar en función de $v_C(t)$, sus derivadas y la entrada, $v(t)$ y derivadas de la entrada (que no aparecen en este caso, pero que de aparecer serían nulas si se tratase de alimentación en continua). La corriente $i(t)$ que circula por el circuito es también la del condensador y, por tanto, puede escribirse como $i(t) = C(dv_C(t)/dt)$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) + LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} = v(t) \rightarrow \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_C(t) = \frac{1}{LC} v(t)$$

¿Y utilizando impedancias complejas? Redibujamos el circuito:

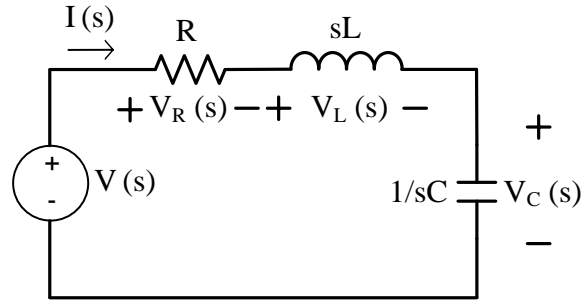


Figura 7. Circuito RLC en serie en el dominio de s .

Nótese que en este circuito, en caso de incluir valores, no se indicarían las unidades. Por tanto, resolviendo, se obtendría:

$$\begin{aligned}
 V(s) &= I(s) \left[R + \frac{1}{sC} + sL \right] \rightarrow V(s) = sCV_C(s) \left[R + \frac{1}{sC} + sL \right] \\
 &\rightarrow s^2V_C(s) + \frac{R}{L}sV_C(s) + \frac{1}{LC}V_C(s) = \frac{1}{LC}V(s)
 \end{aligned}$$

Antitransformando al dominio del tiempo y considerando condiciones iniciales nulas:

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{1}{LC}v(t)$$

Resultado análogo al obtenido previamente.

Conociendo la ecuación diferencial de la tensión en el condensador, podemos obtener la ecuación diferencial de cualquier variable del circuito, por ejemplo de la corriente del circuito, $i(t)$, ya que presentará la misma parte homogénea. Veamos:

$$v(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_L(t) \rightarrow v(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt + L \frac{di(t)}{dt}$$

En este punto, se tiene una ecuación integro-diferencial. El siguiente paso, obligatoriamente, es eliminar la integral derivando todos los términos de la ecuación. Por tanto, se tiene como resultado final, tras normalizar y reordenar:

$$\frac{dv(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) + L \frac{d^2i(t)}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L} \frac{dv(t)}{dt}$$

En efecto, la parte homogénea coincide con la obtenida previamente para $v_C(t)$. Sin embargo, la parte de la ecuación diferencial, que depende de la entrada y sus derivadas, varía. Esta se podría haber obtenido con una excitación escalón sin necesidad de analizar de nuevo el sistema. Por tanto, si el circuito está alimentado en continua (entrada constante), el segundo miembro sería una constante K . Entonces, la ecuación diferencial de la corriente se podría escribir como: $\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = K$. Ya que en régimen permanente de corriente continua ($t \rightarrow \infty$), el condensador se comportaría como un circuito abierto y la bobina como un cortocircuito, $i(\infty) = 0$ A. Por tanto, sustituyendo en la ecuación diferencial resultaría: $K=0$.

En el contexto de impedancias complejas, nos proponemos obtener el circuito eléctrico equivalente del condensador considerando condiciones iniciales no nulas. En el dominio del tiempo, se tiene:

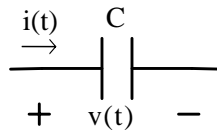


Figura 8. Condensador en el dominio del tiempo.

Con las polaridades indicadas, la ecuación del condensador es: $i(t) = C[dv(t)/dt]$. Transformemos la ecuación de definición a s . Transformando ambos miembros, se tendría: $I(s) = C[sV(s) - v(0^-)]$. Despejando $V(s)$, ya que la función de interés es la tensión en el condensador, se tendría:

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$

Lo primero que se detecta es que si el condensador no tuviera carga inicial $v(0^-) = 0$ V, la ecuación anterior quedaría: $V(s) = [1/sC]I(s)$. En efecto, $1/sC$ es el cociente entre la tensión $V(s)$ en bornes del condensador y su corriente $I(s)$. Por ello, $1/sC$ es la impedancia operacional del condensador. A continuación, intentamos implementar la ecuación previamente obtenida en un circuito en s . Primero vemos que la tensión $V(s)$ es suma de dos términos. Por tanto, el circuito a implementar tiene dos elementos en serie. Si sumo tensiones es porque tengo elementos en serie. El primer elemento es un condensador de impedancia $1/sC$ y recorrido por la corriente $I(s)$. El segundo elemento es una fuente de tensión de valor $v(0^-)/s$. Por tanto, se tiene:

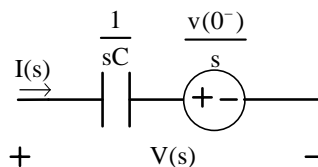


Figura 9. Circuito eléctrico equivalente del condensador en s considerando condiciones iniciales no nulas.

Este planteamiento puede ser fácilmente trasladable al caso de la bobina.

Examen 17/12/2019. Grado en Ingeniería de Robótica Software.

Test: Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

La transformada inversa de Laplace $g(t)$ de cualquier función de transferencia $G(s)$ se corresponde con la respuesta temporal del sistema a una entrada impulso (con condiciones iniciales iguales a cero). **Verdadero**

Ejercicio 1: Para el circuito eléctrico RLC en serie de la figura, y considerando todas las condiciones iniciales iguales a cero:

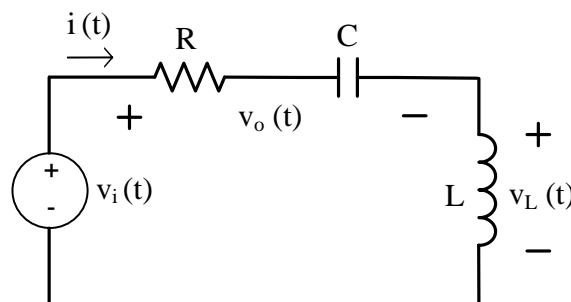


Figura 10. Circuito RLC en serie.

(i) Extrae la función de transferencia $G(s) = V_o(s)/V_i(s)$, dejándola en función de R , L y C .

Se tiene:

$$v_i(t) = v_o(t) + v_L(t) \rightarrow v_i(t) = v_o(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

La primera derivada de la corriente se puede expresar como:

$$v_o(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \rightarrow \frac{dv_o(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) \rightarrow$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{\frac{dv_o(t)}{dt} - \frac{1}{C} i(t)}{R} = \frac{\frac{dv_o(t)}{dt} - \frac{1}{LC} \int v_L(t) dt}{R} = \frac{\frac{dv_o(t)}{dt} - \frac{1}{LC} \int [v_i(t) - v_o(t)] dt}{R}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior e integrando todos los términos, se obtiene:

$$v_i(t) = v_o(t) + L \frac{\frac{dv_o(t)}{dt} - \frac{1}{LC} \int [v_i(t) - v_o(t)] dt}{R} \rightarrow$$

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{dv_o(t)}{dt} + L \frac{\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} - \frac{1}{LC} [v_i(t) - v_o(t)]}{R}$$

Reordenando y normalizando, resulta:

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_o(t) = \frac{R}{L} \frac{dv_i(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_i(t)$$

Transformando al dominio de s y operando se obtiene la función de transferencia:

$$s^2 V_o(s) + \frac{R}{L} s V_o(s) + \frac{1}{LC} V_o(s) = \frac{R}{L} s V_i(s) + \frac{1}{LC} V_i(s) \rightarrow G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}$$

3. Modelado de sistemas mecánicos de traslación y rotación

La ley fundamental que gobierna los **sistemas mecánicos de traslación** es la segunda ley de Newton:

$$\sum F = ma$$

donde m denota la masa, a es la aceleración de la masa m y el sumatorio de fuerzas refleja el conjunto de fuerzas que actúan sobre la masa bajo estudio en la dirección de la aceleración.

Por ejemplo, en la Figura 11 se muestra un sistema resorte-masa-amortiguador, el cual se resuelve igual que el ejemplo de la diapositiva 24 del Tema 2. Inicialmente, se asume que dicho mecanismo está parado para $t < 0$. Repentinamente en $t = 0$, una excitación $u(t)$ -entrada- induce un desplazamiento de la masa. En efecto, en $t = 0$, el carro se mueve a una velocidad constante. El desplazamiento de la masa, $y(t)$, es la salida. Nótese que b es el coeficiente de fricción viscosa y k es la constante del resorte. En este caso, el mecanismo está montado sobre un carro con masa despreciable. Es recomendable montar un “diagrama de cuerpo libre” de la masa bajo estudio sobre el que se pinten las fuerzas y sus respectivas direcciones para facilitar el planteamiento. Por tanto, aplicando la segunda ley de Newton, se tiene:

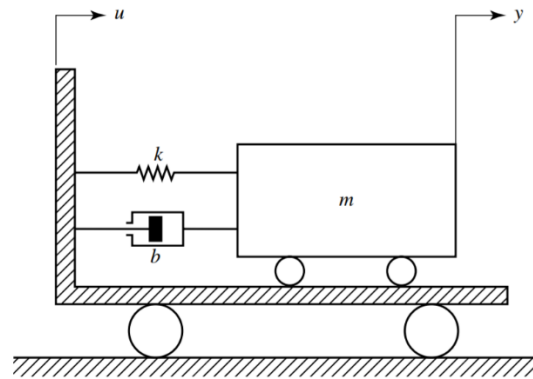


Figura 11. Sistema mecánico de traslación resorte-masa-amortiguador.

$$-b \left[\frac{dy(t)}{dt} - \frac{du(t)}{dt} \right] - k[y(t) - u(t)] = m \frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

y reordenando:

$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = b \frac{du(t)}{dt} + ku(t)$$

Esta ecuación diferencial representa un modelo matemático del sistema mecánico considerado. ¡Recordad! Es imprescindible añadir la dependencia del tiempo de cada una de las funciones: “(t)”. Aplicando la transformada de Laplace asumiendo condiciones iniciales nulas y reordenando resulta la función de transferencia:

$$ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s) = bsU(s) + kU(s) \rightarrow Y(s)[ms^2 + bs + k] = U(s)[bs + k] \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs + k}{ms^2 + bs + k}$$

¿Por qué no resulta la misma función de transferencia que el ejemplo de clase? Porque la fuerza se aplica sobre una masa externa y no sobre la propia masa de estudio m . La parte homogénea de la ecuación diferencial es la misma porque depende de la “conexión” de los elementos. Sin embargo, la parte de la entrada difiere porque depende de su localización. A continuación, se propone el estudio de un ejemplo más complejo.

Prueba de evaluación Tema 2, 21/02/2020. Grado en Ingeniería de Organización Industrial.
Ejercicio 7: Determina las funciones de transferencia correspondientes del sistema mecánico de la Figura 12:

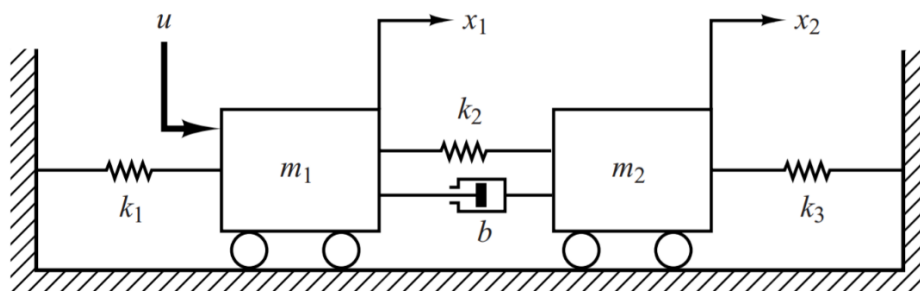


Figura 12. Sistema mecánico con dos masas.

Las ecuaciones de movimiento para el sistema de la figura son:

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= -k_1 x_1(t) - k_2 [x_1(t) - x_2(t)] - b \left[\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt} \right] + u(t) \\
 m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= -k_3 x_2(t) - k_2 [x_2(t) - x_1(t)] - b \left[\frac{dx_2(t)}{dt} - \frac{dx_1(t)}{dt} \right]
 \end{aligned}$$

Reordenando:

$$\begin{aligned}
 m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + b \frac{dx_1(t)}{dt} + [k_1 + k_2] x_1(t) &= b \frac{dx_2(t)}{dt} + k_2 x_2(t) + u(t) \\
 m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + b \frac{dx_2(t)}{dt} + [k_2 + k_3] x_2(t) &= b \frac{dx_1(t)}{dt} + k_2 x_1(t)
 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned}
 m_1 s^2 X_1(s) + b s X_1(s) + [k_1 + k_2] X_1(s) &= b s X_2(s) + k_2 X_2(s) + U(s) \\
 \rightarrow X_1(s) [m_1 s^2 + b s + (k_1 + k_2)] &= X_2(s) [b s + k_2] + U(s) \\
 m_2 s^2 X_2(s) + b s X_2(s) + [k_2 + k_3] X_2(s) &= b s X_1(s) + k_2 X_1(s) \\
 \rightarrow X_2(s) [m_2 s^2 + b s + (k_2 + k_3)] &= X_1(s) [b s + k_2] \rightarrow X_2(s) = X_1(s) \frac{b s + k_2}{m_2 s^2 + b s + (k_2 + k_3)}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la primera expresión:

$$X_1(s) [m_1 s^2 + b s + (k_1 + k_2)] = X_1(s) \frac{b s + k_2}{m_2 s^2 + b s + (k_2 + k_3)} [b s + k_2] + U(s)$$

Por tanto, reordenando obtenemos la primera función de transferencia $X_1(s)/U(s)$ y la segunda $X_2(s)/U(s)$, a partir de la expresión previamente obtenida que relacionaba $X_2(s)$ y $X_1(s)$.

$$\begin{aligned}
 \frac{X_1(s)}{U(s)} &= \frac{m_2 s^2 + b s + (k_2 + k_3)}{[m_1 s^2 + b s + (k_1 + k_2)][m_2 s^2 + b s + (k_2 + k_3)] - [b s + k_2]^2} \\
 \frac{X_2(s)}{U(s)} &= \frac{b s + k_2}{[m_1 s^2 + b s + (k_1 + k_2)][m_2 s^2 + b s + (k_2 + k_3)] - [b s + k_2]^2}
 \end{aligned}$$

El siguiente objetivo es comprender el funcionamiento de **sistemas mecánicos de rotación** para modelar adecuadamente su comportamiento dinámico. Ciertamente, este tipo de mecanismos suelen estar gobernados por motores de naturaleza eléctrica o combustión, los cuales llevan asociados, típicamente, engranajes o “ruedas dentadas” que transmiten el movimiento desde su eje hasta otro eje situado a cierta distancia y que ha de realizar un trabajo. La interacción entre dos engranajes se muestra en la Figura 13.

En este punto, es importante introducir el concepto de “relación de transmisión” (r_T), el cual conecta matemáticamente dos o más ejes de un sistema mecánico de rotación:

$$r_T = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

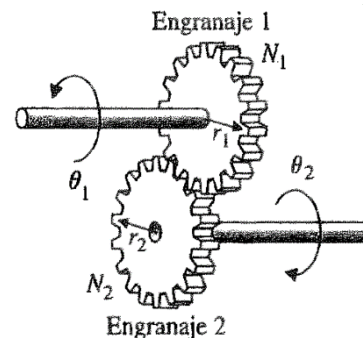


Figura 13. Sistema de engranajes o ruedas dentadas.

donde θ_i , r_i y N_i denotan la velocidad angular, el radio y el número de dientes del engranaje i ; $i=1,2,\dots,n$. Además, ya que la energía traslacional de la fuerza multiplicada por el desplazamiento es la energía de rotación del par multiplicada por la energía de desplazamiento, se tiene que:

$$T_1\theta_1=T_2\theta_2$$

Teniendo en cuenta estos conceptos, se puede modelar el comportamiento dinámico de cualquier sistema rotatorio utilizando la misma metodología que la vista en traslación. Para poner a prueba estos conceptos, se propone el siguiente ejemplo:

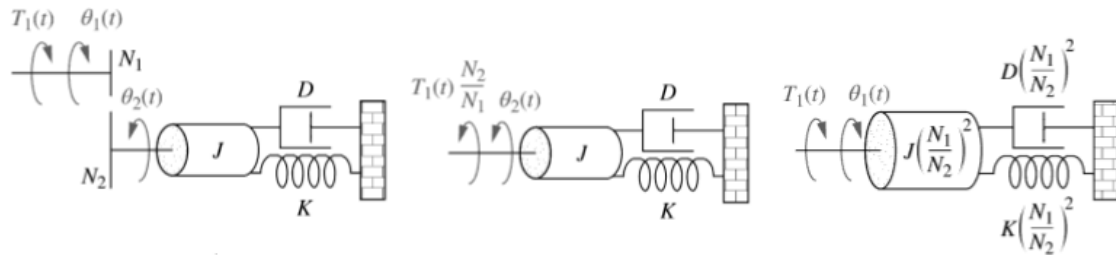


Figura 14. Sistema rotatorio conducido por dos engranajes, el cual se simplifica para mostrar su dependencia con respecto a ambas velocidades angulares.

A partir de la figura izquierda, se puede derivar la central, la cual describe gráficamente la relación entre $\theta_2(s)$ y la entrada $T_1(s)$; resultando:

$$(Js^2+Ds+K)\theta_2(s)=T_1(s)\frac{N_2}{N_1}\rightarrow\frac{\theta_2(s)}{T_1(s)}=\frac{N_2/N_1}{Js^2+Ds+K}$$

Por último, se transforma $\theta_2(s)$ en $\theta_1(s)$ tal y como muestra la figura derecha. De este modo, se puede obtener la función de transferencia que relaciona θ_1 y la entrada T_1 :

$$(Js^2+Ds+K)\frac{N_1}{N_2}\theta_1(s)=T_1(s)\frac{N_2}{N_1}\rightarrow\frac{\theta_1(s)}{T_1(s)}=\frac{(N_2/N_1)^2}{Js^2+Ds+K}$$

- **Principio de analogía:** Se propone el siguiente ejercicio donde se puede comprobar como dos sistemas de diferente naturaleza (eléctrica y mecánica) presentan la misma función de transferencia:

Prueba de evaluación Tema 2, 21/02/2020. *Grado en Ingeniería de Organización Industrial.*
Ejercicio 2: Obtenga el sistema mecánico traslacional “análogo” al circuito eléctrico de la Figura 15. Para ello, utilice su correspondiente función de transferencia, $E_o(s)/E_i(s)$.

La función de transferencia del circuito eléctrico de la figura, es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)}{(R_1C_1s+1)(R_2C_2s+1)+R_2C_1s}$$

Se propone el sistema mecánico de traslación de la Figura 15, cuyas ecuaciones características de movimiento son:

$$b_1\left[\frac{dx_i(t)}{dt}-\frac{dx_o(t)}{dt}\right]+k_1[x_i(t)-x_o(t)]=b_2\left[\frac{dx_o(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}\right]$$

$$b_2 \left[\frac{dx_o(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt} \right] = k_2 y(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$b_1 [sX_i(s) - sX_o(s)] + k_1 [X_i(s) - X_o(s)] = b_2 [sX_o(s) - sY(s)]$$

$$b_2 [sX_o(s) - sY(s)] = k_2 Y(s) \rightarrow Y(s) = \frac{b_2 [sX_o(s) - sY(s)]}{k_2}$$

Y sustituyendo en la primera ecuación:

$$b_1 [sX_i(s) - sX_o(s)] + k_1 [X_i(s) - X_o(s)] = b_2 \left[sX_i(s) - s \frac{b_2 [sX_i(s) - sY(s)]}{k_2} \right] \rightarrow$$

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\left(\frac{b_1}{k_1} s + 1 \right) \left(\frac{b_2}{k_2} s + 1 \right)}{\left(\frac{b_1}{k_1} s + 1 \right) \left(\frac{b_2}{k_2} s + 1 \right) + \frac{b_2}{k_1} s}$$

En efecto, comparten la misma forma (“análoga”) de función de transferencia.

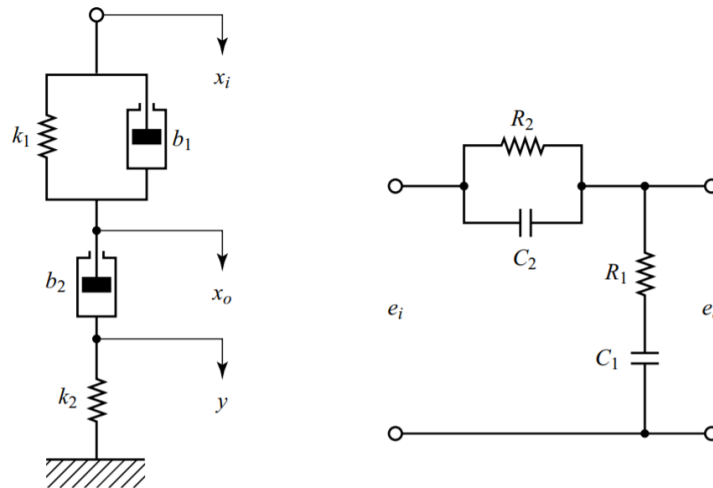


Figura 15. Sistemas mecánicos y eléctricos “análogos”.

4. Simplificación de diagramas de bloques mediante el álgebra de bloques. Grafos de flujo de señal.

La representación de sistemas mediante diagramas de bloques predomina en la ingeniería de control. Estos diagramas están constituidos por bloques operaciones y unidireccionales que relacionan de forma inequívoca las variables de interés. Por ello, para representar la relación de variables a controlar se utiliza una interconexión de bloques. Típicamente, la representación de diagrama de bloques de un sistema dado, puede reducirse a un diagrama de bloques simplificado con menos bloques que el original. Ciertamente, ya que las funciones de transferencia representan sistemas lineales, dicha simplificación, basada en el álgebra de bloques, se facilita.

- **Álgebra de bloques:**

A continuación, se estudian las principales transformaciones de diagramas de bloques:

- (i) Combinación de bloques en cascada: En primer lugar, se demuestra la propiedad conmutativa de los diagramas de bloques cuando estos se encuentran “conectados” en serie. Véase:

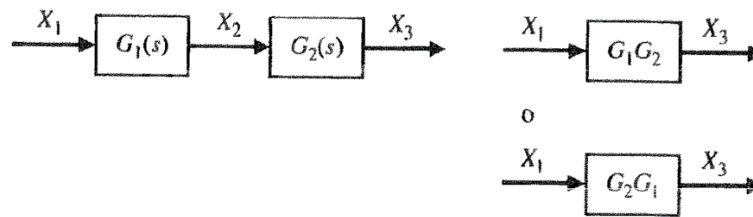


Figura 16. Combinación de bloques en cascada.

En efecto:

$$X_2(s) = X_1(s)G_1(s) \rightarrow G_2(s) = \frac{X_3(s)}{X_2(s)} = \frac{X_3(s)}{X_1(s)G_1(s)} \rightarrow \frac{X_3(s)}{X_1(s)} = G_1(s)G_2(s) = G_2(s)G_1(s)$$

- (ii) Movimiento de un punto de suma anterior a un bloque: Para realizar operaciones básicas (combinación de bloques en cascada o eliminación de un lazo de realimentación, ver después), comúnmente es necesario realizar movimientos de puntos de suma y bifurcaciones. Los apartados (ii)-(v) son estos casos. ¿Cómo se realiza este movimiento?

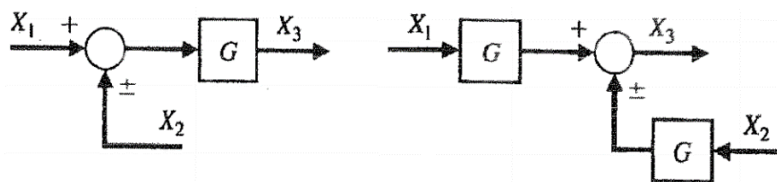


Figura 17. Movimiento de un punto de suma anterior a un bloque.

Según la figura de la izquierda, se sabe que: $X_3(s) = [X_1(s) + X_2(s)]G(s)$. Al mover “tan solo” el punto de suma hacia la derecha quedaría que al punto de suma, llegarían $X_1G(s)$ y $X_2(s)$, para, sumándose, resultar en $X_3(s)$. Ciertamente, faltaría multiplicar a $X_2(s)$ por $G(s)$ para obtener el resultado inicial y así cumplir la propiedad distributiva de los diagramas de bloques. De esta, resultaría el diagrama de bloques de la derecha con un bloque adicional $G(s)$ en la rama inferior, resultando: $X_3(s) = X_1(s)G(s) + X_2(s)G(s)$.

- (iii) Movimiento de un punto de separación posterior a un bloque:

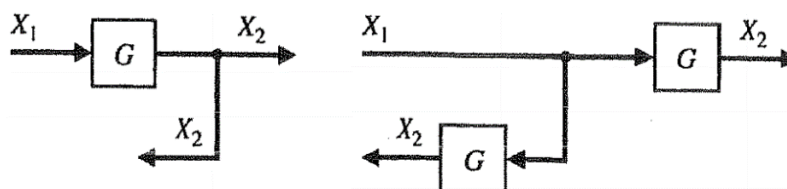


Figura 18. Movimiento de un punto de separación posterior a un bloque.

La señal que se realimenta en el diagrama de bloques inicial es $X_2(s)$. Al “saltar” el bloque $G(s)$ hacia la derecha, está retornando $X_1(s)$. ¿Cómo resolvemos esta

desigualdad entre diagramas de bloques? Multiplicando a $X_1(s)$ por $G(s)$ y así obtener $X_2(s)$. Recuerda: $X_2(s) = X_1(s)G(s)$.

- (iv) Movimiento de un punto de separación anterior a un bloque:

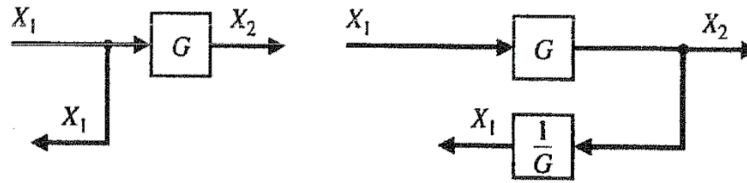


Figura 19. Movimiento de un punto de separación anterior a un bloque.

Siguiendo el mismo razonamiento que en (iii): La señal que retorna en la figura inicial es $X_1(s)$. Ahora, $X_2(s)$; ¿cómo la convertimos en $X_1(s)$? Dividiendo entre $G(s)$ (el bloque que salta) para reconvertir la señal que se realimenta, en $X_1(s)$. Recuerda: $X_1(s) = X_2(s)/G(s)$.

- (v) Movimiento de un punto de suma posterior a un bloque:

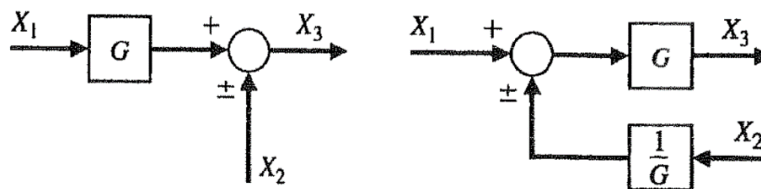


Figura 20. Movimiento de un punto de suma posterior a un bloque.

Se tiene que: $X_3(s) = X_1(s)G(s) + X_2(s)$. Al mover el punto de suma hacia la derecha, sin realizar más operaciones, resulta: $X_3(s) = [X_1(s) + X_2(s)]G(s)$. No es el mismo resultado. Se debe dividir a $X_2(s)$ entre $G(s)$ para que, cuando se multiplique por $G(s)$ quede como “sumando libre”. Finalmente:

$$X_3(s) = \left[X_1(s) + \frac{X_2(s)}{G(s)} \right] G(s) = X_1(s)G(s) + X_2(s)$$

- (vi) Eliminación de una lazo de realimentación:

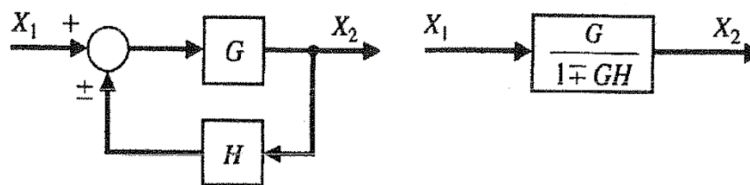


Figura 21. Eliminación de una lazo de realimentación.

Es una de las operaciones básicas, ya demostradas, que utilizaremos ampliamente a lo largo de la asignatura.

$$X_2(s) = [X_1(s) \mp X_2(s)H(s)]G(s) \rightarrow \frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}$$

Prueba de evaluación Tema 2, 21/02/2020. Grado en Ingeniería de Organización Industrial.
Ejercicio 4: Calcule la función de transferencia en lazo cerrado, $T(s) = Y(s)/R(s)$, del diagrama de bloques de la Figura 22:

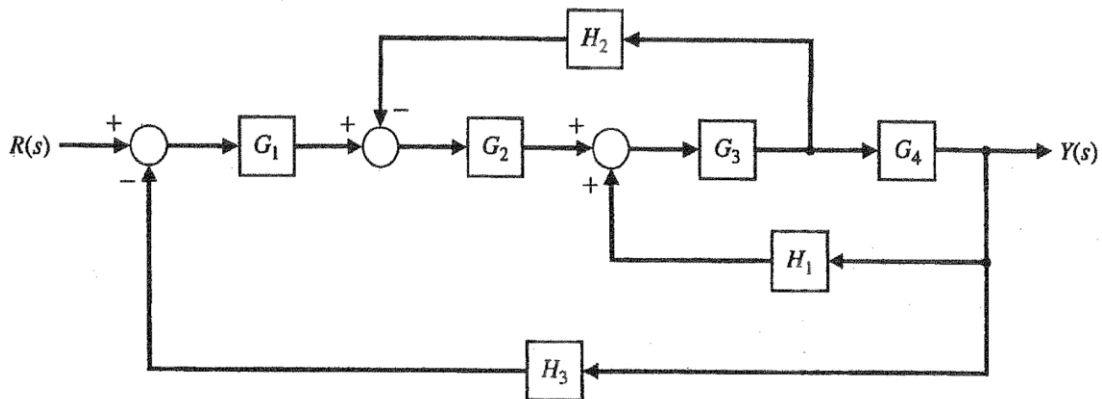


Figura 22. Diagrama de bloques propuesto para simplificar.

Tal y como se resuelve, paso a paso, en las diapositivas, se obtiene:

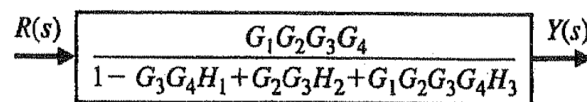


Figura 23. Diagrama de bloques simplificado a partir del representado en la Figura 22.

- **Grafos de flujo de señal:**

Los diagramas de bloques son muy utilizados para representar la relación entre variables controladas. Sin embargo, cuando un sistema con interrelaciones altamente complejas donde el proceso de reducción es muy arduo, se utilizan formas alternativas, como por ejemplo, los grafos de flujo de señal (o método de las trayectorias). Ciertamente, este tipo de representación no requiere de simplificación ya que existen fórmulas establecidas (fórmula de Mason) que permiten determinar la relación entre las variables de salida y entrada.

Examen 28/02/2020. Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.

Ejercicio 2: (ii) Transforme el grafo de flujo de señal de la Figura 24 en su equivalente diagrama de bloques:

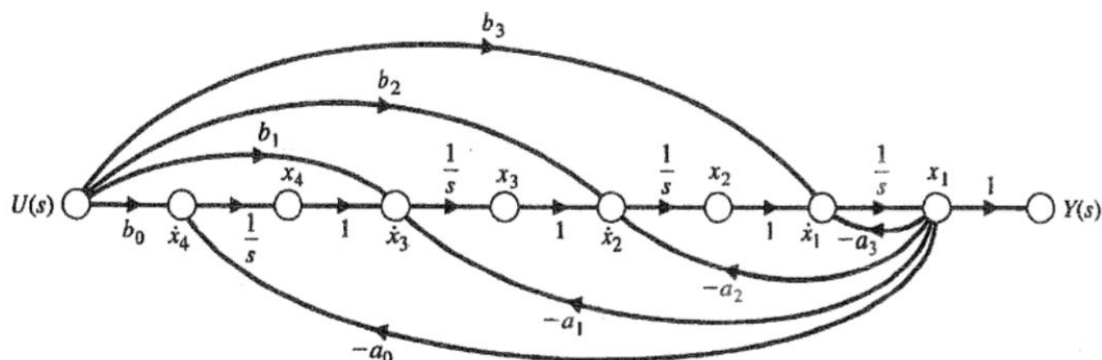


Figura 24. Grafo de flujo de señal propuesto para transformar a diagrama de bloques.

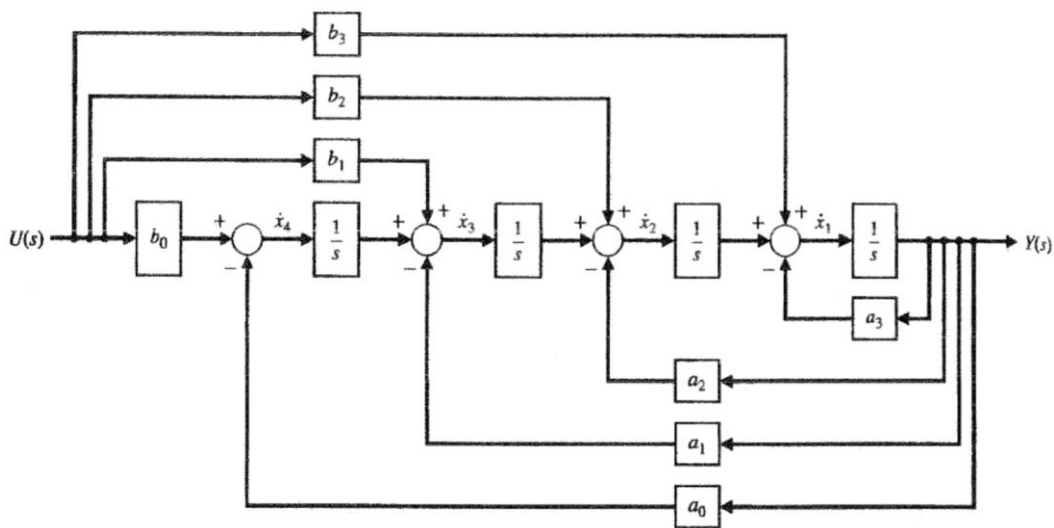


Figura 25. Diagrama de bloques equivalente al grafo de flujo de la Figura 24.

Prueba de evaluación Tema 2, 21/02/2020. Grado en Ingeniería de Organización Industrial.
Ejercicio 6: Transforme el diagrama de flujo de señal de la Figura 26 en su equivalente diagrama de bloques:

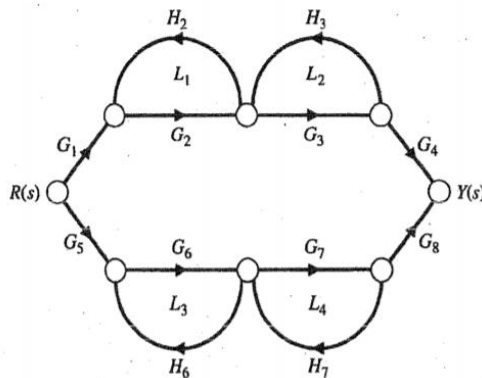


Figura 26. Grafo de flujo de señal propuesto para transformar a diagrama de bloques.

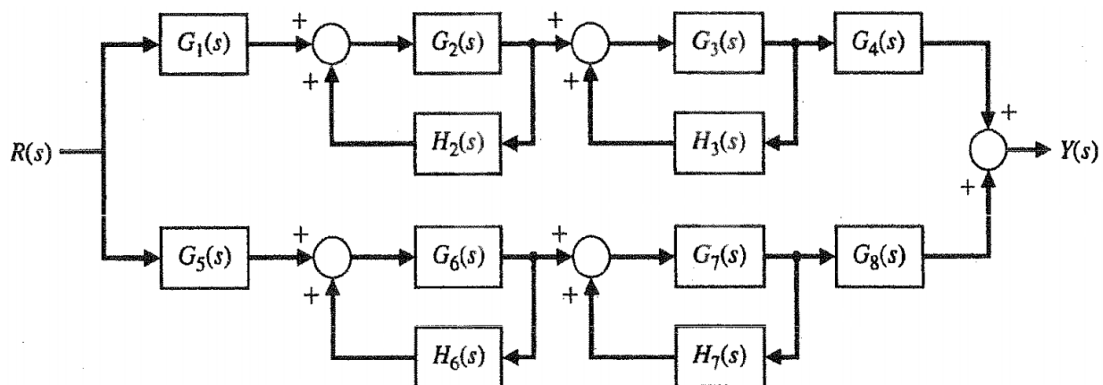


Figura 27. Diagrama de bloques equivalente al grafo de flujo de la Figura 26.