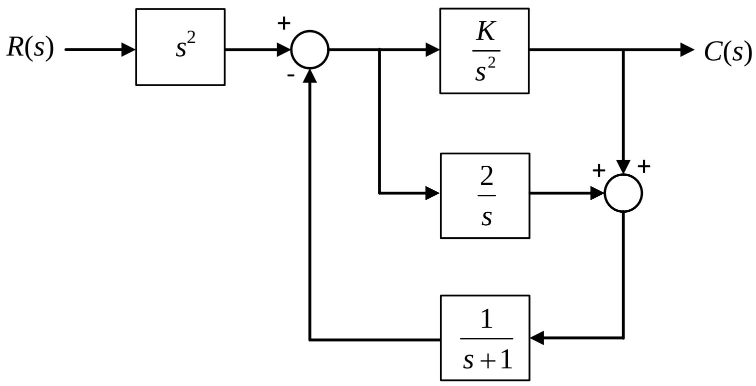
Universidad Rey Juan Carlos

Control y Automatización
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales
Curso 2020/2021

Área de Tecnología Electrónica
Fecha: 15/03/2021

Ejercicio 1 (2 puntos)

Determine el valor de K del sistema para que la función de transferencia en lazo cerrado tenga dos polos sobre el eje imaginario y uno en el semiplano izquierdo (eje real negativo).



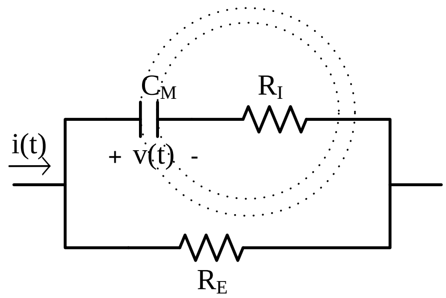
Ejercicio 2 (3 puntos)

La figura adjunta representa el circuito eléctrico equivalente de una célula ideal. La membrana celular (separa iones) se modela mediante un condensador eléctrico de capacidad C_M. Los medios intra- y extracelular (soluciones iónicas) se han representado por las resistencias R_I y R_E, respectivamente. Una corriente $i(t)$ se introduce en la célula.

(i) Estudie el comportamiento dinámico de la membrana a través de la ecuación diferencial de $v(t)$ desde el dominio del tiempo.

(ii) Aplicando la transformada de Laplace, obtenga la respuesta analítica de $v(t)$, ante una entrada en escalón unitario, y esbócela indicando sus valores más significativos.

(iii) Suponga que el valor de R_E aumenta (edema intracelular). ¿Cómo afecta este aumento a la respuesta temporal de la tensión en la membrana, $v(t)$?.



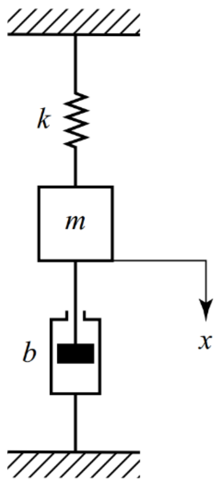
Ejercicio 3 (2,75 puntos)

Considere el sistema mecánico que se muestra en la siguiente figura, donde m=1 kg, b=3 N×s/m y k=5 N/m. Anteriormente, la masa fue sometida a una fuerza externa que remitió con el paso del tiempo. En el instante de referencia, t=0, todavía "conserva desplazamiento y velocidad" (condiciones iniciales), de tal forma que $x(0)$=0,1 m y $dx(t)/dt|_{t=0}$=0,05 m/s. Nótese que el desplazamiento $x(t)$ se mide desde la posición de equilibrio. Se pide:

(i) Determine la respuesta, en el dominio de s, del movimiento de la masa; es decir $X(s)$, sometida a la condición inicial, considerando que no hay fuerza externa.

(ii) Al tratarse de un sistema subamortiguado, analice la variación de la parte real e imaginaria de los polos y el factor de amortiguamiento, en términos de "movimiento de polos" y respuestas a escalón.

Recuerda que: $\mathcal{L}[d^2x(t)/dt^2]=s^2X(s)-sx(0)-dx(t)/dt|_{t=0}$ y $\mathcal{L}[dx(t)/dt]=sX(s)-x(0)$.



Ejercicio 4 (2,25 puntos)

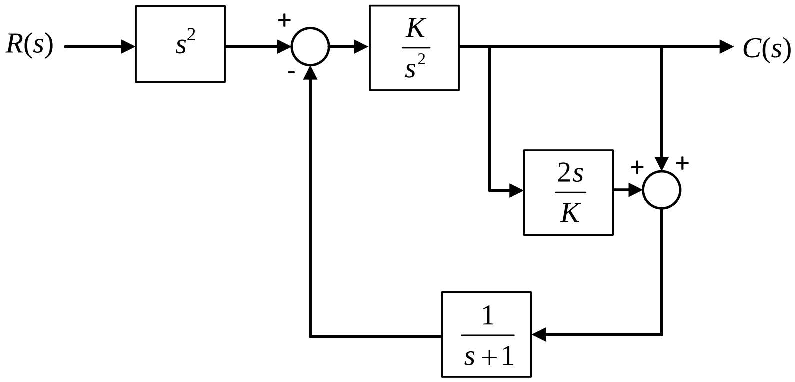
Se tiene un lazo de control en lazo cerrado, cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(Js+B)}$$

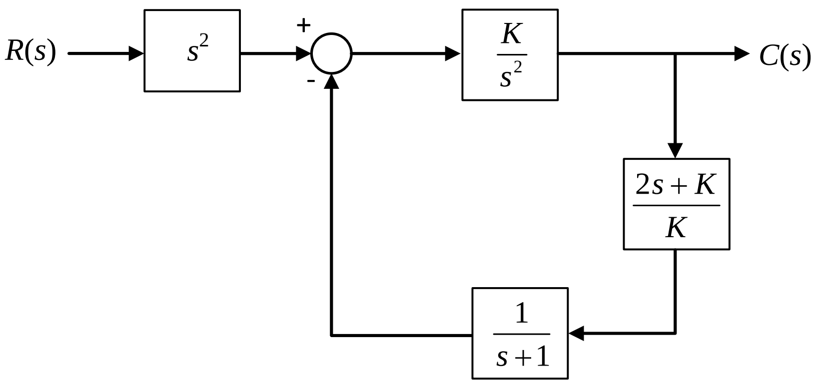
Analice los efectos que tiene la variación de los valores de K, J y B sobre el error de control en estado estacionario ante una rampa unitaria. ¿Qué tipo de sistema es según su error? Además de, analíticamente, ayúdese de trazados de respuestas utilizando un valor pequeño, medio y grande de K, suponiendo J y B constantes.

Ejercicio 1

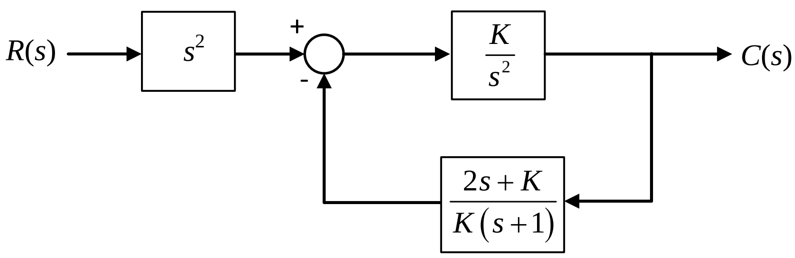
En primer lugar, se tiene que reducir el lazo de control propuesto utilizando el álgebra de bloques. Identificamos tres operaciones principales en el diagrama de bloques: (i) paralelo y (ii) retroalimentación, y (iii) el resultado de (i) y (ii) en serie con el bloque izquierdo, s^2. Utilizando la regla nº 4, movemos el punto de bifurcación que se encuentra a la derecha del punto de resta; saltando el bloque K/s^2 de izquierda a derecha. Esta operación resulta en el siguiente diagrama de bloques:



A continuación, se asocian en paralelo, sumándose, los bloques $2s/K$ y 1, cuyo punto común de origen es $C(s)$:



En efecto, los bloques $(2s+K)/K$ y $1/(s+1)$ se pueden asociar en serie (regla nº 1 del álgebra de bloques), resultando $(2s+K)/[K(s+1)]$, y constituyendo la rama de retroalimentación del lazo de control.



Aplicando la regla nº 6 (simplificar un *feedback* negativo), se tiene:

$$\frac{\frac{K}{s^2}}{1+\frac{K}{s^2}\frac{2s+K}{K(s+1)}}=\frac{K(s+1)}{s^2(s+1)+2s+K}=\frac{K(s+1)}{s^3+s^2+2s+K}$$

Nótese el signo "+" en el denominador (retroalimentación negativa).

Finalmente, multiplicamos el resultado obtenido por s^2 (asociados en cascada) teniendo la función de transferencia en lazo cerrado del sistema, $C(s)/R(s)$; a pesar de que dicha operación no tenga impacto en el análisis posterior de estabilidad.

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{Ks^2(s+1)}{s^3+s^2+2s+K}} \longrightarrow C(s)$$

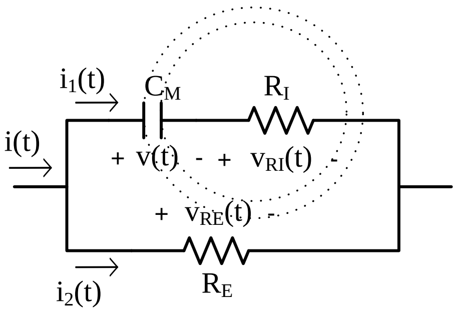
Una vez se tiene la función de transferencia $C(s)/R(s)$, aplicamos el criterio de Routh-Hurwitz pues el polinomio del denominador de la función de transferencia es de tercer orden. Esta característica es "sintomática" de que la simplificación puede ser acertada ya que tendríamos tres polos, tal y como especifica el enunciado del ejercicio. Por tanto:

s^3	1	2
s^2	1	K
s	$2-K\rightarrow 2$	
s^0	K	

Se obtiene una fila de ceros (polos complejos conjugador puros) si K=2 (ubicada en la fila de s). Por tanto, sustituyendo dicho valor en el polinomio auxiliar $P(s)$ -construido a partir de la fila de encima- se tiene: $P(s)=s^2+2$, cuya derivada es: $\mathrm{d}P(s)/\mathrm{d}s=2s$. A partir de aquí, se puede construir el resto de la tabla, donde no aparecen cambios de signo (polo restante situado en la parte izquierda del plano s). Por tanto, $C(s)/R(s)$ tendrá dos polos sobre el eje imaginario (complejos conjugados puros) y uno en el semiplano izquierdo (eje real negativo) cuando K=2.

Ejercicio 2

(i) En primer lugar, dibujamos el circuito para t>0, indicando todas las tensiones y corrientes en todos los elementos que constituyen el circuito:



Se aplica la ley de Kirchhoff de corrientes (LKC):

$$\mathrm{i(t)=i_1(t)+i_2(t)}$$

Las corrientes que circulan por las ramas superior e inferior del circuito son variables intermedias, pues no representan ni la entrada, $i(t)$, ni la salida que es la tensión de la membrana, $v(t)$. Por tanto, se deben expresar en términos de la tensión en bornes de los elementos por los cuales circulan dichas corrientes, $i_1(t)$ e $i_2(t)$:

$$\mathrm{i(t)=C_M\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v_{RE}(t)}{R_E}}$$

Nótese que, en la rama superior, se selecciona el condensador (pudiese haberse elegido R_I), ya que es el elemento que "contiene" la variable de salida, $v(t)$. Para finalizar, tan solo debemos "tocar" $v_{RE}(t)$ y expresarla en función de $i(t)$ y $v(t)$ utilizando al ley de Kirchhoff de tensiones (LKT):

$$\mathrm{i(t)=C_M\frac{dv(t)}{dt}+\frac{[v_{RI}(t)+v(t)]}{R_E}=C_M\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{R_E}+\frac{R_I}{R_E}i_1(t)=C_M\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{R_E}+\frac{R_I}{R_E}C_M\frac{dv(t)}{dt}}$$

Reordenando y normalizando, se puede obtener la ecuación diferencial que relaciona la tensión en la membrana celular, $v(t)$ (salida), e $i(t)$ (entrada) que representa la excitación aplicada a la célula:

$$\mathrm{C_M\left(1+\frac{R_I}{R_E}\right)\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{R_E}=i(t)\rightarrow\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{C_M(R_I+R_E)}=\frac{R_E}{C_M(R_I+R_E)}i(t)}$$

(ii) Se aplica la transformada de Laplace a la ecuación diferencial obtenida en (i) considerando condiciones iniciales nulas e $I(s)=I/s$ (escalón de fuerza I):

$$sV(s)+\frac{V(s)}{C_M(R_I+R_E)}=\frac{R_E}{C_M(R_I+R_E)}I(s)\rightarrow V(s)=\frac{I}{s}\frac{\frac{R_E}{C_M(R_I+R_E)}}{s+\frac{1}{C_M(R_I+R_E)}}$$

Para antitransformar al dominio del tiempo utilizando las tablas de la transformada de Laplace y obtener la respuesta temporal de la tensión en la membrana, es necesario aplicar el método de descomposición en fracciones simples. El denominador del cociente de polinomios en *s*, contiene dos raíces simples. Por tanto:

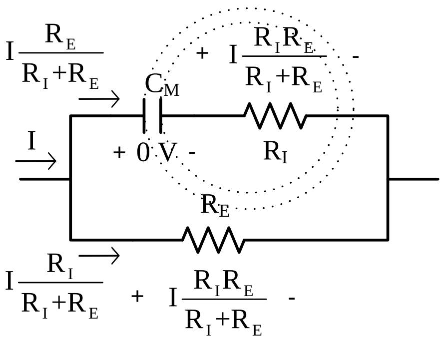
$$V(s)=\frac{I}{s}\frac{\frac{R_E}{C_M(R_I+R_E)}}{s+\frac{1}{C_M(R_I+R_E)}}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{1}{C_M(R_I+R_E)}}=\frac{A\left(s+\frac{1}{C_M(R_I+R_E)}\right)+Bs}{s\left(s+\frac{1}{C_M(R_I+R_E)}\right)}$$

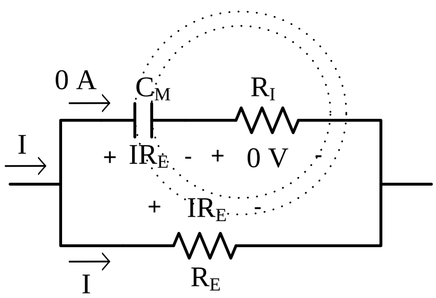
Igualando los numeradores de las dos expresiones inicial y final, se pueden obtener los coeficientes auxiliares: $A=IR_E$ y $B=-IR_E$. Sustituyendo y aplicando la transformada inversa de Laplace, se tiene:

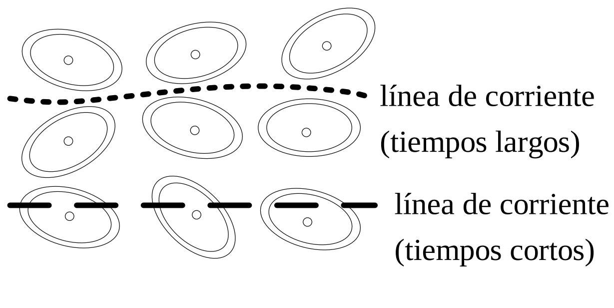
$$V(s)=\frac{IR_E}{s}-\frac{IR_E}{s+\frac{1}{C_M(R_I+R_E)}}\rightarrow v(t)=IR_E\left(1-e^{-t/\tau}\right),\quad \tau=C_M(R_I+R_E)$$

En el caso de considerar un escalón unitario, la respuesta sería: $v(t)=R_E(1-\exp[-t/\tau])$.

Analicemos cualitativamente el funcionamiento del circuito eléctrico equivalente de la célula. Consideramos la referencia temporal $t=0$, pues $i(t)=Iu(t)$. Por tanto, para $t<0$, todas las corrientes y tensiones del circuito son nulas. En $t=0$, se aplica la excitación. En el instante justo después de inyectar la entrada en corriente (función escalón), $t=0^+$, el condensador se comporta como un cortocircuito, pues estaba descargado inicialmente (a 0 V). En efecto, los condensadores "no permiten" cambios bruscos en la tensión que soportan entre sus bornes. Por tanto, circulará corriente por ambas ramas del circuito, ponderadas por los valores de R_I y R_E (divisor de corriente). Desde un punto de vista biológico, la corriente inyectada circulará no sólo por el medio extracelular sino también por el entorno intracelular (la membrana apenas presentará impedancia, equivalente a un cortocircuito). Para tiempos largos, $t\rightarrow\infty$, la membrana se ha cargado; habiendo almacenado energía. En este escenario, la corriente circulará por el medio extracelular (bordeando las membranas celulares) si ha pasado un tiempo suficientemente largo, $t=4\tau$ (la corriente no es capaz de penetrar la membrana celular, pues se comporta como un circuito abierto). Eléctricamente, toda la corriente circulará por la rama inferior del circuito eléctrico equivalente de la célula (resistencia extracelular, R_E).

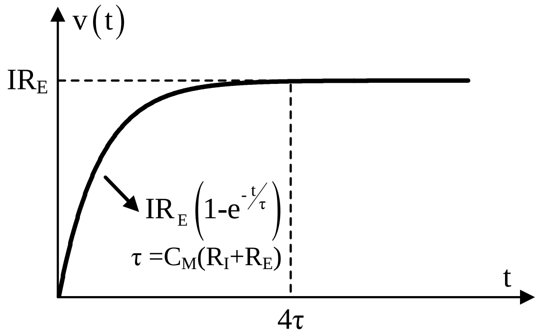






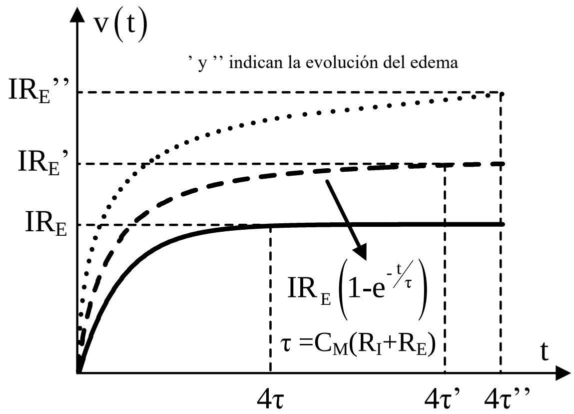
La anterior figura muestra un trozo de tejido constituido por un conjunto de células y que está recorrido por líneas de corriente. Ambos tipos de corriente (para tiempos cortos y largos) se dibujan en la ilustración.

Finalmente, esbozamos la tensión en la membrana celular identificando los valores más significativos.



En efecto, la constante de tiempo es: $\tau=C_M(R_I+R_E)$; el valor inicial $v(0)=0$ V y el valor final $v(\infty)=IR_E$.

(iii) Típicamente, por los cambios de agua producidos por ósmosis inducida, se produce una reducción del volumen extracelular repercutiendo en el aumento de la resistencia R_E (edema intracelular). Desde la respuesta temporal obtenida en (ii), se pueden obtener los cambios en el comportamiento en el dominio del tiempo de la membrana celular:



Al aumentar R_E, el valor final de la respuesta temporal (régimen permanente), se hace cada vez más grande. La constante de tiempo también aumenta, pues es proporcional a la resistencia local de la célula (R_I+R_E). Por tanto, la "velocidad de subida" disminuye, pues la respuesta es más lenta ya que el término transitorio exponencial dura más en el tiempo.

Ejercicio 3

(i) La ecuación característica del sistema es:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=0$$

con condiciones iniciales: $x(0)=0{,}1$ m y $dx(t)/dt|_{t=0}=0{,}05$ m/s. Nótese que $x(t)$ es considerada desde la posición de equilibrio (antes de la aplicación de la fuerza externa).

La transformada de Laplace de la anterior ecuación es:

$$m\left[s^2X(s)-sx(0)-\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0}\right]+b[sX(s)-x(0)]+kX(s)=0$$

que, reordenando, resulta en:

$$X(s)[ms^2+bs+k]=mx(0)s+m\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0}+bx(0)$$

Despejando $X(s)$ y sustituyendo los valores numéricos, se obtiene la solución final:

$$X(s) = \frac{mx(0)s+m\frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=0}+bx(0)}{ms^2+bs+k} = \frac{0,1s+0,35}{s^2+3s+5}$$

La posición y velocidad residual de la anterior excitación actúan como fuerzas externas de duración limitada en el dominio de *s*, acompañando al sentido del movimiento o $x(t)$.

(ii) Los polos del sistema son: s=-1,5±1,65j (zona subamortiguada estable).
La respuesta previamente obtenida puede ser reescrita como:

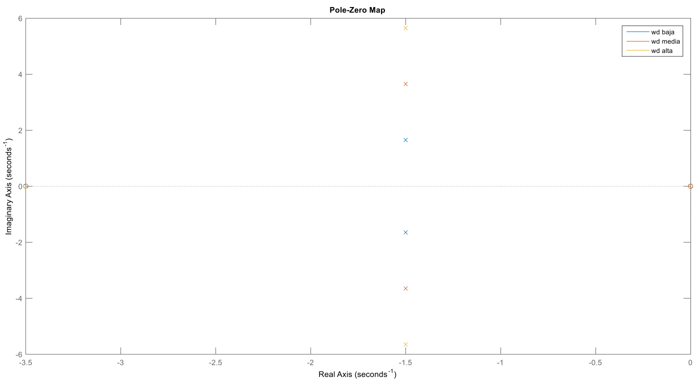
$$X(s)=\frac{0,1s^2+0,35s}{s^2+3s+5}\frac{1}{s}$$

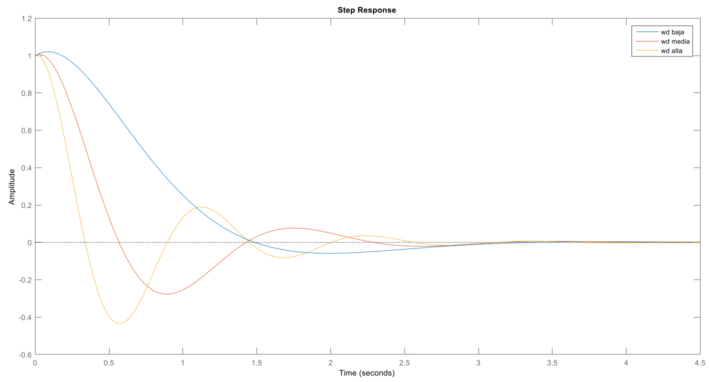
Y, por tanto, dicha respuesta pudiera obtenerse como la respuesta a escalón de la siguiente función de transferencia:

$$G(s)=\frac{0,1s^2+0,35s}{s^2+3s+5}$$

A partir de esta consideración, se propone estudiar los escenarios requeridos en el ejercicio:

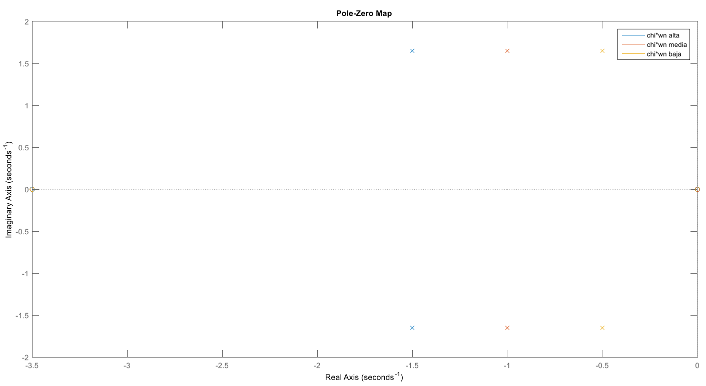
- Si la parte real de los polos $\xi\omega_n$, se mantiene constante y la parte imaginaria ω_d, varía; se tiene:

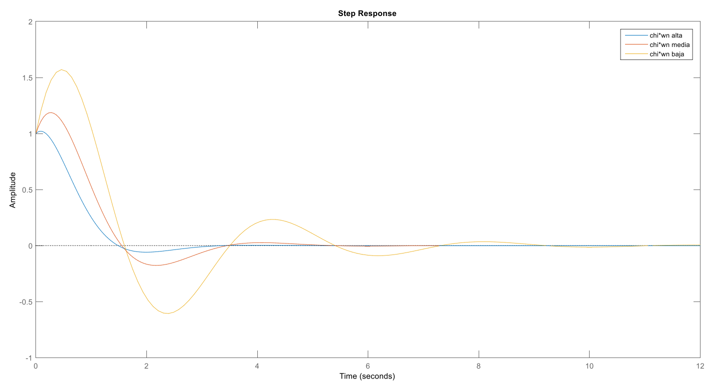




Los polos se desplazan, verticalmente, hacia arriba o abajo, modificando la frecuencia de oscilación de la respuesta temporal. Sin embargo, los términos exponenciales se mantienen invariables, eliminando las oscilaciones "a la misma velocidad" y, por tanto, manteniendo el mismo tiempo de establecimiento para todos los escenarios. El resto de parámetros característicos de los sistemas de segundo orden subamortiguados cambian, derivando en menores tiempos de alcance, pico y subida y mayores sobreoscilaciones a medida que aumenta ω_d.

- A continuación, analizamos el escenario en el que la parte real de los polos $\xi\omega_n$, varía y la parte imaginaria ω_d, se mantiene constante:

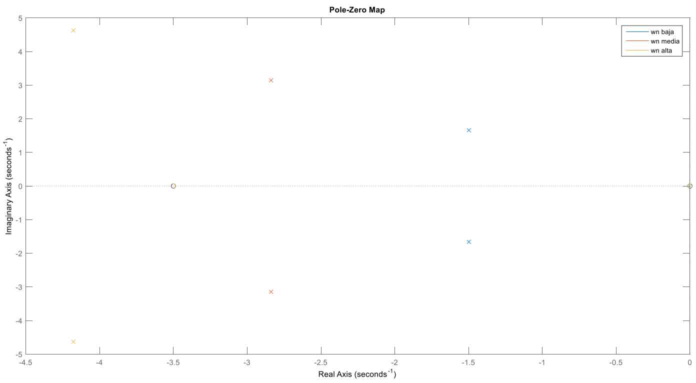


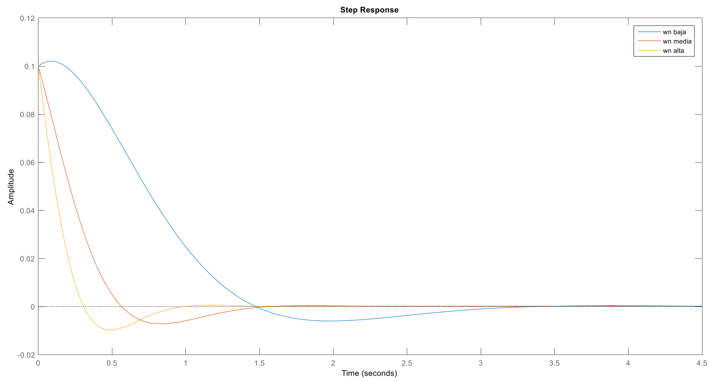


En efecto, la frecuencia de oscilación se mantiene constante.

Sin embargo, al variar el efecto de los términos exponenciales (parte real), las oscilaciones remiten a distintas velocidades: Los polos situados más a la izquierda del plano *s* son más rápidos y eliminan antes las oscilaciones. El tiempo de pico y alcance se mantienen constantes. El tiempo de estabilización y las sobreoscilaciones aumentan notoriamente a medida que disminuye ω_d. El tiempo de subida casi no varía. Los polos se desplazan horizontalmente.

- Finalmente, cuando se mantiene constante el amortiguamiento ξ y varía ω_n, resulta:





En este contexto, los polos se "mueven" diagonalmente, manteniendo, en la respuesta temporal, la sobreoscilación constante (único parámetro que tan solo depende de ξ). El resto de parámetros varían, pues todos dependen de ω_n. Los tiempos de alcance, subida, pico y estabilización tienen una relación inversa con la frecuencia natural no amortiguada; es decir, si baja, los parámetros temporales suben, y viceversa. Por tanto, la respuesta temporal se va haciendo más lenta, en términos generales, a medida que disminuye la frecuencia natural no amortiguada.

Ejercicio 4

La función de transferencia que relaciona el error de control, $E(s)$, y la entrada a seguir, $R(s)$, en un lazo convencional es:

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

Por inspección, se detecta fácilmente que el error de control depende de la función de transferencia en lazo abierto. Por tanto, sustituyendo y reordenando términos, se obtiene la expresión de $E(s)$ ante una rampa unitaria, $R(s)=1/s^2$:

$$E(s)=R(s)\frac{1}{1+G(s)H(s)}=\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+\dfrac{K}{s(Js+B)}}=\frac{1}{s^2}\frac{Js^2+Bs}{Js^2+Bs+K}$$

Aplicando el teorema del valor final, el error de control en régimen permanente, e_{ss}, resulta:

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\frac{Js^2+Bs}{Js^2+Bs+K}=\frac{B}{K}$$

El error para tiempos largos es independiente del valor de J. A medida que K aumente, el error disminuirá y viceversa (inversamente proporcionales). Finalmente, es necesario resaltar que e_{ss} y B mantienen una relación de proporcionalidad (si uno aumenta el otro también y al contrario).
En efecto, se trata de un sistema tipo 1 ya que tiene un error "no nulo" ante una entrada de velocidad (rampa). Nótese que la constante de error de velocidad es: $k_v=1/e_{ss}=K/B$, o bien

$$k_v=\lim_{s\to 0} sG(s)H(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{K}{s(Js+B)}=\frac{K}{B}$$

Por tanto, se puede reducir el error en régimen permanente, e_{ss}, aumentando K o disminuyendo B. Sin embargo, estas variaciones conducen a una reducción del factor de amortiguamiento ξ. En efecto, el polinomio característico normalizado del sistema (denominador de la función de transferencia) es: $s^2+(B/J)s+(K/J)$. Extrayendo los parámetros característicos del sistema de segundo orden, resulta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad \xi = \frac{B}{2\sqrt{JK}}$$

De hecho, matemáticamente, ξ es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de *K*. Estos resultados permiten verificar la anterior asunción, obteniéndose una respuesta más rápida, oscilatoria y precisa (para tiempos largos) a medida que se aumenta el valor de *K*. Por otro lado, una disminución de *K*, conduce a una respuesta temporal más lenta, sin oscilaciones y con mayor error en régimen permanente (el término transitorio tarda más tiempo en desaparecer). Fácilmente, se puede deducir que las características recogidas para ambos supuestos se relacionan con sistemas sub- y sobreamortiguados, respectivamente. Para finalizar el análisis, la siguiente figura representa la evolución de la respuesta temporal para diferentes valores de *K*: