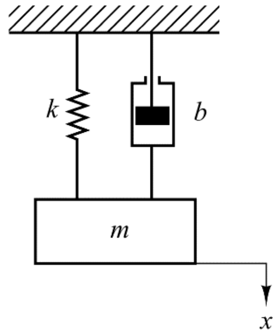
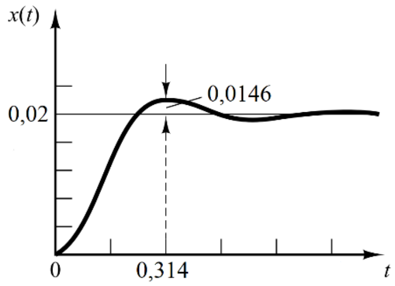
Ejercicio 1 (3 puntos)

Se solicita estudiar el comportamiento dinámico de un sistema vibratorio mecánico.



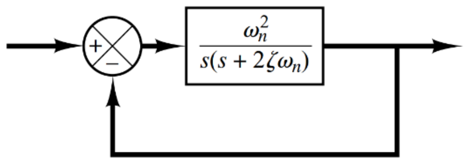
(i) En primer lugar, se busca caracterizar el sistema. Al aplicar a la entrada un escalón de fuerza 2, $f(t)=2u(t)$, la masa oscila, tal y como se muestra en la respuesta de la figura. Se pide determinar el valor de los parámetros característicos del sistema (m, b y k) a partir de la forma de la respuesta resultante. Téngase en cuenta que el desplazamiento $x(t)$ se mide desde la posición de equilibrio $x(0)=0$ m. Las unidades de m, b y k son kg, Ns/m y N/m, respectivamente.



(ii) A continuación, se requiere explorar el comportamiento del sistema mecánico en escenarios complejos. Considérese ahora que la masa se desplaza 0,05 m y se suelta sin velocidad inicial, esto es $x(0)=0{,}05$ m y $\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t|_{t=0}=0$ m/s. ¿Qué tipo de respuesta se obtiene? Determine la frecuencia observada de la vibración a partir de la respuesta $x(t)$. Después, especifique la amplitud de la respuesta cuatro ciclos después. ¿Qué esta ocurriendo? Razone la respuesta.

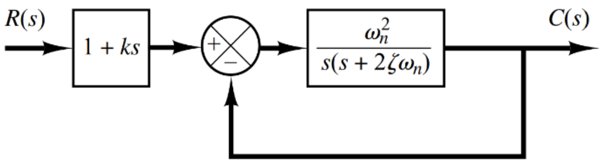
Ejercicio 2 (2,75 puntos)

Considere el diagrama de bloques que se muestra en la figura. Se pide:



(i) Determine el error verdadero en régimen permanente del sistema considerando entrada rampa unitaria. ¿Coincide con el error de control? ¿Por qué?.

(ii) Demuestre que el error verdadero en estado estacionario, al seguir la entrada $r(t)=t$, puede eliminarse si $R(s)$ se introduce en el sistema a través de un filtro PD (ver figura), seleccionando adecuadamente el valor de k. Especifíquelo y exponga las repercusiones de añadir dicho bloque en la forma de onda de la respuesta temporal, $c(t)$.



(iii) Para subsanar complicaciones que pudieran acaecerse en el escenario dado en (ii), se propone añadir un polo real al filtro. ¿Dónde debiera situarse en el plano complejo para poder aplicar una aproximación por polos dominantes y así no modificar la forma de onda de la respuesta? Considere $\xi>0$.

Ejercicio 3 (4,25 puntos)

Se tiene un sistema formado por una planta $G(s)$ y un regulador $R(s)$ en serie; todo ello realimentado negativa y unitariamente. Se sabe que la planta tiene dos polo en $s=-1$ y $s=-2$ y, que si se somete a una entrada escalón unitario, el valor de la salida en estado estacionario es 5 (ganancia). Se pide:

(i) Realice un esbozo del lugar de las raíces (LDR), especificando los valores de ganancia característicos que marquen el tipo de sistema (*oscilario sostenido*, *subamortiguado*, *críticamente amortiguado* o *sobremortiguado*).

(ii) Calcule el regulador más sencillo que posibilite lograr una respuesta subamortiguada ($\xi=0{,}5$) en lazo cerrado, frente a una entrada en escalón unitario. Justifique detalladamente su respuesta.

(iii) A partir de (ii), especifique la posición de los polos y los parámetros característicos de la respuesta.

(iv) Hasta ahora, se tiene una respuesta que exhibiría un error infinito en régimen permanente ante una entrada en rampa. Por ello, se solicita diseñar un regulador que permita controlar el error (valor finito), manteniendo el factor de amortiguamiento y teniendo una frecuencia natural de $\omega_n=1{,}5$ rad/s. Selecciónelo paso a paso, desechando opciones más sencillas y justificando las razones.

Ejercicio 1

(i) Tras aplicar las leyes de Newton y la transformada de Laplace considerando condiciones iniciales nulas, es fácilmente reconocible que la función de transferencia del sistema mecánico vibratorio es:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-b\frac{dx(t)}{dt}-kx(t)+f(t)$$

$$X(s)[ms^2+bs+k]=F(s)\rightarrow\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms^2+bs+k}$$

siendo:

$$F(s)=\frac{2}{s}$$

es decir, un escalón unitario de fuerza 2. En efecto, el amortiguador y el muelle se oponen al movimiento de la masa inducido por la fuerza externa. De ahí, el signo menos en el sumatorio de fuerzas. Por tanto, el desplazamiento de la masa en el dominio de Laplace, resulta:

$$X(s)=\frac{2}{s(ms^2+bs+k)}$$

Para caracterizar el sistema mecánico, se proporciona la respuesta temporal $x(t)$ con tres parámetros característicos (desplazamiento en régimen permanente, $x(\infty)$, tiempo de pico, t_p, y sobreoscilación, M_p) de los que se podrán obtener el valor de los tres mecanismos del sistema (m, b y k).

En primer lugar, se calcula el valor de la respuesta en régimen permanente aplicando el teorema del valor final y se iguala a 0,02 (valor extraído de la figura):

$$x(\infty)=\lim_{s\to 0}sX(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{2}{s(ms^2+bs+k)}=\frac{2}{k}=0{,}02\rightarrow k=100\ \mathrm{N/m}$$

A continuación, se analiza la sobreoscilación propuesta. A partir del valor de pico, se puede obtener el porcentaje de sobrepaso y el factor de amortiguamiento asociado:

$$M_p=\frac{x(t_p)-x(\infty)}{x(\infty)}=\frac{0{,}0146}{0{,}02}=0{,}73\rightarrow 73\%$$

$$M_p=\exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)=0{,}73\rightarrow\xi=0{,}1$$

Se trata, lógicamente, de un sistema subamortiguado tal y como se podía intuir por la forma de onda de la respuesta temporal. Ya que el sobrepaso es muy elevado, el sistema presenta muchas oscilaciones y tiene un amortiguamiento muy bajo, acercándose a un sistema oscilatorio sostenido. Por último, se analiza el tiempo de pico,

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi}{\omega_n}=0{,}314\rightarrow\omega_n=10\ \mathrm{rad/s}$$

obteniendo así la pulsación natural no amortiguada. Por tanto, se tiene el valor de ξ y ω_n, pudiéndolo comparar con la forma paramétrica normalizada de la función de transferencia:

$$\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{\frac{1}{m}}{s^2+\left(\frac{b}{m}\right)s+\frac{k}{m}}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

resultando:

$$\omega_n^2=\frac{k}{m}\rightarrow m=\frac{k}{\omega_n^2}=1\ \mathrm{kg}$$

$$2\xi\omega_n=\frac{b}{m}\rightarrow b=2\xi m\omega_n=2\ \mathrm{Ns/m}$$

(ii) La ecuación de movimiento del sistema, ahora, es:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{dx(t)}{dt}+kx(t)=0 \rightarrow \frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}+100x(t)=0$$

sustituyendo, por supuesto, los valores numéricos obtenidos en (i). El movimiento se infiere en este escenario anómalo gracias a las condiciones iniciales, $x(0)$=0,05 m y $dx(t)/dt|_{t=0}$=0 m/s, particularmente la de movimiento. Sin embargo, las características del sistema son las mismas, por lo que el tipo de sistema se mantiene: *subamortiguado* ($0<\xi<1$).

De (i), se sabe que ξ=0,1 y ω_n=10 rad/s. Por tanto, la frecuencia amortiguada de la respuesta es ω_d:

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=9{,}95 \text{ rad/s}$$

En efecto, las oscilaciones de $x(t)$, cuya frecuencia es ω_d, se amortiguan con el paso del tiempo ya que la solución es del tipo:

$$x(t)=x(0)e^{-\xi\omega_n t}\left[\cos(\omega_d t)+\frac{\xi}{1-\xi^2}\operatorname{sen}(\omega_d t)\right]$$

Esto se puede comprobar calculando la amplitud de la respuesta al variar los ciclos. El periodo sería $T=2\pi/\omega_d$=0,63 s, resultando:

$$x(T)=x(0)e^{-\xi\omega_n T}=0{,}0266 \text{ m} \ \text{ y } \ x(4T)=x(0)e^{-\xi\omega_n T}=0{,}004 \text{ m}$$

La amplitud de la exponencial y que "guía" la respuesta y las oscilaciones en una respuesta subamortiguada se reduce considerablemente a los cuatro ciclos, siendo el valor de desplazamiento despreciable.

Ejercicio 2

(i) El error verdadero se define como:

$$E_{\text{verdadero}}(s)=R(s)-C(s)=\frac{1}{s^2}\left(1-\frac{\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}}{1+\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}}\right)=\frac{1}{s^2}\frac{s(s+2\xi\omega_n)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

donde:

$$R(s)=\frac{1}{s^2} \ \text{ y } \ C(s)=R(s)\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

es decir, entrada rampa unitaria y la salida calculada a partir de la regla 6 del algebra de bloques. Nótese que $G(s)$ representa el bloque de la planta y $H(s)$=1. Si, finalmente, se aplica el teorema del valor final, resulta:

$$e_{\text{verdadero}}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE_{\text{verdadero}}(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\frac{s(s+2\xi\omega_n)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{2\xi}{\omega_n}$$

A continuación, se compara con el error de control:

$$E_{\text{control}}(s)=R(s)\frac{1}{1+G(s)}=\frac{1}{s^2}\left(\frac{1}{1+\frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}}\right)=\frac{1}{s^2}\frac{s(s+2\xi\omega_n)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \rightarrow e_{\text{control}}(\infty)=\frac{2\xi}{\omega_n}$$

En efecto, el error verdadero y de control coinciden ya que la realimentación es unitaria (ver Teoría).

(ii) Al introducir el filtro PD a la entrada, la función de transferencia en lazo cerrado resulta:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{(1+ks)\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

siendo:

$$E_{verdadero}(s)=\frac{1}{s^2}\left(\frac{s^2+2\xi\omega_n s-\omega_n^2 ks}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right)$$

Se aplica una teoría análoga a (i) utilizando el teorema del valor final:

$$e_{verdadero}(\infty)=\lim_{s\to 0} sE_{verdadero}(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\left(\frac{s^2+2\xi\omega_n s-\omega_n^2 ks}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right)=\frac{2\xi-\omega_n k}{\omega_n}$$

Por tanto, si $k=2\xi/\omega_n$, el error de la salida, $c(t)$, en régimen permanente, $c(\infty)$, al seguir una rampa unitaria, $r(t)=t$, será 0. Sin embargo, al introducir dicho filtro PD en el diagrama de bloques, se incluye un cero de valor $s=-1/k$ en la función de transferencia en lazo cerrado del sistema. Esto conlleva repercusiones en el análisis de la respuesta, pues requeriría un estudio más complejo y dependiente de la situación del cero en el mapa de polos.

(iii) La mínima variación de ξ y ω_n por perturbaciones (agentes externos), haría que lo conseguido en (ii) quedará en nada, pues k debe ser un valor fijo y constante. Por ello, se introduce un polo real en el filtro a modo de compensador de adelanto/retardo.

Ahora, el objetivo es aplicar la aproximación por polos dominantes, situando el polo introducido lo suficientemente lejos de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado original. Sin embargo, al no tener valores numéricos, el análisis se complica, haciéndolo dependiente de las características del sistema (*subamortiguado*, *críticamente amortiguado*, *sobreamortiguado*). El polinomio característico (denominador) de la función de transferencia es:

$$P(s)=s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

siendo sus polos:

$$s=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2},\quad 0<\xi<1$$
$$s=-\omega_n,\quad \xi=1$$
$$s=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1},\quad \xi>1$$

Por tanto, si consideramos el polo simple del filtro en $s=-a$, este debe cumplir el siguiente requerimiento en comparativa con la parte real de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado:

$$a>10\xi\omega_n,\quad 0<\xi<1$$
$$a>10\omega_n,\quad \xi=1$$
$$a>10\left(\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}\right),\quad \xi>1$$

Especialmente crítico es el caso *sobreamortiguado*, donde se selecciona el polo más alejado del origen ("el más negativo"). Nótese que se escoge un criterio x10 para asegurar la dominancia de los polos de interés.

Ejercicio 3

(i) Se solicita esbozar el LDR del sistema descrito.

En primer lugar, se nombran los dos bloques principales:

$$G(s)=\frac{K_{planta}}{(s+1)(s+2)}\ \text{ y }\ H(s)=1$$

En efecto, no se proporciona el dato de la ganancia de la planta $G(s)$, K_{planta}. Para ello, será necesario utilizar el valor de la salida en estado estacionario ante una entrada en escalón unitario. Téngase en cuenta que la entrada se aplica a la planta y no al conjunto de bloques. Por tanto, aplicando el teorema del valor final, se tiene que:

$$5=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}G(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{K_{planta}}{(s+1)(s+2)}\rightarrow K_{planta}=10$$

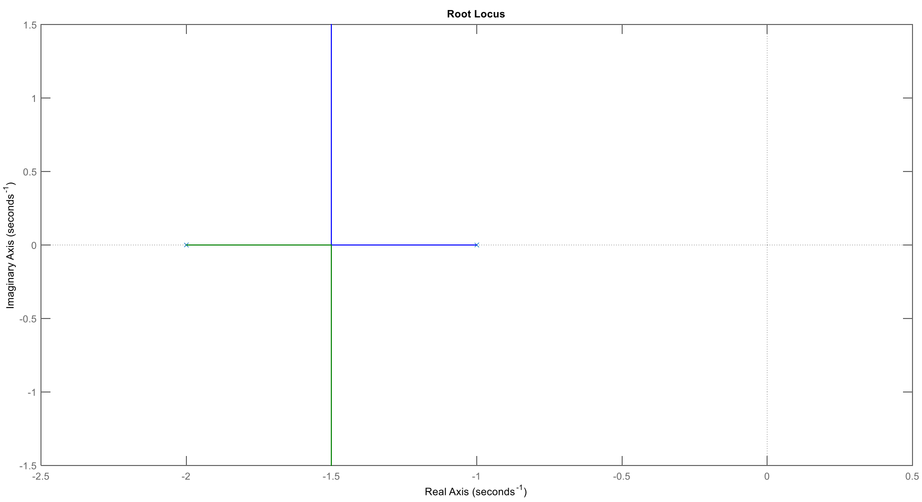
resultando:

$$G(s)=\frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

A continuación, se implementan los 7 pasos necesarios para realizar el bosquejo del LDR.

- Paso 1: Identificación y ubicación de polos y ceros en lazo abierto. Se tienen 2 polos en -1 y -2 (semiplano negativo del eje real) y ningún cero.
- Paso 2: Número de ramas. Por lo dado anteriormente: n=2 y m=0. El número de ramas, por tanto, es: 2. Nótese que n y m denotan el número de polos y ceros, respectivamente.
- Paso 3: Identificación de segmentos sobre el eje real. A partir de los datos provistos en el paso 1, se identifica fácilmente que el único segmento que pertenece al LDR es de -1 a -2. Nótese que el rango dado no indica el sentido de la rama.
- Paso 4: Cálculo de asíntotas.
  a) Número de asíntotas: n-m=2.
  b) Ángulo de las asíntotas: 90º y 270º.
  c) Centroide:
  $$\sigma=\frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ polos - n}^{\text{o}} \text{ ceros}}=\frac{(-1-2)}{2-0}=-1{,}5$$
- Paso 5: Puntos de corte con el eje imaginario. Nos fijamos en el polinomio auxiliar:
  $$1+KG(s)H(s)=1+K\frac{10}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+1)(s+2)+10K}{s(s+2)}\rightarrow s^2+3s+(10K+2)$$
  En este escenario, se concluye fácilmente que ningún valor de K, para K>0, hará posible que el polinomio característico contenga raíces complejas imaginarias puras. Siempre serán positivos todos los coeficientes del polinomio de segundo orden dado. Esto es predecible a través del cálculo de las asíntotas (90º y 270º en s=-1,5).
- Paso 6: Puntos de ruptura o salida del eje real. En este punto, es necesario conocer el sentido de las ramas. Para ello, se impone que:
  $$1+KG(s)H(s)=0 \rightarrow 1+K\frac{10}{(s+1)(s+2)}=0 \rightarrow K=\frac{-(s^2+3s+2)}{10}$$
  $\frac{dK}{ds}=-\frac{1}{5}s-\frac{3}{10}=0 \rightarrow s=-1{,}5$ (punto medio del segmento sobre el eje real identificado)
- Paso 7: Ángulo de salida o llegada de las raíces. Ya que no existen ni polos ni ceros con parte real y compleja conjugada, este paso no es necesario llevarlo a cabo.

Por tanto, el bosquejo del LDR previamente argumentado resulta con el siguiente esquema variable en función de la ganancia K:



A partir de la figura, se observa que el LDR no "pasa" para ningún valor de K (K>0) por el semiplano positivo del eje real ni por el eje imaginario. Por tanto, el lazo de control nunca será inestable ni críticamente estable. Tal y como se vio en teoría, el sentido de las ramas es "de polos a ceros", por lo que para bajos valores de K –0<K<(1/40)–, los polos del sistema se sitúan separadamente sobre el eje real (sistema sobreamortiguado, ξ>1). Justo cuando K=1/40, los polos son dobles ($s^2+3s+2{,}25$; s=-1,5) y, por tanto, se tendrían un sistema críticamente amortiguado, ξ=1. Finalmente, para K>1/40, resulta una respuesta subamortiguada, 0<ξ<1, ya que los polos tienen tanto parte real como imaginaria. Cabe destacar que el factor de amortiguamiento irá disminuyendo a medida que aumenta K, obteniendo una respuesta más oscilatoria predominante frente a los efectos exponenciales decrecientes. El valor crítico K=1/40, se puede obtener a partir del polinomio característico hallado en el paso 5 del bosquejo del LDR.

(ii) y (iii) En primer lugar, se explorará la opción de un controlador proporcional. Parece bastante factible, pues al tener asíntotas de 90º y 270º, las líneas imaginarias de ξ constante cortarían siempre el LDR. La parte real de los polos debe ser s=-1,5 pues es el único punto del eje real que contiene parte imaginaria perteneciente al LDR. Si ξ=0,5 y la parte real de los polos de un sistema subamortiguado es $s=-\xi\omega_n$, fácilmente se obtiene que ω_n=3 rad/s. A partir de dicho valor, se puede obtener la parte imaginaria de los polos, resultando:

$$s=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-1{,}5\pm j3\sqrt{1-0{,}5^2}=-1{,}5\pm j2{,}6$$

Finalmente, de la condición de módulo del LDR,

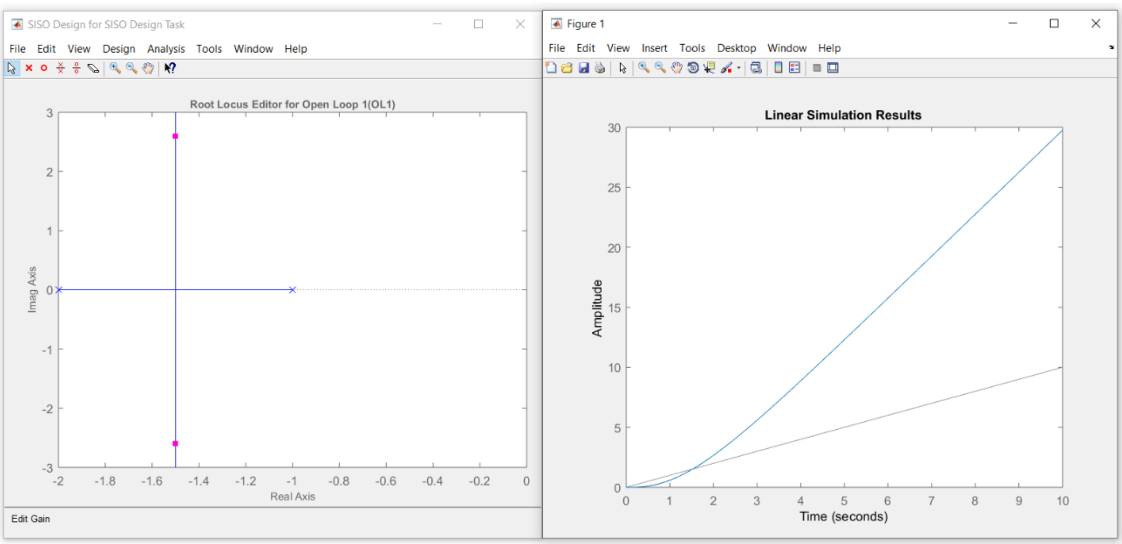
$$\left|\frac{10}{(s+1)(s+2)}\right|=\frac{1}{K}$$

sustituyendo s=-1,5±2,6j, se puede extraer el valor de la ganancia del controlador: K=0,7. Por tanto, el controlador sería:

$$C(s)=0{,}7$$

En este punto, el lector se puede preguntar: ¿por qué aparecen valores tan bajos de ganancia (K=1/40 y 0,7) hasta ahora? Esto es porque la planta tiene mucha ganancia, K_{planta}=10, por sí sola, lo que hace decrementar el valor de la "proporcionalidad" del controlador.

(iv) La respuesta resultante con el diseño dado en (ii) es:



En efecto, se obtiene un error en régimen permanente infinito ante una entrada en rampa unitaria. Según los requerimientos solicitados, sería necesario "subir" de tipo de sistema. Es decir, se tiene un sistema tipo 0 y habría que contar con uno tipo 1 para controlar el error de velocidad. Esto se consigue añadiendo un polo en el origen a la función de transferencia en lazo abierto del sistema. Por ello, tan solo quedarían las opciones de un controlador PI o PID. El resto de compensadores y/o reguladores no dotarían al sistema de dicha condición necesaria.

A partir de los datos proporcionados, los polos deben situarse en:

$$s=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-0{,}75\pm j1{,}5\sqrt{1-0{,}5^2}=-0{,}75\pm j1{,}3$$

A continuación, se propone una solución sencilla y aproximada basada en deducciones simples.
Se considera la solución más sencilla: controlador PI. Puesto que dicho regulador añade un polo y un cero, las asíntotas del LDR seguirán siendo 90º y 270º. Antes, el centroide era s=-1,5. Ahora hay que conseguir que sea aproximadamente s=-0,75, haciendo así que las ramas circulen hacia arriba/abajo en dicho punto del eje real. Por tanto:

$$\sigma=\frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{\text{nº polos - nº ceros}}=\frac{(-1-2-0)-(-z)}{3-1}=-0{,}75 \rightarrow z=-1{,}5$$

Se podría tomar un valor algo más bajo teniendo en cuenta que este tipo de LDR suelen “curvarse” cerca del punto de ruptura sobre el eje real. Se fija, por ejemplo, z=-1,4. Tan solo, faltaría fijar el valor de la ganancia del controlador. Esto se puede hacer mediante la condición de magnitud del LDR, tal y como se realizó en el apartado (ii):

$$|C(s)G(s)|=\left|\frac{(1+0{,}71s)}{s}\frac{10}{(s+1)(s+2)}\right|=\frac{1}{K}$$

sustituyendo s=-0,75±1,3j, se puede extraer el valor de la ganancia del controlador: K=0,35.
Por tanto, el controlador resultaría:

$$C(s)=0{,}35\frac{1+0{,}71s}{s}$$