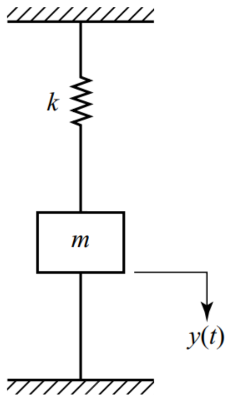
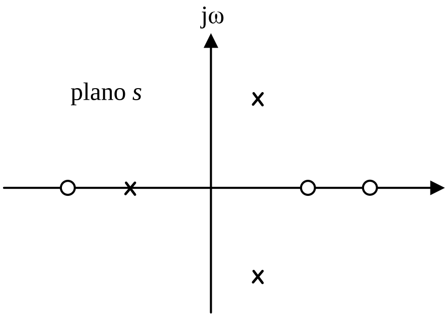
Ejercicio 1 (2,5 puntos)

Considere el sistema mecánico simple que se muestra en la figura, teniendo condiciones iniciales no nulas. Es decir, la masa "conserva" desplazamiento, $y(0)\neq 0$ m, y velocidad, $dy(t)/dt|_{t=0}\neq 0$ m/s, en el instante t=0 s. Se pide:



(i) Indique el circuito mecánico equivalente, en el dominio de s, teniendo en cuenta dichas condiciones iniciales. Para ello utilice la siguiente relación de la transformada de Laplace: $\mathscr{L}[d^2y(t)/dt^2]=s^2Y(s)-sy(0)-dy(t)/dt|_{t=0}$. ¿A qué familia de entradas se asemejan "las condiciones iniciales"?

(ii) Compare el escenario de (i) con la introducción de una entrada en impulso unitario (hacia abajo), $f(t)=\delta(t)$, pero ahora sin condiciones iniciales. ¿Qué diferencias se encuentran?

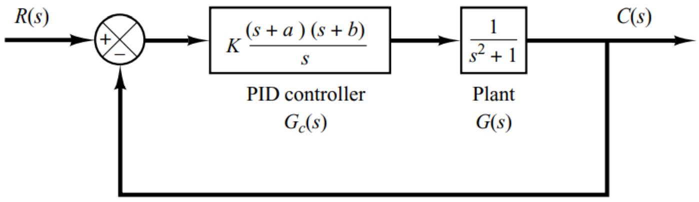


Ejercicio 2 (1,25 puntos)

La figura adjunta muestra el diagrama de polos y ceros en lazo abierto de un sistema. Específicamente y sin conocer las funciones de transferencia de origen, hay dos posibilidades para el trazado del LDR. Esboce ambas e indique si ambos son escenarios reales.

Ejercicio 3 (2,25 puntos)

Considere el diagrama de bloques de la figura derecha. Se desea diseñar un controlador PID, de tal forma que los polos dominantes en lazo cerrado estén ubicados en $s=-1\pm j\sqrt{3}$. Para dicho controlador, elija, por conveniencia, a=1 y, posteriormente, determine los valores de b y K. Utilice las condiciones de módulo y fase del LDR. Dibuje el diagrama del lugar de las raíces para el sistema diseñado.



Ejercicio 4 (2,5 puntos)

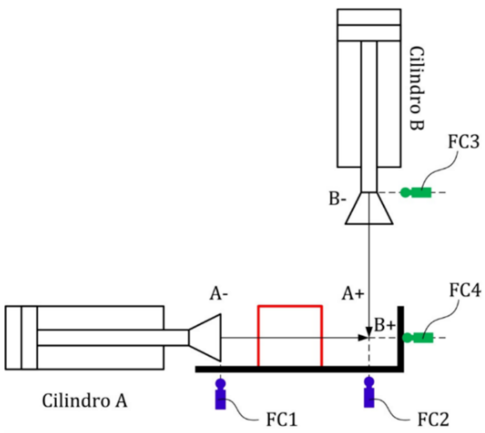
Considere un circuito RC en serie, siendo R una resistencia variable (potenciómetro). Teniendo en cuenta las impedancias de la resistencia, $Z_R(\omega)=R$ y el condensador, $Z_C(\omega)=1/j\omega C$, calcule la expresión total, $Z(\omega)=Z_R(\omega)+Z_C(\omega)$ y, finalmente la admitancia resultante, $Y(\omega)=1/Z(\omega)$.

(i) Esboce los diagramas de Bode de módulo y fase para diferentes valores de R. ¿Qué se obtiene?. ¿Qué se está representando?. Razone la respuesta, a partir de la expresión obtenida de la admitancia, $Y(\omega)=I(\omega)/V(\omega)$.

(ii) Dibuje el diagrama equivalente de Nyquist.

Ejercicio 5 (1,5 puntos)

Sea el automatismo de marcaje de piezas de la figura que consiste en un pistón A que transfiere la pieza para su marcaje y en un pistón B que realiza dicho marcaje. El pistón A se comanda mediante dos señales A- que desplaza el pistón A hacia la izquierda y A+ que lo desplaza hacia la derecha. De igual forma, el cilindro B se comanda mediante las señales B- (arriba) y B+ (abajo). Para la detección de las posiciones extremas de cada pistón se cuenta con los finales de carrera FC1, FC2, FC3 y FC4.



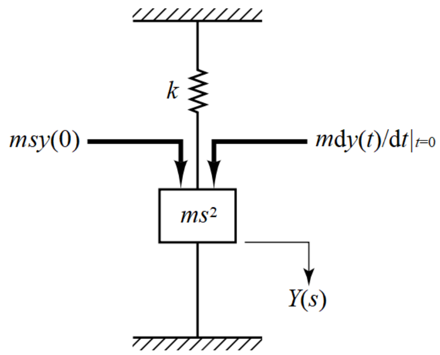
El funcionamiento normal se describe a continuación. Mediante un pulsador de marcha M, el pistón A (inicialmente en la posición marcada por FC1) debe empujar la pieza hasta la posición detectada por FC2. En ese momento el cilindro B (inicialmente en la posición marcada por FC3) avanza hasta la posición marcada por FC4. Finalmente ambos cilindros vuelven a su posición inicial. Se pide realizar la programación del automatismo descrito en lenguaje *ladder*.

Ejercicio 1

(i) Tal y como se realiza para el caso del condensador o la bobina en sistemas eléctricos, se actúa para obtener el modelo equivalente de la masa en el dominio de *s*. Téngase en cuenta que el muelle "no almacena energía de desplazamiento". Por definición, se sabe que:

$$\sum f(t) = m\frac{d^2y(t)}{dt^2} \rightarrow -ky(t)=m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$
$$\rightarrow -kY(s)=ms^2Y(s)-msy(0)-m\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0} \rightarrow Y(s)[ms^2+k]=msy(0)+m\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0}$$

Por tanto, la parte que "depende de la entrada" es: $msy(0)+m\,{}^{dy(t)}/_{dt}\,|_{t=0}$. Ya que $y(0)$ y la derivada, $dy(t)/dt|_{t=0}$ son valores numéricos, se puede extraer fácilmente que, en el dominio de *s*, las fuerzas son una constante "sola" y una constante multiplicada por *s*. Por ejemplo, si $y(0)$=0,1 m e $dy(t)/dt|_{t=0}$=0,05 m/s, siendo m=1 kg, se tiene: 0,1s+0,05. Es decir, un impulso (0,05, que no depende de *s*) y su derivada (0,1*s*, más comúnmente denominado "doblete"). El circuito mecánico equivalente sería:



(ii) La ecuación diferencial del sistema mecánico, considerando entrada impulsional, es:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{dy(t)}{dt}=\frac{1}{m}\delta(t)$$

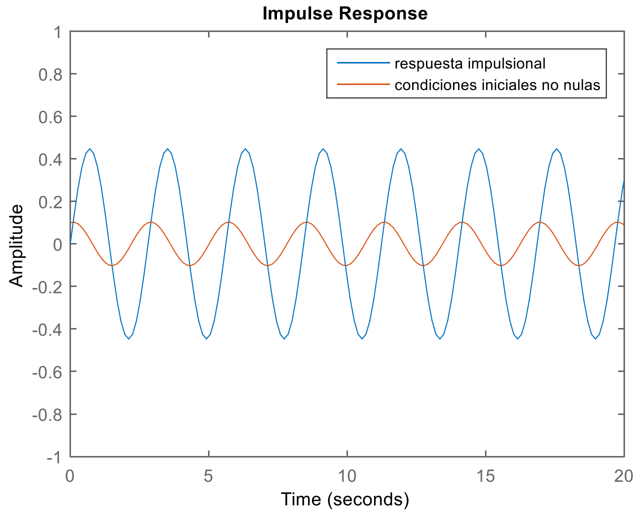
La respuesta temporal, aplicando la transformada de Laplace, resulta:

$$Y(s)=\frac{{}^1/_m}{s^2+\frac{k}{m}}=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2+\frac{k}{m}} \rightarrow y(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

En cambio, en el escenario (i) resulta:

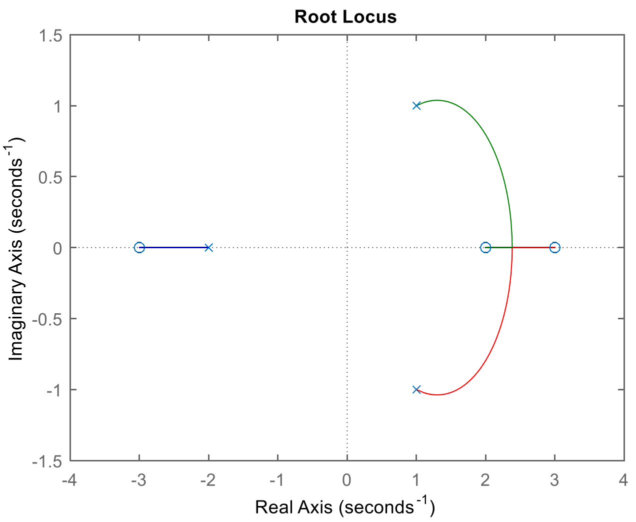
$$Y(s)=\frac{sy(0)}{s^2+\frac{k}{m}}+\frac{\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0}}{s^2+\frac{k}{m}}=y(0)\frac{s}{s^2+\frac{k}{m}}+\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0}\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2+\frac{k}{m}} \rightarrow$$
$$y(t)=y(0)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Esta expresión puede escribirse como un seno o coseno simple desfasado del origen y no una suma de funciones trigonométricas (fasores). Nótese que, lógicamente, los valores de la ganancia y el ángulo variarán si se utiliza seno o coseno. Por tanto, se tiene el mismo resultado que, considerando entrada impulso; sin embargo, resulta un término adicional que tiene en cuenta el desplazamiento inicial, no comenzando en el origen y con cierta velocidad; $dy(t)/dt|_{t=0}\neq 0$ (pendiente de la curva en el instante $t=0^+$). Además, la amplitud de oscilación es menor. A continuación, se muestra una comparativa, considerando m=1 kg, k=5 N/m, $y(0)$=0,1 m e $dy(t)/dt|_{t=0}$=0,05 m/s.



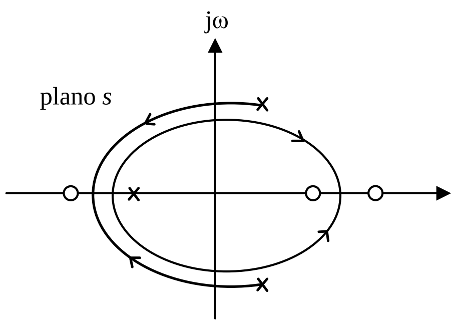
En efecto, se trata de un sistema oscilatorio puro (ξ=0) en el que la única diferencia reside en el desplazamiento inicial y la amplitud de la oscilación; esto es, el desfase de adelanto que introduce el coseno y el valor numérico de amplitud inferior en el caso de la consideración de las condiciones iniciales.

Ejercicio 2
La solución sería:



Considerando, por ejemplo, que los ceros están situados en *s*=-3, 2 y 3 y los polos en *s*=1-j, 1+j y -2.

La otra opción que podría tener sentido originalmente sería la mostrada a la derecha. Sin embargo, no es válida.



Ejercicio 3
Ya que:

$$G_c(s)G(s)=K\frac{(s+1)(s+b)}{s}\frac{1}{s^2+1}$$

La suma de los ángulos en *s*=-1+j√3, uno de los polos deseados, desde el cero en *s*=-1 y los polos en *s*=0, +j y -j es:

$$90^\circ - 143{,}8^\circ - 120^\circ - 110{,}1^\circ = -283{,}9^\circ$$

Entonces, para que resulte -180º (condición de fase), se requiere que el cero en -b contribuya al sumatorio de ángulos con 103,9º. De esta forma, b=0,57.

La ganancia se puede determinar a partir de la condición de módulo:

$$\left| K\frac{(s+1)(s+0{,}57)}{s}\frac{1}{s^2+1}\right|_{s=-1+j\sqrt{3}} = 1 \rightarrow K=2{,}33$$

Por tanto el controlador PID resultante sería:

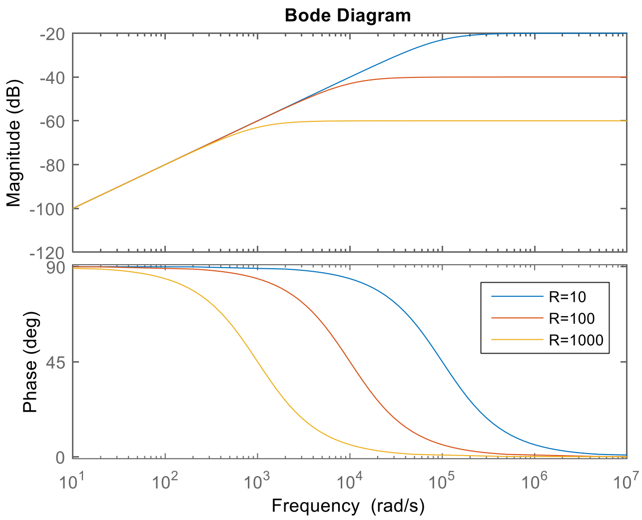
$$G_c(s)=2{,}33\frac{(s+1)(s+0{,}57)}{s}$$

Ejercicio 4

(i) La impedancia y admitancia resultantes serían:

$$Z(\omega)=Z_R(\omega)+Z_C(\omega)=R+\frac{1}{j\omega C}=\frac{1+j\omega CR}{j\omega C} \rightarrow Y(\omega)=\frac{j\omega C}{1+j\omega CR}=\frac{j\omega/R}{j\omega+\frac{1}{RC}}$$

Ya que la admitancia $Y(\omega)$ representa el cociente $I(\omega)/V(\omega)$, en dicha medida se está ensayando con señales sinusoidales de tensión a diferentes frecuencia (entrada) y se mide la corriente en módulo y fase (salida). A continuación se esbozan los diagramas de Bode de módulo y fase siendo C=1 μF y diferentes valores de R:

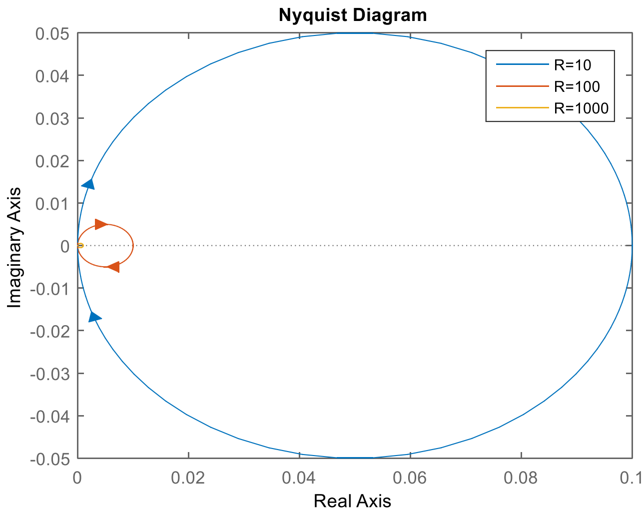


La función de transferencia resultante tiene: (i) un cero en el origen y de ahí que los diagramas comiencen con subidas de 20 dB/década y 90º en módulo y fase, respectivamente. (ii) Un polo en -$1/RC$. A medida que disminuye R, la frecuencia característica del polo crece y por tanto la "frenada" de la subida del cero en módulo y la caída de 90º en fase aparecen más tarde. Por último, (iii), donde se tiene una ganancia de $1/R$, que en fase no perturba pero en módulo afecta al valor en altas frecuencias. Nótese que al ser siempre menor que 1, se obtienen valores de ganancia, en dB, negativos.

(ii) Considerando ahora el diagrama de Nyquist, es decir, diagramas polares, debemos separar en primer lugar la parte real e imaginaria de la admitancia:

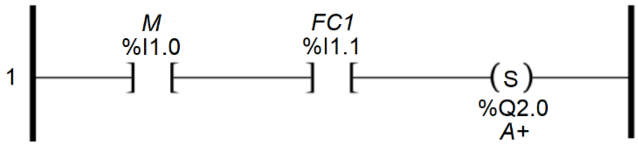
$$Y(\omega)=\frac{j\omega/R}{j\omega+\frac{1}{RC}}=\frac{j\omega/R\left(\frac{1}{RC}-j\omega\right)}{\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}=\frac{\omega^2/R}{\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}+j\frac{\omega/R^2C}{\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}$$

Este escenario hace que los diagramas de Nyquist o polares resulten en semicírculos modificados por el valor de R; la parte real e imaginaria cambia inversamente proporcional al valor de R. De ahí que los semicírculos sean cada vez más pequeños. Véase la solución:

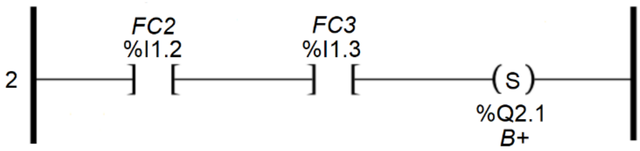


Ejercicio 5

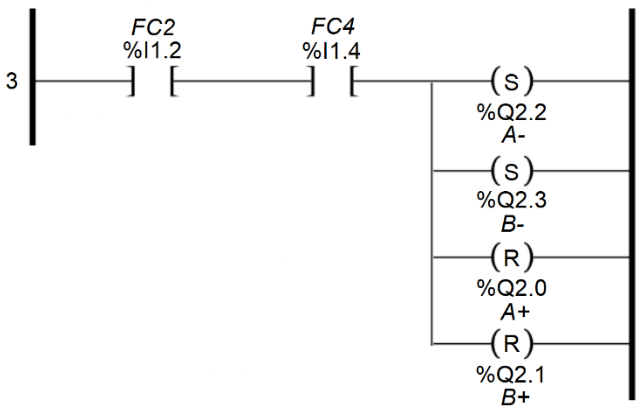
La programación cuenta con tres líneas de programación *ladder*. En primer lugar, si se pulsa M (%I0.0) y FC1 está activo (%I0.1) de forma simultánea, se activará el actuador que hace desplazar el cilindro A y, por tanto la caja, de izquierda a derecha (A+, %Q2.0).



A continuación, cuando el cilindro A llega a su final de carrera de empuje de caja (FC2, %I1.2) y el cilindro B está en su posición de reposo (B-, %I1.3), se activa su carrera de bajada (B+, %Q2.1).



Finalmente, cuando ambos cilindros se encuentran en contacto con la caja en su posición de marcaje (FC2 y FC4; esto es, %I1.2 y %I1.4), debe de activarse el retorno de ambos (A- y B-; que son %Q2.2 y %Q2.3, respectivamente). Para ello, se necesitará resetear %Q2.0 y %Q2.1.



Nótese que en la línea 1 y 2 pudieran haberse reseteado %Q2.2 y/ %Q2.3 por seguridad.