Ejercicio 1 (3,5 puntos)

La estimulación magnética transcraneal (TMS) consiste en la estimulación de la corteza cerebral a través de una corriente eléctrica inducida por un campo magnético externo variable con el tiempo (no existen electrodos de contacto con la piel). El circuito de la Figura 1 muestra un estimulador magnético transcraneal.

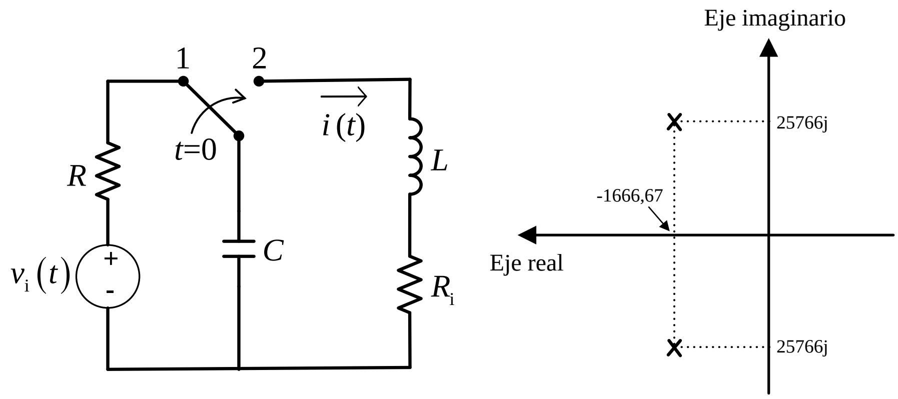


Figura 1. Circuito eléctrico equivalente de un sistema de estimulación magnética transcraneal (TMS).

Un condensador cargado *C*, se descarga a través de una bobina *L* y resistencia interna R_i. En el instante *t*=0, el interruptor cambia de posición para producir el campo magnético sobre el paciente.

(i) Dibuje el circuito para *t*>0 y obtenga la ecuación diferencial de *i*(*t*) en el dominio del tiempo.
(ii) Si se quiere aplicar una segunda estimulación consecutiva con un tiempo de espera de 4 segundos (criterio del 98%), ¿cuánto tiene que valer *C* si *R*=10 kΩ?.
(iii) A partir de la situación de los polos del sistema y sabiendo que *L*=15µH, determine el valor de R_i y *C* (no utilizar el resultado de ii). ¿De qué tipo de sistema se trata?. Explíquese cómo afecta una variación de la resistencia interna a la corriente, *i*(*t*).
(iv) Partiendo del circuito equivalente en el dominio de s para *t*>0 (con *C* cargado inicialmente a 2 kV: *v*(0)=2000), obtenga la respuesta analítica de *i*(*t*) y un esbozo de la misma.

Solución:

(i)

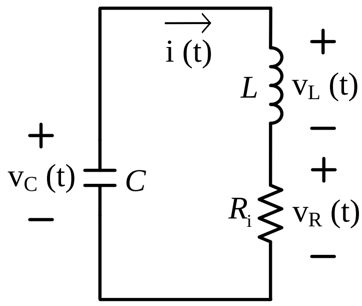


Figura S1. Circuito de interés para *t*>0.

Ecuación diferencial: $\ddot{i}(t)+\frac{R}{L}\dot{i}(t)+\frac{1}{LC}i(t)=0$.

(ii) Si se quiere una nueva estimulación, el condensador ha de cargarse otra vez y, por tanto, se debe conmutar el interruptor a la posición inicial. El condensador se carga a un valor constante de tensión (aquel suministrado por $v_i(t)$) a través de la resistencia de 10 kΩ. La constante de tiempo es τ = *RC*. Con cuatro constantes de tiempo (4 s) el condensador ya se ha cargado al

98%: $4\tau = 4$ s, siendo $\tau = 1$ s. Por tanto, para que antes de una nueva descarga transcurran 4 s, el condensador debe valer: $C = \tau/R = 100$ μF.

(iii) A partir de (i), se tiene que: $\omega_n^2 = \dfrac{1}{LC} \Rightarrow \omega_n = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ y $2\xi\omega_n = \dfrac{R}{L} \Rightarrow \xi = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

Sabiendo que $L = 15$μH y a partir de la situación de los polos, $\xi\omega_n = 1666{,}67$ rad/s (parte real) y $\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 25766$ rad/s (parte imaginaria), resulta: $C = 100$ μF y $R_i = 50$ mΩ.

También, se puede saber que se trata de un sistema de segundo orden subamortiguado, valiendo el coeficiente de amortiguamiento, $\xi = 0{,}06$.

Al disminuir R, el amortiguamiento (ζ) se hace cada vez más pequeño. La frecuencia natural ω_n no cambia porque depende sólo de L y C; que no varían. En efecto, la frecuencia del seno es la frecuencia natural amortiguada (ω_d): $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ y la exponencial que multiplica al seno es: $e^{-\xi\omega_n t} = e^{\frac{-t}{(1/\xi\omega_n)}}$ (constante de tiempo: $1/\zeta\omega_n$). Al decrecer ζ aumentan tanto ω_d como la constante de tiempo. La corriente es más rápida (en frecuencia) y tarda más en extinguirse. Finalmente, es importante indicar que al disminuir R, también la corriente será mayor en amplitud (valor de sobreoscilación).

(iv)

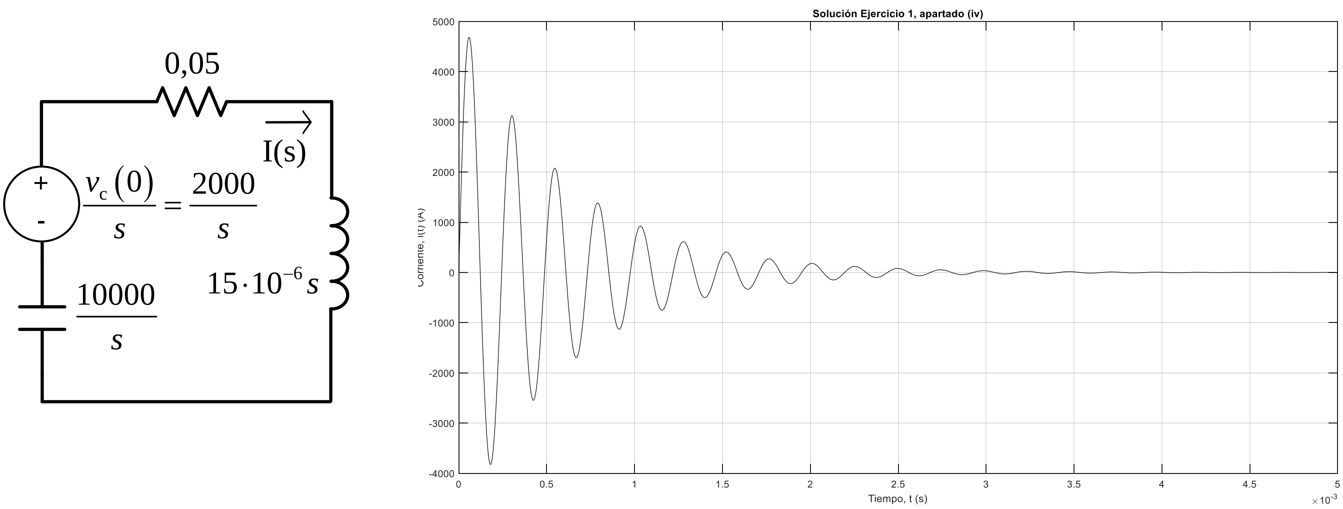


Figura S2. Circuito equivalente en el dominio de s para t>0 y respuesta temporal de $i(t)$ resultante.

Resulta: $I(s) = \dfrac{2000/s}{\dfrac{10000}{s} + 0{,}05 + 15\cdot10^{-6}s} = \dfrac{1{,}33\cdot10^8}{s^2 + 3{,}33\cdot10^3 s + 6{,}67\cdot10^8}$.

Antitransformando al dominio del tiempo: $i(t) = 5174{,}65e^{-1666{,}67t}\operatorname{sen}(25766t)$.

Ejercicio 2 (2,75 puntos)
Se pide:

(i) Transforme el grafo de flujo de señal de la Figura 2 en su equivalente diagrama de bloques:

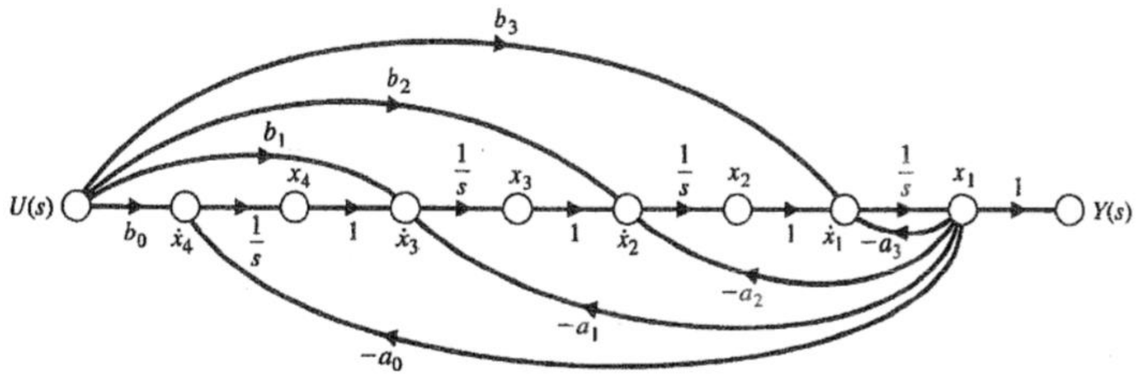


Figura 2. Grafo de flujo de señal.

(ii) Calcule la función de transferencia en lazo cerrado, $T(s)=Y(s)/R(s)$, del diagrama de bloques de la Figura 3:

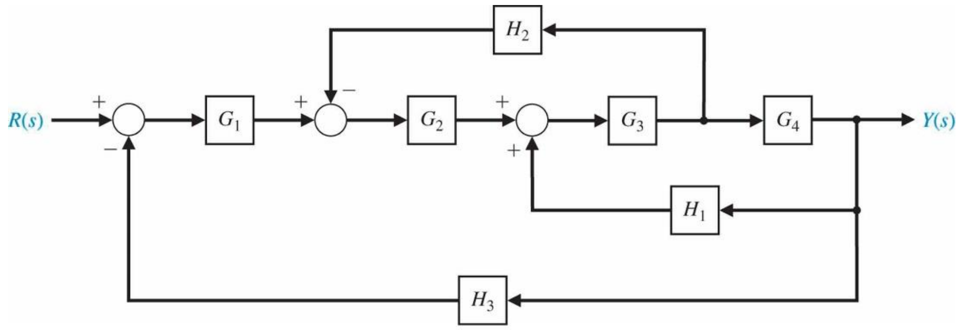


Figura 3. Diagrama de bloques.

(iii) Utilice el criterio de Routh-Hurwitz para hallar la relación necesaria entre los coeficientes de un sistema genérico de cuarto orden (con todos sus coeficientes positivos):

$$a_0s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4;\ a_0,a_1,a_2,a_3,a_4>0$$

para que dicho sistema presente dos polos imaginarios puros y alguno en el semiplano real positivo. ¿Es posible obtener a la vez todos los requerimientos?.

Solución:

(i)

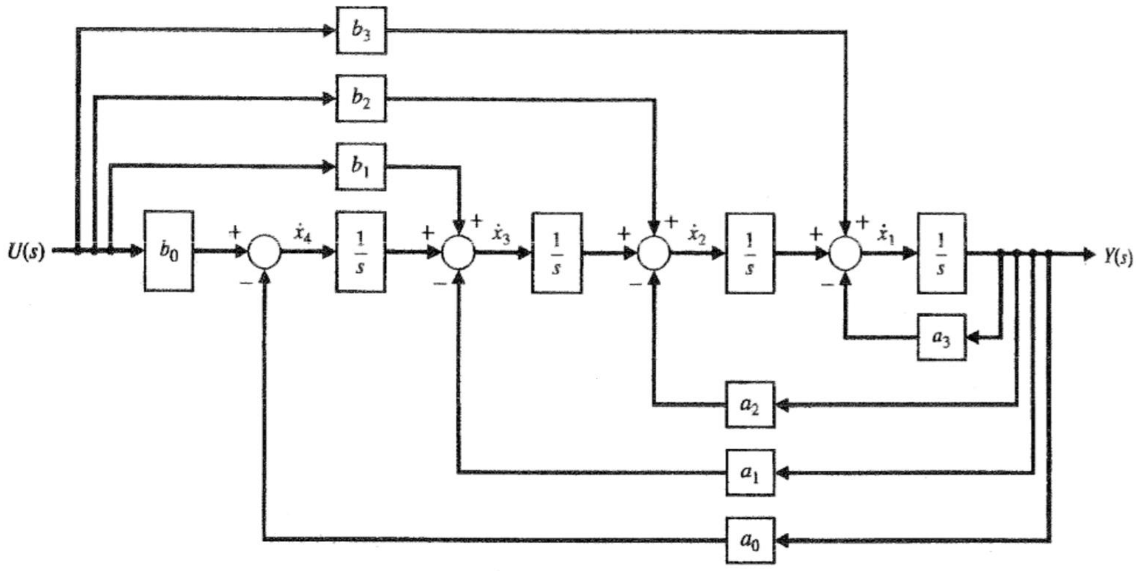


Figura S3. Diagrama de bloques equivalente al grafo de flujo de la Figura 2.

(ii)

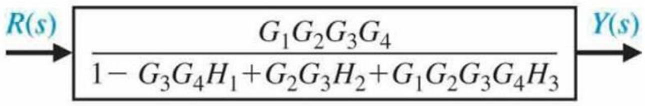


Figura S4. Función de transferencia resultante de simplificar el diagrama de bloques de la Figura 3.

(iii) Las condiciones serían: a) $a_0a_3 > a_1a_2$, para contar con un polo en el semiplano real positivo (condición extraída de s^2 en la tabla de Routh-Hurwitz), y b) $a_1a_2 - a_0a_3 = a_1^2a_4$, para tener dos polos complejos conjugados puros (fila s en la tabla de Routh-Hurwitz). Se obtendría un cambio de signo en la primera columna y una fila completa de ceros (en s^2 y s, respectivamente). Ambos requerimientos no se pueden obtener a la vez.

Ejercicio 3 (2 puntos)

Investíguese el efecto de una perturbación de torsión mecánica, *D*, que ocurre en un elemento de carga. Para ello, considere el sistema que se muestra en la Figura 4. A la salida de G_1, se obtiene el par *T* para posicionar la planta, que consiste en un momento de inercia y fricción viscosa (*J* y *s*, respectivamente). Por tanto, se solicita obtener y analizar el error de control (o actuación) en régimen permanente debido a *D*, siendo *D*=1/s, y:
(i) $G_1=K_p$ (control proporcional); (ii) $G_1=K_p+K_p/T_i s$ (control proporcional+integral).
En este último caso, ¿qué peculiaridad sucede si $G_1=K_p/T_i s$ (control integral)?

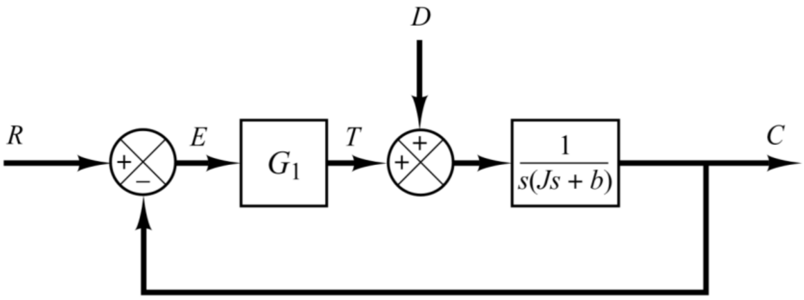


Figura 4. Diagrama de bloques de un sistema de control mecánico.

Solución:

(i) Se tiene: $\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{1}{Js^2+bs+K_p}$.

Aplicando el teorema del valor final:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-s}{Js^2+bs+K_p}\frac{1}{s} = -\frac{1}{K_p}.$$

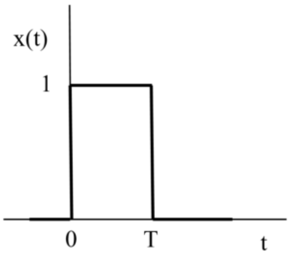
El error en régimen permanente puede reducirse aumentando el valor de la ganancia del controlador proporcional, K_p. Sin embargo, aumentando este valor hará que la respuesta del sistema sea más oscilatoria.

(ii) De igual forma que en el apartado (i), resulta:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{s}{Js^3+bs^2+K_ps+\frac{K_p}{T_i}} \text{ y } e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{-s^2}{Js^3+bs^2+K_ps+\frac{K_p}{T_i}}\frac{1}{s} = 0.$$

Por tanto, el error en régimen permanente, e_{ss}, puede eliminarse (o reducirse a 0) a través de un controlador proporcional+integral.
Es importante señalar que si el controlador fuera un controlador integral, $G_1=K_p/T_i s$, entonces el sistema siempre sería inestable. Esto es así ya que la ecuación característica, $Js^3+bs^2+K_p$, tiene raíces con parte real positiva (o visto a través del denominador de la función de transferencia; no todos los coeficientes son positivos). Tal sistema inestable, no se puede utilizar en la práctica.

Ejercicio 4 (1,75 puntos)
(i) Obtenga la transformada de Laplace de la señal de la Figura 5.



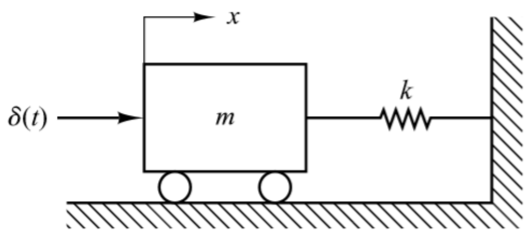


Figura 5. (i) Pulso rectangular de altura 1 y duración T. (ii) Sistema mecánico de interés.

(ii) Considere el sistema mecánico que se muestra en la Figura 5. Inicialmente se encuentra en reposo. Suponga que el carro se pone en movimiento por una fuerza impulsiva cuya fuerza es la unidad, δ(*t*). ¿Se parará el carro en algún momento? Justifica tu respuesta y realiza una propuesta relativa a añadir/eliminar algún componente, en caso negativo.

Solución:
(i) Utilizando la definición de la transformada de Laplace:

$$X(s)=L[x(t)]=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_{0}^{T}1\,e^{-st}dt=\frac{1}{(-s)}\int_{0}^{T}(-s)\,e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0}^{T}=-\frac{1}{s}[e^{-sT}-e^{-s\cdot 0}]=$$

$$=\frac{1}{s}(1-e^{-sT})$$

(ii) La ecuación diferencial del sistema mecánico es: $\ddot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=\frac{1}{m}\delta(t)$.

Los polos del sistema son complejos conjugados pero imaginarias puros, es decir, se trata de un sistema con amortiguamiento nulo. La respuesta es: $x(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$. Obsérvese que al tratarse de un circuito de segundo orden con amortiguamiento nulo (ξ=0), el desplazamiento *x*(*t*) es una oscilación sostenida. Es decir, el carro no se pararía nunca. El sistema consta de dos elementos ideales que se transfieren la energía inyectada por el impulso, periódicamente, sin existir ninguna pérdida. Con la instalación de un amortiguador o considerando pérdidas por rozamiento en la masa, la energía transmitida por el impulso terminaría extinguiéndose y, por tanto, el carro se pararía.