Universidad
Rey Juan Carlos

Área de Tecnología Electrónica

Práctica 4

Análisis y diseño de sistemas de control mediante el Lugar de las Raíces con MATLAB

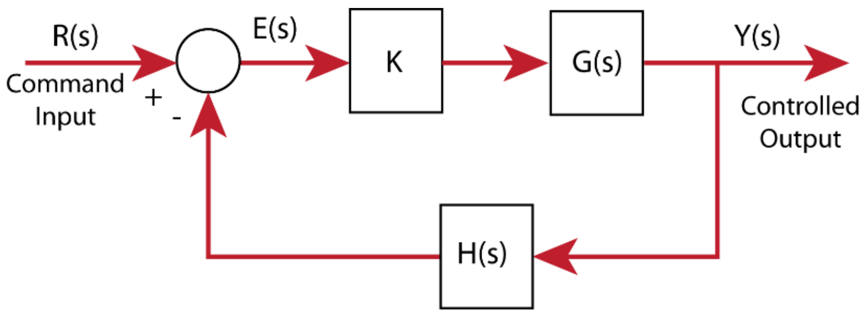
2022-2023

ÍNDICE

1. Gráfica del Lugar de las Raíces (LDR) con MATLAB

Recordemos que el **método o técnica del lugar de las raíces** (LDR) es un procedimiento gráfico diseñado por W.R. Evans en 1948 para representar los polos en lazo cerrado de un sistema de control con realimentación negativa para todos los valores de un parámetro. Dicho parámetro es, en general, la ganancia K de lazo, que varía de 0 a ∞.

Dado el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado genérico:



Cuya función de transferencia en lazo cerrado es: $G_{LC}(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s) \cdot H(s)}$

Por ello, el lugar de las raíces del sistema es la representación gráfica (en el plano complejo) de las raíces de la ecuación característica, es decir, del denominador de la función de transferencia en lazo cerrado del sistema, cuando K va variando desde 0 hasta ∞:

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = 0$$

En la ecuación característica anterior, los valores p_i son los polos de la función de transferencia en lazo abierto G(s)H(s) y los valores z_i son los ceros de G(s)H(s). Recordemos que, según hemos visto en teoría, la representación del lugar de las raíces parte de los polos en lazo abierto p_i para k=0 (o del infinito) y llega a los ceros en lazo abierto z_i (o al infinito) para valores de k muy elevados.

En MATLAB, el comando del *Control Systems Toolbox* para dibujar el lugar de las raíces se denomina "rlocus". Rlocus determina de forma automática los valores de ganancias K necesarios para realizar el gráfico completo del LDR. Su sintaxis básica es la siguiente:

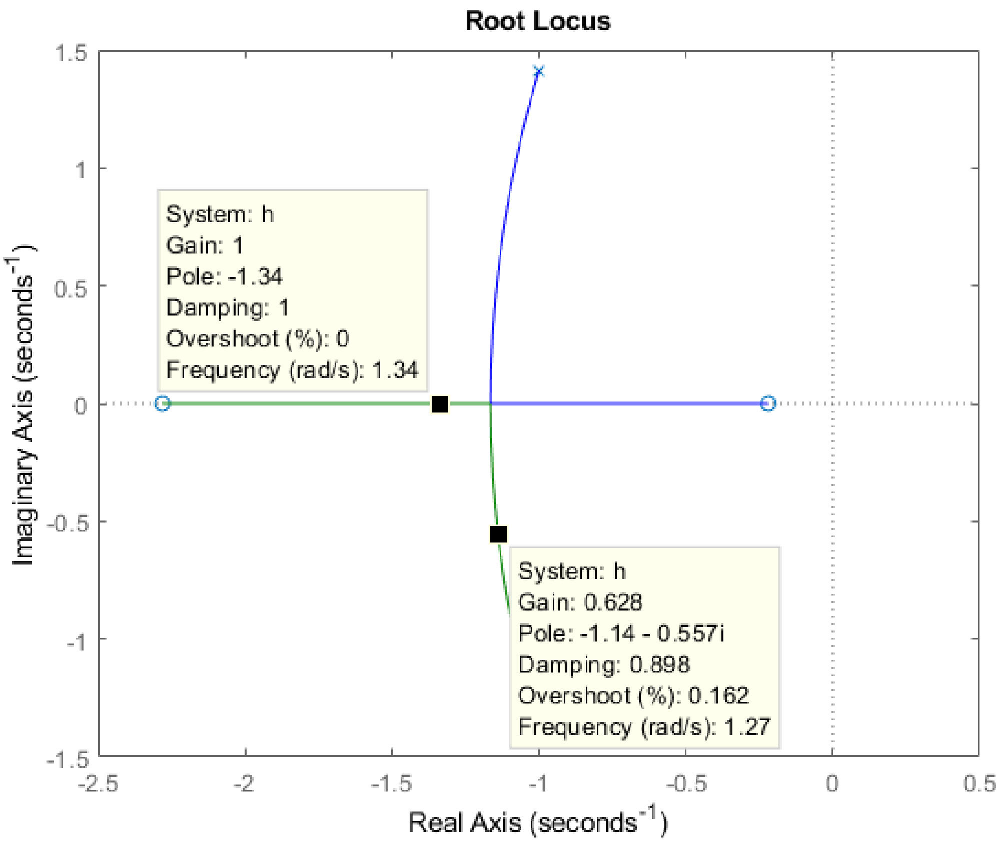
>> rlocus (G·H)

Donde G y H deben ser funciones de transferencias definidas con los comandos *tf* o *zpk* de MATLAB. Cada una de las ramas del LDR aparece de un color diferente.

Rlocus también acepta múltiples sistemas de control como parámetros de entrada. En ese caso, realizará la gráfica del LDR de todos los sistemas en una única figura:

>> rlocus (G1·H1, G2·H2, G3·H3)

Una vez realizada la gráfica del LDR, se puede hacer clic sobre la misma (una o varias veces) y MATLAB mostrará un "*data marker*" mostrando tanto el valor de la ganancia que se corresponde con dicho punto como la posición exacta del polo en lazo cerrado, factor de amortiguamiento, sobreelongación y frecuencia asociada a dicho punto del plano complejo:



Ejercicio práctico 1: Dibujo básico del lugar de las raíces con MATLAB. Extracción de K

1. Crea un script de MATLAB y dibuja el lugar de las raíces de al menos 6 sistemas de control extraídos de los ejercicios 4.2 al 4.13 de la relación de ejercicios del Tema 4.
2. Para todas las figuras anteriores, determina gráficamente el punto del LDR en el que la ganancia toma el valor de K =1
3. Si en la gráfica aparecen puntos de ruptura o reencuentro, halla el valor de K asociado a los mismos. Comprueba alguno de ellos realizando los cálculos manualmente.

Si necesitamos calcular numéricamente el valor de los polos en lazo cerrado para un valor determinado de K, debemos incluir dicho valor como segundo argumento de *rlocus* y guardarlo en una variable de salida (por ejemplo *PolosLC*):

>> PolosLC = rlocus (G·H, 3) *% Valor numérico de todos los polos en LC para K = 3*

K también se puede definir como un *vector* conteniendo un conjunto o intervalo de valores numéricos, en cuyo caso el comportamiento del comando *rlocus* será el siguiente:

>> K = 1:1:10; *% Vector de valores de K de 1 a 10 (en unidades enteras)*

>> PolosLC = rlocus (G·H, K) *% Matriz de polos en LC para cada uno de los valores de K*

>> rlocus (G·H, K) *% Gráfica del lugar de las raíces sólo para K entre 1 y 10.*

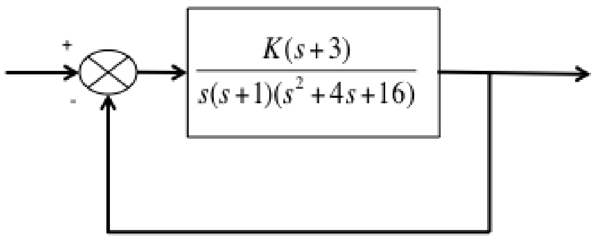
El control de los valores máximos y mínimos de los ejes Real e Imaginario en la figura del LDR se puede realizar mediante el comando "*axis*", ya visto en prácticas anteriores.

>> axis([xmin xmax ymin ymax])

También se pueden modificar otras opciones de visualización más complejas mediante el comando "*rlocusplot*". Si tienes interés en conocerlas, consulta la ayuda de dicho comando.

Ejercicio práctico 2: Lugar de las raíces con MATLAB para un vector de valores de K.

1. Dibuja la gráfica del LDR del sistema de la figura:



2. Modifica los ejes de la gráfica para visualizarla entre -6 y 1 (en el eje real) y -6 y 6 (en el eje imaginario)
3. Calcula el valor de K para el que el sistema sea hace inestable y el valor de la frecuencia de oscilación de la respuesta del sistema para esa K en el límite de la estabilidad.

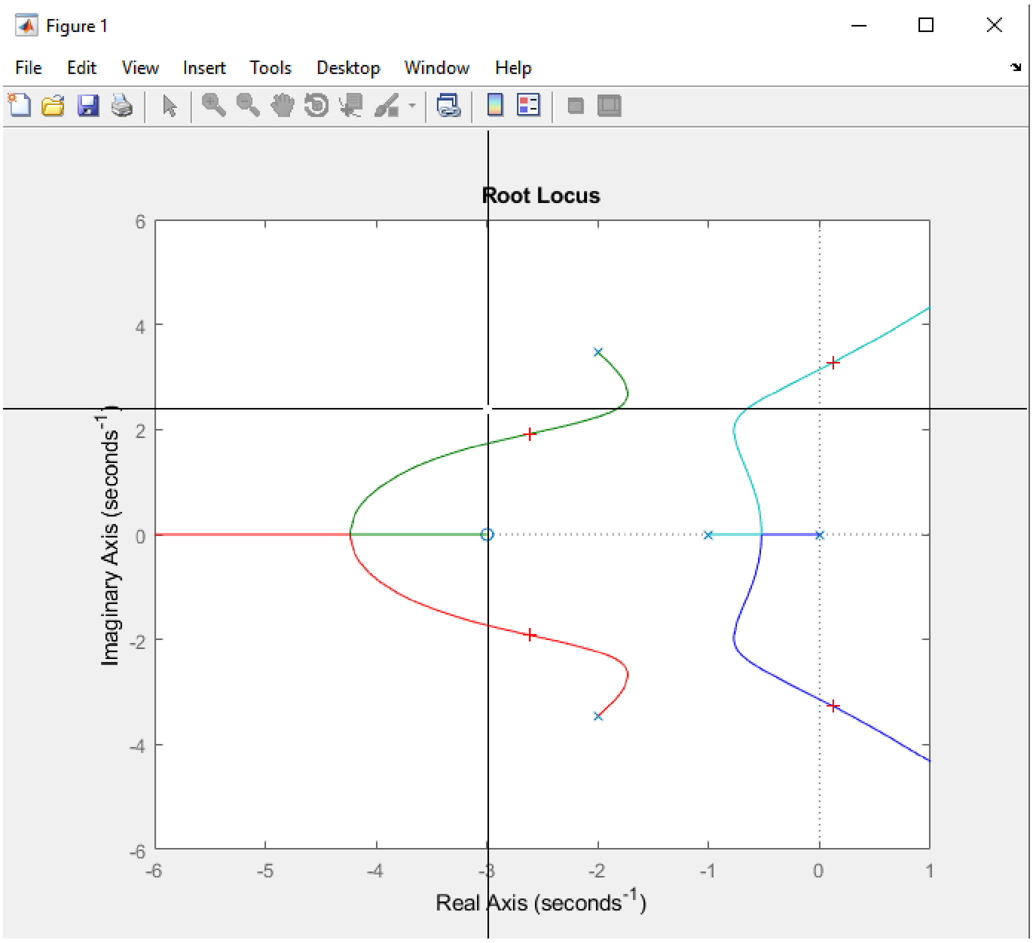
1.1 Cálculo gráfico de todos los polos en lazo cerrado mediante "rlocfind"

Uno de los problemas de la representación gráfica del LDR con *rlocus* es que, al hacer clic sobre uno de los puntos del gráfico, sólo se obtiene el valor del polo correspondiente a dichas coordenadas para el valor de K correspondiente a dicho punto. Si el sistema tiene más ramas, no aparecen los valores del resto de polos en LC asociados con dicho valor de K.

Con la orden **rlocfind,** que debe seguir a la orden rlocus, se puede calcular gráficamente el valor de la ganancia en un punto y la posición de TODOS los polos en lazo cerrado correspondientes a ese punto del lugar de las raíces.

Para ello, debemos mover la cruz que aparece en la gráfica y hacer clic en el punto deseado. El valor de la ganancia se guardará en K y el valor de los polos en la variable *PolosLC*:

>> [K,PolosLC] = rlocfind(G·H)

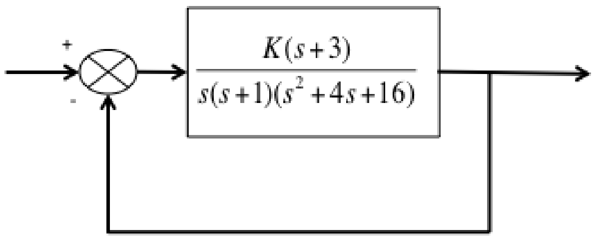


Por último, el comando "*rlocfind*" acepta un segundo argumento de entrada, un vector "P", en el que se pueden especificar las coordenadas (valores complejos) de una serie de polos. Al ejecutar "*rlocfind*" el comando devolverá un vector de ganancias K para los que existe un polo en lazo cerrado de G·H próximo a los valores que aparecen en por P. Además, los valores exactos de dichos polos aparecerán en la matriz *polosLC*

>> [K,PolosLC] = rlocfind(G·H,P)

Ejercicio práctico 3: Uso de rlocfind para ampliar las capacidades de rlocus en MATLAB

Para el sistema de control en lazo cerrado del ejercicio anterior:



1. Encuentra gráficamente la posición de todos los polos en lazo cerrado del sistema para el límite de la estabilidad (sistema oscilante o no amortiguado).
2. Calcula mediante *rlocfind* el valor de K para el que uno de los polos está en s = -5. Indica si el sistema de control será estable en ese caso, razonando tu respuesta.

2. Diseño de sistemas mediante el Lugar de las Raíces

2.1 Lugar de las raíces con ξ constante y ω_n constante

En las clases de teoría ya se ha visto que en la gráfica del lugar de las raíces, las líneas con coeficiente de amortiguamiento ζ constante son radiales que pasan por el origen. El coeficiente de amortiguamiento determina la localización angular de los polos, mientras que la distancia del polo al origen determina la frecuencia natural no amortiguada ω_n del sistema. Por ello, el lugar de las raíces para ω_n constante son circunferencias con centro en el origen del plano complejo.

Para superponer sobre el LDR una o varias líneas con coeficiente de amortiguamiento constante ζ y una o varias circunferencias con ω_n constante se utiliza el comando ***sgrid.***

La orden **sgrid** tiene como parámetros de entrada **ζ y ω_n**, pudiendo elegir representar uno o varios valores concretos de las dos variables (usando vectores). Si se desea eliminar todas las líneas de ζ o todas las circunferencias de ω_n se utilizan corchetes vacíos.

Ejercicio práctico 4: Uso de sgrid para dibujar líneas de coeficiente de amortiguamiento constante

1. Construye un sistema de control en lazo cerrado con H(s) = 1 y donde la función de transferencia en lazo abierto G(s) tenga dos polos situados en s = -1 y s = -3, y ningún cero.
2. Superpón al LDR las líneas de coeficientes de amortiguamiento **ζ= 0.3 y ζ= 0.7** y calcula el valor de K (controlador de tipo proporcional) que permite que los polos en lazo cerrado se correspondan con dichos coeficientes. Reajusta los límites de la gráfica si es necesario.

3. Extrae del LDR la posición de los polos en lazo cerrado (LC) para cada valor de K y la sobreelongación que tendrá la respuesta al escalón del sistema. Calcula el coeficiente de amortiguamiento (manualmente) utilizando la posición de los polos en LC, y comprueba con la expresión de Mp la estimación de sobreelongación extraída de la gráfica del LDR.
4. Conocida la posición de los polos en LC para cada valor de K, estima el valor del tiempo de asentamiento del sistema.
4. Realiza una gráfica de la respuesta al escalón del sistema en LC con ambos valores de K y comprueba en ambos casos los valores de sobreelongación y tiempo de asentamiento estimados mediante el LDR (recuerda, para la banda del 1.8%). ¿Coinciden?
5. ¿Con qué valor de K el sistema presenta un mayor error frente a la entrada escalón? ¿Por qué?

Ejercicio práctico 5: Uso de sgrid para dibujar circunferencias de ω_n constante

1. Construye ahora un sistema de control en lazo cerrado similar al del ejercicio anterior pero con G(s) teniendo dos polos situados en s = 0 y s = -3, y ningún cero.
2. Repite el ejercicio anterior y realiza una nueva gráfica del LDR para el mismo sistema, calculando ahora los tres valores de K que nos permiten intersectar con las circunferencias de las tres frecuencias naturales siguientes: ω_n =1, ω_n =1,5 y ω_n =3.
3. ¿Qué tipo de respuesta transitoria es esperable para cada uno de los valores de K? ¿Cuál de los tres será el sistema con un transitorio más largo? ¿Por qué?
4. Con respecto a la respuesta estacionaria, ¿alguno de los tres valores de K hará que el sistema sea inestable? ¿Se puede prever el error frente a la entrada escalón simplemente observando la gráfica del LDR?
5. Realiza en una misma gráfica la respuesta al escalón del sistema en LC para los tres valores de K hallados y comprueba las respuestas de los apartados 3 y 4.

2.2 Diseño de sistemas de control con ceros mediante el LDR

En el siguiente ejercicio práctico vamos a comprobar si las estimaciones extraídas del LDR (en concreto, la estimación de sobreelongación y de tiempo de asentamiento que se obtiene de los polos dominantes) son válidas en el caso de sistemas de control con que contienen ceros en la función de transferencia en lazo abierto.

Ejercicio práctico 6: Diseño de sistemas con ceros mediante el LDR

1. Construye un sistema de control en lazo cerrado donde la función en lazo abierto G(s) tenga dos polos situados en s = 0 y s = -1, y un cero situado en s = -3.
2. Dibuja la gráfica del lugar de las raíces del sistema. Extrae los valores de K que permiten intersectar con la línea de coeficiente de amortiguamiento constante **ζ= 0.7.** Anota en cada caso la posición de los polos en LC y la sobreelongación máxima asociada con dicho coeficiente de amortiguamiento.
3. Razona qué diferencias y qué similitudes esperas en la respuesta al escalón utilizando cada uno de los valores de K anteriores.
4. Representa la respuesta al escalón unitario del sistema completo para ambos valores de K y comprueba las afirmaciones que has hecho en el apartado 3. ¿Se cumplen las predicciones de sobreelongación máxima en ambos casos? ¿Por qué?
5. Resitúa el cero en s = +3 y vuelve a realizar la gráfica de la respuesta al escalón del sistema, para cualquier valor de K. Justifica en resultado en base al nuevo LDR.

2.3 Diseño de sistemas de orden superior mediante el LDR

Ejercicio práctico 7: Máquina-herramienta con control en velocidad

Para controlar la velocidad de una máquina herramienta se dispone de un sistema formado por un actuador que acciona directamente (en cascada) el motor de la misma. **El sistema acepta órdenes de velocidad** (no de posición) y:

1. El modelo del actuador, según su hoja de características, es un **sistema de primer orden** con ganancia estática de valor 1.2 y constante de tiempo de 2.56 segundos.
2. El motor dispone de un sensor para medir la velocidad del mismo. Del modelo motor-sensor se ha obtenido un modelo empírico, dando como resultado un **sistema de segundo orden** con un valor de K de 0.1, y dos polos en las posiciones -0.3 y -0.1.

Construye las funciones de transferencia del actuador y del motor-sensor en MATLAB y:

a) Obtén la evolución de la salida (velocidad), ante una entrada escalón unitario, cuando el sistema se encuentra en lazo abierto. Calcula el error en estado estacionario. ¿Es un error de velocidad?

b) Para el sistema de control en lazo cerrado con realimentación unitaria, obtén la evolución de la salida (velocidad) ante una entrada escalón unitario, con una ganancia de lazo K unitaria. Determina de nuevo el error en estado estacionario y compara con el anterior. ¿Es este error nulo? ¿Por qué? ¿Cómo podría ser siempre nulo?

c) Dibuja el lugar de las raíces e indica si es posible aumentar el valor de la ganancia de lazo K al sistema para mejorar la respuesta en estado estacionario sin que éste se convierta en inestable. Justifica tu respuesta.

d) Representa la respuesta del sistema ante una entrada escalón unitario para dos valores de $K > 1$. Relaciona la frecuencia de oscilación y sobreelongación máxima de estas dos respuestas con la nueva posición de los polos dominantes en lazo cerrado según el lugar de las raíces. Calcula la posición de polo rápido del sistema para dichos valores de K. ¿Tiene alguna influencia en la respuesta temporal?