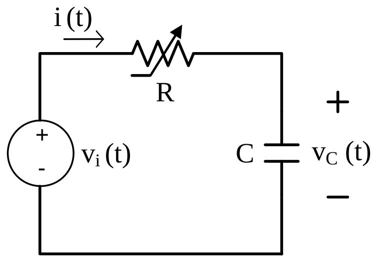
Ejercicio 1 (4,5 puntos)

El control de la tensión en un condensador al alimentarlo con corriente continua (considere escalón unitario, $v_i(t)=u(t)$) representa un problema de ingeniería de control.



(i) Al inyectarle directamente una tensión continua, ¿qué comportamiento anormal exhibiría la dinámica de la tensión/corriente en el condensador -$v_C(t)$ e $i(t)$-, que haría requerir un control? Interprete el problema considerando un valor nulo en la resistencia (R=0).

(ii) Con el objetivo de regular adecuadamente la tensión en el condensador, se coloca en serie una resistencia variable (potenciómetro) y se construye el lazo. Esboce el bucle de control, señalando y explicando detalladamente cada uno de los bloques y variables.

(iii) Obtenga la respuesta del sistema $v_C(t)$, a partir de estrategias eléctricas (dominio del tiempo) y la función de transferencia en lazo cerrado (dominio de s). ¿Coinciden?. Dibuje la dinámica de las respuestas, $v_C(t)$ e $i(t)$, para diferentes valores de R, especificando su evolución.

(iv) En el caso específico en que la capacidad del condensador es C=10 µF y se requiere cargarlo a la tensión de alimentación en 4 segundos (criterio del 98%), ¿a qué valor debiera fijar la resistencia variable?.

(v) En el escenario en que se impusiera una entrada en rampa unitaria, $v_i(t)=t$, ¿qué error exhibiría la tensión, $v_C(t)$?. Considere el circuito RC, justificando la respuesta a partir del tipo de sistema.

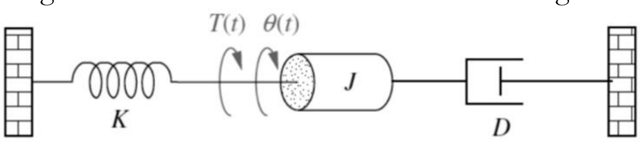
Ejercicio 2 (1,75 puntos)

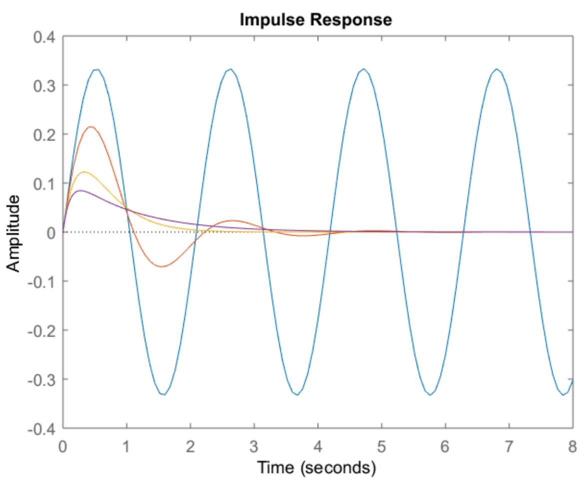
Considere la siguiente tabla de Routh. Tenga en cuenta que, originalmente, la fila de s^2 estaba llena de ceros. Se solicita indicar el número de raíces del polinomio característico asociado que se sitúan sobre cada semiplano del eje real y sobre el eje imaginario, indicando en este último caso, el valor numérico de las raíces.

s^6	1	1	0	0
s^5	-3	1	4	0
s^4	4/3	4/3	0	0
s^3	4	4	0	0
s^2	12	4	0	0
s^1	8/3	0	0	0
s^0	4	0	0	0

Ejercicio 3 (2 puntos)

El sistema mecánico rotacional básico de la figura cuenta con un rozamiento viscoso D regulable. En los ensayos de caracterización del circuito se realizan varias pruebas ajustando su valor. Para ello, se introduce un par impulsional, es decir, $T(t)=\delta(t)$, y se mide el desplazamiento angular $\theta(t)$, obteniéndose las respuestas mostradas en la figura. Se solicita que, para cada caso, se calcule el valor de D sabiendo que J=1 kg×m², a través de una inspección de las respuestas.





Ejercicio 4 (1,75 puntos)

Se tiene un lazo de control con realimentación negativa y unitaria, donde la función de transferencia de la planta es:

$$G(s)=\frac{K(s+\alpha)}{(s+\beta)^2}$$

Calcule el valor de K, α y β, sabiendo que, en lazo cerrado, el sistema exhibe un error de control en posición de 0,1, un factor de amortiguamiento correspondiente a un sistema subamortiguado (ξ=0,5), valiendo la frecuencia natural no amortiguada: $\omega_n=\sqrt{10}$ rad/s.

Ejercicio 1

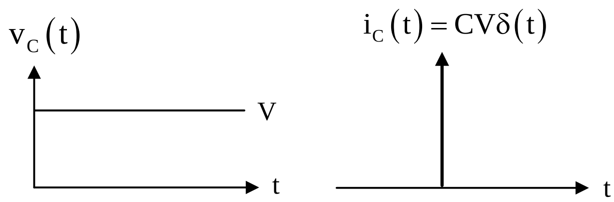
(i) Al conectar un condensador en serie con una fuente de tensión continua, la tensión en el condensador coincide con la tensión de la fuente

$$V_C(s)={}^{V}\!/_{s} \;\rightarrow v_C(t)=V$$

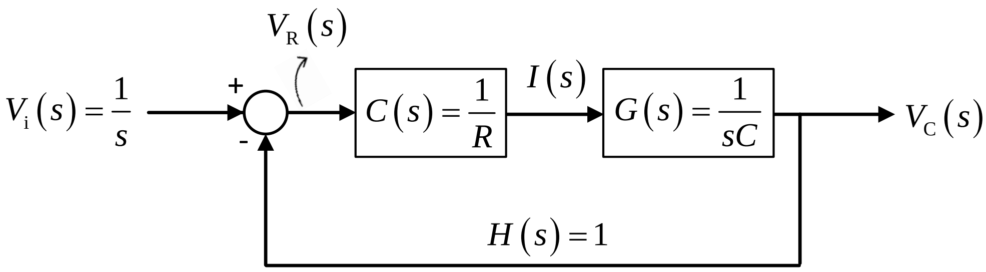
Esto se traduce en que el condensador, previamente descargado (en t=0$^-$), sufre un cambio brusco de tensión, lo cual, por la física que hay detrás de dicho componente, no está permitido. A su vez, la excitación genera una corriente impulsiva en el condensador:

$$I_C(s)=\frac{V_C(s)}{{}^{1}\!/_{sC}}=\frac{{}^{V}\!/_{s}}{{}^{1}\!/_{sC}}=CV \;\rightarrow i_C(t)=CV\delta(t)$$

Lo cual puede suponer la ruptura del dieléctrico. Particularizado para el caso de V=1 V (escalón unitario), resulta: $v_C(t)=1$ e $i_C(t)=C\delta(t)$. Véanse la forma de onda de las respuestas:



(ii) A partir de la teoría de circuitos y síntesis de redes, junto con la teoría de control básica, se construye el diagrama de bloques resultante:



El punto de resta representa la ley de Kirchhoff de tensiones, obteniendo a la salida, la tensión sobre el potenciómetro. La resistencia actúa como controlador y "conversor de tensión a corriente", siendo la señal $I(s)$, la entrada en la planta. Nótese que no se requiere un bloque en el lazo de realimentación (unitario).

(iii) Se tiene:

$$v_i(t)=v_R(t)+v_C(t) \;\rightarrow\; v_i(t)=Ri(t)+v_C(t) \;\rightarrow\; v_i(t)=RC\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)$$

resultando, en el dominio del tiempo y de s:

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{v_C(t)}{RC}=\frac{v_i(t)}{RC} \quad \text{y} \quad \frac{V_C(s)}{V_i(s)}=\frac{{}^{1}\!/_{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

Ahora, se calcula a partir del álgebra de bloques, la función de transferencia del resultado obtenido en (ii):

$$\frac{V_C(s)}{V_i(s)}=\frac{{}^{1}\!/_{RCs}}{1+\frac{1}{RCs}}=\frac{{}^{1}\!/_{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

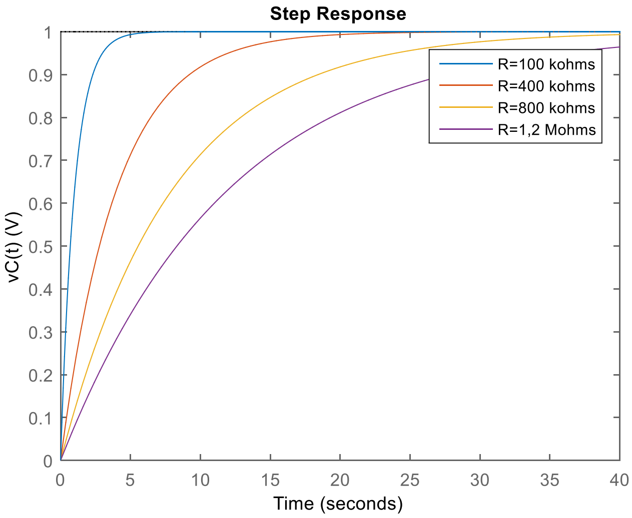
En efecto, los resultados coinciden. Ahora, se considera $V_i(s)=1/s$ y se calcula $v_C(t)$ aplicando la transformada inversa de Laplace previa descomposición en fracciones simples. Resulta:

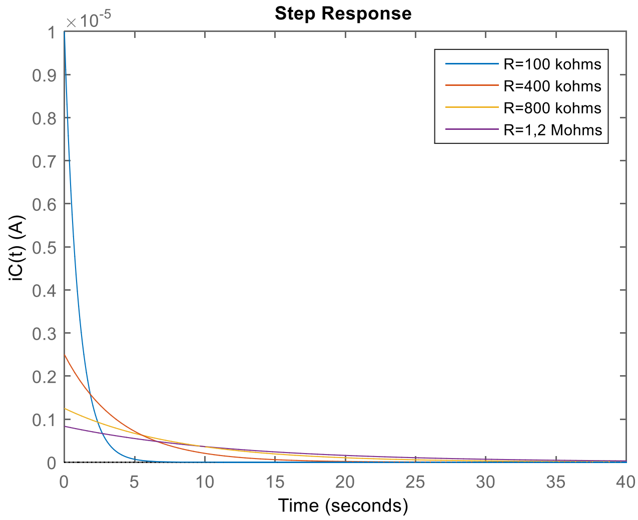
$$v_C(t)=1-e^{-t/RC}$$

Finalmente, por la definición del condensador, se tiene que:

$$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}=C\frac{d\left[1-e^{-t/RC}\right]}{dt}=\frac{1}{R}e^{-t/RC}$$

Esbozando las formas de onda, dependientes de *R*, se tiene que:





$v_C(t)$ tan solo se ve afectada por la constante de tiempo; a mayor *R*, más lenta es la respuesta temporal. Sin embargo, el régimen permanente se mantiene constante. Por otro lado, $i_C(t)$ depende de *R* de igual forma que $v_C(t)$ (en cuanto a la velocidad de respuesta) y, además, en el valor inicial; aumentado el pico inicial a medida que disminuye el valor seleccionado en el potenciómetro. En efecto, acercándose a una respuesta impulsional como se obtuvo en (i) con $R=0$.

(iv) Al tratarse de un circuito RC, la constante de tiempo es: $\tau=RC$ (inversa del polo cambiado de signo). Esto se puede comprobar si se calcula cualquier función de transferencia del circuito y se examina el denominador (por ejemplo, véase apartado (iii)). La repuesta transitoria se extingue cuando pasan 4τ segundos, es decir, $t_s=4RC$ (criterio del 98%). Si se fija $t_s=4$ s y conociendo *C* (ver enunciado), se obtiene el valor de la resistencia: $R=100$ kΩ.

(v) El error se puede calcular, por ejemplo, a través del lazo de control esbozado en (ii). Se tiene que:

$$E(s)=R(s)\frac{1}{1+C(s)G(s)}=\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+\frac{1}{RCs}}$$

Ciertamente, la señal de error es la tensión que recae en la resistencia.
Se aplica el teorema del valor final:

$$e_{SS}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+\frac{1}{RCs}}=RC=\tau$$

Se obtiene un valor finito de error de velocidad. Por tanto, el circuito eléctrico es un sistema tipo 1. El error se podría disminuir reduciendo *R*; consiguiendo así, disminuir el valor de τ y, por tanto, reducir el tiempo de permanencia del transitorio (sistema más rápido).

Ejercicio 2

Al encontrarse la fila de ceros en s^2, el polinomio característico asociado, extraíble de la fila de s^3, es $P(s)=4s^3+4s$. A continuación, extraemos las raíces de dicho polinomio:

$$P(s)=4s^3+4s=s(4s+4)=0 \;\rightarrow\; s=0 \;\text{ y }\; s=\pm j$$

De momento, el sistema es críticamente estable, con tres polos sobre el eje imaginario. Nótese que el polinomio resultante de d$P(s)$/ds, solo sirve para extraer los valores de 12 y 4, que aparecen en la tabla final de s^2 y no para hallar las raíces. Si nos fijamos en la columna izquierda de interés en el análisis de estabilidad de Routh, se pueden contar dos cambios de signo, asociados a raíces en el semiplano derecho (inestabilidad). Finalmente, el resto de raíces (es decir, un valor) se encuentran en el semiplano izquierdo. El sistema es inestable. Nótese que, a partir del polinomio característico, se podría haber encontrado la raíz en el origen:

$$P(s)=s^6-3s^5+s^4+s^3+4s=s(s^5-3s^4+s^3+s^2+4)$$

El resto de raíces que no se solicitan en el ejercicio, a parte de las que se localizan sobre el eje imaginario, resultan en s=-1 y s=2 (doble).

Ejercicio 3

A partir de la función de transferencia del sistema mecánico rotacional de interés, es posible extraer la salida $\theta(s)$ teniendo en cuenta los datos del ejercicio:

$$\frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{1}{Js^2+Ds+K} \;\rightarrow\; \theta(s)=\frac{1}{s^2+Ds+K}$$

Por inspección, se puede estimar, fácilmente, la frecuencia de oscilación de la respuesta oscilatoria permanente. El periodo de oscilación es, aproximadamente, 2 segundos. Por tanto:

$$\omega_n=2\pi f_n=\frac{2\pi}{T_n}=\pi \text{ rad/s}$$

Teniendo en cuenta el polinomio característico de los sistemas de segundo orden, $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$, se halla el valor de K

$$K=\omega_n^2=\pi^2\sim 10 \text{ N m/rad}$$

En el caso de la respuesta azul, ξ=0, siendo:

$$D=0 \text{ Nms/rad}$$

A continuación, se estudia la respuesta de color naranja. Se trata de una respuesta oscilatoria pero, esta vez, subamortiguada. La frecuencia de oscilación ha disminuido, contando, aproximadamente, con un periodo de oscilación de 2,5 segundos. Por tanto:

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \;\rightarrow\; \frac{2\pi}{2{,}5}=\pi\sqrt{1-\xi^2} \;\rightarrow\; \xi=0{,}6$$

Comparando el segundo miembro del polinomio característico de sistemas de segundo orden con el denominador de la función de transferencia del sistema mecánico:

$$D=2\xi\omega_n=3{,}75 \text{ Nms/rad}$$

Por otro lado, se detecta que las respuestas restantes por analizar no tienen oscilaciones (no hay sobrepasos a la zona de amplitudes negativas) y, por tanto, pueden ser críticamente amortiguadas o sobreamortiguadas. Probamos con el primer escenario. Sabiendo que,

$$t_s=\frac{4}{\omega_n}=\frac{4}{\pi}=1{,}33 \text{ s}$$

En efecto, la respuesta en amarillo puede considerarse aproximadamente críticamente amortiguada ($\xi\rightarrow1$) siendo:

$$D=2\omega_n=6{,}3 \text{ Nms/rad}$$

Obviamente, la respuesta en color morado representa un sistema sobreamortiguado, donde se tienen dos polos separados sobre el eje real. Se considera que los polos están suficientemente separados y la constante de tiempo que gobierna la dinámica general de la respuesta, calculada a partir del polo más cercano al origen, es:

$$\tau=\frac{1}{\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}} \rightarrow t_s=4=\frac{4}{\pi\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)} \rightarrow \xi=1{,}7$$

pudiéndose obtener una expresión de donde hallar el valor de ξ, desde el tiempo de establecimiento de la respuesta (ver figura). Por tanto, el valor del rozamiento viscoso aproximadamente resulta en:

$$D=2\xi\omega_n=10{,}7 \text{ Nms/rad}$$

Ejercicio 4

En primer lugar, se halla la función de transferencia del error de control:

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{1}{1+\frac{K(s+\alpha)}{(s+\beta)^2}}=\frac{(s+\beta)^2}{s^2+(2\beta+K)s+\left(\beta^2+K\alpha\right)}$$

Aplicando el teorema del valor final, se iguala el error numérico de control considerando una entrada en escalón unitario (es decir, 0,1):

$$e_{SS}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{(s+\beta)^2}{s^2+(2\beta+K)s+\left(\beta^2+K\alpha\right)}=\frac{\beta^2}{\beta^2+K\alpha}=0{,}1$$

Comparando el denominador de la función de transferencia bajo estudio con el polinomio característico de los sistemas de segundo orden, resulta:

$$s^2+(2\beta+K)s+\left(\beta^2+K\alpha\right) = s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$$

Sustituyendo valores ($\xi=0{,}5$ y $\omega_n=\sqrt{10}$ rad/s), se llega a las siguientes expresiones:

$$\beta^2+K\alpha=10$$
$$2\beta+K=\sqrt{10}$$

Por tanto, ya tenemos tres relaciones válidas con tres incógnitas (*K*, α y β) para obtener. Sustituyendo la segunda relación en la primera, se tiene que:

$$\frac{\beta^2}{\beta^2+K\alpha}=\frac{\beta^2}{10}=0{,}1 \rightarrow \beta=1$$

Ahora, se analiza la tercera expresión, resultando:

$$2\beta+K=\sqrt{10} \rightarrow K=\sqrt{10}-2=1{,}16$$

Finalmente:

$$\beta^2+K\alpha=10 \rightarrow \alpha=\frac{10-\beta^2}{K}=7{,}76$$