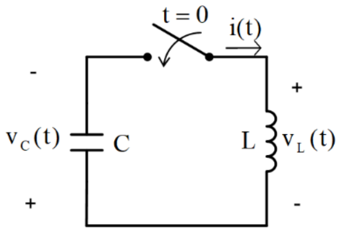
Ejercicio 1 (3,25 puntos)



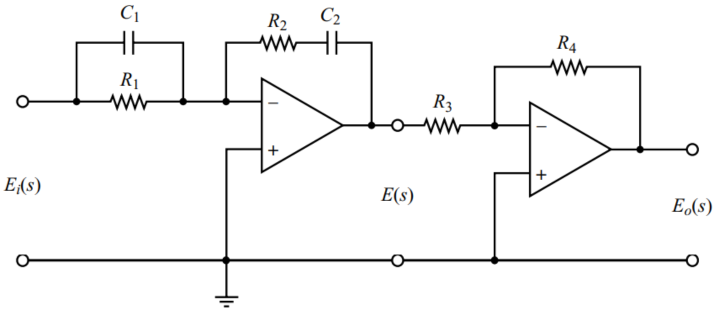
El condensador C está cargado a una tensión V_0 (borne "+" en la placa superior). En t=0 se cierra el interruptor. Se pide:

(i) Ecuación diferencial de $v_C(t)$ atendiendo a las polaridades indicadas en el circuito del enunciado.

(ii) Solución de la ecuación diferencial de (i) a partir de la transformada de Laplace, teniendo en cuenta las condiciones iniciales del circuito.

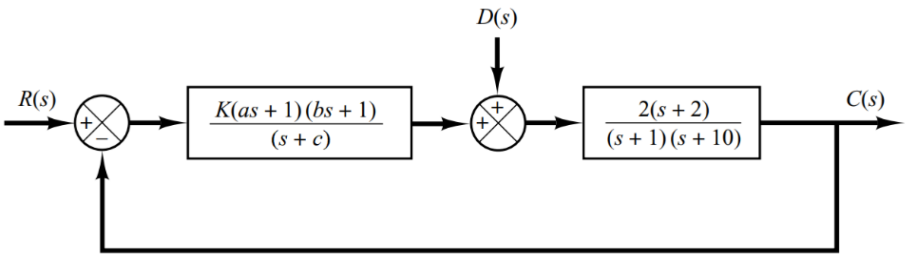
(iii) Explicar detalladamente el funcionamiento físico del modelo eléctrico en función de la tensión $v(t)$ y la corriente $i(t)$ -extraíble, por ejemplo, desde la ecuación del condensador-. ¿Es un circuito real?.

(iv) Para *corregir* el comportamiento anómalo del circuito, se propone implementar un controlador electrónico PID (véase la figura). Obtenga la función de transferencia $G_c(s)=E_o(s)/E_i(s)$, y correlacione los elementos del circuito (resistencias y condensadores) con los parámetros característicos del regulador, analizando cómo afectan a la localización de ceros/polos y al ajuste de la ganancia.



Ejercicio 2 (2,75 puntos)

Considere el diagrama de bloques que se muestra en la figura, donde una perturbación $D(s)$ aparece entre un controlador generalizado y la planta. Determine los parámetros K, a, b y c de tal forma que: (i) La respuesta $c_D(t)$ ante la entrada de perturbación en escalón unitario se atenúe sin error en régimen permanente; (ii) La respuesta $c_R(t)$ ante la entrada patrón, $r(t)=u(t)$, exhiba una sobreoscilación del 20% y un tiempo de establecimiento (criterio del 98%) de 2 segundos. Justifica tus resultados, esbozando el lugar de las raíces del sistema sin compensar y compensado. Ayúdese de las aproximaciones por polos dominantes.



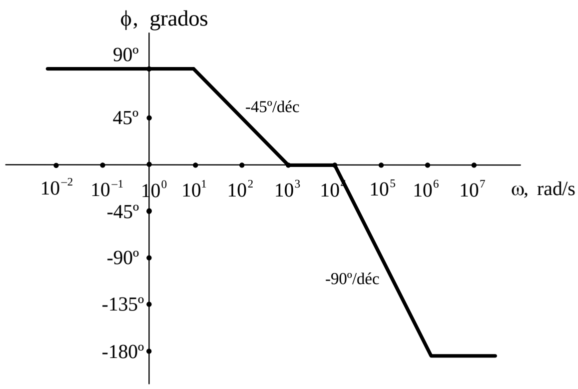
Ejercicio 3 (2,25 puntos)

La figura adjunta representa el diagrama de Bode de fase de un amplificador. Se pide:

(i) Determine la función de transferencia. ¿Se trata de una solución única?.

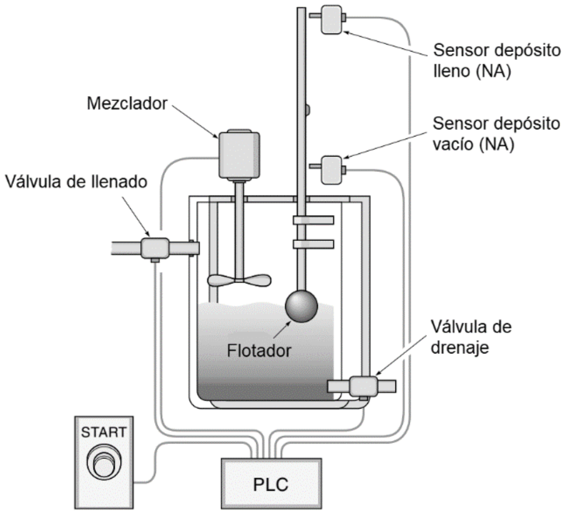
(ii) A partir de (i), esboce el diagrama de Bode de módulo, teniendo en cuenta que la ganancia, a ω=1 rad/s, es 0 dB.

(iii) Indica la salida $x_o(t)$, si a la entrada del amplificador se introduce, $x_i(t)=2\cos(1000t+\pi/4)$.



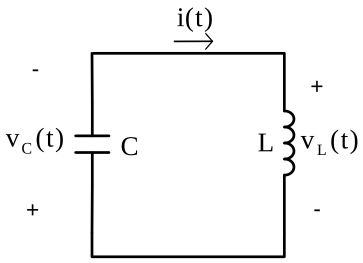
Ejercicio 4 (1,75 puntos)

Un procesamiento por lotes -que implica llenar una tina con un líquido, mezclarlo y el drenaje del depósito- se automatiza con un PLC (ver figura). A continuación, se detalla la secuencia específica de eventos. Cuando se presiona el botón *Start* (%I1.0) comienza el proceso: (i) Se abre una válvula de llenado (%Q2.0) y deja entrar un líquido en el depósito hasta que se llena (%I1.1); (ii) El líquido de la tina se *mezcla* (%Q2.1) durante 3 minutos; (iii) Finalmente, se abre una válvula de drenaje (%Q2.3) y "desagua" el tanque hasta su vaciado (%I1.2). Nótese que ambos sensores de los depósitos son normalmente abiertos (NA). Dibuje el diagrama de escalera para el programa del PLC, utilizando obligatoriamente contactos, bobinas NA/NC y SET/RESET.



Ejercicio 1

(i) En primer lugar, se muestra el circuito de interés para t>0:



La ley de Kirchhoff de tensiones establece:

$$v_L(t)+v_C(t)=0$$

Ya que la corriente que atraviesa ambos elementos es la misma, resulta:

$$L\frac{di(t)}{dt}+v_C(t)=0 \rightarrow LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+v_C(t)=0$$

Reordenando y normalizando:

$$\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+\frac{1}{LC}v_C(t)=0$$

(ii) Transformando a s la ecuación diferencial obtenida en (i) y teniendo en cuenta la condición inicial de la tensión en el condensador, $v_C(0)=-V_0$ (polarización inversa a la impuesta en (i)), resulta:

$$s^2V_C(s)-sv_C(0)+\frac{1}{LC}V_C(s)=0 \rightarrow s^2V_C(s)+V_0s+\frac{1}{LC}V_C(s)=0 \rightarrow V_C(s)=-\frac{V_0s}{s^2+\frac{1}{LC}}$$

Utilizando la tabla nº 11 de la versión extendida de las transformadas de Laplace:

$$v_C(t)=\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)]=-V_0\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}}\right]=-V_0\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

Una forma alternativa para obtener $V_C(s)$ puede ser desde el circuito en s, teniendo en cuenta que el circuito eléctrico equivalente de un condensador cargado es una impedancia $1/sC$ conectada en serie con una fuente de tensión de valor, en este caso, V_0/s (terminal "+" hacia arriba).

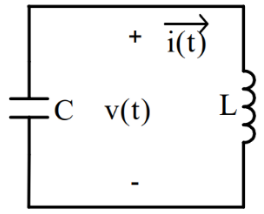
(iii) A partir de la ecuación de definición del condensador y considerando las polaridades dibujadas en el modelo eléctrico del enunciado (criterio receptor), la corriente que circula por el circuito resulta:

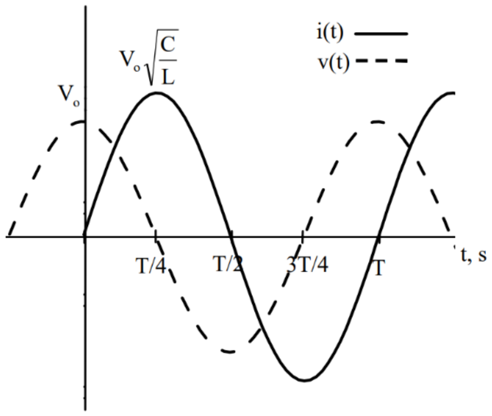
$$i(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}=C\frac{d}{dt}\left[-V_0\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)\right]=V_0\sqrt{\frac{C}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

Obsérvese que al tratarse de un circuito de segundo orden con amortiguamiento nulo, $\xi=0$, la corriente $i(t)$ de la bobina y la tensión $v_C(t)$ del condensador son oscilaciones sostenidas. Según el circuito indicado en la figura siguiente, consideremos: $v(t)=-v_C(t)$. Por tanto:

$$\mathrm{v(t)=V_0cos}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{LC}}}\mathrm{t}\right)$$

A continuación, se dibujan ambas señales: corriente $i(t)$ y tensión $v(t)$.





- <u>Primer intervalo, $0<t<T/4$.</u> *Condensador:* En $t=0$, está cargado a su valor máximo $v(0)=V_0$. Se va descargando ($v(t)$ decrece). En $t=T/4$, está descargado $v(T/4)=0$ V. Ha cedido su energía a la bobina. *Bobina:* En $t=0$, está descargada pues $i(0) = 0$. Se va cargando ($i(t)$ aumenta). En $t=T/4$, se ha cargado a su valor máximo $i(T/4)=V_0\sqrt{(C/L)}$.
- <u>Segundo intervalo, $T/4<t<T/2$.</u> *Condensador:* En $t=T/4$, está descargado, $v(T/4)=0$. Comienza a cargarse con una polaridad contraria ($v(t)$ negativa) a la dibujada en el circuito. En $t=T/2$, se encuentra cargado a su valor máximo $v(T/2)=-V_0$ (con polaridad opuesta a la dibujada en el circuito). *Bobina:* En $t=T/4$, está cargada a su valor máximo. Se va descargando ($i(t)$ decrece). En $t=T/2$, la bobina está descargada, $\mathrm{i}(T/2)=0$ A. Ha cedido su energía al condensador.
- <u>Tercer intervalo, $T/2<t<3T/4$.</u> *Condensador:* En $t=T/2$, está cargado a su valor máximo $v(T/2)=-V_0$. (con polaridad opuesta a la dibujada en el circuito). Se va descargando ($v(t)$ crece hasta hacerse 0). En $t=3T/4$, está descargado $v(3T/4)=0$ V. Ha cedido su energía a la bobina. *Bobina:* En $t=T/2$, está descargada $\mathrm{i}(T/2)=0$ A. Se va cargando con una corriente contraria a la dibujada en el circuito ($i(t)$ aumenta en sentido negativo). En $t=3T/4$, la bobina está cargada a su valor máximo con la corriente en sentido contrario a al dibujado en el circuito, $i(3T/4)=-V_0\sqrt{(C/L)}$.
- <u>Cuarto intervalo, $3T/4<t<T$.</u> *Condensador:* En $t=3T/4$, está descargado $v(3T/4)=0$ V. Comienza a cargarse ($v(t)$ crece). En $t=T$, se encuentra cargado a su valor máximo $v(T)=V_0$. *Bobina:* En $t=3T/4$, la bobina está cargada a su valor máximo con la corriente en sentido contrario a la dibujada en el circuito, $i(3T/4)=-V_0\sqrt{(C/L)}$. Se va descargando ($i(t)$ crece hasta hacerse 0). En $t=T$, la bobina se ha descargado $i(T)=0$ A. Ha cedido su energía al condensador.

El ciclo se vuelve a repetir, volviendo al primer intervalo.

Se ha construido un oscilador. El circuito consta de dos elementos ideales que se transfieren la energía periódicamente sin existir ninguna pérdida. Por tanto, no se trata de un circuito real. Si se monta el circuito en un laboratorio, siempre existe resistencia en el circuito (por pequeña que sea) y la energía termina extinguiéndose. Por tanto, en los osciladores reales se comunica en cada ciclo un suplemento de energía para que ésta no se extinga.

(iv) El circuito electrónico de la figura es un controlador PID que utiliza amplificadores operacionales. La función de transferencia $E(s)/E_i(s)$ viene dada por:

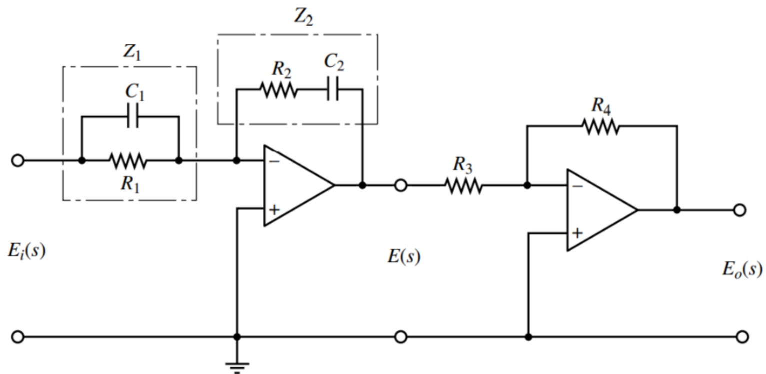
$$\frac{E(s)}{E_i(s)}=-\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

donde:

$$Z_1(s)=\frac{R_1\dfrac{1}{C_1 s}}{R_1+\dfrac{1}{C_1 s}}=\frac{R_1}{1+R_1C_1 s} \quad \text{y} \quad Z_2(s)=R_2+\frac{1}{C_2 s}=\frac{R_2C_2 s+1}{C_2 s}$$

Nótese que el R_1 y $1/C_1s$ de $Z_1(s)$ se encuentran asociados en paralelo y, por otro lado, la resistencia y el condensador de $Z_2(s)$ en serie. Por tanto:

$$\frac{E(s)}{E_i(s)}=-\left(\frac{R_2C_2 s+1}{C_2 s}\right)\left(\frac{1+R_1C_1 s}{R_1}\right)$$



De la etapa final del circuito electrónico, se puede obtener:

$$\frac{E_o(s)}{E(s)}=-\frac{R_4}{R_3}$$

Uniendo ambos resultados, se tiene:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{E_o(s)}{E(s)}\frac{E(s)}{E_i(s)}=\frac{R_2R_4}{R_1R_3}\frac{(1+R_1C_1 s)(R_2C_2 s+1)}{R_2C_2 s}=\frac{R_2R_4}{R_1R_3}\left(\frac{R_1C_1+R_2C_2}{R_2C_2}+\frac{1}{R_2C_2 s}+R_1C_1 s\right)$$

Finalmente, reordenamos términos para obtener una función de transferencia del tipo de los controladores PID, obteniendo:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{R_4(R_1C_1+R_2C_2)}{R_1R_3C_2}\left(1+\frac{1}{(R_1C_1+R_2C_2)s}+\frac{R_1R_2C_1C_2}{R_1C_1+R_2C_2}s\right)$$

comparable con:

$$G_C(s)=K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$$

donde K_p es la ganancia del control proporcional y, por otro lado, T_i y T_d representan las constantes de tiempo integral y derivativa, respectivamente. Por tanto, resulta:

$$K_p=\frac{R_4(R_1C_1+R_2C_2)}{R_1R_3C_2}, \quad T_i=R_1C_1+R_2C_2 \quad \text{y} \quad T_d=\frac{R_1R_2C_1C_2}{R_1C_1+R_2C_2}$$

En efecto, la ganancia del control proporcional depende de todos los parámetros del circuito electrónico. Sin embargo, las constantes de tiempo, que dominan la localización de los ceros del controlador (el único polo es estático en s=0), dependen de la primera etapa del sistema.

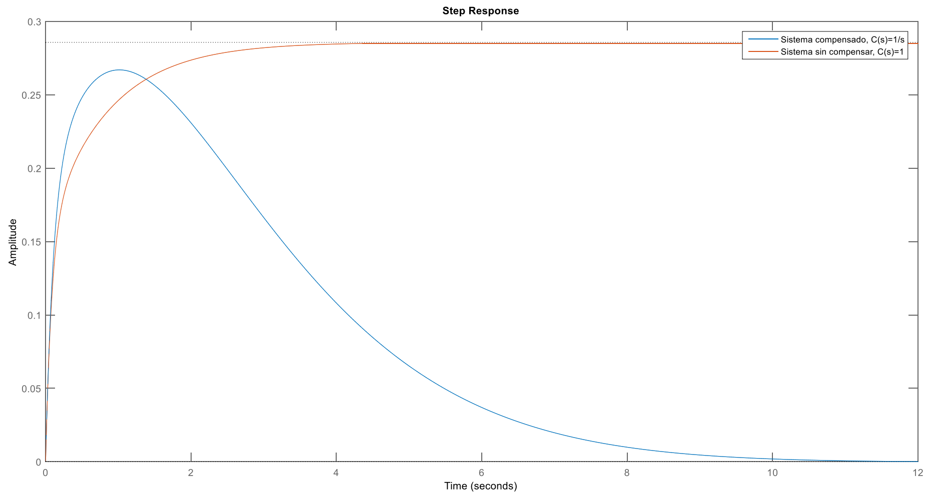
Ejercicio 2

El controlador del sistema consiste en un regulador generalizado ya que puede funcionar como compensador de adelanto/retardo o realizar acciones de control de la familia de PIDs. En función de los requerimientos, se fijarán los parámetros característicos K, a, b y c.

Comenzamos por (i). Para atenuar la respuesta $c_D(t)$ de tal forma que tienda a 0 sin inducir error en régimen permanente a la respuesta total, $c(t)$, es necesario que el sistema actúe como tipo I (entrada de perturbación es un escalón unitario). Estudiamos la función de transferencia en lazo abierto como:

$$\lim_{s\to0}\frac{K(as+1)(bs+1)}{s+c}\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+10)}=\lim_{s\to0}\frac{4K}{10c}\frac{(as+1)(bs+1)\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\left(\frac{s}{c}+1\right)(s+1)\left(\frac{s}{10}+1\right)}=\lim_{s\to0}\frac{4K/10c}{s^0}$$

En efecto, se trata de un sistema tipo 0, por lo que para aumentar su capacidad de "inmunización" ante entradas de tipo escalón, es necesario aumentar +1, al menos, el exponente del término s^0. Para ello, es necesario que la función de transferencia en lazo abierto tenga un polo en el origen, obteniendo, de esta forma, que c=0. Así, $c_D(t)$ vs. t para ambos escenarios, sería:



Seguidamente, fijamos los demás criterios -véase (ii)-. A partir del dato que solicita una sobreoscilación del 20%, podemos extraer el valor del coeficiente de amortiguamiento:

$$M_p=\exp\left[-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]=0{,}2\rightarrow\xi=\sqrt{\frac{(\ln 0{,}2)^2}{\pi^2+(\ln 0{,}2)^2}}=0{,}46$$

Ciertamente, se trata de un sistema subamortiguado no despreciable, ξ=0,46, ya que cuenta con un sobrepaso elevado sobre el régimen permanente. A continuación, se utiliza el tiempo de establecimiento solicitado. Al tratarse de un sistema subamortiguado, se puede utilizar la fórmula preestablecida (criterio del 98%):

$$t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=2\text{ s}\rightarrow\omega_n=\frac{4}{\xi t_s}=4{,}39\text{ rad/s}$$

Hasta ahora, se han obtenido los parámetros característicos de los polos complejos conjugados que queremos que dominen el sistema. Sin embargo, el sistema es de orden superior, por lo que habrá que utilizar una aproximación por polos dominantes. Antes, se obtiene la función de transferencia en lazo cerrado considerando $D(s)$=0:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K(as+1)(bs+1)}{s}\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+10)}}{1+\frac{K(as+1)(bs+1)}{s}\frac{2(s+2)}{(s+1)(s+10)}}=\frac{2K(as+1)(bs+1)(s+2)}{s(s+1)(s+10)+2K(as+1)(bs+1)(s+2)}$$

Se extrae y reordena el denominador de la función de transferencia en lazo cerrado, $C(s)/R(s)$, a partir del cual se extraen los polos del sistema:

$$s(s+1)(s+10)+2K(as+1)(bs+1)(s+2)=0$$
$$s^3+10s^2+s^2+10s+2K(as^2+s+2as+2)(bs+1)=0$$
$$s^3(1+2Kab)+s^2(11+2K(a+b)+4Kab)+s\big(10+2K+4K(a+b)\big)+4K=0$$

Dicho polinomio se iguala a:

$$(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)(s+10\xi\omega_n)=0$$

consistente en el producto de polinomios que dan lugar a los polos dominantes "subamortiguados" con parámetros característicos ξ=0,46 y ω_n=4,39 rad/s y un tercer polo real negativo fijado lo suficientemente alejado para poder considerar *dominantes* a los polos complejos conjugados. Sustituyendo y operando, resulta:

$$(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)(s+10\xi\omega_n)=s^3+24{,}23s^2+100{,}83s+389{,}18=0$$

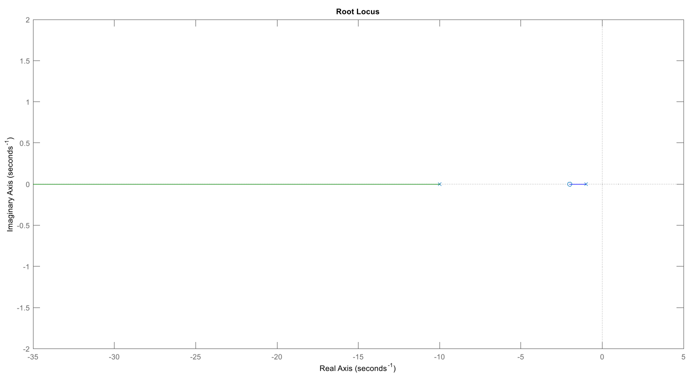
Fijamos, término a término, para obtener el valor de los parámetros:

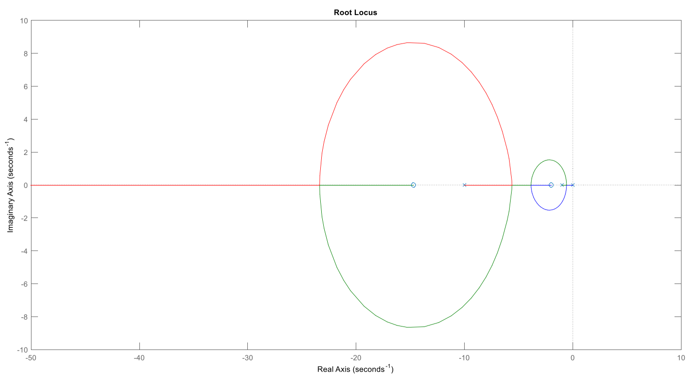
- Término libre: $4K$=389,18, se obtiene K=97,3.
- Términos s^3: $1+2Kab=1$, se obtiene que $2Kab=0$, o bien, $ab=0$. Fijamos $a=0$.
- Por ejemplo, términos en s^2: $11+2K(a+b)+4Kab=11+2Kb=24{,}23$, resultando b=0,068.

Por tanto, se tiene un controlador de tipo PI:

$$G_C(s)=97{,}3\frac{0{,}068s+1}{s}=6{,}62\frac{s+14{,}71}{s}$$

contiendo una ganancia de 6,62 (control proporcional), un polo en el origen y un cero en -14,71. Se comparan ambos lugares de las raíces (LDR) de los sistemas sin compensar y compensado:





En efecto, la introducción del polo en el origen y, sobre todo, el cero localizado lo suficientemente alejado de los polos *dominantes* para inducir un comportamiento subamortiguado, hacen que el LDR no solo contenga ramas que "van" sobre el eje real. Además, también aparecen polos con parte real e imaginaria para determinados valores de K.

Ejercicio 3

(i) El diagrama de Bode de fase representado en la figura del enunciado es consecuencia de la suma de los siguientes términos:

- Término constante de valor 90° (cero en el origen): s.
- Caída de -45°/década entre 10^1 y 10^3 rad/s (polo simple en -10^2 rad/s): $(s+10^2)$.
- Caída de -90°/década entre 10^4 y 10^6 rad/s (polo doble en -10^5 rad/s): $(s+10^5)^2$. Nótese que la opción de polos complejos conjugados debiera restringirse a sistemas con un factor de amortiguamiento muy próximo a 1, ya que a medida que disminuye ξ, la caída de 0° a -180° se vuelve más brusca, aumentando el valor de -90°/década (ver Teoría).

Por tanto:

$$T(s)=\frac{s}{(s+10^2)(s+10^5)^2}$$

Sin embargo, nada se ha hablado de la ganancia (constante K positiva). Por ejemplo, si consideramos que $T(s)$ está multiplicada por 1000 (o por cualquier constante K, con $K>0$) en el numerador, obtendremos el mismo diagrama de fase porque las constantes positivas aportan ángulo 0° en el diagrama de fase. Es decir, que la función de transferencia que representa el diagrama de Bode de fase del enunciado es:

$$T(s)=\frac{Ks}{(s+10^2)(s+10^5)^2},\quad \text{con } K>0$$

(ii) Hilando con el resultado de (i) y antes de esbozar el diagrama de Bode de módulo final, es necesario obtener el valor de *K*, a partir del dato proporcionado en el enunciado: La ganancia, a $\omega=10^0$ rad/s, es 0 dB. Para el análisis de la respuesta en frecuencia (respuesta del circuito amplificador a entradas sinusoidales) se realiza la sustitución $s=j\omega$ (frecuencias físicas). Entonces la función de transferencia sinusoidal $T(j\omega)$ se escribe como:

$$T(j\omega)=\frac{j\omega}{(j\omega+10^2)(j\omega+10^5)^2}$$

Puesto que se representa $|T(j\omega)|_{dB}$ vs. ω (ω en escala logarítmica), se tiene, a $\omega=10^0$ rad/s:

$$|T(j10^0)|_{dB}=20\log|T(j10^0)|=20\log\left|\frac{j10^0}{(j10^0+10^2)(j10^0+10^5)^2}\right|=$$
$$20\log|j10^0|-20\log|(j10^0+10^2)|-40\log|(j10^0+10^5)|=0-40-200=-240 \text{ dB}$$

En efecto, se tiene una falta de 240 dB, por lo que la ganancia (contribución constante para toda ω) debe valer:

$$240 \text{ dB}=20\log|K| \rightarrow K=10^{12}$$

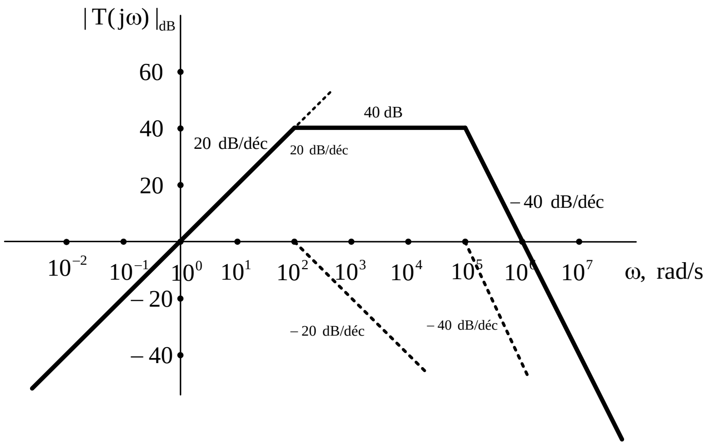
Resultando:

$$T(j\omega)=\frac{10^{12}j\omega}{(j\omega+10^2)(j\omega+10^5)^2}$$

Para facilitar la representación y suma de los componentes, se propone factorizar el numerador y el denominador en productos de *K*, s^n y $\left(1+\frac{s}{a}\right)^n$:

$$T(j\omega)=\frac{10^{12}j\omega}{(j\omega+10^2)(j\omega+10^5)^2}=\frac{10^{12}s}{10^2\left(1+\frac{j\omega}{10^2}\right)10^{10}\left(1+\frac{j\omega}{10^5}\right)^2}=\frac{s}{\left(1+\frac{j\omega}{10^2}\right)\left(1+\frac{j\omega}{10^5}\right)^2}$$

De esta forma, para valores muy bajos de frecuencia, el valor constante proporcionado por los polos es 0 dB. Se representan cada uno de los términos y se realiza la suma, obteniendo:



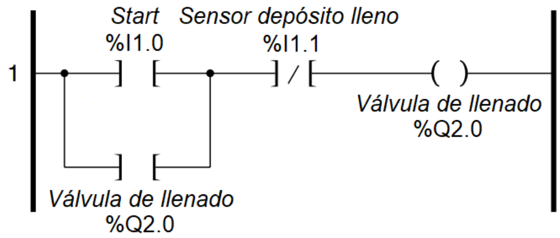
(iii) Para una determinada componente de la entrada puedo obtener su salida a partir de la función de transferencia sinusoidal. En efecto:

$$T(j\omega)=\frac{X_o(j\omega)}{X_i(j\omega)} \rightarrow X_o(j\omega)=X_i(j\omega)T(j\omega)$$

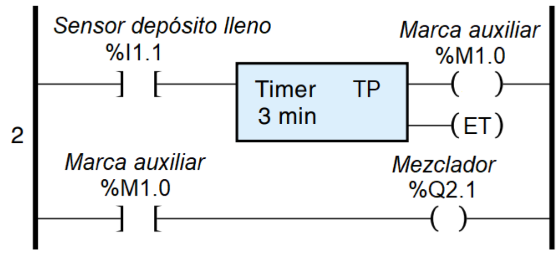
Observemos que $X_i(j\omega)$ tendrá para una frecuencia específica ω un módulo $|X_i(j\omega)|$ y una fase $\arg[X_i(j\omega)]$. Para la frecuencia ω=1 krad/s, se tiene que $X_i(j10^3)=2\angle 45°$ (dato del enunciado).
También la función de transferencia tendrá para una frecuencia específica ω un módulo $|T(j\omega)|$ y una fase $\arg[T(j\omega)]$. Para la frecuencia de ω=1 krad/s, se puede visualizar desde el diagrama de Bode de módulo (apartado (ii)) que corresponde una ganancia, en dB, de $|T(j10^3)|_{dB}=40$ dB. En magnitudes reales, esto es una ganancia de valor 100, $40=20\log|T(j10^3)| \Rightarrow \log|T(j10^3)|=2 \Rightarrow |T(j10^3)|=100$.
Desde el diagrama de Bode de fase (enunciado) se puede ver que: $\arg[T(j10^3)]=0°$. Finalmente resulta: $T(j10^3)=100\angle 0°$.
Entonces la componente a la salida será: $X_o(j10^3)=X_i(j10^3)T(j10^3)=2\angle 45°\times 100\angle 0°=200\angle 45°$.
Como vemos, el módulo de la señal de entrada (2 en este caso) se multiplica por la ganancia a esa frecuencia (100 en este caso) y a la fase de la señal de entrada (45° en este caso) se le suma la fase de la función de transferencia a esa frecuencia (0° en este caso). Así que la componente de frecuencia $2\cos(1000t+\pi/4)$ se convierte en $x_o(t)=200\cos(1000t+\pi/4)$, a la salida.

Ejercicio 4

El conjunto de segmentos que se explica a continuación, constituye el programa de control de llenado/vaciado del depósito. (i) En primer lugar, se programa la inicialización del proceso. La pulsación del botón *Start* NA, %I1.0, cuando el depósito no se encuentra completamente lleno (escenario inicial, interruptor NA %I1.1), activa el actuador de la válvula de llenado, %Q2.0. Dicho actuador se pone a 1 a través de una bobina NA, por lo que requiere de un enclavamiento para no desactivarse cuando se deje de pulsar %I1.0 (rama *bypass* colocada en paralelo con el botón *Start*).



(ii) Una vez se haya llenado el depósito completamente (sensor %I1.1), comienza una cuenta de 3 minutos (180 segundos) en un temporizador de impulso, durante la cual, se activará una marca auxiliar %M1.0. Esta, a su vez, activará el actuador asociado al mezclador, %Q2.1, mediante una bobina NA. Una vez finalicen los 180 segundos, tanto %M1.0 como %Q2.1 pasarán a desactivarse, independientemente de %I1.1, por la naturaleza de trabajo del temporizador que gobierna este proceso (TP).



(iii) Finalmente, realizamos un control de la válvula de drenaje con bobinas SET/RESET. Si el depósito está lleno y el mezclador ya se ha desactivado -paso (ii)-, comienza el vaciado del tanque (bobina %Q2.3 a SET). Una vez la tina se ha vaciado completamente (evento detectado por el sensor de depósito vaciado NA %I1.2), la válvula de drenaje se desactiva, poniendo a RESET la salida %Q2.3.