Anotaciones de Fundamentos de Automática

Enrique Hernández Balaguera
enrique.hernandez@urjc.es
Área de Tecnología Electrónica
Universidad Rey Juan Carlos (URJC)

Tema 3, parte 1:

Identificación de la respuesta temporal de sistemas de control: Respuesta transitoria

1. Respuesta transitoria: Sistemas de 1^er orden

Hasta ahora, hemos visto que la salida de un sistema cambia desde 0 (considerando condiciones iniciales nulas) a un valor final (régimen permanente o estacionario). La pregunta es: ¿cómo evoluciona?.

Considere la siguiente ecuación diferencial lineal y de coeficientes constantes,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+...+a_1\frac{dy(t)}{dt}+a_0 y(t)=b_m\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_{m-1}\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+...+b_1\frac{dx(t)}{dt}+b_0 x(t)$$

Sea $y(t)$ una variable de interés para la que se plantea su ecuación diferencial y $x(t)$ la entrada o excitación del sistema.

Según la teoría básica de ecuaciones diferenciales, la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial anterior se obtiene como la suma de la solución general de la ecuación diferencial homogénea $y_H(t)$, más una solución particular $y_P(t)$ de la ecuación diferencial completa. Esto queda expresado, matemáticamente, como:

$$y(t)=y_H(t)+y_P(t)$$

En efecto, la respuesta total $y(t)$ del sistema es la suma de la respuesta natural o libre, más la respuesta forzada (a continuación).

- **Solución homogénea: Respuesta transitoria, natural o libre**

La ecuación homogénea se obtiene cuando el primer miembro de la ecuación diferencial se iguala a cero. Es decir:

$$\frac{d^n y_H(t)}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y_H(t)}{dt^{n-1}}+...+a_1\frac{dy_H(t)}{dt}+a_0 y_H(t)=0$$

Obsérvese que, en la ecuación diferencial homogénea hemos cambiado $y(t)$ por $y_H(t)$, pues su solución nos proporciona $y_H(t)$.

¿Qué significa físicamente la ecuación diferencial homogénea anterior? Al igualar a cero el primer miembro de la ecuación diferencial, hemos "desactivado" la excitación del sistema ($x(t)$ y sus derivadas, no aparecen en la ecuación diferencial homogénea anterior). Por tanto, a la respuesta $y_H(t)$ se la conoce como respuesta natural o libre del sistema porque se debe exclusivamente a las "energías" que tienen almacenadas los elementos del sistema y no a la excitación aplicada. Por tanto, $y(t)$ puede notarse, también, como $y_{trans}(t)$. Conceptualmente, esto es muy intuitivo en sistemas eléctricos (ver después). Ciertamente, dicha energía almacenada proporciona tensiones y/o corrientes (desplazamientos) en los elementos de un sistema eléctrico (mecánico). En general, estos parámetros, que constituyen el régimen natural o libre de un sistema, terminan extinguiéndose ya que la energía se disipa (p. ej., en las resistencias eléctricas en forma de calor) y como hemos dicho, no hay entradas que exciten el sistema (se han "desactivado").

Una cuestión importante es que, en general, si se tiene la ecuación diferencial homogénea que describe una variable de interés de un sistema, se tiene la de cualquier variable pues todas verifican la misma ecuación diferencial homogénea. Esta base teórica se comentó en el Tema 2. Recordemos que, además, las partes reales de las raíces del polinomio característico o denominador de la función de transferencia son los coeficientes que multiplican al término exponencial de la respuesta. Estos parámetros nos describirán la inercia eléctrica/mecánica, en términos de constantes de tiempo del sistema bajo estudio.

- **Solución particular: Respuesta en régimen permanente o forzada**

Si el sistema está alimentado con una señal periódica (incluyendo como señal periódica la señal continua que es periódica de período infinito o frecuencia cero) y una vez que la respuesta natural se extingue, el sistema alcanza un régimen estacionario. Dicho régimen permanente ha de verificar la ecuación diferencial del circuito y, por tanto, constituye una solución particular de la ecuación diferencial completa. Entonces, en el caso de que el circuito alcance un régimen permanente, la respuesta $y_P(t)$ coincide con el régimen estacionario de $y(t)$. El régimen estacionario de $y(t)$ lo podemos notar como $y_{SS}(t)$, donde el subíndice "ss" proviene de "steady-state".

Si el sistema no está alimentado con una señal periódica, no alcanzará un régimen estacionario y habrá que obtener matemáticamente una solución particular de la ecuación diferencial completa. Consideremos el caso de una excitación que sea una exponencial decreciente por un coseno. Dicha señal no es periódica porque la amplitud del coseno (que sí es señal periódica) se va reduciendo exponencialmente con el tiempo. En ese caso, el circuito nunca alcanzará un régimen permanente.

Obsérvese que la solución particular de la ecuación diferencial completa depende de la alimentación del sistema (estamos considerando la entrada $x(t)$ y sus derivadas, no como en el caso de la solución homogénea o respuesta transitoria) y, por tanto, dicha solución $y_P(t)$ se denomina respuesta forzada en tanto que depende de la entrada o excitación $x(t)$ y de sus derivadas.

- **Solución de la ecuación diferencial: Respuesta total del sistema**

Finalmente, tal como se indicó en la página anterior, la repuesta total $y(t)$ del sistema será la suma de la respuesta natural o libre $y_{trans}(t)$, más la respuesta forzada $y_{SS}(t)$:

$$y(t)=y_{trans}(t)+y_{SS}(t)$$

Aunque no es el caso aquí, ya que a lo largo de la asignatura resolveremos ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace; recordemos que la solución general de la ecuación diferencial homogénea nos proporciona una serie de constantes desconocidas (los coeficientes de la combinación lineal de las exponenciales) que hay que determinar. Para ello debemos imponer las condiciones iniciales. En general, si tenemos una ecuación diferencial de orden "*n*", precisamos "*n*" condiciones iniciales para su resolución: condición inicial sobre $y(t)$, más las condiciones iniciales sobre las derivadas de $y(t)$ hasta el orden n-1. Por ejemplo, si la ecuación diferencial es de orden 3, precisaríamos conocer las condiciones iniciales hasta la segunda derivada: $y(0^+)$, $y'(0^+)$, $y''(0^+)$. Obsérvese que dichas condiciones iniciales están referidas a la respuesta total $y(t)$ y, por tanto, se imponen sobre la respuesta total $y(t)$ y no sobre $y_H(t)$ solamente.

Finalmente, es importante indicar que el tiempo que transcurre desde que se pone en funcionamiento el sistema o hay un cambio de topología hasta que alcanza su régimen estacionario, se denomina período transitorio. En la respuesta temporal de la salida, los términos que se extinguen con el tiempo constituyen el régimen transitorio y los que permanecen constituyen el régimen permanente.

- **Estabilidad:** Hablando de la respuesta temporal de un sistema LTI, hemos visto que si las raíces del polinomio característico tienen parte real negativa, las exponenciales de la respuesta natural decrecen con el tiempo. Este decrecimiento con el tiempo tiene que ver con la estabilidad del sistema. Establecemos dos definiciones básicas de estabilidad: la estabilidad BIBO y la estabilidad asintótica.

  (i) *Estabilidad BIBO:* Un sistema es estable BIBO ("Bounded Input Bounded Output") si para cualquier entrada acotada ("Bounded Input"), la salida también está acotada ("Bounded Output").
  (ii) *Estabilidad asintótica:* Un sistema es asintóticamente estable si la respuesta natural se anula con el paso del tiempo independientemente de las condiciones iniciales que tuviera previamente.

  ¡Importante! Si un sistema es asintóticamente estable, también es estable BIBO, pero no al revés. Lo que ocurre es que en sistemas LTI de orden mínimo, que son los que trataremos, ambas estabilidades coinciden y hablamos simplemente de estabilidad.

  Una condición necesaria para la estabilidad (raíces del polinomio característico con parte real negativa) es que dicho polinomio sea completo (posea todos los términos: desde el término independiente al término de mayor grado) y que sus coeficientes tengan todos el mismo signo. Puede comprobarse que para sistemas de primer y segundo orden la condición necesaria antes indicada pasa a ser necesaria y suficiente. Esto se estudiará en profundidad en el Tema 3 (parte 2). Como se observa, la estabilidad no depende de la entrada y, por tanto, es una propiedad ligada al sistema (respuesta transitoria). Véase:

  (i) Si un sistema está alimentado con por un valor constante (escalón), el régimen estacionario lo alcanza cuando todos los parámetros de interés alcancen un valor constante. Por ejemplo, refiriéndonos a sistemas eléctricos; a partir de ese momento, los condensadores se comportan como circuitos abiertos y las bobinas como cortocircuitos (así se consideran los circuitos de continua). Dichos elementos se encontrarán cargados a su valor de régimen.
  (ii) Un sistema alimentado con una señal sinusoidal, alcanza su estacionario cuando todos los parámetros de interés del sistema sean sinusoidales de la misma frecuencia que la señal de excitación. Para estudiar el régimen permanente de un sistema excitado en régimen permanente sinusoidal, éste se analiza en el dominio de la frecuencia utilizando, por ejemplo, los fasores.

(iii) Un sistema alimentado, en general, con una señal periódica (al ser periódica tendrá desarrollo en serie de Fourier) alcanza su régimen permanente cuando los parámetros de interés del sistema (tensiones, corrientes, desplazamientos, etc.) lleguen a ser periódicos. Para estudiar el régimen permanente de sistemas alimentados con una señal periódica no sinusoidal, se utilizan las series de Fourier. Esto no se verá a lo largo de la asignatura.

Llegados a este punto, uno se puede preguntar: ¿Y en el régimen permanente tendrán todas las variables del sistema la misma forma de onda que la señal de alimentación?. En el régimen permanente de continua, los valores de todas las variables serán constantes, igual que es constante la alimentación. En el régimen permanente sinusoidal, las variables en todos los elementos del sistema también serán sinusoidales y de la misma frecuencia que la entrada. ¿Por qué?. Por ejemplo, en un circuito eléctrico LTI, las tensiones y corrientes en los elementos están ligadas por proporcionalidad, derivadas e integrales (por ejemplo, en un condensador la corriente es proporcional -por el factor C (capacidad)- a la derivada de la tensión o la tensión es proporcional a la integral de la corriente por el factor $1/C$-) y derivadas o integrales de una señal sinusoidal es otra señal sinusoidal y de la misma frecuencia.

En general, en el régimen permanente que se alcanza con una señal periódica cualquiera (cuyas derivadas o integrales no den como resultado la misma función como es el caso de la sinusoidal), las variables de los elementos del sistema no tienen la misma forma de onda que la señal de alimentación. Piénsese un caso muy simple: Una señal de tensión alterna que tenga forma triangular y que se aplica, por ejemplo, a los bornes de un condensador. La corriente resultante es también periódica y del mismo período que la señal de alimentación pero será una señal alterna cuadrada (derivada de una señal triangular). Si se tiene un circuito resistivo puro todas las tensiones y corrientes tendrían la misma forma de onda que la alimentación ya que las tensiones y corrientes están ligadas por términos proporcionales (no hay ni derivadas o integrales al no haber elementos que almacenen energía). En ese caso no hay régimen transitorio sino que nada más "arrancar" el circuito ya se encuentra funcionando en régimen permanente (aplicando la ley de Ohm). En efecto, como no hay condensadores ni bobinas, las tensiones y corrientes sí pueden cambiar bruscamente "siguiendo" de manera instantánea la forma de onda de la alimentación (sea periódica o no periódica). Este último ejemplo puede ser fácilmente trasladado para el caso de los sistemas mecánicos.

- **Ejemplo de un sistema de 1er orden: Circuito RC y RL**

A lo largo de esta asignatura, hemos modelado sistemas de naturaleza eléctrica y mecánica. Sin embargo, nosotros tan solo veremos circuitos eléctricos cuyo comportamiento dinámico esté descrito por ecuaciones diferenciales de orden 1. Para ello, deberán contener, tan solo, un elemento almacenador de energía, condensador o bobina (ver Figura 1).

Se puede escribir una ecuación diferencial que describe cualquier variable de interés $x(t)$ de un elemento de un circuito de primer orden, con constante de tiempo (inercia eléctrica) τ, y alimentado mediante una fuente de continua:

$$\frac{dx(t)}{dt}+\frac{x(t)}{\tau}=A$$

donde A es una constante. En efecto, fijémonos, por ejemplo, en la ecuación diferencial de la tensión del condensador en el circuito RC del circuito de la izquierda de la Figura 1. Se obtiene que:

$$\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{v_C(t)}{RC}=\frac{V_S}{RC}$$

aquí: $x(t)=v_C(t)$, $\tau=RC$ y $A=V_S/RC$). En el circuito RL del circuito derecho de la Figura 1, la corriente en la bobina verifica:

$$\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{i_L(t)}{L/R}=\frac{V_S}{L}$$

donde $x(t)=i(t)$, $\tau=L/R$ y $A=V_S/L$). Entonces, la solución $x(t)$ de la ecuación diferencial genérica, conociendo la condición inicial $x(0^+)$, es:

$$x(t)=x(\infty)+[x(0^+)-x(\infty)]e^{-t/\tau}$$

donde $x(\infty)$ es el valor de la variable de interés en régimen permanente. Nótese que los valores de $x(0^+)$ y de $x(\infty)$ se especifican respecto de la polaridad indicada en el circuito que se dibuja para $t>0$.

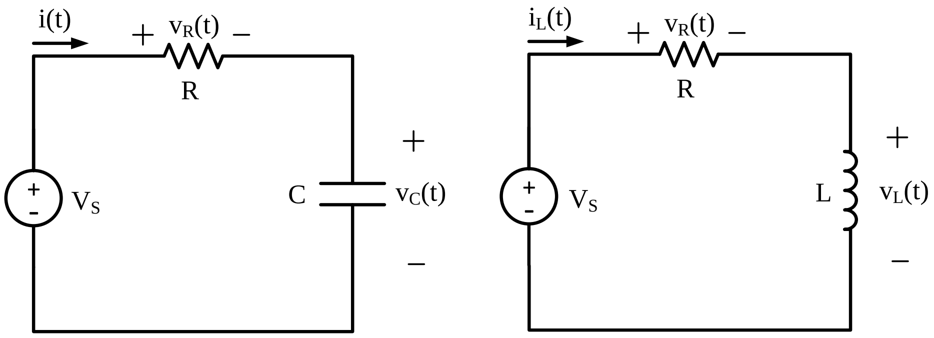

Figura 1. Circuito RC y RL con todas sus variables marcadas en el dominio del tiempo, para $t>0$.

Veamos cómo se ha obtenido la anterior solución de $x(t)$. Ésta será la suma de la solución general de la homogénea $x_H(t)$ más la solución particular de la completa $x_P(t)$: $x(t)=x_H(t)+x_P(t)$. *Solución homogénea (respuesta natural):* El polinomio característico (o denominador de la función de transferencia) es: $\lambda+(1/\tau)=0$; $\lambda=-1/\tau$. La base de soluciones es: $\{e^{-t/\tau}\}$; y la solución: $Ke^{-t/\tau}$. *Solución particular (respuesta forzada):* El régimen permanente del circuito es solución particular de la ecuación diferencial completa por lo que no es necesario obtener matemáticamente dicha solución. El circuito está alimentado con una fuente de continua (valor constante) y, por tanto, el valor que alcance $x(t)$, transcurrido un tiempo largo, será un valor constante. Este valor $x(\infty)$ es la solución particular. Por tanto: $x(t)=Ke^{-t/\tau}+x(\infty)$. Impongamos que para $t=0^+$ se obtiene el valor $x(0^+)$. Por tanto: $x(0^+)=Ke^{-0+/\tau}+x(\infty)$; $K=x(0^+)-x(\infty)$. Sustituyendo el valor de K en $x(t)$, se obtiene: $x(t)=[x(0^+)-x(\infty)]e^{-t/\tau}+x(\infty)$, con $t>0$ (ecuación previamente marcada). Pero, ¿y cuánto valen $v_C(0^+)$, $v_C(\infty)$, $i_L(0^+)$ e $i_L(\infty)$ en los circuitos de la Figura 1? Pasado un tiempo largo ($t\rightarrow\infty$) y en régimen de corriente continua, el condensador puede considerarse como un circuito abierto ($i(\infty)=0$ A en el circuito RC) y la bobina como un cortocircuito ($v_L(\infty)=0$ V). Ambas características pueden deducirse a partir de su ecuación constitutiva. Fácilmente, se puede deducir que $v_C(\infty)=V_S$ e $i_L(\infty)=V_S/R$. En el instante $t=0^+$, justo después de que el circuito se acabe de montar (en $t=0^-$); se tiene que: $v_C(0^+)=0$ V e $i_L(0^+)=0$ A (considerando condiciones iniciales nulas). Nótese que la bobina y el condensador no permiten cambios bruscos de corriente y tensión, respectivamente, salvo que se considere una entrada impulsional. Véase:

$$i_C(t)=C\frac{dv_C(t)}{dt}\rightarrow v_C(0^+)-v_C(0^-)=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+} i_C(t)dt\rightarrow v_C(0^+)-v_C(0^-)=0\rightarrow v_C(0^+)=v_C(0^-)$$

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}\rightarrow i_L(0^+)-i_L(0^-)=\frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} v_L(t)dt\rightarrow i_L(0^+)-i_L(0^-)=0\rightarrow i_L(0^+)=i_L(0^-)$$

En efecto, cualquier señal integrada entre dos instantes consecutivos es 0 (concepto de discontinuidad infinita). Retomando el desarrollo previo y sustituyendo, resulta:

$$v_C(t)=V_S\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$
$$i_L(t)=\frac{V_S}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

A partir de esta metodología, se podría calcular la variación temporal de cualquier variable. Para ello, se recomienda dibujar el circuito para cada uno de las instantes de interés (ver Figura 2).

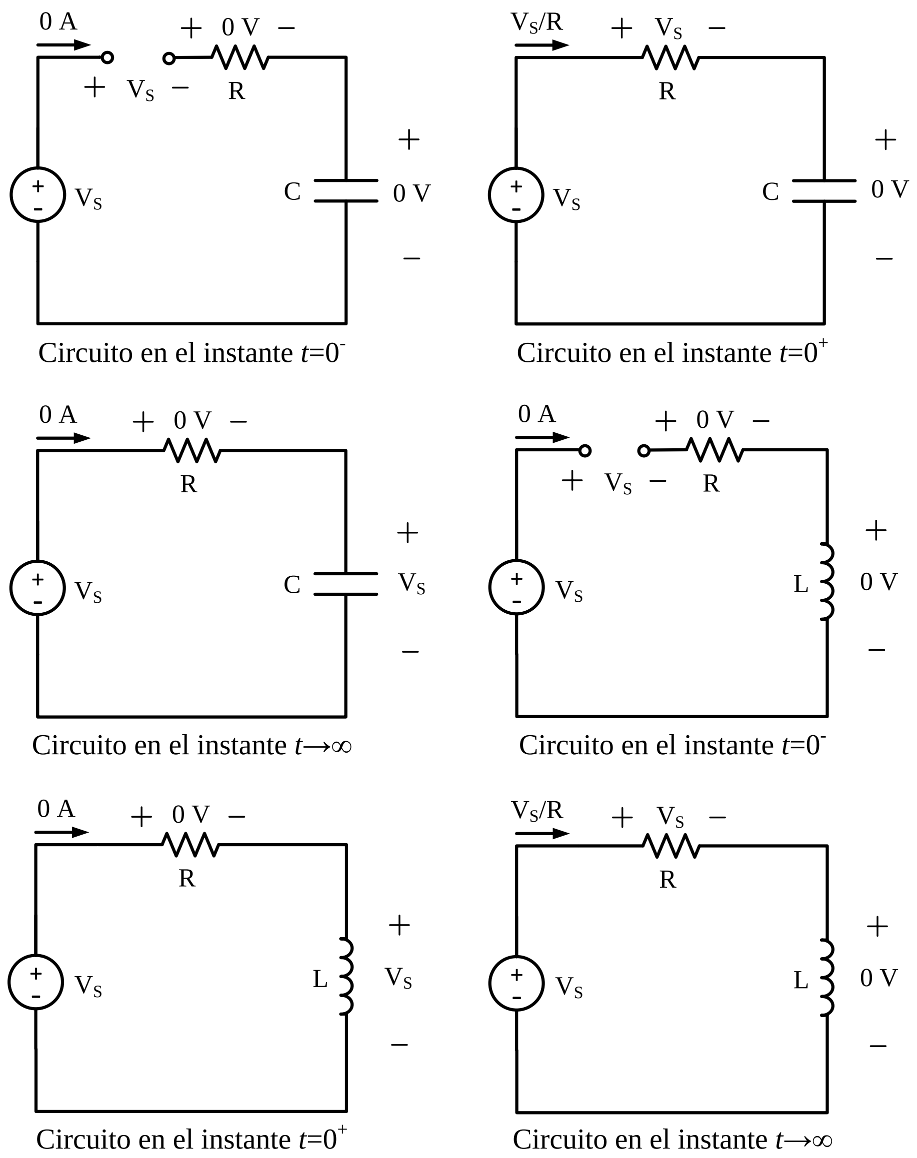

Figura 2. Circuitos RC y RL para los instantes $t=0^-$, $t=0^+$ y $t\rightarrow\infty$. Nótese que en el instante inicial, se considera un interruptor abierto, simulando una “no conexión”.

La opción alternativa más atractiva para resolver este tipo de ejercicios se basa en la utilización de la transformada de Laplace. Los circuitos RC y RL equivalentes en *s*, son:

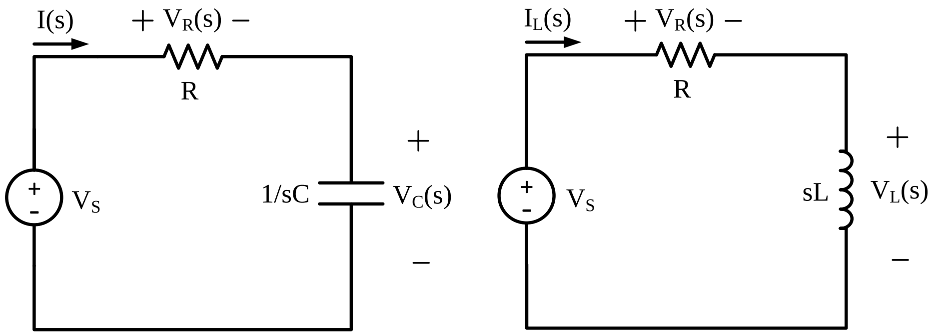

Figura 3. Circuito RC y RL con todas sus variables marcadas en el dominio de *s*, para *t*>0.

Aplicando, por ejemplo, la fórmula del divisor de tensión en el circuito RC y la ley de Ohm en el RL, se tiene:

$$V_C(s)=\frac{V_S}{s}\frac{1/_{sC}}{R+1/_{sC}}=\frac{V_S}{s}\frac{1/_{RC}}{s+1/_{RC}}\rightarrow v_C(t)=L^{-1}\left[\frac{V_S/_{RC}}{s\left(s+1/_{RC}\right)}\right]=V_S\left(1-e^{-t/_\tau}\right)$$

$$I_L(s)=\frac{V_S/_s}{R+sL}=\frac{V_S}{s}\frac{1/_L}{s+R/_L}\rightarrow i_L(t)=L^{-1}\left[\frac{V_S/_L}{s\left(s+R/_L\right)}\right]=\frac{V_S}{R}\left(1-e^{-t/_\tau}\right)$$

donde $\tau=RC$ y $\tau=L/R$ para el circuito RC y RL, respectivamente. ¡Consejo para no equivocarte!: Los henrios (H) son equivalentes a Ω×seg y los faradios (F) a seg/Ω. Recuerda que, para aplicar la antitransformada, se han utilizado los conceptos relativos a la descomposición en fracciones simples vista en el tema anterior.

- **Respuesta de un sistema de primer orden a un escalón en la entrada: Tiempo de establecimiento y tiempo de subida.** Sin pérdida de generalidad, vamos a considerar que un sistema está inicialmente descargado, $x(0^+)=0$, y que el valor final que adquiere la variable de interés en régimen permanente es la unidad, es decir, $x(\infty)=1$. Sustituyendo en la ecuación generalizada previamente señalada se obtiene que: $x(t)=1-e^{-t/\tau}$. La figura siguiente muestra la evolución de la variable de interés $x(t)$ frente al tiempo. Tal como se ha indicado en los dos ejemplos anteriores, si transcurre un tiempo equivalente a una constante de tiempo, $t=\tau$, resulta: $x(t)=1-e^{-\tau/\tau}=1-0,37=0,63$. La variable llega al 63% de su valor final (que es 1). Si transcurre un tiempo equivalente a 2 constantes de tiempo ($t=2\tau$), la variable llega al 86% de su valor final ($1-e^{-2}=0,86$). Con $t=3\tau$, se llega al 95% del valor final y con $t=5\tau$, se llega al 99%. Nótese que el valor final nunca se alcanzará pues la exponencial ha de anularse para lo cual $t\rightarrow\infty$. En este contexto, tiene sentido definir el tiempo de establecimiento.

  El tiempo de establecimiento (t_s), “settling time” en inglés, es el tiempo que transcurre hasta que la salida quede a un determinado porcentaje de su valor en régimen permanente. Típicamente se utiliza el tiempo de establecimiento al 5%. En este caso, el tiempo de establecimiento al 5% es $t_s=3\tau$ pues la variable ha llegado al 95% de su valor final, quedando una diferencia del 5% respecto al valor final. ¿Cuánto sería el tiempo de establecimiento al 3%?. Ya que el valor final es 1, la variable debe llegar a

0,97 (para que quede un 3% de diferencia con la salida). Es decir, la variable $x(t)$ para $t=t_s$ debe valer 0,97. Por tanto:

$$x(t_s)=0{,}97 \rightarrow 1-e^{-t_s/\tau}=0{,}97 \rightarrow e^{-t_s/\tau}=0{,}03 \rightarrow t_s/\tau=-\ln(0{,}03)=t_s=-\tau\ln(0{,}03)=3{,}5\tau$$

Un parámetro característico de la respuesta a escalón de un sistema de primer orden (sistema de primer orden en general) es el tiempo de subida (t_r), "rise time" en inglés, que es el tiempo que la variable de interés, que se toma como salida, tarda en subir desde el 10% hasta el 90% de su valor final. El tiempo que tarda $x(t)$ en alcanzar el 10% de su valor final es $t_{10}=-\tau\ln(0{,}90)=0{,}1054\tau$ y el que tarda en alcanzar el 90% es $t_{90}=-\tau\ln(0{,}10)=2{,}3026\tau$. Por tanto, $t_r=t_{90}-t_{10}=2{,}2\tau$. El tiempo de subida se ha indicado gráficamente en la Figura 4.

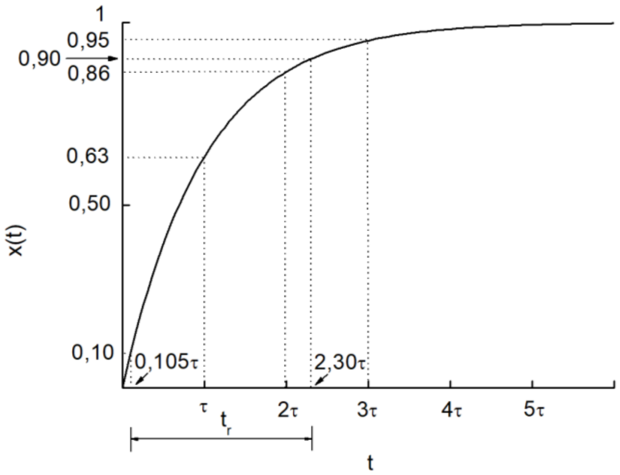

Figura 4. Gráfica típica de una respuesta a escalón (valor continuo) con los valores del tiempo de establecimiento (t_s) y subida (t_r) marcados.

Un ejercicio interesante sería resolver el circuito RL considerando una excitación cosenoidal, $V_S\cos(\omega t)$ V. Resolviendo en s, se puede llegar al siguiente resultado:

$$i_L(t)=\frac{V_S}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\left\{e^{-t/\tau}\cos\left(-\mathrm{arcotg}\left[\frac{\omega L}{R}\right]\right)+\cos\left(\omega t-\mathrm{arcotg}\left[\frac{\omega L}{R}\right]\right)\right\}$$

Este problema no resuelto, no se plantea por su ardua resolución, sino más bien para notar que la respuesta forzada, en este caso, es cosenoidal al igual que la entrada. Por otro lado, el término transitorio es exponencial al igual que los ejemplos vistos previamente.

Examen 17/12/2019. *Grado en Ingeniería de Robótica Software.*
Test: **Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:**

Un sistema de primer orden con ganancia estática K y constante de tiempo T positivas puede ser inestable en régimen permanente para valores elevados de K. **Falso**

2. Respuesta transitoria: Sistemas de 2º orden y superior

En la primera parte, se analizaron sistemas de primer orden. En dichos sistemas el comportamiento dinámico de las variables está descrito por la función exponencial. A continuación, se estudiarán sistemas de segundo orden y superior.

- **Sistemas de segundo orden**

Considérese una variable $x(t)$, la cual pasa de valer 0 en $t=0^+$ hasta un valor de 1 después de transcurrir un tiempo suficientemente largo. ¿Cómo es esta transición?. En efecto, si el sistema fuera de primer orden, $x(t)$ variaría de 0 hasta 1 según una exponencial gobernada por τ (inercia del sistema) y tardaría un tiempo de 4τ (98,2%). Sin embargo, ahora se van a tratar sistemas de 2º orden y la transición puede realizarse de 4 formas distintas (véase figura siguiente): (i) combinación lineal de dos exponenciales (respuesta sobreamortiguada), (ii) exponencial por un coseno (respuesta subamortiguada) que conlleva un comportamiento oscilatorio, (iii) como una combinación lineal de una exponencial más la misma exponencial multiplicada por el tiempo (respuesta críticamente amortiguada) y (iv) como una oscilación sostenida. La manera más rápida de alcanzar el régimen estacionario es que la respuesta del sistema sea críticamente amortiguada. Esto se ve claramente en la Figura 5 (se observa que la gráfica que antes se acerca al valor de 1 es la respuesta críticamente amortiguada). A continuación se analizan formalmente estas cuatro respuestas. Nótese que estas respuestas se refieren siempre a un escalón en la entrada.

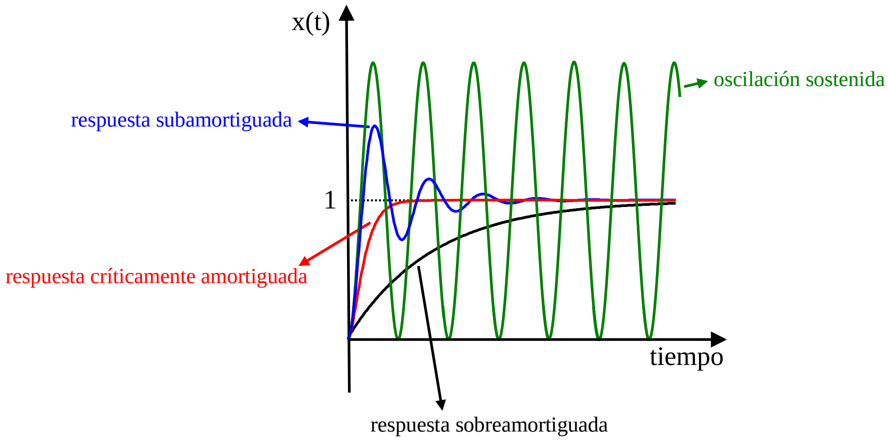

Figura 5. Tipos de respuestas de sistemas de segundo orden ante una entrada escalón.

Ciertamente, los coeficientes que multiplican en una ecuación diferencial tipo de segundo orden, dependen del sistema dinámico bajo estudio. Entonces, es mejor considerar una forma genérica de ecuación diferencial para un sistema de 2º orden, lineal e invariante en el tiempo. Esta ecuación viene escrita en función de 2 parámetros (que dependerán de los valores de los componentes del circuito): la pulsación natural no amortiguada ω_n o pulsación propia no amortiguada y el amortiguamiento ξ.

La ecuación diferencial de una variable de interés $x(t)$ de un sistema de segundo orden se escribe como:

$$\frac{1}{\omega_n^2}\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_n}\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=kr(t) \quad \text{o} \quad \frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\xi\omega_n\frac{dx(t)}{dt}+\omega_n^2x(t)=k\omega_n^2r(t)$$

donde $r(t)$ es una función que depende, en general, de la entrada del sistema y de sus derivadas (derivadas de la entrada, que en el caso de continua serían nulas). Si el amortiguamiento es nulo, el término $2\xi\omega_n[dx(t)/dt]$ será 0 en la ecuación diferencial anterior y si consideramos la ecuación diferencial homogénea asociada resulta:

$$\frac{d^2x_H(t)}{dt^2}+\omega_n^2x_H(t)=0, \quad \xi=0$$

cuya solución es una oscilación sostenida (un coseno o seno) de pulsación ω_n (esto lo vemos después). El amortiguamiento ξ es una medida de la forma en que la energía oscilante se disipa en calor. ξ y ω_n caracterizan sistemas de segundo orden.

Entonces, vamos a resolver esta ecuación diferencial genérica considerando lo siguiente: (i) el sistema no tiene energía inicial almacenada y, por tanto, las condiciones iniciales son nulas: $x'(0^+)=0$ y $x''(0^+)=0$; (ii) el sistema está alimentado con un escalón (excitación constante) de valor tal que el régimen permanente de la variable es la unidad: $x_P(t)=1$. Esto se consigue tomando $r(t)=1$ y $k=1$. En efecto, ¿cuál será el régimen permanente en este escenario?. Ya que el sistema está alimentado en corriente continua, la variable $x(t)$ tiene que adquirir un valor constante en régimen permanente (donde los valores de las variables de interés son constantes). Sea x_P el valor constante que adquiere la variable $x(t)$ en régimen permanente. Como el régimen permanente ha de verificar la ecuación diferencial, se tiene que:

$$\frac{d^2x_P}{dt^2}+2\xi\omega_n\frac{dx_P}{dt}+\omega_n^2x_P=\omega_n^2\rightarrow 0+2\xi\omega_n\cdot 0+\omega_n^2x_P=k\omega_n^2\rightarrow x_P=1$$

Luego si $r(t)=1$ (escalón unitario), el valor en régimen permanente de la variable $x(t)$ es la unidad.

Por tanto, resolvemos ahora la respuesta de un sistema dinámico LTI de 2º orden a un escalón en la entrada. Resolvemos:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\xi\omega_n\frac{dx(t)}{dt}+\omega_n^2x(t)=\omega_n^2$$

con las condiciones:

$$x(0^+)=0 \text{ y } x'(0^+)=0$$

Sin pérdida de generalidad, se observa que en la anterior ecuación diferencial, el régimen permanente de la variable $x(t)$ es la unidad, tal y como antes comentamos. La solución viene dada por la suma de la respuesta natural (solución general de la ecuación diferencial homogénea), $x_H(t)$, más la respuesta forzada (solución particular de la ecuación diferencial completa), $x_P(t)$. Es decir: $x(t)=x_H(t)+x_P(t)$.

<u>**Solución homogénea:**</u> Constituye la respuesta libre o natural del sistema. Esta respuesta depende sólo de las energías almacenadas inicialmente en los elementos del sistema capaces de realizar dicha función (por ejemplo, condensadores y bobinas en circuitos eléctricos). Por eso el segundo miembro se iguala a cero, lo que equivale a desactivar la excitación (las fuentes que alimentan un circuito eléctrico o fuerzas/partes aplicadas en sistemas mecánicos).

En primer lugar, obtenemos el polinomio característico:

$$\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda+\omega_n^2=0$$

Las raíces son:

$$\lambda=\frac{-2\xi\omega_n\pm\sqrt{(2\xi\omega_n)^2-4\omega_n^2}}{2}=\frac{-2\xi\omega_n\pm\sqrt{4\omega_n^2\left(\xi^2-1\right)}}{2}=\frac{-2\xi\omega_n\pm 2\omega_n\sqrt{\xi^2-1}}{2}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$

El comportamiento del sistema en cuestión depende del carácter real o complejo de dichas raíces, por lo que, según el radicando, han de tenerse en cuenta cuatro casos.

- **Caso (i):** Si $\xi>1$, las raíces son reales negativas y distintas. En efecto, las raíces son:

$$\lambda_1=-\xi\omega_n+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)=-a,\quad \text{donde } a=\omega_n\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)$$
$$\lambda_2=-\xi\omega_n-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)=-b,\quad \text{donde } b=\omega_n\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)$$

Fijémonos que ambas raíces (polos) son negativas. Por conveniencia, para que quede explícito el signo negativo, lo hemos sacado factor común y al resto lo hemos llamado a y b. Entonces, las raíces del polinomio característico las escribimos como $-a$ y $-b$ (en vez de λ_1 y λ_2). Una base de soluciones de la ecuación diferencial homogénea está dada por: $\{e^{-at}, e^{-bt}\}$. Obsérvese que ambas exponenciales son decrecientes con el tiempo. La solución de la ecuación diferencial homogénea es la combinación lineal de los elementos de la base: $x_H(t)=K_1e^{-at}+K_2e^{-bt}$. Esta expresión podemos también escribirla como: $x_H(t)=K_1e^{-t/(1/a)}+K_2e^{-t/(1/b)}$ y se observa que las dos constantes de tiempo (lo que divide al "$-t$" en la exponencial): $1/a$ y $1/b$ son las inversas de las raíces (polos) del polinomio característico cambiadas de signo. Nótese que ambas son positivas y se miden en segundos. ¿Cuándo se considerarán extinguidas las exponenciales? De las dos constantes de tiempo obtenidas, hay una mayor que la otra ($1/a$ es mayor que $1/b$, lógico pues b es mayor que a). Nota: Para mayor claridad, véase el mapa de polos de un sistema con $\xi>1$ de las diapositivas. La de valor más pequeño ($1/b$) es la constante de tiempo rápida. La de valor más grande ($1/a$) es la constante de tiempo lenta porque tarda más tiempo en extinguirse. El régimen transitorio se habrá extinguido cuando haya transcurrido un tiempo igual a 4 veces la constante de tiempo lenta ($4/a$). El sistema cuyo amortiguamiento es mayor que la unidad ($\xi>1$) se denomina sobreamortiguado.

- **Caso (ii):** Cuando $\xi=1$, las raíces del polinomio característico previamente indicado, $\lambda=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$, se convierten en una raíz doble negativa: $\lambda=-\omega_n=-a$, donde hemos notado, por conveniencia, $a=\omega_n$. Una base de soluciones está dada por $\{e^{-at}, te^{-at}\}$. Por tanto, una combinación lineal de los elementos de la base, constituye la solución de la ecuación diferencial homogénea: $x_H(t)=K_1e^{-at}+K_2te^{-at}$. Obsérvese que la exponencial se puede escribir como $e^{-at}=e^{-t/(1/a)}$ y lo que divide al "$-t$" en la exponencial es $\tau=1/a$, la única constante de tiempo que es la inversa de la raíz doble obtenida pero cambiada de signo. El sistema cuyo amortiguamiento es la unidad ($\xi=1$) se denomina críticamente amortiguado.

- **Caso (iii):** Si $0<\xi<1$, las raíces del polinomio característico son ahora complejas conjugadas. En efecto, como $0<\xi<1$, el radicando se hace negativo y las raíces pueden escribirse como:

$$\lambda=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{-\left(1-\xi^2\right)}=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{-1}\sqrt{1-\xi^2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=-a\pm j\omega_d$$

donde:

$$a=-\xi\omega_n \quad \text{y} \quad \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

El parámetro ω_d se denomina pulsación natural amortiguada. Una base de soluciones está dada por $\{e^{-(a+j\omega_d)t}, e^{-(a-j\omega_d)t}\}$. La combinación lineal de los elementos de la base puede escribirse, aplicando la identidad de Euler, como:

$$x_H(t)=Ae^{(-a+j\omega_d)t}+Be^{(-a-j\omega_d)t}=Ae^{-at}Ae^{j\omega_d t}+Be^{-at}Be^{-j\omega_d t}=Ae^{-at}[\cos(\omega_d t)+j\mathrm{sen}(\omega_d t)]+$$

$$+Be^{-at}[\cos(\omega_d t)+j\operatorname{sen}(\omega_d t)]=e^{-at}[(A+B)\cos(\omega_d t)+j(A-B)\operatorname{sen}(\omega_d t)]=$$
$$=e^{-at}[K_1\cos(\omega_d t)+K_2\operatorname{sen}(\omega_d t)]$$

donde se ha notado: $K_1=A+B$ y $K_2=j(A-B)$. Obsérvese que como $x_H(t)$ ha de ser real, A y B tienen que ser complejos conjugados para que K_1 y K_2 sean valores reales. En ese caso, $K_1=A+B$ es un número real (la suma de las partes imaginarias se anula y nos queda el doble de la parte real) y $K_2=j(A-B)$ es también real pues $A-B$ sólo tiene parte imaginaria (la suma de las partes reales se anula) y al multiplicarla por j se convierte en un valor real.

Se ha obtenido: $x_H(t)=e^{-at}[K_1\cos(\omega_d t)+K_2\operatorname{sen}(\omega_d t)]$. Fijémonos que el seno lo podemos pasar a coseno o el coseno a seno. Tendremos, entonces, la suma de dos senos o de dos cosenos de la misma frecuencia (ω_d) que se pueden sumar, resultando un seno o un coseno de la misma frecuencia. Por tanto, $x_H(t)$ puede también escribirse como: $x_H(t)=Ke^{-at}\operatorname{sen}(\omega_d t+\theta)$ o como $x_H(t)=Ke^{-at}\cos(\omega_d t+\theta)$. Lógicamente los valores de las constantes K y θ son diferentes si se utiliza el seno o el coseno.

La exponencial se escribe como: $e^{-at}= e^{-t/(1/a)}$, por lo que la única constante de tiempo (lo que divide a "$-t$" en la exponencial) es la inversa de la parte real de las raíces cambiada de signo: $\tau=1/a$ (tiempo de 4τ para extinguirse la exponencial). El sistema cuyo amortiguamiento es menor que la unidad ($\xi<1$) se denomina subamortiguado.

Examen 17/12/2019. *Grado en Ingeniería de Robótica Software.*

Ejercicio 1: **Para el circuito eléctrico RLC en serie de la figura, y considerando todas las condiciones iniciales iguales a cero:**

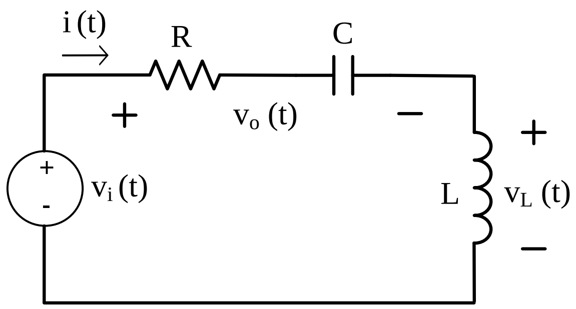

Figura 6. Circuito RLC en serie.

(i) Extrae la función de transferencia $G(s)= V_o(s)/ V_i(s)$, dejándola en función de R, L y C.

Resuelto en el PDF de anotaciones del Tema 2:

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

(ii) Para R=4 Ω, L=1 H y C=0,2 F, calcula la expresión de la salida $v_o(t)$ en función del tiempo ante una entrada $v_i(t)=\delta(t)$ (impulso unitario).

Sustituyendo en la expresión obtenida en (i), por los valores previamente indicados, resulta:

$$G(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{4s+5}{s^2+4s+5}$$

Si $v_i(t)=\delta(t)$, se tiene que $V_i(s)=1$. Por tanto:

$$V_o(s)=G(s)V_i(s)=\frac{4s+5}{s^2+4s+5}$$

Las raíces del denominador (polos), son complejas conjugadas (subamortiguado, $0<\xi<1$):

$$\lambda^2+4\lambda+5=0\rightarrow\lambda=-2\pm j$$

Por tanto:

$$V_o(s)=\frac{4s+5}{s^2+4s+5}=\frac{4s+5}{(s+2)^2+1^2}=\frac{4s}{(s+2)^2+1^2}+\frac{5}{(s+2)^2+1^2}=4\frac{(s+2)}{(s+2)^2+1^2}+$$

$$+(5-4\cdot 2)\frac{1}{(s+2)^2+1^2}\rightarrow v_o(t)=L^{-1}[V_o(s)]=e^{-2t}[4\cos(t)-3\mathrm{sen}(t)]$$

Aunque no se preguntó en este ejercicio, considérese que L y C son valores conocidos, mientras que la resistencia R es variable. *¿Qué valor de R elijo para que el condensador se descargue lo más rápidamente tras la aplicación del impulso?*. Vamos a resolver esta cuestión de forma paramétrica. Para ello el amortiguamiento ha de ser la unidad (respuesta críticamente amortiguada que corresponde a raíces reales negativas e iguales). Se tiene:

$$\omega_n^2=\frac{1}{LC}\rightarrow\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}};\quad 2\xi\omega_n=\frac{R}{L}\rightarrow\xi=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Por tanto:

$$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}=1\rightarrow R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Obsérvese que si $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$, la respuesta es sobreamortiguada ($\xi>1$ y las raíces son reales negativas y distintas). Si $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ la respuesta es subamortiguada ($\xi<1$ y las raíces son complejas conjugadas).

- **Caso (iv):** En el caso de que $\xi=0$, se tienen raíces complejas conjugadas pero imaginarias puras. En efecto, si en las raíces del polinomio característico dado $\lambda=-\xi\omega_n\pm\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$ pongo $\xi=0$, obtengo $\lambda=\pm j\omega_n$. La solución la puedo obtener del caso (iii) poniendo $a=0$ y $\xi=0$. Resulta: $x_H(t)=K_1\cos(\omega_d t)+K_2\mathrm{sen}(\omega_d t)$ que también puede escribirse como $x_H(t)=K\mathrm{sen}(\omega_d t+\theta)$ o $x_H(t)=K\cos(\omega_d t+\theta)$. Se tiene una oscilación sostenida de frecuencia ω_n.

Obsérvese que según se ha analizado, para calcular las constantes de tiempo de un sistema de segundo orden tomamos las partes reales de las raíces del polinomio característico, las cambiamos de signo y las invertimos. En efecto, en el caso (i) las raíces son reales y cada una de ellas directamente constituye la parte real; en los casos (ii) y (iii) sólo hay una constante de tiempo porque la raíz es doble o son complejos conjugados (una misma parte real). Un caso singular es el caso (iv), la parte real es 0 y, por tanto, la constante de tiempo es ∞. Por tanto, la oscilación no se extingue nunca.

Además, las raíces del polinomio característico deben tener parte real negativa para que las exponenciales sean decrecientes y el sistema sea estable (si no fuera así, la respuesta empezaría a crecer con el tiempo). Esta cuestión se analizó previamente.

Examen 28/02/2020. *Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.*
Ejercicio 4: **(ii) Considere el sistema mecánico que se muestra en la Figura 7. Inicialmente se encuentra en reposo. Suponga que el carro se pone en movimiento por una fuerza impulsiva cuya fuerza es la unidad, δ(*t*). ¿Se parará el carro en algún momento? Justifica tu respuesta y realiza una propuesta relativa a añadir/eliminar algún componente, en caso negativo.**

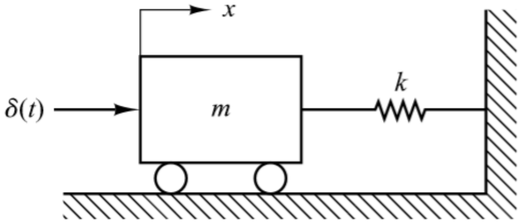

Figura 7. Sistema mecánico de interés.

La ecuación diferencial del sistema mecánico es:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{k}{m}x(t)=\frac{1}{m}\delta(t)$$

Los polos del sistema son complejos conjugados pero imaginarias puros, es decir, se trata de un sistema con amortiguamiento nulo. La respuesta es:

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{km}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Obsérvese que al tratarse de un circuito de segundo orden con amortiguamiento nulo (ξ=0), el desplazamiento $x(t)$ es una oscilación sostenida. Es decir, el carro no se pararía nunca. El sistema consta de dos elementos ideales que se transfieren la energía inyectada por el impulso, periódicamente, sin existir ninguna pérdida. Con la instalación de un amortiguador o considerando pérdidas por rozamiento en la masa, la energía transmitida por el impulso terminaría extinguiéndose y, por tanto, el carro se pararía.

Solución particular: Se trata de la respuesta forzada. Tal como hemos obtenido anteriormente: $x_P(t)=1$.

Solución de la ecuación diferencial: Respuesta total del sistema.
Finalmente: $x(t)=x_H(t)+x_P(t)=x_H(t)+1$.
Tendremos que calcular las dos constantes obtenidas para cada uno de los 4 casos, anteriormente analizados. Para ello acudimos a las condiciones iniciales previamente reflejadas.

- **Caso (i):** Respuesta a escalón de un sistema de 2º orden sobreamortiguado (ξ>1). Tenemos: $x(t)=K_1e^{-at}+K_2e^{-bt}+1$. Imponemos $x(0^+)=0$:

$$x(0^+)=0=K_1e^{-a\cdot0^+}+K_2e^{-b\cdot0^+}+1\rightarrow K_1+K_2=-1$$

También imponemos $x'(0^+)=0$:

$$x'(0^+)=0=-aK_1e^{-a\cdot0^+}-bK_2e^{-b\cdot0^+}\rightarrow -aK_1-bK_2=0$$

Obtenemos un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas (K_1 y K_2) donde:

$$K_1=-\frac{b}{b-a}\ \text{ y } K_2=\frac{a}{b-a}$$

Entonces, la respuesta a un escalón de un sistema de segundo orden sobreamortiguado es:

$$x(t)=-\frac{b}{b-a}e^{-at}+\frac{a}{b-a}e^{-bt}+1$$

Si las dos constantes de tiempo (inversa de los polos) $1/a$ y $1/b$ están suficientemente separadas, la respuesta debida a la constante de tiempo rápida ($1/b$) se anula pronto y, a partir de ese instante sólo nos queda la exponencial de la constante de tiempo lenta ($1/a$), por lo que la respuesta del circuito sería similar a la de un sistema de primer orden. La misma visión se puede llegar a dar a través de un análisis de la situación de los polos del sistema.

- **Caso (ii):** Respuesta a escalón de un sistema de 2º orden críticamente amortiguado ($\xi=1$): $x(t)=K_1e^{-at}+K_2te^{-at}+1$. Imponemos $x(0^+)=0$:

$$x(0^+)=0=K_1e^{-a\cdot0^+}+K_2te^{-a\cdot0^+}+1\rightarrow K_1=-1$$

También imponemos $x'(0^+)=0$:

$$x'(0^+)=0=-aK_1e^{-a\cdot0^+}+K_2\left[0^+(-a)e^{-a\cdot0^+}+e^{-a\cdot0^+}\right]\rightarrow -aK_1+K_2=0\rightarrow K_2=-a$$

Entonces, la respuesta a un escalón de un sistema de segundo orden críticamente amortiguado es:

$$x(t)=-e^{-at}-ate^{-bt}+1$$

- **Caso (iii):** Respuesta a escalón de un sistema de 2º orden subamortiguado ($0<\xi<1$): $x(t)=e^{-at}[K_1\cos(\omega_dt)+K_2\text{sen}(\omega_dt)]+1$. Imponemos $x(0^+)=0$:

$$x(0^+)=0=e^{-a\cdot0^+}[K_1\cos(\omega_d\cdot0^+)+K_2\text{sen}(\omega_d\cdot0^+)]+1\rightarrow K_1=-1$$

Además, se impone $x'(0^+)=0$:

$$x'(0^+)=0=e^{-a\cdot0^+}[-K_1\omega_d\text{sen}(\omega_d\cdot0^+)+K_2\omega_d\cos(\omega_d\cdot0^+)]-$$
$$-ae^{-a\cdot0^+}[K_1\cos(\omega_d\cdot0^+)+K_2\text{sen}(\omega_d\cdot0^+)]\rightarrow K_2\omega_d-aK_1=0\rightarrow K_2=-\frac{a}{\omega_d}$$

Obtenemos:

$$x(t)=1-e^{-at}\left[\cos(\omega_dt)+\frac{a}{\omega_d}\text{sen}(\omega_dt)\right]$$

Ya que el coseno y el seno tienen la misma frecuencia, vamos a sumarlos y lo escribimos en forma, por ejemplo, de seno, utilizando fasores. Como resultado final, la respuesta al escalón de un circuito de segundo orden subamortiguado (forma generalizada) es:

$$x(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-at}\text{sen}\left(\omega_dt+\text{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$$

- **Caso (iv):** Respuesta a escalón de un sistema de 2º orden con amortiguamiento nulo (ξ=0). En la expresión anterior de *x*(*t*) sustituimos *a*=0 y ξ=0. Por tanto, la respuesta al escalón de un circuito de segundo orden con amortiguamiento nulo es una oscilación sostenida:

$$x(t)=1\text{-sen}\left(\omega_n t+\frac{\pi}{2}\right)=1\text{-cos}(\omega_n t)$$

Las diferentes soluciones estudiadas vienen representadas en la Figura 8 que representa *x*(*t*) vs. *t*.

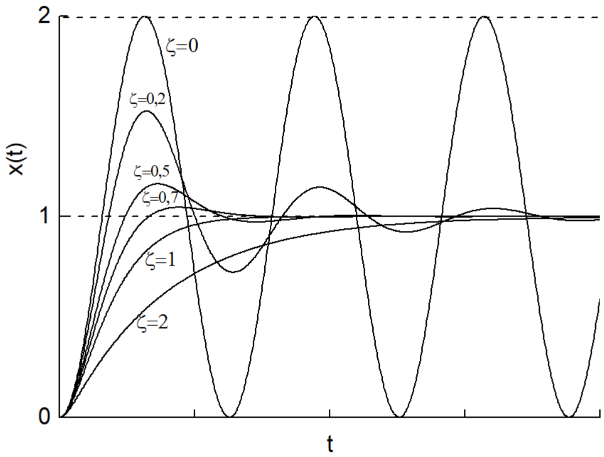

Figura 8. Evolución de la respuesta de un sistema de segundo orden ante una excitación escalón unitario en función de ξ.

Vemos cómo *x*(*t*) alcanza el régimen permanente (valor 1) dependiendo del valor del amortiguamiento. Así, para ξ=2 (como ξ>1, la respuesta es sobreamortiguada y las raíces son reales y distintas): *x*(*t*) tiende hacia 1 según la suma de 2 exponenciales. Para ξ=0,70, 0,50 y 0,20 (como ξ<1, la respuesta es subamortiguada y las raíces son complejas conjugadas): *x*(*t*) tiende hacia 1 oscilatoriamente (exponencial por coseno). ¿Cuál es la frecuencia que tiene esta oscilación?: La frecuencia de esta oscilación es la frecuencia natural amortiguada (ω_d) de valor $\omega_d=\omega_n\sqrt{1\text{-}\xi^2}$. Obsérvese que las oscilaciones son más apreciables cuanto menor es el amortiguamiento. De hecho, si el amortiguamiento es nulo (ξ=0: respuesta oscilante y raíces complejas imaginarias puras), *x*(*t*) es una oscilación sostenida (un coseno). En este caso, no existirían en el sistema elementos disipativos (resistencias o amortiguadores) que vayan amortiguando *x*(*t*) y, por tanto, la variable *x*(*t*) no alcanza ningún valor final (es una oscilación sostenida). La frecuencia de dicha oscilación es la frecuencia natural no amortiguada (ω_n). Por último, si ξ=1 (respuesta críticamente amortiguada y raíces reales e iguales), *x*(*t*) tiende hacia 1, según una exponencial más la misma exponencial multiplicada por el tiempo. Ésta es la manera más rápida de que una variable alcance su régimen permanente.

Consideremos que la entrada (alimentación del sistema) la multiplicamos por 5. Entonces, como los sistemas que estudiamos son lineales, todas las respuestas serán las mismas pero multiplicadas por 5. El régimen permanente de *x*(*t*) será 5 en vez de 1 y la oscilación sostenida estaría comprendida entre 0 y 10 en lugar de entre 0 y 2.

- **Parámetros característicos de la respuesta transitoria de sistemas de segundo orden**

Distinguimos, por un lado, los sistemas sobreamortiguados y críticamente amortiguados y, por otro lado, los subamortiguados:

- **Sistemas sobreamortiguados y críticamente amortiguados:** En este tipo de sistemas hablamos del tiempo de subida y del tiempo de establecimiento. Ambos ya fueron definidos al hablar de los sistemas de primer orden. El tiempo de subida (t_r) es el tiempo en que la variable de interés, que tomamos como salida, tarda en subir desde el 10% hasta el 90% de su valor en régimen permanente. El tiempo de establecimiento (t_s), es el tiempo que transcurre hasta que la salida quede a un determinado porcentaje de la salida en régimen permanente. Típicamente, se utiliza el tiempo de establecimiento al 2 o 5%. En un sistema sobreamortiguado donde las constantes de tiempo (polos) están suficientemente separadas, el tiempo de establecimiento depende de la exponencial de tiempo lenta y se calcula igual que en los sistemas de primer orden. Ahora bien, si las constantes de tiempo no están suficientemente separadas, habrá que utilizar métodos numéricos para calcular el valor de t_s. En el caso de un sistema críticamente amortiguado, el tiempo de establecimiento puede aproximarse por $t_s=4/a$.

- **Sistemas subamortiguados:** Fijémonos en la figura siguiente que muestra la respuesta típica a escalón de un sistema de segundo orden.

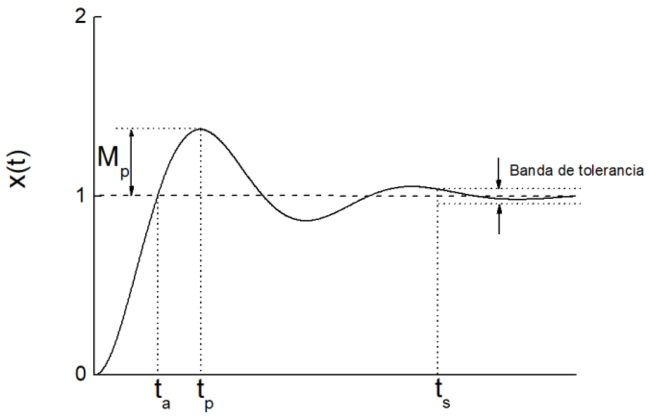

Figura 9. Parámetros característicos de una respuesta subamortiguada.

Vemos cómo la salida sobrepasa un valor M_p al valor en régimen permanente. El parámetro M_p se le conoce como sobrepaso. Obsérvese que es mayor cuanto más pequeño es el amortiguamiento (ξ). Esto puede apreciarse en la gráfica donde se comparaban las respuestas para distintos amortiguamientos (Figura 8). El tiempo para el que se define el sobrepaso, se le llama tiempo de pico (t_p). La respuesta al escalón de los sistemas subamortiguados muestra oscilaciones hasta que se establece el régimen permanente. El tiempo que tarda en alcanzar por primera vez la respuesta del sistema en régimen permanente se le denomina tiempo de alcance (t_a). El tiempo de alcance puede verse como el tiempo de subida (t_r) pero definido desde el 0% al 100% (en lugar del 10% al 90%). También se considera el tiempo de establecimiento (t_s) que ya se ha definido previamente (típicamente al 2%). Obsérvese que, en este caso, al existir oscilaciones, se define una banda de tolerancia (típicamente de $\pm$2%) del valor en régimen permanente, pues la respuesta oscila por arriba y por debajo del régimen permanente y a partir del tiempo t_s, el porcentaje de diferencia con la salida debe mantenerse tanto por arriba como por debajo.

¿Cómo estudio la rapidez en la respuesta a escalón de un circuito de 2º orden? La rapidez de respuesta de dos sistemas de 2º orden puede compararse, si tienen el mismo valor de amortiguamiento (ξ), utilizando la pulsación natural ω_n. Si tienen diferente amortiguamiento, la rapidez puede compararse a partir del tiempo de establecimiento (t_s). La rapidez en la subida de la respuesta viene dada por los tiempos de alcance (t_a) y de pico (t_p).

Examen 28/02/2020. *Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales.*

Ejercicio 1: **La estimulación magnética transcraneal (TMS) consiste en la estimulación de la corteza cerebral a través de una corriente eléctrica inducida por un campo magnético externo variable con el tiempo (no existen electrodos de contacto con la piel). El circuito de la Figura 10 muestra un estimulador magnético transcraneal.**

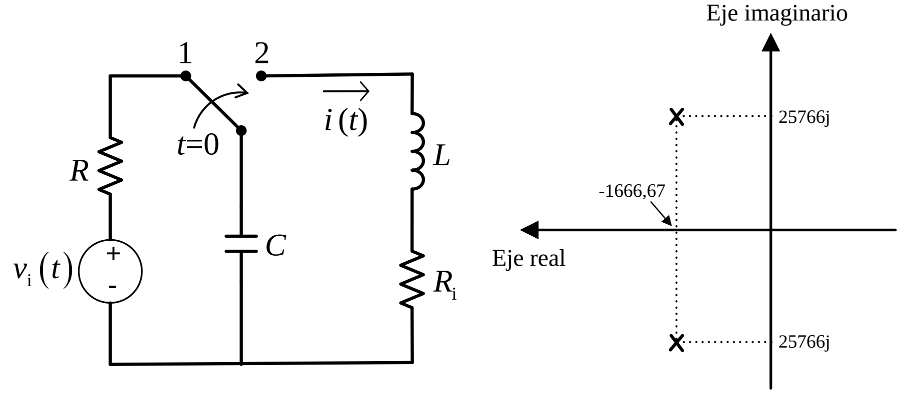

Figura 10. Circuito eléctrico equivalente de un sistema de estimulación magnética transcraneal (TMS).

Un condensador cargado *C*, se descarga a través de una bobina *L* y resistencia interna *R*$_i$. En el instante *t*=0, el interruptor cambia de posición para producir el campo magnético sobre el paciente.

(i) Dibuje el circuito para *t*>0 y obtenga la ecuación diferencial de *i*(*t*) en el dominio del tiempo.

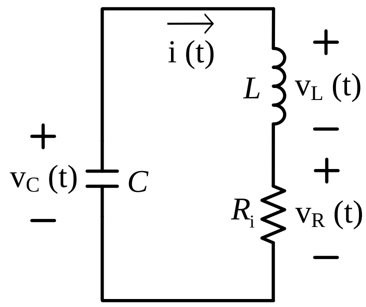

Figura 11. Circuito de interés para *t*>0.

Ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R_i}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0$$

A través de una inspección sencilla del circuito, podemos detectar dos puntos de interés: (i) el segundo miembro de la ecuación es 0 debido a que no hay alimentación (régimen estacionario nulo), y (ii) los coeficientes del primer miembro de la ecuación (dependientes de la salida) se pueden encontrar coherentes comparándolos con la ecuación característica de sistemas de 2º orden utilizando las unidades de resistencia, inductancia y capacidad.

(ii) Si se quiere aplicar una segunda estimulación consecutiva con un tiempo de espera de 4 segundos (criterio del 98%), ¿cuánto tiene que valer *C* si *R*=10 kΩ?.

Si se quiere una nueva estimulación, el condensador ha de cargarse otra vez y, por tanto, se debe conmutar el interruptor a la posición inicial. El condensador se carga a un valor constante de tensión (aquel suministrado por $v_i(t)$) a través de la resistencia de 10 kΩ. La constante de tiempo es $\tau=RC$. Con cuatro constantes de tiempo (4 s) el condensador ya se ha cargado al 98%: $4\tau=4$ s, siendo $\tau=1$ s. Por tanto, para que antes de una nueva descarga transcurran 4 s, el condensador debe valer: $C=\tau/R=100$ µF.

(iii) A partir de la situación de los polos del sistema y sabiendo que *L*=15 µH, determine el valor de *R*i y *C* (no utilizar el resultado de ii). ¿De qué tipo de sistema se trata?. Explíquese cómo afecta una variación de la resistencia interna a la corriente, *i*(*t*).

A partir de (i), se tiene que:

$$\omega_n^2=\frac{1}{LC}\rightarrow\omega_n=\frac{1}{\sqrt{LC}}\quad \text{y}\quad 2\xi\omega_n=\frac{R_i}{L}\rightarrow\xi=\frac{R_i}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Sabiendo que $L=15$ µH y a partir de la situación de los polos, $\xi\omega n=1666{,}67$ rad/s (parte real) y $\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=25766$ rad/s (parte imaginaria), resulta: $C=100$ µF y $R_i=50$ mΩ.
También, se puede saber que se trata de un sistema de segundo orden subamortiguado, valiendo el coeficiente de amortiguamiento, $\xi=0{,}06$.
Al disminuir R_i, el amortiguamiento (ζ) se hace cada vez más pequeño. La frecuencia natural ω_n no cambia porque depende sólo de L y C; que no varían. En efecto, la frecuencia del seno es la frecuencia natural amortiguada (ω_d): $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$ y la exponencial que multiplica al seno es: $e^{-\xi\omega_n t}=e^{-t/\left(\frac{1}{\xi\omega_n}\right)}$ (constante de tiempo: $1/\zeta\omega_n$). Al decrecer ζ aumentan tanto ω_d como la constante de tiempo. La corriente es más rápida (en frecuencia) y tarda más en extinguirse. Finalmente, es importante indicar que al disminuir R_i, también la corriente será mayor en amplitud (valor de sobreoscilación).

(iv) Partiendo del circuito equivalente en el dominio de *s* para *t*>0 (con *C* cargado inicialmente a 2 kV: *v*(0)=2000), obtenga la respuesta analítica de *i*(*t*) y un esbozo de la misma.

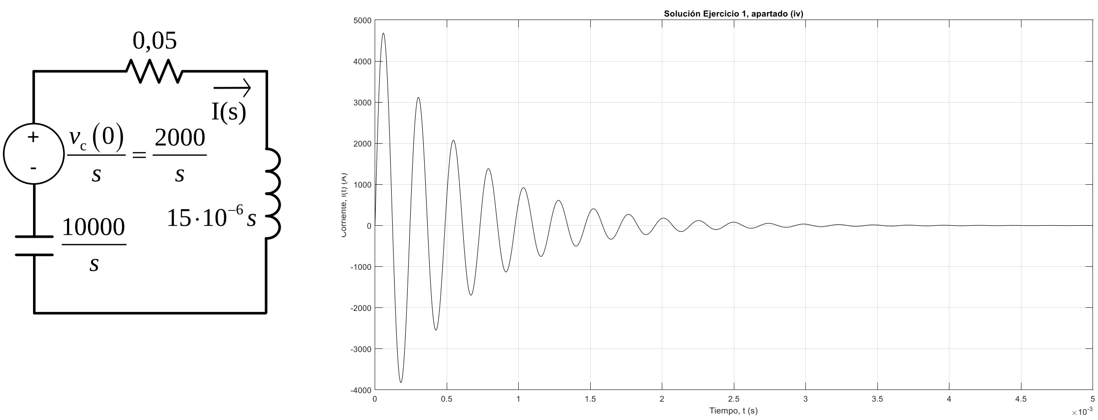

Figura 12. Circuito equivalente en el dominio de s para *t*>0 y respuesta temporal de *i*(*t*) resultante.

Resulta:

$$I(s)=\frac{2000/s}{(10000/s)+0{,}05+15\cdot10^{-6}s}=\frac{1{,}33\cdot10^8}{s^2+3{,}33\cdot10^3s+6{,}67\cdot10^8}$$

Antitransformando al dominio del tiempo:

$$i(t)=5174{,}65e^{-1666{,}67t}\text{sen}(25766t)$$

Al tratarse de un sistema subamortiguado ($0<\xi<1$), el esbozo de la respuesta puede ser más preciso a través del cálculo de los parámetros característicos. Ciertamente, la respuesta previamente indicada en la Figura 12, a pesar de ser una respuesta subamortiguada, no exhibe la forma típica (valor inicial es igual que el valor final). Por ello, la mayoría de los parámetros vistos en teoría carecen de sentido en este escenario y sus fórmulas prestablecidas, también.

Se propone un trazado de la respuesta transitoria a través de una exploración de su fórmula analítica. El tiempo de estabilización, podría calcularse como:

$$t_s\sim\frac{\pi}{\xi\omega_n}=\frac{\pi}{0{,}06\cdot 25812{,}51}=2{,}03\text{ ms}$$

Sin embargo, un valor más preciso puede encontrarse calculando t_s como 4τ (criterio 98%) siendo τ lo que divide al "$-t$" en la exponencial: 4/1666,67=2,4 ms. Por otro lado, el tiempo de pico inicial (y los consecutivos donde las oscilaciones alcanzan sus máximos) puede obtenerse como:

$$\frac{di(t)}{dt}=0\rightarrow 0=5174{,}65(-1666{,}67)e^{-1666{,}67t}\text{sen}(25766t)+$$
$$+5174{,}65e^{-1666{,}67t}(25766)\cos(25766t)=$$
$$=5174{,}65e^{-1666{,}67t}[-1666{,}67\text{sen}(25766t)+25766\cos(25766t)]\rightarrow$$
$$\rightarrow -1666{,}67\text{sen}(25766t)+25766\cos(25766t)=0\rightarrow \text{tg}(25766t)=\frac{25766}{1666{,}67}\rightarrow$$
$$\rightarrow 25766t=\frac{86{,}3}{90}\pi+k\pi,\ k=1,2,3...\rightarrow t_p=58{,}23\ \mu\text{s}$$

Seguidamente, sabiendo que el sobrepaso es el valor de la función $i(t)$ para el tiempo de pico pero medido desde el régimen permanente (0 V en este caso). Se tiene:

$$i\left(t_p\right)=5174{,}65e^{-1666{,}67\cdot\left(58{,}23\cdot 10^{-6}\right)}\text{sen}\left(25766\cdot 58{,}23\cdot 10^{-6}\right)=4684{,}4\text{ A}$$

Por último, para obtener los pasos por cero (valor del régimen estacionario) de $i(t)$ -tiempo de alcance-, obviamente igualamos la expresión analítica a 0 y despejamos:

$$i(t)=5174{,}65e^{-1666{,}67t}\text{sen}(25766t)=0\rightarrow \text{sen}(25766t)=0\rightarrow t_a=0+\frac{k\pi}{25766}\text{ s}$$

En efecto, el primer paso por 0 A, obviando el inicial (bobina descargada), es en 0,122 ms. Barriendo el valor de k, se pueden obtener todos los pasos por el régimen permanente hasta la extinción de la oscilación.

Tal y como hemos visto en los ejercicios propuestos, la resolución más sencilla se obtiene a través de la transformada de Laplace, sin aplicar las condiciones iniciales, llevando a cabo un desarrollo matemático menos arduo.

- **Sistemas de orden superior**

El principal objetivo que vamos a abordar, en este punto, para el estudio de este tipo de sistemas es el efecto de añadir un polo o un cero. Esto nos ayudará a comprender el comportamiento de la respuesta obtenida en lazos de control. Por ello, se propone analizar el efecto de añadir:

- **un polo adicional:** $^{1}/_{1+sT_p}$. Ciertamente, a medida que aumente la constante de tiempo asociada al nuevo bloque, T_p, -o se reduce el valor del polo, $1/T_p$- el conjunto total se volverá más lento y subamortiguado. En efecto, el impacto de este "nuevo bloque" sobre el conjunto es una característica de filtro paso bajo, atenuando la respuesta del espectro de alta frecuencia (rapidez del sistema). Ciertamente, si el polo añadido se encuentra mucho más a la derecha (cerca del origen) que esos del sistema de origen en el mapa de polos, el sistema podría aproximarse por uno de primer orden: concepto de *polos dominantes*. En caso contrario: T_p muy pequeña (constante de tiempo rápida), el efecto de añadir dicho polo no se notaría en la respuesta temporal del sistema. Esto es, los polos dominantes son los del sistema de origen. En caso de que la parte real de los polos fuera comparable, con carácter general, obtendríamos una respuesta con características de ambos sistemas; tendiendo a ser más lenta pero también más inmune a las perturbaciones.

- **un cero adicional:** $(1+sT_p)$. Al añadir un cero (raíz del denominador, $1/T_p$), el sistema se vuelva más estable y rápido (efecto contrario al de añadir un polo). Nótese que la nueva respuesta será la misma que la previa más su derivada multiplicada por T_p (factores 1 y sT_p, respectivamente). Una explicación en profundidad de este efecto se propondrá en el Tema 4, a partir del método del lugar de las raíces (LDR). No obstante, es importante destacar que un aumento desmedido de la constante de tiempo del cero podría provocar un aumento de la sobreoscilación.