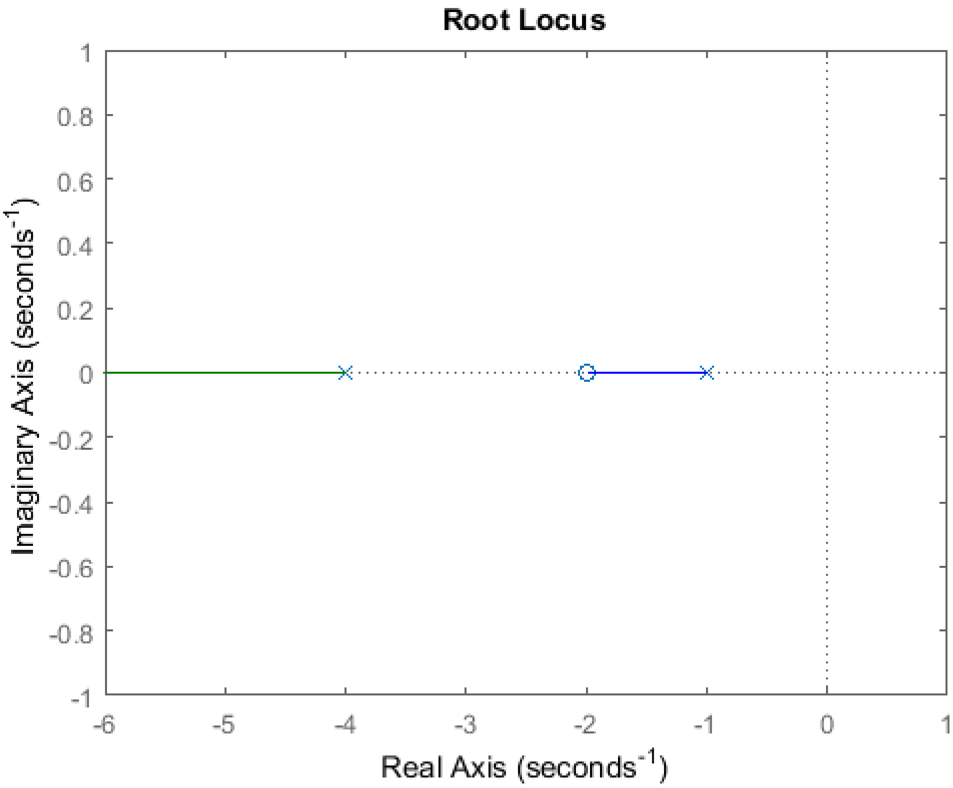
SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 4

Bosquejo del Lugar De las Raíces (LDR)

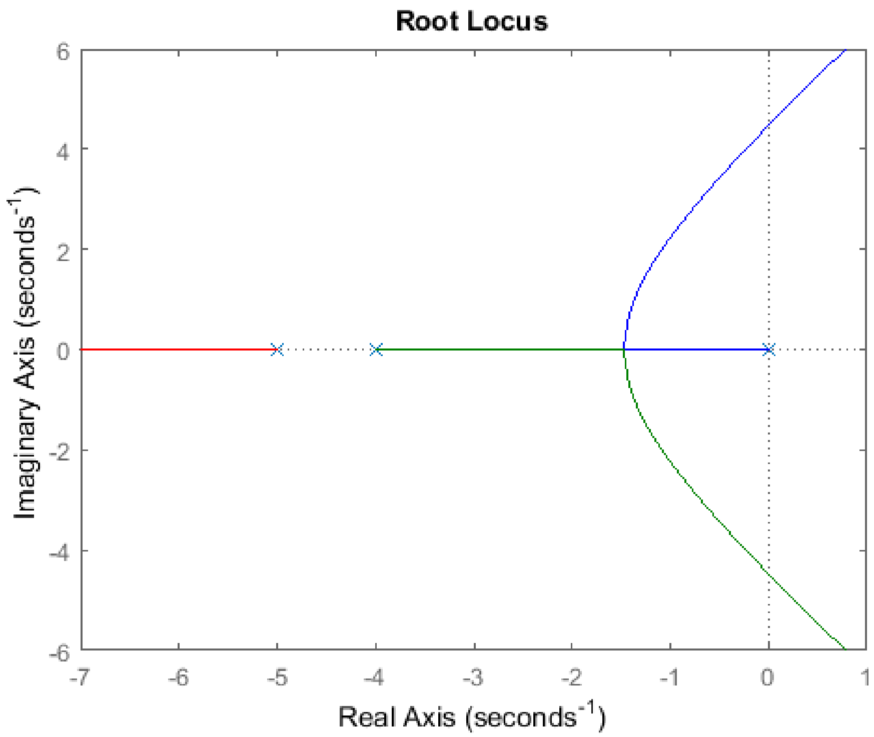
Problema 4.1.

a) Incorrecto. Por los segmentos del eje real incluidos en el LDR, y por la ausencia de simetría en el plano complejo (el LDR debe ser simétrico con respecto al eje real).
b) Incorrecto. Cuando hay dos asíntotas, sus ángulos son de +90º y -90º.
c) Correcto.
d) Correcto, ya que hay un cero doble en el origen.
e) Incorrecto. Por los segmentos del eje real incluidos en el LDR, y por la ausencia de simetría en el plano complejo.
f) Correcto.
g) Incorrecto. Por los segmentos del eje real incluidos en el LDR, y por la ausencia de simetría en el plano complejo.
h) Correcto.

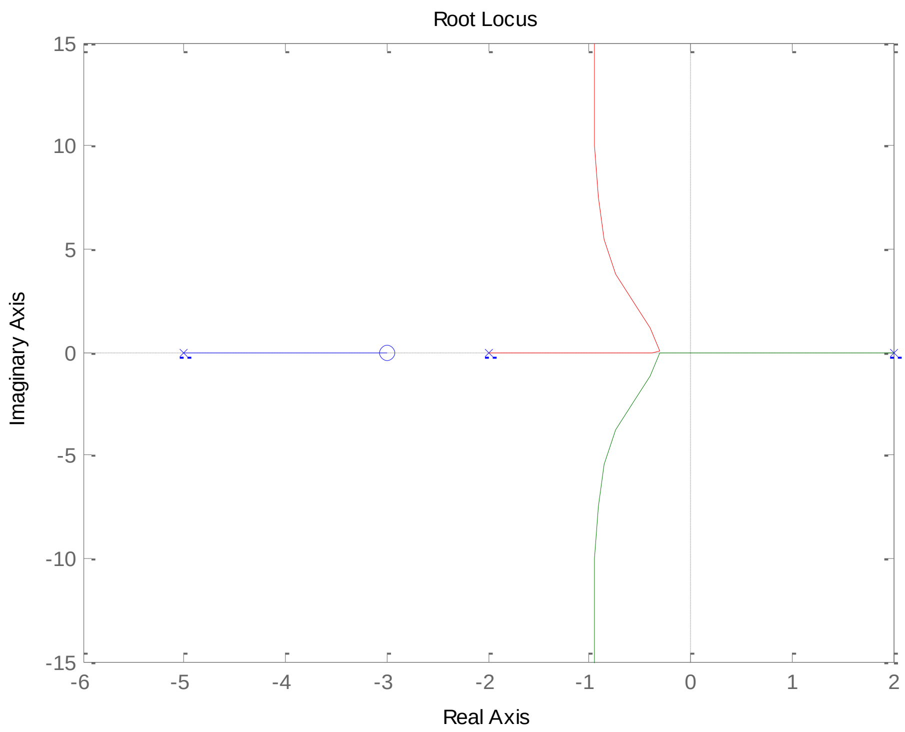
Problema 4.2.



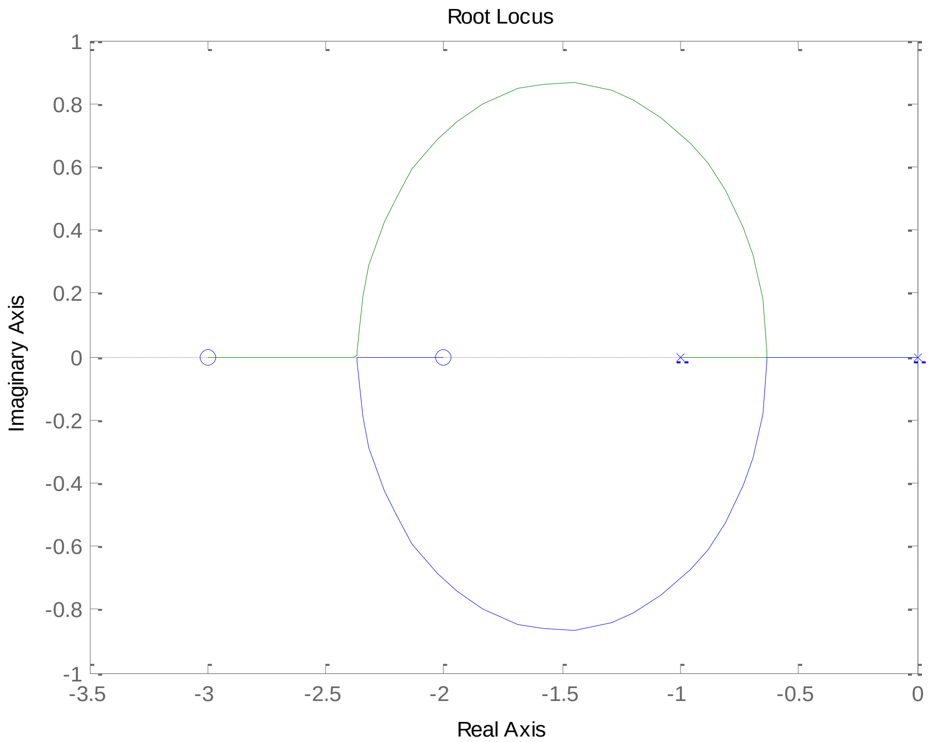
Problema 4.3.



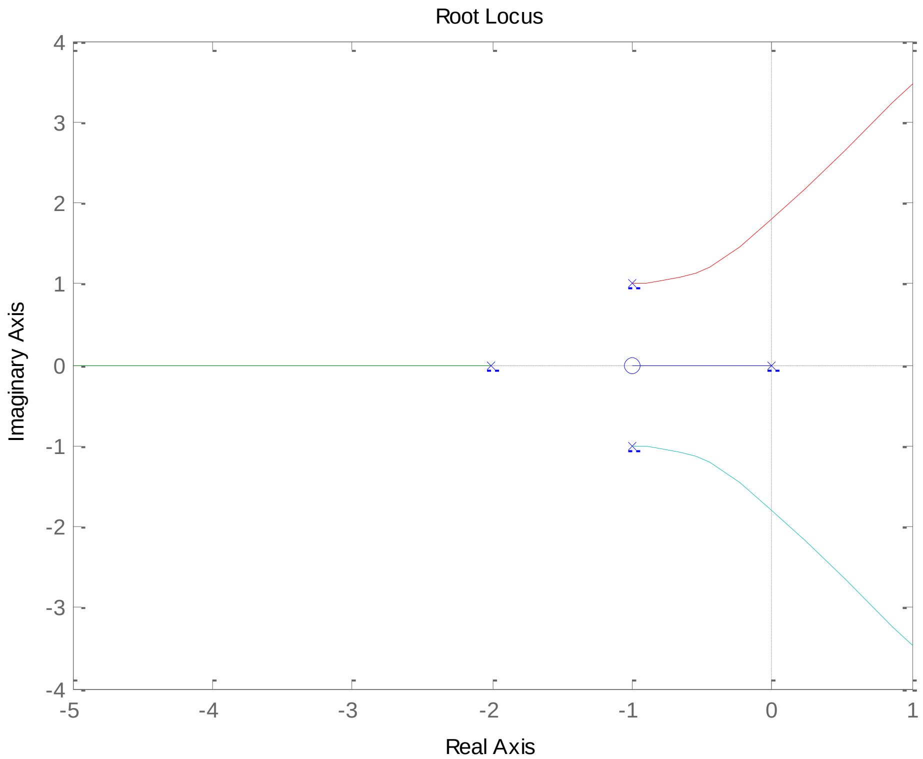
Problema 4.4.



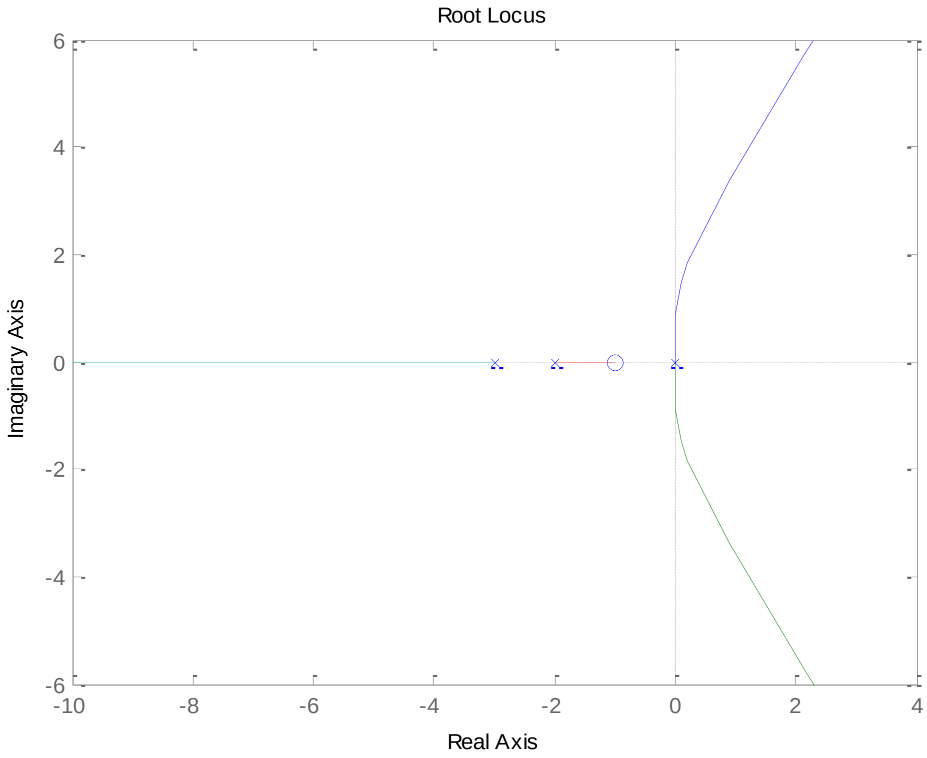
Problema 4.5.



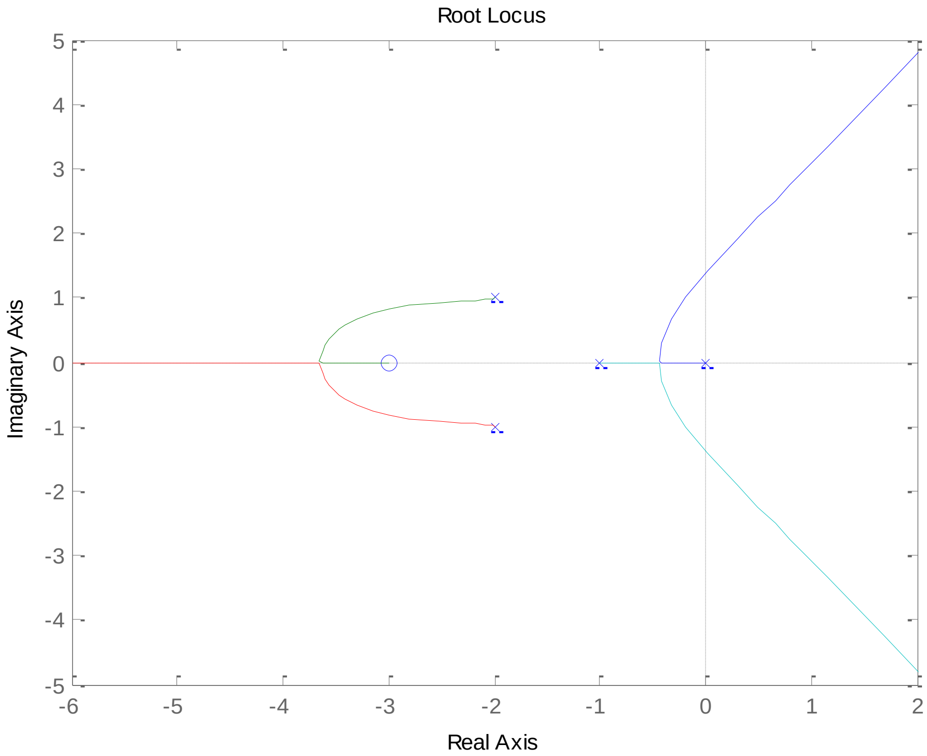
Problema 4.6.



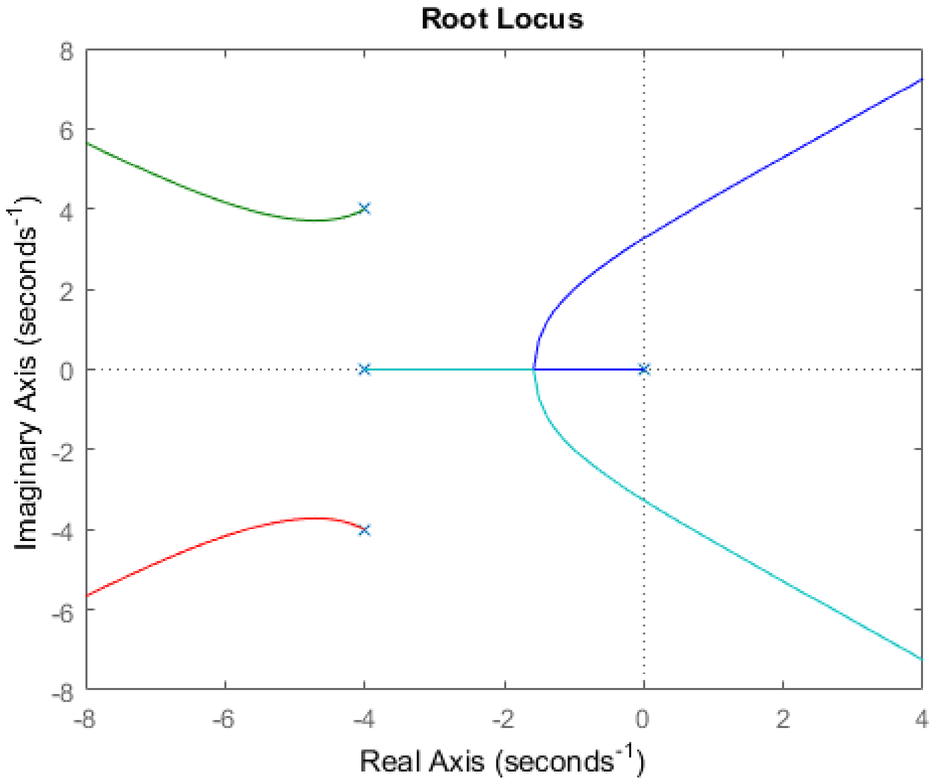
Problema 4.7.



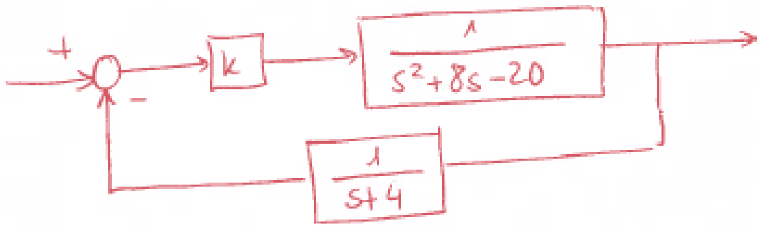
Problema 4.8.



Problema 4.9.


Root Locus
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-8
-6
-4
-2
0
2
4
Imaginary Axis (seconds^{-1})
Real Axis (seconds^{-1})

Problema 4.10.



1) Polos y ceros en L.A

$s^2+8s-20=0 \qquad s=\frac{-8\pm\sqrt{64+80}}{2}$

$s=\frac{-8\pm 12}{2}$ → -10, $+2$

· Ceros no hay, $n=0$

· Polos hay tres, $m=3$ → $\begin{cases} p_1=-4 \\ p_2=-10 \\ p_3=+2 \end{cases}$ ← Polo positivo en L.A

2) Orden del sistema $= \max(m,n) = 3$

3) Segmentos eje real

4) Asíntotas: 3 a) Centroide ⇒ $\sigma = \frac{\sum p - \sum c}{3} = \frac{-10-4+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

b) Ángulos $= +60°, -60°, 180°$

5) Puntos corte eje imaginario

$$G_{LC}(s) = \frac{k\,G(s)}{1+k\,G(s)H(s)} = \frac{k\cdot\frac{1}{s^2+8s-20}}{1+k\cdot\frac{1}{(s^2+8s-20)(s+4)}} = \frac{k\,(s+4)}{s^3+12s^2+12s+(k-80)}$$

$$(s^2+8s-20)(s+4) = s^3+4s^2+8s^2+32s-20s-80$$

$\boxed{\text{Sistema estable si } 80<k<224}$

Routh-Hurwitz:

s^3	1	12
s^2	12	$k-80$
s^1	$\frac{244-k}{12}$	0
s^0	$k-80$	

Corte eje imaginario ⇒ $k=224$, luego

$P(s) = 12s^2+224-80 = 12s^2+144=0$

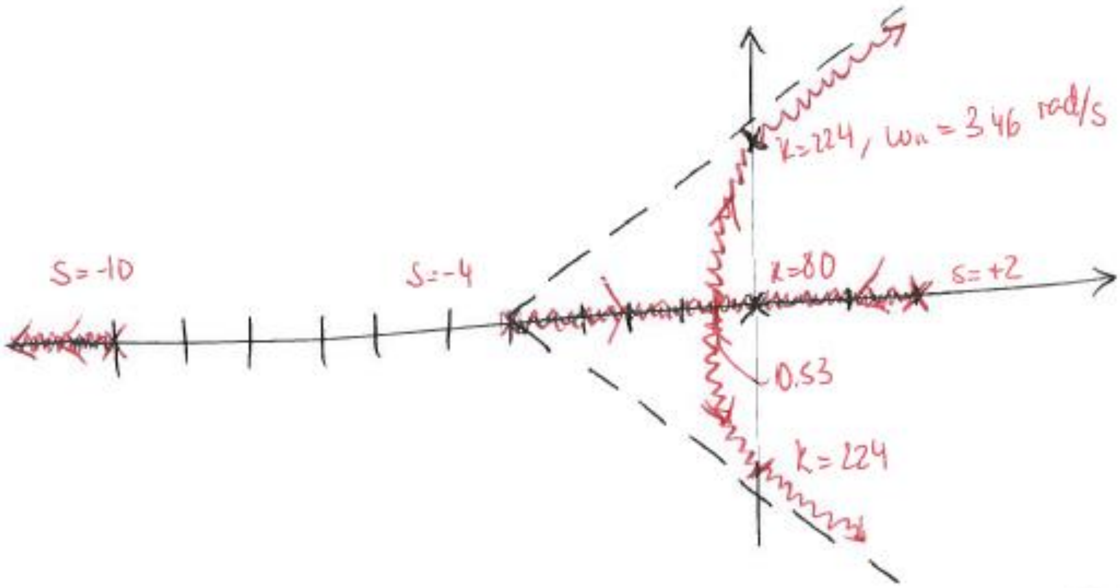
$s=\sqrt{-144/12} = \sqrt{-12} = -3.46j$

$\boxed{\omega_n = \pm 3.46 \text{ rad/s}}$ para $k=224$

(6) PUNTO DE RUPTURA

$$\frac{dk(s)}{ds}=0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(s^3+12s^2+12s-80\right) = 3s^2+24s+12=0$$

Dividimos /3 $\Rightarrow s^2+8s+4=0 \Rightarrow s=\frac{-8\pm\sqrt{64-16}}{2}=\frac{-8\pm 48}{2} \rightarrow$ -0.53, -7



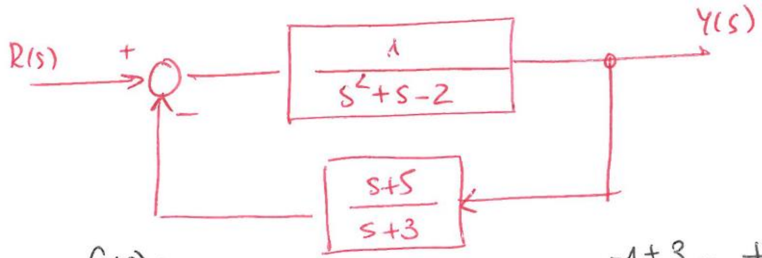
a) Estabilidad → El sistema es estable si $80 < k < 224$, como se ha demostrado en la propiedad 5.

$k=80$ es el límite en $s=0$, y $k=224$ el otro par de puntos

b) Críticamente estable? Si $K=224$

En ese caso se ha demostrado que $\boxed{\omega_i = 3.46 \frac{rad}{s}}$

Problema 4.11.



- Factorizamos G(s):

$s^2+s-2=0 \Rightarrow s=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ → $\dfrac{-1+3}{2}=+1$; $\dfrac{-1-3}{2}=-2$

$\boxed{s^2+s-2 = (s+2)(s-1)}$

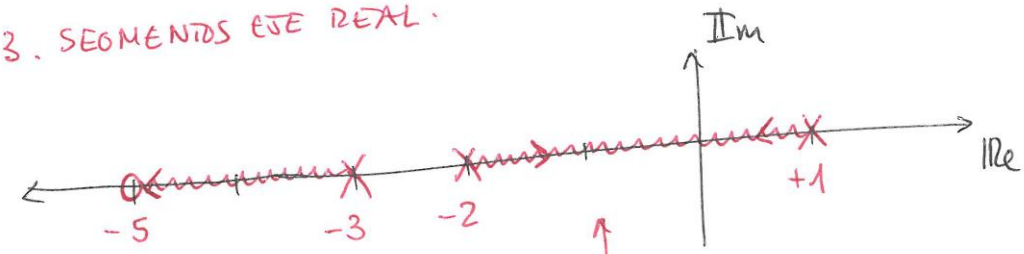
1. POLOS Y CEROS DE $G(s)H(s)$

$n=3$, 3 polos: $p_1=+1$, $p_2=-2$, $p_3=-3$

$m=1$, 1 cero en $z_1=-5$

2. Nº de RAMAS: $n>m$, luego hay 3 ramas en el LDR.

3. SEGMENTOS EJE REAL.



Aquí tendremos punto de ruptura.

4. CÁLCULO ASÍNTOTAS

a) Número de asíntotas = "n−m" = 3−1 = $\boxed{2 \text{ ASÍNTOTAS}}$

b) Ángulos que forman $\phi = \dfrac{(2i+1)\pi}{2}$ para $i=0,1$ → $+90°$, $-90°$

c) Centroide: $\dfrac{\sum \text{POLOS} - \sum \text{CEROS}}{n-m} = \dfrac{+1-2-3-(-5)}{2} = \dfrac{6-5}{2} = 1/2 = \boxed{+0{,}5}$

5. PUNTOS CORTE EJE IMAGINARIO. Aplicamos Routh-Hurwitz (lazo cerrado)

$$G_{LC}(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K\,G(s)H(s)} = \frac{K/s^2+s-2}{1 + K\cdot\frac{s+5}{(s^2+s-2)(s+3)}} = \frac{K/\cancel{s^2+s-2}}{\frac{s^3+4s^2+s-6+Ks+K\cdot 5}{(\cancel{s^2+s-2})(s+3)}}$$

$$= \frac{K\,(s+3)}{s^3+4s^2+(1+K)s+(5\cdot K-6)} \rightarrow \text{Routh con la ecuación característica}$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1+K \\ s^2 & 4 & 5\cdot K-6 \\ \hline s^1 & \frac{10-K}{4} & \\ s^0 & 5K-6 & \end{array} \rightarrow \left(\frac{4+4K-5K+6}{4} \quad \frac{10-K}{4} \right)$$

Estable si
$$\begin{cases} \frac{10-K}{4} > 0 \Rightarrow & \boxed{K < 10} \\ 5K-6 > 0 \Rightarrow & \boxed{K > \frac{6}{5} = 1{,}2} \end{cases}$$

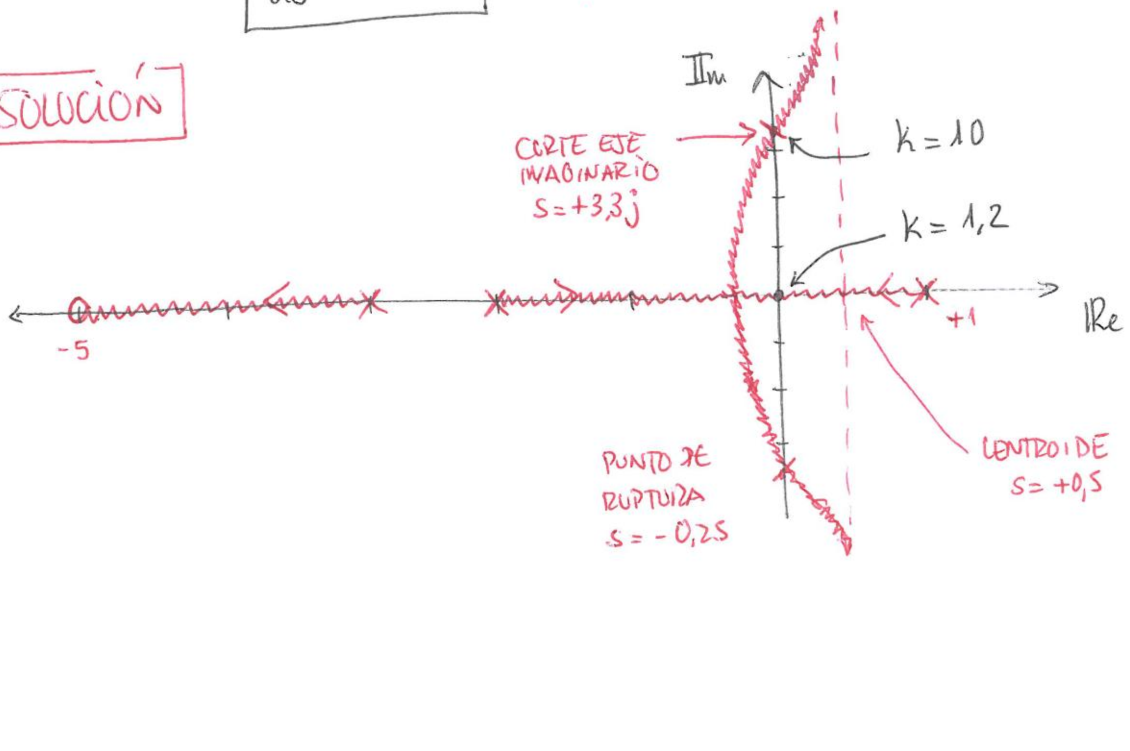
. Cortes con los ejes $\Rightarrow \boxed{K=10}$. Tomamos el polinomio auxiliar.

$$4s^2 + (5\cdot 10 - 6) = 0 \Rightarrow 4s^2 + 44 = 0 \Rightarrow s^2 = -11 \Rightarrow \boxed{s = \pm 3{,}31\,j}$$

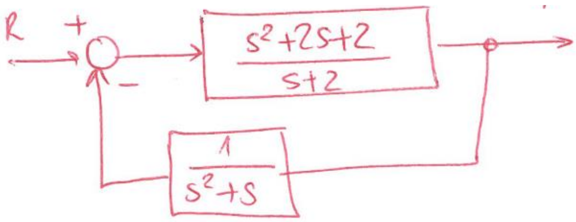
6. PUNTO DE RUPTURA (Buscamos uno, entre $s=-2$ y $s=+1$)

. Dado que tenemos representada la función $G(s)H(s)$, buscamos su MÁXIMO $\boxed{\frac{d}{ds}(G\cdot H) = 0} \Rightarrow \boxed{s = -0{,}25, \text{ de la figura.}}$

SOLUCIÓN



Problema 4.12.



Recordamos ⇒ $G(s)H(s)$!!

$s^2+2s+2=0 \iff s = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}$

$\boxed{s=-1\pm i}$

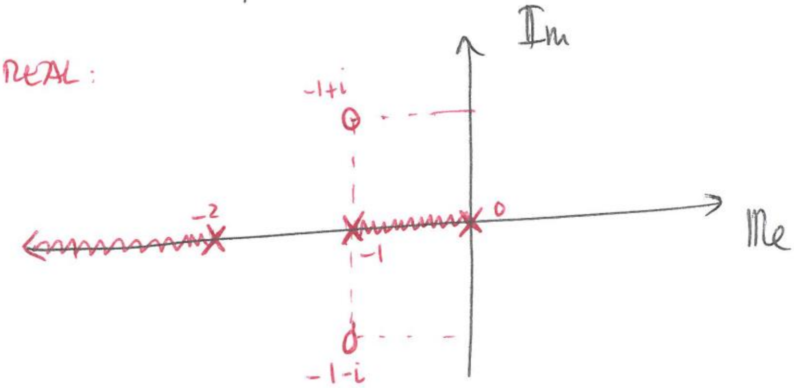
1. POLOS Y CEROS DE $G(s)H(s)$

$n=3$, 3 polos $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -1 \\ p_3 = -2 \end{cases}$

$m=2$, 2 ceros $\begin{cases} -1+i \\ -1-i \end{cases}$

2º Nº de RAMAS $n>m \Rightarrow$ hay 3 ramas en el LDR

3. SEGMENTOS EJE REAL:



4. CÁLCULO ASÍNTOTAS:

a) Nº de asíntotas = "$n-m$" = 3-2 = 1 ASINTOTA

b) Ángulo que forma: $\phi = \frac{(2i+1)\pi}{n-m}$ por $i=0$ $\boxed{\phi = +180^\circ}$

c) Centroide $\frac{\sum \text{POLOS} - \sum \text{CEROS}}{1} = \frac{0-1-2+1+\cancel{i}+1-\cancel{i}}{1} = -1$

→ por la asíntota de 180º, el centroide no es importante

5. PUNTOS CORTE EJE IMAGINARIO → Routh-Hurwitz al lazo cerrado (LC)

$$G_{LC}(s) = \frac{k\,G(s)}{1+k\,G(s)H(s)} = \frac{k \cdot \frac{s^2+2s+2}{(s+2)}}{1+k\frac{(s^2+2s+2)}{(s^2+s)(s+2)}} = \frac{k\frac{s^2+2s+2}{\cancel{(s+2)}}}{\frac{(s^2+s)(s+2)+k(s^2+2s+2)}{(s^2+s)\cancel{(s+2)}}}$$

$$= \frac{k(s^2+2s+2)(s^2+s)}{(s^2+s)(s+2)+k(s^2+2s+2)} = \frac{k(s^2+2s+2)(s^2+s)}{s^3+(3+k)s^2+(2k+2)s+2k}$$

$$(s^2+s)(s+2) = s^3+2s^2+s^2+2s = s^3+3s^2+2s$$

s^3	1	$2k+2$
s^2	$3+k$	$2k$
s^1	$\frac{2k^2+8k+6-2k}{3+k}$	
s^0	$2k$	

$$(3+k)(2k+2) = 6k+6+2k^2+2k = 2k^2+8k+6$$

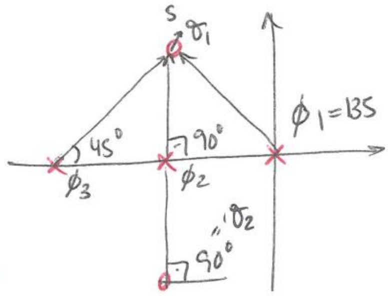
- $3+k=0 \Rightarrow k$ negativo ✓
- $\frac{2k^2+6k+6}{3+k}=0 \Leftrightarrow k^2+3k+3=0$, $k=\frac{-3\pm\sqrt{9-12}}{2}$ no real ✓

⇒ No hay K reales y positivos ⇒ no corte con el eje imaginario.

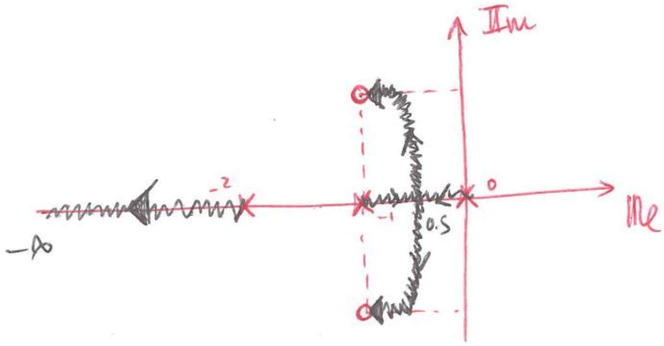
6. PUNTOS DE RUPTURA: Figura de ayuda → $\boxed{-0.5}$

7. ÁNGULOS DE LLEGADA A LOS CEROS:

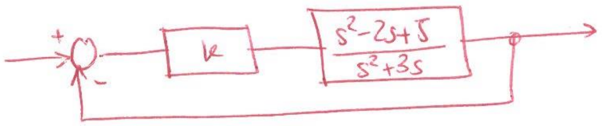
$$\angle G(s) = \theta_1+\theta_2-\phi_1-\phi_2-\phi_3 = -180^\circ$$
$$= x+90-135-90-45 = -180^\circ \Rightarrow \boxed{x=0^\circ}$$



RESULTADO



Problema 4.13.



$$s^2-2s+5=0$$

$$s=\frac{+2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{+2\pm\sqrt{-16}}{2}=+1\pm 2i$$

① POLOS Y CEROS EN L.A

• POLOS ⇒ m = 2 $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = -3 \end{cases}$ • CEROS ⇒ 2 complejos $\begin{cases} z_1 = +1-2i \\ z_2 = +1+2i \end{cases}$

② ORDEN DEL SISTEMA: max (n,m) = max(2,2) = 2

③ SEGMENTOS EJE REAL ⇒ ver atrás

④ ASÍNTOTAS: número = n − m = 2 − 2 = 0 $\boxed{\text{NO HAY ASÍNTOTAS}}$

⑤ PUNTOS DE CORTE EJE IMAGINARIO

$$G_{LC}=\frac{k\cdot G(s)}{1+k\cdot G(s)}=\frac{k\cdot\left(\frac{s^2-2s+5}{s^2+3s}\right)}{1+k\left(\frac{s^2-2s+5}{s^2+3s}\right)}=\frac{k(s^2-2s+5)}{s^2+3s+ks^2-2k\cdot s+5k}$$

$$=\frac{k(s^2-2s+5)}{(1+k)s^2+(3-2k)s+5k}$$

Routh - Hurwitz

s^2	$1+k$	$5k$
s^1	$3-2k$	
s^0	$5k$	

$3-2k>0 \Rightarrow 3>2k \quad k<1{,}5$

$k>0$

$$\boxed{\text{Sistema estable si } 0<k<1{,}5}$$

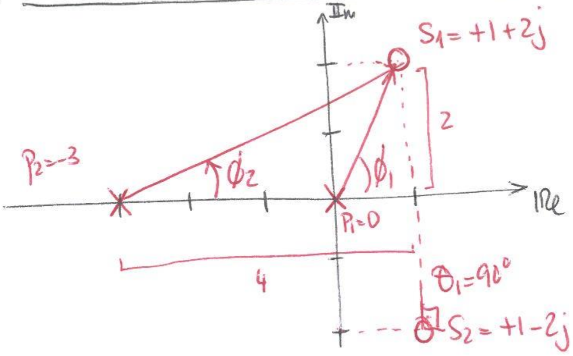
Punto de corte eje imaginario: para $k=1{,}5$

→ Polinomio auxiliar $P(s)=(1+k)s^2+5k$, para $k=1{,}5$

$2{,}5s^2+7{,}5=0 \Rightarrow \boxed{s=\sqrt{-3}=\pm 1{,}73j}$

⑥ PUNTO DE RUPTURA : De la gráfica del enunciado $\boxed{s=-1}$

⑦ ÁNGULO DE LOS CEROS COMPLEJOS



- $\theta_1 = 90^\circ$ (desde S_2)
- $\phi_1 = \arctan\frac{2}{1} = 63^\circ$ (desde p_1)
- $\phi_2 = \arctan\frac{2}{4} = 27^\circ$ (desde p_2)

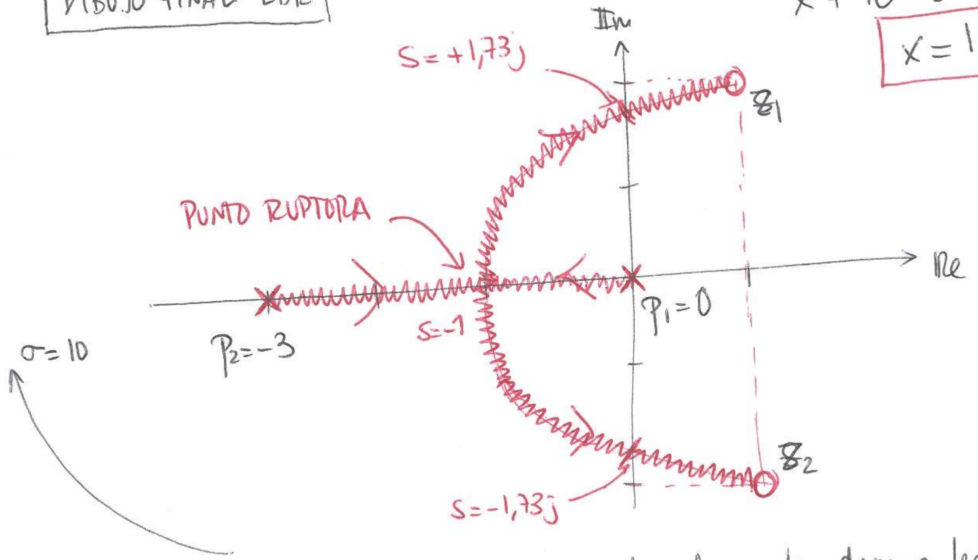
$$\angle G(s) = \pm 180^\circ$$

$$\theta_1 + \theta_2 - \phi_1 - \phi_2 = \pm 180^\circ$$

$$x + 90 - 63^\circ - 27^\circ = +180^\circ$$

$$\boxed{x = 180^\circ}$$

DIBUJO FINAL LDR



b) $t_s = 400$ ms es posible? Para ello los polos dominantes en lazo cerrado deben tener $t_s = \frac{4}{\sigma} = 0,4 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{4}{0,4} = 10} \Rightarrow$ IMPOSIBLE SEGÚN EL LDR.

$\Rightarrow$ no hay LDR en -10!

c) ERRORES EN FUNCIÓN DE K. $\boxed{\text{SISTEMA TIPO 1}}$ (1 polo en el origen en L.A.)

$\boxed{① \ e_{ss,\,POSICIÓN} = 0}$

② $e_{ss,\,VELOCIDAD} = \frac{1}{K_v}$, $\quad K_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{K(s^2-2s+5)}{\cancel{s}(s+3)} = \frac{5K}{3}$

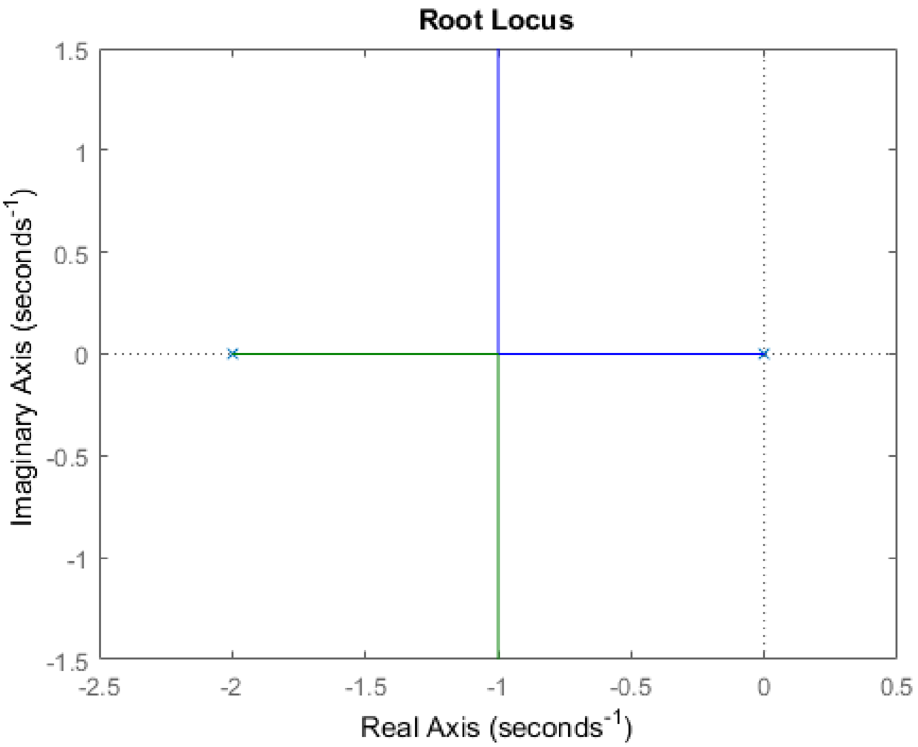
$= \frac{1}{5K/3} = \boxed{3/5K}$

$\boxed{③ \ e_{ss,\,ACELERACIÓN} = \infty}$

Diseño de compensadores de adelanto y retardo mediante LDR

Problema 4.14.

a) Lugar de las raíces del sistema con $G_c(s)=K$:



b) Con K=1: Frecuencia natural, ω_n=2 rad/s. Coeficiente de amortiguamiento, ζ=0,5 (sistema subamortiguado). Sobreelongación, M_p=16,3%. Tiempo de asentamiento, t_S=4/σ=4 s.

c) Con K=1: Error de velocidad e_v=0,5 (sistema Tipo 1).

d) El compensador de adelanto más sencillo que podemos diseñar (no es el único) sería:

$$G_C(s) = \frac{s+2}{s+20}$$

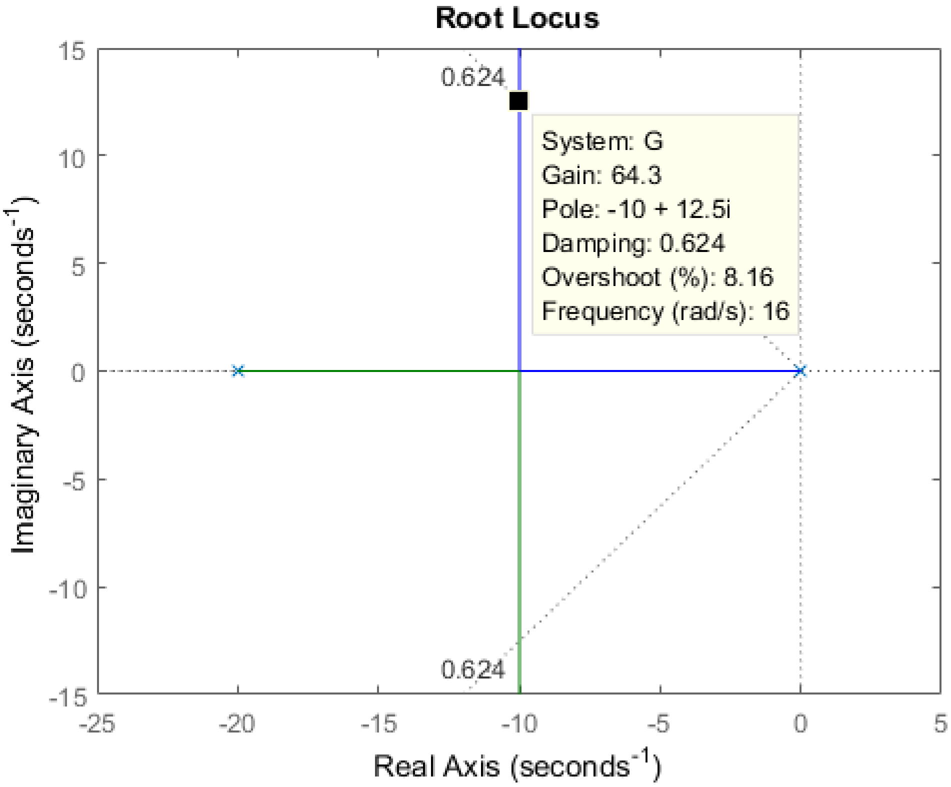
El cero (s+2) del compensador anula al polo 1/(s+2) de la planta, y el polo del compensador 1/(s+20) permite tener una nueva parte real de las raíces en lazo cerrado en σ'=10 para el sistema compensado, lo que reduce el tiempo de asentamiento hasta t'_s=0,4 s.

Para reducir la sobreelongación a la mitad (nueva M_p'=8.15%) necesitamos un nuevo coeficiente de amortiguamiento más próximo a la unidad, de ζ'=0,624. Para hallar el valor de K debemos usar el criterio del módulo (ver Teoría):

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{K}$$

Introduciendo como dato la posición del polo en lazo cerrado que se corresponde con σ'=10 y ζ'=0,624 (que es s=-10+12,53j) se obtiene que la K del sistema debe ser de 64,25.

Dicho valor de K=64,25 se puede comprobar con el lugar de las raíces del sistema compensado:



e) El sistema compensado sigue siendo de Tipo 1 pero su error de velocidad se ha reducido hasta un valor de e_v'=0,077.

Problema 4.15. El sistema de la figura es de Tipo 1, y su error de velocidad viene dado por $e_v=1/k_v=2$, ya que la constante de error de velocidad es k_v = 0,5.

Si se quiere reducir en un factor 10 dicho error (hasta e_v'=0,2) se necesita una nueva constante de error de velocidad diez veces superior, k_v'=5. Este aumento se puede conseguir utilizando un compensador de atraso, cuya función de transferencia es (con $p_c<z_c$):

$$G_C(s)=\frac{s+z_c}{s+p_c}$$

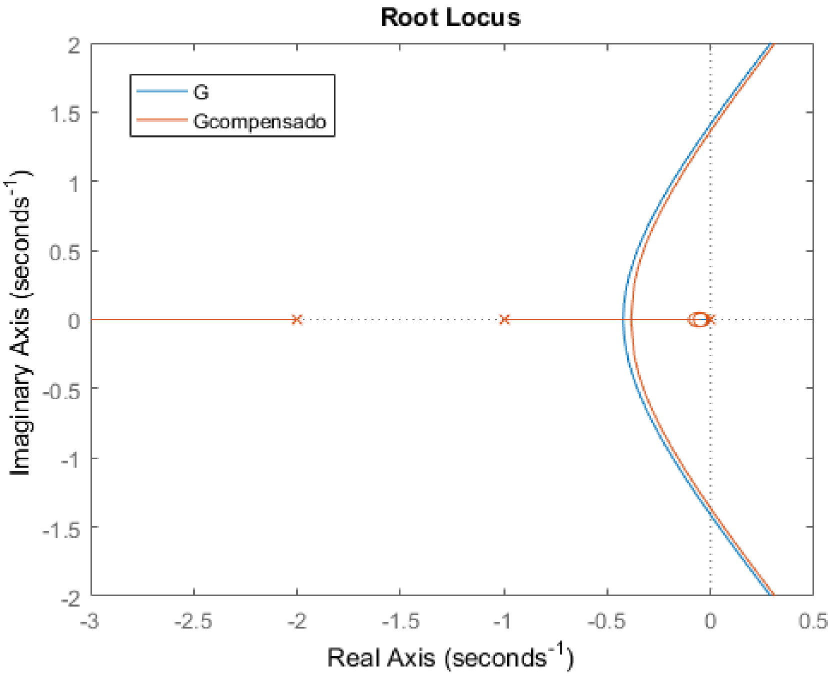
k_v' pasaría a ser igual a 5 sin más que mantener la relación entre el cero y el polo del compensador igual a z_c/p_c=10.

Además, si se quiere mantener invariable la respuesta ante una entrada escalón, se debe mantener fija la localización de los polos dominantes del sistema completo en lazo cerrado. Para lograrlo se sitúan el cero y el polo del compensador de retardo muy cerca del origen, por ejemplo haciendo que su posición sea:

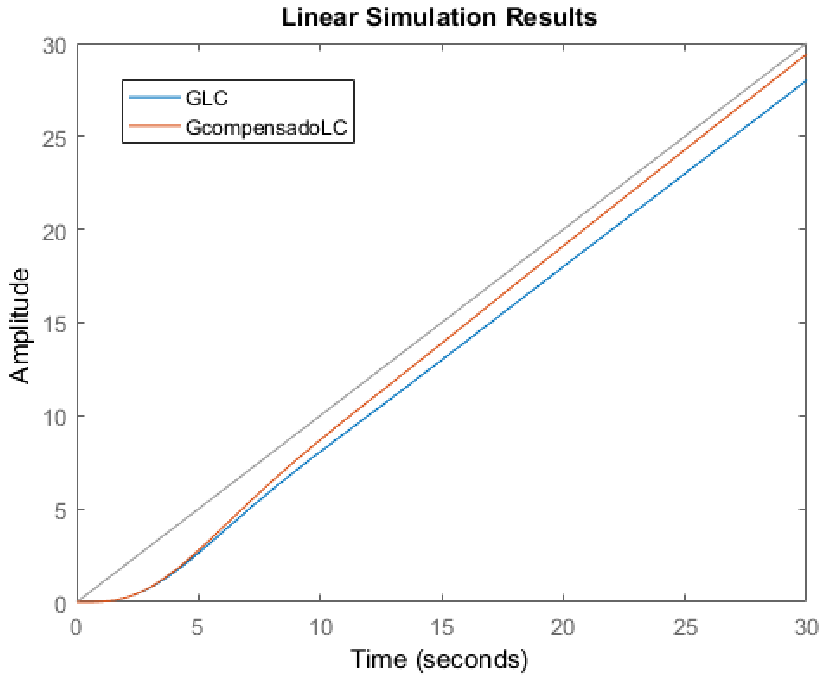
$$G_C(s)=\frac{s+0{,}05}{s+0{,}005}$$

Al estar muy cerca el uno del otro, la contribución de ángulo este compensador de retardo a los polos dominantes del sistema completo es muy pequeña, por lo que el lugar de las raíces prácticamente se mantiene invariable y la respuesta a una entrada escalón se ve muy poco modificada.

El lugar de las raíces de la planta original (en azul) y del sistema compensado (marrón) son prácticamente iguales:



Comprobamos que el error de velocidad del sistema compensado es menor que en el sistema original:



Para una explicación más detallada se recomienda consultar el texto de K. Ogata, "*Ingeniería de Control Moderna*", **capítulo 6**, ejemplo 6.7.