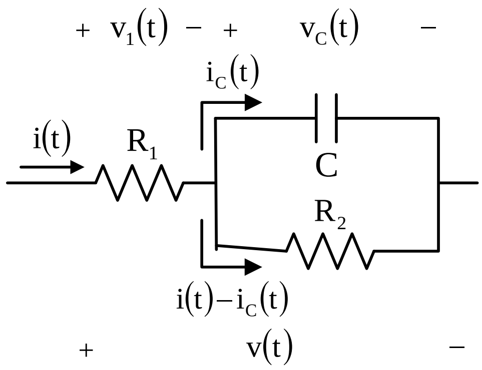
Ejercicio 1 (4,25 puntos)

El circuito de la figura se utiliza ampliamente en varias disciplinas científicas para modelar diferentes fenómenos de naturaleza física, biológica y/o química. R_1 y R_2 modelan, respectivamente, las resistencias serie y paralelo. La primera suele ser asociada a efectos parásitos de la medida y la segunda a procesos complejos, generalmente iónicos. C, por otro lado, representa los procesos capacitivos del sistema. Por ejemplo, en electrofisiología puede modelar la capacidad de la membrana celular; en electroquímica, la doble capa interfacial.



Se pide:

(i) Obtenga la ecuación diferencial y la función de transferencia del circuito eléctrico siendo $v(t)$ la entrada e $i(t)$ la salida. ¿Qué se está midiendo?.

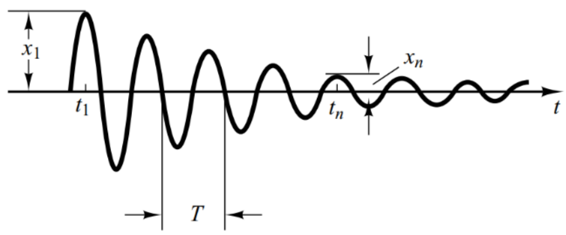
(ii) Considere una entrada en escalón unitario, $v(t)=u(t)$. Obtenga la respuesta analítica de la corriente $i(t)$ y esboce la forma de onda correspondiente.

(iii) Típicamente, se considera que, en un sistema de primer orden, la respuesta transitoria "se extingue" en t=3τ o 5τ (criterio del 95% o 98%). Esto es porque la respuesta habitualmente es proporcional a $1-e^{t/\tau}$. Si uno considera $1-e^{t/\tau}=0{,}95$ o $0{,}98$, es como se obtiene el tiempo de establecimiento t_S previamente indicado. Sin embargo, en este ejemplo esto no sucede. Utilizando el procedimiento marcado, ¿cuál sería la expresión de t_S? Razone su tendencia en función de los parámetros del circuito.

(iv) En un marco temporal, las variaciones de R_2 y C marcan el estado del sistema. Nótese que R_1 suele ser constante con el paso del tiempo. Con esto, analice el impacto sobre la respuesta $i(t)$.

Ejercicio 2 (1,25 puntos)

Un sistema oscilatorio tiene la forma de onda resultante representada en la figura derecha. En efecto, se trata de un sistema subamortiguado, $0<\xi<1$, de la forma $x(t)=e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t)$ con régimen permanente nulo. Obtenga una expresión para el factor de amortiguamiento, utilizando los decaimientos exponenciales (sin considerar los cosenos) en ambas escalas temporales indicadas.



Ejercicio 3 (2,75 puntos)

El polinomio característico de un sistema de control con realimentación unitaria y negativa, igual al denominador de la función de transferencia en lazo cerrado, es $s^3+2s^2+(20K+7)s+100K$.

Se solicita:

(i) Dibujar el lugar de las raíces (LDR) del sistema.

(ii) Calcular el error estacionario verdadero de posición del sistema, en función de K.

Ejercicio 4 (1,75 puntos)

En la práctica, es imposible implementar un control derivativo individual. En ingeniería de control típicamente se suele utilizar, por ello, acompañado de un control proporcional: PD. Sin embargo, para algunas aplicaciones donde es realmente necesario, se puede aproximar el verdadero diferenciador por algo como:

$$G_C(s)=\frac{T_d s}{1+\gamma T_d s}$$

¿En que se ha convertido el controlador derivativo? ¿A qué sería equivalente desde la perspectiva de un diagrama de bloques?

Ejercicio 1

(i) La forma más sencilla de estudiar el comportamiento del circuito eléctrico es en dominio de *s*. En primer lugar, se halla la impedancia equivalente:

$$Z(s)=R_1+\frac{R_2\frac{1}{sC}}{R_2+\frac{1}{sC}}=R_1+\frac{R_2}{1+R_2Cs}=\frac{R_1R_2Cs+R_1+R_2}{1+R_2Cs}=\frac{V(s)}{I(s)}$$

Una impedancia es la relación entre la tensión, $V(s)$, y la corriente, $I(s)$, es decir, $Z(s)=V(s)/I(s)$, donde, por tanto, la corriente representa la entrada y la tensión es la salida. Sin embargo, en el ejercicio se plantea el caso contrario. De ahí, que se deba estudiar la inversa de $Z(s)$; es decir, la admitancia, $Y(s)$:

$$Y(s)=\frac{I(s)}{V(s)}=\frac{1+R_2Cs}{R_1R_2Cs+R_1+R_2}=\frac{\frac{1}{R_1}s+\frac{1}{R_1R_2C}}{s+\frac{R_1+R_p}{R_1R_2C}}$$

parámetro de medida, en este caso. Antitransformado al dominio del tiempo, se obtiene fácilmente la ecuación diferencial equivalente:

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}i(t)=\frac{1}{R_1}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{R_1R_2C}v(t)$$

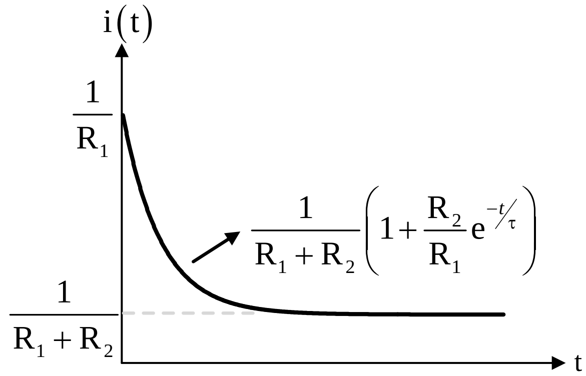
(ii) Si se considera una entrada en escalón unitario, se tiene que $V(s)=1/s$, resultando $i(t)$:

$$I(s)=\frac{1}{s}\frac{\frac{1}{R_1}s+\frac{1}{R_1R_2C}}{s+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}}=\frac{{}^{1}\!/_{R_1+R_2}}{s}+\frac{{}^{R_2}\!/_{R_1(R_1+R_2)}}{s+\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}}\rightarrow i(t)=\frac{1}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{-t/\tau}\right)$$

siendo:

$$\tau=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C$$

La forma de onda resultante de la corriente $i(t)$, sería:

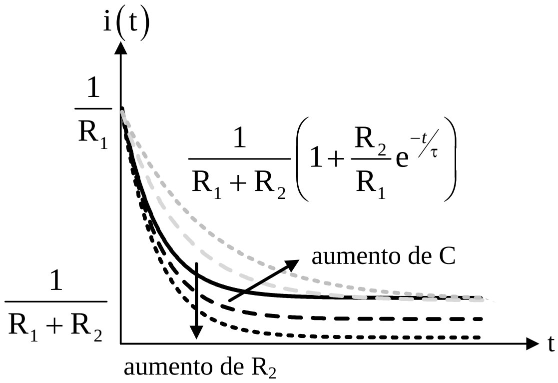


(iii) En este escenario anómalo, el tiempo de establecimiento t_s se calcula, considerando que ε representa el intervalo de confianza (95, 98 o 99%), como:

$$i(t_s)=\frac{1}{R_1+R_2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}e^{-t/\tau}\right)=\frac{\varepsilon}{R_1+R_2}\rightarrow(\varepsilon-1)\frac{R_1}{R_2}=e^{-t_s/\tau}\rightarrow t_s=-\tau\ln\left[\frac{R_1(\varepsilon-1)}{R_2}\right]$$

siendo: $t_s=-\tau\ln\left[{}^{0,05R_1}\!/_{R_2}\right]$, $t_s=-\tau\ln\left[{}^{0,02R_1}\!/_{R_2}\right]$, and $t_s=-\tau\ln\left[{}^{0,01R_1}\!/_{R_2}\right]$, considerando el criterio del 95, 98 y 99%, respectivamente. La clave en la evolución de t_s reside en la relación de valor entre las resistencias, R_1/R_2. Si, por ejemplo, $R_2>>R_1$, t_s crece sin límite si R_2 aumenta progresivamente. En caso contrario, se obtendría la relación inversa, siempre y cuando, $R_2>\varepsilon R_1$. En caso contrario, la fórmula no tiene validez.

(iv) A continuación, se esboza la dinámica temporal de *i*(*t*) con la variación de los parámetros solicitados:



Como indicamos previamente, un aumento de R_2 implica que el tiempo de establecimiento crezca notablemente. Además, el valor de la señal en régimen permanente disminuye. Por otro lado, el aumento de C no modifica la cota final, pero sí la constante de tiempo. Un hipotético incremento hace que la respuesta sea más lenta. Finalmente, es importante indicar que el valor inicial de la señal es constante ya que R_1 no varía.

Ejercicio 2

Obviando el término oscilatorio y considerando, tan solo, el decaimiento exponencial, se tiene que:

$$x(t_1)=x_1=e^{-\xi\omega_n t_1}$$
$$x(t_n)=x_n=e^{-\xi\omega_n t_n}=e^{-\xi\omega_n (t_1+4T)}$$

Relacionando ambos términos, se obtiene el decremento exponencial

$$\frac{x_1}{x_n}=\frac{1}{e^{-4\xi\omega_n T}}=e^{4\xi\omega_n T}$$

para, posteriormente, obtener el factor de amortiguamiento:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right)=4\xi\omega_n T=4\xi\frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{2\pi}{\omega_d} \rightarrow \frac{1}{8\pi}\ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right)=\sqrt{\frac{\xi^2}{1-\xi^2}}$$

$$\left[\frac{1}{8\pi}\ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right)\right]^2=\frac{\xi^2}{1-\xi^2} \rightarrow \left[\frac{1}{8\pi}\ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right)\right]^2=\xi^2\left(1+\left[\frac{1}{8\pi}\ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right)\right]^2\right) \rightarrow \xi=\frac{\frac{1}{8\pi}\ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right)}{\sqrt{1+\left[\frac{1}{8\pi}\ln\left(\frac{x_1}{x_n}\right)\right]^2}}$$

Ejercicio 3

(i) Se tiene el polinomio característico del sistema, es decir:

$$1+KG(s)=\frac{N(s)}{D(s)} \rightarrow N(s)=s^3+2s^2+(20K+7)s+100K$$

A su vez, si dividimos la función de transferencia de la planta, en numerador y denominador, se tendría:

$$G(s)=\frac{G_N(s)}{G_D(s)} \rightarrow N(s)=G_D(s)+KG_N(s)$$

Por tanto, $G_D(s)$ es la parte del polinomio independiente de K y $G_N(s)$ la parte que depende de K:

$$G_N(s)=20s+100 \rightarrow s=-5$$
$$G_D(s)=s^3+2s^2+7s=s(s^2+2s+7) \rightarrow s=0 \text{ y } s=-1\pm 2{,}45j$$

Ahora, ya se tienen los ceros y polos del sistema en lazo abierto y se puede construir el LDR con los 7 pasos, de forma convencional.

- *Paso 1:* Identificación y ubicación de polos y ceros en lazo abierto. Se indicaron previamente.
- *Paso 2:* Número de ramas. Se tiene: n=3 y m=1. El número de ramas, por tanto, es 3. En efecto, n y m denotan el número de polos y ceros, respectivamente.
- *Paso 3:* Identificación de segmentos sobre el eje real. El único segmento que pertenece al LDR es de 0 a -5 (nº polos + nº ceros impar, a la derecha).
- *Paso 4:* Cálculo de asíntotas.
  a) Número de asíntotas: n-m=2.
  b) Ángulo de las asíntotas: 90º y 270º.
  c) Centroide:

$$\sigma=\frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ polos - n}^{\text{o}} \text{ ceros}}=\frac{(0\text{-}1\text{-}1)\text{-}(\text{-}5)}{3\text{-}1}=1{,}5$$

- *Paso 5:* Puntos de corte con el eje imaginario. A partir del polinomio auxiliar del enunciado, se construye la tabla de Routh-Hurwitz:

s^3	1	$20K+7$
s^2	2	$100K$
s^1	$7\text{-}30K$	
s^0	$100K$	

  La única fila posible que puede contener a todos sus números nulos es s^1. Fácilmente, se obtiene que esto se consigue si K=0,23. Se recuerda que K>0, de ahí que en la fila s^0 no sea posible.

- *Paso 6:* Puntos de ruptura o salida del eje real. En este punto, es necesario conocer el sentido de las ramas. Para ello, se impone que:

$$1+KG(s)=0 \rightarrow 1+K\frac{20(s+5)}{s(s^2+2s+7)}=0 \rightarrow K=-\frac{[s(s^2+2s+7)]}{20(s+5)}$$

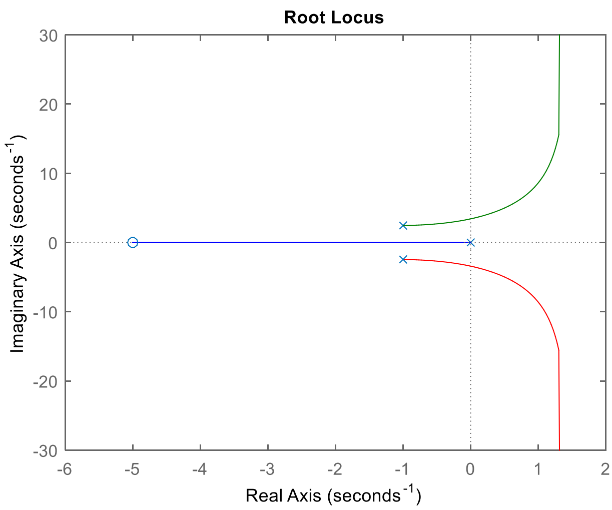
$$\frac{dK}{ds}=0 \rightarrow \text{No tiene solución para el LDR}$$

  Esto era previsible, pues se tiene una rama de 0 a -5 que es "definitiva", sin puntos de entrada/ruptura, ya que une un polo y un cero. Las otras dos ramas serán las que salen de los polos complejos conjugados, dirigidos por las asíntotas.

- *Paso 7:* Ángulo de salida o llegada de las raíces. Se selecciona el polo situado en s=-1+2,45j. Por tanto:

$$\text{arctg}\left(\frac{4}{2{,}45}\right)\text{-}\theta\text{-}90^{\text{o}}\text{-}\left[90^{\text{o}}\text{-arctg}\left(\frac{2{,}45}{1}\right)\right]+\text{arctg}\left(\frac{4}{2{,}45}\right)=180^{\text{o}} \rightarrow \theta=9{,}3^{\text{o}}$$

Con todo ello, se esboza el LDR:



(ii) El error verdadero es:

$$E_v(s)=X(s)\text{-}Y(s)=X(s)\text{-}X(s)\frac{KG(s)}{1+KG(s)}=\frac{1}{s}\left(1\text{-}\frac{KG(s)}{1+KG(s)}\right)=\frac{1}{s+sKG(s)}$$

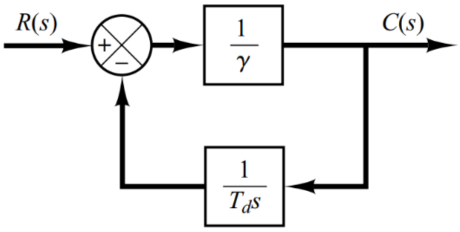
Tenga en cuenta que se considera entrada en escalón, al solicitar el error de posición. Aplicando el teorema del valor final y los cálculos numéricos necesarios:

$$e_v(\infty)=\lim_{s\to 0} sE_v(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s+sKG(s)}=\frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} KG(s)}=0$$

La solución era fácilmente previsible, pues la planta $G(s)$ tiene un polo en el origen.

Ejercicio 4

La solución más correcta sería la siguiente:



La forma de realizar un "derivador" aproximado sería utilizando una acción integradora en la ruta de realimentación. Tenga en cuenta que se diseña con la premia de no utilizar acción derivativa. La función de transferencia, en lazo cerrado, del bucle que se muestra en la figura sería:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1/\gamma}{1+1/\gamma T_d s}=\frac{T_d s}{1+\gamma T_d s}$$

Tenga en cuenta que la acción derivativa (numerador), cuenta con un retraso de primer orden (denominador), reduciendo el ancho de banda del sistema de control en lazo cerrado y el efecto perjudicial de las señales con ruido.