Universidad Rey Juan Carlos

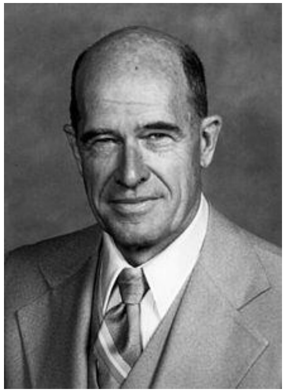
Tema 4. Análisis y diseño de sistemas de control mediante el método del Lugar de las Raíces

Índice

- Definición y propiedades del Lugar geométrico de las Raíces (LDR).
- Bosquejo del Lugar de las Raíces: 7 propiedades constructivas.
- Diseño mediante el Lugar de las Raíces.
- Controladores PID. Reguladores o compensadores de adelanto y atraso.

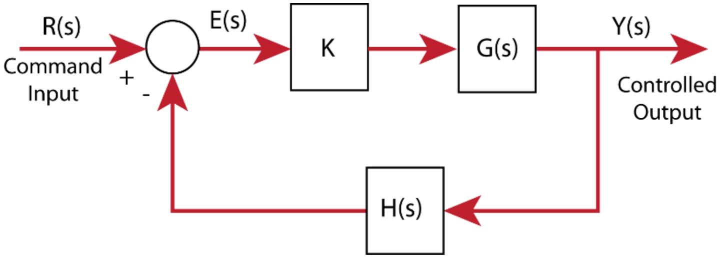
Método del lugar geométrico de las raíces

El método o técnica del lugar de las raíces es un procedimiento gráfico diseñado por W.R. Evans en 1948 para representar los polos en lazo cerrado (raíces de la ecuación característica en el plano complejo) para todos los valores de un parámetro del sistema en lazo abierto.

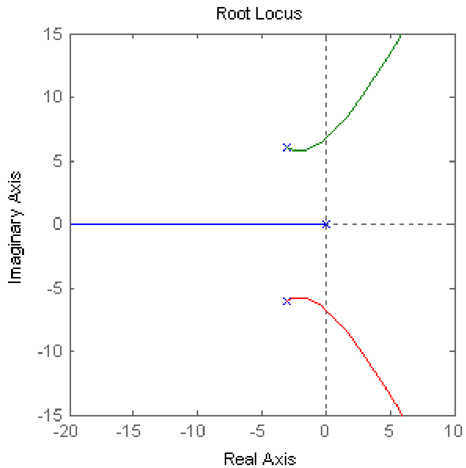


Walter R. Evans (1920–1999)

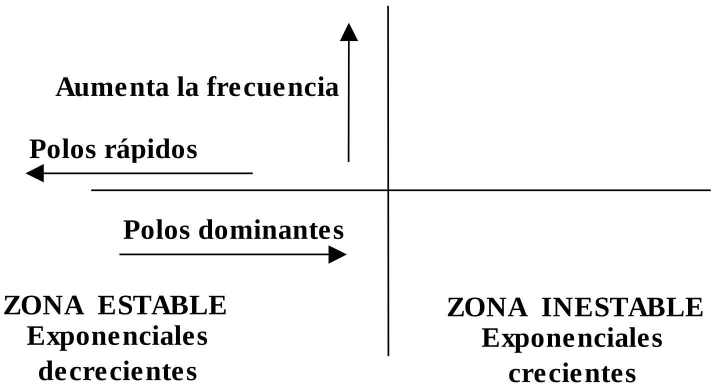
- Este método permite ver cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano s conforme varía un parámetro (que en general es la ganancia K de lazo variando de 0 a ∞).

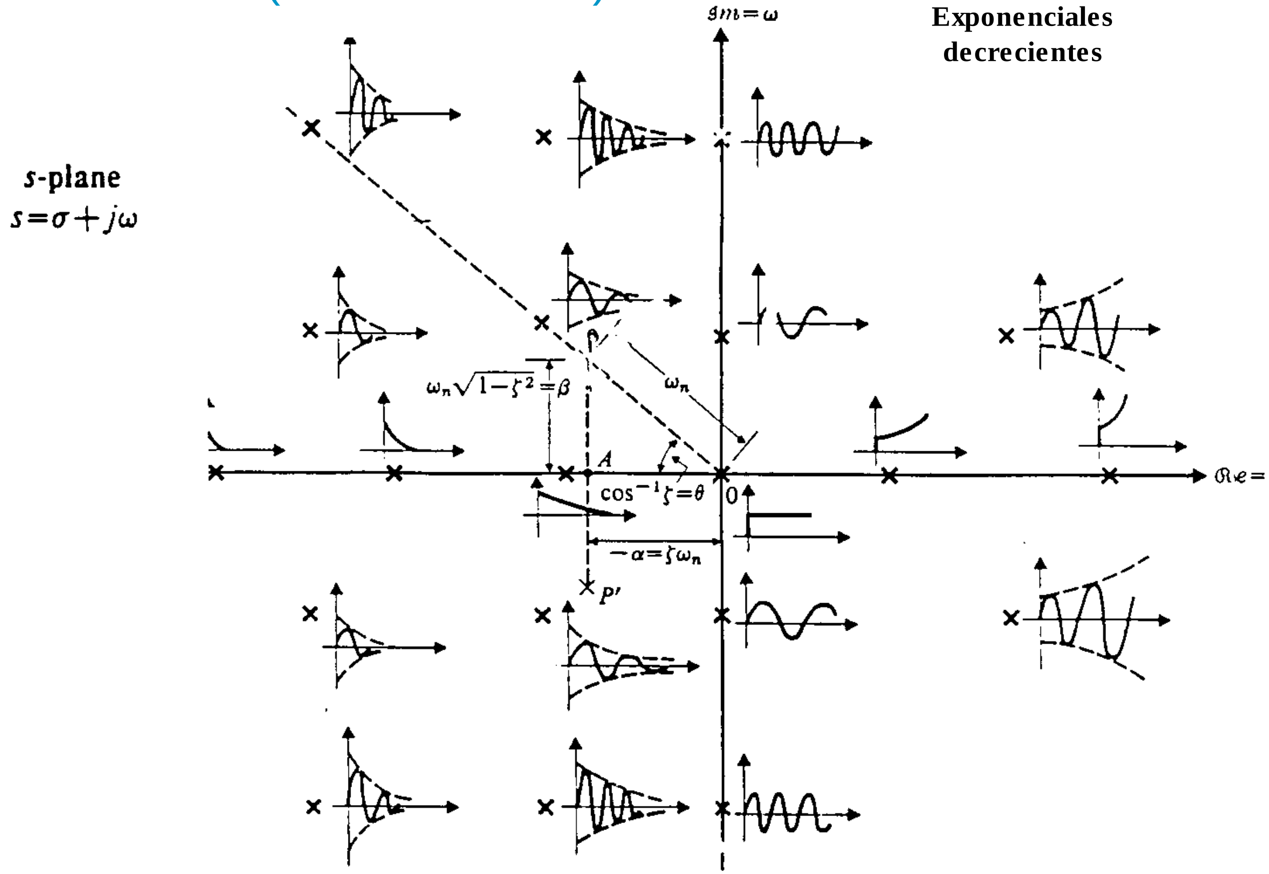


- Permite predecir la respuesta **del sistema en lazo cerrado** al variar el valor de la ganancia de lazo K, lo que facilita:
  - El análisis del sistema (respuesta transitoria, estabilidad en régimen permanente).
  - El diseño del sistema para que se cumplan unas especificaciones dadas.

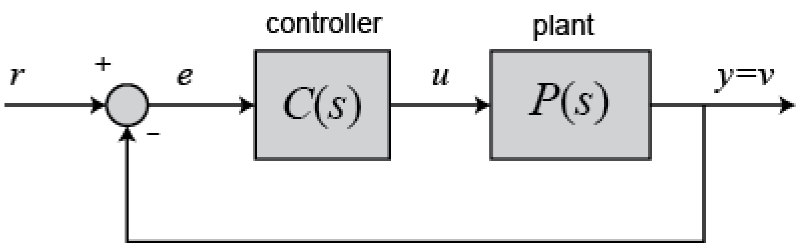


- En el tema anterior se ha visto que las propiedades básicas de la respuesta temporal de un sistema vienen determinadas principalmente por la localización en el plano "s" de los polos del sistema (en lazo cerrado):





Ejemplo: Estudio de la estabilidad de un sistema (planta con un controlador proporcional) conocido su lugar de las raíces

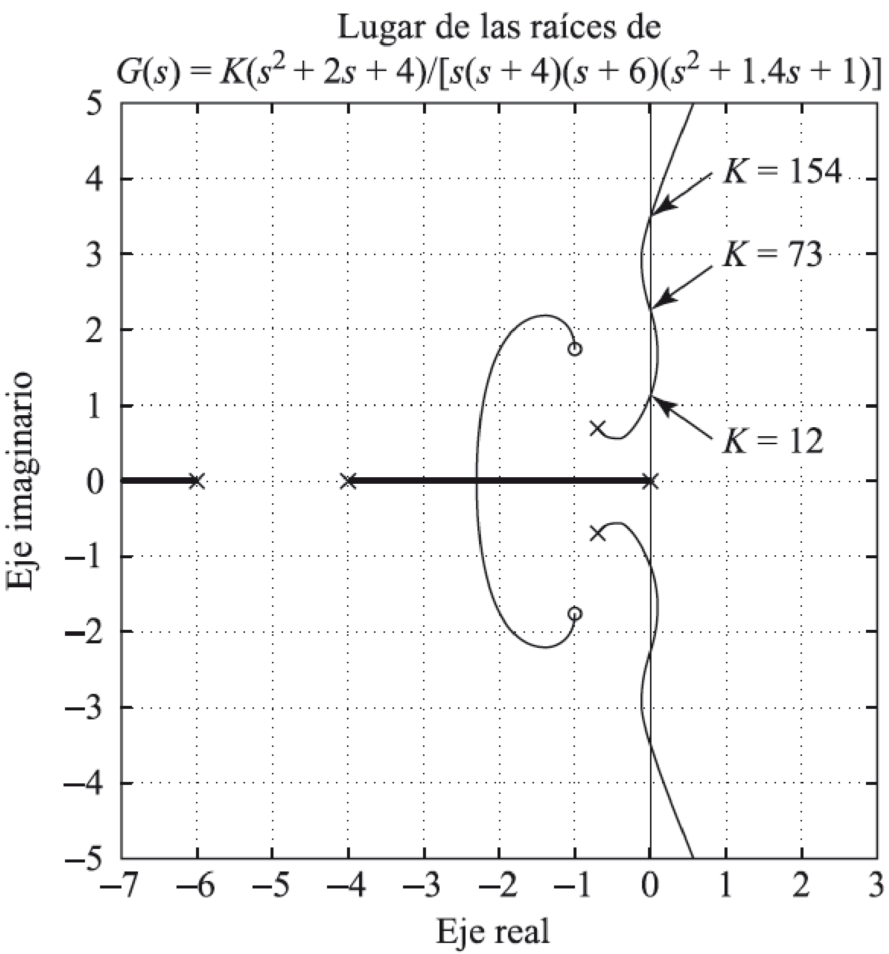


$$P(s) = G(s) = \frac{s^2 + 2s + 4}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$$

$$C(s) = K$$

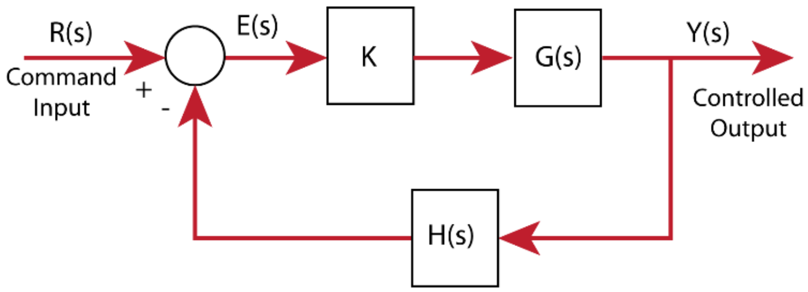
Sistema es condicionalmente estable (estable sólo para rangos limitados de K). En concreto, estable si:

- $0 < K < 12$
- $73 < K < 154$



¿Cómo se realiza un bosquejo a mano del lugar de las raíces de un sistema G(s) realimentado con H(s)?

- La idea básica detrás del método del lugar de las raíces es que los valores de s que hacen que K·G(s)H(s) sea igual a -1 satisfacen la ecuación característica del sistema, que es 1 + G(s)H(s) = 0, es decir:



$$G_{LC}(s) = \frac{K \cdot G(s)}{1 + K \cdot G(s) \cdot H(s)}$$

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = 0$$

Condición de ángulo:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^{\circ}(2k+1) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Condición de magnitud:

$$|G(s)H(s)| = 1/K$$

Propiedades constructivas del lugar de las raíces

- Las 7 propiedades (o reglas), que se dan a continuación, se basan en la relación entre los polos y ceros de G(s)·H(s) (lazo abierto) y las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado (polos en lazo cerrado), 1+K·G(s)·H(s) = 0, siendo K el parámetro variable.
- Aunque dichas propiedades se verifican siempre, deben ser consideradas como una ayuda en la construcción aproximada del lugar de las raíces, no como un procedimiento de dibujo exacto (que sí proporciona MATLAB).

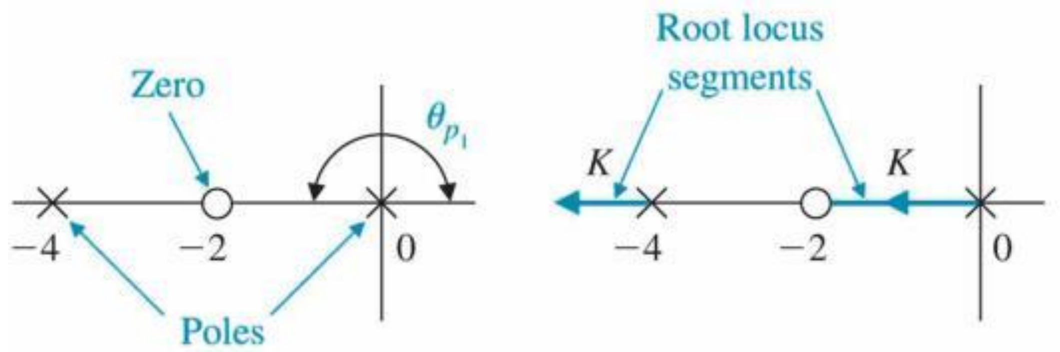
1. **IDENTIFICACIÓN Y UBICACIÓN DE POLOS Y CEROS en lazo abierto.** El primer paso en el dibujo del lugar de las raíces es expresar en forma factorizada la función G(s)·H(s), obteniendo sus **m** ceros z_i y **n** polos p_j.

$$G(s)\cdot H(s)=\frac{K\cdot\prod_{i=1}^{m}\left(s+z_i\right)}{\prod_{j=1}^{n}\left(s+p_j\right)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

Los ceros se dibujan con "o" y los polos con "x" en el plano complejo.

Propiedades constructivas 2 y 3

$$1+K\frac{2(s+2)}{s(s+4)}=0$$

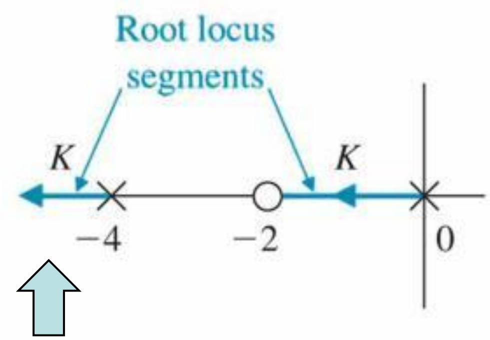


2. **NÚMERO DE RAMAS.** El número de ramas (orden del sistema en lazo cerrado) del lugar de las raíces es igual al mayor del número de polos o de ceros de la función G(s)·H(s), es decir, a m si m>n y a n si n>m.
   - Las ramas del lugar de las raíces parten de los polos de G(s)·H(s) y terminan en los ceros de G(s)·H(s).
   - El lugar de las raíces es simétrico respecto al eje real del plano s.

3. **IDENTIFICACIÓN DE SEGMENTOS SOBRE EL EJE REAL.** Un punto del eje real pertenece al lugar de las raíces si, y sólo si, el número total de polos y ceros reales de la función G(s)·H(s) situados a la derecha de este punto es impar.

Propiedad constructiva 4

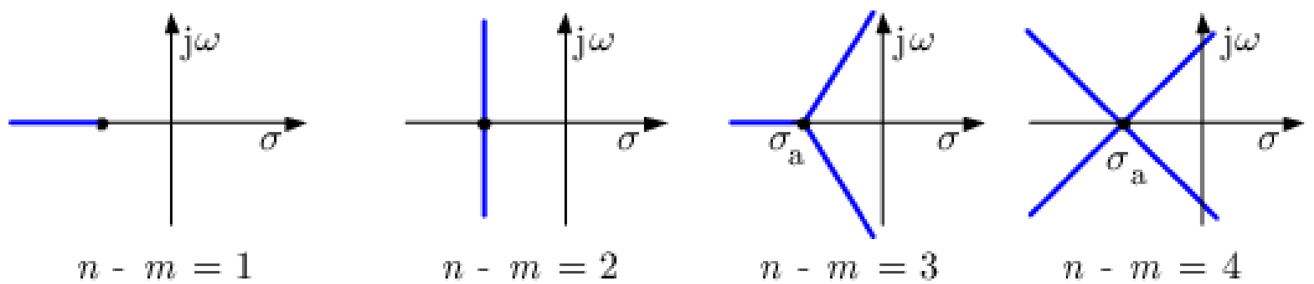
4. CALCULO DE ASÍNTOTAS (lugar de las raíces para s→∞)



A) Número de asíntotas: Para valores elevados de s, "n – m" ramas del lugar de las raíces tienen asíntotas que forman ángulo con el eje real dado por:

B) Angulo de las "n-m" asíntotas con el eje real:

$$\phi = \frac{(2 \times i + 1)\cdot \pi}{n-m} \qquad donde \qquad i = 0,1,\ldots,(n-m)-1$$



C) CENTROIDE (σ): Se denomina centroide a la intersección de las "n – m" asíntotas con el eje real. Se produce en un punto del eje real del plano s, dado por:

$$\sigma = \frac{\sum_{j=1}^{n} polos - \sum_{i=1}^{m} ceros}{n-m}$$

Propiedad constructiva 5

5. **PUNTOS DE CORTE CON EL EJE IMAGINARIO.** Los puntos de corte del lugar de las raíces con el eje imaginario y los valores de K asociados con ellos, se pueden determinar aplicando el criterio de estabilidad de Routh a la ecuación característica.

   - La condición de igualar a cero todos los elementos de una fila dará el valor (o valores) de K asociados con las raíces imaginarias, es decir con los cortes del lugar de las raíces con el eje imaginario.
   - Las raíces del polinomio auxiliar serán los puntos de corte.

$$1+GH(s)=1+\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2}$$

$$s^4+10s^3+32s^2+(32+K)s+K=0$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 32 & K \\ s^3 & 10 & 32+K & 0 \\ s^2 & b_1 & K & \\ s^1 & c_1 & 0 & \\ s^0 & d_1 & & \end{array}$$

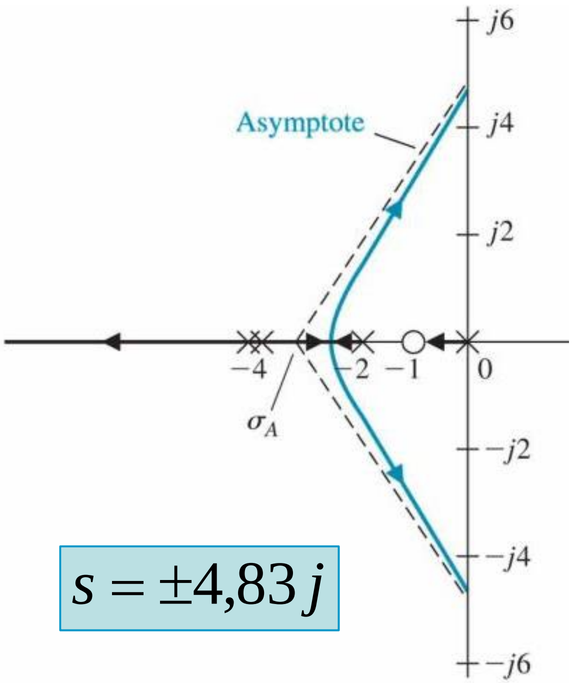
Si

$$c_1=0 \Rightarrow K=201{,}7$$

$$b_1=8{,}63$$

$$8{,}63s^2+201{,}7=0$$

$$s=\pm 4{,}83j$$



$$\boxed{s=\pm 4{,}83j}$$

Propiedad constructiva 6: Ejemplo 1

6. **PUNTOS DE RUPTURA o SALIDA DEL EJE REAL.** Los puntos de ruptura son los puntos de encuentro y de separación con respecto al eje real de dos o más (siempre pares) ramas del lugar de las raíces. En ellos, las raíces que verifican cualquiera de estas dos condiciones:

$$\frac{d\left(G(s)\cdot H(s)\right)}{ds}=0 \qquad \frac{dK(s)}{ds}=0$$

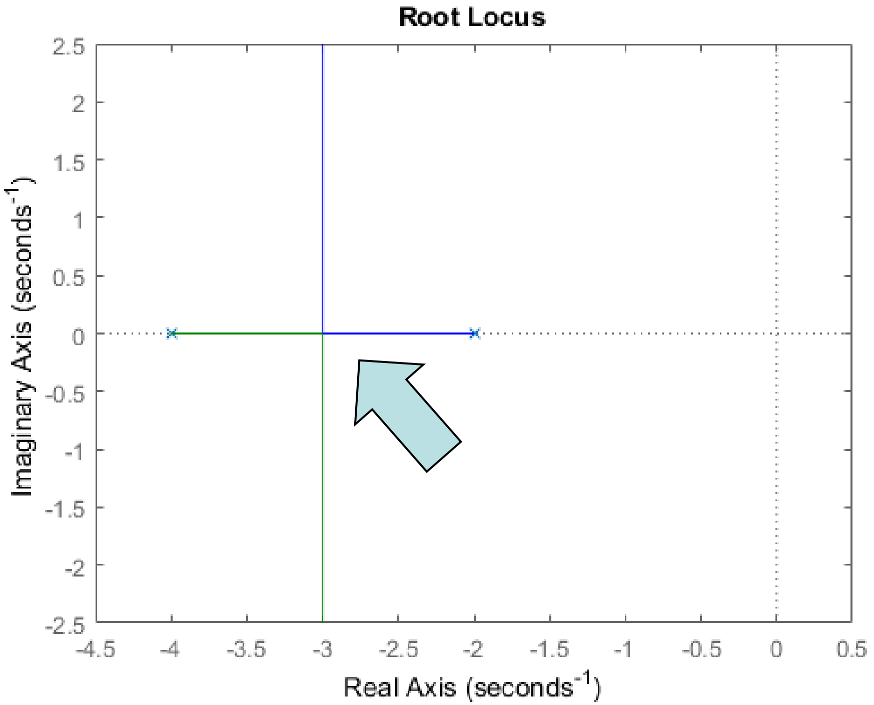
Ejemplo 1:

$$1+G(s)=1+\frac{K}{(s+2)(s+4)}=0$$

$$K=-(s+2)(s+4)$$

$$K=-(s^2+6s+8)$$

$$\frac{dK}{ds}=-(2s+6)=0;s=-3$$



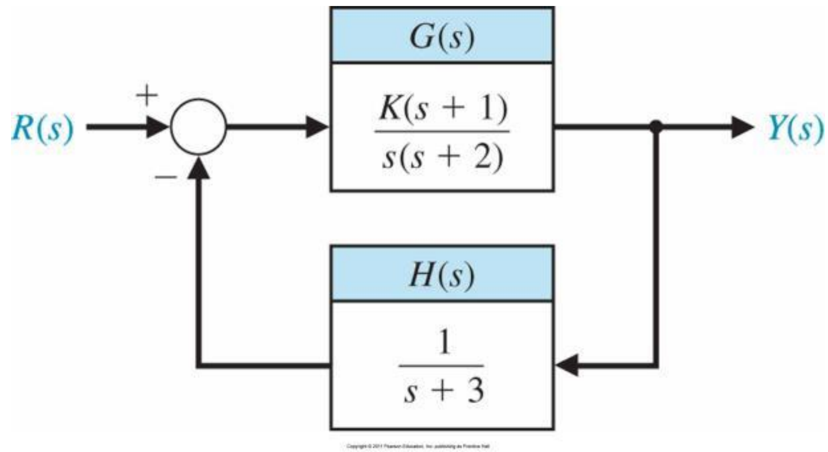
En este caso el punto de ruptura s = -3 coincide con el centroide. No siempre es así, aunque ambos puntos suelen estar cercanos.

Propiedad constructiva 6: Ejemplo 2

Ejemplo 2:

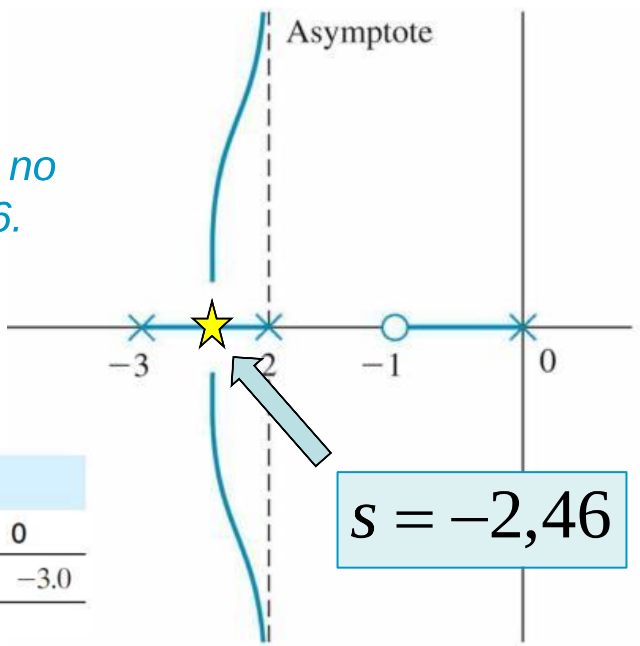
$$1+G(s)=1+\frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}=0$$

$$K=\frac{-s(s+2)(s+3)}{(s+1)}$$



$$\frac{dK}{ds}=\frac{d}{ds}\left(\frac{-s(s+2)(s+3)}{(s+1)}\right)=2s^3+8s^2+10s+6=0;$$

- *En este segundo ejemplo el centroide está en s = -2 y no coincide con el punto de ruptura, que está en s = -2,46.*
- *Si resulta complejo resolver la ecuación dK/ds = 0, se pueden dar valores a s en el intervalo de interés y estimar el máximo (o mínimo) de K(s):*



$s=-2{,}46$

Table 7.1

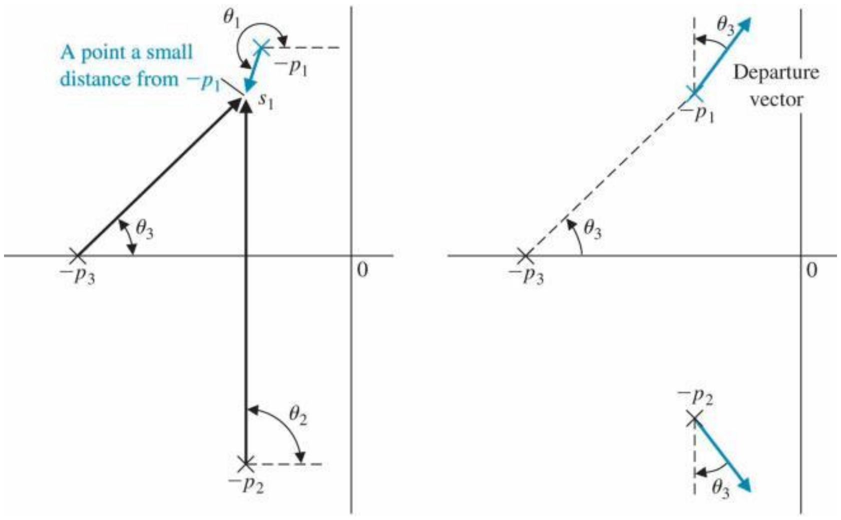
$p(s)$	0	0.411	0.419	0.417	+0.390	0
s	−2.00	−2.40	−2.46	−2.50	−2.60	−3.0

Propiedad constructiva 7

7. ÁNGULO DE SALIDA (O LLEGADA) DE LAS RAÍCES . El ángulo de salida (o llegada) del lugar de las raíces (generalmente de una o varias ramas) desde un polo (o hasta cero) de G(s)·H(s) se determina imponiendo el criterio del ángulo de fase a un punto en las proximidades del polo cero.

$$\arg\left[G(s)\cdot H(s)\right]=\left(2\times i+1\right)\cdot\pi \quad para \quad i=0,1,2,\ldots$$

- Por ejemplo, desde un polo complejo el ángulo de salida es la diferencia entre el ángulo total debido a los demás polos y ceros y el ángulo del criterio: 180º(2i+1). Lo mismos se aplica al ángulo de entrada a un cero complejo.

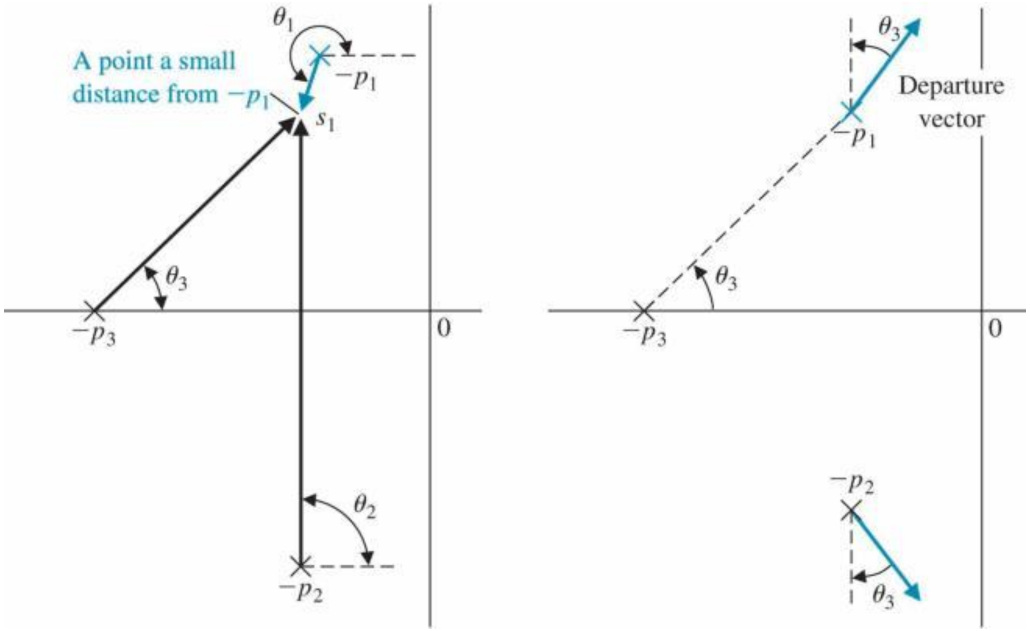


Generalmente se elige un punto de prueba "s_1" en la vecindad del polo o cero en estudio, se mueve en sus proximidades, se determina el ángulo de salida o llegada y por último se aplican las reglas de simetría.

Propiedad constructiva 7: Ejemplo

Ejemplo. Determinar el ángulo de salida de los polos complejos si G(s)H(s) es del tipo:

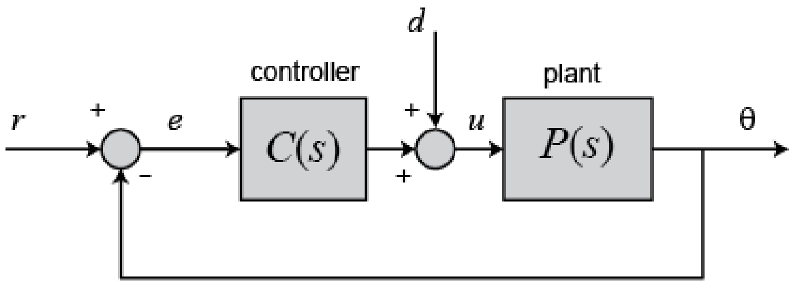
$$G(s)H(s) = \frac{K}{(s+p_3)(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2)}$$



$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = +180^{\circ}$$
$$\theta_1 + 90^{\circ} + \theta_3 = +180^{\circ}$$
$$\theta_1 = 90^{\circ} - \theta_3$$

1. Elegimos un punto s_1 cercano al polo complejo superior $-p_1$.
2. Trazamos los "vectores" desde el resto polos y ceros de G(s)H(s) hasta s_1.
3. Calculamos los ángulos conocidos θ_2 (a $-p_2$) y θ_3 (a $-p_3$).
4. Aplicamos el criterio de la fase (fase total de G(s)H(s) igual a 180º) y despejamos θ_1. El ángulo de salida desde $-p_2$ será el simétrico.

- En la construcción de un sistema de control, normalmente no se puede modificar la planta o proceso P(s) para cumplir unas determinadas especificaciones de diseño.
  - En estos casos se deben ajustar otros parámetros distintos a los de la planta ⇨ Se añade un regulador o compensador C(s).

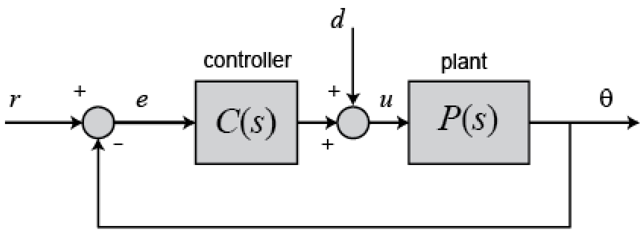


¿Qué es la regulación (compensación) automática?

- Regular o compensar es modificar el lugar geométrico de las raíces de la planta o proceso original (o su respuesta en frecuencia) de modo que se comporte como un sistema físicamente realizable y que cumpla con unas especificaciones determinadas, que pueden estar dadas en:
  - Dominio del tiempo.
  - Dominio de la frecuencia.
  - Dominio complejo “s” o de Laplace.

¿Qué tipo de especificaciones se pueden dar?

- Dominio del tiempo
  - Régimen transitorio: coef. amortiguación, velocidad de respuesta (t_r, t_p, t_s), sobreelongación (M_p), comportamiento frente a perturbaciones.
  - Régimen estacionario: estabilidad absoluta, estabilidad relativa, error frente a entradas tipo, error frente a perturbaciones.
- Dominio de la frecuencia
  - Márgenes de ganancia y de fase.
  - Ancho de banda, frecuencia de corte.



- Dominio complejo o de Laplace
  - Posición de los polos y/o los ceros.

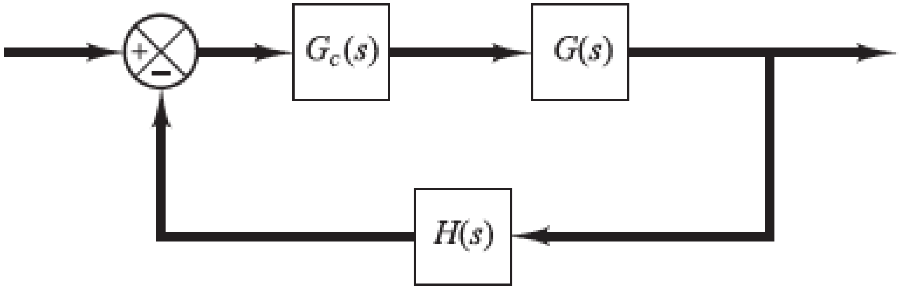
¿Qué controladores o reguladores son los más comunes?

- Controlador PID (Proporcional, Integral, Derivativo): **Tema 5**.
- Redes de compensación:
  - Compensadores o redes de adelanto (*Lead* compensation).
  - Compensadores o redes de retardo (*Lag* compensation).

- El diseño por el método del lugar de las raíces (LDR) se basa en redibujar el LDR del sistema original añadiendo polos y ceros a la función de transferencia en lazo abierto, haciendo que el LDR del sistema compensado pase por los polos dominantes en lazo cerrado deseados.

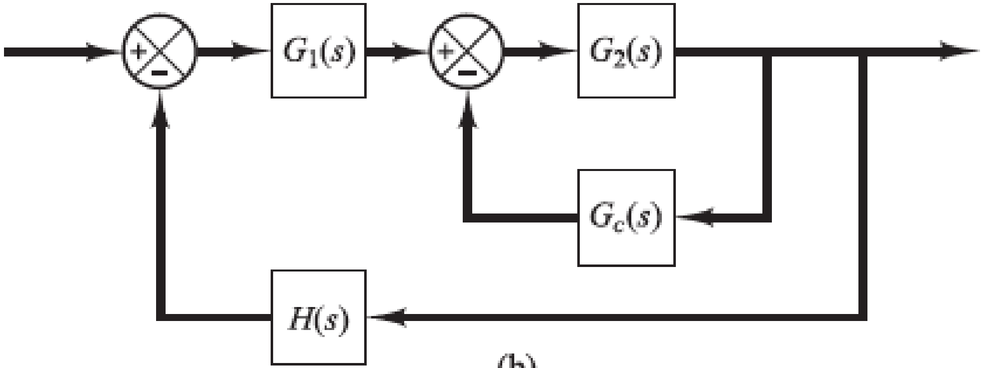
Compensación en serie y en paralelo

1. **SERIE:** el regulador se inserta en cascada con la planta.



(a)

2. **PARALELO:** Se coloca el regulador en el lazo de realimentación de una parte de la planta $G_2(s)$.



(b)

En general, la compensación en serie es más sencilla y es la que usaremos en este tema.

Efecto de la adición de ceros y polos (I)

Concepto de estabilidad relativa: es una medida cuantitativa de la estabilidad del sistema, es decir, de cuánto de lejos están los polos dominantes (su parte real) del eje imaginario (comienzo de la inestabilidad).

- ✓ En la práctica, un sistema con mayor estabilidad relativa tiene una respuesta transitoria más rápida, es decir, un tiempo de establecimiento más corto.

- **EFECTO DE LA ADICIÓN DE POLOS:** La adición de un polo a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de desplazar el lugar de las raíces a la derecha, lo que disminuye la estabilidad relativa del sistema (los polos en lazo cerrado se quedan más cerca del eje imaginario).

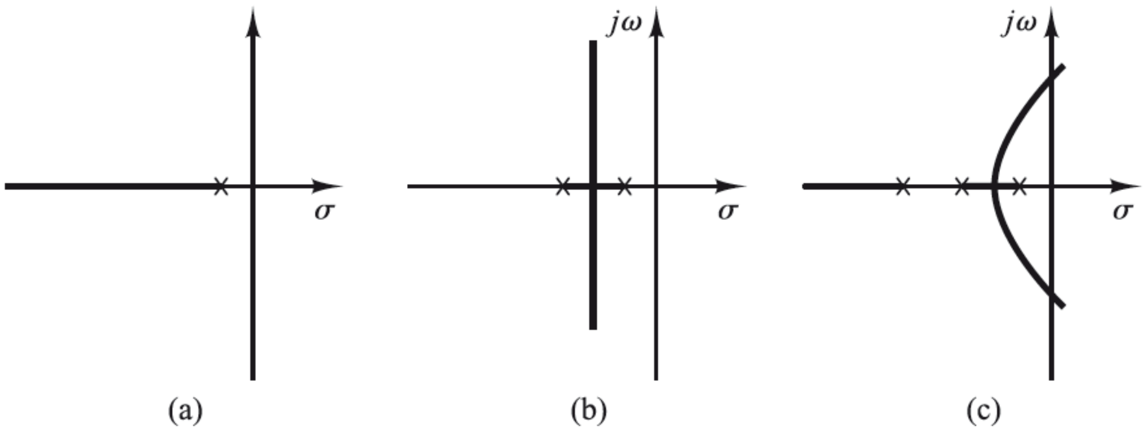


Figura 6-34. (a) Gráfica del lugar de las raíces del sistema de un solo polo; (b) gráfica del lugar de las raíces de un sistema de dos polos; (c) gráfica del lugar de las raíces de un sistema con tres polos.

Efecto de la adición de ceros y polos (II)

Ejemplo: Adición de un polo en s= -1/T_p a un sistema de segundo orden genérico.

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$ → Función de transferencia directa de un sistema de segundo orden.

$$s=-\frac{1}{T_p}$$ → Polo a ser añadido a la función de transferencia directa.

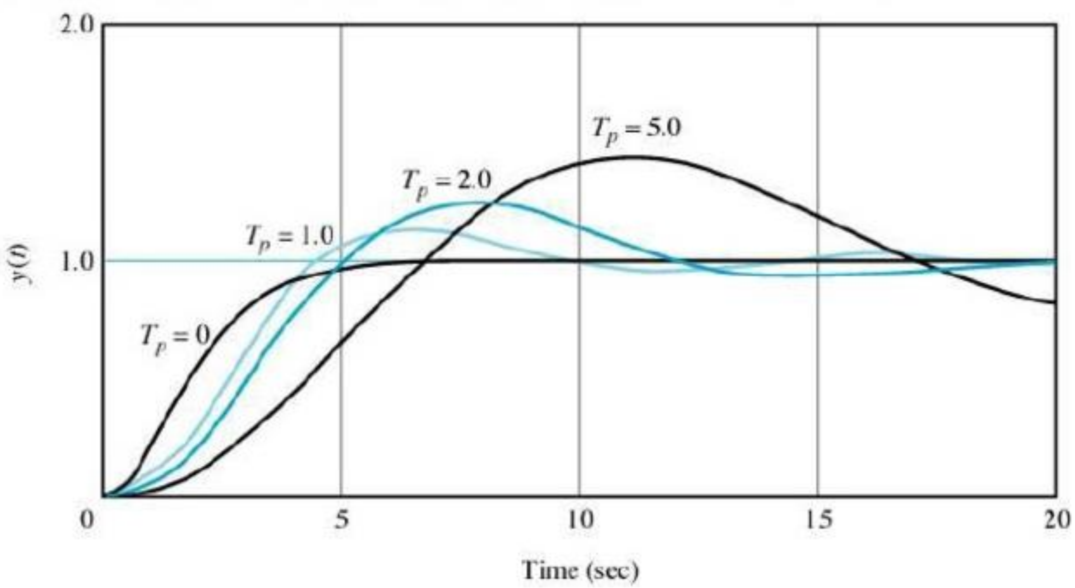
$$G(S)=\frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)(1+T_p s)}$$

Respuesta al escalón unitario - Adición de un polo a G(s) $\zeta = 1$, $\omega_n = 1$, y $T_p = 0, 1, 2,$ and 5.

Supongamos el sistema original críticamente amortiguado, con un polo doble en lazo cerrado en $s=-\zeta\omega_n$

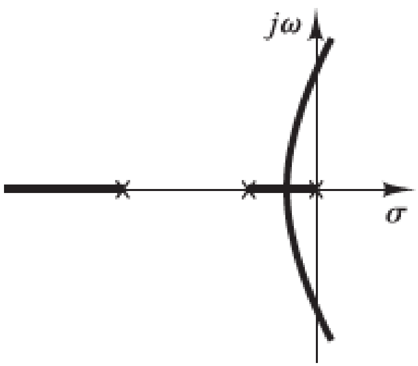
A medida que T_p aumenta, el polo adicional se acerca al origen y provoca una **menor estabilidad relativa:**

- Sobreelongación creciente.
- Sistema cada vez más lento (t_r, t_p, t_s crecientes).

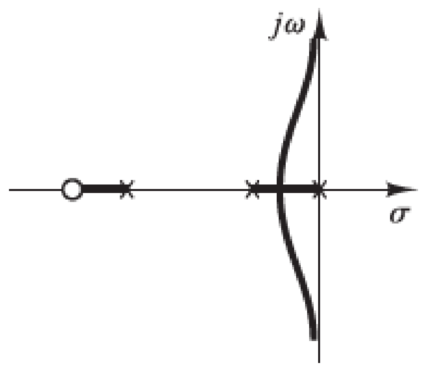


Efecto de la adición de ceros y polos (III)

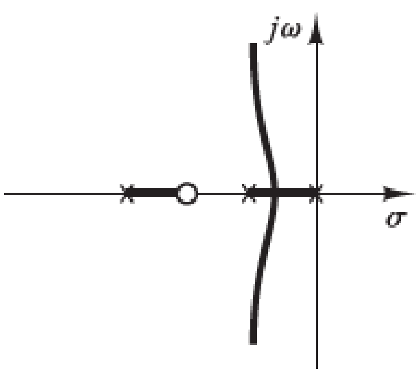
- **EFECTO DE LA ADICIÓN DE CEROS:** La adición de un cero a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de desplazar el lugar de las raíces hacia la izquierda, lo cual aumenta la estabilidad relativa del sistema (disminuye el tiempo de asentamiento).



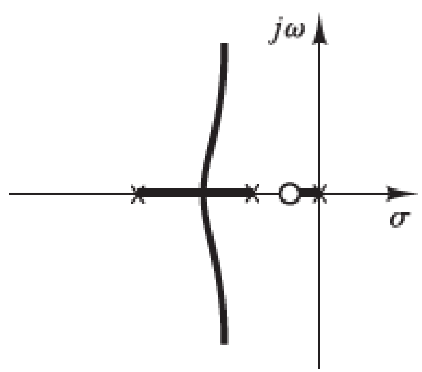
(a)



(b)



(c)



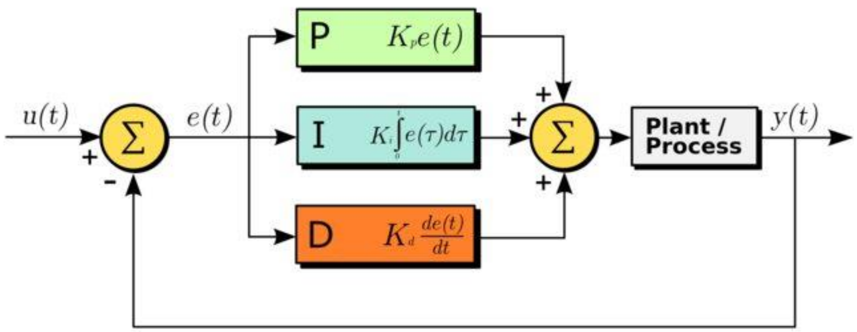
(d)

Lugar de las raíces de un sistema con tres polos en lazo abierto (a), al que se le añade un cero a la izquierda de los tres polos (b), a la derecha del polo menos dominante (c) y a la izquierda del polo dominante (d).

- El sistema (a) es inestable para valores altos de K.
- Los sistemas (b), (c) y (d) son todos estables (absolutamente).
- La estabilidad relativa del sistema (d) es mayor (compensación del polo dominante con el cero añadido).

Controladores PI, PD, PID (Tema 5)

$$u(t) = \overbrace{K_p e(t)}^{\text{Proportional}} + \overbrace{K_i \int_0^t e(\tau)\,d\tau}^{\text{Integral}} + \overbrace{K_d \frac{d}{dt} e(t)}^{\text{Derivative}}$$



$$PI \quad G_c(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$PD \quad G_c(s) = K\left(1 + T_d s\right)$$

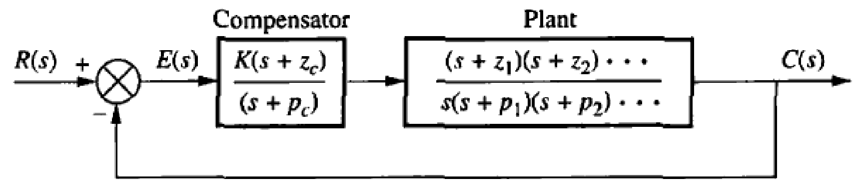
$$PID \quad G_c(s) = K\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right)$$

Reguladores (o compensadores) de Retardo y de Adelanto

Compensadores con un polo p_c y un cero z_c

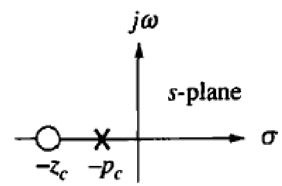
1. **RETARDO:** el polo p_c se encuentra más cerca del origen que el cero z_c.
2. **ADELANTO:** el cero z_c se encuentra más cerca del origen que el polo p_c.

Si se concatenan en cascada se consigue un compensador de adelanto-atraso (*lead-lag*).



(b)

$$G_c(s) = \frac{(s+z_c)}{(s+p_c)}$$



(c)

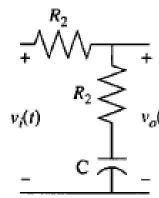
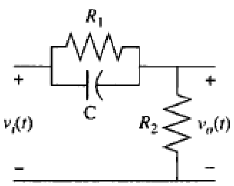
(retardo)

Compensadores prácticos de retardo y adelanto

En la práctica, existen varias maneras de realizar compensadores de adelanto y retardo. Por ejemplo:

1. Compensador de retardo o adelanto con elementos pasivos (R,C)

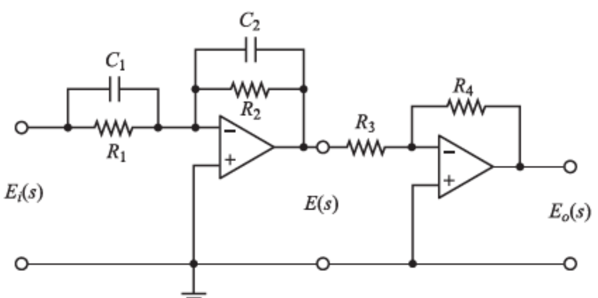
TABLE 9.11 Passive realization of compensators

Function	Network	Transfer function, $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$
Lag compensation		$\frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{s+\frac{1}{R_2C}}{s+\frac{1}{(R_1+R_2)C}}$
Lead compensation		$\frac{s+\frac{1}{R_1C}}{s+\frac{1}{R_1C}+\frac{1}{R_2C}}$

2. Compensador de retardo o adelanto con A.O.

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)}=\frac{R_2R_4}{R_1R_3}\frac{R_1C_1s+1}{R_2C_2s+1}=\frac{R_4C_1}{R_3C_2}\frac{s+\frac{1}{R_1C_1}}{s+\frac{1}{R_2C_2}}=$$

$$=K_c\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}=K_c\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$



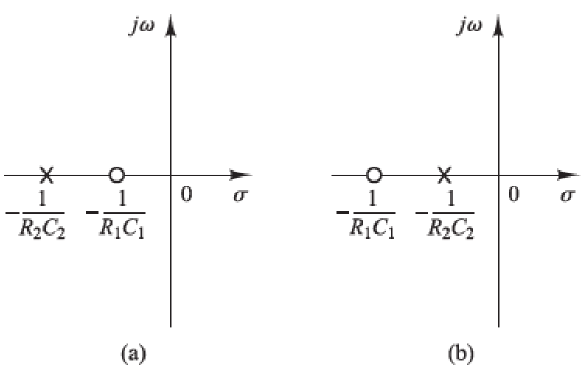


Figura 6-37. Configuraciones de polos y ceros: (a) red de adelanto; (b) red de retardo.

- Red de adelanto: $R_1C_1 > R_2C_2$
- Red de retraso: $R_1C_1 < R_2C_2$

Universidad Rey Juan Carlos

Diseño mediante LDR con MATLAB

➢ Para diseñar compensadores en sistemas de orden elevado se suelen usar herramientas software. SISOTOOL (RLTOOL) de MATLAB permite el diseño interactivo de sistemas de control utilizando la técnica del Lugar de las Raíces