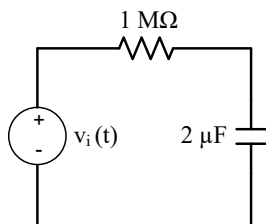


Ejercicio 1 (3,5 puntos)

Un generador de impulsos permite evaluar el comportamiento de equipos eléctricos frente a perturbaciones. La primera etapa consiste en un circuito RC (ver figura) sobre el que se solicita:



(i) (0,75 puntos) Obtenga el tiempo de carga del condensador de $2 \mu\text{F}$ considerando que se carga a través de una resistencia de valor $1 \text{ M}\Omega$ (criterio del 98%).

El circuito dibujado a continuación representa la etapa final del generador de impulsos. El condensador de valor $0,1 \mu\text{F}$ representa la capacidad del equipo de potencia a evaluar. Con este dispositivo es posible generar una onda doble exponencial de la forma $v(t) = V_o (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$ utilizada para realizar ensayos con impulsos de tensión tipo rayo.

(ii) (0,5 puntos) ¿Qué tipo de respuesta se tiene en $v(t)$ sabiendo que α y β son reales y positivos?

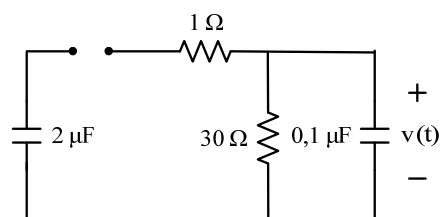
(iii) (1 punto) A través de un análisis del circuito en el dominio de s se obtiene que:

$$V(s) = \frac{6 \cdot 10^{11}}{s^2 + 1,08 \cdot 10^7 s + 1,66 \cdot 10^{11}}$$

Demuestre que la tensión en bornes del condensador de $0,1 \mu\text{F}$ consiste en una exponencial doble de la forma expresada previamente.

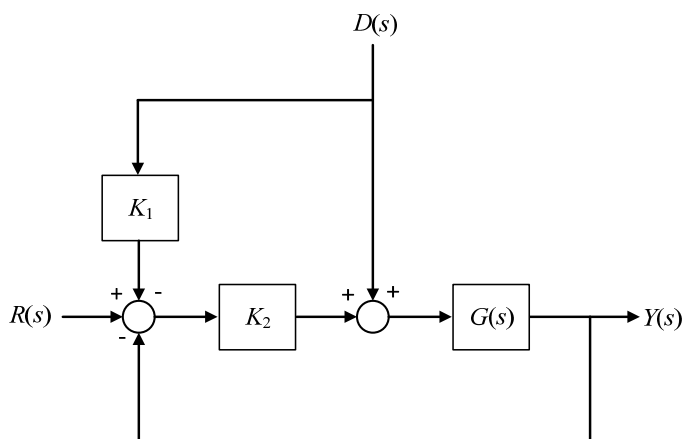
(iv) (0,5 puntos) Identifique y especifique los valores de V_o , α , β y las constantes de tiempo del circuito.

(v) (0,75 puntos) Obtenga los polos del sistema y explique si es posible utilizar una aproximación por “polos dominantes”. A partir de su justificación, realice un esbozo de la respuesta resultante $v(t)$.



Ejercicio 2 (2 puntos)

Al recorrer una carretera con baches, un automóvil experimenta muchas entradas tipo perturbación. El diagrama de bloques de la figura muestra un sistema sencillo de suspensión que puede servir para “acomodar” los cambios bruscos. A partir de la función de transferencia $Y(s)/D(s)$, ¿sería posible obtener una relación apropiada de ganancias (K_1 y K_2) de forma que el vehículo no rebote cuando la deflexión deseada sea nula $-R(s)=0$? En caso afirmativo, especifíquela ayudándose de la condición $Y(s)/D(s)=0$.



Ejercicio 3 (4,5 puntos)

La planta del sistema de posicionamiento de un brazo robótico se puede modelar a través de la siguiente función de transferencia: $G(s) = 1/[s(s+2)]$. Considerando dicho proceso incluido en un lazo de control con realimentación unitaria y negativa, se pide:

(i) (1 punto) A partir del bosquejo del lugar de las raíces (LDR) y la función de transferencia en lazo cerrado del sistema, analice la estabilidad y el tipo de respuesta (*oscilatoria, subamortiguada, con amortiguamiento crítico o sobreamortiguada*) en función del valor del parámetro K .

(ii) (0,5 puntos) Razone si con un controlador proporcional K se puede conseguir que los desplazamientos del brazo robótico tengan un tiempo de asentamiento de 500 ms ante una entrada escalón.

(iii) (1 punto) Si la respuesta en (ii) ha sido negativa para $K > 0$, diseñe un compensador de adelanto/retraso que cumpla dicho requerimiento permitiendo como valor máximo una sobreoscilación del 10%.

(iv) (0,75 puntos) Determine el tipo de sistema a partir del error de control y compárelo con el escenario en el que se tenía un controlador proporcional —apartados i) y ii)—.

(v) (1,25 puntos) Si hubiésemos implementado controladores de la familia de los PID, ¿cuál de ellos y bajo qué condiciones hubiese permitido obtener una respuesta subamortiguada y/o con errores nulos ante movimientos parabólicos del brazo robótico?

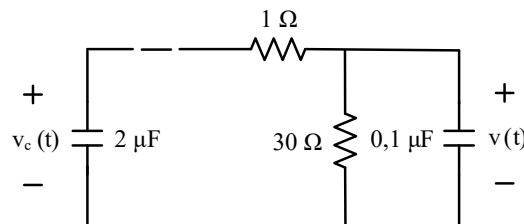
Ejercicio 1

(i) La carga del condensador de $2 \mu\text{F}$ a través de la resistencia de $1 \text{ M}\Omega$, constituye un circuito RC alimentado con una fuente de tensión. El condensador se carga a la tensión que marca la alimentación. La constante de tiempo del proceso de carga es $\tau = RC = 10^6 \times 2 \cdot 10^{-6} = 2 \text{ s}$.

El condensador se considera cargado cuando ha transcurrido un tiempo de $4\tau = 8 \text{ s}$ (criterio del 98%). En efecto, tarda mucho tiempo en cargarse porque lo hace a través de una resistencia de valor muy elevado.

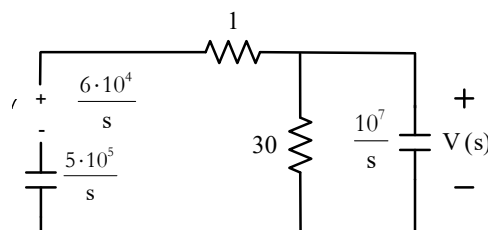
(ii) Se tiene una respuesta temporal constituida por dos funciones exponenciales decrecientes con el tiempo (respuesta transitoria). En efecto, no aparece ningún término perteneciente al régimen estacionario (no “extinguible” para $t \rightarrow \infty$) ya que no existe alimentación independiente en el circuito, más allá de la energía previamente almacenada por el condensador de $2 \mu\text{F}$ –véase apartado (i)–. Esta expresión tipo pertenece al caso de un sistema sobreamortiguado ($\xi > 1$): Es la base de soluciones de una ecuación diferencial homogénea, $\{e^{-at}, e^{-bt}\}$, cuyas raíces del polinomio característico son reales, negativas y distintas. Nótese que, en el dominio de s , ambas funciones exponenciales surgen del proceso de descomposición por fracciones simples por la naturaleza de los polos del denominador de la función de transferencia del circuito.

(iii) El condensador está cargado a la tensión de la fuente de alimentación (suponer 60 kV) y, a partir de ese instante $t=0$ (tomado como origen de tiempos), se empieza a descargar por el espinterómetro (salta una chispa debido a la tensión elevada entre las esferas), el aire se ioniza pasando a tener una impedancia muy baja (los contactos que forman el espinterómetro pueden considerarse como si estuvieran unidos por un cable). A continuación se indica el circuito en el dominio del tiempo $t > 0$.



Obsérvese que $v_c(0^+) = 60 \text{ kV}$ –con la polaridad indicada por $v_c(t)$ –. La tensión $v(t)$ en el condensador de $0.1 \mu\text{F}$ (que representa la capacidad del dispositivo que se quiere ensayar) ha de poderse escribir como una exponencial doble de la forma: $v(t) = V_o (e^{-at} - e^{-bt})$.

El circuito anterior en el dominio de s :



Es posible hacer el paralelo de $30/(10^7/s)$ ya que la tensión $V(s)$ sigue siendo la del paralelo. Para realizar el paralelo de impedancias se suman las admitancias y luego se invierte el resultado:

$$Y(s) = \frac{1}{30} + \frac{1}{10^7/s} = \frac{1}{30} + \frac{s}{10^7} = \frac{10^7 + 30s}{3 \cdot 10^8} \rightarrow Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^7 + 30s}$$

La tensión $V(s)$ se obtiene de un divisor de tensión formado por las impedancias $(5 \cdot 10^5/s) + 1$ y $30/(10^7/s)$ de suerte que:

$$V(s) = \frac{6 \cdot 10^4}{s} \cdot \frac{\left(30 // \frac{10^7}{s}\right)}{\left(\frac{5 \cdot 10^5}{s} + 1\right) + \left(30 // \frac{10^7}{s}\right)} = \frac{6 \cdot 10^4}{s} \cdot \frac{\frac{3 \cdot 10^8}{10^7 + 30s}}{\frac{5 \cdot 10^5}{s} + 1 + \frac{3 \cdot 10^8}{10^7 + 30s}}$$

Reordenando y normalizando, resulta:

$$V(s) = \frac{6 \cdot 10^{11}}{s^2 + 1,08 \cdot 10^7 s + 1,66 \cdot 10^{11}}$$

A continuación, se descompone en fracciones simples, resultando:

$$V(s) = \frac{6 \cdot 10^{11}}{(s + 15406,88)(s + 1,08 \cdot 10^7)} = \frac{55542,22}{s + 15406,88} - \frac{55542,22}{s + 1,08 \cdot 10^7}$$

A partir de la tabla nº 6 de las transformadas de Laplace, se obtiene la transformada inversa $v(t)$:

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = 55542,22 \left(e^{-15406,88t} - e^{-1,08 \cdot 10^7 t} \right) \text{ V}$$

Nótese que, también se podría haber aplicado directamente la transformada nº 15 de la tabla.

(iv) Identificando con la función doble exponencial, $v(t) = V_o (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$, se obtiene:

$V_o = 55542,22 \text{ V}$; $\alpha = 15406,88 \text{ s}^{-1}$; $\beta = 1,08 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$. Obsérvese que la inversa del segundo (s^{-1}) es la unidad de los parámetros α y β de forma que el exponente de la función exponencial sea adimensional.

La exponencial doble puede escribirse como: $v(t) = V_o (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) = V_o (e^{-t/(1/\alpha)} - e^{-t/(1/\beta)})$ donde $1/\alpha$ y $1/\beta$ son las constantes de tiempo de la exponencial doble. Es decir:

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha} = 6,4906 \cdot 10^{-5} \text{ s} \quad \text{y} \quad \tau_2 = \frac{1}{\beta} = 9,2438 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

La constante de tiempo τ_1 es más lenta que la constante de tiempo τ_2 (más rápida).

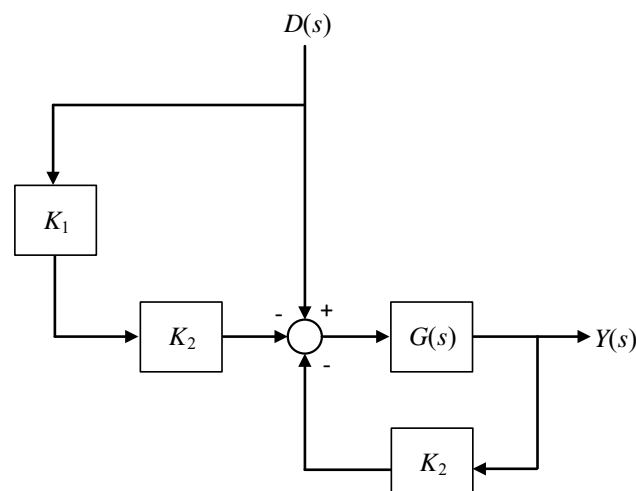
(v) En efecto, $-\alpha$ y $-\beta$ son los polos del sistema eléctrico. Se tiene que $-\alpha$ está mucho más cerca del origen que $-\beta$ (en términos absolutos, $\alpha < \beta$) y, por tanto, el sistema de segundo se puede aproximar por uno de primer orden, siendo:

$$V(s) \sim \frac{55542,22}{s + 15406,88} \rightarrow v(t) = 55542,22 e^{-15406,88t}$$

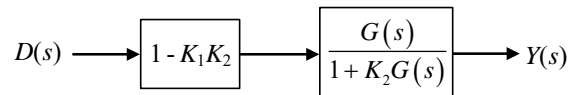
Ciertamente, la constante de tiempo lenta, τ_1 , gobierna la dinámica de la respuesta transitoria ya que $\tau_2 \ll \tau_1$. El proceso “rápido” es inapreciable ya que tiene lugar en una escala de tiempos muy corta (ns) en comparación con el proceso “lento” (μs).

Ejercicio 2

Se reordena el diagrama de bloques propuesto, de tal forma que se tengan asociaciones en paralelo o *feedbacks* “liberados”, para finalmente, asociar todos los bloques resultantes en serie o cascada y obtener $Y(s)/D(s)$. Aplicando el álgebra de bloques y, teniendo en cuenta que $R(s)=0$, se mueve el punto de suma situado a la izquierda “saltando” K_2 y uniéndose al punto de suma central:



Realizando el paralelo y el *feedback*, se tiene:



Asociando finalmente en serie ambos bloques, resulta:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{(1 - K_1 K_2) G(s)}{1 + K_2 G(s)}$$

Fijando que $Y(s)/D(s)=0$, se obtiene que $K_1 K_2=1$. De esta forma, si seleccionamos el valor de los controladores proporcionales K_1 y K_2 de forma adecuada, se puede conseguir mitigar los efectos de la perturbación (baches en la carretera) sobre la planta (automóvil).

Ejercicio 3

(i) Dibujamos el LDR.

En primer lugar, nombramos los dos bloques principales:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \quad \text{y} \quad H(s) = 1$$

A continuación, implementamos los pasos necesarios para realizar el bosquejo del LDR.

- Paso 1: Identificación y ubicación de polos y ceros en lazo abierto. Se tienen 2 polos en 0 y -2 (semiplano negativo del eje real) y ningún cero.
- Paso 2: Número de ramas. Por lo dado anteriormente: $n=2$ y $m=0$. Por tanto, el número de ramas es: 2. Nótese que n y m denotan el número de polos y ceros, respectivamente.
- Paso 3: Identificación de segmentos sobre el eje real. A partir de los datos provistos en el paso 1, se identifica fácilmente que el único segmento que pertenece al LDR es de 0 a -2. Nótese que el rango dado no indica el sentido de la rama.
- Paso 4: Cálculo de asíntotas.
 - a) Número de asíntotas: $n-m=2$.
 - b) Ángulo de las asíntotas: 90° y 270° .
 - c) Centroide:

$$\sigma = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{n^\circ \text{ polos} - n^\circ \text{ ceros}} = \frac{(0-2)}{2-0} = -1$$

- Paso 5: Puntos de corte con el eje imaginario. Nos fijamos en el polinomio auxiliar:

$$1 + KG(s)H(s) = 1 + K \frac{1}{s(s+2)} = \frac{s(s+2) + K}{s(s+2)} \rightarrow s^2 + 2s + K$$

En este escenario, se concluye fácilmente que ningún valor de K , para $K > 0$, hará posible que el polinomio característico contenga raíces complejas imaginarias puras. Esto era predecible a través del cálculo de las asíntotas (90° y 270° en $s=-1$)

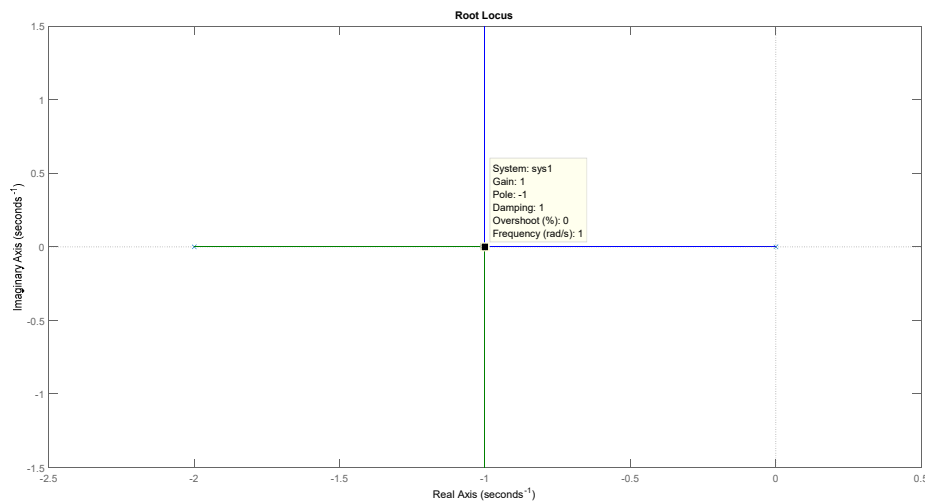
- Paso 6: Puntos de ruptura o salida del eje real. En este punto, es necesario conocer el sentido de las ramas. Para ello, imponemos:

$$1 + KG(s)H(s) = 0 \rightarrow 1 + K \frac{1}{s(s+2)} = 0 \rightarrow K = -(s^2 + 2s)$$

$$\frac{dK}{ds} = -2s - 2 = 0 \rightarrow s = -1 \quad (\text{punto medio del segmento sobre el eje real identificado})$$

- Paso 7: Ángulo de salida o llegada de las raíces. Ya que no existen ni polos ni ceros con parte real y compleja conjugada, este paso no es necesario de llevar a cabo.

Por tanto, el bosquejo del LDR previamente argumentado resulta con el siguiente esquema variable en función de la ganancia K :



A partir de la figura, se observa que el LDR no “pasa” para ningún valor de K ($K > 0$) por el semiplano positivo del eje real ni por el eje imaginario. Por tanto, el lazo de control nunca será inestable ni críticamente estable, respectivamente. Tal y como se vio en teoría, el sentido de las ramas es “de polos a ceros”, por lo que para bajos valores de K $-0 < K < 1$ –, los polos del sistema se sitúan separadamente sobre el eje real (sistema sobreamortiguado, $\xi > 1$). Justo cuando $K=1$, los polos son dobles (s^2+2s+1 ; $s=-1$) y, por tanto, se tendrían un sistema críticamente amortiguado, $\xi=1$. Finalmente, para $K > 1$, resulta una respuesta subamortiguada, $0 < \xi < 1$, ya que los polos tienen tanto para real como imaginaria. Cabe destacar que el factor de amortiguamiento irá disminuyendo a medida que aumenta K , obteniendo una respuesta más oscilatoria predominante frente a los efectos exponenciales decrecientes.

(ii) Según el marco teórico de los sistemas de control, el tiempo de asentamiento es 4 veces la inversa de la parte real del polo dominante en términos absolutos: $t_s = 4\tau$ (criterio del 98%), siendo τ la constante de tiempo que gobierna la respuesta. Tenga en cuenta que τ es la inversa cambiada de signo del polo dominante. Por tanto, si $t_s = 0,5$ s, se tiene que $\tau = 0,125$ s y el polo “más cercano al origen” debiera situarse en $-1/\tau = -8$ s⁻¹. A partir de la figura adjunta en (i) se ve claramente, como el LDR no pasa por -8 s⁻¹ (segmento sobre el eje real). Por tanto, no se puede conseguir que los desplazamientos del brazo robótico tengan un tiempo de asentamiento de 0,5 s ante una entrada escalón.

(iii) En aras de simplificar el lazo de control cancelando el polo situado en -2, se propone el siguiente compensador ($z_c=2$):

$$G_c(s) = K_c \frac{s+2}{s+p_c}$$

De esta forma, al obtener la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, resultaría:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G(s)H(s)}{1+G_c(s)G(s)H(s)} = \frac{K_c \frac{s+2}{s+p_c} \frac{1}{s(s+2)}}{1+K_c \frac{s+2}{s+p_c} \frac{1}{s(s+2)}} = \frac{K_c}{s^2+p_c s+K_c}$$

Fijamos ambos requerimientos y extraemos la información relativa a la situación de los polos a partir del factor de amortiguamiento ξ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n :

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \rightarrow 0,5 = \frac{4}{\xi\omega_n} \rightarrow \xi\omega_n = 8 \text{ rad/s}$$

$$M_p = \exp\left[\frac{-\pi\xi\omega_n}{\omega_d}\right] \rightarrow 0,1 = \exp\left[\frac{-8\pi}{\omega_d}\right] \rightarrow \omega_d = 10,91 \text{ rad/s}$$

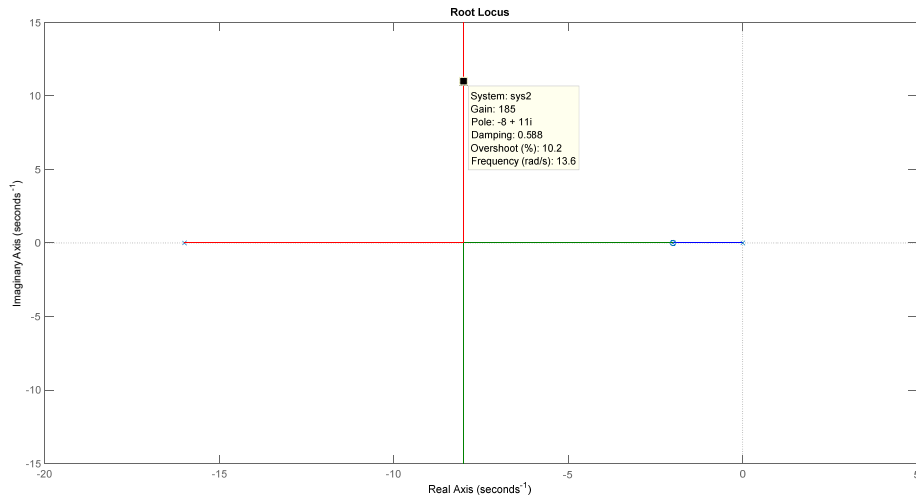
Por tanto, los polos se sitúan en $s = -8 \pm 10,91j$ rad/s.

Comparando el polinomio del denominador obtenido en la función de transferencia en lazo cerrado del sistema, $s^2 + p_c s + K_c$, con el tipo de los sistemas de segundo orden, $s^2 + 2\zeta\omega_n s + K_c$, y sabiendo que $\zeta\omega_n$ debe valer 8 se tiene que: $p_c = 16$. Finalmente, calculamos la ganancia del controlador a partir de la condición de módulo del LDR:

$$\left| \frac{s+2}{s+16} G(s)H(s) \right| = \frac{1}{K_c} \rightarrow \left| \frac{1}{s(s+16)} \right| = \frac{1}{K_c} \rightarrow K_c = 183,02$$

Por tanto, se diseña un compensador de adelanto de la forma:

$$G_c(s) = 183,02 \frac{s+2}{s+16}$$



(iv) La función de transferencia del error de control del movimiento del brazo robótico es:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G_c(s) \frac{1}{s(s+2)}}$$

En primer lugar, consideramos un control proporcional. Estudiamos el error ante una entrada en escalón unitario:

$$e_{ss}_{G_c(s)=K, R(s)=\frac{1}{s}} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{1}{1 + K \frac{1}{s(s+2)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+2)}{s(s+2) + K} = 0$$

Se descarta que sea un sistema tipo 0. A continuación, calculamos el error de control frente a una rampa:

$$e_{ss}_{G_c(s)=K, R(s)=\frac{1}{s^2}} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + K \frac{1}{s(s+2)}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s+2)}{K} = \frac{2}{K}$$

En efecto, al obtener un error finito, tenemos un sistema tipo 1 y, por tanto, el error del brazo robótico frente a movimientos parabólicos será infinito. La siguiente pregunta es, ¿modificará el compensador de adelanto el tipo de sistema y los errores? La respuesta a la primera pregunta es no, ya que no se modifica el orden del término s en el cálculo de la constante de error. Antes:

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K \frac{1}{s \left(\frac{s}{2} + 1 \right)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s}$$

y ahora:

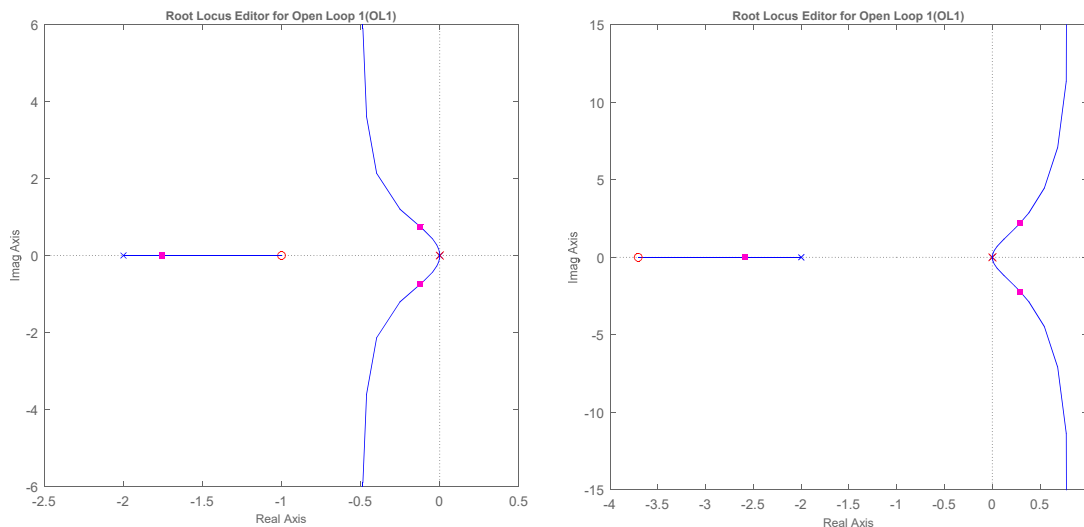
$$\lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K_c \frac{s+z_c}{s+p_c} \frac{1}{s(s+2)} = \lim_{s \rightarrow 0} K_c \frac{\left(\frac{s}{z_c}+1\right)}{\left(\frac{s}{p_c}+1\right)s\left(\frac{s}{2}+1\right)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_c}{s}$$

Comprobamos:

$$e_{ss_{G_c(s)=K_c \frac{s+z_c}{s+p_c}, R(s)=\frac{1}{s^2}}} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^2} \frac{1}{1+183,02 \frac{s+2}{s+16} \frac{1}{s(s+2)}} = \frac{32}{366,04} = 0,12$$

(v) Los controladores P y PD son descartables ya que no añaden polos a la función de transferencia y, por tanto, no modifican el tipo de sistema. Sin embargo, los controladores PI y PID introducen polos en el origen por lo que en el cálculo del límite de la función de transferencia en lazo abierto cuando $s \rightarrow 0$, aumentarían en +1 el término s^n –ver teoría–.

Con un controlador PI se podrían obtener respuestas subamortiguadas estables si el cero real negativo añadido por el controlador se encuentra más cerca del origen que el polo de la planta ($s=-2$). En caso contrario se obtendrían respuestas de naturaleza inestable:



En el caso de que se utilice un controlador PID, cualquier situación de los ceros sería factible para tener escenarios viables con polos con parte real e imaginaria (sistema subamortiguado). Sin embargo, en este caso, debiera tenerse cuidado con la selección de K ya que no para todo $K > 0$ se tienen respuestas subamortiguadas (también sobreamortiguadas y críticamente amortiguadas):

