# Tema 3. Identificación de la respuesta temporal de sistemas de control.

## Parte 2: Respuesta Estacionaria

# Índice

- Respuesta estacionaria o en régimen permanente.
- Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz.
- Precisión y error en estado estacionario para sistemas con realimentación. Constantes de error. Tipos de sistemas según su error.
- Respuesta de un sistema a una perturbación. Error frente a perturbaciones.

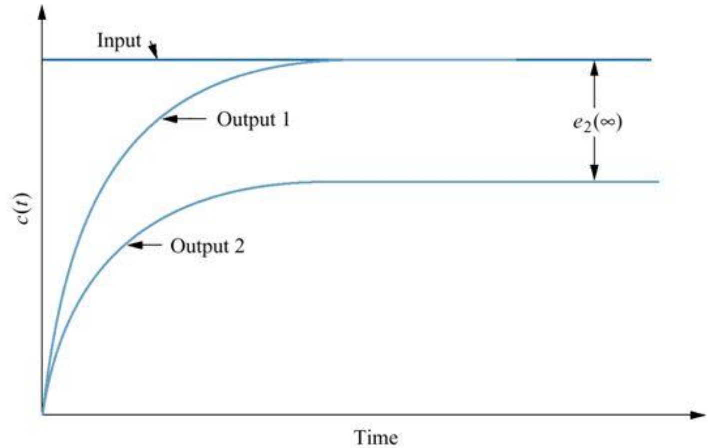
# Respuesta en régimen permanente



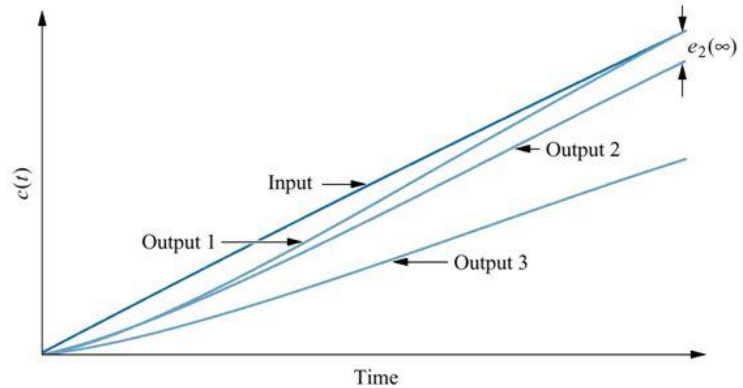
Del régimen permanente o respuesta estacionaria de sistema de control se desea que:

- El sistema estable, independientemente de variaciones en la entrada o de perturbaciones.
- Tenga una cierta precisión para una entrada determinada.

➢ La situación ideal será que el sistema, a la salida, siga exactamente a la entrada. Si no se logra siempre se puede introducir un controlador que lo consiga.




(*a*)




(*b*)

➢ Por ello vamos a estudiar el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz, y vamos a aprender a calcular la precisión de un sistema realimentado en el dominio de Laplace para cada entrada típica (escalón, rampa, parábola), lo que nos permitirá clasificarlos en "tipos" según su precisión.

# Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

El criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz es un método simple que permite determinar la cantidad de polos de un sistema en lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho del plano complejo sin tener que factorizar el polinomio, es decir, sin resolver la ecuación característica para extraer sus raíces.

**Edward John Routh (1831–1907)**

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- Por ello, este método informa sobre la estabilidad absoluta de un sistema de control en lazo cerrado sin conocer cuáles son exactamente sus polos, simplemente usando los coeficientes $a_i$ de la ecuación característica A(s).
- Resulta muy útil cuando el grado de la ecuación característica es elevado, y por lo tanto obtener analíticamente sus soluciones puede resultar muy complicado.

**Adolf Hurwitz (1859–1919)**

## ¿Si todos los coeficientes del polinomio característico existen y son positivos, todos los polos están en el semiplano complejo negativo?

- Supongamos que la ecuación característica es:

$$a_0.s^n + a_1.s^{n-1} + a_2.s^{n-2} + ..... + a_{n-1}.s + a_n = 0$$

- Factorizándola podríamos reescribirla como:

$$a_0.(s - r_1).(s - r_2).....(s - r_n) = 0$$

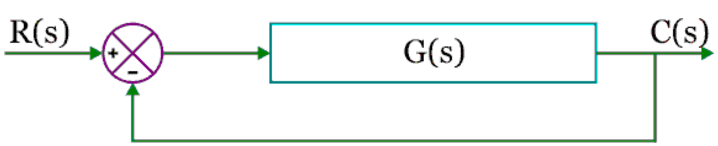
- Multiplicando todos los factores llegamos a que:

$$\begin{aligned} 0 = {} & a_0.s^n - a_0.(r_1 + r_2 + ..... + r_n).s^{n-1} + \\ & + a_0.(r_1.r_2 + r_1.r_3 + .....).s^{n-2} + \\ & - a_0.(r_1.r_2.r_3 + r_1.r_2.r_4 + r_2.r_3.r_4.....).s^{n-3} + \\ & + ....................................... + \\ & + a_0.(-1)^n.r_1.r_2.r_3.......r_n \end{aligned}$$

- Si algún $a_i$ es nulo o negativo, el sistema tiene al menos una raíz en el SPD (inestable).
- Si todas las raíces son negativas, todos los $a_i$ son distintos de cero y del mismo signo. Es condición necesaria pero no suficiente (Cardano-Vietta).

Entonces, para estudiar la estabilidad mediante este método:

1. Si todos los coeficientes $a_i$ existen y son positivos, debemos construir una tabla, denominada la tabla, matriz, o arreglo de Routh.
2. El número de raíces con parte real positiva coincide con el número de cambios de signo de la primera columna de la tabla (condición necesaria y suficiente). Si no hay cambios de signo ⇨ Sistema estable.




$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \ldots = 0$$

**TABLA DE ROUTH**

$$\begin{array}{c|cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & \cdots & 0 \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdots & 0 \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & \cdots & 0 \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & & & \\
s^0 & f_1 & 0 & & & &
\end{array}$$

## ¿Cómo se construye la tabla de Routh?

- **FILAS:** Si el grado de la ecuación característica es "n", la tabla tiene "n+1" filas.

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \ldots = 0$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s^n$ | $a_0$ | $a_2$ | $a_4$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $0$ |
| $s^{n-1}$ | $a_1$ | $a_3$ | $a_5$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $0$ |
| $s^{n-2}$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $0$ |
| $s^{n-3}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $\ldots$ | $\ldots$ | $0$ |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $s^0$ | $f_1$ | $0$ | | | | |

- **COEFICIENTES $a_i$ de la ec. característica:** Ocupan las dos primeras filas. Los demás coeficientes se calculan.
- **COEFICIENTES $b_i$:** Se calculan con los valores de los coeficientes $a_i$ según:

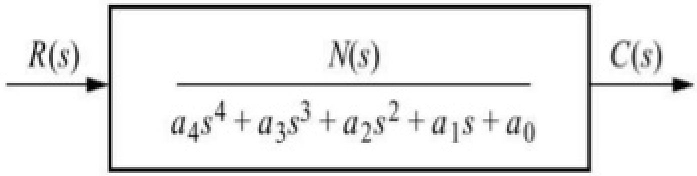
$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

- **COEFICIENTES $c_i$:** Se calculan con los valores de los coeficientes $a_i$ y $b_i$ según:

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - b_2 a_1}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - b_3 a_1}{b_1}$$

- **$d_i$, $e_i$:** se sigue el mismo patrón.

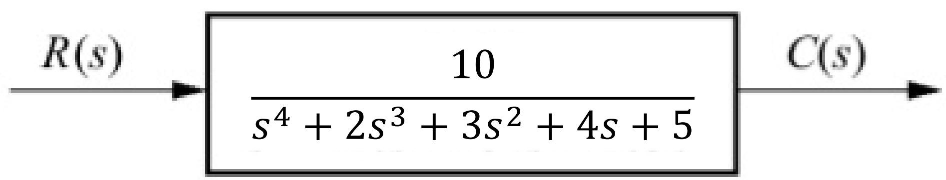
También se pueden ver de esta manera (para un sistema de orden 4):




| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | $a_4$ | $a_2$ | $a_0$ |
| $s^3$ | $a_3$ | $a_1$ | 0 |
| $s^2$ | | | |
| $s^1$ | | | |
| $s^0$ | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | $a_4$ | $a_2$ | $a_0$ |
| $s^3$ | $a_3$ | $a_1$ | 0 |
| $s^2$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$ |
| $s^1$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$ | $-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$ |
| $s^0$ | $-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$ | $-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$ | $-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$ |

**Ejemplo:** Determinar la estabilidad absoluta del sistema de la figura utilizando el criterio de Routh-Hurwitz:



## ¿Qué ocurre si el primer elemento de una fila es nulo pero no lo son los términos restantes?

- No se puede conocer su signo y no se puede completar el método.
- Solución: Se sustituye el término nulo por un término muy pequeño ($\varepsilon \rightarrow 0$) y se continúa la tabla, discutiendo los signos para $\varepsilon+$ (termino muy pequeño pero positivo).

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 2 | 3 |
| $s^3$ | 1 | 2 | 0 |
| $s^2$ | $\boxed{0 \rightarrow \varepsilon}$ | 3 | 0 |
| $s^1$ | $\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}$ | 0 | 0 |
| $s^0$ | 3 | | |

## ¿Qué ocurre si todos los elementos de una fila son nulos?

- Ocurre cuando hay polos imaginarios puros.
- En ese caso se construye una ecuación o polinomio auxiliar P(s) usando los coeficientes de la fila inmediata anterior.
- En concreto, se sustituyen los ceros de la fila problemática por los coeficientes de la derivada del polinomio auxiliar dP(s)/ds y se continúa con la tabla de Routh.

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 3 | 2 |
| $s^3$ | 3 | 3 | 0 |
| $s^2$ | 2 | 2 | 0 |
| $s^1$ | $0 \rightarrow 4$ | 0 | 0 |
| $s^0$ | 2 | | |

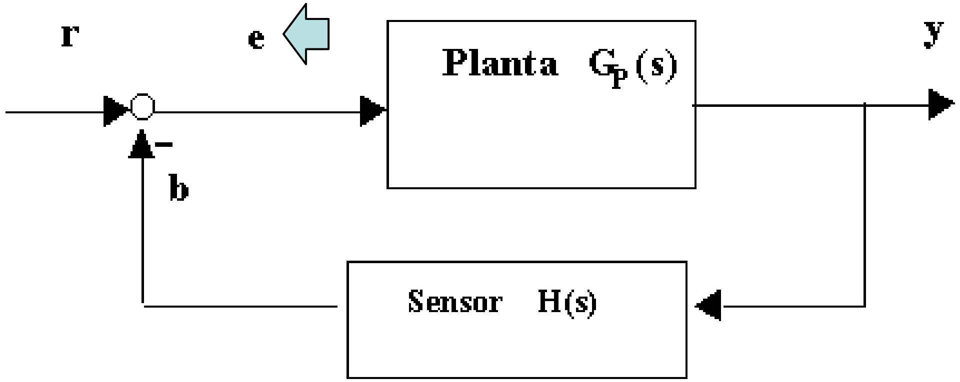
$P(s) = 2s^2 + 2$

$dP(s)/ds = 4s$

# Error real o verdadero de un sistema



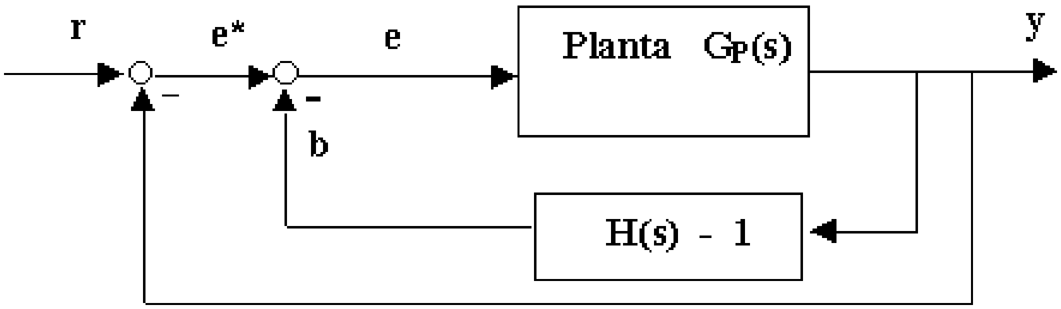
**Observa el sistema realimentado general de la figura. ¿Es la señal E(s) el error real o verdadero del sistema, es decir, la diferencia entre la salida y la entrada?**




- E(s) = R(s) – Y(s) es el **error real o verdadero** del sistema de control
- E*(s) = R(s) – B(s) = R(s) - H(s)Y(s) es el **error de actuación o "error en el control"** del sistema
- Sólo coinciden cuando H(s) = 1, es decir, cuando existe realimentación unitaria.
  - Cuando H(s) $\neq$ 1 la señal E(s)=R(s)-H(s)Y(s) no representa la diferencia entre la entrada y la salida real. Esta diferencia es importante cuando se analiza la precisión de un sistema.

# Error en régimen permanente

- Las señales E(s) y E*(s) tienen significados distintos pero podemos aplicarles tratamientos análogos.
- Si H(s) ≠ 1 podemos obtener el error verdadero E*(s) si hacemos:




- Por ello, por simplicidad vamos a trabajar de ahora en adelante utilizando únicamente la señal E(s) = R(s) – Y(s) H(s)
  - La función de transferencia del error, W(s), es decir, la relación entre el error E(s) y la entrada R(s) viene dada por:
  $$W(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s).H(s)}$$
  - Cuando H(s) = 1, W*(s) es la función de transferencia del error verdadero:
  $$W^*(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}$$

# Cálculo del error en régimen estacionario



- En los dos casos se observa que:
  - ✓ ***" La función E(s) depende de la entrada aplicada y de las características del propio sistema "***
- Como estamos interesados en el régimen estacionario, el error estacionario ($e_{ss}$) será, por el teorema del valor final:

$$e_{SS} = \lim_{S\to 0} s.E(s) = \lim_{S\to 0} s.\frac{R(s)}{1+G(s).H(s)}$$

- Para analizar el error verdadero estacionario se emplea la relación anterior teniendo en cuenta que en este caso H(s) = 1.

$$e_{SS}{}^{*} = \lim_{S\to 0} s.E(s) = \lim_{S\to 0} s.\frac{R(s)}{1+G(s)}$$

# Dependencia del error con la entrada



- El error del sistema $E(s) = \dfrac{1}{1+G_p(s)\cdot H(s)}\cdot R(s)$

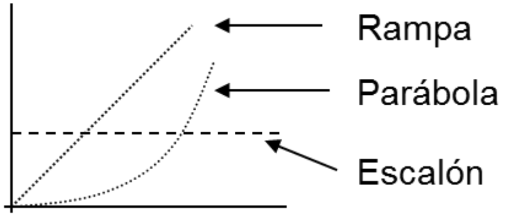
  depende de dos cosas:

  - ✓ Del sistema Gp(s) y H(s)
  - ✓ De la entrada R(s)

- Como veremos, dicho error puede aparecer para una entrada y para otra no.

- Las señales típicas de entrada para analizar un sistema son:

  - ✓ Escalón ***entrada de posición***
  - ✓ Rampa ***entrada de velocidad***
  - ✓ Parábola ***entrada de aceleración***




- Para cada una de las entradas se puede definir una constante estática de error.

# Constante de error en posición



- Para una **entrada escalón** de altura M, tenemos: $r(t) = M \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{M}{s}$

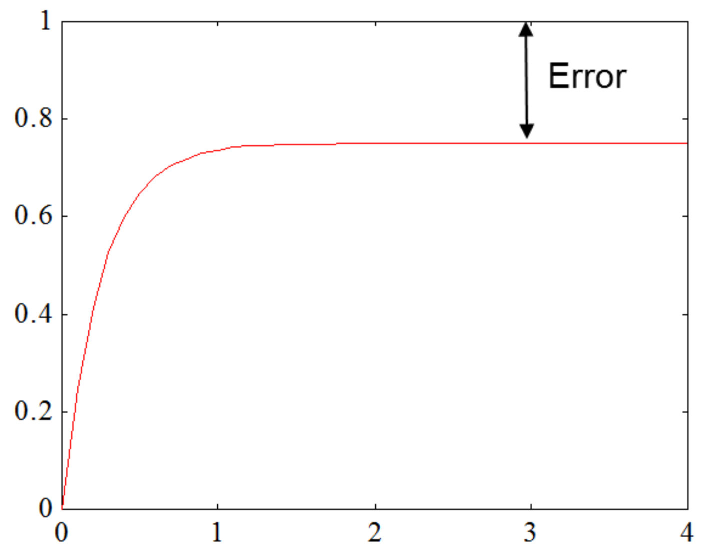
$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{R(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{1 + G(s) \cdot H(s)} \cdot \frac{M}{s} = \frac{M}{1 + \lim_{s \to 0} G(s) \cdot H(s)}$$

- Definimos **constante de error** de posición como:

$$k_p = \lim_{s \to 0} G(s) \cdot H(s)$$

- Y el **error estacionario relativo**

$$\frac{e_{ss}}{M} = \frac{1}{1 + k_p}$$



# Constante de error en velocidad



- Para una **entrada rampa** de pendiente M, tenemos: $r(t) = M \cdot t \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{M}{s^2}$

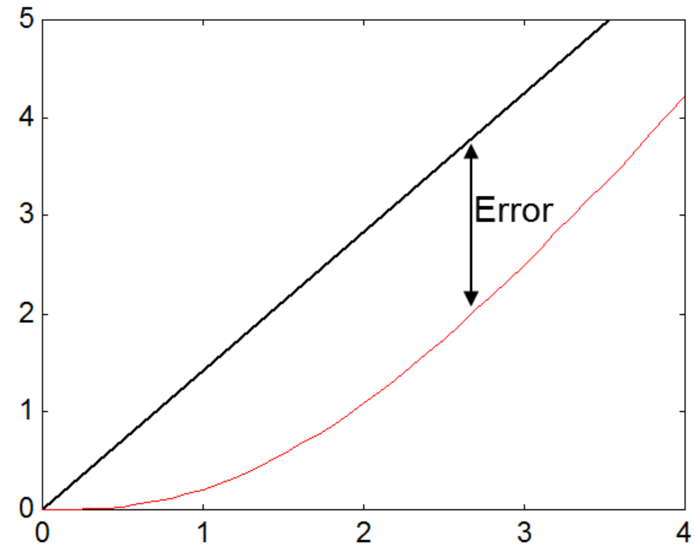
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{1+G(s)\cdot H(s)} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)\cdot H(s)} \cdot \frac{M}{s^2} = \frac{M}{\lim_{s\to 0} s \cdot G(s)\cdot H(s)}$$

- Definimos **constante de error** de velocidad como:

$$k_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot H(s)$$

- Y el **error estacionario relativo**

$$\frac{e_{ss}}{M} = \frac{1}{k_v}$$



# Constante de error en aceleración



- Para un entrada **parábola**, tenemos: $r(t) = \frac{M}{2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad R(s) = \frac{M}{s^3}$

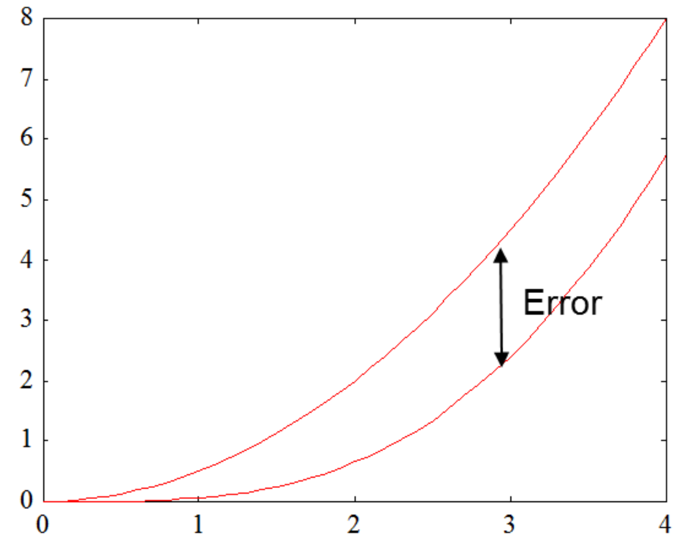
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{R(s)}{1+G(s)\cdot H(s)} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)\cdot H(s)} \cdot \frac{M}{s^3} = \frac{M}{\lim_{s\to 0} s^2 \cdot G(s)\cdot H(s)}$$

- Definimos **constante de error** de aceleración como:

$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot G(s)\cdot H(s)$$

- Y el **error estacionario relativo**

$$\frac{e_{ss}}{M} = \frac{1}{k_a}$$



# Clasificación de los sistemas por su tipo

- La función de transferencia en lazo abierto G(s)·H(s) resulta esencial para determinar las constantes de error y el error del sistema ante las distintas entradas. La forma más general de representarla es:

$$\lim_{s\to 0} G(s).H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K.\prod_{i=1}^{z}\left(\frac{s}{z_1}+1\right)}{s^n.\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{s}{z_p}+1\right)} = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^n}$$

***Valor de "n" = Tipo del sistema***

- Por tanto, tenemos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tipo 0 | $\lim_{s\to 0} G(s)H(s) = K$ | $k_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s)$ | $e_{ss} = \frac{M}{1+k_p}$ |
| Tipo 1 | $\lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s}$ | $k_v = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s)H(s)$ | $e_{ss} = \frac{M}{k_v}$ |
| Tipo 2 | $\lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{s^2}$ | $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 \cdot G(s)H(s)$ | $e_{ss} = \frac{M}{k_a}$ |

# Clasificación de los sistemas por su tipo

- El error de un sistema, frente a una entrada determinada, depende de su "Tipo".

| | Constantes | | | Error para diferentes entradas | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tipo | $k_p$ | $k_v$ | $k_a$ | Salto | Rampa | Parábola |
| 0 | K | 0 | 0 | M/(1+K) | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | $\infty$ | K | 0 | 0 | M/K | $\infty$ |
| 2 | $\infty$ | $\infty$ | K | 0 | 0 | M/K |

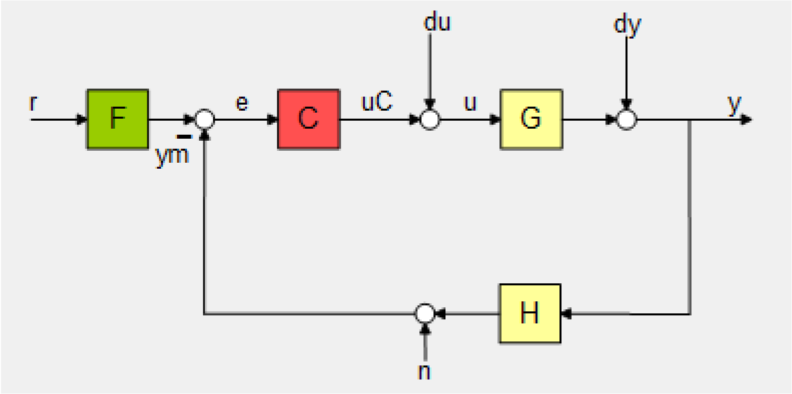
- Para entradas combinadas de tipo polinómico, aplicando el principio de superposición se obtiene el error estacionario.

- Por ejemplo, para $r(t) = A + B \cdot t + \frac{1}{2} C \cdot t^2$

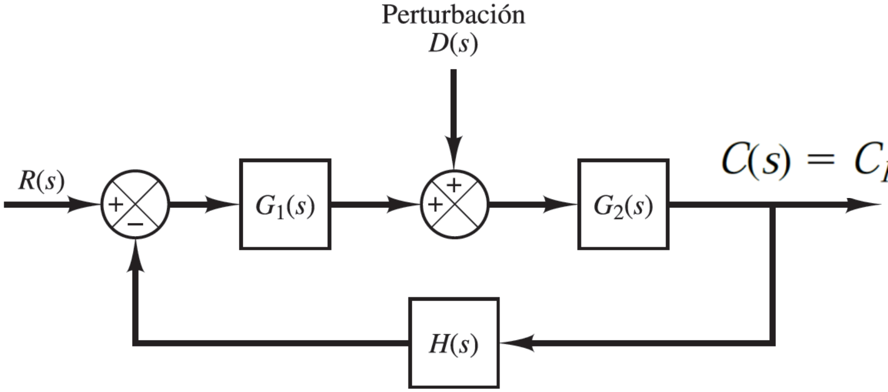
el error será: $e_{ss} = \frac{1}{1+k_p}.A + \frac{1}{K_v}.B + \frac{1}{k_a}.C$

## ¿Cómo responde un sistema de control en lazo cerrado ante la aparición de una perturbación?

Modelo *Sisotool* (MATLAB)



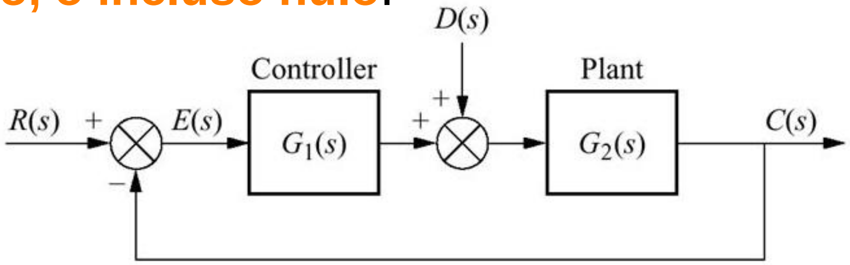

- Las perturbaciones son variaciones no deseadas de alguna señal del sistema.
- Pueden aparecer en varios sitios: antes de la planta, en la salida, tras la realimentación…
- Se modelan como entradas adicionales (du, dy, …), usando puntos de suma.
- Cuando un sistema lineal tiene dos entradas (referencia, r y perturbación), cada una de ellas puede tratarse de forma independiente (anulando la otra). Por ejemplo:




$$C(s) = C_R(s) + C_D(s) \begin{cases} \dfrac{C_R(s)}{R(s)} = \dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \\[2ex] \dfrac{C_D(s)}{D(s)} = \dfrac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \end{cases}$$

# Error frente a perturbaciones

- La ventaja de utilizar sistemas de control realimentados es que **se puede conseguir que el error del sistema debido a las perturbaciones sea muy pequeño, o incluso nulo**.
  - Si el sistema tiene con realimentación unitaria H(s) = 1, la función de error E(s) incluyendo la perturbación es:




$$E(s) = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)}R(s) - \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}D(s)$$

  - Aplicando la definición de error en estado estacionario obtenemos dos términos, uno es el error debido a R(s) y otro el error debido a la perturbación D(s):

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{s}{1+G_1(s)G_2(s)}R(s) - \lim_{s\to 0}\frac{sG_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}D(s) = e_R(\infty) + e_D(\infty)$$

  - Si la perturbación es de tipo escalón unitario D(s) = 1/s, el error en estado estacionario viene dado por:

$$\boxed{e_D(\infty) = -\frac{1}{\lim_{s\to 0}\frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s\to 0} G_1(s)}}$$

  - Por ello, **cuanto mayor sea la ganancia (DC) de $G_1(s)$ y menor sea la de $G_2(s)$, menor será el error producido por la perturbación**