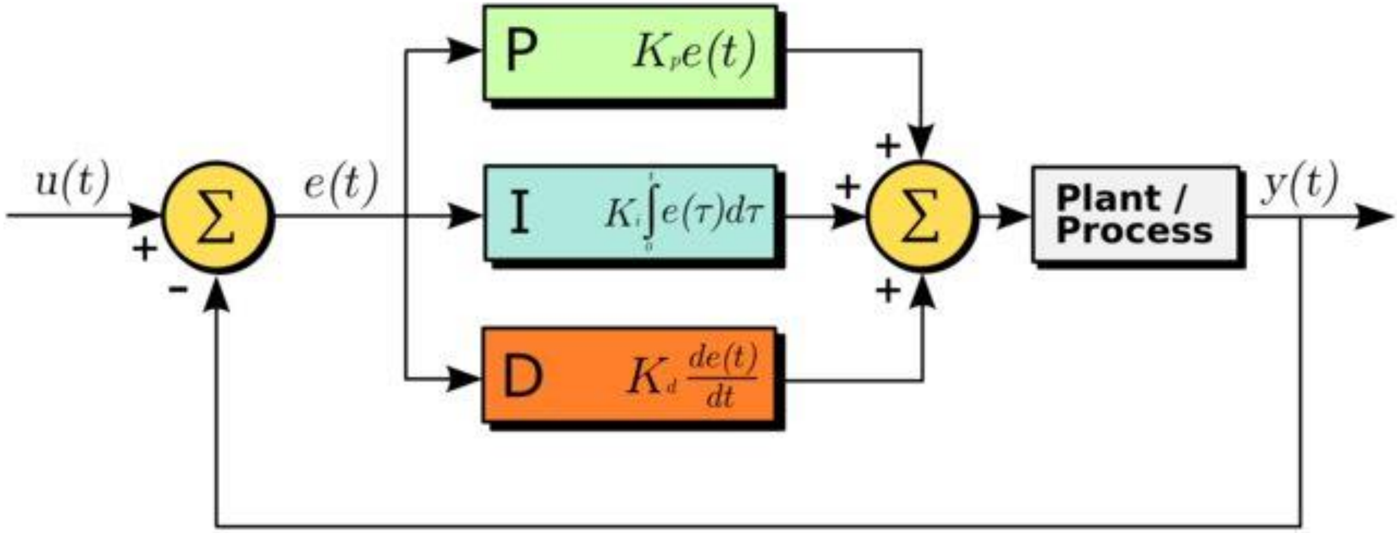
Diseño de sistemas de regulación

Diseño de reguladores mediante el método del Lugar de las Raíces

Controladores PID

Un controlador PID es un tipo de regulador o compensador que aplica una señal de control u(t) a la planta que es una combinación lineal de acciones proporcional (P), integral (I) y derivada (D) de la señal de error e(t).



Tipos:

- Proporcional (P)
- Proporcional-derivada (PD)
- Proporcional-Integral (PI)
- Proporcional-Integral-Derivada (PID)

$$u(t)=\overbrace{K_p e(t)}^{\text{Proportional}}+\overbrace{K_i\int_0^t e(\tau)d\tau}^{\text{Integral}}+\overbrace{K_d\frac{d}{dt}e(t)}^{\text{Derivative}}$$

Controladores PID

Función de transferencia del controlador PID

El algoritmo de control PID en el dominio del tiempo es:

$$u(t) = u_P(t) + u_I(t) + u_D(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \cdot \int_0^t e(t)dt + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

En el dominio de Laplace (dominio “s”), aplicando la transformada de Laplace a la expresión anterior:

$$U(s) = K_P \cdot E(s) + K_I \frac{E(s)}{s} + K_D sE(s)$$

La función de transferencia Gc(s) de un controlador PID completo es entonces:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$$

En la práctica se utiliza una única ganancia con dos constantes de tiempo (derivativa e integral):

$$G_c(s) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right) = K_P \frac{T_I T_D s^2 + T_I s + 1}{T_I s} \qquad \Leftrightarrow \qquad T_I = \frac{K_P}{K_I} \; ; \; T_D = \frac{K_D}{K_P}$$

Polo en s=0 y dos ceros en función de T_D y T_I

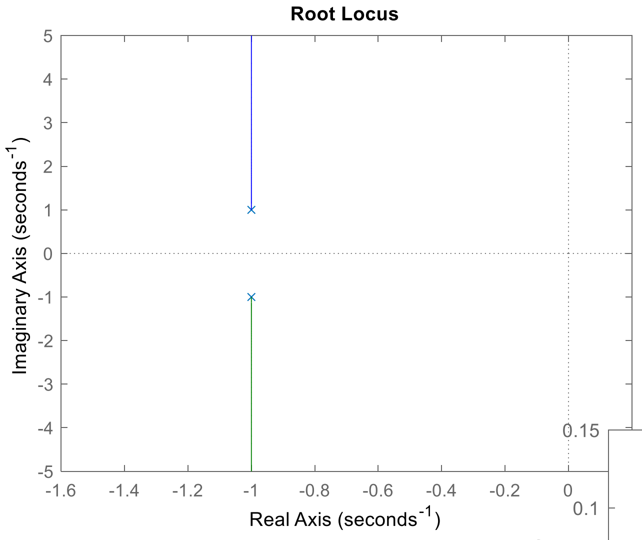
Controlador Proporcional: $T_I = \infty \quad y \quad T_D = 0 \quad \Rightarrow \quad G_c(s) = K_P$

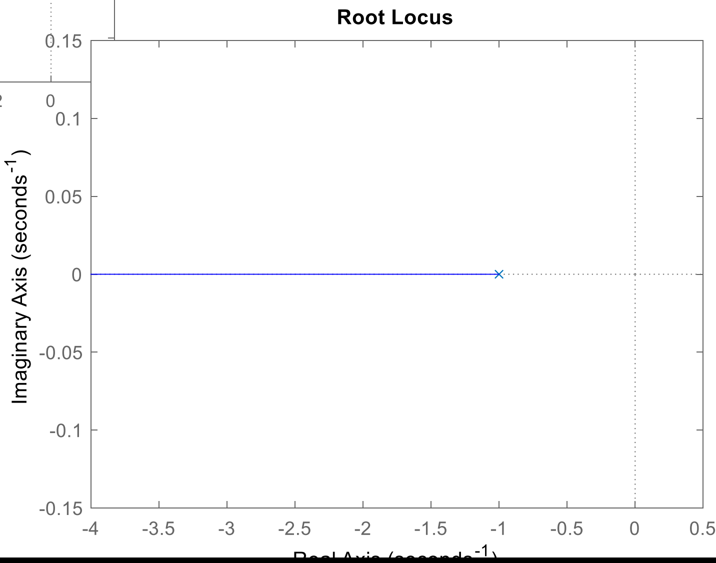
Controlador PD: $T_I = \infty \quad \Rightarrow \quad G_c(s) = K_P \cdot (1 + T_D s)$ Cero en $s = \frac{-1}{T_D}$

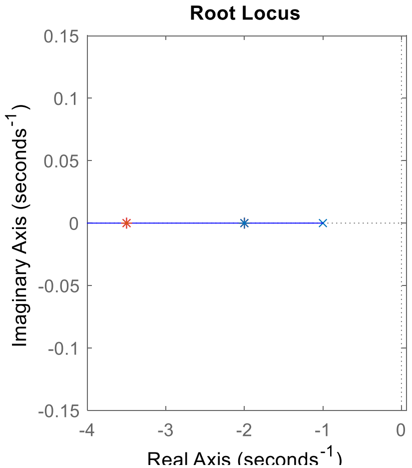
Controlador PI: $T_D = 0 \quad \Rightarrow \quad G_c(s) = K_P \cdot \frac{1+T_I s}{T_I s}$ Polo en s=0 y cero en $s = \frac{-1}{T_I}$

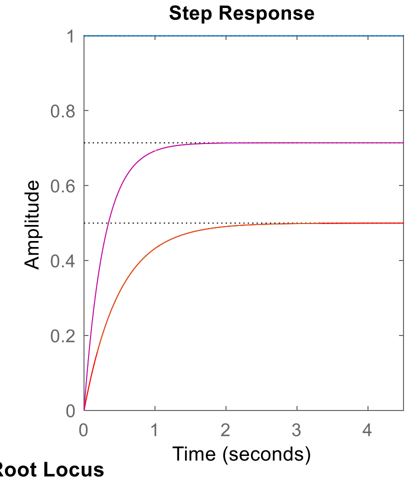
Métodos de diseño de controladores PID

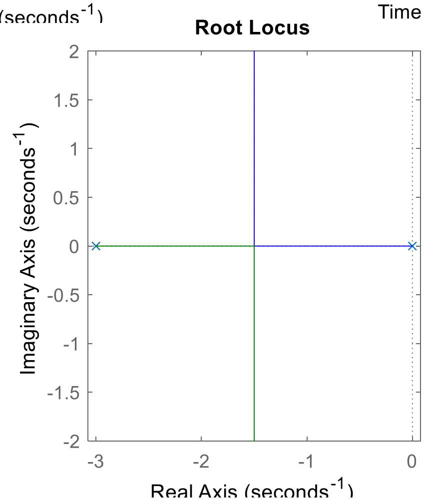
- Los métodos analíticos se basan en la modificación del LDR para lograr que la respuesta del sistema sea la requerida:
  - Respuesta transitoria: ubicación de polos dominantes
  - Respuesta estacionaria: tipo de sistema/ganancia en LA

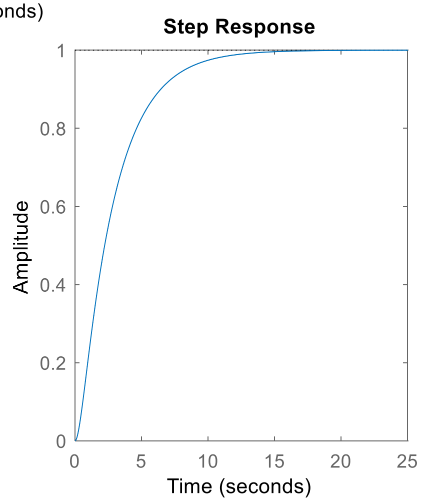












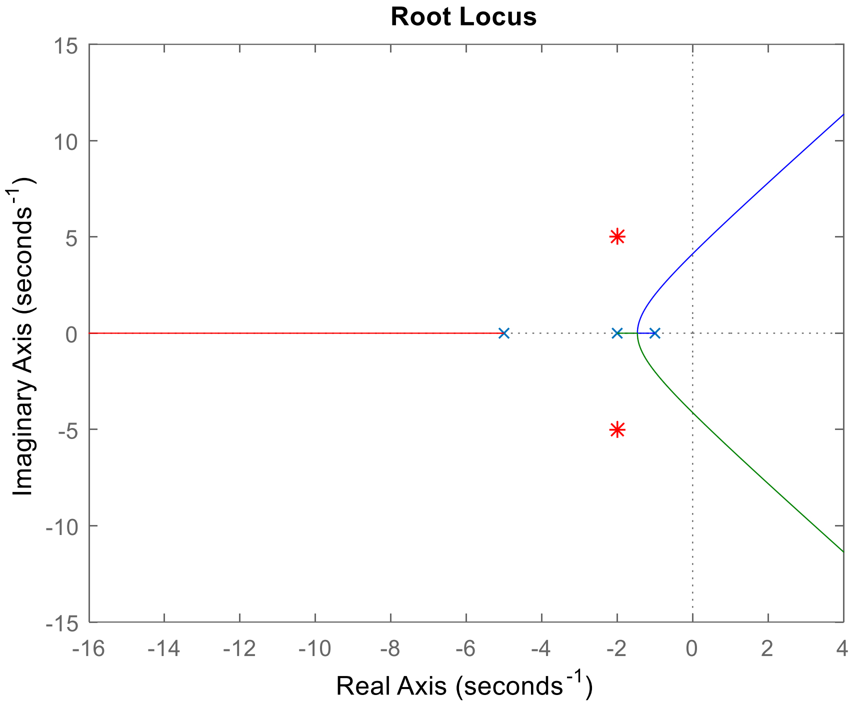
Métodos de diseño de controladores PID

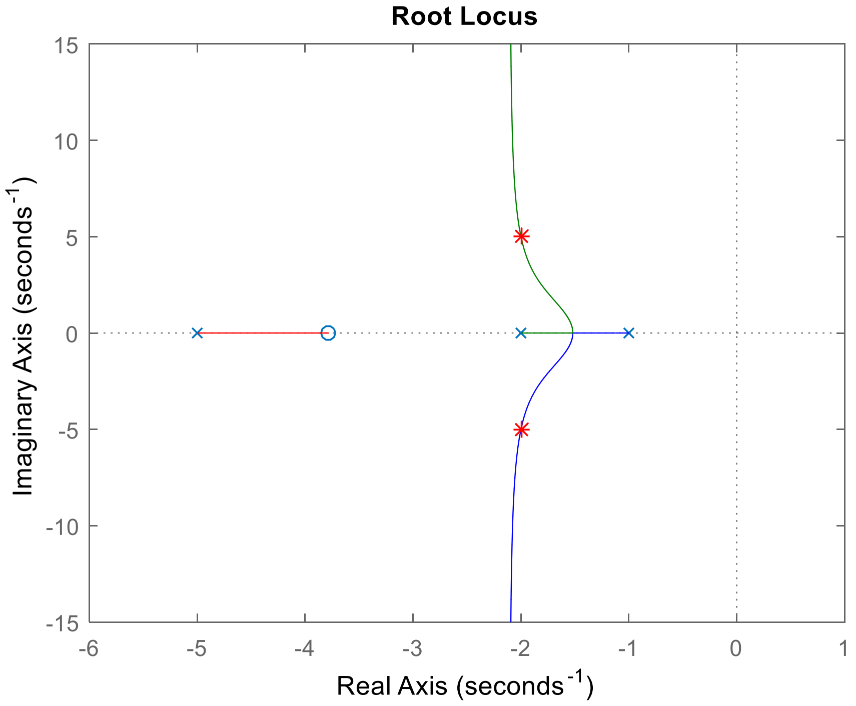
Pertenencia de los polos en LC al LDR

- Los requerimientos del comportamiento del sistema en lazo cerrado se expresan como las características de la respuesta transitoria y estacionaria
  - Respuesta transitoria: estabilidad, sobreoscilación, rapidez, etc. $\Rightarrow$ Polos (dominantes) en LC
  - Respuesta estacionaria: error en estado estacionario. $\Rightarrow$ Tipo del sistema (polos en origen)
  - La respuesta transitoria está determinada por el número y ubicación de los polos dominantes (sólo podemos calcular manualmente sistemas con una única pareja de polos dominantes)
  - El error en estado estacionario está determinado por la ganancia en LA y el tipo de sistema
- El controlador (P, PI, PD, PID) tratará de:
  - Ubicar los polos en lazo cerrado en la posición deseada para cumplir con la respuesta transitoria
  - Lograr el error en estado estacionario deseado.
- Si un punto x pertenece al lugar de las raíces
  - Criterio del argumento: $\sum\angle(x-p_i)-\sum\angle(x-z_i)=\pm180(2k+1)$
  - Criterio del módulo: $K=\dfrac{\prod|x-p_i|}{\prod|x-z_i|}$

Caso 1: Sistema no cumple los requerimientos transitorios

- La ubicación de los polos en LC no pertenecen al LDR del sistema. Es necesario modificar el LDR para hacer que los polos en LC objetivo pertenezcan al LDR ⇔ Adicción de un cero en LA (PD)





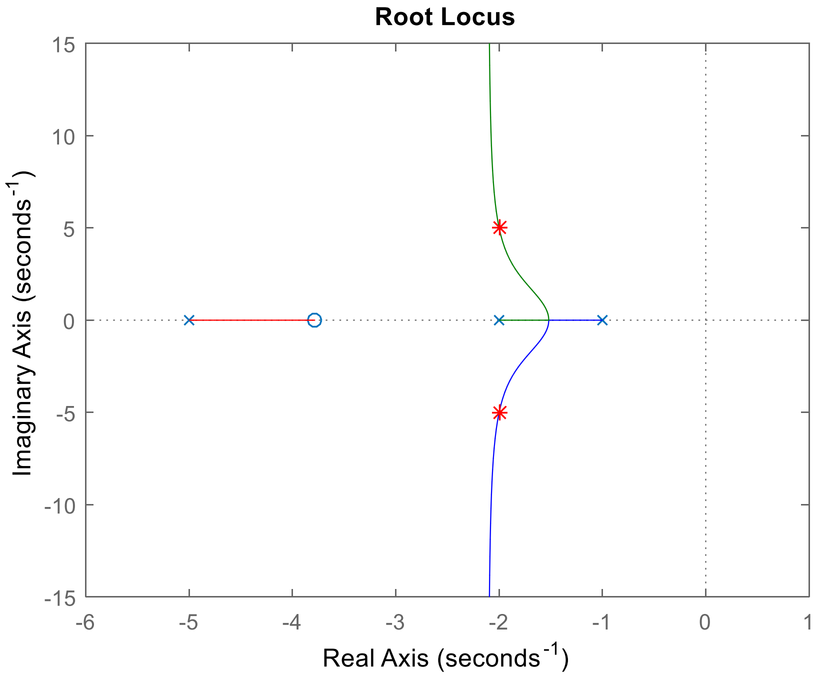
Caso 2: sistema no cumple el requisito de error en estado estacionario.

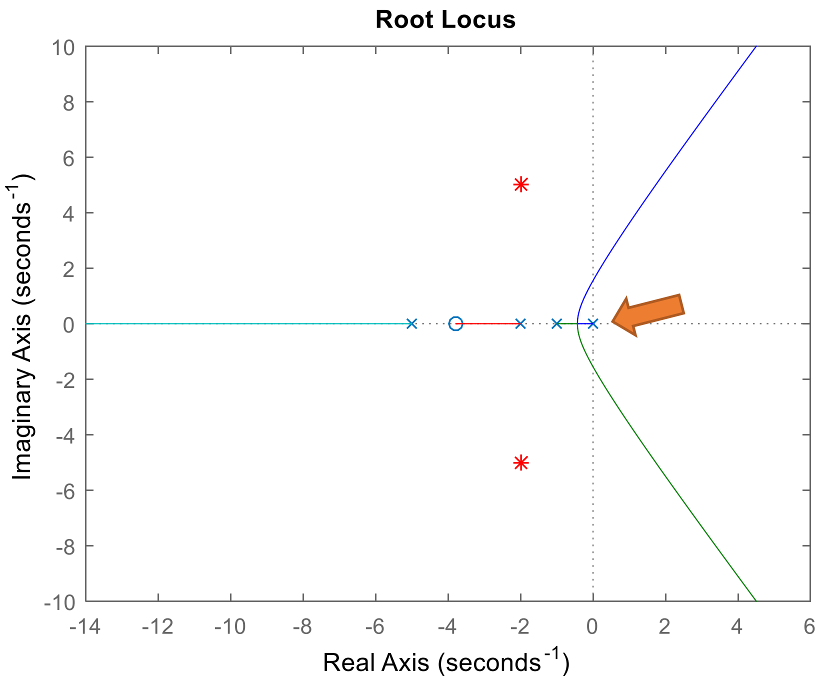
- Si el sistema cumple con los requisitos transitorios, habitualmente es necesario aumentar el tipo del sistema para anular el error (hay ocasiones en que se puede sacrificar el régimen transitorio por una mejora en el error estacionario).
- Para aumentar el tipo del sistema ⇔ Incorporar un integrador en el LA ⇔ Acción Integral (polo en el origen)

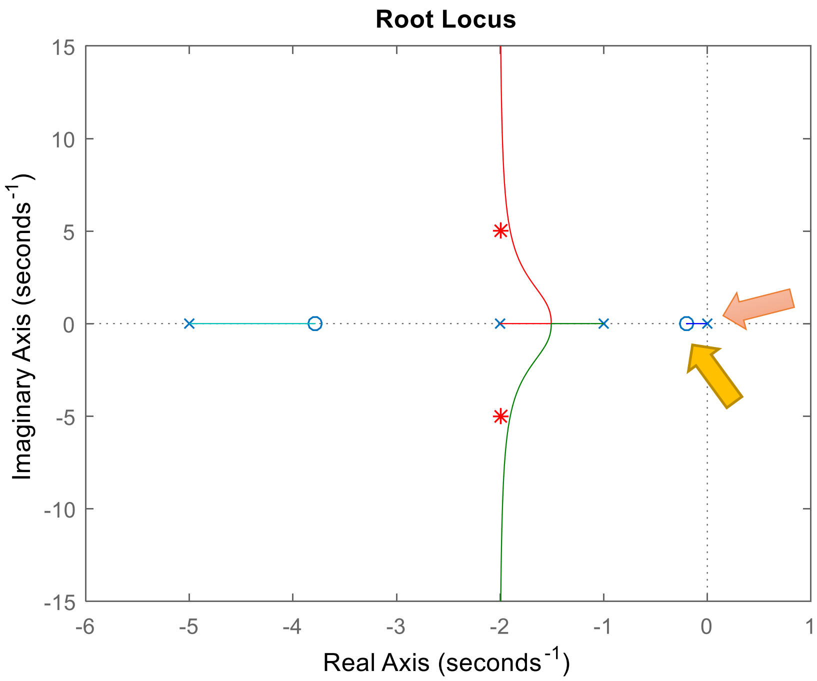
- Añadir un polo en el origen altera el LDR => modifica la respuesta transitoria
  - Se añade un polo en el origen y un cero lo más próximo posible (a 1/6 de la distancia de los polos dominantes) Dada su colocación tan cercana uno del otro, su efecto sobre el régimen transitorio prácticamente se cancela, pero sí mantiene la compensación del error en régimen estacionario.

Métodos analíticos de diseño de controladores PID

Efecto de la adición de un integrador



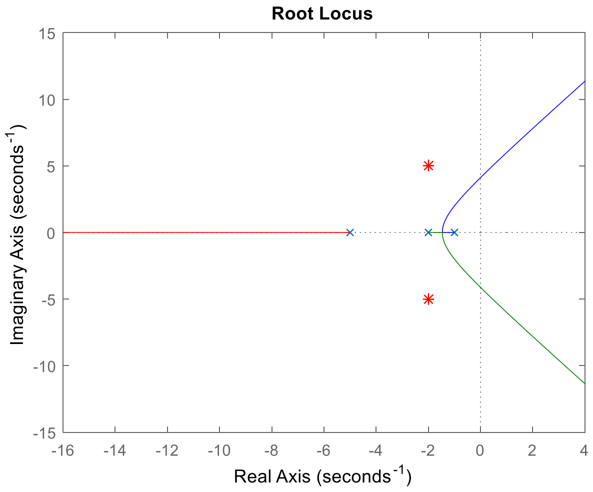


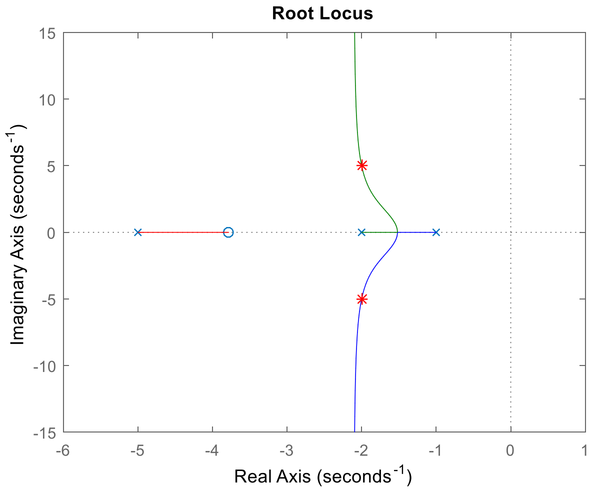


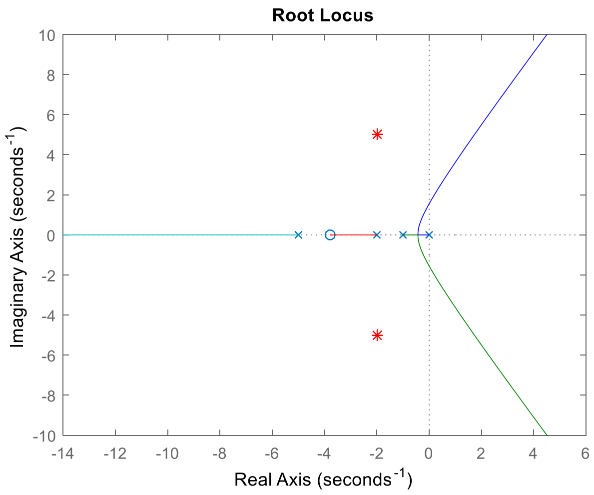
Caso general: acción (P)ID

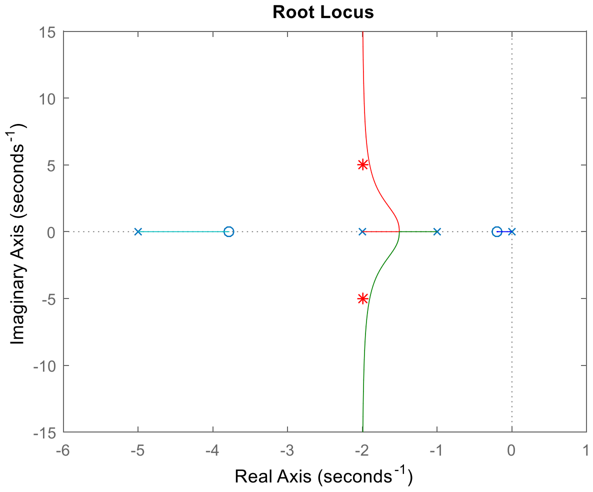
Caso 3: sistema no cumple ni régimen transitorio ni estacionario.

- Es recomendable analizar el requerimiento de error y el tipo del sistema, a fin de incorporar los polos en el origen necesarios.
- Ubicar ceros para lograr la respuesta en régimen transitorio deseada



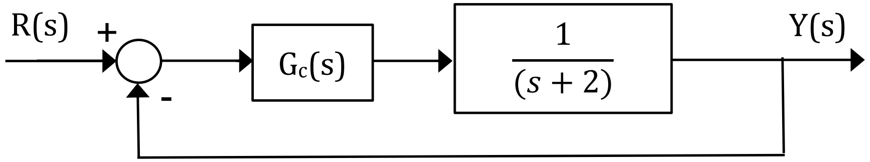


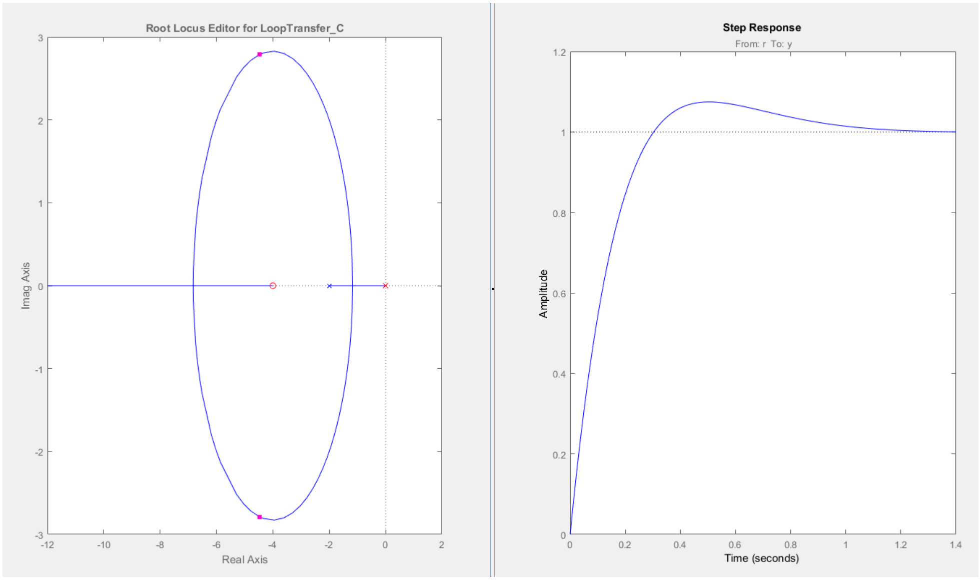


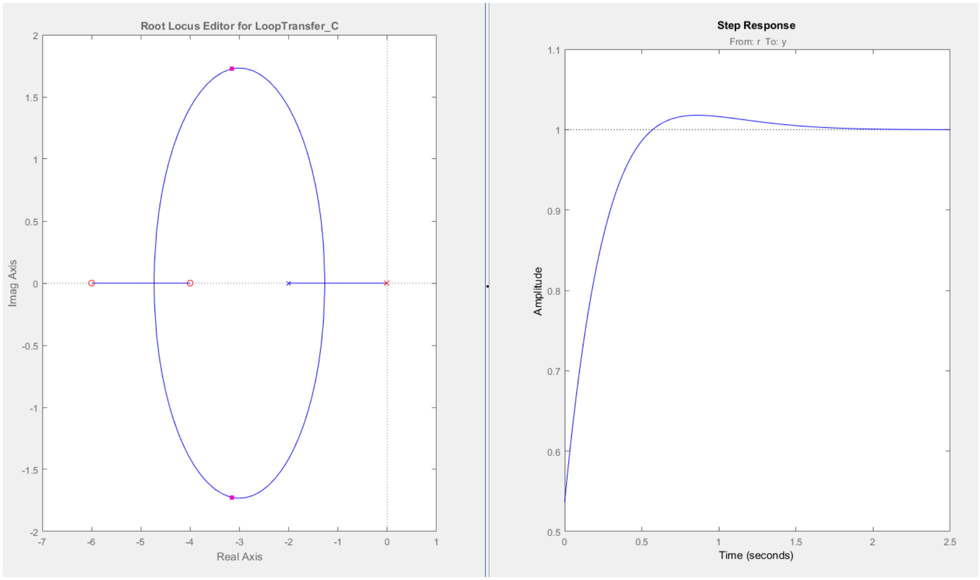


Ejemplo 1

- **Problema 5.1.** Explica y justifica si con algún controlador tipo PID (P, PD, PI o PID) se podría hacer que el sistema de la figura tuviera un comportamiento <u>subamortiguado</u> frente a una entrada escalón:



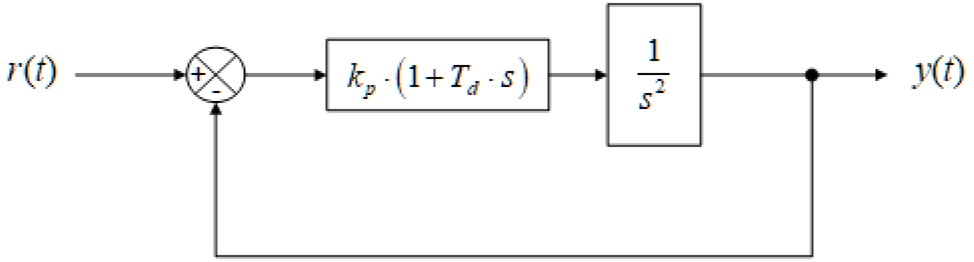




- Sistema en LA de primer orden: No sobreoscila
- <u>Controlador P</u>: No añade polos ni ceros
- <u>Controlador PD</u>: Se añade un cero (el sistema sigue siendo de primer orden)
- <u>Controlador PI</u>: Se añade un polo en el origen y un cero, por lo que el sistema pasa a ser de segundo orden (dependiendo de la posición relativa de polos y ceros en LA, los polos en LC pueden tener parte imaginaria)
- <u>Controlador PID:</u> Se añade un polo en el origen y dos ceros, el sistema también pasa a ser de segundo orden.

Ejemplo 2

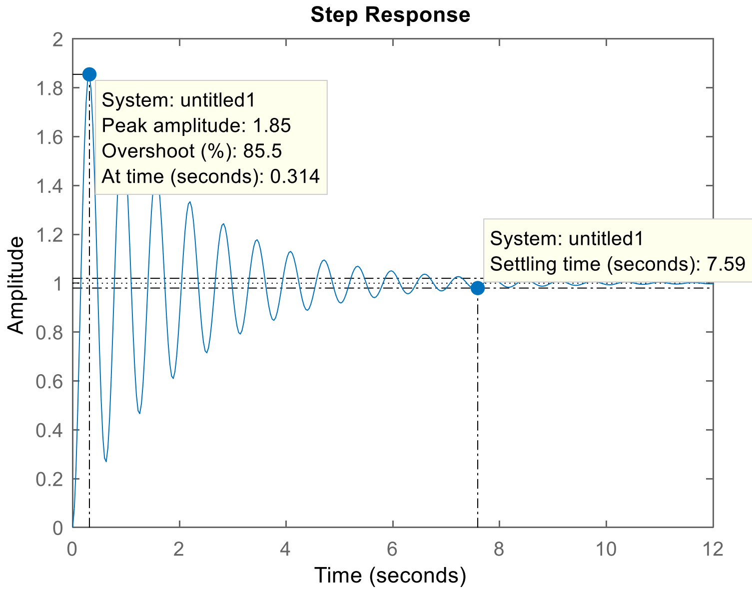
- **Problema 5.2.** Diseña un controlador tipo PD como el mostrado en la figura de modo que el error estacionario ante una entrada parábola sea de un 1% y el tiempo de asentamiento del sistema ante una entrada escalón sea de 8 s. Discute la validez del uso en el diseño de las expresiones de un sistema de 2º orden sin ceros y comprueba el resultado con MATLAB.



Error en estacionario ante parábola

$$\frac{e_{ss}}{M} = \frac{1}{k_a}$$

$$k_a = \lim_{s \to 0} s^2 \cdot G(s) \cdot H(s)$$



$$\boxed{C(s) = s + 100}$$

Comportamiento en el transitorio

- Tiempo de estabilización: $t_s \approx \frac{\pi}{\sigma}$,

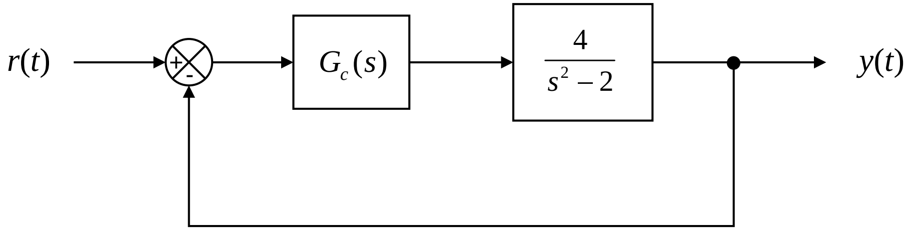
$$\boxed{G(s) = \frac{k\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

$\sigma = \zeta\omega_n$ = Factor de decrecimiento.

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ = Frecuencia amortiguada

Ejemplo 3

- **Problema 5.3.** Se quiere que el sistema de control de la figura tenga un tiempo de asentamiento t_s inferior a 1 s y una sobreelongación máxima del 20%. **a)** Utilizando las expresiones del sistema de 2º orden sin ceros, calcula el coeficiente de amortiguamiento, la frecuencia natural y la posición de los polos en lazo cerrado necesaria para cumplir los requisitos de diseño.



$$\sigma = \xi \omega_n = \text{Factor de decrecimiento.}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} = \text{Frecuencia amortiguada}$$

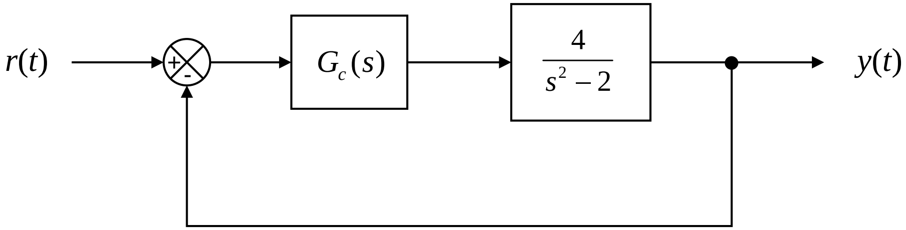
- Sobreoscilación: $M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\theta}}$

- Tiempo de estabilización: $t_s \approx \dfrac{\pi}{\sigma}$,

$$\boxed{\begin{aligned} \zeta &= 0.46 \\ \omega_n &= 8.77\ rad/s \\ p_{LC} &= -4 \pm 7.78j \end{aligned}}$$

Ejemplo 3

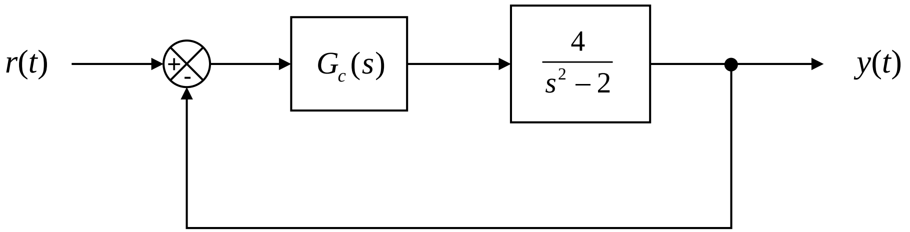
- **Problema 5.3.** Se quiere que el sistema de control de la figura tenga un tiempo de asentamiento t_s inferior a 1 s y una sobreelongación máxima del 20%. **b)** Razona, mediante el lugar de las raíces, cuál de los tres controladores (P, PI, PD) sería el adecuado para conseguir dichos requisitos.

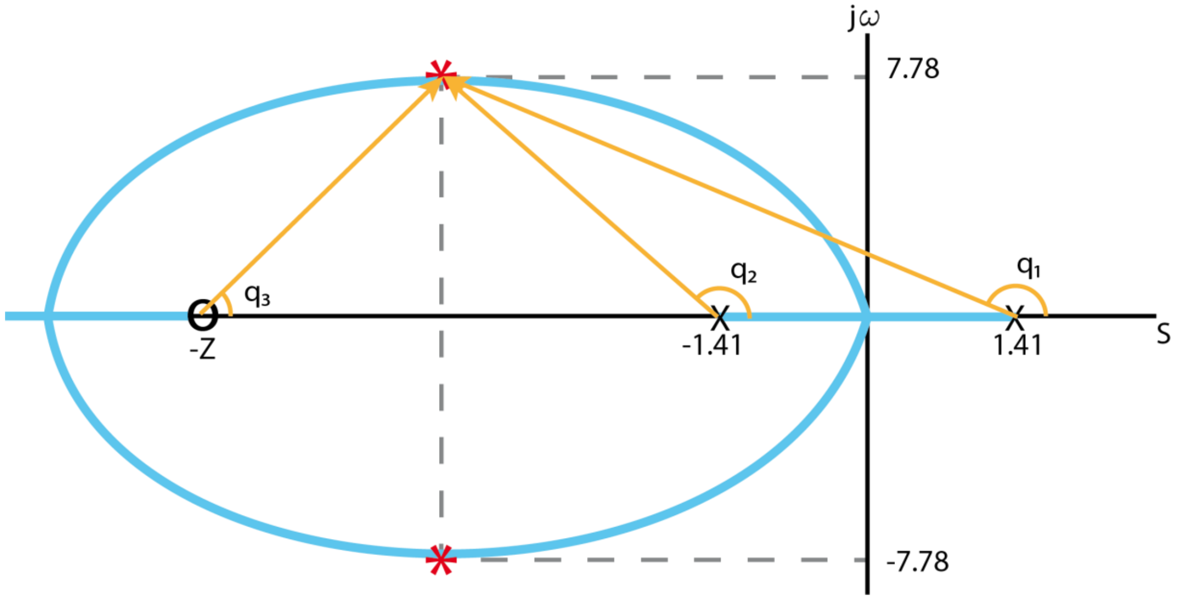


- Sistema en LA: Inestable (polo en semiplano derecho)
- <u>Controlador P</u>: Sistema siempre inestable
- <u>Controlador PI:</u> siempre inestable
- <u>Controlador PD:</u> Puede cumplir los requisitos si el cero añadido está a la izquierda de los dos polos

Ejemplo 3

- **Problema 5.3.** Se quiere que el sistema de control de la figura tenga un tiempo de asentamiento t_s inferior a 1 s y una sobreelongación máxima del 20%. **c)** Calcula mediante el criterio del módulo y del argumento cuál debería ser el controlador elegido y discute su viabilidad.





Criterio del argumento

$$q_1 = 124.81^{\circ}$$

$$q_2 = 108.41^{\circ}$$

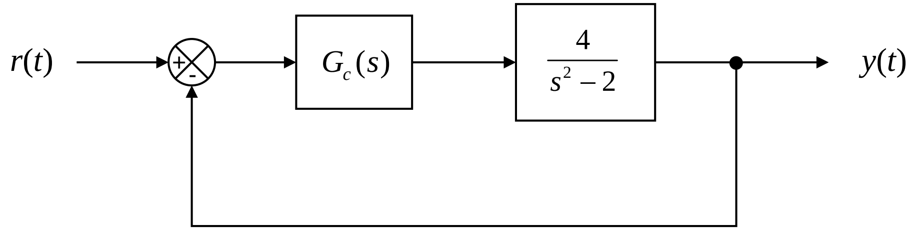
$$q_1 + q_2 - q_3 = \pm 180 \Rightarrow q_3 = 53.22 \Rightarrow z = 9.81$$

Criterio del modulo

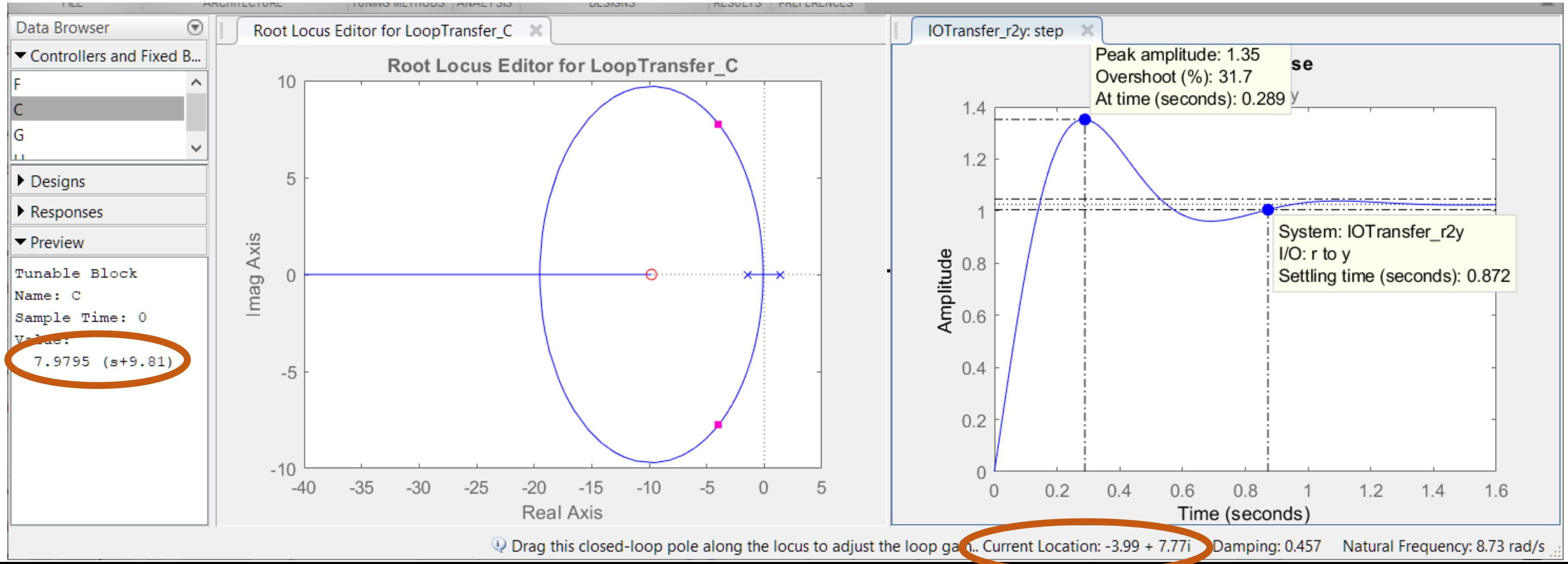
$$K = \frac{\prod |x - p_i|}{\prod |x - z_i|} = 8$$

Ejemplo 3

- **Problema 5.3.** Se quiere que el sistema de control de la figura tenga un tiempo de asentamiento t_s inferior a 1 s y una sobreelongación máxima del 20%. **c)** Calcula mediante el criterio del módulo y del argumento cuál debería ser el controlador elegido y discute su viabilidad.

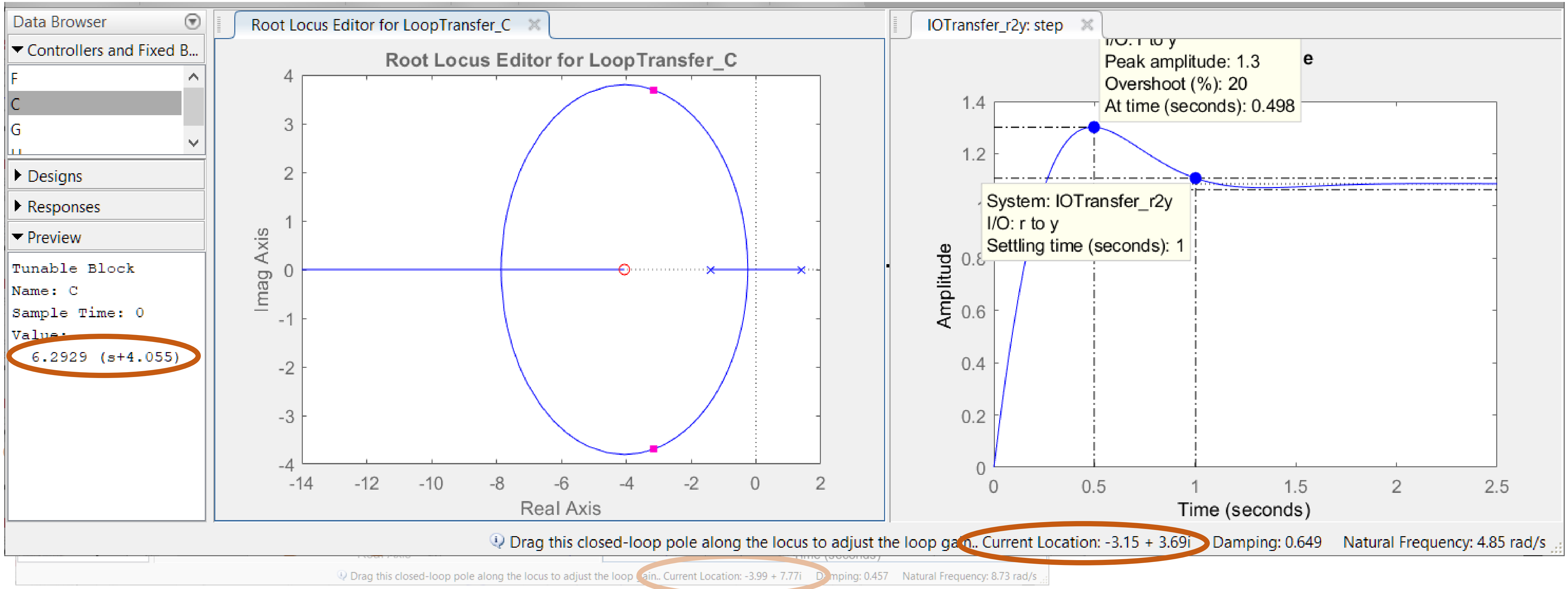


No cumple el requisito de sobrepico porque el <u>cero no es despreciable</u> frente a los polos en lazo cerrado



Ejemplo 3

- **Problema 5.3.** Se quiere que el sistema de control de la figura tenga un tiempo de asentamiento t_s inferior a 1 s y una sobreelongación máxima del 20%. **c)** Calcula mediante el criterio del módulo y del argumento cuál debería ser el controlador elegido y discute su viabilidad.



Ejemplo 4

- **Problema 5.4.** Sea una planta dada por la función de transferencia $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ Diseñar un controlador tal que el sistema opere con un factor de amortiguamiento relativo ζ=0.5, frecuencia natural 3rad/s y presente un error nulo frente a entrada escalón.

$$\left.\begin{array}{l}\sigma = \zeta\omega_n = 1.5 \\ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 2.6\end{array}\right\} P_D = -1.5 \pm 2.6j$$

Zero correspondiente al integrador: z_1=(s+0.25)

$$q_i = 180 - \arctan\left(\frac{2.6}{1.5}\right) = 119.98^o$$

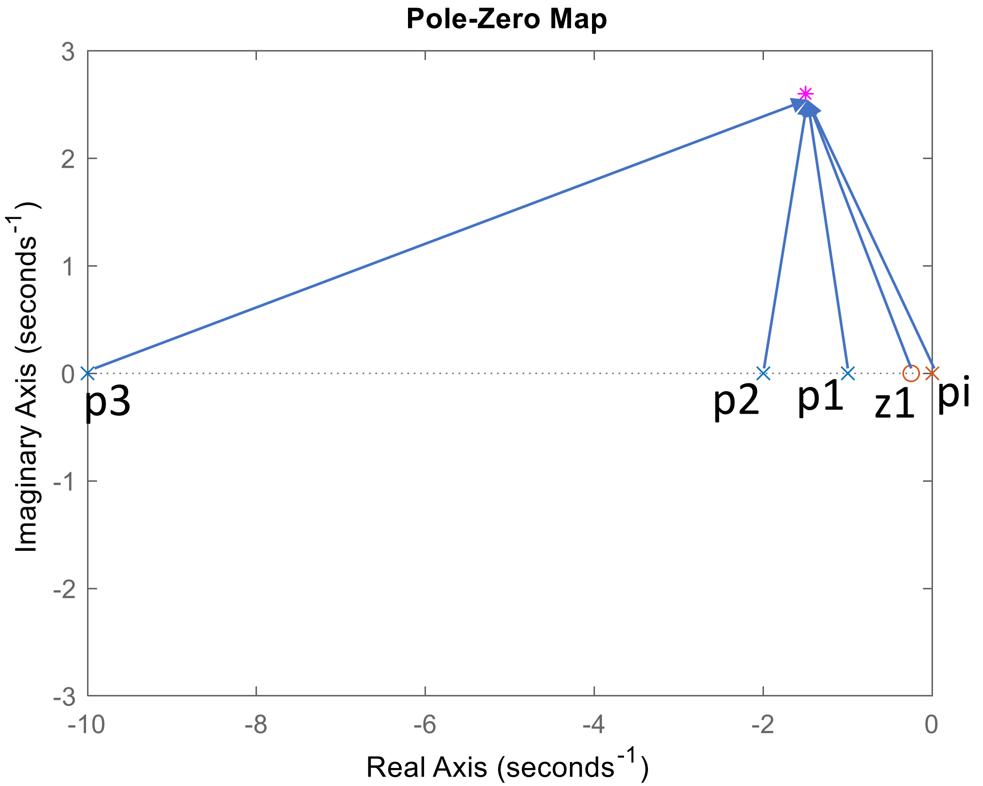
$$q_{z1} = 180 - \arctan\left(\frac{2.6}{1.5-0.25}\right) = 115.68^o$$

$$q_{p1} = 180 - \arctan\left(\frac{2.6}{1.5-1}\right) = 100.89^o$$

$$q_{p2} = \arctan\left(\frac{2.6}{2-1.5}\right) = 79.11^o$$

$$q_{p3} = \arctan\left(\frac{2.6}{10-1.5}\right) = 17^o$$

$$q_i - q_{z1} + q_{p1} + q_{p2} + q_{p3} = 201.30 \neq \pm 180$$



No se cumple el criterio del argumento, no es válido un controlador PI, **se necesita PID**

Ejemplo 4

- **Problema 5.4.** Sea una planta dada por la función de transferencia $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ Diseñar un controlador tal que el sistema opere con un factor de amortiguamiento relativo ζ=0.5, frecuencia natural 2rad/s y presente un error nulo frente a entrada escalón.

Criterio del módulo:

$$q_i + q_{p1} + q_{p2} + q_{p3} - q_{z1} - q_{z2} = \pm 180$$

$$q_{z2} = -180 + 201.3 = 21.3$$

$$\tan(q_{z2}) = \frac{2.6}{-z_2 + 1.5} \Rightarrow z_2 = -7.91$$

Criterio del argumento:

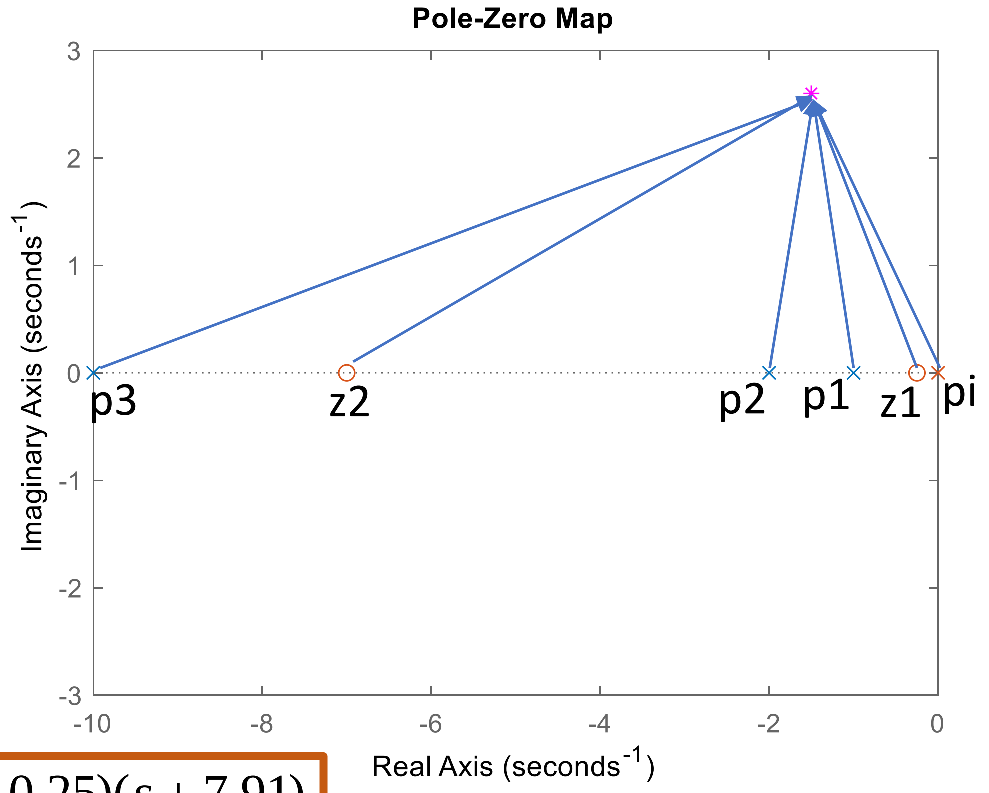
$$K = \frac{\prod d_{polos}}{\prod d_{zeros}} = \frac{d_i \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{d_{z1} \cdot d_{z2}} = 9.37$$

$$d_i = \sqrt{2.6^2 + 1.5^2}$$

$$d_1 = \sqrt{2.6^2 + (1.5-1)^2} \qquad d_{z1} = \sqrt{2.6^2 + (1.5-0.25)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{2.6^2 + (2-1.5)^2} \qquad d_{z2} = \sqrt{2.6^2 + (7.91-1.5)^2}$$

$$d_3 = \sqrt{2.6^2 + (10-1.5)^2}$$



$$\boxed{G_C(s) = 9.37\frac{(s+0.25)(s+7.91)}{s}}$$

Ejemplo 4

- **Problema 5.4.** Sea una planta dada por la función de transferencia $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+10)}$ Diseñar un controlador tal que el sistema opere con un factor de amortiguamiento relativo ζ=0.5, frecuencia natural 2rad/s y presente un error nulo frente a entrada escalón.