Universidad Rey Juan Carlos

Respuesta temporal de sistemas continuos.
Ejemplos - Respuesta Transitoria

Parámetros respuesta transitoria

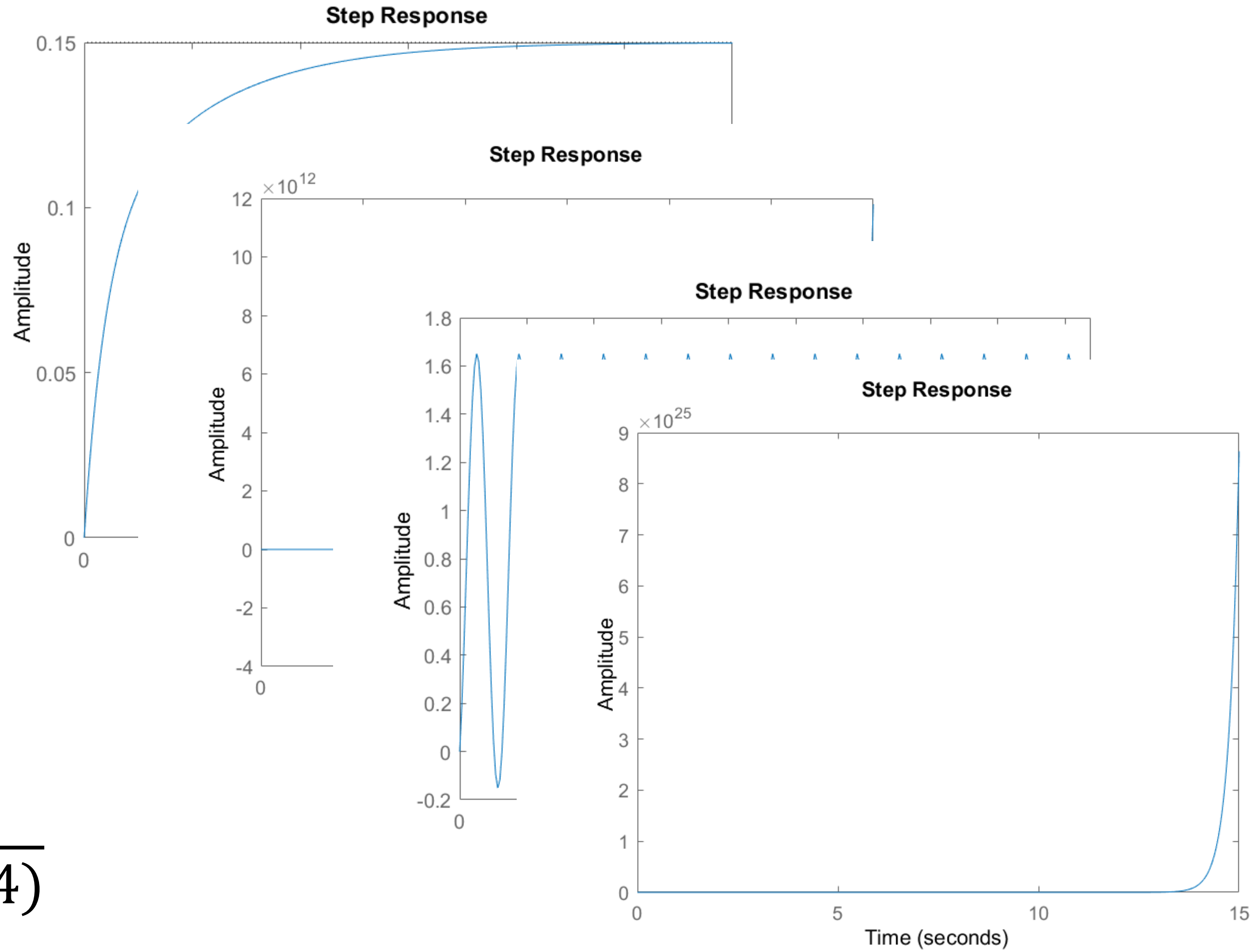
Ejemplo: Dada las siguientes funciones de transferencia determina si la estabilidad del sistema

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+10)(s+2)}$$

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2-2s+4}$$

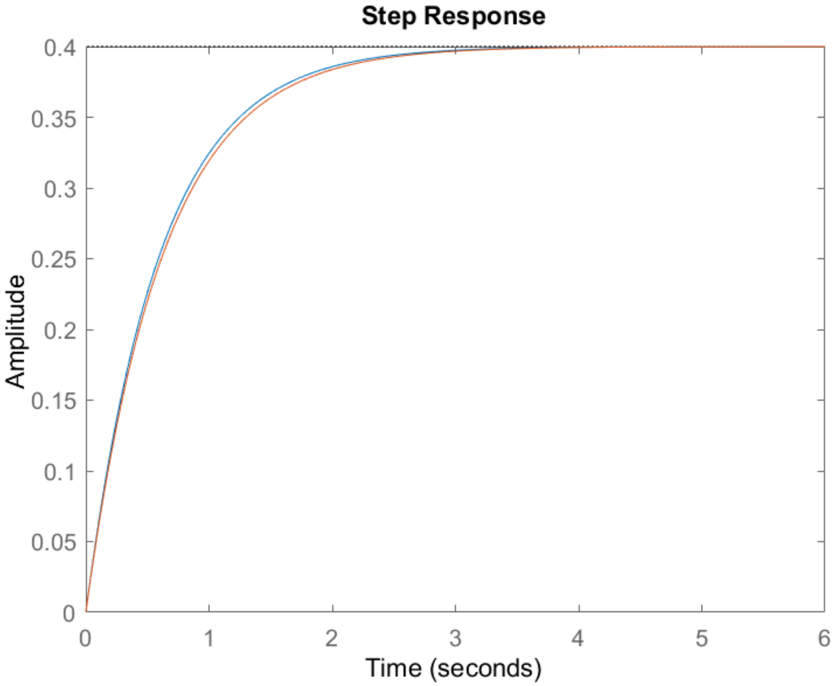
$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+4}$$

$$G(s) = \frac{s-2}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$



Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Dada la siguiente respuesta a entrada escalón unitario de un sistema, determinar la función de transferencia que lo caracteriza



$$t_s = 2.5seg \Rightarrow t_s = 4T \Longrightarrow T = \frac{2.5}{4} = 0.625s$$

$$k = 0.4$$

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1} = \frac{0.4}{0.625s+1}$$

Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Suponer un termómetro que requiere de 1 minuto para alcanzar el 98% del valor final de la respuesta frente a una entrada escalón de temperatura. Suponiendo que el termómetro es un sistema de primer orden, calcular:

a) La constante de tiempo del termómetro

$$t_s = 60seg \Rightarrow t_s = 4T \Longrightarrow T = \frac{t_s}{4} = 15s$$

$$G(s) = \frac{k}{Ts+1} = \frac{1}{15s+1}$$

Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Suponer un termómetro que requiere de 1 minuto para alcanzar el 98% del valor final de la respuesta frente a una entrada escalón de temperatura. Suponiendo que el termómetro es un sistema de primer orden, calcular:

b) Si el termómetro se coloca en un depósito cuya temperatura cambia de manera lineal a una velocidad constante de 10°C/minuto, ¿qué error mostrará el termómetro al cabo de un cierto tiempo?

$$x(t) = \frac{t}{6} \Rightarrow X(s) = \frac{1}{6s^2}$$

$$Y(s) = X(s)G(s) = \frac{1}{6s^2(15s+1)} = \frac{1}{6}\left[-\frac{15}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{15}{s+0.067}\right]$$

$$y(t) = \frac{1}{6}(-15 + t + 15e^{-0.067t})$$

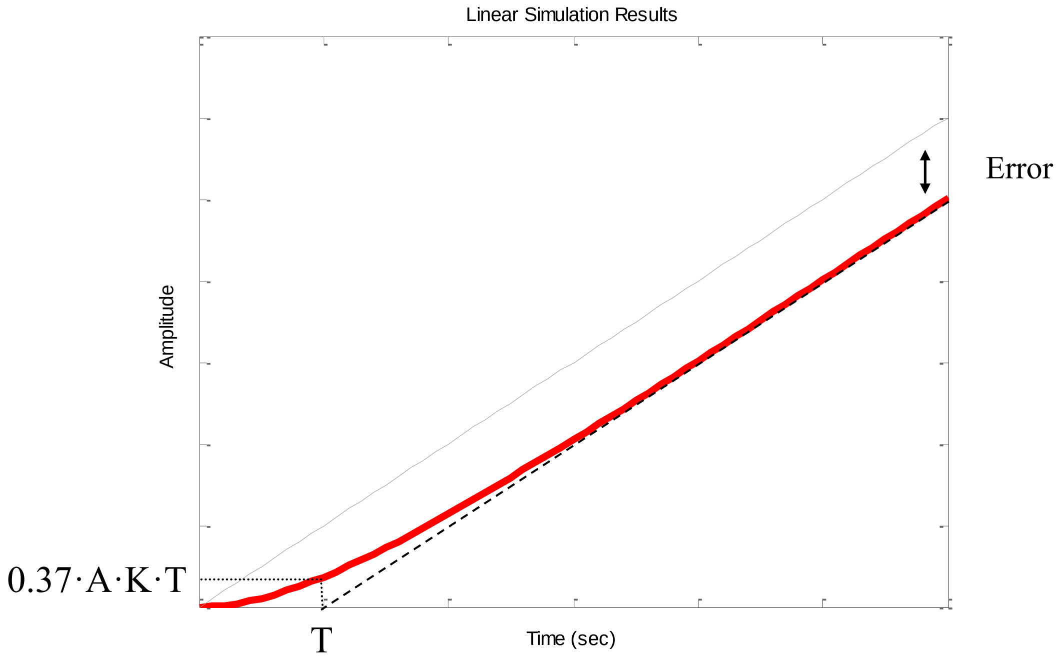
$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t) = -\frac{15}{6} + \frac{t}{6} + \frac{15e^{-0.0067t}}{6} - \frac{t}{6}$$

$$error = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = -\frac{15}{6} = -2.5º$$

Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Suponer un termómetro que requiere de 1 minuto para alcanzar el 98% del valor final de la respuesta frente a una entrada escalón de temperatura. Suponiendo que el termómetro es un sistema de primer orden, calcular:

b) Si el termómetro se coloca en un depósito cuya temperatura cambia de manera lineal a una velocidad constante de 10°C/minuto, ¿qué error mostrará el termómetro al cabo de un cierto tiempo?



$$Error = \frac{10º}{min} * 0.25min = 2.5º$$

Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Estudia el comportamiento de los siguientes sistemas de segundo orden

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$ Sobreamortiguado

$$G_2(s) = \frac{1}{(s+2+2j)(s+2-2j)}$$ Subamortiguado

$$G_3(s) = \frac{1}{(s-4+2j)(s-4-2j)}$$ Inestable

$$G_4(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$ Criticamente amortiguado

$$G_5(s) = \frac{1}{(s+2+2j)(s-2-2j)}$$ Sistema imposible

$$G_6(s) = \frac{1}{(s-4j)(s+4j)}$$ Criticamente estable

Parámetros respuesta transitoria

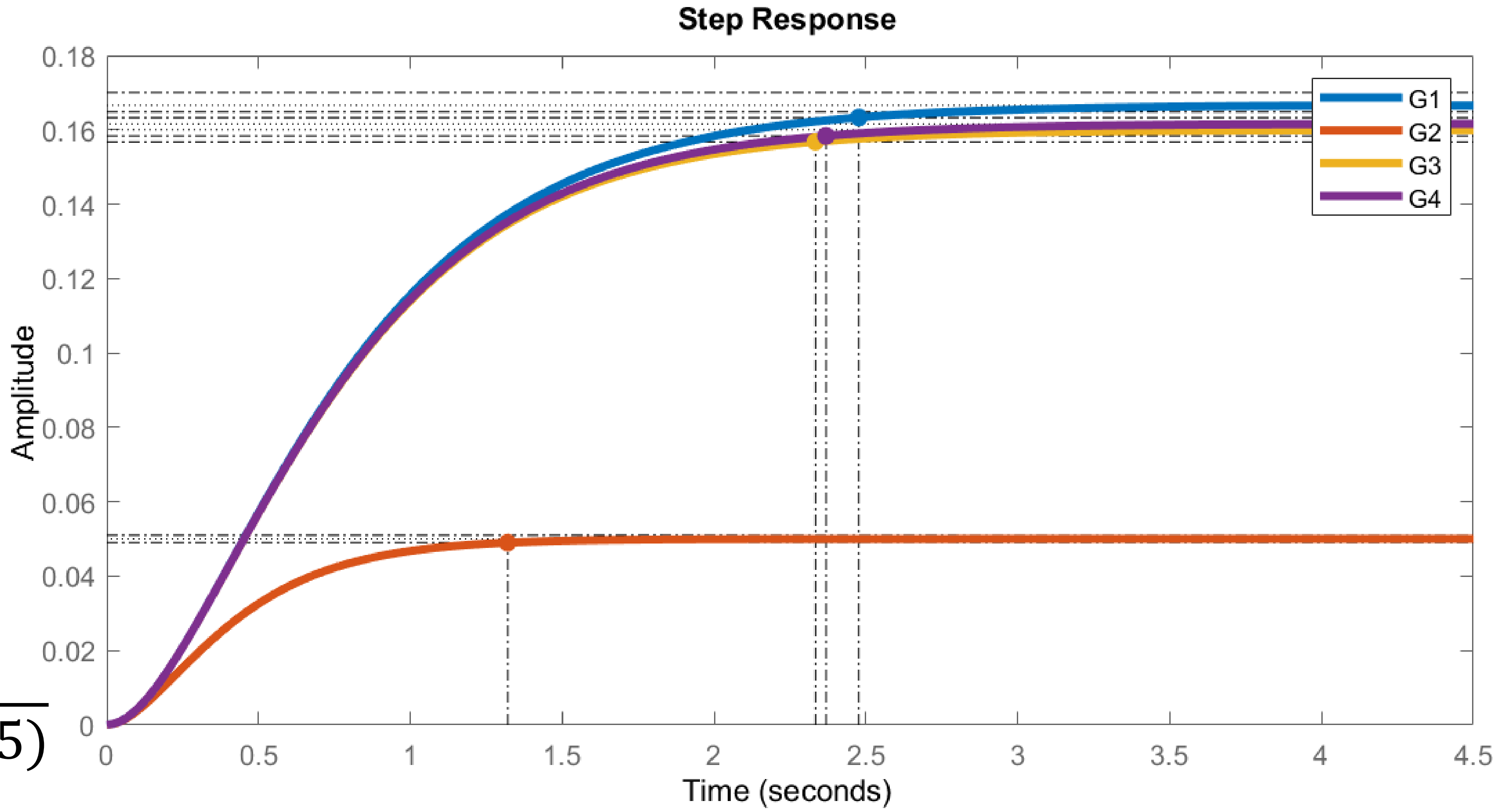
<u>Ejemplo</u>: Compara cualitativamente los siguientes sistemas en términos de oscilación, rapidez y valor final

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s+4)(s+5)}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+2.5)^2}$$

$$G_4(s) = \frac{1}{(s+2.25)(s+2.75)}$$



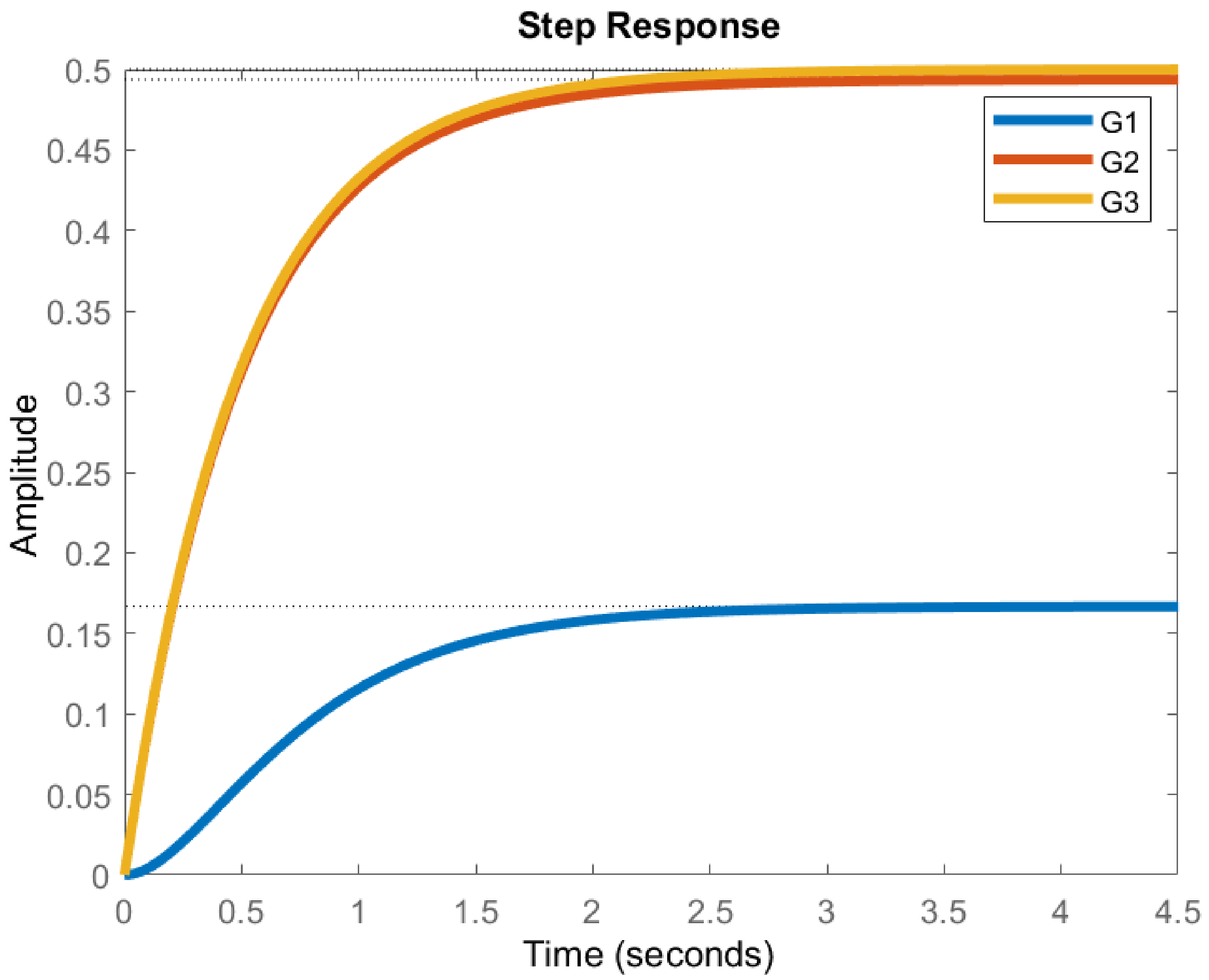
Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Compara cualitativamente los siguientes sistemas en términos de oscilación, rapidez y valor final

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$G_2(s) = \frac{(s+7.9)}{(s+2)(s+8)}$$

$$G_3(s) = \frac{1}{(s+2)}$$

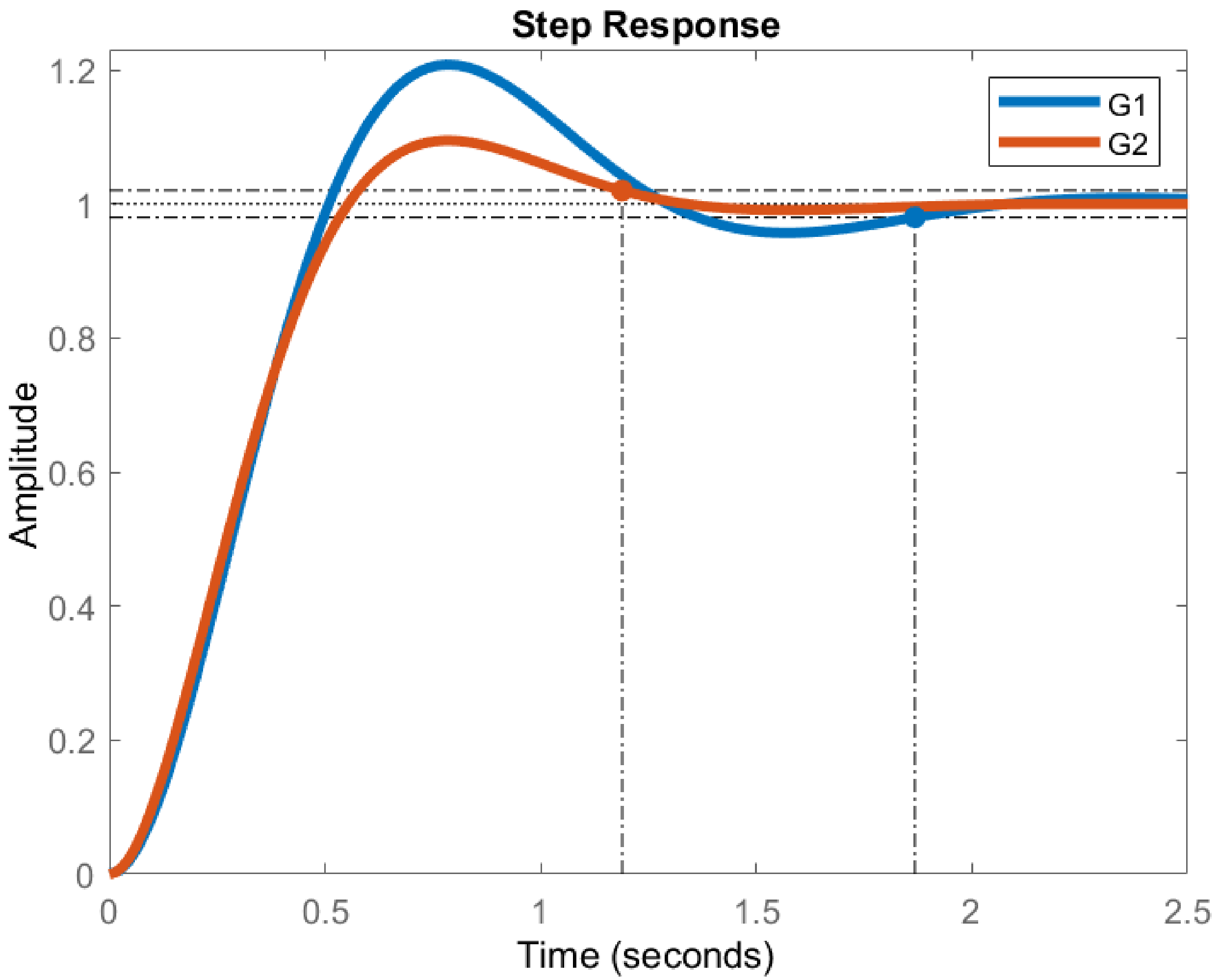


Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Compara cualitativamente la siguiente pareja de sistemas en términos de oscilación, rapidez y valor final

$$G_1(s) = \frac{20}{(s+2+4j)(s+2-4j)}$$

$$G_2(s) = \frac{25}{(s+3+4j)(s+3-4j)}$$

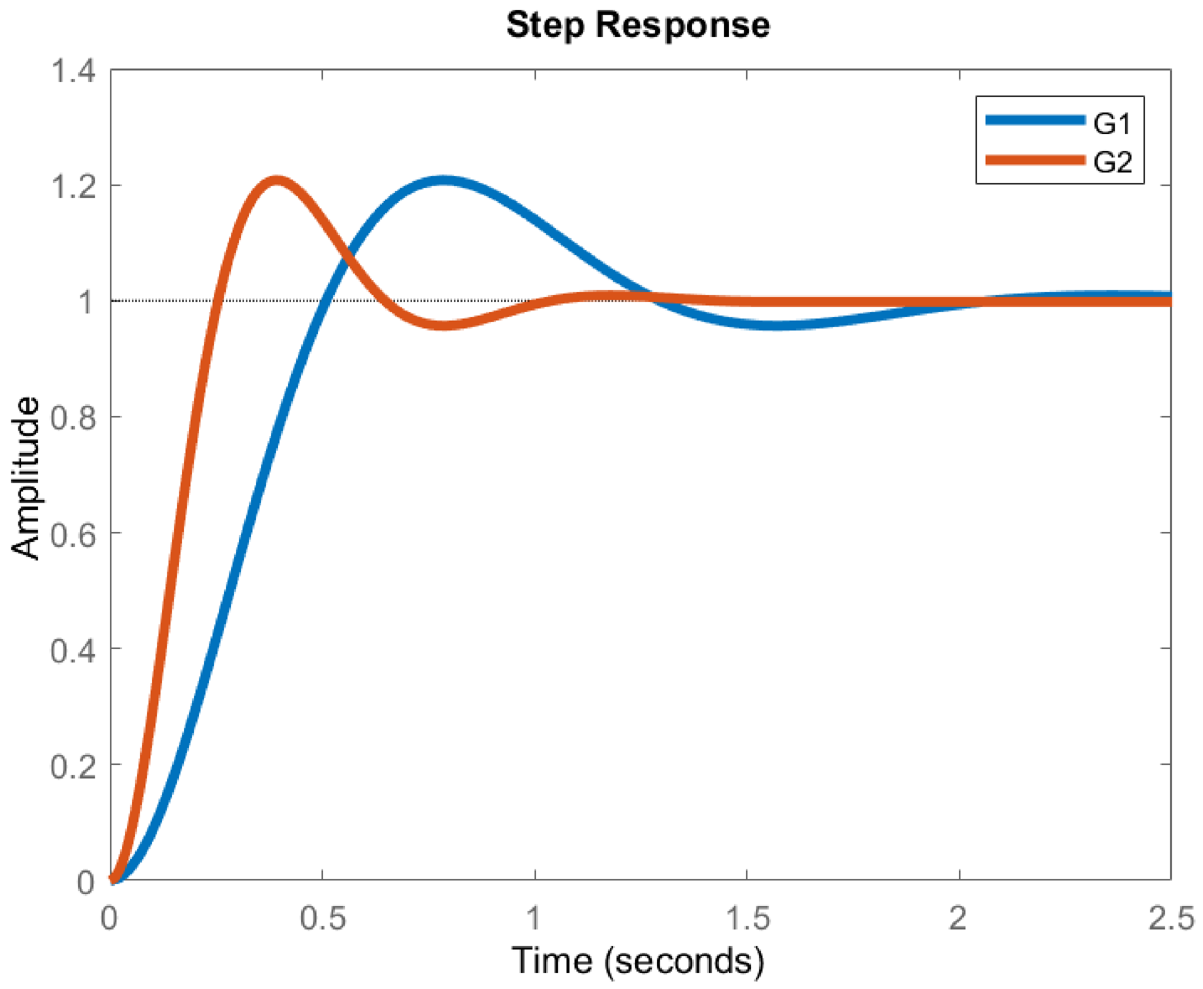


Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Compara cualitativamente la siguiente pareja de sistemas en términos de oscilación, rapidez y valor final

$$G_1(s) = \frac{20}{(s+2+4j)(s+2-4j)}$$

$$G_2(s) = \frac{80}{(s+4+8j)(s+4-8j)}$$

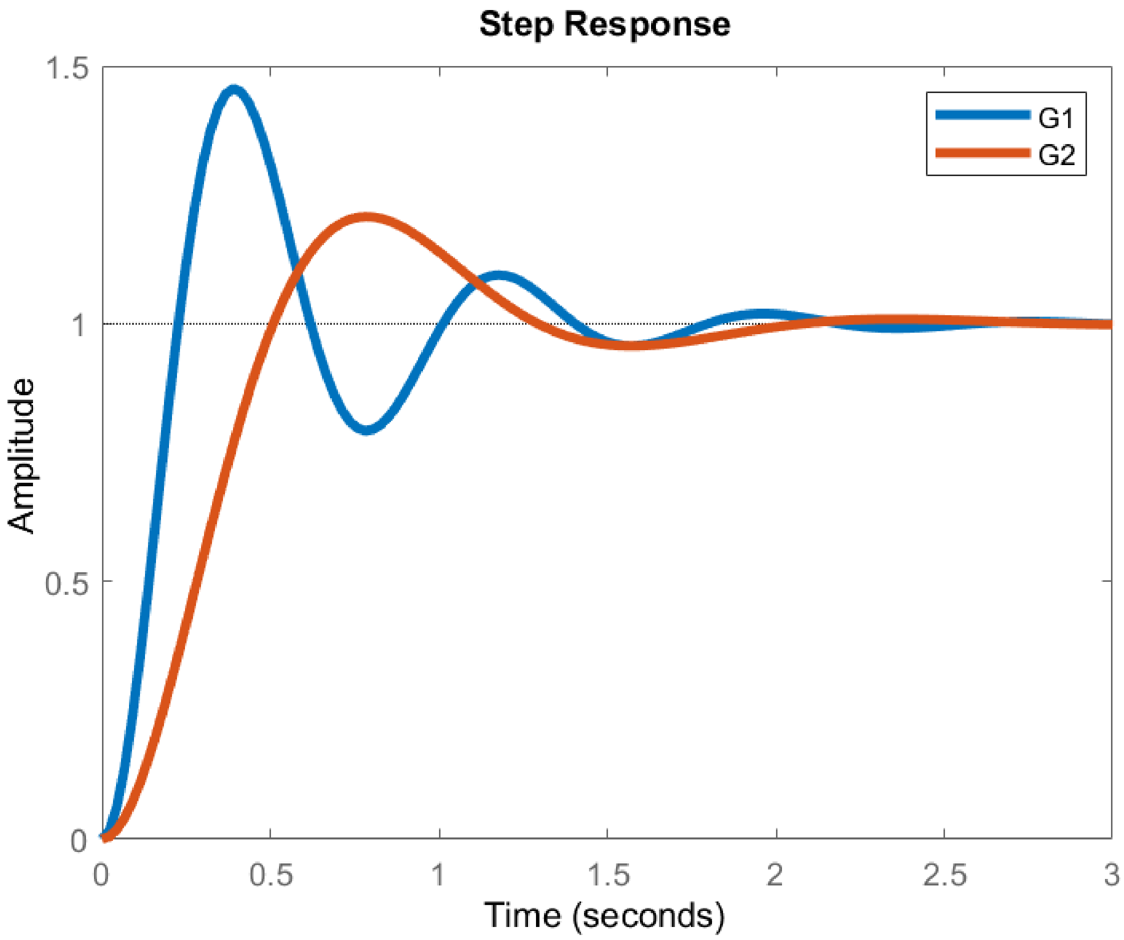


Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Compara cualitativamente la siguiente pareja de sistemas en términos de oscilación, rapidez y valor final

$$G_1(s) = \frac{68}{(s+2+8j)(s+2-8j)}$$

$$G_2(s) = \frac{20}{(s+2+4j)(s+2-4j)}$$



Parámetros respuesta transitoria

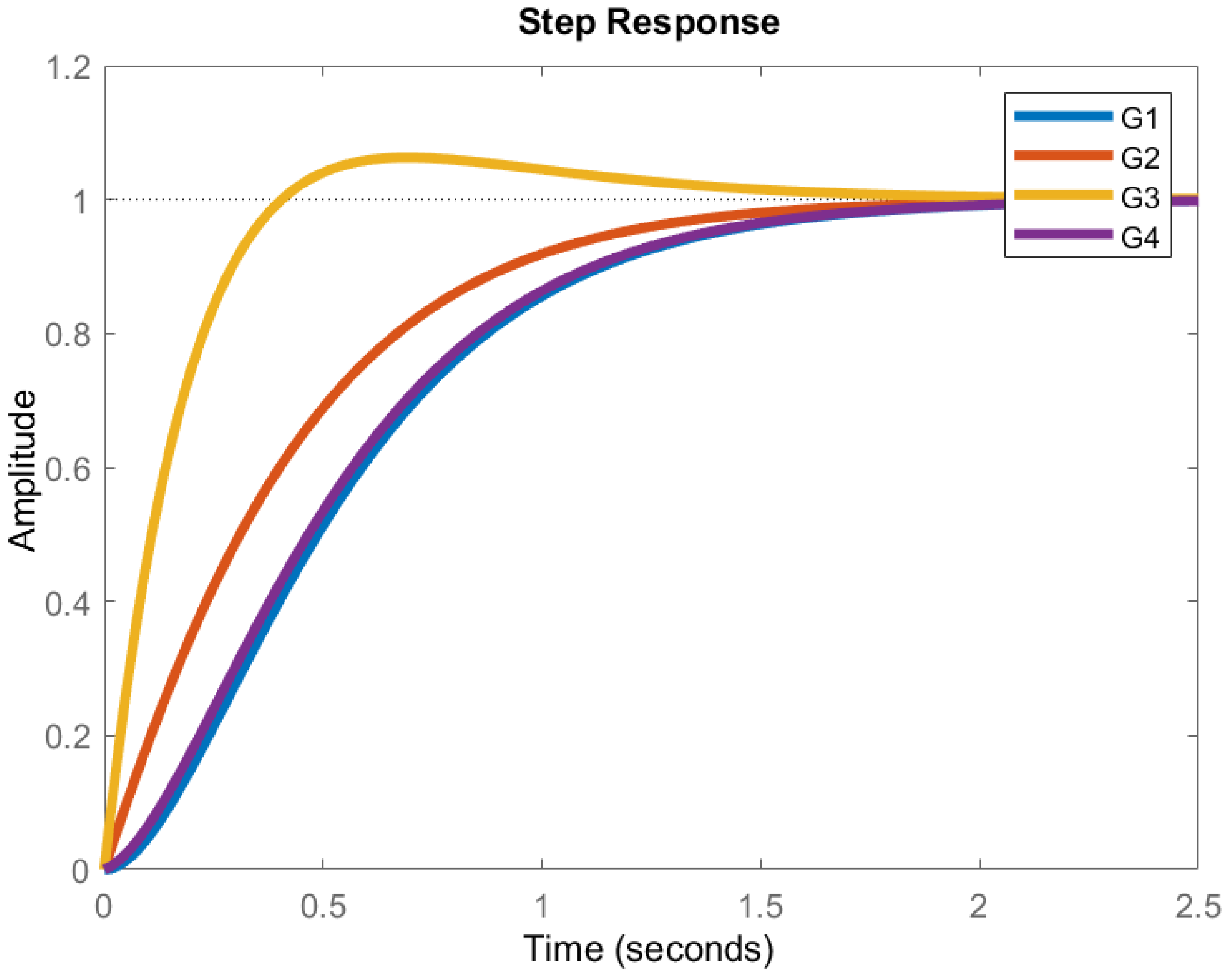
Ejemplo: Compara cualitativamente los siguientes sistemas en términos de oscilación, rapidez y valor final

$$G_1(s) = \frac{12}{(s+3)(s+4)}$$

$$G_2(s) = \frac{2(s+6)}{(s+3)(s+4)}$$

$$G_3(s) = \frac{6(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

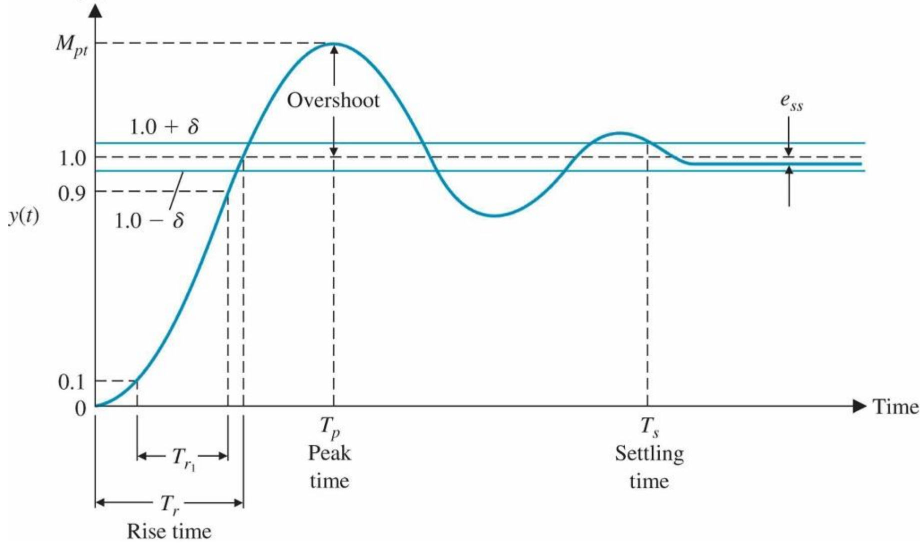
$$G_4(s) = \frac{0.5(s+24)}{(s+3)(s+4)}$$



Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Obtener el tiempo de subida, de pico y de asentamiento y la sobreelongación del sistema G(s) realimentado negativa y unitariamente ante una entrada escalón

- Tiempo de estabilización: $t_s \approx \frac{\pi}{\sigma}$, $(recordar \quad \sigma = \zeta\omega_n)$
  (o "tiempo de asentamiento")
- Tiempo de subida: $t_r \approx \frac{\pi - \vartheta}{\omega_d}$, $(recordar \quad \vartheta = \cos^{-1}(\zeta))$
- Tiempo de pico: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ $(recordar \quad \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$
- Sobreoscilación: $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\operatorname{tg}\theta}}$
  ("valor de pico" o "sobreelongación")
  (menor ζ, amortiguamiento, mayor sobreoscilación)



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G_{LC}(s) = \frac{1}{s^2+s+1} \Leftrightarrow G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = 1\text{rad} \\ \zeta = 0.5 \end{cases}$$

$$\theta = \operatorname{acos}(\xi) = 60°; \ \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.86;$$

$$Tr = \frac{\pi-\theta}{\omega_d} = 2.42\ seg; \quad Tp = \frac{\pi}{\omega_d} = 3.63\ seg;$$

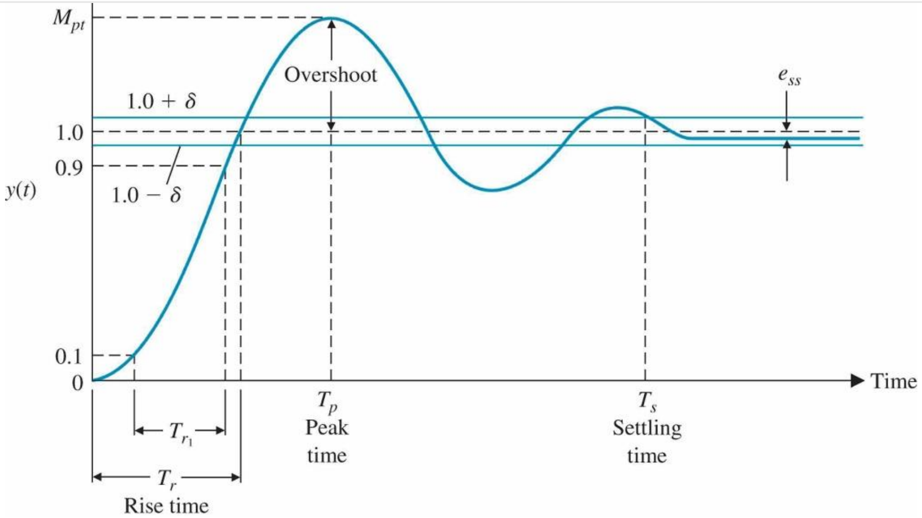
$$Mp = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.163 = 16.3\%; \quad Ts = \frac{\pi}{\sigma} = \frac{\pi}{\omega_n\xi} = 6.28\ seg$$

Parámetros respuesta transitoria

Ejemplo: Considerando un sistema general de segundo orden, determinar los valores de amortiguamiento relativo y frecuencia natural para que el sistema responda a una entrada escalón con sobreelongación de 5% y tiempo de asentamiento de 2 segundos.

- Tiempo de estabilización: $t_s \approx \frac{\pi}{\sigma}$, (recordar $\sigma = \zeta\omega_n$)
  (o "tiempo de asentamiento")
- Tiempo de subida: $t_r \approx \frac{\pi - \vartheta}{\omega_d}$, (recordar $\vartheta = \cos^{-1}(\zeta)$)
- Tiempo de pico: $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$ (recordar $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$)
- Sobreoscilación: $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\mathrm{tg}\,\theta}}$
  ("valor de pico" o "sobreelongación")

  (menor ζ, amortiguamiento, mayor sobreoscilación)



$$M_P = e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}} \Rightarrow \frac{-\pi}{\tan\theta} = \ln(M_P) \Rightarrow \tan\theta = \frac{-\pi}{\ln(M_P)}$$

$$\theta = 0.81 \Rightarrow \zeta = \cos(\theta) = 0.69$$

$$t_s = \frac{\pi}{\sigma} = \frac{\pi}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{t_s\zeta} = 2.28\text{rad}$$