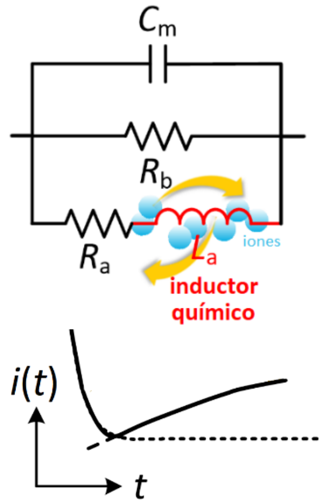
Ejercicio 1: Modelado transitorio de sistemas en el dominio del tiempo (3,75 puntos)

La bobina, descubierta por Faraday, es un elemento eléctrico básico en el análisis de circuitos electromagnéticos. Se sabe que la corriente *i(t)* que circula a través de una inductancia *L* genera una caída de tensión *v(t)* que se opone al aumento de corriente, como: $v(t)=L\,{}^{di(t)}/_{dt}$. Este comportamiento tan típico en electricidad, también se encuentra en sistemas de origen físico y no electromagnético, debido a movimientos iónicos anómalos (véase figura). De ahí que surja el concepto de "inductor químico". Por tanto, un análisis en profundidad del comportamiento de este componente es altamente demandado en diferentes áreas multidisciplinares.

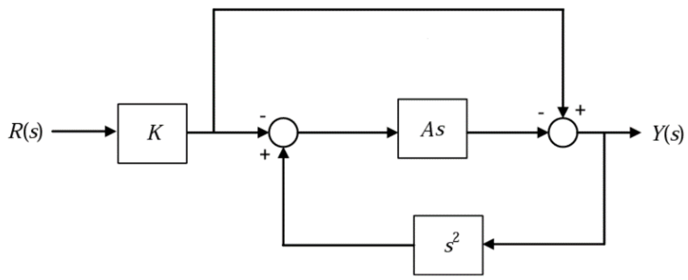


Se pide:

(i) (0,75 puntos) Obtenga el circuito equivalente, en el dominio de *s*, de un "inductor químico" considerando $i(0)\neq 0$ (condiciones iniciales no nulas).
(ii) (1,25 puntos) Ya que los sistemas de interés se alimentan en tensión, obtenga la respuesta en corriente $i(t)$ de un circuito RL serie ante una señal escalón, $v(t)=V$. Esboce la forma de onda de la respuesta, sabiendo que los mecanismos resistivos también son comunes en el modelado de sistemas.
(iii) (0,5 puntos) Interprete el resultado obtenido en (ii), especificando los parámetros característicos.
(iv) (1,25 puntos) La estructura RL analizada en (ii) forma parte de un circuito eléctrico general más complejo (véase figura), donde se suele añadir, además, una resistencia serie, R_s. La impedancia, en el dominio de *s*, es: $Z(s)=R_s+\left[sC_m+{}^{1}/_{R_b}+{}^{1}/_{R_a+sL_a}\right]^{-1}$. Por los valores típicamente obtenidos, se sabe que el sistema es sobreamortiguado. Sin embargo, la respuesta suele presentar una "sobresoscilación abrupta" si se considera el escenario de (ii). ¿Por qué?

Ejercicio 2: Diagrama de bloques y respuesta en régimen permanente (2,25 puntos)

Dado el sistema de control de la figura:



(i) (1,25 puntos) Estudie su estabilidad en función de *K* y *A*.
(ii) (1 punto) Determine el tipo de sistema y los errores verdaderos estacionarios, dependientes de *K*, ante escalón, rampa y parábola. ¿Tiene impacto el valor de *A*? Analice los resultados.

Ejercicio 3: Lugar de las raíces y controladores PID (4 puntos)

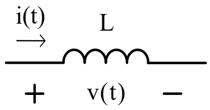
Dada la planta en lazo abierto:

$$G(s)=\frac{s+25}{s^2+4s+8}$$

(i) (2 puntos) Esboce el lugar de las raíces (LDR).
(ii) (1 punto) Diseñe un compensador de adelanto/retraso que consiga un tiempo de asentamiento de 1,25 segundos y un sobreimpulso máximo del 15%. Analice la viabilidad del controlador propuesto con respecto a las restricciones planteadas.
(iii) (1 punto) Discuta la posibilidad de conseguir anular el error en estado estacionario utilizando un controlador de la familia de los PIDs en un sistema que no presente oscilaciones en el transitorio y tenga un tiempo de asentamiento inferior a 1 segundo.

Ejercicio 1

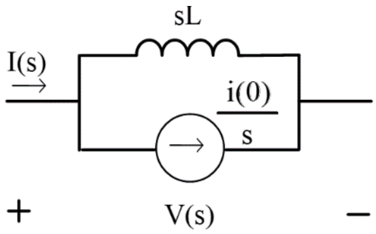
(i) La bobina, en el dominio del tiempo, se representa como:



Con las polaridades indicadas, la ecuación de la bobina es: $v(t)=L\,{}^{di(t)}/_{dt}$.

A continuación, se realiza la transformación al dominio de *s*. Transformemos la ecuación de definición de la bobina a *s*. Transformando ambos miembros, resulta: $V(s)=L[sI(s)\text{-}i(0)]$. Ahora se va a despejar *I*(*s*), puesto que interesa la corriente en la bobina: $I(s)={}^{V(s)}/_{sL}+{}^{i(0)}/_{s}$. Lo primero que se visualiza fácilmente es que, si la bobina no tuviera carga inicial, $i(0)=0$ A (la bobina se carga en corriente), la ecuación anterior quedaría: $I(s)={}^{V(s)}/_{sL}\rightarrow{}^{V(s)}/_{I(s)}=sL$. Entonces *sL* es el cociente entre la tensión *V*(*s*) en bornes de la bobina y su corriente *I*(*s*). Por tanto, *sL* es la impedancia operacional de la bobina y se nota como: $Z_L(s)=sL$.

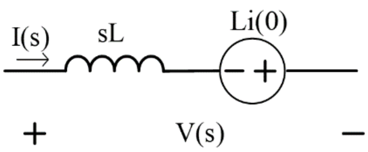
Intentemos implementar la anterior ecuación $I(s)={}^{V(s)}/_{sL}+{}^{i(0)}/_{s}$, antes obtenida, en un circuito en *s*. Primero se ve fácilmente que la corriente *I*(*s*) es suma de dos términos. Por tanto, el circuito a implementar tiene dos elementos en paralelo. Si se suman corrientes es porque se tienen elementos en paralelo. El primer elemento es una bobina de impedancia *sL* y que está a la tensión *V*(*s*). El segundo elemento es una fuente de corriente de valor ${}^{i(0)}/_{s}$. Se tiene:



Ahora se comprueba el circuito propuesto. Veamos que el circuito dibujado responde a la ecuación de *I*(*s*) antes obtenida. *I*(*s*) es la suma de la corriente que circula por la rama de arriba más la que circula por la rama de abajo. Se ve que la bobina superior está a la tensión *V*(*s*) y, por tanto, su corriente será (tensión/impedancia): $I(s)={}^{V(s)}/_{sL}$ dirigida hacia la derecha (corriente entra por el "+" pues es elemento receptor). Por tanto, el circuito equivalente describe la ecuación que se obtuvo en el dominio de *s*.

Téngase en cuenta los siguientes aspectos importantes. *i*(0) se especifica con el sentido de *i*(*t*) indicado en la bobina en el dominio del tiempo, pues *i*(0) es *i*(*t*) particularizada al instante *t*=0. Como ya se sabe, si la tensión en la bobina no contiene componentes impulsivas (impulso y/o sus derivadas) podemos intercambiar *i*(0), $i(0^+)$ e $i(0^-)$ pues todas coinciden. El circuito equivalente de la bobina en *s* implementa directamente la condición inicial: escalón de valor *i*(0). Es un escalón de valor *i*(0) porque en el circuito en *s* aparece *i*(0) dividido por *s*.

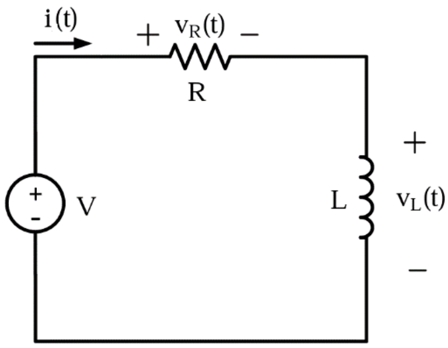
Hemos obtenido para la bobina un esquema equivalente de Norton en el dominio de *s* que implementa una fuente de corriente que modela la condición inicial (carga inicial de la bobina). Vamos a obtener el equivalente en la forma de Thévenin (fuente de tensión en serie con la impedancia). Para obtener el esquema equivalente en forma de Thévenin ponemos la misma impedancia y la fuente de tensión se obtiene como: ${}^{i(0)}/_{s}\;sL=Li(0)$. Por tanto:



Observe el lector que el circuito equivalente en forma de Thévenin también puede obtenerse desde la ecuación en *s* antes obtenida: V(s)=L[sI(s)-i(0)]. En vez de despejar *I*(*s*), se debe despejar *V*(*s*) y se obtiene: V(s)=sLI(s)-Li(0). La implementación de esta ecuación es el circuito en forma de Thévenin obtenido.

Finalmente, se indican unas observaciones a tener en cuenta. Ya que la bobina se carga en corriente, desde un punto de vista físico, es preferible la utilización del esquema equivalente en forma de Norton (fuente de corriente). La fuente de tensión del circuito en *s* obtenido tiene un valor de Li(0) y no lleva *s*. Por tanto, se trata de una fuente impulsional de fuerza Li(0).

(ii) y (iii) Se tiene el circuito RL serie que se muestra a continuación:



Nótese que se consideran condiciones iniciales nulas.

En el dominio de *s*, la corriente, considerando $V(s)={}^{V}\!/_{s}$, es:

$$I(s)=\frac{V(s)}{R+sL}=\frac{{}^{V}\!/_{L}}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}$$

Aplicando la descomposición en fracciones simples resulta:

$$I(s)=\frac{{}^{V}\!/_{L}}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{R}{L}}=\frac{A\left(s+\frac{R}{L}\right)+Bs}{s\left(s+\frac{R}{L}\right)}$$

siendo $A={}^{V}\!/_{R}$ y $B={}^{-V}\!/_{R}$.

Por tanto, la respuesta temporal es:

$$I(s)=\frac{{}^{V}\!/_{R}}{s}-\frac{{}^{V}\!/_{R}}{s+\frac{R}{L}}\rightarrow i(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{{}^{V}\!/_{R}}{s}-\frac{{}^{V}\!/_{R}}{s+\frac{R}{L}}\right]=\frac{V}{R}\left(1-e^{-t/\frac{L}{R}}\right)$$

La respuesta obtenida es consistente, pues verifica: i(0)=0 A y pasado un tiempo largo, la expresión anterior toma un valor de: $i(\infty)={}^{V}\!/_{R}$.

Al cociente ${}^{L}\!/_{R}$ (tiene unidades de segundos) y que es lo que divide al "-*t*" en la exponencial, se le denomina la "constante de tiempo" del circuito RL y se representa por la letra griega τ. Mide cuantitativamente el tiempo de carga/descarga de una bobina. En efecto, cuando una tensión *V* se aplica a un inductor con una resistencia en serie *R*, la corriente aumenta hacia el valor final ${}^{V}\!/_{R}$, retrasada por un tiempo característico ${}^{L}\!/_{R}$.

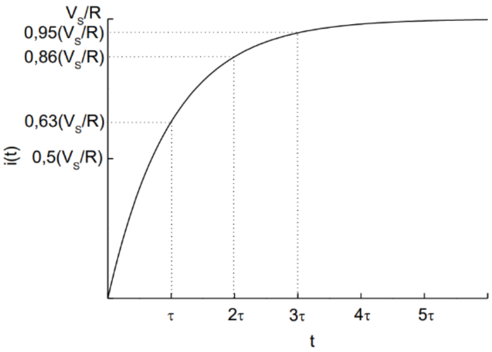
Finalmente, se dibuja la evolución de i(t) del circuito para *t*>0. Para que la bobina se cargue a la corriente ${}^{V}\!/_{R}$, la exponencial ha de valer 0 y eso sucede cuando $t\rightarrow\infty$. Análogamente al circuito simple RC, no es necesario esperar un tiempo infinito para que la bobina se cargue y se comporte como un cortocircuito.

Si transcurre un tiempo equivalente a una constante de tiempo $\tau = {}^{L}/_{R}$,

$$i\left({}^{L}/_{R}\right)=\frac{V}{R}\left(1-e^{-{}^{L/R}/_{L/R}}\right)=\frac{V}{R}\left(1-e^{-1}\right)=0{,}63\frac{V}{R}$$

la bobina se ha cargado al 63% de su valor final, ${}^{V}/_{R}$. Para tiempos equivalentes a 2, 3 y 5 constantes de tiempo, se comprueba que la bobina se carga al 86%, 95% y 99%, respectivamente, del valor final.

La figura siguiente muestra la evolución de la corriente en la bobina *i*(*t*), cuando la bobina se carga desde 0 a ${}^{V}/_{R}$. Transcurrido un tiempo equivalente a 5 constantes de tiempo, la bobina puede considerarse cargada a ${}^{V}/_{R}$ (en realidad, a $i(5\tau)=0{,}99\,{}^{V}/_{R}$, convirtiéndose en un cortocircuito.



(iv) Ya que se considera la corriente como salida y la tensión como entrada, la función de transferencia de interés es la admitancia eléctrica: $Y(s)={}^{I(s)}/_{V(s)}={}^{1}/_{Z(s)}$.

En primer lugar, se calcula la impedancia:

$$Z(s) = R_s+\frac{1}{sC_m+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_a+sL_a}}=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{1}{Y(s)}$$

Ciertamente, no es necesario calcular la función de transferencia completa. El numerador *N*(*s*) que en realidad es el denominador de la admitancia *Y*(*s*) contiene dos polos reales simples con parte real negativa (p_1 y p_2), correspondientes a un sistema de segundo orden (dos elementos almacenadores de energía) sobreamortiguado. La clave del problema son los ceros; es decir, las raíces de *D*(*s*).

Reordenando, se obtiene:

$$Y(s)=\frac{sR_bC_m(R_a+sL_a)+R_a+sL_a+R_b}{(s+p_1)(s+p_2)}=\frac{R_bC_mL_as^2+(R_aR_bC_m+L_a)s+(R_a+R_b)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

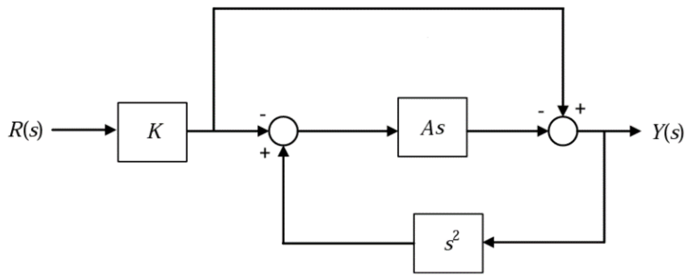
siendo los ceros:

$$s=\frac{-(R_aR_bC_m+L_a)\pm\sqrt{(R_aR_bC_m+L_a)^2-4R_bC_mL_a(R_a+R_b)}}{2R_bC_mL_a}$$

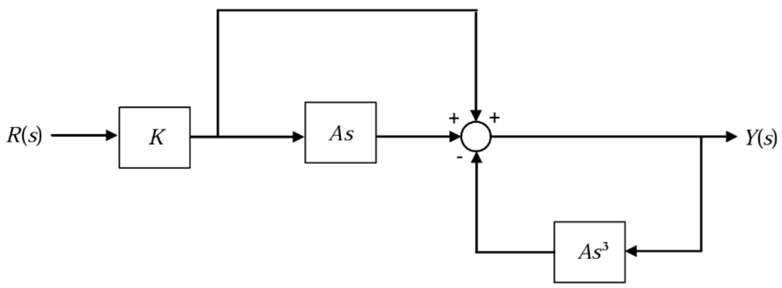
En efecto, el sistema cuenta con dos ceros que modifican la respuesta natural del sistema sobreamortiguado. Típicamente, este tipo de respuesta son lentas y sin sobrepasos con respecto al valor final. Según la forma de onda de la señal propuesta en el ejercicio, se tiene un valor inicial elevado que decae rápidamente debido a efectos capacitivos, pero que, finalmente, exhibe una subida lenta y "retrasada". De este modo, aparecen un pico o "sobrepaso negativo" muy común, pero vagamente comprendido, en múltiples disciplinas de investigación.

Ejercicio 2

(i) En primer lugar, se debe extraer la función de transferencia en lazo cerrado, $Y(s)/R(s)$, aplicando el álgebra de bloques. Se tiene:



Aparece una asociación en paralelo y un *feedback* "enredados". Por tanto, se propone desplazar el punto de resta correspondiente a la retroalimentación (izquierda) hacia la derecha "saltando" el bloque *As*. Así, los puntos de suma se unirían y se podría considerar tan solo uno con tres entradas y una salida. Sin embargo, es necesario tener cuidado con los signos. Resulta:



Resolviendo el paralelo y el *feedback*, se obtienen tres bloques asociados en cascada: *K*, 1+*As* y $^1/_{1+As^3}$, resultando:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=K\frac{1+As}{1+As^3}$$

Si se extrae el polinomio del denominador de la función de transferencia obtenida, $1+As^3$, se observa que no está completo, pues el coeficiente que multiplica a los términos s y s^2 es 0, y además el que multiplica al término de mayor grado, s^3, es negativo. El sistema siempre será inestable. Ahora hay que construir la tabla de Routh-Hurwitz para saber si hay discriminación con respecto al número de polos en el semiplano real derecho.

s^3	A	0
s^2	$0\rightarrow\varepsilon$	1
s	$-A/\varepsilon$	
s^0	1	

Aquí, se obtiene una de las degeneraciones posibles. Sustituimos por el coeficiente ε considerado un valor positivo muy pequeño. Por tanto:

- A>0: Dos cambios de signo. Sistema inestable, con dos polos en el semiplano derecho.
- A<0: Un cambio de signo. Sistema inestable, con un polo en el semiplano derecho.

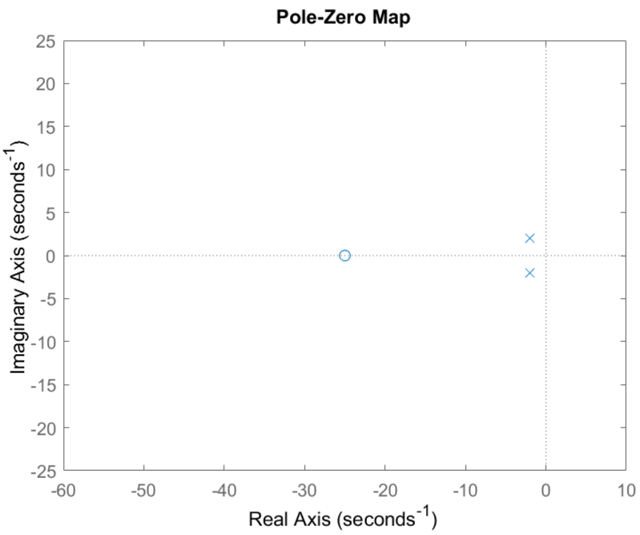
Nótese que si *A*=0, se tiene una función de transferencia correspondiente a un bloque proporcional, *K*. Finalmente, cabe destacar que el parámetro *K* no aparece en el denominador, por lo que no tiene impacto en la estabilidad del sistema.

(ii) Si se aplicase la teoría convencional se obtendrían valores de errores, pero ¿este desarrollo tendría realmente sentido? La respuesta es no. Al ser siempre un sistema inestable, independientemente del valor de A y K (véase apartado (i)), el error verdadero siempre será infinito. Además, no se puede aplicar el teorema del valor final ya que su uso se restringe, teóricamente, a sistemas estables.

Ejercicio 3

(i) Para el esbozo del lugar de las raíces (LDR) seguiremos las siete reglas de construcción:

- Paso 1: Identificación de polos y ceros. El sistema en lazo abierto consta de dos polos complejos conjugados en s=-2±2j y un cero en s=-25.



- Paso 2: Número de ramas. Por lo dado anteriormente, n=2 y m=1. Por tanto, el número de ramas es 1. Nótese que n y m denotan el número de polos y ceros, respectivamente.
- Paso 3: Identificación de segmentos sobre el eje real. A partir de los datos provistos en el paso 1, se identifica fácilmente que el único segmento que pertenece al LDR es de -25 a -∞ siguiendo una asíntota (véase a continuación).
- Paso 4: Cálculo de asíntotas.
  a) Número de asíntotas: n-m=1.
  b) Ángulo de las asíntotas: 180º.
  c) Centroide: Al tratarse de una única asíntota, no es necesario realizar el cálculo del centroide.
- Paso 5: Puntos de corte con el eje imaginario. Nos fijamos en la ecuación característica del sistema en lazo cerrado:

$$1+KG(s)=\frac{s^2+s(4+K)+8+25K}{s^2+4s+8}$$

  Los polos de este sistema, serán los valores de s que anulan $1+KG(s)$, es decir, anulan su numerador. Estas soluciones tendrán la forma:

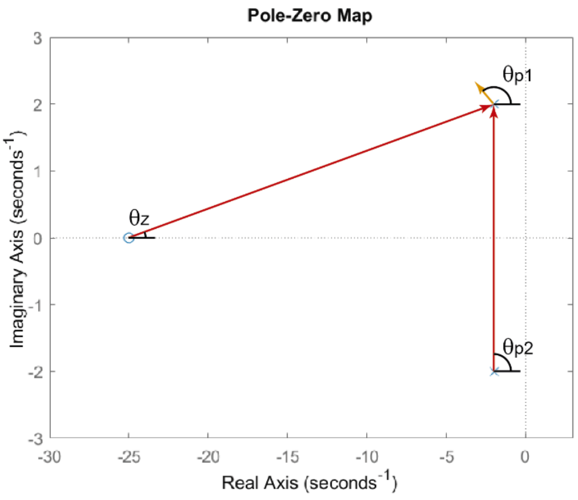
$$s=\frac{-(4+K)\pm\sqrt{(4+K)^2-4(8+25K)}}{2}$$

  En base a esta expresión, se ve que para todo valor de K>0, los polos tendrán parte real negativa. Por tanto, los polos permanecerán siempre en el semiplano izquierdo, manteniendo estable el sistema. Esto hace que el LDR no corte en ningún momento el eje imaginario. Esto era predecible a la vista del mapa de polos y ceros y el cálculo de la asíntota.
- Paso 6: Puntos de ruptura o confluencia del eje real. Se trata del punto contenido en el eje real que maximiza la expresión $1+GH(s)$. Dicho punto se corresponde con el valor de s que cumple: $d[G(s)H(s)]/_{ds}=0$.

$$\frac{dG(s)}{ds}=\frac{-s^2-50s-92}{(s^2+4s+8)^2}=0 \rightarrow s=\begin{cases}-1.91\\ -48\end{cases}$$

De los dos valores obtenidos, el punto de confluencia que pertenece al eje real es s=-48.

- Paso 7: Ángulo de salida o llegada de las raíces. Es preciso analizar los ángulos de los vectores que unen los polos y ceros en lazo abierto con un punto muy cercano al primer polo complejo:



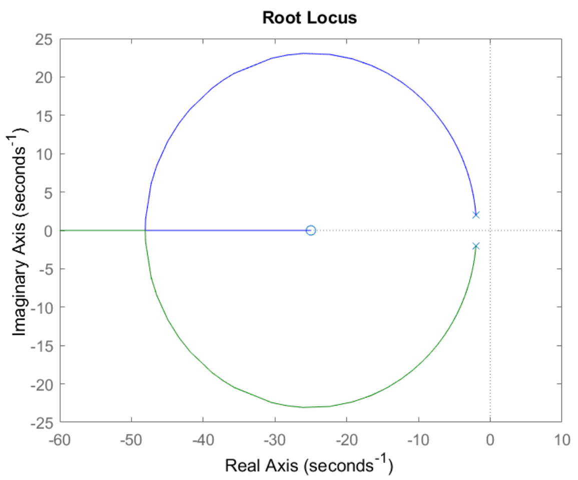
$$\theta_{p2}=90^o$$

$$\theta_z=\arctan\left(\frac{2}{23}\right)=5^o$$

Aplicando el criterio del argumento:

$$\sum\theta_p-\sum\theta_z=180 \rightarrow \theta_{p1}=180+\theta_z-\theta_{p2}=95^o$$

El LDR queda, por tanto:



(ii) Un compensador de adelanto/retraso tiene la siguiente forma:

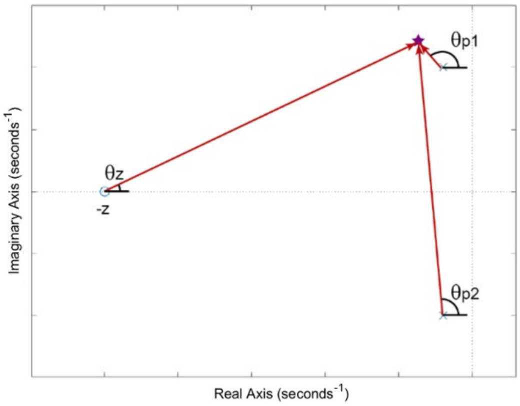
$$C(s)=K\frac{(s+z)}{(s+p)}$$

Cancelando el cero de la planta con el polo del compensador (p=25) mantendríamos un sistema de segundo orden con un lugar de las raíces similar al obtenido en el apartado anterior. De esta manera, podríamos utilizar las expresiones de un sistema de segundo orden para obtener la posición en la que los polos en lazo cerrado del sistema cumplen las restricciones planteadas para el régimen transitorio.

$$t_s=\frac{4}{\sigma}=1{,}6\ s \rightarrow \sigma=\frac{4}{t_s}=2{,}5\ s^{-1}$$
$$M_p=e^{\frac{-\pi}{\tan\theta}}\cdot 100 \rightarrow e^{\frac{-\pi}{\tan\theta}}=0{,}15 \rightarrow \tan\theta=\frac{-\pi}{\ln(0{,}15)} \Rightarrow \theta=58{,}87$$
$$\zeta=\cos\theta=0{,}5$$
$$\sigma=\omega_n\zeta \Rightarrow \omega_n=\frac{\sigma}{\zeta}=5\ rad/s$$
$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=4{,}3\ rad/s$$

Por tanto, la posición deseada para los polos en lazo cerrado es: s=-2,5±4,3j rad/s.

La posición del cero del compensador será aquella que hace que los polos deseados formen parte del lugar de las raíces. Para calcularla, utilizamos el criterio del argumento:



$$\theta_{p1}=180-\arctan\left(\frac{4{,}3-2}{2{,}5-2}\right)=102{,}3^{o}$$
$$\theta_{p2}=180-\arctan\frac{4{,}3+2}{2{,}5-2}=94{,}5^{o}$$
$$\sum\theta_p-\sum\theta_z=180 \Longrightarrow \theta_z=16{,}76^{o}$$
$$\theta_z=\operatorname{atan}\frac{4{,}3}{z-2{,}5} \Rightarrow z=16{,}76$$

Por tanto, el cero del compensador se encontrará en *s*=-16,76.

Para terminar de definir el controlador, aplicamos el criterio del módulo para calcular la ganancia que, efectivamente, coloca los polos en lazo cerrado en los puntos buscados.

$$d_{p1}=\sqrt{(4{,}3-2)^2+(2{,}5-2)^2}=2{,}5$$
$$d_{p2}=\sqrt{(4{,}3+2)^2+(2{,}5-2)^2}=6{,}3$$
$$d_z=\sqrt{(4{,}3)^2+(16{,}76-2{,}5)^2}=14{,}9$$
$$K=\frac{\prod d_p}{\prod d_z}=0{,}99$$

En definitiva, el controlado requerido queda como:

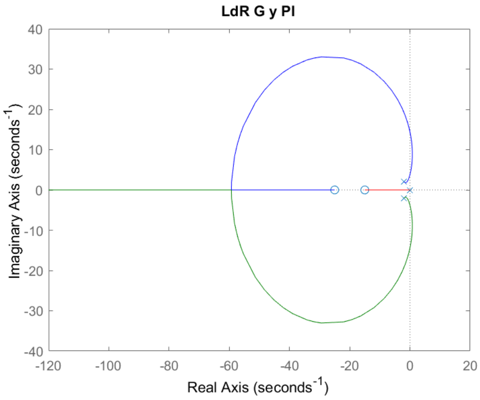
$$C(s)=0{,}99\frac{s+16{,}76}{s+25}$$

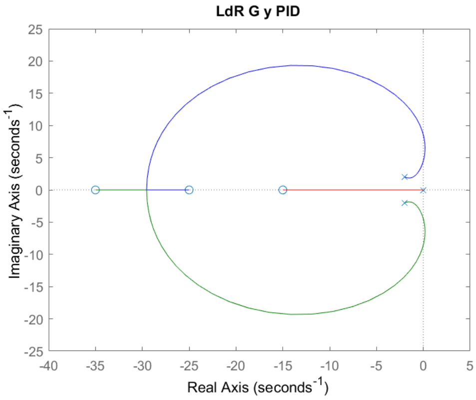
Para garantizar la viabilidad del controlador y que se cumplan los requisitos planteados, hay que analizar si el cero introducido en el compensador afecta de manera negativa a la respuesta del sistema. Para ello, hemos de comprobar si es posible considerarlo despreciable teniendo en cuenta su posición en el plano complejo con respecto a la posición de los polos deseados. En este sentido, puesto que el cero de *C*(*s*) se encuentra más de 10 veces a la izquierda de la posición de los polos en lazo cerrado, puede considerarse despreciable su efecto y, por tanto, se conseguirían cumplir las restricciones planteadas.

(iii) Teóricamente, los controladores que anulan el error en estado estacionario son aquellos que tienen acción integral, es decir, un PI o un PID. Las funciones de transferencia de estos controladores tienen la siguiente forma:

$$PI(s)=K\frac{(s+z)}{s}$$
$$PID(s)=K\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s}$$

Utilizar estos controladores modificaría el lugar de las raíces, de manera que quedaría siempre un segmento en el eje real (entre el polo en el origen y el primer cero) y un segundo segmento correspondiente a la rama que nace de los polos complejos de la rama y que terminan en un par de ceros (en el caso del PID) o en un cero y una asíntota (en el caso de un PI).





Para eliminar la oscilación en la respuesta, se necesitaría un polo dominante en el primer segmento del eje real. Para conseguir que sea dominante, tendríamos que aumentar lo máximo posible la distancia con el segundo segmento del eje real, pero manteniendo el requisito del tiempo de asentamiento en 0,5 s.

Este tiempo de asentamiento, en un sistema de primer orden, que es lo que se pretende, viene definido como:

$$t_s=\frac{4}{\tau} \rightarrow \tau=\frac{4}{0,5}=8\ \mathrm{s}$$

La posición del cero de la planta en ningún caso podrá ser despreciable frente al polo en lazo cerrado colocado en s=-8. Por este motivo, el cero de la planta introducirá oscilaciones no despreciables haciendo imposible conseguir los requerimientos planteados para el transitorio.