Soluciones ejercicios tema 4:

4.1

a) Incorrecto (segmentos del eje real y simetría).
b) Incorrecto (asíntotas).
c) Correcto.
d) Correcto.
e) Incorrecto (segmentos del eje real y simetría)
f) Correcto.
g) Incorrecto (segmentos del eje real y simetría).
h) Correcto.

4.2

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = K(s+2)/(s+1)(s+4)$
Paso 1: Polos $(-1, -4)$, ceros (-2).
Paso 2: 2 ramas.
Paso 3: $[-1, -2]$, $[-4, -\infty)$
Al conocer el sentido de las ramas (polos $\rightarrow \overset{\infty}{\text{ceros}}$), sistema estable para $K>0$.

4.3

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = K/s(s+4)(s+5)$
Paso 1: Polos $(0, -4, -5)$, ningún cero.
Paso 2: 3 ramas.
Paso 3: $[0, -4]$, $[-5, -\infty)$
Paso 4: $3-0=3$ asíntotas, $\Phi = 60°, 180°, 300°$, $\sigma = 0-4-5/3 = -3$
Paso 5: $1+GH = s^3+9s^2+20s+K/s(s+4)(s+5)$

s^3	1	20
s^2	9	K
s^1	b_1	0
s^0	c_1	0

$b_1 = 20 - 1/9 K = 0 \Rightarrow K = 180$
$9s^2 + 180 = 0 \Rightarrow s = \pm 4'47j$
ESTABLE: $0 < K < 180$

Paso 6: $1+GH=0 \Rightarrow K = -s^3 - 9s^2 - 20s \Rightarrow dK/ds = -3s^2 - 18s - 20 = 0 \Rightarrow s = -1'47$

4.4

Función de transferencia en lazo abierto: $K(s+3)/(s+2)(s-2)(s+5)$
Paso 1: Polos $(2, -2, -5)$, ceros (-3).
Paso 2: 3 ramas.
Paso 3: $[2, -2]$, $[-3, -5]$.
Paso 4: $3-1=2$ asíntotas, $\Phi = 90°, 270°$, $\sigma = 2-2-5+3/2 = -1$
Paso 5: $1+GH = s^3+5s^2+(-4+K)s+(-20+3K)/(s+2)(s-2)(s+5)$

s^3	1	$-4+K$
s^2	5	$-20+3K$
s^1	b_1	0
s^0	c_1	0

$b_1 = 2K/5 = 0 \Rightarrow K = 0$
No existen puntos de corte con el eje imaginario

Paso 6: $1+GH=0 \Rightarrow K = s^3+5s^2-4s-20/s+3 \Rightarrow dK/ds = -2s^3-14s^2-30s-3/(s+3)^2 \Rightarrow s = -0'31$

4.5

Función de transferencia en lazo abierto: $K(s+2)(s+3)/s(s+1)$
Paso 1: Polos $(0, -1)$, ceros $(-2, -3)$.
Paso 2: 2 ramas.
Paso 3: $[0, -1]$, $[-2, -3]$
Paso 4: $2-2=0$ asíntotas (no es necesario implementar el paso 5). $\Rightarrow$ Sistema estable para $K>0$
Paso 6: $1+GH=0 \Rightarrow K = -s^2+s/s^2+5s+6 \Rightarrow dK/ds = -(2s+1)(s^2+5s+6)-(s^2+s)(2s+5)/(s^2+5s+6)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow s_1 = -0'63$ y $s_2 = -2'36$

4.6

Función de transferencia en lazo abierto: $K(s+1)/s(s+2)(s^2+2s+2)$
Paso 1: Polos $(0, -2, -1+j, -1-j)$, ceros (-1).
Paso 2: 4 ramas.
Paso 3: $[0, -1]$, $[-2, -\infty)$
Paso 4: $4-1=3$ asíntotas, $\Phi = 60°, 180°, 300°$, $\sigma = 0-2-1+j-1-j+1/3 = -1$
Paso 5: $1+GH = s^4+4s^3+6s^2+(4+K)s+K/s(s+2)(s^2+2s+2)$

s^4	1	6	K
s^3	4	$4+K$	0
s^2	b_1	b_2	0
s^1	c_1	0	0
s^0	d_1	0	0

$b_1 = 20-K/4 = 5 - 1/4 K$
$b_2 = K$
$c_1 = -K^2+80/20-K = 0 \Rightarrow K = 8'94$
$2'77s^2 + 8'94 = 0 \Rightarrow s = \pm 1'79j$

Paso 6: $1+GH=0 \Rightarrow K = -s^4+4s^3+6s^2+4s/s+1 \Rightarrow dK/ds = -3s^4-12s^3-18s^2-12s-4/(s+1)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Ningún valor de s pertenece al LDR.
Paso 7: $\Sigma\theta_{polos} - \Sigma\theta_{ceros} = (135+45+90)-90 = 180° \Rightarrow \theta_p + 135+45+90-90 = 180 \Rightarrow \theta_p = 0°$

4.7

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = K(s+1) / s^2(s+2)(s+3)$

Paso 1: Polos $(0, 0, -2, -3)$, ceros (-1).

Paso 2: 4 ramas

Paso 3: $[-1, -2]$, $[-3, -\infty)$

Paso 4: $4-1 = 3$ asíntotas, $\Phi = 60°, 180°, 300°$, $\sigma = 0+0-2-3+1 / 3 = -4/3 = -1'\overline{3}$

Paso 5: $1 + GH = s^4+5s^3+6s^2+Ks+K / s^2(s+2)(s+3)$

s^4	1	6	K
s^3	5	K	0
s^2	b_1	b_2	0
s^1	C_1	0	0
s^0	d_1	0	0

$b_1 = 6 - 1/5 K$

$b_2 = K$

$C_1 = K - 0'2K^2 / 6 - 0'2K = 0 \Rightarrow K_1 = 0, K_2 = 5$

No existen puntos de corte con el eje imaginario

Paso 6: $1 + GH = 0 \Rightarrow K = -s^4 - 5s^3 - 6s^2 / s+1 \Rightarrow dK/ds = -3s^4 - 14s^3 - 21s^2 - 12s / (s+1)^2 = 0 \Rightarrow s = 0$

4.8

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = K(s+3) / s(s+1)(s^2+4s+5)$

Paso 1: Polos $(0, -1, -2+j, -2-j)$, ceros (-3).

Paso 2: 4 ramas.

Paso 3: $[0, -1]$

Paso 4: $4-1 = 3$ asíntotas, $\Phi = 60°, 180°, 300°$, $\sigma = 0-1-2+j-2-j+3 / 3 = -2/3 = -0'\overline{6}$

Paso 5: $1 + GH = s^4+5s^3+9s^2+(5+K)s+3K / s(s+1)(s^2+4s+5)$

s^4	1	9	$3K$
s^3	5	$5+K$	0
s^2	b_1	b_2	0
s^1	C_1	0	0
s^0	d_1	0	0

$b_1 = 40-K / 5 = 8 - 1/5 K$

$b_2 = 3K$

$C_1 = -K^2 - 40K + 200 / 40 - K = 0 \Rightarrow K = 4'49$

$7'10s^2 + 13'47 = 0 \Rightarrow s = \pm 1'37j$

Paso 6: $1 + GH = 0 \Rightarrow K = -s^4+5s^3+9s^2+5s / s+3 \Rightarrow dK/ds = -3s^4 - 22s^3 - 54s^2 - 54s - 15 / (s+3)^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow s_1 = -0'44$, $s_2 = -3'65$

Paso 7: $\Sigma\theta_{polos} - \Sigma\theta_{ceros} = \theta_p + 153'5 + 135 + 90 - 45 = 180 \Rightarrow \theta_p = 206'5°$

4.9

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = K / s(s+4)(s^2+8s+32)$

Paso 1: Polos $(0, -4, -4+4j, -4-4j)$, ningún cero.

Paso 2: 4 ramas.

Paso 3: $[0, -4]$.

Paso 4: $4-0 = 4$ asíntotas, $\Phi = 45°, 135°, 225°, 315°$, $\sigma = 0-4-4+4j-4-4j / 4 = -3$

Paso 5: $1 + GH = s^4+12s^3+64s^2+128s+K / s(s+4)(s^2+8s+32)$

s^4	1	64	K
s^3	12	128	0
s^2	b_1	b_2	0
s^1	C_1	0	0
s^0	d_1	0	0

$b_1 = 53'\overline{3}$

$b_2 = K$

$C_1 = 6822'4 - 12K / 53'\overline{3} = 0 \Rightarrow K = 568'53$

$53'3s^2 + 568'53 = 0 \Rightarrow s = \pm 3'27j$

Paso 6: $1 + GH = 0 \Rightarrow K = -s^4 - 12s^3 - 64s^2 - 128s \Rightarrow dK/ds = -4s^3 - 36s^2 - 128s - 128 = 0 \Rightarrow s = -1'57$

Paso 7: $\Sigma\theta_{polos} - \Sigma\theta_{ceros} = \theta_p + 90° + 90° + 135° = 180° \Rightarrow \theta_p = -135°$

4.10

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = K / (s+4)(s^2+8s-20)$

a)

Paso 1: Polos $(-4, 2, -10)$, ningún cero.

Paso 2: 3 ramas.

Paso 3: $[2, -4]$, $[-10, -\infty)$

Paso 4: $3-0 = 3$ asíntotas, $\Phi = 60°, 180°, 300°$, $\sigma = -4+2-10 / 3 = -4$

Paso 5: $1 + GH = s^3+12s^2+12s+(K-80) / (s+4)(s^2+8s-20)$

s^3	1	12
s^2	12	$(K-80)$
s^1	b_1	0
s^0	C_1	0

$b_1 = 224-K / 12 = 0 \Rightarrow K = 224$

$C_1 = K - 80 \Rightarrow K = 80$

ESTABLE PARA $80 < K < 224$

$12s^2 + 144 = 0 \Rightarrow s = \pm 3'46j$

b) Respuesta críticamente estable $(\xi = 1)$, sus polos son $s = -\xi\omega_n$, entonces $\omega_n = 3'46$ rad/s.

4.11

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = K(s+5) / (s+3)(s^2+s-2)$

Paso 1: Polos $(-3, 1, -2)$, ceros (-5).

Paso 2: 3 ramas.

Paso 3: $[1, -2]$, $[-3, -5]$

Paso 4: $3-1 = 2$ asíntotas, $\Phi = 90°, 270°$, $\sigma = -3+1-2+5 / 3-1 = 0'5$

Paso 5: $1 + GH = s^3+4s^2+(K+1)s+(5K-6) / (s+3)(s^2+s-2)$

s^3	1	$K+1$
s^2	4	$5K-6$
s^1	b_1	0
s^0	C_1	0

$b_1 = 10-K / 4 = 0 \Rightarrow K = 10$

$C_1 = 5K - 6 = 0 \Rightarrow K = 6/5 = 1'2$

ESTABLE PARA $1'2 < K < 10$

$4s^2 + 44 = 0 \Rightarrow s = \pm 3'31j$

Paso 6: $dK/ds = 0 \Rightarrow s = -0'25$

4.12

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = K(s^2+2s+2) / (s^2+s)(s+2)$

Paso 1: Polos $(-2, 0, -1)$, ceros $(-1+j, -1-j)$.

Paso 2: 3 ramas.

Paso 3: $[0, -1]$, $[-2, -\infty]$

Paso 4: $3-2 = 1$ asíntota, $\Phi = 180°$, $\sigma = \frac{-2+0-1+1-j+1+j}{3-2} = -1$

Paso 5: $1+GH = s^3+(3+K)s^2+(2K+2)s+2K / (s^2+s)(s+2)$

s^3	1	$2K+2$	$b_1 = \frac{2K^2+6K+6}{3+K}$
s^2	$3+K$	$2K$	$C_1 = 2K$
s^1	b_1	0	NO EXISTEN K POSITIVA (NO HAY PUNTOS DE CORTE CON EL EJE IMAGINARIO)
s^0	C_1	0	

Paso 6: $dK/ds = 0 \Rightarrow s = -0'5$

Paso 7: $\Sigma\theta_{ceros} - \Sigma\theta_{polos} = \pm 180° \Rightarrow \theta_2 + 90 - 135 - 90 - 45 = \pm 180° \Rightarrow \theta_2 = 0° // 360°$

4.13

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = K(s^2-2s+5) / s^2+3s$

a)

Paso 1: Polos $(0, -3)$, ceros $(1+2j, 1-2j)$.

Paso 2: 2 ramas

Paso 3: $[0, -3]$

Paso 4: $2-2 = 0$ asíntotas

Paso 5: $1+GH = (1+K)s^2+(3-2K)s+5K / s^2+3s$

s^2	$1+K$	$5K$	$2'5s^2+7'5 = 0 \Rightarrow s = \pm 1'73j$
s^1	$3-2K$	0	$K = 1'5$
s^0	b_1	0	$K = 0$ $(b_1 = 5K)$

Paso 6: $1+GH = 0 \Rightarrow dK/ds = 0 \Rightarrow s = -1$

Paso 7: $\Sigma\theta_{ceros} - \Sigma\theta_{polos} = \theta_2 + 90 - 63 - 27 = \pm 180° \Rightarrow \theta_2 = \pm 180°$

b) $t_s = 4/\xi\omega_n = 0'4 \Rightarrow \sigma = \xi\omega_n = -10$ (no hay LDR en -10)

c) Un polo en el origen (TIPO 1), $e_{ss,v} = 1/\lim_{s\to 0} s\, K(s^2-2s+3)/s(s+3) = 1/5K/3 = 3/5K$

4.14

a)

Función de transferencia en lazo abierto: $G_{LA}(s) = 4K/s(s+2)$

Paso 1: Polos $(0, -2)$, ningún cero.

Paso 2: 2 ramas.

Paso 3: $[0, -2]$

Paso 4: $2-0 = 2$ asíntotas, $\Phi = 90°, 270°$, $\sigma = \frac{0-2}{2} = -1$

Paso 5: $1+GH = s^2+2s+4K / s(s+2)$

s^2	1	$4K$	$b_1 = 4K = 0 \Rightarrow K = 0$
s^1	2	0	NO EXISTEN PUNTOS DE CORTE CON EL EJE IMAGINARIO
s^0	b_1	0	

Paso 6: $1+GH = 0 \Rightarrow K = -0'25s^2 - 0'5s \Rightarrow dK/ds = -0'5s - 0'5 = 0 \Rightarrow s = -1$

b) $G_{LC}(s)$ para $K = 1$: $G_{LC}(s) = 4/s^2+2s+4 \Rightarrow \omega_n = 2$ rad/s, $\xi = 0'5$, $M_p = 0'163$

c) $e_{ss,v} = 1/K_v = 1/\lim_{s\to 0} s\, 4/s(s+2) = 1/2$

d) Para pasar de $4/s(s+2)$ a $4/s(s+20) \Rightarrow G_c(s) = s+2/s+20 \Rightarrow$ Hallar parámetros de $G_{LC}(s)$ para los polos

Hallar ganancia con $|G_c(s)G(s)H(s)| = 1/K_c \Rightarrow K_c = 64'25$ donde $G_c(s) = 64'25\, s+2/s+20$

e) $e_{ss,v} = 1/K_v = 1/\lim_{s\to 0} s\, 257/s(s+20) = 1/257/20 = 20/257$

4.15

$e_{ss,v} = 1/K_v = 1/\lim_{s\to 0} s\, 1/s(s+1)(s+2) = 1/0'5 = 2$

$e_{ss,v} = 1/\lim_{s\to 0} s\, K_c\, s+z_c/s+p_c\, 1/s(s+1)(s+2) = 0'2 \Rightarrow z_c/p_c = 10$, suponiendo $K_c = 1$: $G_c(s) = s+0'05/s+0'005$