SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 3

Respuesta temporal de sistemas de primer orden

Problema 3.1. Ambas afirmaciones son ciertas. Para demostrarlo hay que hacer uso de las propiedades de integración y derivación de la transformada de Laplace. Tomando todas las condiciones iniciales iguales a cero, se debe usar en cada caso que:

a) $L\left[\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$

b) $L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$

Problema 3.2.

a) $G(s) = \frac{V_S(s)}{V_e(s)} = \frac{1}{1+RCs} = \frac{1}{1+\frac{1}{50}s} = \frac{1}{1+0{,}02s}$, por lo que es un sistema de primer orden.

b) La ganancia estática es k=1. Tiene un único polo en s_1=-50, luego es un sistema estable.

c) La constante de tiempo es T=1/50=0,02 s=20 ms. El tiempo de subida (tiempo que tarda la salida en subir del 10 al 90% de su valor permanente) es t_r=43,9 ms. El tiempo de asentamiento (tiempo que tarda la salida en alcanzar el 98,2% de su valor permanente) es de t_r=4T=80 ms.

d) La respuesta a una entrada escalón unitario es $V_S(t) = 1-e^{-\sigma t} = 1-e^{\frac{-t}{T}} = 1-e^{-50t}$, con $t \geq 0$.

e) Aunque ahora la entrada es un escalón no unitario $V_e(t) = 10\ V{\cdot}u_0(t)$ (es decir, un escalón con A=10), la función de transferencia del circuito sigue siendo la misma, $G(s) = \frac{1}{1+RCs} = \frac{1}{1+0{,}02s}$. Por ello la constante de tiempo, el tiempo de subida y el tiempo de asentamiento siguen siendo los mismos.

f) Ahora T=RC=50 s, luego la nueva función de transferencia es $G(s) = \frac{1}{1+50s}$**.** El tiempo de subida pasa a ser de t_r=109,86 s y el tiempo de asentamiento t_s=4T=200 s, mucho mayores que en c).
Esto se justifica dado que el condensador es de mayor capacidad (tarda más en cargarse) y se carga a través de una resistencia mayor (la corriente es menor, luego además lo hace más lentamente). Por eso el único polo del sistema está ahora mucho más cerca del origen que antes (s_1=-1/50=-0,02), es decir, se trata de un sistema mucho más lento.

Problema 3.3. La respuesta del sistema se corresponde con una parábola, $y(t)=t^2{\cdot}u_0(t)$, cuya transformada de Laplace es igual a $Y(s) = 2/s^3$. Por ello la función de transferencia del sistema es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2/s^3}{1/s} = \frac{2}{s^2}$$

Dicho sistema tiene un polo doble en el origen (s_1=s_2=0). El sistema es inestable, ya que la salida $y(t)=t^2$ no es acotada cuando $t\to\infty$ para una entrada escalón (que sí es acotada). A este sistema se le llama "doble integrador", ya que está formado por dos integradores en cascada ($1/s$).

Respuesta temporal de sistemas de segundo orden

Problema 3.4. Todos sistemas son de segundo orden, luego su función de transferencia tiene dos polos, que son en cada caso:

a) $G_1(s)$ tiene dos polos complejos conjugados en s=-6±19,08j. Sistema estable, subamortiguado, con k=0,25, ω_n=20 rad/s, ω_d=19,08 rad/s, ξ=0,3, σ=6 s^{-1}.

b) $G_2(s)$ tiene dos polos reales y distintos en s_1=-11,5 y s_2=-78,5. Sistema estable, sobreamortiguado, con k=4, ω_n = 30 rad/s, ξ = 1,5, σ = 45 s^{-1}.

c) $G_3(s)$ tiene dos polos reales e iguales en s=-15. Sistema estable, amortiguamiento crítico, con k=1/3, ω_n=15 rad/s, ξ=1, σ=15 s^{-1}.

d) $G_4(s)$ tiene dos polos imaginarios puros en s=±25j. Sistema críticamente estable, no amortiguado (oscilatorio), con k=1, ω_n=25 rad/s, ξ=0, σ=0 s^{-1}.

e) $G_5(s)$ tiene dos polos reales e iguales en s=8. Sistema inestable, con k = 2, ξ = -1. Su respuesta crece indefinidamente, sin presentar comportamiento oscilatorio.

f) $G_6(s)$ tiene dos polos reales y distintos en s_1=+5 y s_2=-5. Sistema inestable, con k=1. Su respuesta crece indefinidamente, sin presentar comportamiento oscilatorio.

Problema 3.5.

a) $G(s)=\dfrac{V_C(s)}{V(s)}=\dfrac{1}{LCs^2+RCs+1}=\dfrac{1/LC}{s^2+R/L\,s+1/LC}=\dfrac{100}{s^2+15s+100}$, por lo que es un sistema de segundo orden.

b) La ganancia estática es k=1. Tiene dos polos complejos conjugados en s=-7,5±6,6j. Por ello es un sistema estable (polos situados en el semiplano complejo negativo).

c) Tendrá una respuesta subamortiguada, con ω_n=10 rad/s, ω_d=6,6 rad/s, ξ=0,75, σ=7,5 s^{-1}.

d) Usando las expresiones dadas, el tiempo de subida será de t_r = 366 ms. El tiempo de asentamiento para estar dentro de la banda de 98,2% será de $t_s = 4/\sigma$ = 533 ms.

El tiempo de pico será de t_p = 419 ms, con un valor de pico de 1,0284 V y una sobreelongación del 2,84%

Problema 3.6. Sustituyendo los datos del enunciado, directamente:

$$G(s)=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{50}{s^2+s+25}$$

Problema 3.7. Ya se ha visto que la función de transferencia del circuito RLC serie es de 2º orden, luego podemos hacer la correspondencia:

$$G(s)=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1/LC}{s^2+R/L\,s+1/LC}$$

a) La sobreelongación del 25% fuerza a que $\tan\theta = 2{,}266$, luego el coeficiente de amortiguamiento del sistema debe ser de $\xi=\cos\theta=0{,}404$.

b) El tiempo de asentamiento de $t_s=\pi/\sigma=3{,}89$ s obliga a que ω_n sea de 2 rad/s.

Conocidos ambos y fijada $R = 10\ \Omega$ (enunciado), L debe ser igual a 6,25 H y C igual a 40 mF.

Problema 3.8. Debido a que la función de transferencia del circuito RLC en serie es:

$$G(s)=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{1/LC}{s^2+R/L\,s+1/LC}$$

Haciendo la correspondencia de coeficientes se observa que la ganancia estática de este sistema siempre será k=1, lo que en términos eléctricos quiere decir que un circuito RLC no presenta amplificación de tensión. Por ello, nunca podríamos conseguir que el valor final en régimen permanente fuese de 3 V ante una entrada escalón de 1 V sólo con un circuito RLC serie.

Problema 3.9. Si se aplican las reglas del álgebra de bloques para reducir el diagrama de la figura, se obtiene una función de transferencia de un sistema de segundo orden:

$$G(s)=\frac{k_2}{s^2+(4+k_1k_2)s+12k_2}=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

Igualando los coeficientes de ambas funciones de transferencia:

$$\begin{aligned} k\omega_n^2 &= k_2 \\ 2\xi\omega_n &= 4+k_1k_2 \\ \omega_n^2 &= 12k_2 \end{aligned}$$

Si se usa la expresión para el tiempo de asentamiento de un sistema de segundo orden en la banda del 98,2% (t_s=4/σ) y se usan los requisitos del enunciado (t_s = 1 s y ζ=0,5), operando se extrae que ω_n debe ser igual a 8 rad/s. Por ello k_2=64/12=5,33 y k_1=48/64=0,75.

Problema 3.10. Aplicando las reglas del álgebra de bloques al sistema de la figura, la función de transferencia del sistema completo reducido es de segundo orden e igual a:

$$G(s)=\frac{A}{s^2+ABs+AC}$$

El tiempo de establecimiento t_s=4/σ= 0,4 s permite extraer σ= 10. Si la salida debe ser críticamente amortiguada ξ=1, y por ello ω_n=10 rad/s. Para que el valor en régimen permanente sea de 1/2, K debe ser 1/2. Con todo ello la función de transferencia debe ser igual a:

$$G(s) = \frac{50}{s^2 + 20s + 100}$$

Igualando los coeficientes de numerador y denominador, A=50, B=0,4 y C=2.

Problema 3.11. En un ejercicio del tema anterior se dedujo la función de transferencia en lazo cerrado del sistema completo reducido, que es de segundo orden e igual a la del ejercicio anterior:

$$G(s) = \frac{A}{s^2 + ABs + AC}$$

Analizando la respuesta temporal de la figura podemos extraer la siguiente información:

- La sobreeelongación M_p es del 16,2%, de lo que se puede extraer que el coeficiente de amortiguamento es de ξ=1/2.
- El tiempo de pico t_p es de 0,04534 s, por lo que la frecuencia ω_d=69,28 rad/s, y por ello ω_n=80 rad/s.
- El valor final de la respuesta en estado estacionario ante la entrada escalón unitario no es de 1 sino de 0,25, de lo que se puede deducir que la constante K es de 0.25.

Con los valores anteriores, la función de transferencia del sistema es:

$$G(s) = \frac{1600}{s^2 + 80s + 6400}$$

Igualando los coeficientes de numerador y denominador, A=1600, B=0,05 y C=4.

Estabilidad en estado estacionario: Criterio de Routh-Hurwitz

Problema 3.12. Construyendo la tabla de Routh y utilizando el criterio de Routh-Hurwitz:

a) Sistema estable.
b) Sistema críticamente estable (oscilante, raíces imaginarias puras).
c) Sistema críticamente estable (oscilante, raíces imaginarias puras).
d) El denominador tiene un coeficiente negativo, sistema inestable. Tiene dos raíces en el semiplano complejo positivo.
e) Sistema inestable. Tiene dos raíces en el semiplano complejo positivo.
f) Sistema inestable. Además de dos raíces imaginarias puras, tiene dos raíces en el semiplano complejo positivo.

Problema 3.13.

Se va a aplicar el criterio de estabilidad de Routh al siguiente polinomio de tercer orden:

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

donde todos los coeficientes son números positivos. El array de coeficientes se convierte en

s^3	a_0	a_2
s^2	a_1	a_3
s^1	$\dfrac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	
s^0	a_3	

La condición de que todas las raíces tengan partes reales negativas se obtiene mediante

$$a_1a_2 > a_0a_3$$

Problema 3.14. Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, el sistema de control es estable si $0<K<600$. Es marginalmente estable (oscilante) para $K=600$ e inestable para $K<0$ o $K>600$.

Problema 3.15. Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz:

a) El sistema de control es estable si $0<K<6$.
b) El sistema de control es estable si $0<K<14/9$.
c) El sistema de control es estable si $0<K<10$.

Problema 3.16. En un ejercicio del tema anterior se dedujo que la función de transferencia del sistema completo reducido es:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + (1 - A)}$$

Utilizando el criterio de Routh-Hurwitz, el sistema de control es:

a) Estable si $A<1$.
b) Marginalmente estable si $A=1$.
c) Inestable si $A>1$.

Problema 3.17. Al reducir el diagrama de bloques de la figura, la función de transferencia del sistema completo es:

$$G(s) = \frac{30(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+5)}$$

a) El sistema es estable ya que todos sus polos están en semiplano complejo negativo.
b) La salida $y(t)$ para una entrada impulso unitario $\delta(t)$ es:

$$y(t) = -10e^{-2t} + 30e^{-3t} - 20e^{-5t}.$$

En régimen estacionario $y(\infty)=0$.

Precisión y error en régimen estacionario

Problema 3.18. La salida del sistema este de tipo subamortiguado, con una sobreelongación máxima de 0,254 (o, lo que es lo mismo, del 25,4%) y un tiempo de pico de t_p = 3 s. De ellos se deduce que el coeficiente de amortiguamiento del sistema en lazo cerrado es de 0,4 y que la frecuencia natural es de 1,14 rad/s.

a) K=1,43 y T=1,09.
b) El sistema es de Tipo 1, por lo que el error estacionario ante una entrada escalón es nulo.
c) La constante estática de velocidad es $k_v=K$=1,41, luego el error permanente ante una entrada rampa es e_{SS} (rampa)=0,704.

Problema 3.19. El tipo y los errores en estado estacionario son:

a) Tipo 0. e_{SS} (escalón)=0,0196; e_{SS} (rampa)=∞; e_{SS} (parábola)=∞.
b) Tipo 1. e_{SS} (escalón)=0; e_{SS} (rampa)=100; e_{SS} (parábola)=∞.
c) Tipo 1. e_{SS} (escalón)=0; e_{SS} (rampa)=1/K; e_{SS} (parábola)=∞.
d) Tipo 2. e_{SS} (escalón)=0; e_{SS} (rampa)=0; e_{SS} (parábola)=10/K.

Problema 3.20. Las constantes de error y el error verdadero del sistema con realimentación no unitaria son:

a) K_p=-5/4, luego e_{SS} (escalón)=-4; El valor negativo implica que el valor final en estado estacionario es mayor que la unidad.
b) K_p=0, luego e_{SS} (rampa)=∞.
c) De la misma manera, K_a=0, luego e_{SS} (parábola)=∞.

El sistema es de Tipo 0 (en contra de lo que pudiera parecer), debido a la realimentación no unitaria.

Problema 3.21. El error verdadero del sistema con realimentación no unitaria ante una entrada escalón unitario es:

$$e_{SS} = \frac{8-2K}{8+2K}$$

Por ello, si K=4 el error frente a una entrada escalón unitario será nulo.

Problema 3.22.

a) La función de transferencia del sistema en lazo cerrado es la siguiente:

$$G(s) = \frac{100(s+5)}{s^3+15s^2+50s+100K}$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz, el sistema es estable si 0<K<7,5.

b) El error verdadero de posición (es decir, frente a una entrada escalón) viene dado por la siguiente expresión $e_{SS}=(K-5)/K$. Por ello, para que el error sea nulo, el valor de K debe ser igual a 5. Además, para ese valor sabemos que el sistema es estable.

Problema 3.23. Los valores de K que permiten cumplir la especificación del error de velocidad son los siguientes:

c) Para conseguir un e_{SS} (rampa)=0,3 (30%) es necesario que K sea igual a 20
d) Para conseguir un e_{SS} (rampa)=0,1 (10%) es necesario que K sea igual a 60

Si estudiamos la estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante el criterio de Routh-Hurwitz, comprobamos que el sistema con K=20 es estable, pero con K=60 sería inestable. Por ello, no existe ningún valor de K para este sistema que permita estabilidad y error de velocidad del 10%.

Problema 3.24. El error de posición de los sistemas debido a la perturbación $D(s)$ de tipo escalón unitario viene dado por:

a)

$$e_D(\infty) = -\frac{1}{\lim\limits_{s\to 0} \dfrac{1}{G_2(s)} + \lim\limits_{s\to 0} G_1(s)} = -\frac{1}{0+1000} = -\frac{1}{1000}$$

b)

$$e_D(\infty) = -9.98 \times 10^{-4}$$