

## **RESUMEN TEORÍA FUNDAMENTOS DE LA AUTOMÁTICA:**

### **TEMA 2: MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS (FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y DIAGRAMAS DE BLOQUES)**

- 2.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE**
- 2.2 DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES**
- 2.3 MODELADO DE SISTEMAS ELÉCTRICOS Y MECÁNICOS**
- 2.4 ÁLGEBRA DE BLOQUES**

### **TEMA 3 (PARTE 1): IDENTIFICACIÓN DE LA RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE CONTROL (RESPUESTA TRANSITORIA)**

- 3.1.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y ESTABILIDAD**
- 3.1.2 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN**
- 3.1.3 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN**
- 3.1.4 ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN**
- 3.1.5 PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN**

### **TEMA 3 (PARTE 2): IDENTIFICACIÓN DE LA RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE CONTROL (RESPUESTA ESTACIONARIA)**

- 3.2.1 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH HURWITZ**
- 3.2.2 CASOS ESPECIALES**
- 3.2.3 ERROR (FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y TIPOS)**
- 3.2.4 ERROR FRENTE A PERTURBACIÓN**

### **TEMA 4: ANÁLISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL MEDIANTE EL MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES (LDR)**

- 4.1 CONDICIONES IMPORTANTES**
- 4.2 PROPIEDADES DE CONSTRUCCIÓN DEL LUGAR DE LAS RAÍCES**
- 4.3 COMPENSADORES DE ADELANTO Y RETARDO**

### **TEMA 5: ACCIONES BÁSICAS DE CONTROL (CONTROLADORES PID)**

- 5.1 EFECTOS DE CADA CONTROLADOR**
- 5.2 TIPOS DE CONTROLADORES (ECUACIÓN Y FUNCIONES)**
- 5.3 MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS**

# **TEMA 2: MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS (FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS, FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y DIAGRAMAS DE BLOQUES)**

## **2.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE**

Transformada de Laplace (definición):  $F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

Transformada inversa de Laplace (definición):  $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$

$\delta(t)$ (unit impulse)	1	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$u(t)$ (unit step)	$\frac{1}{s}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t$ (unit ramp)	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t \quad (\xi < 1)$
$t^n \quad (n \geq 1)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\omega_n^2}{s[s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2]}$	$1 - \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta)$ where $\theta = \cos^{-1} \xi \quad (\xi < 1)$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0)$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{1}{s} F(s)$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$

Teorema del valor inicial:  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$

Teorema del valor final:  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$




## **2.2 DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES**

Raíces reales simples:  $\frac{5s+10}{s(s+3)(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+3)} + \frac{C}{(s+5)}$

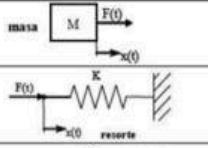
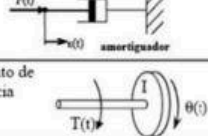
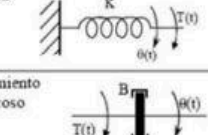
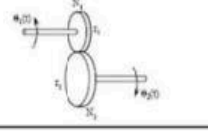
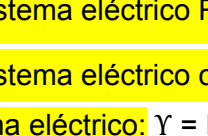
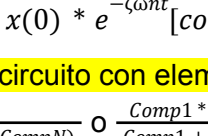
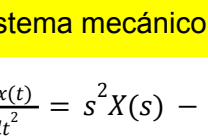
Raíces reales múltiples:  $\frac{5s+10}{(s+3)^2} = \frac{A}{(s+3)} + \frac{B}{(s+3)^2}$

Raíces complejas simples:  $\frac{5s+10}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)}$

## 2.3 MODELADO DE SISTEMAS ELÉCTRICOS Y MECÁNICOS

Component	Voltage-current	Current-voltage	Voltage-charge	Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C} q(t)$	$\frac{1}{Cs}$
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	$v(t) = R \frac{dq(t)}{dt}$	$R$
 Inductor	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$	$v(t) = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$	$Js$

SISTEMAS MECÁNICOS TRASLACIÓN		$F(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$	F: fuerza M: masa x: desplazamiento
		$F(t) = K \cdot x(t)$	F: fuerza K: constante del muelle x: desplazamiento
		$F(t) = B \frac{dx(t)}{dt}$	F: fuerza B: coeficiente de fricción viscosa x: desplazamiento
SISTEMAS MECÁNICOS ROTACIÓN		$T(t) = I \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2}$	T: par I: momento de inercia $\theta$ : desplazamiento angular
		$T(t) = K \cdot \theta(t)$	T: par K: constante del muelle $\theta$ : desplazamiento angular
		$T(t) = B \frac{d\theta(t)}{dt}$	T: par B: coeficiente de fricción viscosa $\theta$ : desplazamiento angular
SISTEMAS MECÁNICOS ENGRANAJES		$\frac{T_1(t)}{T_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\theta_1(t)}{\theta_2(t)}$ $r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2$	T: par N: número de dientes $\theta$ : desplazamiento angular r: radio

Función de transferencia de un sistema eléctrico RLC:  $G(s) = \frac{1/LC}{s^2 + R/Ls + 1/LC}$

Función de transferencia de un sistema eléctrico con tensión  $V_s(s)$ :  $G(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{\text{Componente en } V_s(s)}{\Sigma(\text{todos los componentes})}$

Constante de tiempo de un sistema eléctrico:  $\gamma = RC$ , criterio del 95% (3 $\gamma$ ), 98% (4 $\gamma$ ), 99% (5 $\gamma$ ).

Constante de movimiento:  $x(t) = x(0) * e^{-\zeta \omega_n t} [\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{1-\zeta^2} \sin(\omega_d t)]$ .

Función de transferencia para un circuito con elementos en paralelo (impedancia):

$$G(s) = \frac{1}{\Sigma(1/Comp)} = \frac{1}{(1/Comp1) + \dots + (1/CompN)} \text{ o } \frac{Comp1 * \dots * CompN}{Comp1 + \dots + CompN}$$

Función de transferencia de un sistema mecánico básico:  $G(s) = \frac{1}{Ms^2 + fvs + K}$

Condiciones iniciales no nulas:  $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = s^2 X(s) - sx(0) - \frac{dx(t)}{dt}$ ;  $\frac{dx(t)}{dt} = sX(s) - x(0)$ .

## 2.4 ÁLGEBRA DE BLOQUES

Bloques en cascada: x

Realimentación:  $G(s) = \frac{G}{1 \mp GH}$

Mover punto de suma a la derecha: x

Mover punto de suma a la izquierda: //

Mover punto de bifurcación a la izquierda: x

Mover punto de bifurcación a la derecha: //

## TEMAS 3 (PARTE 1): IDENTIFICACIÓN DE LA RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE CONTROL (RESPUESTA TRANSITORIA)

### 3.1.1 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y ESTABILIDAD

Función de transferencia (estructura):  $G(s) = \frac{\text{Ceros}}{\text{Polos}}$ , donde el denominador se denomina "polinomio característico".

Estabilidad: **Estable** (todos los polos en el semiplano izquierdo), **inestable** (algún polo en el semiplano derecho), **marginalmente / críticamente estable** (uno o más polos en el eje imaginario).

### 3.1.2 SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Función de transferencia de un sistema de primer orden:  $G(s) = \frac{K}{1+Ts}$

Parámetros característicos: **K** (ganancia estática / valor en régimen permanente), **T** (constante de tiempo),  $\sigma=1/T$  (factor de decaimiento),  $t_s=4T$  (tiempo de asentamiento).

### 3.1.3 SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Función de transferencia de un sistema de segundo orden:  $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$

Elementos de la función de transferencia: **K** (ganancia estática),  $\omega_n$  (frecuencia natural no amortiguada),  $\zeta$  (coeficiente de amortiguamiento),  $\sigma = \zeta\omega_n$  (factor de decaimiento),  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  (frecuencia amortiguada).

### 3.1.4 ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Sistema sobreamortiguado ( $\zeta > 1$ ):  $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

Sistema críticamente amortiguado ( $\zeta = 1$ ):  $s = -\zeta\omega_n$

Sistema subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ):  $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

Sistema oscilador ( $\zeta = 0$ ):  $s = \pm j\omega_n$

Sistema inestable ( $\zeta < 0$ ):  $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$

### 3.1.5 PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Tiempo de establecimiento:  $t_s = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\zeta\omega_n}$

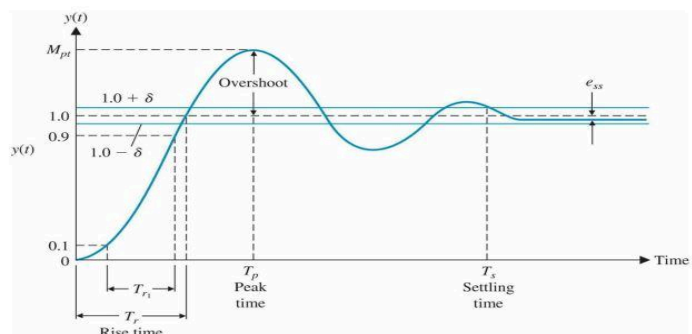
Tiempo de subida:  $t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \cos^{-1}(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

Tiempo de pico:  $t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

Valor de pico:  $Y_p = 1 + M_p$

Sobreoscilación:  $M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}} = e^{-\frac{\pi}{\tan(\theta)}}$

PROPIEDAD  $M_p$ :  $e^x = k \Rightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(k)$



## TEMA 3 (PARTE 2): IDENTIFICACIÓN DE LA RESPUESTA TEMPORAL DE SISTEMAS DE CONTROL (RESPUESTA ESTACIONARIA)

### 3.2.1 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE ROUTH HURWITZ

**Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz:** Si algún coeficiente del polinomio característico es nulo o negativo el sistema es inestable; pero si todas las raíces son negativas, o lo que es lo mismo, todos los coeficientes del polinomio característico existen y son positivos, aplicamos el criterio de Routh-Hurwitz.

$s^4$	$a_4$	$a_2$	$a_0$
$s^3$	$a_3$	$a_1$	0
$s^2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
$s^1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
$s^0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

### 3.2.2 CASOS ESPECIALES

**El primer elemento de una fila es nulo:** Se sustituye por un número muy pequeño cercano a él ( $\pm\epsilon$ ) y se continúa realizando el método.

**La fila completa es nula:** Se construye la fila derivando el polinomio de la fila superior.

**Índice de estabilidad del sistema:** Una vez se ha hallado el valor de K positivo que hace que todos los elementos de la fila sean 0, se tiene que el sistema es estable para  $0 < K < \text{valor}$ , críticamente estable para  $K = \text{valor}$ , e inestable para  $K > \text{valor}$  y  $K < 0$ .

**NOTA:** Hay casos en los que la primera cota no está en 0, y deben sustituirse por otro valor de K positivo que también cumple la condición que hace que todos los elementos de la fila sean 0.

### 3.2.3 ERROR (FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA Y TIPOS)

**Error real o verdadero:**  $\lim_{s \rightarrow 0} s * \text{Entrada} * (1 - \frac{GH}{1+GH})$

**Error de actuación o de control:**  $\lim_{s \rightarrow 0} s * \text{Entrada} * \frac{1}{1+GH}$

**IMPORTANTE:** Número de polos en el origen de la planta = Tipo del sistema, y ambos errores coinciden cuando  $H(s) = 1$ .

Tipo 0	$\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = K$	$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$	$e_{ss} = \frac{M}{1+k_p}$	Constantes			Error para diferentes entradas			
Tipo 1	$\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s}$	$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s)H(s)$	$e_{ss} = \frac{M}{k_v}$	Tipo	$k_p$	$k_v$	$k_a$	Salto	Rampa	Parábola
Tipo 2	$\lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^2}$	$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot G(s)H(s)$	$e_{ss} = \frac{M}{k_a}$	0	K	0	0	$M/(1+K)$	$\infty$	$\infty$
				1	$\infty$	K	0	0	$M/K$	$\infty$
				2	$\infty$	$\infty$	K	0	0	$M/K$

### 3.2.4 ERROR FRENTE A PERTURBACIÓN

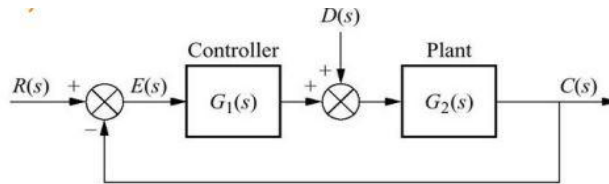
Función de transferencia de un sistema con perturbación:  $E(s) = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) - \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$

Sistema con perturbación:  $C(s) = Cr(s) + Cd(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$

Error frente a perturbación:

$$e(\infty) = er(\infty) + ed(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) - \lim_{s \rightarrow 0} s * \frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

Error frente a perturbación de tipo escalón:  $ed(\infty) = - \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)}$



## **TEMAS 4: ANÁLISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL MEDIANTE EL MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES (LDR)**

### **4.1 CONDICIONES IMPORTANTES**

**Condición de ángulo:**  $G(s)H(s) = \pm 180(2K + 1)$  donde  $K = 0, 1, 2, \dots$

**Condición de magnitud (sustituir s por los polos):**  $|G(s)H(s)| = 1/K$  (importante saber que  $i^2 = -1$ ).

### **4.2 PROPIEDADES DE CONSTRUCCIÓN DEL LUGAR DE LAS RAÍCES**

**Paso 1 (Identificación y ubicación de polos y ceros en lazo abierto):** Polos y ceros de la función  $G(s)H(s)$ .

**Paso 2 (Número de ramas):**  $\max(n^\circ \text{polos}, n^\circ \text{ceros})$  de la función  $G(s)H(s)$ .

**Paso 3 (Identificación de segmentos sobre el eje real):** Segmentos que tienen un número impar de polos y ceros a su derecha.

**Paso 4 (Cálculo de asíntotas):** **Número de asíntotas** ( $n^\circ \text{polos} - n^\circ \text{ceros}$ ), **ángulos** (1 asíntota  $\Rightarrow 180^\circ$ ; 2 asíntotas  $\Rightarrow 90^\circ, 270^\circ$ ; 3 asíntotas  $\Rightarrow 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ ; 4 asíntotas  $\Rightarrow 45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$ ), **centroide** ( $\sigma = \frac{(\text{Suma polos}) - (\text{Suma ceros})}{n^\circ \text{polos} - n^\circ \text{ceros}}$ ).

**Paso 5 (Puntos de corte con el eje imaginario):**  $1 + G(s)H(s)$  (aplicar Routh-Hurwitz, obtener el valor de K que anule una fila y obtener los valores de s que anulan el polinomio superior a la fila de ceros).

**Paso 6 (Puntos de ruptura o salida del eje real):**  $1 + G(s)H(s) = 0$  (hallar K, derivarla y hallar los valores de s que cumplan con  $dK/ds = 0$ ).

**Paso 7 (Ángulos de salida / llegada de las raíces):** Polos complejos ( $\sigma + \Sigma \text{ángulos polos} - \Sigma \text{ángulos ceros} = \pm 180$ ), ceros complejos ( $\sigma + \Sigma \text{ángulos ceros} - \Sigma \text{ángulos polos} = \pm 180$ ) donde  $\sigma$  es el ángulo que tenemos que calcular.

### **4.3 COMPENSADORES DE ADELANTO Y RETARDO**

**Efectos de adición:** Polos (desplaza el LDR a la derecha y disminuye su estabilidad), ceros (desplaza el LDR a la izquierda y aumenta su estabilidad).

**Compensador de adelanto-retardo:**  $G_c(s) = K_c \frac{s + z_c}{s + p_c}$ , donde, donde el compensador de adelanto el cero se encuentra más cerca del origen que el polo, mientras que en el de retardo es justo lo contrario.

## TEMA 5: ACCIONES BÁSICAS DE CONTROL (CONTROLADORES PID)

### 5.1 EFECTOS DE CADA CONTROLADOR

CL RESPONSE	RISE TIME	OVERSHOOT	SETTLING TIME	S-S ERROR
<b>Kp</b>	Decrease	Increase	Small Change	Decrease
<b>Ki</b>	Decrease	Increase	Increase	Eliminate
<b>Kd</b>	Small Change	Decrease	Decrease	Small Change

### 5.2 TIPOS DE CONTROLADORES (ECUACIÓN Y FUNCIONES)

**Controlador PID:** Dominio de  $t$  ( $K_p \cdot e(t) + K_i \int_0^t e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$ ), dominio de  $s$  ( $K_p \cdot E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} + K_d \cdot sE(s)$ ).

**Controlador PID (Ti y Td):**  $G(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$ , donde  $T_i = K_p / K_i$  y  $T_d = K_p / K_d$ .

**Controlador P:** Ganancia  $K$ .

**Controlador PD:** Cero en  $-1/T_d$ .

**Controlador PI:** Polo en el origen y cero en  $-1/T_i$  (anula el error en estado estacionario).

**Controlador PID:** Polo en el origen y dos ceros ( $-1/T_i$  y  $-1/T_d$ ) (anula el error en estado estacionario).

### 5.3 MÉTODO DE ZIEGLER-NICHOLS

**Primer método de Ziegler-Nichols:**  $T$  (constante de tiempo),  $L$  (tiempo de retardo experimental).

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{L}$	$\infty$	0
PI	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

**Segundo método de Ziegler-Nichols:**  $P_{cr}$  (periodo de oscilación crítico),  $K_{cr}$  (ganancia crítica).

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5 K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45 K_{cr}$	$\frac{1}{1.2} P_{cr}$	0
PID	$0.6 K_{cr}$	$0.5 P_{cr}$	$0.125 P_{cr}$

**Tipos de respuesta:** **Transitoria** (ubicación de polos dominantes en lazo cerrado), **estacionaria** (tipo de sistema / ganancia en lazo abierto).

**No cumple transitorio:** Añadir un polo en lazo abierto (controlador PD).

**No cumple estacionario:** Añadir un polo en el origen y un cero a  $\frac{1}{2}$  de la distancia de los polos dominantes (controlador PI).

**No cumple transitorio ni estacionario:** Ubicar polos y ceros según el error y el tipo del sistema.