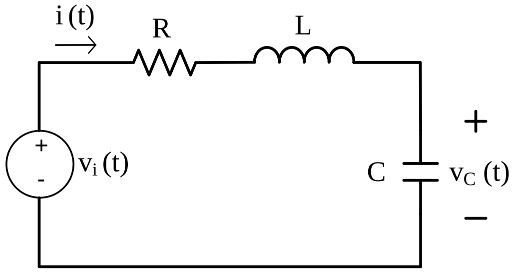
Ejercicio 1 (4,5 puntos)

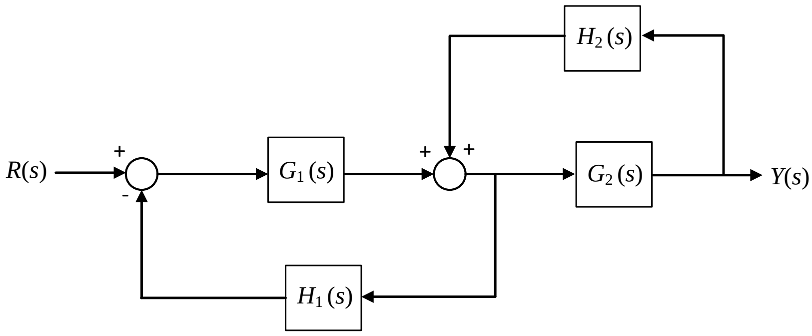
Un circuito RLC constituye un sistema de control. En efecto, la planta se integra por la impedancia del condensador, $G(s)=1/sC$. Por otro lado, la admitancia -o inversa de la impedancia- de la bobina (de valor fijo) en serie con la resistencia (variable, a modo de potenciómetro) actúan como controlador; esto es $C(s)=1/(R+sL)$. La variable de interés es la tensión del condensador, $v_C(t)$. Ciertamente, la bobina por sí sola no es capaz de controlar la tensión en el condensador de forma eficiente, por lo que se introduce la resistencia para corregir el comportamiento anómalo del circuito original LC alimentado por una fuente de tensión continua (escalón unitario), $v_i(t)=u(t)$.



(i) Determine la función de transferencia de $V_C(s)/V_i(s)$, a partir del circuito original LC (R=0). También, calcule la respuesta temporal de la tensión en el condensador. ¿Es una respuesta no ideal?.
(ii) Al incluir la resistencia variable en el circuito, se controla eficientemente la tensión en el condensador. Especifique la estructura del diagrama de bloques, indicando los bloques y señales que constituyen el sistema. Considere realimentación negativa y unitaria, $H(s)=1$.
(iii) Explique detalladamente cuál es la evolución de la respuesta temporal de la tensión en el condensador $v_C(t)$, al variar el valor de la resistencia (potenciómetro).
(iv) ¿Se asemeja $C(s)$ a algún tipo de controlador de la familia de los PIDs? Justifique su respuesta.
(v) Especifique el tipo de sistema a partir del error de control. En el escenario de que R=0, ¿se obtienen resultados razonables?.

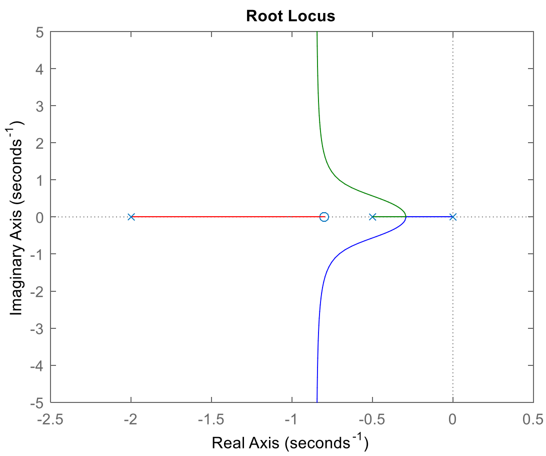
Ejercicio 2 (1,5 puntos)

El diagrama de bloques de la figura es un lazo de control. Las funciones de transferencia $G_2(s)$ y $H_2(s)$ son fijas. Determínense $G_1(s)$ y $H_1(s)$ de tal forma que $Y(s)=R(s)$.



Ejercicio 3 (4 puntos)

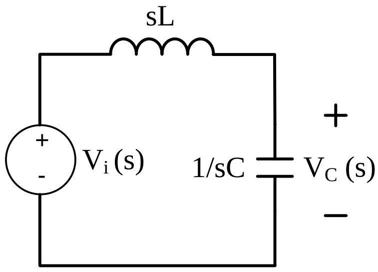
La figura adjunta muestra el LDR de un sistema que ha sido regulado utilizando un compensador de adelanto, con el cero en s=-0,8 y el polo en s=-2. En este nuevo escenario, la situación deseada de los polos dominantes es s=-0,8±1,56j. La planta tiene un polo en el origen, otro en s=-0,5 y una constante de error de velocidad, K_v=10. En efecto, se considera $H(s)$=1. Se pide:



(i) Comparar el LDR original (sin compensador) *vs.* sistema compensado, apoyándose en la teoría de efectos de adición de polos y ceros.
(ii) Determinar la ganancia del compensador, de tal que forma que los polos dominantes en lazo cerrado se encuentren localizados en el lugar deseado.
(iii) Calcular el tiempo de establecimiento t_s y la sobreoscilación M_p(%).
(iv) ¿Es posible conseguir un error de velocidad, con el sistema compensado, menor que 0,1?

Ejercicio 1

(i) El circuito de interés en el dominio de *s*, para *t*>0, es:



Se aplica el divisor de tensión:

$$V_C(s)=V_i(s)\frac{\frac{1}{sC}}{sL+\frac{1}{sC}}\rightarrow\frac{V_C(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{s^2LC+1}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{LC}}$$

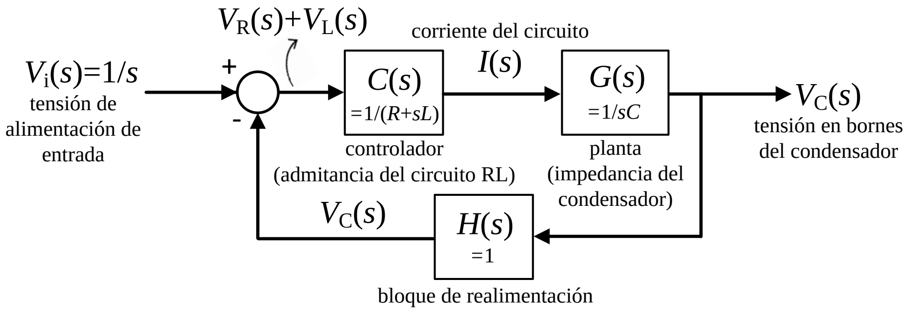
Ciertamente, si nos fijamos en el denominador de la función de transferencia resultante, falta el término en *s*, por lo que el amortiguamiento es nulo, $\xi=0$, y la respuesta temporal de la tensión en el condensador será una oscilación sostenida.

Considerando $V_i(s)=1/s$, la tensión en el condensador, planteando la descomposición en fracciones simples y aplicando la antitransformada de Laplace, resulta:

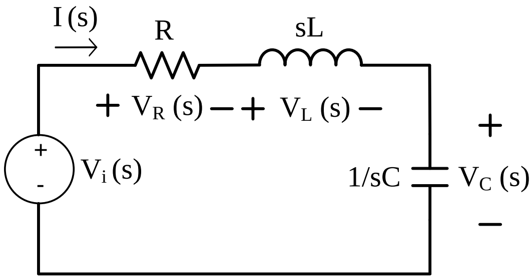
$$V_C(s)=\frac{1}{s}\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{1}{LC}}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+\frac{1}{LC}}=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\frac{1}{LC}}\rightarrow\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)]=1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right)$$

Nótese que, para antitransformar al dominio del tiempo, se aplican las transformadas n^os^ 1 y 11 de la versión extendida de la tabla de transformadas de Laplace. En efecto, se tiene una respuesta basada en una oscilación sostenida siendo la entrada una señal en escalón unitario. No se respeta el "compromiso" entre la entrada (continua) y la salida (sinusoidal acotada), por lo que resulta un sistema críticamente estable (polos complejos imaginarios puros).

(ii) A partir de las pautas indicadas en el enunciado, se construye el diagrama de bloques resultante:



En efecto, la inclusión de los bloques es trivial. Sin embargo, la identificación de las señales es esencialmente algo más compleja. Consideremos el circuito RLC en el dominio de *s*. La señal de entrada (patrón) es la tensión de la fuente de alimentación, $V_i(s)$. Por otro lado, la señal de interés (salida) es la tensión en el condensador, $V_C(s)$. Pero, ¿y el resto de señales en el diagrama de bloques? Al considerar realimentación negativa y unitaria, la señal de la tensión en el condensador se "compara" directamente con la tensión de la fuente de alimentación en el punto de resta, $V_i(s)-V_C(s)$. Ciertamente, se está aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones (LKT), y por



lo tanto, a la salida del comparador (señal de error) se tiene $V_R(s)+V_L(s)$. Esta señal se multiplica por la admitancia (inversa de la impedancia) del circuito serie $R+sL$, de tal forma que ahora, estoy aplicando la ley de Ohm de dicho subcircuito, $[V_R(s)+V_L(s)]/(R+sL)$, obteniendo a la salida del controlador, lógicamente, la corriente que circula por el circuito $I(s)$. Finalmente, al multiplicar $I(s)$ -señal de actuación- por la impedancia del condensador $1/sC$ (planta), se tiene la tensión del condensador, $V_C(s)$. Nótese que el esbozo del diagrama de bloques se realiza en el dominio de s.

(iii) A partir de la función de transferencia en lazo cerrado del diagrama de bloques obtenido en (ii) o bien utilizando el circuito RLC, resulta:

$$V_C(s)=V_i(s)\frac{\frac{1}{sC}}{R+sL+\frac{1}{sC}} \rightarrow G_{LC}(s)=\frac{V_C(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{s^2LC+RCs+1}=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_n=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}\ \text{rad/s} \\ 2\xi\omega_n=\dfrac{R}{L} \rightarrow \xi=\dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{cases}$$

Tal y como se adelantó en (i), el factor de amortiguamiento y el valor característico de la resistencia son proporcionales, verificando la obtención de una oscilación sostenida cuando $R=0$. Nótese que ξ presenta una relación cuadrática directa e inversa con C y L, respectivamente. Por ello, a medida que aumente el valor dinámico de R (tenga en cuenta que L y C son valores estáticos) se extinguirán las oscilaciones. Para obtener el valor de referencia R de la resistencia variable, sobre el cual se obtiene una respuesta críticamente amortiguada, $\xi=1$ (polos dobles con parte real negativa), se plantea:

$$\xi=1 \rightarrow \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}=1 \rightarrow R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Por tanto, si, por un lado, $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$, la respuesta es sobreamortiguada ($\xi>1$) y las raíces son reales negativas y distintas. Por otro lado, si $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ la respuesta es subamortiguada ($\xi<1$) y las raíces son complejas conjugadas con parte real negativa.

(iv) El controlador del sistema es: $C(s)=1/(R+sL)$, que exhibe un polo real negativo de valor $s=-R/L$ y ningún cero. Recordando la teoría relativa a los controladores de la familia de los PIDs; el controlador proporcional, lógicamente, no tiene ni polos ni ceros, más allá de un ganancia $K>0$. El regulador PD añade al control proporcional, un cero real negativo; y el PI, un cero de naturaleza similar y un polo en el origen. Finalmente, el control PID exhibe dos ceros (integral + derivativo) y un polo en el origen (integral), además del control proporcional. Por tanto, los controladores de la familia de los PIDs no contienen polos reales (distintos de cero), por lo que, para esta aplicación, $C(s)$ no se asemeja a dichos controladores.

(v) A partir del diagrama de bloques hallado en (ii), se obtiene el error de control (posición) del sistema (tensión en bornes del circuito serie RL):

$$E(s)=V_i(s)\frac{1}{1+C(s)G(s)} \rightarrow e_{SS_{V_i(s)=\frac{1}{s}}}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\left(s\frac{1}{s}\frac{1}{1+\frac{1}{R+sL}\frac{1}{sC}}\right)=0$$

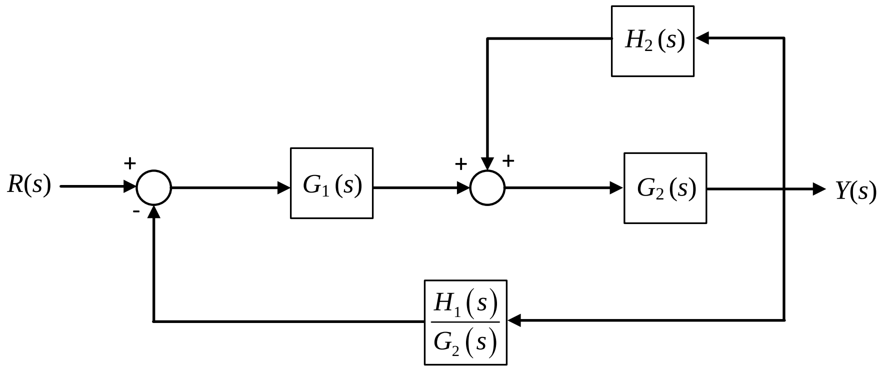
independientemente del valor de R. No se trata de un sistema tipo 0, por lo que para discernir entre tipo I y/o tipo II, debemos realizar una comprobación adicional:

$$e_{SS_{V_i(s)=\frac{1}{s^2}}}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\left(s\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+\frac{1}{R+sL}\frac{1}{sC}}\right)=RC$$

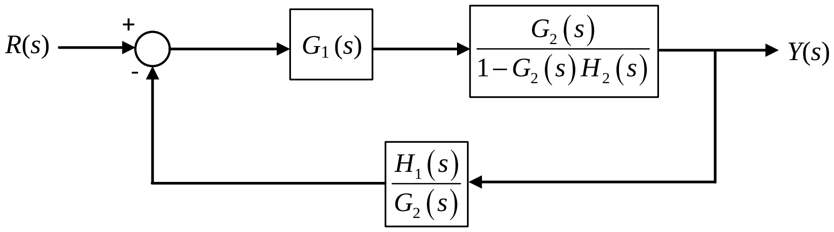
Por lo que, se trata de un sistema tipo I, con error finito ante una entrada rampa en el circuito RLC. Sin embargo, si R=0, el error de velocidad también resultaría 0, lo cual no tiene sentido con lo analizado previamente con ninguna de las dos entradas ensayadas. En efecto, e_{SS} tan solo es extrapolable para el caso en el que se implementa el potenciómetro con un valor de resistencia seleccionado. De esta forma, el sistema no será críticamente estable y, matemáticamente, la parte real de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado será estrictamente negativa. Por tanto, si se trabaja sobre el circuito LC (críticamente estable) no se puede aplicar el teorema del valor final ya que se tiene una respuesta oscilatoria, no se llega a un régimen estacionario y, por tanto, se tiene un error variable con el tiempo.

Ejercicio 2

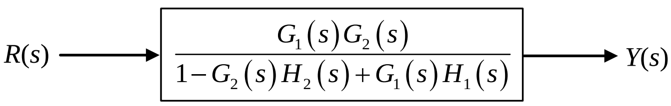
En primer lugar, se requiere obtener la función de transferencia $Y(s)/R(s)$ aplicando el álgebra de bloques. Inicialmente, se desplaza el punto de bifurcación central hacia la derecha (regla nº4 del álgebra de bloques):



Ahora, se aplica el *feedback* de $G_2(s)$ y $H_2(s)$:



Finalmente, se vuelve a aplicar la regla nº6 del álgebra de bloques, tras asociar en serie (cascada) el resultado previo con $G_1(s)$. El resultado final es:



Igualando la función de transferencia en lazo cerrado a 1, $Y(s)$=$R(s)$, se obtiene la relación deseada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1\text{-}G_2(s)H_2(s)+G_1(s)H_1(s)}=1 \rightarrow G_1(s)G_2(s)+G_2(s)H_2(s)=1+G_1(s)H_1(s)$$

obteniendo, por ejemplo, $G_1(s)=1/G_2(s)$ y $H_1(s)=H_2(s)[G_2(s)]^2$.

Ejercicio 3

(i) En primer lugar, se requiere nombrar los dos bloques principales $G(s)$ y $H(s)$:

$$G(s)=\frac{K_{LA}}{s(s+0,5)} \quad \text{y} \quad H(s)=1$$

Efectivamente, la ganancia en lazo abierto de la planta es desconocida. Para hallarla, se utilizará el dato conocido de la constante de error de velocidad, resultando:

$$k_v=\lim_{s\to 0} sG(s)H(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{K_{LA}}{s(s+0,5)}=10 \to K_{LA}=5$$

Por tanto:

$$G(s)=\frac{5}{s(s+0,5)}$$

Una vez conocidos los bloques del lazo de control sin compensador, implementamos los pasos necesarios para realizar el bosquejo del LDR (control proporcional).

- Paso 1: Identificación y ubicación de polos y ceros en lazo abierto. Se tienen 2 polos en 0 y -0,5 (semiplano negativo del eje real) y ningún cero.
- Paso 2: Número de ramas. Por lo dado anteriormente: n=2 y m=0. Por tanto, el número de ramas es: 2. Nótese que n y m denotan el número de polos y ceros, respectivamente.
- Paso 3: Identificación de segmentos sobre el eje real. A partir de los datos obtenidos en el paso 1, se identifica fácilmente que el único segmento que pertenece al LDR es de 0 a -0,5. El rango dado no indica el sentido de la rama.
- Paso 4: Cálculo de asíntotas.
  a) Número de asíntotas: n-m=2.
  b) Ángulo de las asíntotas: 90º y 270º.
  c) Centroide:

$$\sigma=\frac{\sum \text{polos} - \sum \text{ceros}}{\text{n}^{\text{o}}\ \text{polos} - \text{n}^{\text{o}}\ \text{ceros}}=\frac{(0\text{-}0,5)}{2\text{-}0}=\text{-}0,25$$

- Paso 5: Puntos de corte con el eje imaginario. Nos fijamos en el polinomio auxiliar:

$$1+KG(s)H(s)=1+K\frac{5}{s(s+0,5)}=\frac{s(s+0,5)+5K}{s(s+0,5)} \to s^2+0,5s+5K$$

  Ciertamente, se visualiza con facilidad que ningún valor de K, para K>0, hará posible que el polinomio característico contenga raíces complejas imaginarias puras. Esto era previsible con el paso 4, a través del cálculo de las asíntotas (90º y 270º en s=-0,25)

- Paso 6: Puntos de ruptura o salida del eje real. Obtenemos un valor que refina el trazado de las ramas. Para ello, se impone:

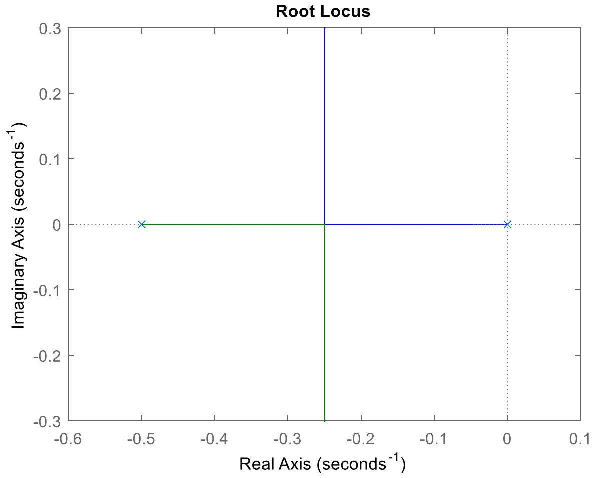
$$1+KG(s)H(s)=0 \to 1+K\frac{5}{s(s+0,5)}=0 \to K=\text{-}\left(0,2s^2+0,1s\right)$$

$$\frac{dK}{ds}=\text{-}0,4s\text{-}0,1=0 \to s=\text{-}0,25$$ (punto medio del segmento sobre el eje real o centroide las asíntotas)

- Paso 7: Ángulo de salida o llegada de las raíces. Como no existen ni polos ni ceros en el LDR con parte real y compleja conjugada, este paso no es necesario llevarlo a cabo.

Por tanto, el bosquejo del LDR del sistema sin compensar (controlador proporcional) previamente argumentado resulta con el esquema variable en función de la ganancia K mostrado en la página siguiente.

En comparación con el LDR compensado, la adición de un cero y un polo más alejados del origen que las componentes de la planta, mejora la respuesta en lazo cerrado del sistema. Sin embargo, esto no se produce por añadir las componentes individualmente, sino en conjunto. La adición de un polo (cero) a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de desplazar el LDR a la derecha (izquierda), lo que disminuye (aumenta) la estabilidad relativa del sistema. En efecto, ambas componentes tienen efectos inversos, por lo que, esencialmente, mantienen las características del LDR del sistema. La modificación más importante es el desplazamiento del centroide; más negativo y alejado del origen porque el cero se encuentra más a la derecha.



(ii) En el enunciado, el esbozo del LDR muestra el desplazamiento de los polos del sistema compensado en lazo cerrado. La función de transferencia del controlador es:

$$C(s)=K\frac{s+0{,}8}{(s+2)}$$

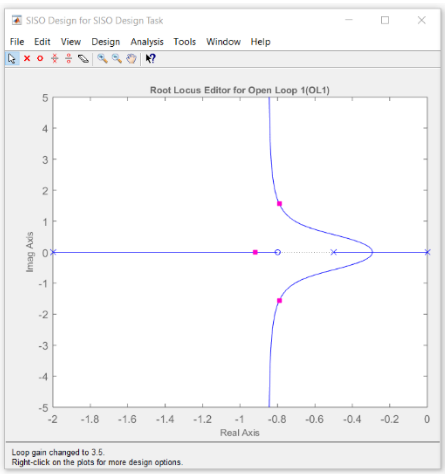
Ciertamente, no es inmediato obtener el valor de la ganancia K del controlador de adelanto en la localización deseada, s=-0,8±1,56j. Para ello, utilizamos la condición de magnitud del LDR, seleccionando un valor (imaginario positivo) de los polos complejos conjugados dados:

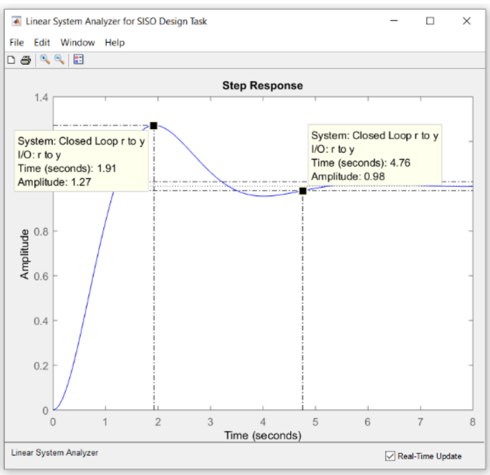
$$|C(s)G(s)H(s)|_{s=-0{,}8+1{,}56j}=1 \rightarrow K\frac{(-0{,}8+1{,}56j)+0{,}8}{[(-0{,}8+1{,}56j)+2]}\frac{5}{(-0{,}8+1{,}56j)[(-0{,}8+1{,}56j)+0{,}5]}=1 \rightarrow K=3{,}5$$

En efecto, la función de transferencia en lazo abierto debe ser igual a 1 si se sustituye s por un valor perteneciente al LDR (condición de magnitud) y a 180°(2k+1) en fase (condición de ángulo).

(iii) Es fácilmente deducible que se tiene un sistema de orden tres (superior) de naturaleza subamortiguada. Por ello, dos polos se situarán en s=-0,8±1,56j y otro sobre el eje real (rama roja del LDR). Ciertamente, los polos "deseados" serán las raíces dominantes pero, sin embargo, no se podrá utilizar la aproximación característica ya que no se encuentran suficientemente alejados entre sí. En cualquier caso, a partir de ellos se podrá estimar, con una cierta exactitud aproximada, el valor del tiempo de asentamiento t_s y la sobreoscilación M_p(%).

$$s=-0{,}8\pm1{,}56j \rightarrow \begin{cases} \xi\omega_n=0{,}8 \\ \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}=1{,}56 \end{cases}$$





De ambas ecuaciones, resulta ξ=0,45 y ω_n=1,45 rad/s.
Aplicando las fórmulas características correspondientes se tiene:

$$t_s=\frac{4}{\xi\omega_n}=5\ \text{s} \quad \text{y} \quad M_p=100\exp\left[-\frac{\xi\omega_n\pi}{\omega_d}\right]=26{,}89\%$$

En efecto, tal y como se visualiza en la figura de la página anterior, s=-0,8±1,56j son los polos dominantes. Por ello, a partir de los mismos se pueden extraer buenas aproximaciones de los valores característicos de la respuesta temporal.

(iv) Calculamos el error de velocidad (entrada rampa, $1/s^2$) dependiente de K:

$$E(s)=\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+C(s)G(s)H(s)} \rightarrow e_{SS}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\left(s\frac{1}{s^2}\frac{1}{1+K\frac{s+0{,}8}{(s+2)}\frac{5}{s(s+0{,}5)}}\right)=\frac{1}{4K}$$

Planteando la inecuación $(1/4K)<0{,}1$, resulta que sí es posible si: $K>2{,}5$.