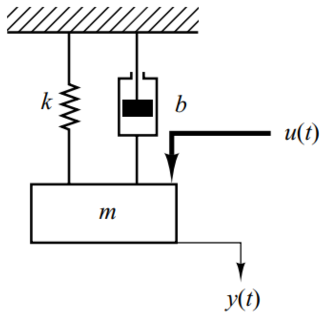
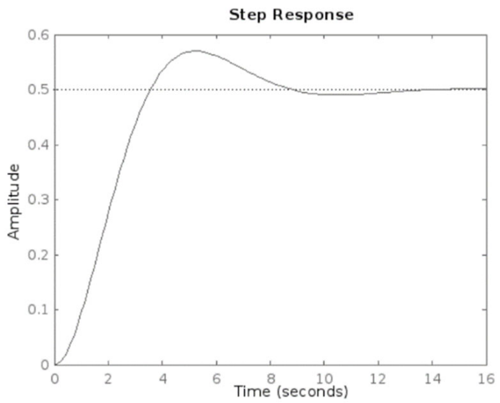
Ejercicio 1: Modelado transitorio de sistemas en el dominio del tiempo (4 puntos)

Dado el sistema mecánico de la figura, se pide analizar su comportamiento en diferentes escenarios de trabajo independientes:



(i) Determine la relación entre los componentes m y k para que el sistema sea críticamente amortiguado, considerando b=1 Ns/m. Para ello, ayúdese de la función de transferencia del sistema, $Y(s)/U(s)$.

(ii) Ahora se tiene un nuevo escenario con b desconocida. El amortiguador contiene un movimiento inicial previo ya que “almacena energía mecánica”. Esto se manifiesta a través de las condiciones iniciales. A través de su ecuación de definición, esboce el circuito equivalente del amortiguador considerando condiciones iniciales no nulas, $y(0)\neq 0$ m.

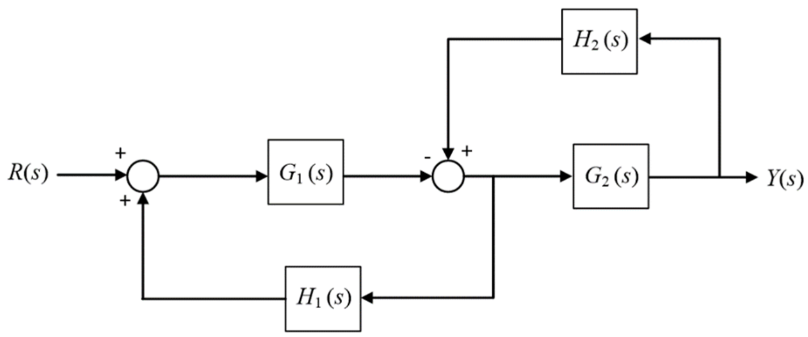


(iii) La respuesta ante escalón unitario exhibe la forma de onda de la figura. A partir de la misma, determine el valor de cada uno de los parámetros y la respuesta analítica del sistema mecánico para así caracterizarlo.

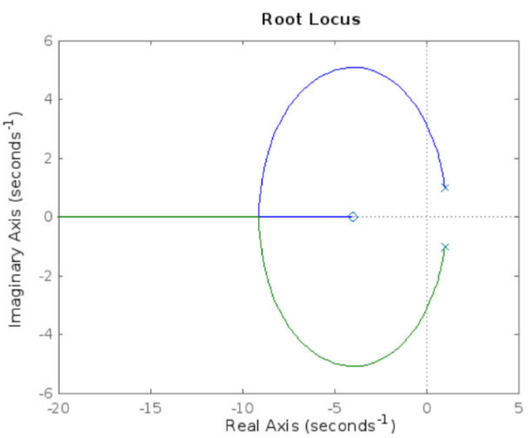
(iv) Sabiendo que la fórmula del error verdadero se extrae como $E_v(s)=Y(s)-U(s)$, extraiga la respuesta temporal del error y analice su evolución haciendo hincapié en el régimen permanente. ¿Qué parámetros deben modificarse para conducir al mínimo error?

Ejercicio 2: Diagrama de bloques (2,5 puntos)

El diagrama de bloques de la figura es un lazo de control. Las funciones de transferencia $G_1(s)$ y $H_1(s)$ son fijas. Determínense $G_2(s)$ y $H_2(s)$ de tal forma que $Y(s)=R(s)$.



Ejercicio 3: Lugar de las raíces y controladores PID (3,5 puntos)



Para el LDR mostrado en la figura, cuyos componentes, en lazo abierto, son una ganancia unitaria, un cero situado en s=-4 y un polo en s=1±j, se pide:

(i) Indique el rango de valores de K para que el sistema sea estable sabiendo que el punto de corte con el eje imaginario se produce en s=±j3,16.

(ii) Sabiendo que el punto de llegada de ambas ramas se produce en s=-9, diseñe el controlador de la familia de los PIDs más sencillo para que el sistema sea críticamente amortiguado y el error de posición sea nulo. Razone si se obtendrá la respuesta transitoria esperada.

Ejercicio 1

(i) En primer lugar, se calcula la función de transferencia del sistema utilizando las leyes de Newton y, después, la transformada de Laplace considerando condiciones iniciales nulas:

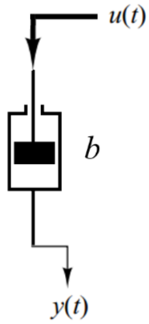
$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=u(t)$$

$$Y(s)[ms^2+bs+k]=U(s) \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{ms^2+bs+k}=\frac{1/m}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}$$

Tras reordenar el denominador de la función de transferencia, $s^2+{}^{b}/_{m}\,s+{}^{k}/_{m}$, para poder compararlo con el polinomio característico de sistemas de segundo orden, $s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2$, se puede extraer fácilmente la solución. Si uno se fija en el término libre del polinomio, resulta que ${}^{k}/_{m}=\omega_n^2$; por tanto, $\omega_n=\sqrt{{}^{k}/_{m}}$ rad/s. Ahora, se analiza el término con *s*, obteniéndose fácilmente que: $2\xi\omega_n={}^{1}/_{m}$; es decir, $\xi={}^{1}\Big/_{2m\sqrt{{}^{k}/_{m}}}={}^{1}/_{2\sqrt{km}}$. Nótese que, en la sustitución previa, se tuvo en cuenta que *b*=1 Ns/m (véase el enunciado). Fijando, por tanto, que $\xi=1$ y operando matemáticamente, resulta la relación *k*-*m* que constituye la solución: $k={}^{1}/_{4m}$.

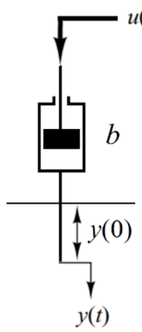
Para el caso de un sistema críticamente estable, la única solución sería: $k=0$.

(ii) El amortiguador, en el dominio del tiempo, se representa como:



teniendo en cuenta que los sentidos de la fuerza y el desplazamiento son los mismos (hacia abajo). Por tanto, la ecuación constitutiva del amortiguador es: $u(t)=b\,{}^{dy(t)}/_{dt}$.

Seguidamente, se realiza la transformación al dominio de *s* para obtener el circuito equivalente considerando condiciones iniciales no nulas. Utilizando la transformada de la primera derivada de *y*(*t*), resulta: $U(s)=b[sY(s)\text{-}y(0)]$, ya que $\mathcal{L}\left[{}^{dy(t)}/_{dt}\right]=sY(s)\text{-}y(0)$. Si se despeja *Y*(*s*), se tiene que $Y(s)={}^{U(s)}/_{bs}+{}^{y(0)}/_{s}$; es decir, el desplazamiento del amortiguador es debido a la propia acción de la fuerza sobre el dispositivo (primer término referido a la "impedancia mecánica" del amortiguador) pero también por la posición previa desplazada cuantificada a través del segundo término. Lógicamente, si $y(0)=0$ m, se tiene la ecuación constitutiva del amortiguador en el dominio de *s*. Con todo ello, el circuito equivalente, en el dominio de *s*, del amortiguador con condiciones iniciales no nulas, se muestra en la figura derecha.



(iii) A partir de la respuesta temporal esbozada en el enunciado, se pueden extraer los parámetros característicos del sistema y, con ellos, el valor de los dispositivos que conforman el sistema mecánico. Se tiene un sistema subamortiguado tipo 0. Esto es fácilmente deducible a partir de las oscilaciones de la respuesta y el valor final obtenido, distante de 1 (entrada escalón de referencia). Inicialmente, se propone calcular el valor de la respuesta en régimen permanente aplicando el teorema del valor final y se iguala a 0,5 (valor extraído de la figura para $t\rightarrow\infty$):

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s(ms^2+bs+k)}=\frac{1}{k}=0{,}5\rightarrow k=2\text{ N/m}$$

Después, se propone estudiar la sobreoscilación obtenida y, a través de ella, el factor de amortiguamiento. Nótese que el valor de sobreoscilación máximo se obtiene en el tiempo de pico, t_p.

$$M_p=\frac{y(t_p)-y(\infty)}{y(\infty)}=\frac{0{,}58-0{,}5}{0{,}5}=0{,}16\rightarrow 16\%$$

$$M_p=\exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)=0{,}16\rightarrow\xi=0{,}53$$

En efecto, los resultados son coherentes: Un valor moderado de sobreoscilación resulta en un valor intermedio de ξ, dentro del rango de los sistemas subamortiguados, $0<\xi<1$. Por último, se analiza el tiempo de pico para obtener la pulsación natural no amortiguada:

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-0{,}53^2}}=5\rightarrow\omega_n=0{,}71\text{ rad/s}$$

Se llama la atención del lector a que puede haber una ligera discrepancia entre valores obtenidos debido a la estimación de parámetros desde la gráfica. Este evento no es importante.

Por tanto, se tiene el valor de ξ y ω_n, pudiéndolo comparar con la forma paramétrica normalizada de la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{{}^{1}\!/_{m}}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

obteniéndose que:

$$\omega_n^2=\frac{k}{m}\rightarrow m=\frac{k}{\omega_n^2}=4\text{ kg}$$

$$2\xi\omega_n=\frac{b}{m}\rightarrow b=2\xi m\omega_n=3\text{ Ns/m}$$

Con el sistema caracterizado, se puede obtener de manera sencilla la respuesta analítica de $y(t)$ ante un escalón unitario, $u(t)=1$ para $t>0$. Por ejemplo, se propone utilizar directamente las tablas de la transformada de Laplace; en concreto la fila 24, reformando la respuesta $Y(s)$, de tal forma que se tenga que:

$$Y(s)=\frac{{}^{1}\!/_{m}}{s\left(s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}\right)}=\frac{1}{k}\frac{{}^{k}\!/_{m}}{s\left(s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}\right)}$$

A partir de ella, se tiene que:

$$y(t)=1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\text{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t-\text{atg}\left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]\right)=0{,}5-0{,}59e^{-0{,}38t}\text{sen}(0{,}60t-58^{o})$$

(iv) Según la función de transferencia en lazo cerrado obtenida previamente, el error verdadero en el dominio de s, resulta en:

$$E_v(s)=Y(s)-U(s)=U(s)\frac{1/m}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}-U(s)=U(s)\left[\frac{1/m}{s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}}-1\right]$$

Considerando el caso más sencillo (posición), se tiene que $U(s)=1/s$. En ese caso:

$$E_v(s)=\frac{1/m}{s\left(s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}\right)}-\frac{1}{s}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, se obtiene la forma analítica temporal del error verdadero, $e_v(t)$. Por tanto:

$$e_v(t)=\mathcal{L}[E_v(s)]=y(t)-x(t)=-0{,}5-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\mathrm{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t-\mathrm{atg}\left[\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]\right)$$

donde ξ y ω_n han sido definidas previamente en función de los parámetros del sistema mecánico. En efecto, al contar con la respuesta temporal de $y(t)$, obtener la evolución temporal del error verdadero es muy sencillo.

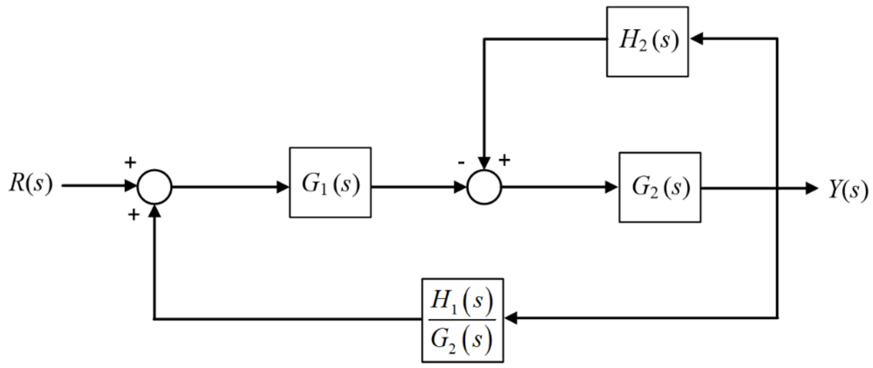
Finalmente, se analiza la importancia de cada uno de los dispositivos del circuito en el error en régimen permanente. Para ello, se aplica el teorema del valor final:

$$e_v(\infty)=\lim_{s\to 0} sE_v(s)=\lim_{s\to 0} s\left[\frac{1/m}{s\left(s^2+\frac{b}{m}s+\frac{k}{m}\right)}-\frac{1}{s}\right]=\frac{1}{k}-1=\frac{1-k}{k}$$

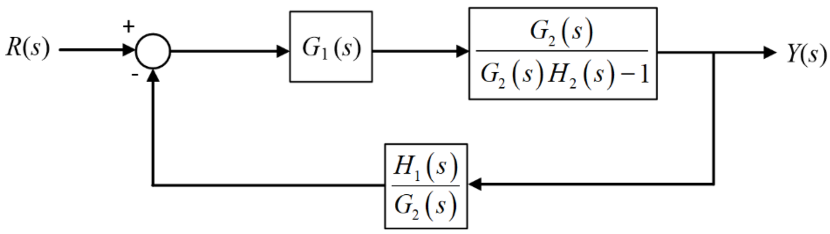
Por inspección, se ve fácilmente que el error en régimen permanente solo depende de k, conduciendo su aumento a una disminución del error verdadero.

Ejercicio 2

Inicialmente, se requiere obtener la función de transferencia $Y(s)/R(s)$ aplicando el álgebra de bloques. Para ello, se desplaza el punto de bifurcación central hacia la derecha (regla nº4):



Ahora, se aplica el *feedback* de $G_2(s)$ y $H_2(s)$:



Téngase en cuenta el signo "-" en trayectoria directa que modifica ambos signos del denominador de la función de transferencia. Finalmente, se vuelve a aplicar la regla nº6 del álgebra de bloques, tras asociar en serie (cascada) el resultado previo con $G_1(s)$. El resultado final es:

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{G_1(s)G_2(s)}{G_2(s)H_2(s)-1-G_1(s)H_1(s)}} \longrightarrow Y(s)$$

Igualando la función de transferencia en lazo cerrado a 1, $Y(s)=R(s)$, se obtiene la relación deseada:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{G_2(s)H_2(s)\text{-}1\text{-}G_1(s)H_1(s)}=1 \rightarrow G_1(s)G_2(s)\text{-}G_2(s)H_2(s)=\text{-}1\text{-}G_1(s)H_1(s)$$

obteniendo, por ejemplo, $G_1(s)=-1/G_2(s)$ y $H_1(s)=G_2(s)H_2(s)/G_1(s)$.

Ejercicio 3

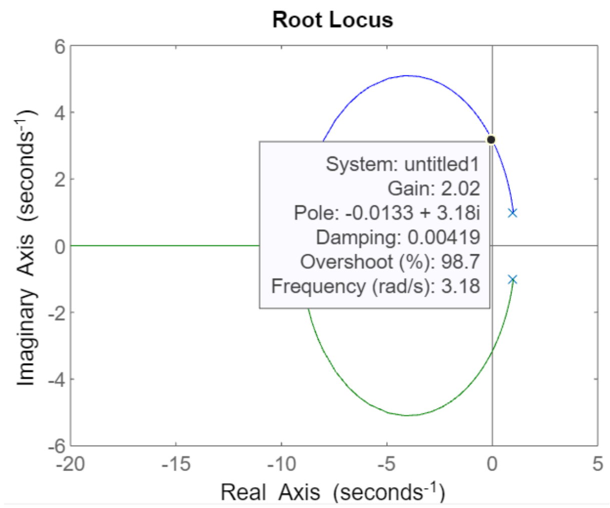
(i) El denominador de la función de transferencia en lazo cerrado, y único polinomio bajo estudio, en el esbozo del lugar de las raíces es: $1+KG(s)H(s)$, considerando la estructura estándar. Los componentes dados, en términos de ganancia, polos y ceros, se refieren a $G(s)H(s)$. No se sabe cuál pertenece a $G(s)$ y cual a $H(s)$, pero es indiferente para el esbozo del LDR. A partir de los componentes indicados, se sabe que el polinomio es:

$$1+K\frac{s+4}{s^2\text{-}2s+2}=0$$

Al igualar a 0 y sustituir $s=\pm j3{,}16$ (en este caso consideraremos en los cálculos el valor positivo de la coordenada compleja), se está aplicando el criterio del módulo, o lo que es equivalente, el paso 5 del bosquejo del LDR, resultando:

$$\left|\frac{3{,}16j+4}{(3{,}16j)^2\text{-}2(3{,}16j)+2}\right|=\frac{1}{K} \rightarrow K=2$$

El valor de K obtenido se corresponde con el punto de corte del LDR con el eje imaginario; es decir, cuando el sistema es críticamente estable:



A partir de ahí, el sistema siempre será estable considerando valores ascendentes de K. Por tanto, el sistema es estable si $K>2$.

(ii) Si uno se fija en la función de transferencia en lazo abierto y cuenta el número de polos en $s=0$, el contaje resulta 0. Es decir, no hay ningún polo situado en el origen. Esto conduce inequívocamente a un sistema tipo 0, el cual resulta en errores "finitos" ante entradas escalón (posición) e infinitos ante entradas en forma de rampa (velocidad) y parábola (aceleración). Para conseguir eliminar completamente el error de posición, es necesario "subir" el tipo de sistema, hasta 1. Para ello, se requiere introducir un controlador que introduzca un polo en el origen y, de la familia de los PIDs, solo lo hacen aquellos que introducen una acción integradora. Por tanto, se descartan los controladores P y PD. Se prueba directamente con el regulador más sencillo de los restantes, el PI, cuya función de transferencia es: $R(s)=K\left({}^{s+z}/_{s}\right)$.

Una vez se consigue el requerimiento del error nulo, solo se necesita obtener además un sistema críticamente amortiguado. Es decir, un objetivo para dos grados de libertad que propone el regulador PI a través de su ganancia K y su cero z. Por ello, podemos fijar uno de los parámetros y regular el otro para conseguir el sistema críticamente amortiguado. Con el fin de no modificar el LDR en exceso, se propone situar el cero muy cerca del origen; por ejemplo, en z=1,5. Ahora ha aparecido una nueva rama, tal y como se puede visualizar en el nuevo LDR pero que no perturba en exceso el esbozo. Simplemente, tal y como se hizo en el apartado (i), ahora es necesario calcular la ganancia asociada al punto de encuentro de las otras ramas en s=-9. El nuevo polinomio bajo estudio es:

$$1+R(s)\frac{s+4}{s^2-2s+2}=0 \rightarrow 1+K\frac{s+1{,}5}{s}\frac{s+4}{s^2-2s+2}=0$$

Si se sustituye s=-9 en la expresión anterior, se puede obtener fácilmente el valor de K asociado:

$$\left|\frac{-9+1{,}5}{-9}\frac{-9+4}{(-9)^2+9\cdot 2+2}\right|=\frac{1}{K} \rightarrow K=24{,}24$$

Nótese que el criterio del argumento no sería una solución factible para calcular la ganancia, ya que dicho término no proporciona fase. Sería útil si se hubiese fijado K y se quisiera obtener z.

Finalmente, se muestra el nuevo LDR con el valor de ganancia calculado como solución: