EJERCICIOS TEMA 2

Fundamentos matemáticos: Ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace y función de transferencia

Problema 2.1. Para cada una de las siguientes funciones de transferencia, escribe la ecuación diferencial correspondiente:

a) $G(s)=\dfrac{X(s)}{F(s)}=\dfrac{7}{(s+11)(s+12)}$

b) $G(s)=\dfrac{X(s)}{F(s)}=\dfrac{s+2}{s^3+10s^2+11s+18}$

Problema 2.2. La dinámica de un sistema viene representada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+12\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+32y(t)=32f(t)$$

a) Obtén la función de transferencia del sistema.
b) Si $f(t)$ es una entrada impulso unitario $\delta(t)$, calcula la salida $y(t)$ utilizando el método de la transformada de Laplace. Considera que todas las condiciones iniciales son iguales a cero.
c) Repite el apartado anterior considerando que la entrada es ahora un escalón unitario $\mathrm{u}(t)$.

Problema 2.3. Una impresora láser emplea un haz de luz para copiar rápidamente documentos. El láser se posiciona mediante una entrada de control $r(t)$, que representa la posición deseada del haz del láser, mientras que $y(t)$ representa la salida (posición del haz), de manera que se tiene:

$$Y(s)=\frac{5(s+100)}{s^2+60s+500}R(s)$$

a) Si $r(t)$ es una entrada escalón unitario, averigua la salida $y(t)$.
b) ¿Cuál es el valor final de $y(t)$?

Problema 2.4. Encuentra la respuesta en el dominio del tiempo a una entrada impulso unitario de los sistemas representados por cada una de las siguientes funciones de transferencia:

a) $G_1(s)=\dfrac{5(s+2)}{s(s^2+8s+15)}$

b) $G_2(s)=\dfrac{5(s+2)}{s(s^2+6s+9)}$

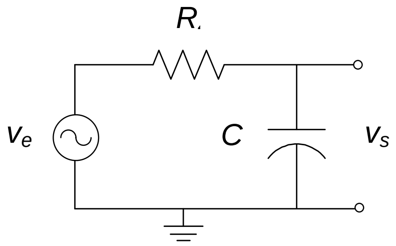
c) $G_3(s)=\dfrac{2(s+6)}{s^2+2s+5}$

d) $G_4(s)=\dfrac{s-11}{s^2+6s+34}$

e) $G_5(s)=\dfrac{5(s+2)}{s(s^2+6s+34)}$

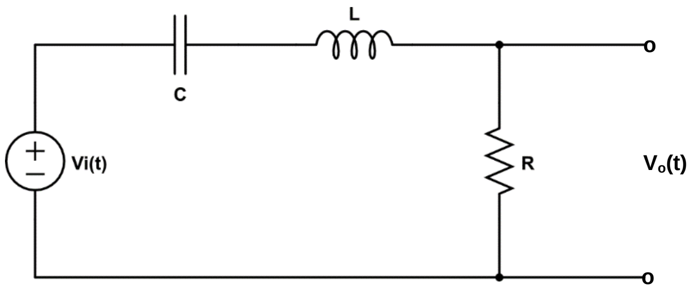
Modelado de sistemas eléctricos

Problema 2.5. Considera un circuito eléctrico con una fuente de tensión v_e y dos elementos tal y como se muestra en la figura. Dicho circuito se denomina "RC en serie", ya que está formado por una resistencia R y un condensador C, conectados en serie. La tensión de salida v_s se toma del segundo elemento:

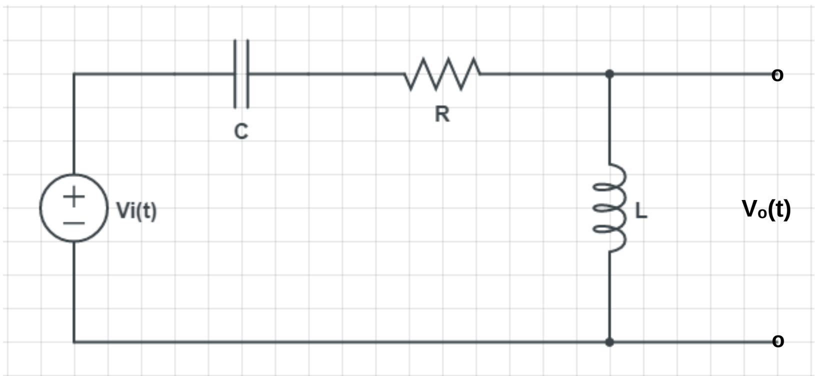


Estos dos elementos pueden ser una resistencia R, un condensador C o una bobina L, calcula la función de transferencia $G(s)=V_s(s)/V_e(s)$ para las seis combinaciones en serie posible, es decir, para los circuitos RC, CR, RL, LR, CL y LC en serie.

Problema 2.6. Calcula la expresión de la salida $v_o(t)$ en función del tiempo para el circuito CLR en serie de la figura, ante una entrada $v_i(t) = \delta(t)$ (impulso unitario) con R=5 Ω, L=1 H y C=1/4 F. Considera todas las condiciones iniciales iguales a cero.

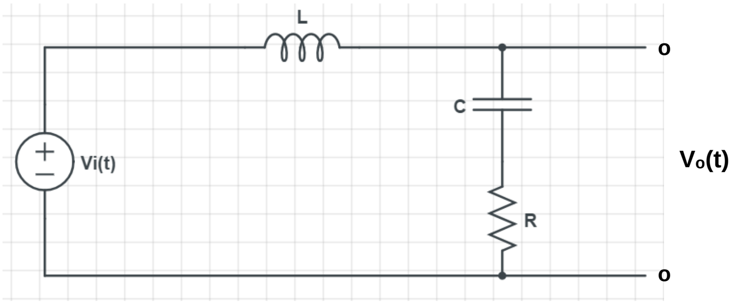


Problema 2.7. Calcula la expresión de la salida $v_0(t)$ en función del tiempo para el circuito CRL en serie de la figura, ante una entrada $v_i(t) = u_0(t)$ (escalón unitario) con R=2 Ω, L=1 H y C=1/5 F. Considera todas las condiciones iniciales iguales a cero.



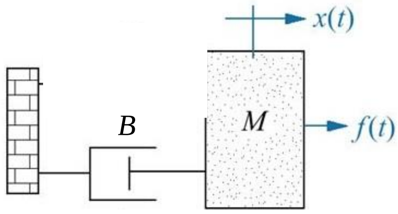
Problema 2.8. Extrae la función de transferencia $G(s)=V_0(s)/V_i(s)$ del circuito, dejándola en función de R, L y C. Considera todas las condiciones iniciales iguales a cero.

Para R=20 Ω, L=10 H y C=0,1 F, calcula la expresión de la salida $v_0(t)$ en función del tiempo ante una entrada $v_i(t) = \delta(t)$ (impulso unitario).



Modelado de sistemas mecánicos de traslación y rotación

Problema 2.9. El sistema mecánico de la figura consta de una masa M y de un amortiguador de coeficiente de fricción B.

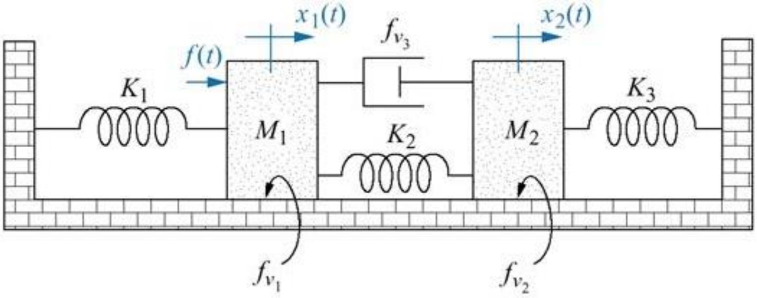


a) Extrae la función de transferencia $G(s)=X(s)/F(s)$ del sistema mecánico.

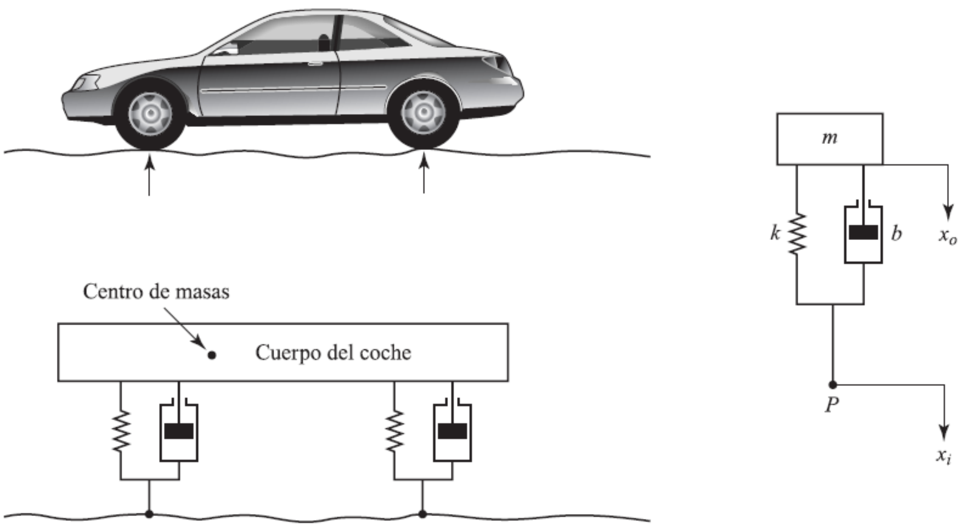
b) Calcula la expresión de la salida $x(t)$ en función del tiempo ante una fuerza de entrada $f(t)$, impulso unitario, para cualquier valor de M y B. Considera todas las condiciones iniciales iguales a cero.

c) Repite el apartado anterior para una fuerza de entrada $f(t)$, escalón unitario. Interpreta el resultado obtenido.

Problema 2.10. Encuentra la función de transferencia $G(s)=X_2(s)/F(s)$ para el siguiente sistema mecánico de traslación con dos grados de libertad, que está formado por dos masas móviles, M_1 y M_2, tres muelles con constantes elásticas, K_1, K_2, K_3, y un amortiguador con coeficiente de fricción viscosa, f_{v3}. Ambas masas presentan rozamiento con el suelo, modelado mediante sendos coeficiente de fricción, f_{v1} y f_{v2}. La entrada es una fuerza aplicada $f(t)$ sobre la masa M_1 y la salida es la posición de la masa M_2, $x_2(t)$.



Problema 2.11. La figura (a) muestra un diagrama esquemático del sistema de suspensión de un automóvil. Una versión simplificada del mismo aparece en la figura (b), donde $x_i(t)$ es la entrada (irregularidades del terreno) y $x_o(t)$ es la salida (movimiento vertical del coche con respecto a su posición de equilibrio).



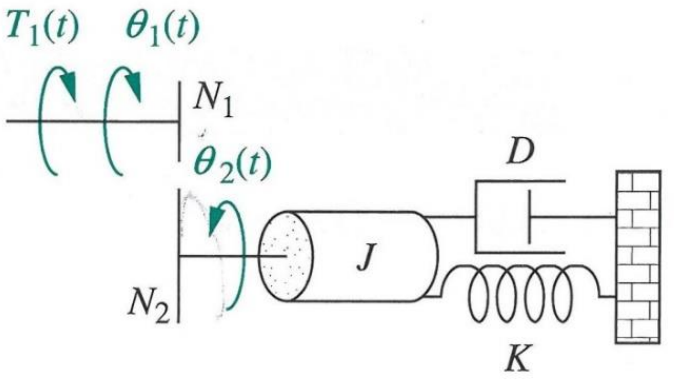
(a) (b)

a) Extrae la función de transferencia $G(s)=X_o(s)/X_i(s)$ del sistema según el modelo (b).

b) Calcula la expresión de la salida $x_0(t)$ en función del tiempo ante una entrada $x_i(t)$ escalón unitario con M=1000, b=4000 y k=4000. Considera todas las condiciones iniciales iguales a cero.

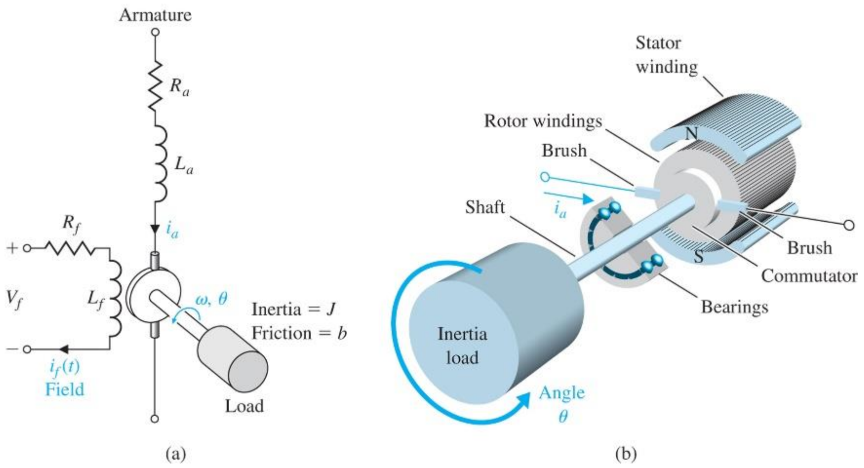
c) Repite el apartado anterior si ahora b=0 y k=1000. Justifica el resultado obtenido.

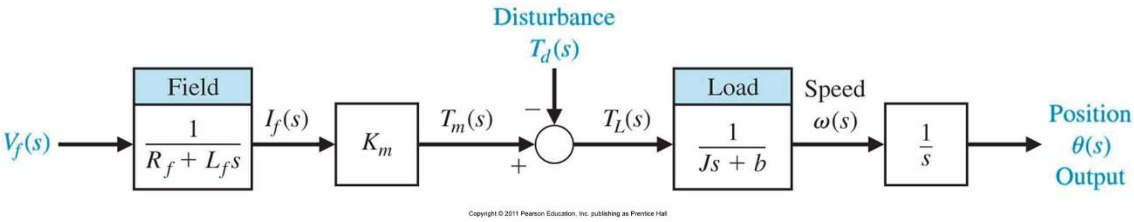
Problema 2.12. Encuentra la función de transferencia $G(s)=\theta_1(s)/T_1(s)$ para el siguiente sistema mecánico de rotación, al que se le aplica un par $T_1(t)$ (entrada) y se mueve un ángulo $\theta_1(t)$ (salida). El sistema consta de dos ruedas dentadas con N_1 y N_2 dientes, un cilindro con un momento de inercia J, un muelle de torsión de constante K y un amortiguador de torsión con coeficiente de fricción viscosa D.



Diagramas de bloques: Simplificación mediante álgebra de bloques

Problema 2.13. Dado el siguiente motor de corriente continua controlado por campo y su diagrama de bloques de control en lazo abierto, donde la entrada es la tensión $V_f(t)$ y la salida es la posición angular $\theta(t)$:

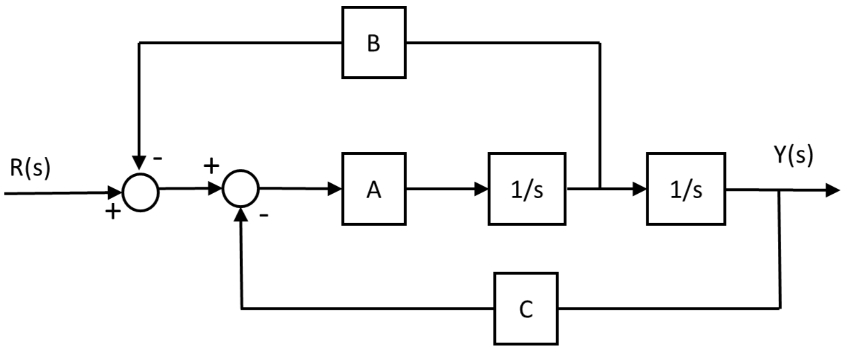




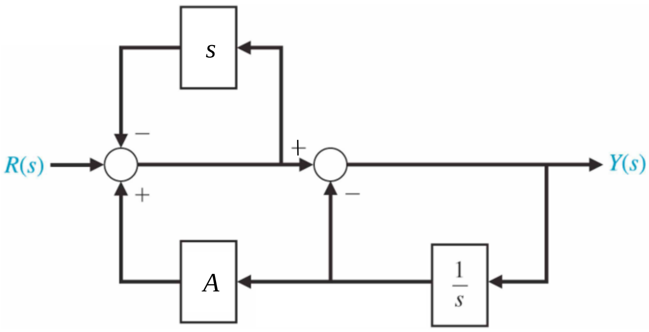
a) Calcula la función de transferencia global del sistema (suponiendo que no existe perturbación, es decir, $T_d(s)=0$).

b) Siendo $J=R=L=1$, $K=2$, $b=3$ y $T_d(s)=0$, obtén la expresión de la salida $\theta(t)$ en función del tiempo ante una entrada $V_f(t)$, impulso unitario.

Problema 2.14. Calcula la función de transferencia $G_{LC}(s)=Y(s)/R(s)$ utilizando el álgebra de bloques:



Problema 2.15. Calcula la función de transferencia $G_{LC}(s)=Y(s)/R(s)$ utilizando el álgebra de bloques:



Problema 2.16. Calcula la función de transferencia $G_{LC}(s)=Y(s)/R(s)$ utilizando el álgebra de bloques:

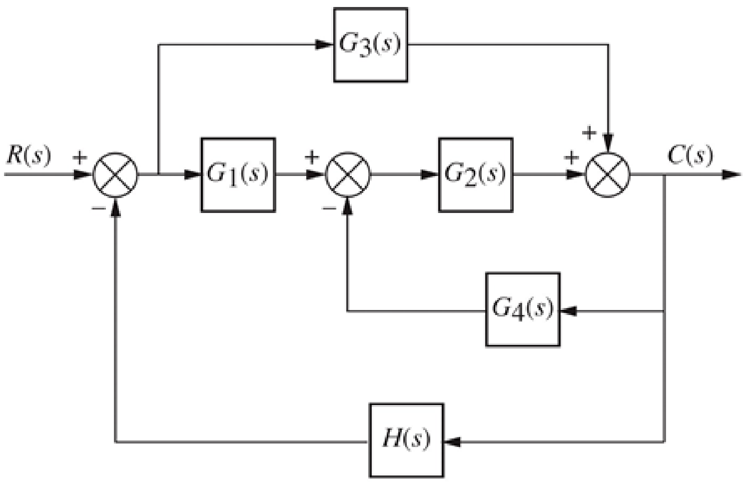
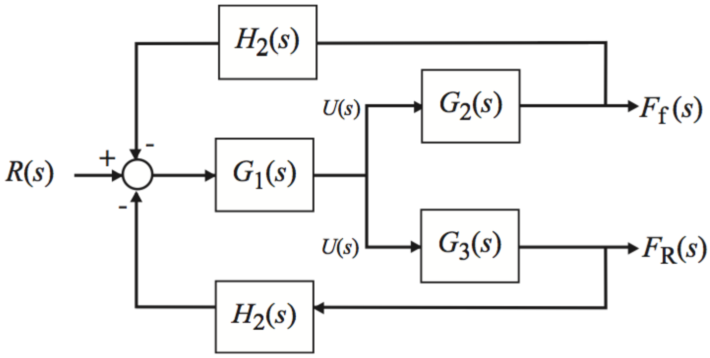
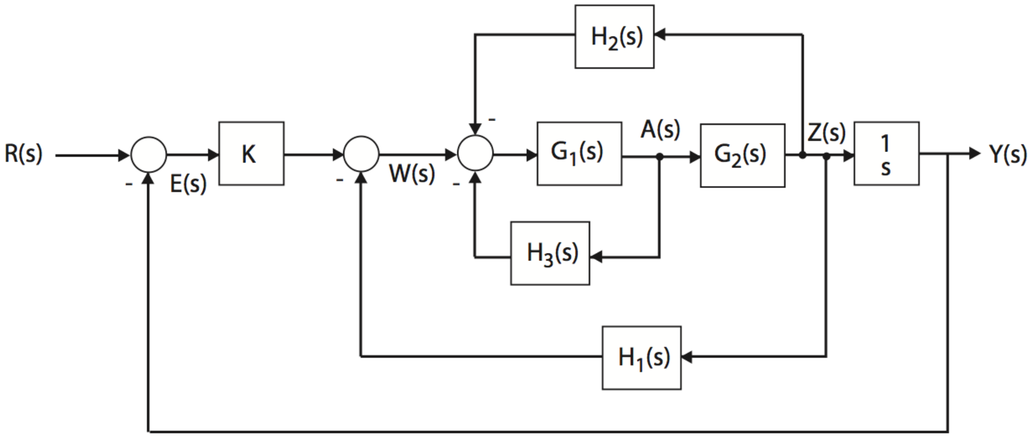


Figure P5.4

Problema 2.17. El sistema de frenado de un automóvil de dos ejes se puede modelar mediante el siguiente sistema de control de una entrada y dos variables de salida (sistema SIMO, *single input multiple output*). Calcula la función de transferencia que relaciona la variable de salida $F_f(s)$ con la entrada $R(s)$:



Problema 2.18. El ingeniero ruso Nicolas Minorsky diseñó en la década de 1930 un nuevo sistema de control automático del rumbo de los buques de la marina de Estados Unidos. El sistema está representado por el siguiente diagrama de bloques, donde $Y(s)$ es el rumbo del barco, $R(s)$ es el rumbo deseado y $A(s)$ es el ángulo del timón. Calcula la función de transferencia del sistema completo, $G_{LC}(s)=Y(s)/R(s)$.



.

Problema 2.19. Calcular la función de transferencia $G_{LC}(s)=Y(s)/X(s)$ utilizando el álgebra de bloques: