Universidad Rey Juan Carlos

# Tema 2. Modelado de sistemas dinámicos: Fundamentos matemáticos, función de transferencia y diagramas de bloques

# Índice

- Introducción.
- Fundamentos matemáticos: Ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace y descomposición en fracciones simples.
- Función de transferencia. Respuesta a impulso.
- Modelado matemático de sistemas físicos: Sistemas eléctricos y mecánicos.
- Representación de sistemas de control mediante diagramas de bloques. Reducción de sistemas: Álgebra de bloques.
- Grafos de flujo. Modelado en variables de estado.

Universidad Rey Juan Carlos

# ¿Qué es un sistema continuo lineal? SCL

## Teoría de control clásica: Primera mitad s. XX

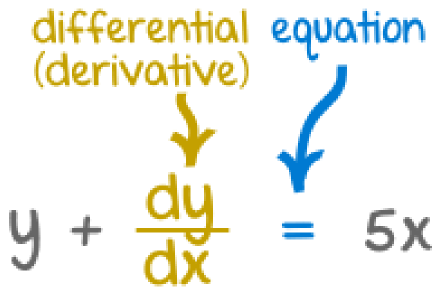
- Sistemas continuos (o analógicos): la representación de la información se realiza mediante magnitudes que pueden tomar un espectro continuo de valores.
- Sistemas lineales: sistemas cuya dinámica se describe mediante ecuaciones diferenciales lineales, en las que se puede aplicar el principio de superposición.
  - Un sistema no lineal se puede simplificar mediante estrategias de linearización.
- Sistemas invariantes en el tiempo (estacionarios). Sus parámetros son constantes, no son función del tiempo. Ante la misma entrada en distintos instantes responden igual.

Los SCL se representan mediante *Funciones de Transferencia* (representación externa de un sistema de control), que reflejan la relación entre la entrada y la salida del sistema.

→ Filosofía de "caja negra". Para trabajar matemáticamente con FT se necesitan conceptos de variable compleja y transformadas de Laplace.

Una gran variedad de sistemas en ingeniería se modelan matemáticamente mediante *ecuaciones diferenciales.*

- Una ecuación diferencial es aquella en la que aparecen derivadas de una o varias funciones (variables dependientes) desconocidas:




$$y(x) + y'(x) = 5x$$

$$y + y' = 5x$$

- En función del número de variables independientes de la ecuación, se clasifican en:

  1. Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs): aparecen derivadas respecto a una única variable independiente:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

- Una ecuación diferencial es lineal si en ella no aparecen productos de y(t) con sus derivadas o potencias distintas de 1, es decir, si los coeficientes $a_i$ no son función de y, y'…

**Son no lineales**

$$\overset{\text{el coeficiente depende de } y}{(1+y)}\,y' + 2y = e^x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \overset{\text{función no lineal de } y}{\operatorname{sen} y} = 0, \qquad \frac{d^4y}{dx^4} + \overset{\text{potencia distinta de 1}}{y^2} = 0$$

- El orden de la ecuación diferencial viene dado por la derivada más alta que aparece en la ecuación:

Order 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 4.$$

- El grado de la ecuación viene dado por el exponente de la derivada más alta que aparece en la ecuación (siempre y cuando la ecuación esté en forma polinomial).

- Ejemplos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1) $e^x \frac{d^2y}{dx^2} + sen\ x \frac{dy}{dx} = x$ | $2^{do}$ orden | $1^{er}$ grado | Lineal |
| 2) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$ | $3^{er}$ orden | $2^{do}$ grado | No lineal |
| 3) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = tan\ x$ | $3^{er}$ orden | $1^{er}$ grado | No lineal |
| 4) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ | $1^{er}$ orden | $1^{er}$ grado | Lineal |

2. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP): Aparecen derivadas con respecto a dos o más variables independientes.
   – Se emplean en la formulación matemática de procesos de la física y otras ciencias que suelen estar distribuidos en el espacio y el tiempo.

**La ecuación de ondas**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**La ecuación del calor**

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0$$

**La ecuación de Poisson**

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Más ejemplos. Orden en ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{is a first-order PDE.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{is a second-order PDE.}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - u = 0 \quad \text{is a fourth-order PDE.}$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^3 + \frac{\partial u}{\partial x_2} + u^4 = 0 \quad \text{is a first-order PDE.}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales: Conjunto de varias ecuaciones diferenciales con una o varias funciones incógnitas.

– Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO):

$$2\frac{dx}{dt} - 5x + \frac{dy}{dt} = e^t$$
$$\frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} = 5e^t$$

| SEDO |
|---|
| Dos funciones incógnitas, x(t) e y(t) |
| Una variable independiente, t |

– Sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (SEDP):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y + 2t$$
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \exp(x) + \sin(t)$$

| SEDP |
|---|
| Una función incógnitas, y(x,t) |
| Dos variables independientes: x, t |

## Mediante la técnica de la Transformada de Laplace:

- La propiedad de diferenciación en el tiempo nos convierte las **ecuaciones diferenciales en polinomios** en el dominio s (dominio de la frecuencia compleja).
- Además, **es posible convertir muchas funciones comunes**, tales como las funciones sinusoidales, las funciones sinusoidales amortiguadas y las funciones exponenciales, **en funciones algebraicas** de una variable s compleja.
- La **respuesta de un sistema ante una señal de entrada** (que sería la integral de convolución de dos señales en el tiempo) **se transforma en un simple producto** de trasformadas de Laplace en el dominio s.

Transformada de Laplace

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\boxed{F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \qquad F(s), s \in C}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \quad j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Convergencia $\quad a < \sigma < b$

## Propiedades de la Transformada de Laplace (I)

1. Multiplicación por una constante:

$$L\left[k \cdot f(t)\right] = k \cdot F(s)$$

2. Suma/resta:

$$L\left[f_1(t) \pm f_2(t)\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

3. Diferenciación:

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \lim_{t \to 0}\left[s^{n-1} \cdot f(t) + s^{n-2} \cdot \frac{df(t)}{dt} + s^{n-3} \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \cdots \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}\right] =$$

$$= s^n F(s) - \left[\underbrace{s^{n-1} \cdot f(0) + s^{n-2} \cdot \frac{df(0)}{dt} + s^{n-3} \cdot \frac{d^2 f(0)}{dt^2} + \cdots \frac{d^{n-1} f(0)}{dt^{n-1}}}_{\text{Este término es nulo si } f(0) = f'(0) = \ldots = f^{n-1}(0) = 0}\right]$$

## Propiedades de la Transformada de Laplace (II)

4. Integración:

$$L\left[\int_0^{\infty} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

5. Traslación (desplazamiento) en el tiempo:

$$L[f(t-T)] = \int_0^{\infty} f(t-T)\cdot e^{-s\cdot t}dt = e^{-s\cdot T}\cdot F(s)$$

6. Teorema del valor inicial:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

7. Teorema del valor final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

## Propiedades de la Transformada de Laplace (III)

8. Traslación compleja:

$$L\left[e^{\mp a\cdot t}\cdot f(t)\right]=F(s\pm a)$$

9. Convolución real (multiplicación compleja):

$$F_1(s)\cdot F_2(s)=L\left[f_1(t)*f_2(t)\right]=L\left[\int_0^{\infty}f_1(\tau)\cdot f_2(t-\tau)d\tau\right]=L\left[\int_0^{\infty}f_2(\tau)\cdot f_1(t-\tau)d\tau\right]$$

donde el símbolo "*" denota la convolución en el dominio del tiempo.

$$L\left[f_1(t)\cdot f_2(t)\right]=F_1(s)*F_2(s)\qquad pero\qquad L^{-1}\left[F_1(s).F_2(s)\right]\neq f_1(t)\cdot f_2(t)$$

10. Cambio en la escala de tiempos:

$$L\left[f(t/a)\right]=a\cdot F(a\cdot s)$$

# Resumen de propiedades de la transformada de Laplace

| Nombre | Descripción |
|---|---|
| Linealidad | $\mathcal{L}[af(t)+b\,g(t)] = aF(s)+bG(s)$ |
| Derivación en $t$ | $\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} \left[f^{i-1}(t)\right]_{0^+} s^{n-i}$ |
| Integración en $t$ | $\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int f(t)dt\right]_{0^+}}{s}$ |
| Desplazamiento en $t$ | $\mathcal{L}\left[f(t-\tau)u_0(t-\tau)\right] = e^{-s\tau}F(s)$ |
| Derivación en $s$ | $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{dF(s)}{ds}\right] = -t\,f(t)$ |
| Convolución | $Z(s)=X(s)Y(s) \Leftrightarrow z(t)=\int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau$ |
| Teorema del valor inicial | $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$ |
| Teorema del valor final | $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$, si $\exists$ |

## Transformada inversa de Laplace

- Transformada inversa de Laplace es el proceso matemático por el que dada una expresión F(s) en variable compleja se pasa a la expresión en función del tiempo.

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = f(t)$$

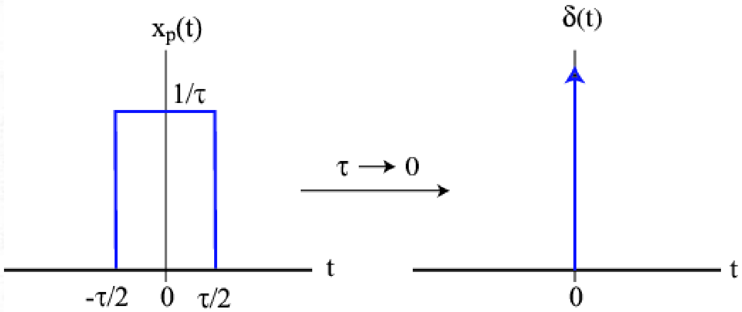
- Matemáticamente, se obtiene como:

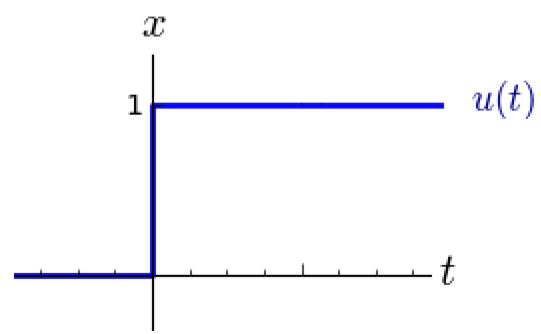
$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) \cdot e^{s \cdot t} ds}$$

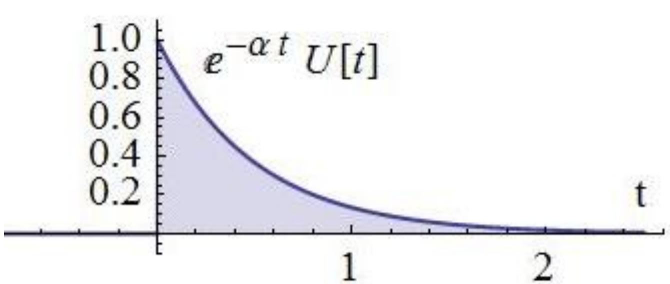
- Resolución de ecuaciones diferenciales lineales mediante el uso de la transformada de Laplace (problemas de valor inicial):
  1. Aplicar la transformada a la ecuación diferencial.
  2. Obtener la transformada de Laplace de la solución.
  3. Aplicar la transformada inversa (o antitransformada).

## Algunas transformadas de Laplace

| $f(t)$ | $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-sT} dt$ |
|---|---|
| $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$ | $1$ |
| $u_0(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ | $1/s$ |
| $r_0(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & t \geq 0 \end{cases}$ | $1/s^2$ |
| $t^n \cdot u_0(t)$ | $n!/s^{n+1}$ |
| $e^{-at} \cdot u_0(t)$ | $\frac{1}{(s+a)}$ |
| $\text{sen}\ \omega t \cdot u_0(t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cos \omega t \cdot u_0(t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $e^{-at} \cdot \cos \omega t$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ |



# Fracciones simples: Método de Heaviside

## Descomposición (expansión) en fracciones simples

- El método de las descomposición o expansión en fracciones simples consiste en descomponer un cociente de polinomios en una suma de fracciones de polinomios de menor grado, que nos permitan utilizar la tabla de transformadas de Laplace para volver del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo.
- El requisito más importante es que el grado del polinomio del denominador sea estrictamente mayor que el del numerador. Hay varios casos:

Raíces reales simples:

$$\frac{N(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s+a_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s+a_i}$$

Raíces reales múltiples:

$$\frac{N(s)}{(s+a)^p} = \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{(s+a)^i}$$

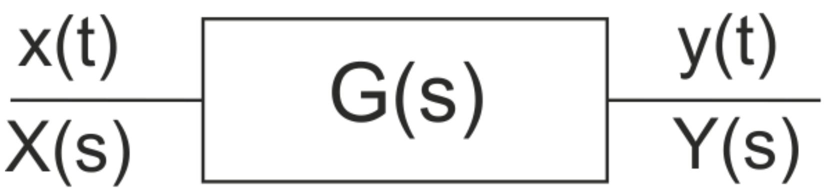
Raíces complejas simples:

$$\frac{N(s)}{(s+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{s+\alpha+j\beta} + \frac{B}{s+\alpha-j\beta} = \frac{Ps+Q}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

Más información y ejemplos detallados en N. NISE, “Control Systems Engineering”, capítulo 2, y también en http://www.acienciasgalilei.com/alum/mat/fracciones-parciales.pdf

## Función de transferencia de un sistema

La función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo se define como el cociente entre la transformada de Laplace Y(s) de la salida (función de respuesta y(t)) y la transformada de Laplace X(s) de la entrada (función de excitación x(t)) bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.




$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- En el dominio del tiempo (t), el sistema está descrito mediante ecuaciones diferenciales, que en general son muy difíciles de resolver.
- A partir del concepto de función de transferencia es posible representar el sistema de una manera mucho más sencilla: Mediante ecuaciones algebraicas (cociente de polinomios) en el dominio de la frecuencia compleja (variable s).

# Concepto de función de transferencia

- **Problem:** Find the transfer function, G(s)=C(s)/R(s), corresponding to the differential equation

$$\frac{d^3c}{dt^3}+3\frac{d^2c}{dt^2}+7\frac{dc}{dt}+5c=\frac{d^2r}{dt^2}+4\frac{dr}{dt}+3r$$

$c(t)$

$r(t)$

- **Solution:**

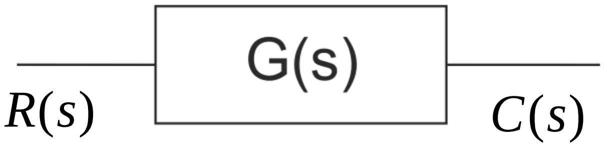
Taking the Laplace transform of the differential equation assuming zero initial conditions yields:

$s^3C(s) + 3s^2C(s) + 7sC(s) + 5C(s) = s^2R(s) + 4sR(s) + 3R(s)$

Collecting terms,

$$(s^3+3s^2+7s+5)C(s)=(s^2+4s+3)R(s)$$

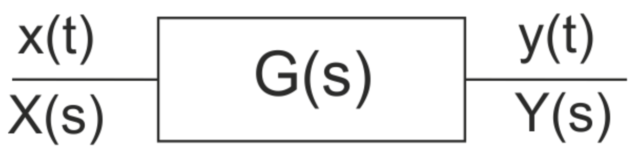
Thus, $$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{s^2+4s+3}{s^3+3s^2+7s+5}$$



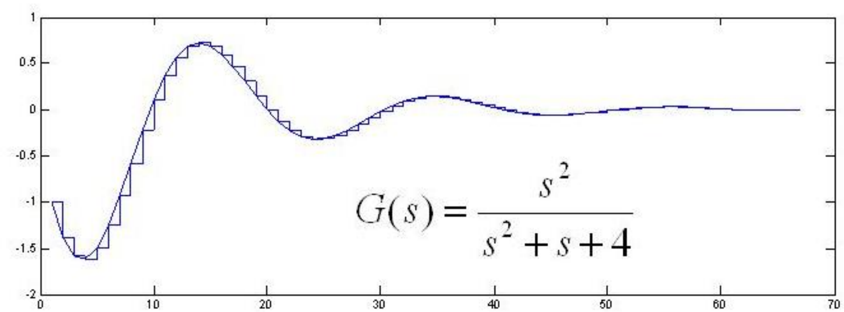
Universidad Rey Juan Carlos

# Función de transferencia y respuesta a impulso

- Ya se ha visto que la transformada de Laplace de la función impulso (unitario) x(t) = δ(t) es X(s) = 1 (es decir, igual a uno).
- Por ello, la función de transferencia G(s) de un sistema representa la salida Y(s) cuando la entrada es un impulso (respuesta a impulso).




Si x(t) = δ(t) entonces $G(s) = Y(s)$




- De este modo g(t) [la transformada inversa de Laplace de la función de transferencia G(s)] se corresponde con la respuesta temporal del sistema a una entrada impulso (cuando las condiciones iniciales son cero).
- En la práctica, es posible obtener la información completa sobre las características dinámicas de un sistema si se excita con una entrada lo más parecida a un impulso y se mide su respuesta g(t).
- g(t) y G(s) contienen la misma información sobre el sistema.

Universidad Rey Juan Carlos

# Modelado de los Sistemas de control

Se define el modelado de un determinado proceso como la obtención de un conjunto de funciones matemáticas que permitan representar, al menos de forma aproximada, el comportamiento de las variables de mayor interés del sistema que se estudia.

**Objetivo del modelado analítico:**

El objetivo del modelado es encontrar la función de transferencia (modelado en el dominio de la frecuencia) o la representación en el espacio de estados (dominio del tiempo) del sistema de control.

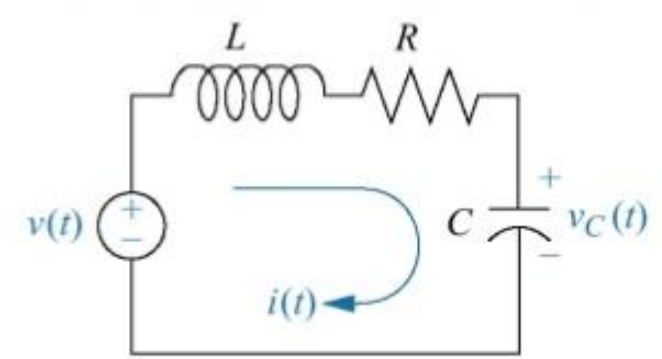
Para ello se necesitan las leyes básicas que describen los diferentes sistemas, que se han visto en asignaturas previas. Los tipos de sistemas y sus componentes básicos son:

- Sistemas eléctricos: R, L, C, fuentes (V e I), Amplificadores operacionales…
- Sistemas mecánicos: Masas, resortes, amortiguadores…
- Sistemas electromecánicos: Motores, servos y generadores.
- Sistemas hidráulicos: Flujo de líquidos y neumáticos (fluidos a presión).
- Sistemas térmicos (transferencia de calor), químicos (reacciones), etc.

# Modelado: Sistemas eléctricos

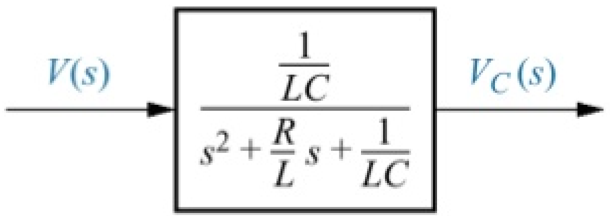
**Ejemplo:** modelado de un circuito RLC en serie.

| | | |
|---|---|---|
| Resistencia (u(t), i(t), R) | $u(t) = R \cdot i(t)$ | u: tensión<br>i: intensidad<br>R: resistencia |
| Condensador (u(t), i(t), C) | $u(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$ | u: tensión<br>i: intensidad<br>C: capacidad |
| Bobina (u(t), i(t), L) | $u(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$ | u: tensión<br>i: intensidad<br>L: inductancia |




$$\left.\begin{aligned} u_c(t) + R \cdot i(t) + L\frac{di(t)}{dt} &= u(t) \\ C\frac{du_c(t)}{dt} &= i(t) \end{aligned}\right\}$$

$$R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = u(t)$$



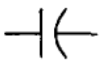
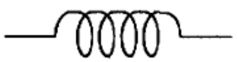

**IMPORTANTE:** *intentar obtener la misma FT utilizando impedancias complejas.*

Universidad Rey Juan Carlos

# Modelado: Sistemas eléctricos

Concepto de impedancia compleja: Simplifica la resolución de circuitos eléctricos que contengan R, L y C. Representan a dichos elementos en el dominio de la frecuencia compleja (”s”).

**TABLE 2.3** Voltage-current, voltage-charge, and impedance relationships for capacitors, resistors, and inductors

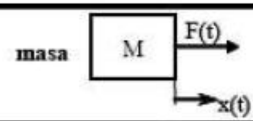
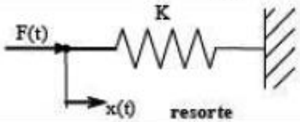
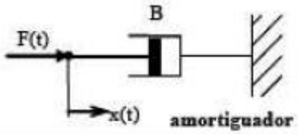
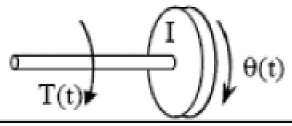
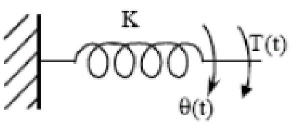
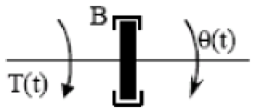
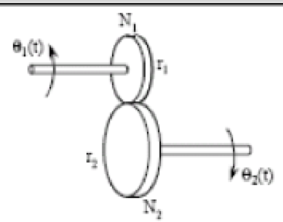
| Component | Voltage-current | Current-voltage | Voltage-charge | Impedance $Z(s) = V(s)/I(s)$ | Admittance $Y(s) = I(s)/V(s)$ |
|---|---|---|---|---|---|
|  Capacitor | $v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$ | $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ | $v(t) = \frac{1}{C}q(t)$ | $\frac{1}{Cs}$ | $Cs$ |
|  Resistor | $v(t) = Ri(t)$ | $i(t) = \frac{1}{R}v(t)$ | $v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$ | $R$ | $\frac{1}{R} = G$ |
|  Inductor | $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ | $i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$ | $v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$ | $Ls$ | $\frac{1}{Ls}$ |

Note: The following set of sy... and units is used throughout this book: $v(t)$ – V (volts), $i(t)$ – A (amp... Q (coulombs), $C$ – F (farads), $R$ – Ω (ohms), $G$ – Ω (mho... – $H$ (henries).

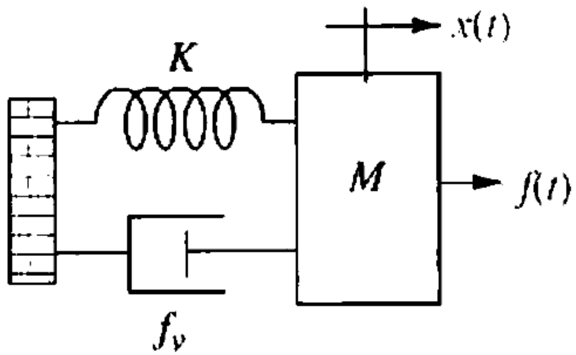
¿De dónde se obtienen las expresiones de la impedancia compleja de cada elemento?: De aplicar la Transformada de Laplace a las ecuaciones de la columna “Voltage-Current”, pasando del dominio temporal al dominio frecuencial.

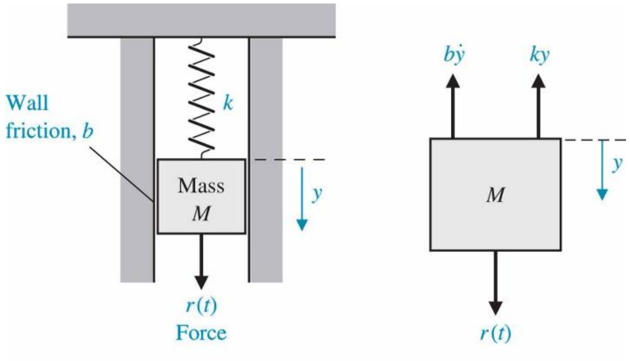
# Modelado: Sistemas mecánicos

## Resumen de magnitudes y leyes básicas en sistemas mecánicos

| | | | |
|---|---|---|---|
| SISTEMAS MECÁNICOS TRASLACIÓN |   | $F(t) = M\dfrac{d^2}{dt^2}x(t)$ | F: fuerza<br>M: masa<br>x: desplazamiento |
| |   | $F(t) = K \cdot x(t)$ | F: fuerza<br>K: constante del muelle<br>x: desplazamiento |
| |   | $F(t) = B\dfrac{d}{dt}x(t)$ | F: fuerza<br>B: coeficiente de fricción viscosa<br>x: desplazamiento |
| SISTEMAS MECÁNICOS ROTACIÓN | Momento de inercia   | $T(t) = I\dfrac{d^2}{dt^2}\theta(t)$ | T: par<br>I: momento de inercia<br>θ: desplazamiento angular |
| | Rigidez   | $T(t) = K \cdot \theta(t)$ | T: par<br>K: constante del muelle<br>θ: desplazamiento angular |
| | Rozamiento viscoso   | $T(t) = B\dfrac{d}{dt}\theta(t)$ | T: par<br>B: coeficiente de fricción viscosa<br>θ: desplazamiento angular |
| SISTEMAS MECÁNICOS ENGRANAJES |   | $\dfrac{T_1(t)}{T_2(t)} = \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{\theta_2(t)}{\theta_1(t)}$<br>$r_1\theta_1 = r_2\theta_2$ | T: par<br>N: número de dientes<br>θ: desplazamiento angular<br>r: radio |

**Ejemplo de sistema mecánico de traslación:** una masa M sometida a una fuerza f(t) (entrada del sistema) y retenida por un muelle de constante K y un amortiguador de constante de fricción $f_v$.




Determinar la ecuación diferencial para la posición x(t) de la masa (salida del sistema) y la función de transferencia G(s)=X(s)/F(s).

$$\sum_i F_i = M\,a(t) = M\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\boxed{M\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f_v\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)}$$

$$Ms^2X(s) + f_v sX(s) + KX(s) = F(s)$$

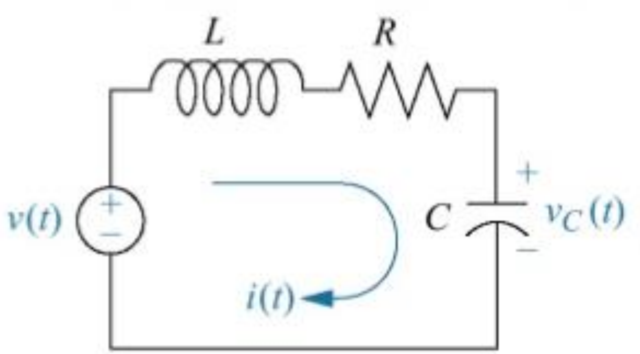
$$(Ms^2 + f_v s + K)X(s) = F(s)$$

$$F(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{Ms^2 + f_v s + K}} \longrightarrow X(s)$$

# Principio de analogía: Definición

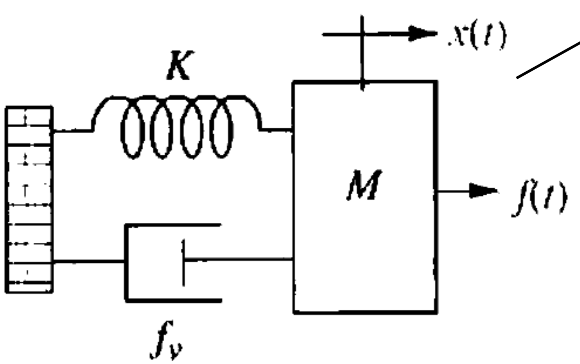


Se dice que dos sistemas son análogos cuando las ecuaciones que definen su comportamiento tienen igual forma matemática. Por ello, tendrían la misma función de transferencia (con diferentes constantes).




$$LC\frac{du_c^2(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=u(t)$$

$$M\frac{dx^2(t)}{dt^2}+f\frac{dx(t)}{dt}+K\cdot x(t)=u(t)$$




$$a\frac{dy^2(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+c\cdot y(t)=u(t)$$

# Principio de analogía: Variables análogas

En sistemas análogos, existe una correspondencia entre las variables de los mismos (variables análogas):

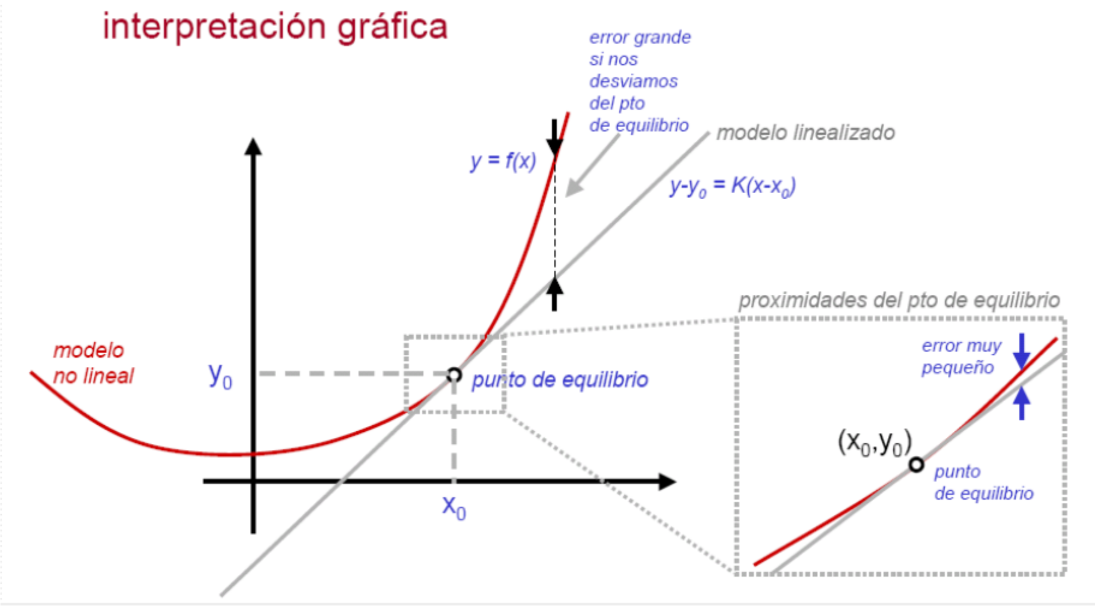
| Elèctrico | Mecànico de traslacion | Mecànico de rotaciòn | Tèrmico | Hidraùlico |
|---|---|---|---|---|
| Corriente | Fuerza | Par | Flujo de calor | Flujo |
| Tension | Velocidad lineal | Velocidad angular | Temperatura | Presiòn |
| Inductancia | Muelle | Muelle | - | Inercia |
| Capacidad | Masa | Inercia | Capacidad | Compresion |
| Resistencia | Amortiguador | Amortiguador | Resistencia | Resistencia |

El principio de analogía permite construir un circuito eléctrico análogo a un sistema mecánico (o de otra naturaleza) determinado, y poder simular su comportamiento sin tener que fabricar los componentes mecánicos. Se usó mucho antes de la aparición de los computadores digitales.

# Sistemas no lineales: Concepto de linealización

Un sistema lineal satisface las propiedades de superposición y homogeneidad.

- Se linealiza en torno a un punto de equilibrio.
- Las variaciones de las variables son nulas.
- La ecuación de linealización no es única (depende del punto de trabajo).



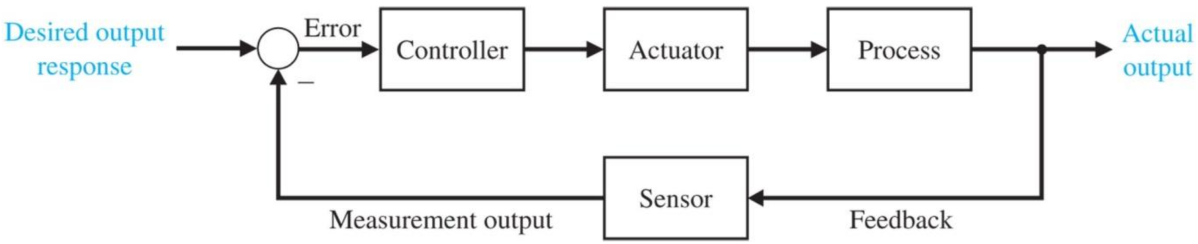

- Las variables de la ecuación linealizada representan incrementos respecto al punto de equilibrio.

# Diagramas de bloques



Generalmente un sistema de control tiene varios componentes. Para identificar la función de cada componente se usa la representación mediante diagramas de bloques.

Un diagrama de bloques de un sistema es una representación gráfica de las **funciones** que llega a cabo cada componente y del **flujo de señales** entre dichos componentes



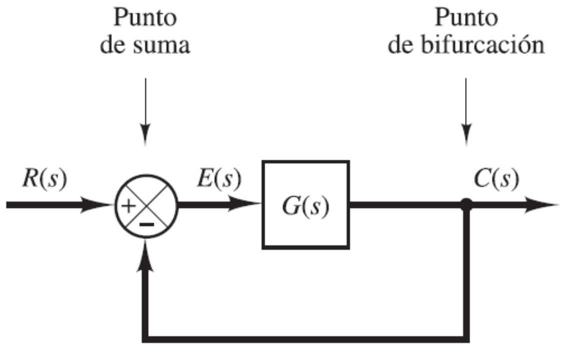

- La función de transferencia de cada bloque representa la relación entre su salida y su entrada en el dominio de la frecuencia compleja (“s”).
- Los bloques se conectan mediante flechas. Las señales se transmiten entre los bloques en el sentido marcado por las flechas.
- Un diagrama de bloques no incluye información de la construcción física del sistema. Por ello, muchos sistemas diferentes y no relacionados pueden representarse mediante el mismo diagrama de bloques (analogía).

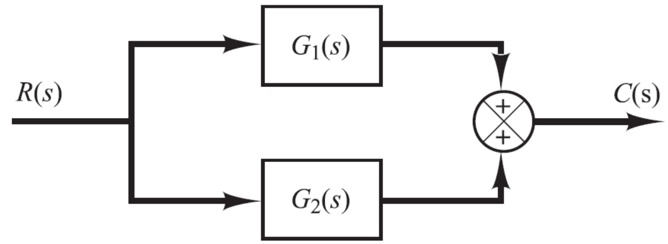
# Elementos de un diagramas de bloques

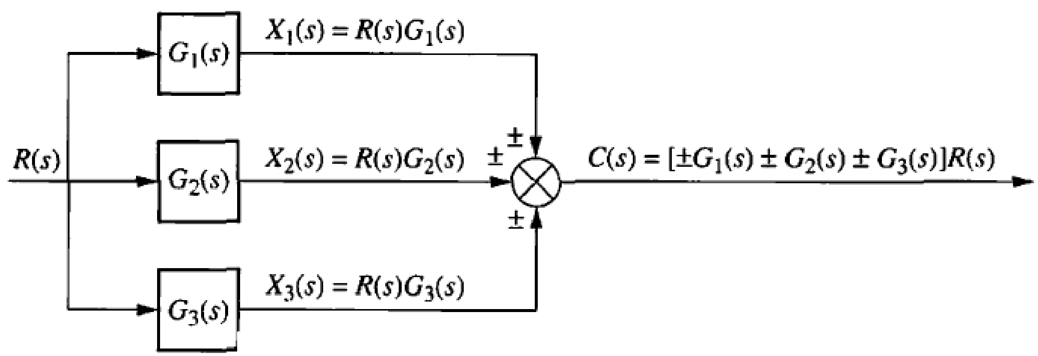


- Punto de suma (*summing point*): Representan el punto del diagrama donde se suman (o restan) dos o más señales. El signo en cada flecha indica la operación a realizar.

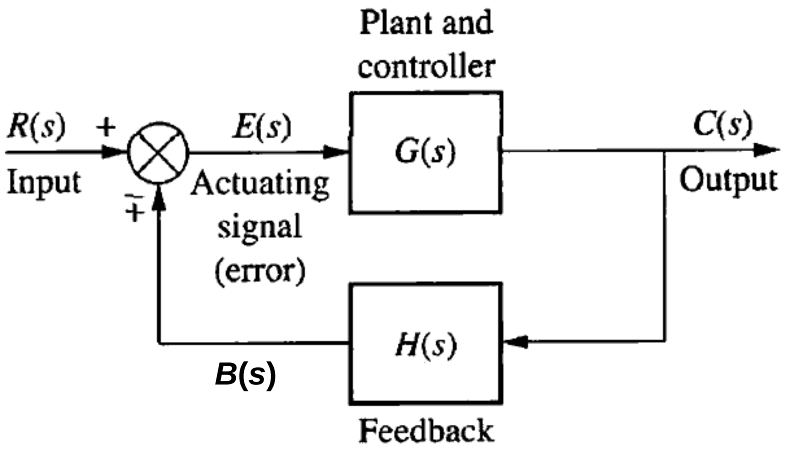
- Punto de bifurcación o ramificación (*pickoff point*): Es aquel a partir del cual una señal va de modo concurrente a otros bloques o puntos de suma



**Función de transferencia de un sistema en lazo cerrado:** Expresa la relación entre la salida C(s) y la entrada R(s) en un sistema con realimentación:




$$C(s) = G(s)E(s)$$

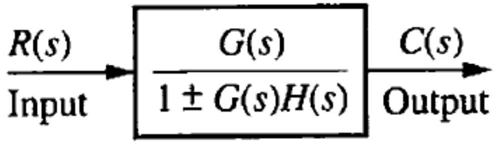
$$E(s) = R(s) - B(s)$$

$$= R(s) - H(s)C(s)$$

$$C(s) = G(s)[R(s) - H(s)C(s)]$$

$$\boxed{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}}$$

- El sistema completo se puede representar por un único bloque dado por la función de transferencia en lazo cerrado.




- El cociente entre la señal de realimentación B(s) y la señal de error E(s) se denomina función de transferencia en lazo abierto

$$\Rightarrow \quad \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

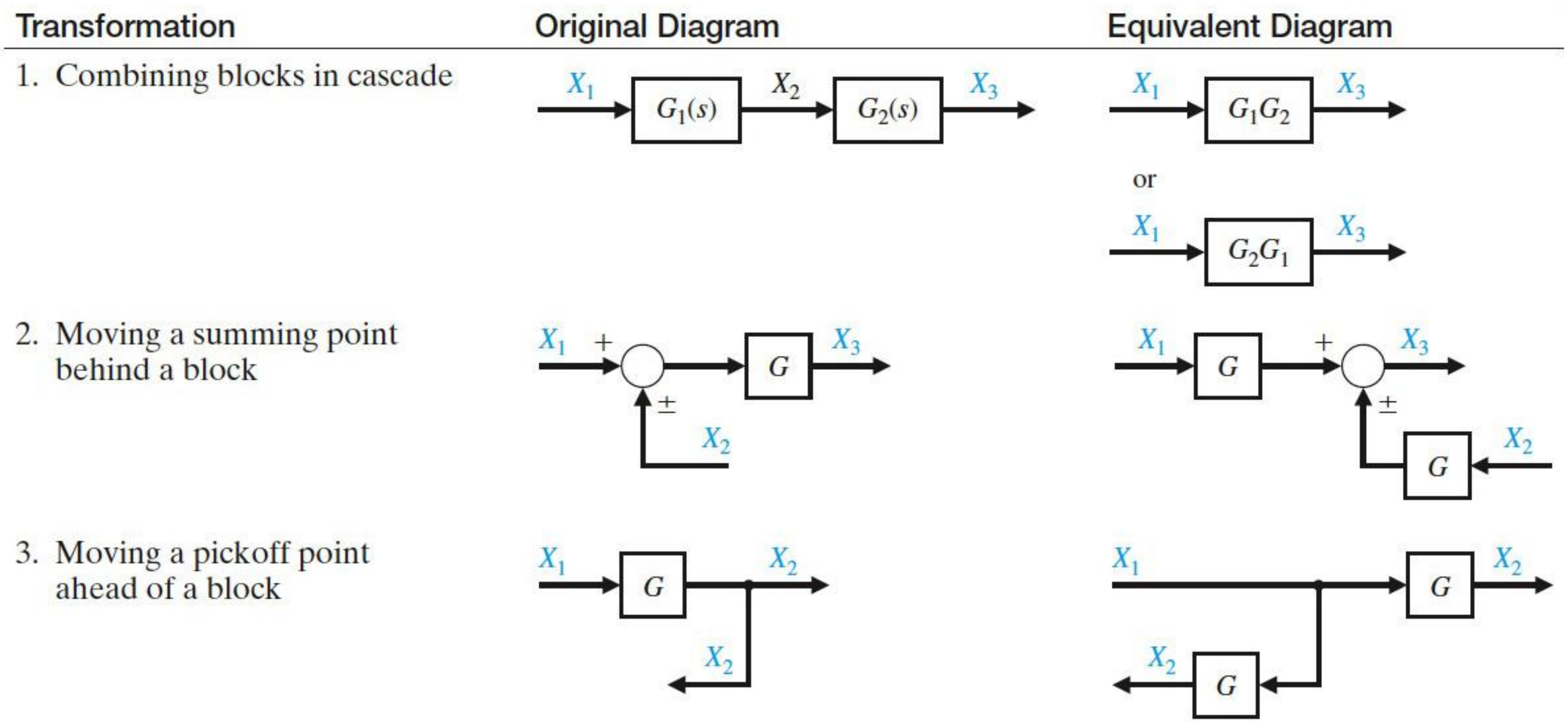
- El cociente entre la salida C(s) y la señal de error E(s) se denomina función de transferencia de la trayectoria directa

$$\Rightarrow \quad \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$$

Universidad Rey Juan Carlos

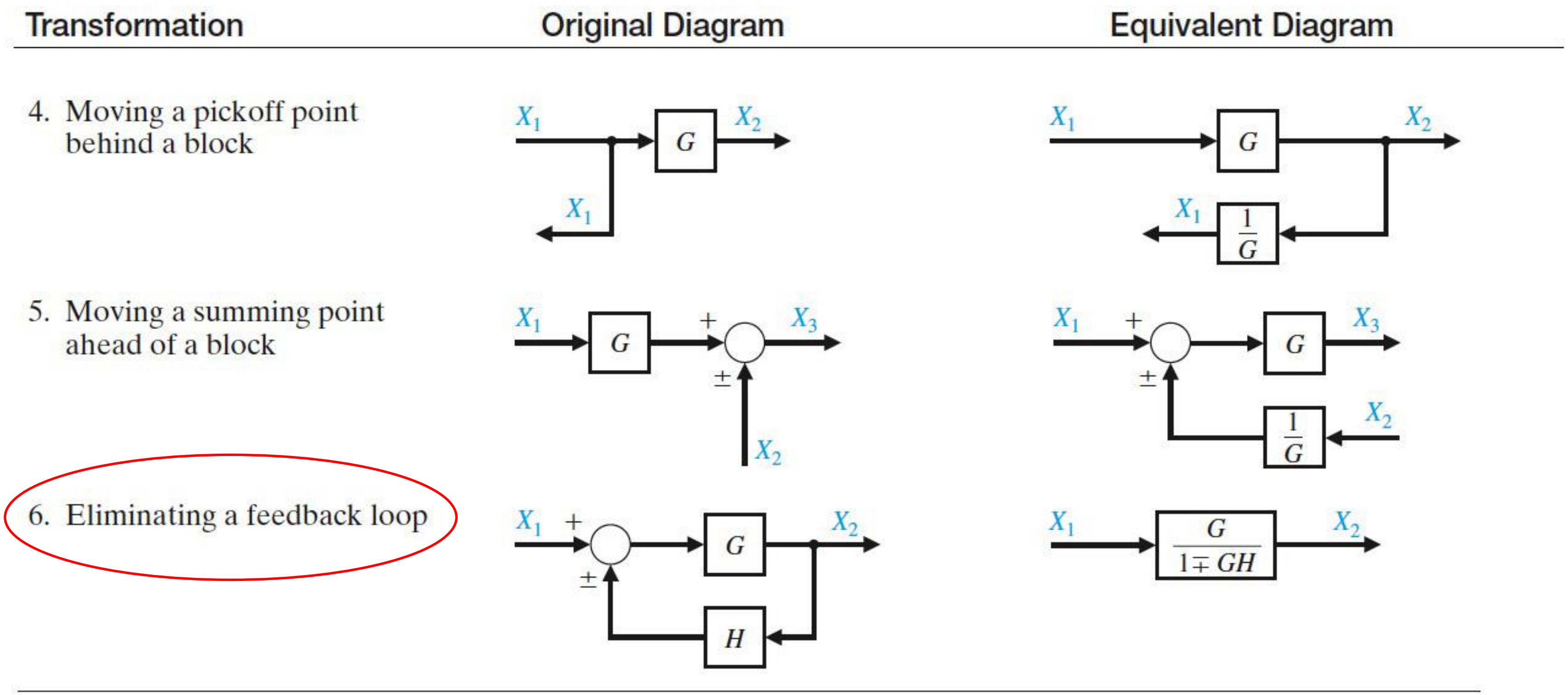
# Álgebra de bloques (I)

**Álgebra de bloques:** Conjunto de reglas de operación entre bloques para transformar un diagrama en otro equivalente, es decir, con la misma relación entre variables de entrada y de salida.



Universidad Rey Juan Carlos

# Álgebra de bloques (II)

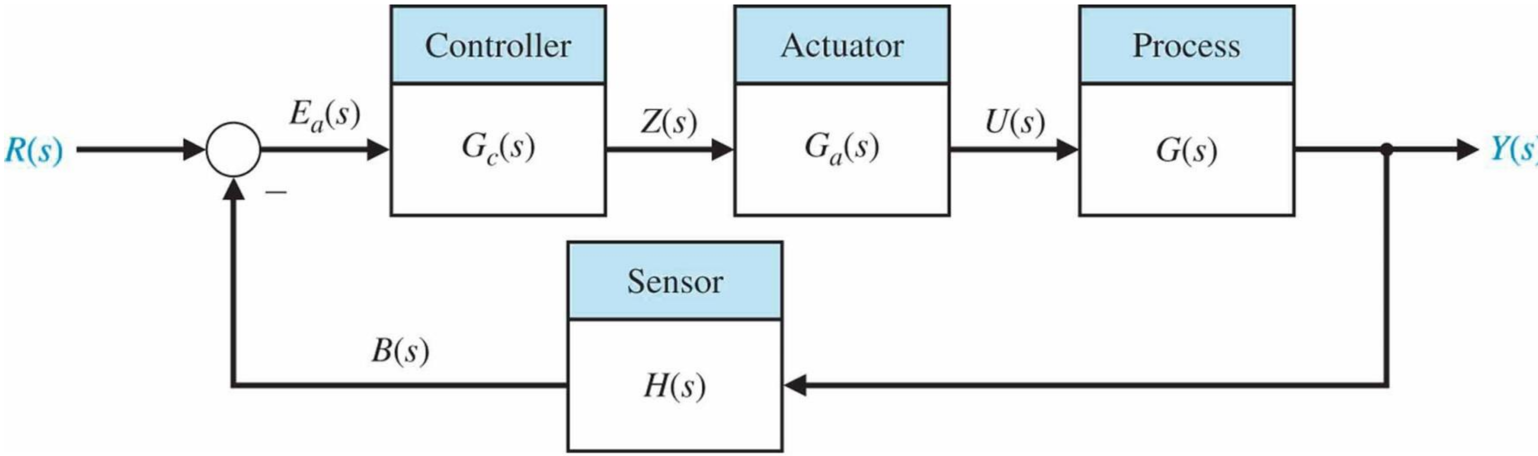





**Reducción de un diagrama de bloques:** El objetivo final de la reducción de un diagrama de bloques es simplificarlo hasta obtener un único bloque, es decir, encontrar una única función de transferencia que represente el diagrama completo.

# Reducción de un diagrama de bloques

**Ejemplo 1:** Simplifica el siguiente diagrama de bloques



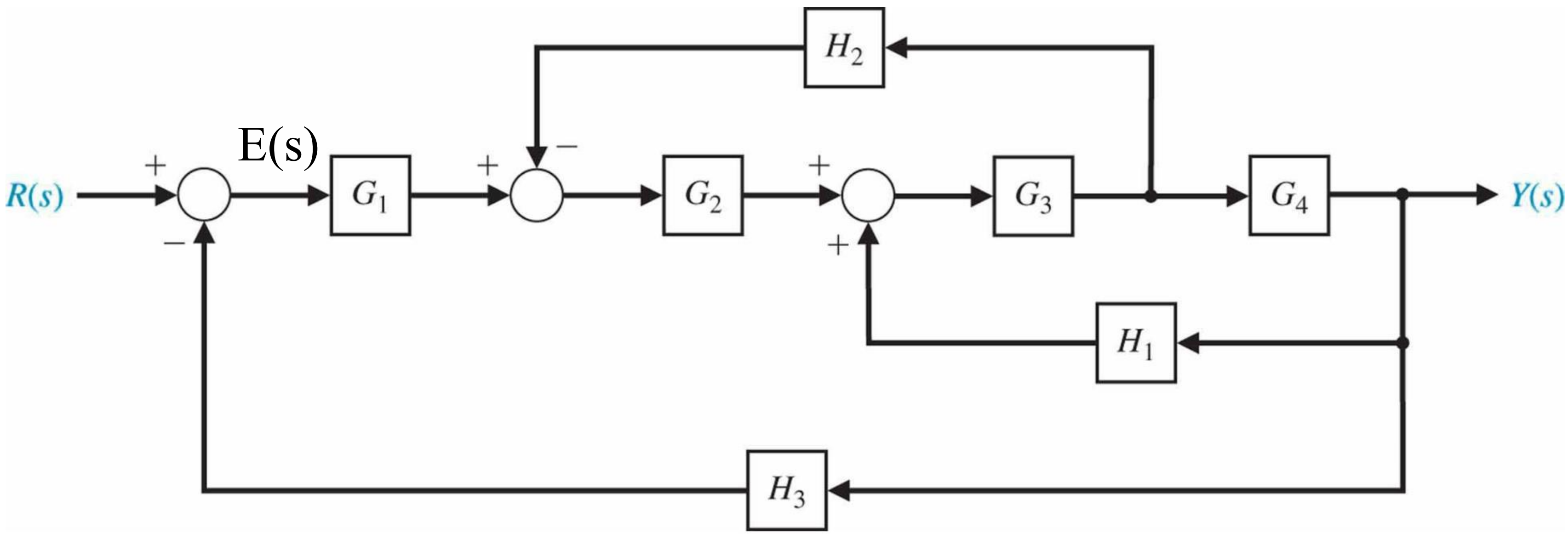



**Solución:** Usando las reglas 1 y 6

$$R(s) \longrightarrow \boxed{\frac{G_c(s)G_a(s)G(s)}{1 + H(s)G_c(s)G_a(s)G(s)}} \longrightarrow Y(s)$$

# Reducción de un diagrama de bloques

**Ejemplo 2:** Simplifica el siguiente diagrama de bloques:





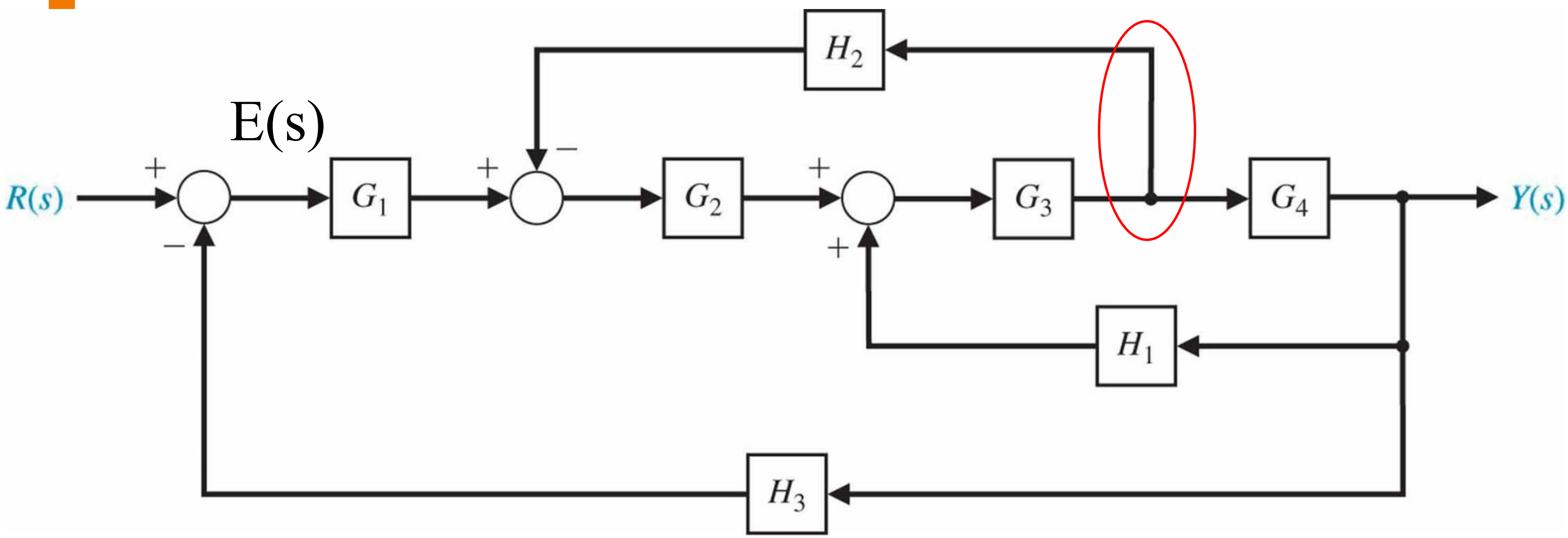

$$E(s)= R(s)-H_3(s)Y(s)$$

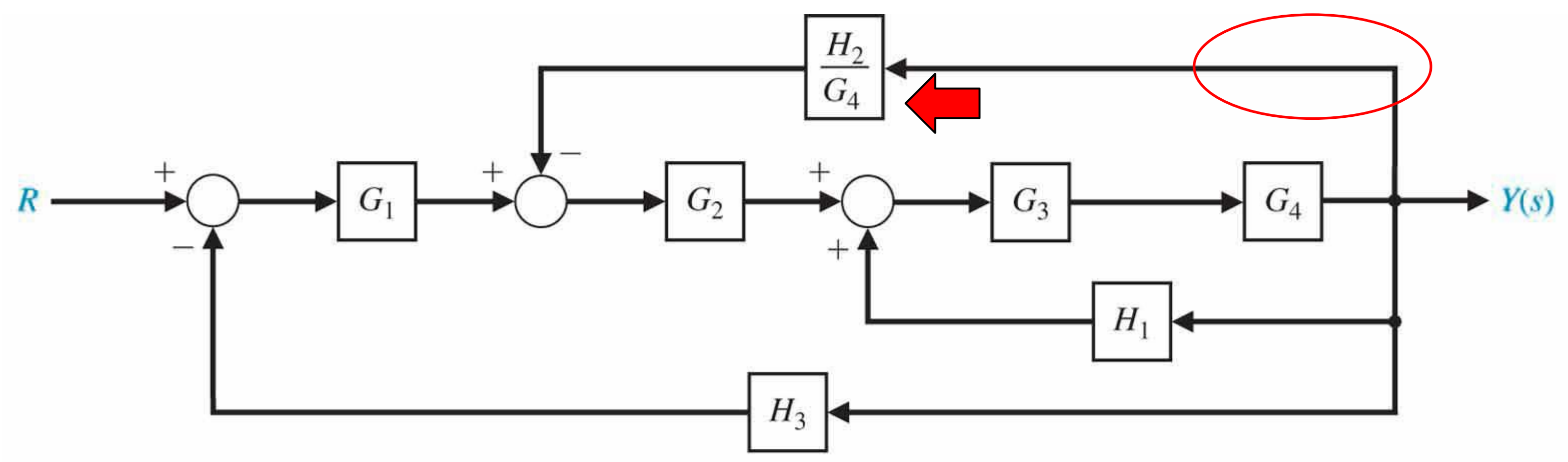
**¿Por dónde empezamos a simplificar?**

# Reducción de un diagrama de bloques

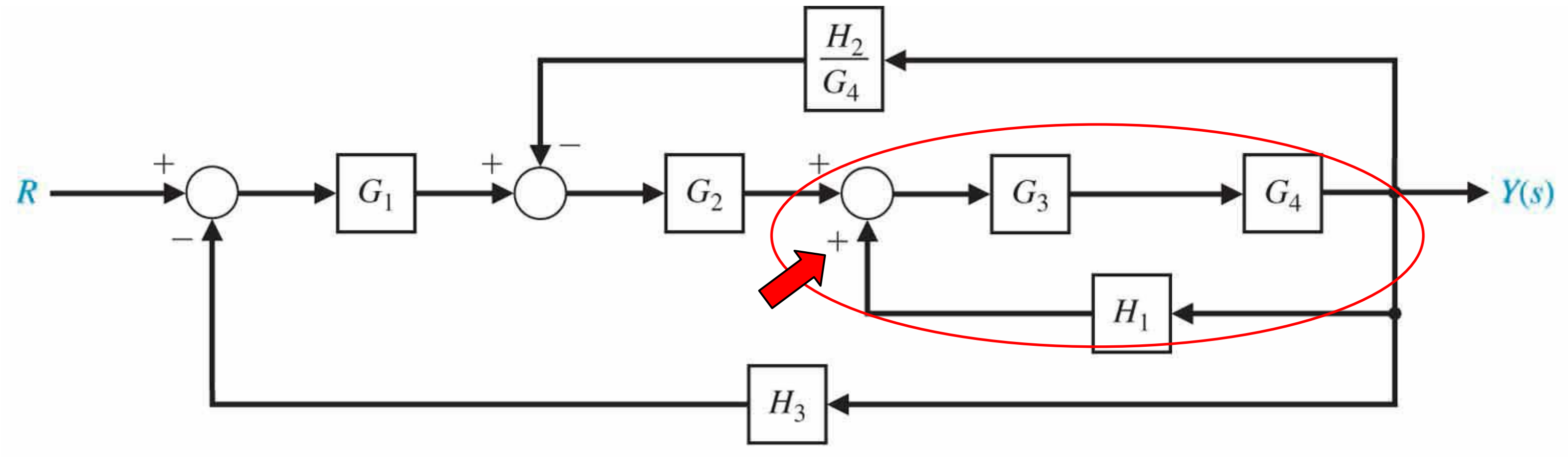


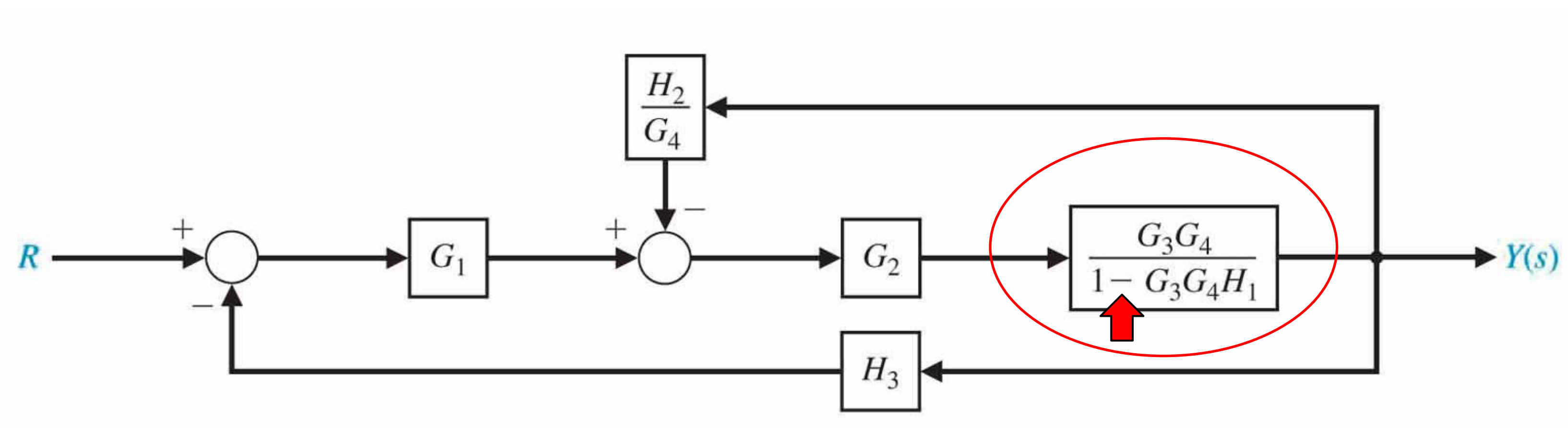
**Paso 1:** Usando la regla 4, movemos la bifurcación al otro extremo de $G_4$.



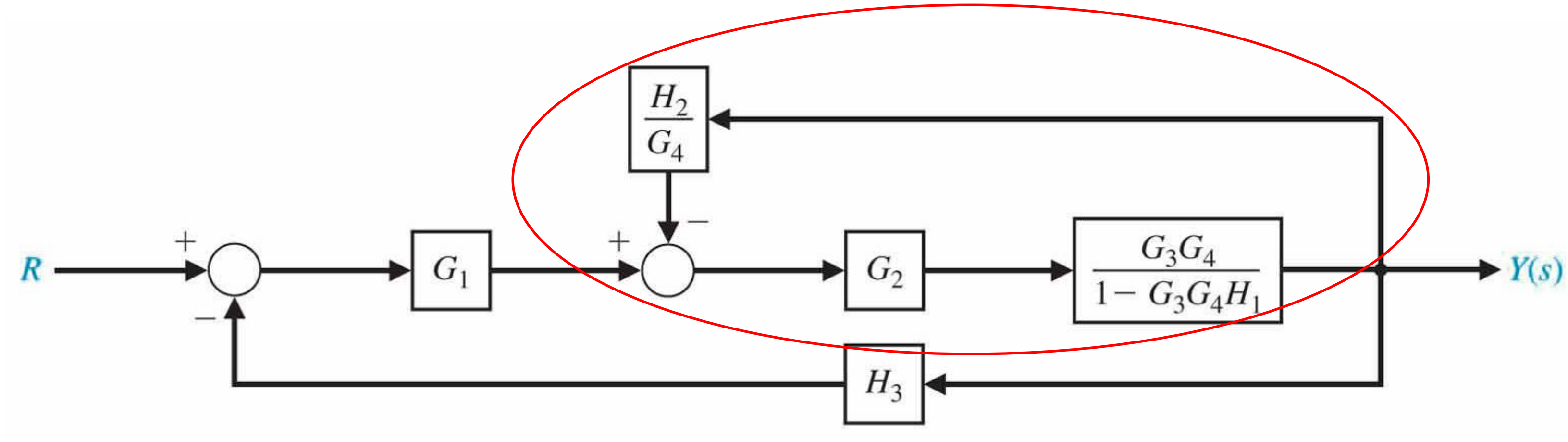



**Paso 2:** Usando las reglas 1 y 6, simplificamos el lazo cerrado formado por $G_3$, $G_4$, $H_1$, con atención al signo de la realimentación.

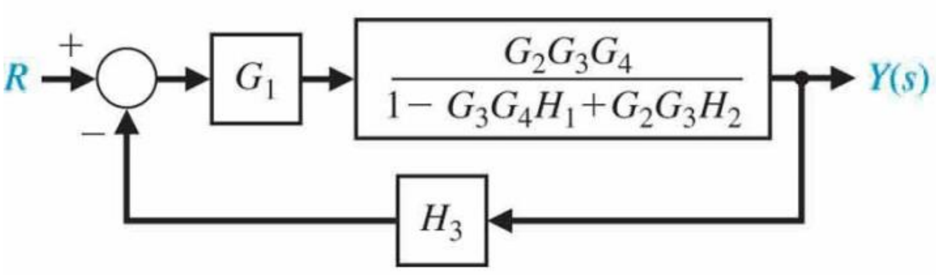


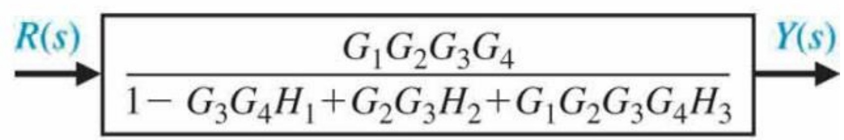



**Paso 3:** Usando las reglas 1 y 6, simplificamos el lazo cerrado superior




**Paso 4:** Usando las reglas 1 y 6, simplificamos lazo cerrado final

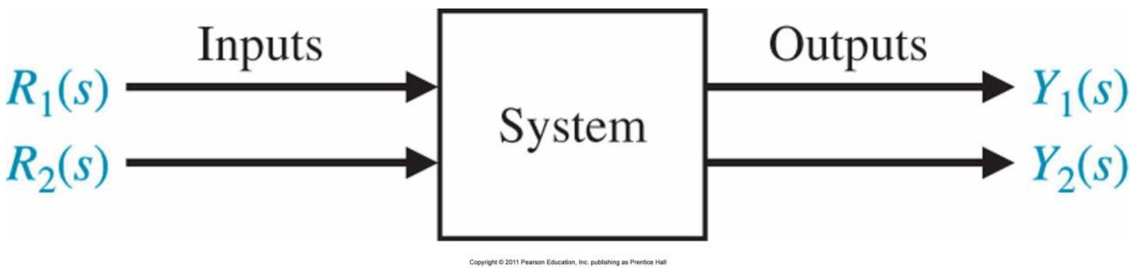


# Diagramas de bloques MIMO

La reducción de diagramas de bloques puede ser un proceso relativamente complejo cuando las interrelaciones son complejas.

Particularmente, en sistemas con varias variables de entrada y varias variables de salida (sistemas MIMO, *multiple input - multiple output*).




$$Y_1(s)=G_{11}(s)R_1(s)+G_{12}(s)R_2(s)$$
$$Y_2(s)=G_{21}(s)R_1(s)+G_{22}(s)R_2(s)$$

En el caso general ("J" entradas, "I" salidas), cada variable de salida $Y_i(s)$ puede depender de cada una de las entradas $R_j(s)$ a través de una función de transferencia $G_{IJ}$:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \dots \\ Y_I(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & \dots & G_{1j}(s) \\ G_{21}(s) & & G_{2j}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{I1}(s) & \dots & G_{IJ}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \\ \dots \\ R_J(s) \end{bmatrix}$$

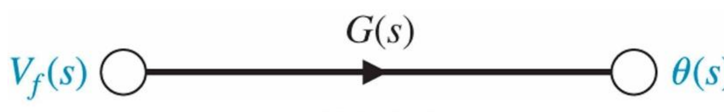
# Grafos de flujo de señal

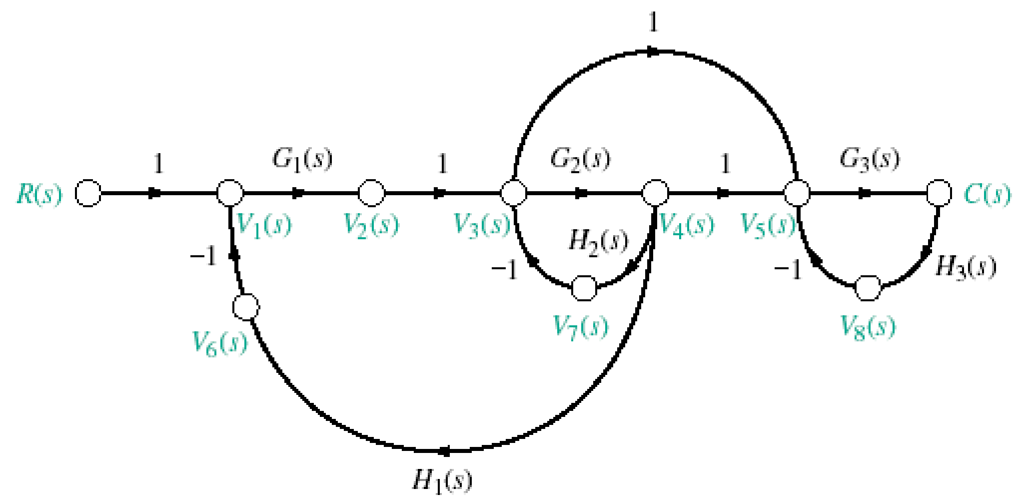


Los grafos de flujo de señal ("*signal-flow graphs*", en inglés) son una alternativa a los diagramas de bloques para representar gráficamente un sistema de control.

Un grafo de flujo consiste una red de nodos (*nodes*) conectados a través de ramas (*branches*) dirigidas (es decir, con un sentido), donde:

- Cada nodo representa una variable del sistema. Es equivalente a una señal en un diagrama de bloques.
- Cada rama entre dos nodos representa la relación $G_{ij}(s)$ entre las variables (nodos) que une. Es equivalente al bloque en un diagrama de bloques.

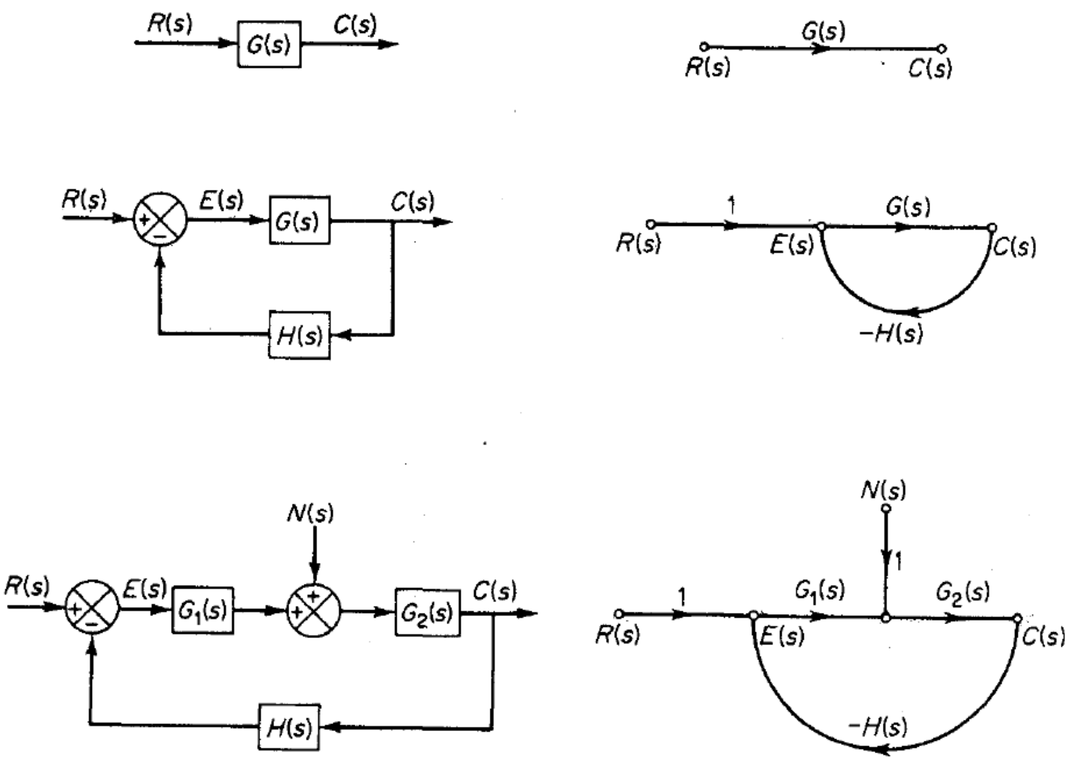


Se denomina trayecto (camino, “*path*”) a una rama o secuencia de ramas que pueden recorrerse desde una señal (nodo) a otra señal (otro nodo).

Un lazo (bucle, “*loop*”) es una trayecto cerrado que se origina y termina en el mismo nodo.

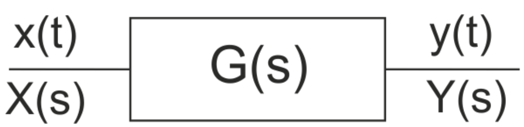
## Equivalencias entre Diagramas de Bloques simples y Grafos de Flujo

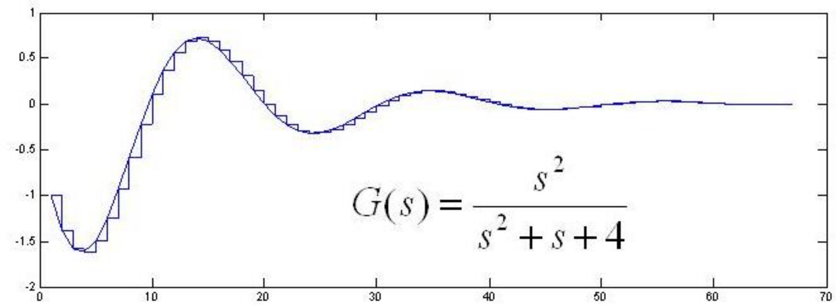


# Modelado según la teoría de control clásica

- En este tema se ha estudiado la representación de un sistema de control en el dominio de la frecuencia compleja "s".

  ✓ Reemplaza las EDO por relaciones algebraicas entrada-salida (funciones de transferencia G(s)).




  ✓ Simplifica el estudio de sistemas interconectados (mediante reducción de diagramas de bloques usando las reglas del álgebra de bloques).

  ✓ Facilita el estudio de la estabilidad absoluta y de la respuesta transitoria de los sistemas (siguiente tema).

  ❖ Sólo se puede aplicar a sistemas lineales invariantes en el tiempo (*Linear Time-Invariant*, LTI), que provengan de ecuaciones diferenciales lineales con condiciones iniciales iguales a cero.

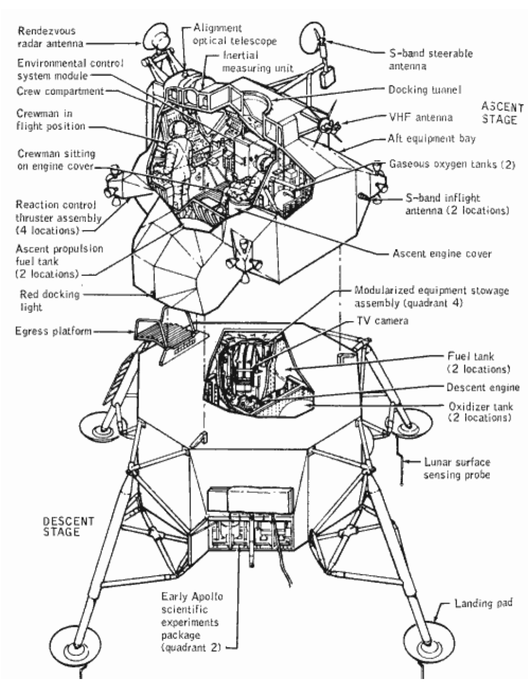
- Dicha estrategia se conoce como "teoría de control clásica" o como "modelado en el dominio de la frecuencia" o "representación externa".

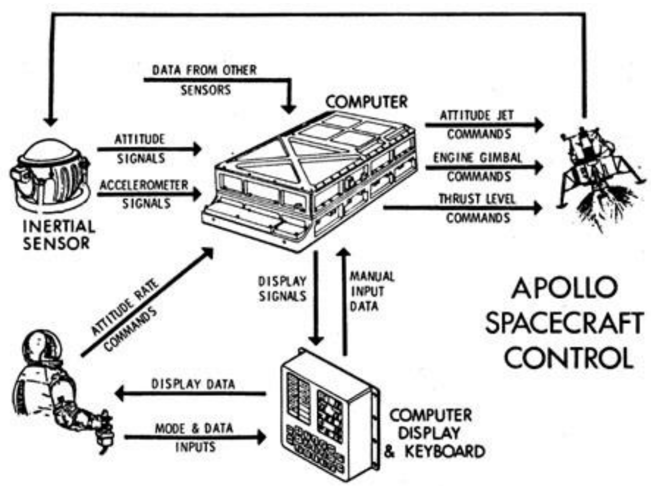
# Modelado según la teoría de control moderna



- A mediados de los años 50 del siglo XX, aparece la necesidad de diseñar sistemas de control para aplicaciones aeroespaciales.
- Junto con el desarrollo de las computadoras digitales, posibilitan la aparición de la "teoría de control moderna", también conocida como "modelado en el dominio del tiempo", "modelado mediante variables de estado" o "representación interna de un sistema de control"

✓ Sus primeras aplicaciones prácticas más famosas fueron en el *programa Polaris* (US Navy, 1956-60, misiles balísticos) y en el *programa Apollo* (NASA, 1960-75, misiones tripuladas y no tripuladas a la luna)



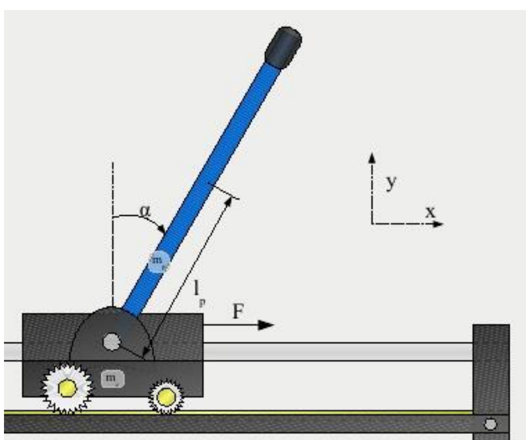

***Apollo Primary Guidance, Navigation and Control System (PGNCS)***

**Polaris A-3 on launch pad prior to a test firing at Cape Canaveral**

# Modelado según la teoría de control moderna



- El modelado mediante variables de estado tiene varias ventajas:
  - ✓ Permite el modelado tanto de sistemas lineales como no lineales
  - ✓ Permite el modelado de sistemas que varían (o no) en el tiempo
  - ✓ Permite el modelado de sistemas con condiciones iniciales iguales o distintas de cero
  - ✓ Para sistemas con una o múltiples entradas y salidas
  - ✓ Se usa en control de sistemas digitales (control en tiempo discreto)
  - ❖ Sin embargo, estas técnicas son menos intuitivas y más complejas




$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-m_p g}{m_c} & \dfrac{-K_1^2}{R_m m_c} & 0 \\ 0 & \dfrac{(m_p+m_c) g}{m_c l_p} & \dfrac{K_1^2}{R_m m_c l_p} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{K_1}{R_m m_c} \\ \dfrac{-K_1}{R_m m_c l_p} \end{bmatrix} V$$

**Ejemplo: sistema de control de un péndulo invertido (robot autoestable)**