Universidad Rey Juan Carlos

Tema 3. Identificación de la respuesta temporal de sistemas de control.

Parte 1: Respuesta Transitoria

Índice

- Respuesta temporal de un sistema de control. Señales normalizadas.
- Sistemas de primer orden: Respuesta a impulso, escalón y rampa.
- Sistemas de segundo orden: Características de la respuesta y tipología de sistemas en función de la respuesta a una entrada escalón.
- Sistemas de orden superior.

Respuesta temporal. Conceptos básicos

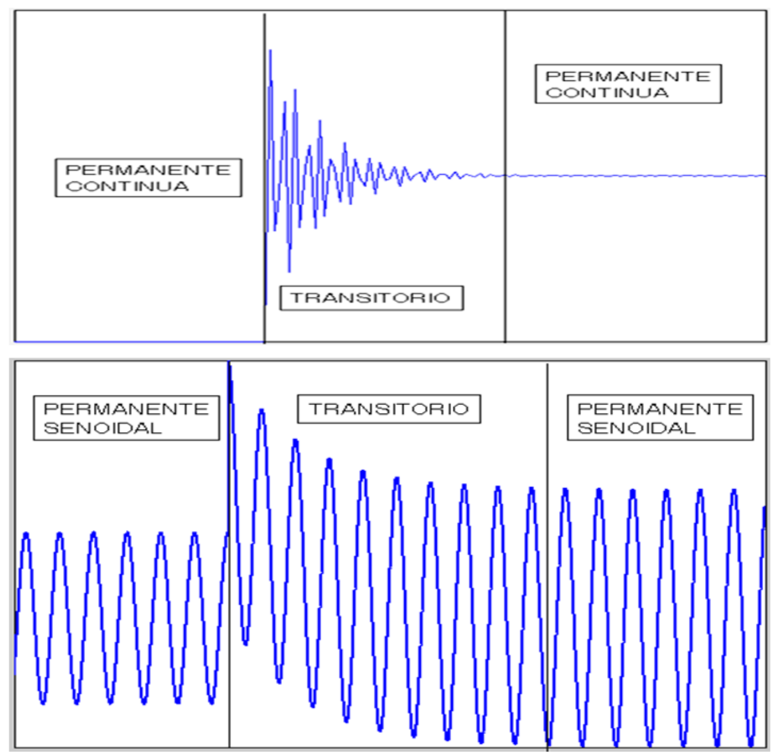
En el tema anterior se ha visto que la respuesta temporal y(t) (dominio del tiempo) de un sistema de control depende del propio sistema (a través de G(s)) y de la entrada aplicada, r(t). Se puede calcular mediante la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\{G(s)\cdot R(s)\}$$

$$y(t) = y_t(t) + y_e(t)$$

La respuesta y(t) siempre se puede considerar la suma de dos partes:

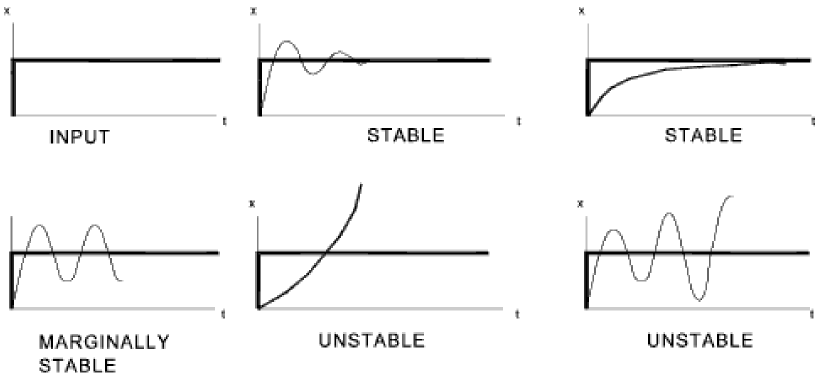
- **La respuesta transitoria** (también llamada respuesta natural o solución homogénea). Ante un cambio a la entrada del sistema, presenta un etapa transitoria antes de alcanzar el equilibrio. Desaparece para $t\to\infty$.
- **La respuesta permanente** (también llamada respuesta estacionaria, respuesta forzada o solución particular). La parte que no cambia cuando $t\to\infty$.

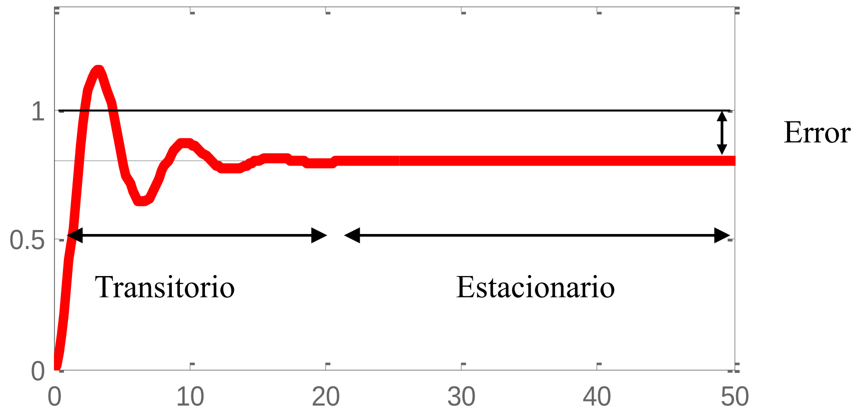


- En el transitorio, las características más importantes son la rapidez para llegar al estado estacionario y las oscilaciones que se puedan producir hasta que se alcanza.
- En el estacionario, lo más importante es:

✓ La estabilidad: salida acotada si la entrada es acotada.

✓ La precisión: se produce un error en estado estacionario si el sistema no es capaz de seguir a la entrada.



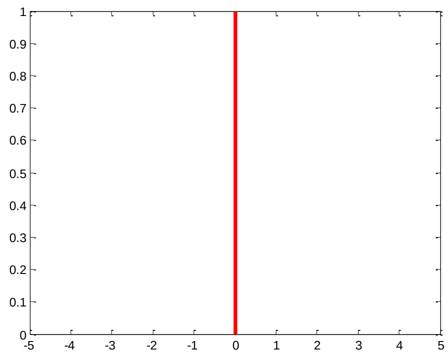


En la práctica, casi siempre hay que llegar a un compromiso entre la respuesta transitoria y la permanente.

Señales normalizadas de entrada

Para estudiar un sistema, lo normal es someterlo a entradas típicas (test input signals):

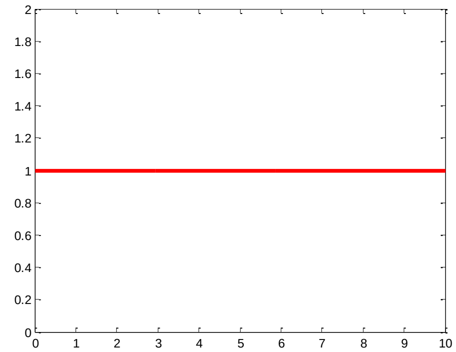
Impulso (impulse)



$$r(t) = \delta(t)$$

$$R(s) = 1$$

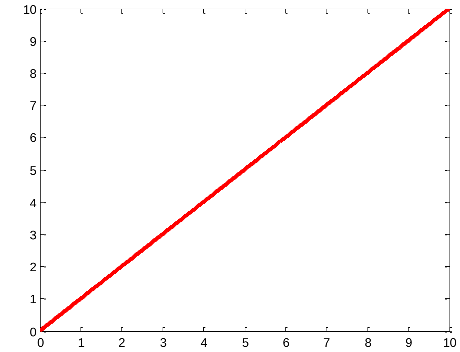
Escalón (step)



$$r(t) = \mathrm{A}$$

$$R(s) = \frac{\mathrm{A}}{s}$$

Rampa (ramp)

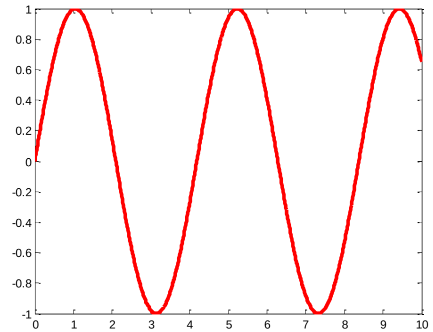


$$r(t) = \mathrm{A} \cdot t$$

$$R(s) = \frac{\mathrm{A}}{s^2}$$

Alternas sinusoidales de frecuencia ω:

permiten obtener la respuesta en frecuencia.



$$r(t) = \mathrm{A} \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

$$R(s) = \mathrm{A} \cdot \frac{\sin(\theta) + \omega \cdot \cos(\theta)}{s^2 + \omega^2}$$

Polos y ceros de la función de transferencia

¿Hay alguna manera de conocer la respuesta temporal del sistema sin tener que realizar la transformada inversa de Laplace? Sí, se basa en estudiar los polos y los ceros de la función de transferencia G(s).

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

- Polinomio (o ecuación) característico: es el denominador de la función de transferencia.

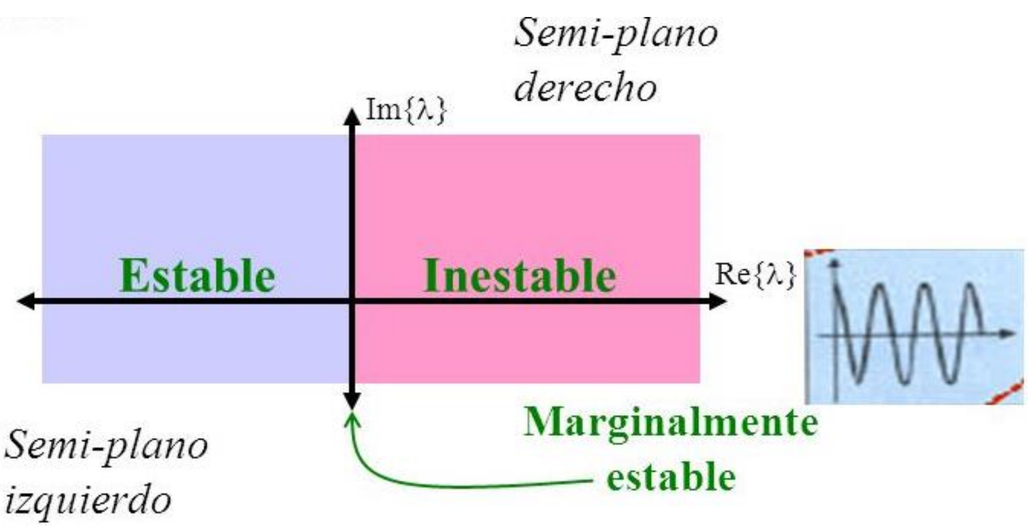
$$p(s)=s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$$

- Orden del sistema : grado del polinomio característico (valor de “n”).

- Polos del sistema (valores propios): valores de “s” que hacen que G(s) $\rightarrow \infty$, es decir, son las raíces del polinomio característico, p(s) = 0.
- Ceros del sistema : valores de “s” que hacen que G(s) = 0, es decir, son las raíces del numerador de la función de transferencia.

Estabilidad absoluta de un sistema de control

La estabilidad en régimen permanente (absoluta) de un sistema de control también se puede conocer sabiendo el lugar geométrico de los polos de la función de transferencia.



- Un sistema es ***estable*** si todos sus polos están situados en el semiplano complejo negativo (semiplano izquierdo).
- Un sistema es ***inestable*** si algún polo está situado en el semiplano complejo positivo (semiplano derecho).
- Un sistema es ***marginalmente estable (críticamente estable)*** si uno o más polos están en el eje imaginario del plano s

Sistemas de primer orden

Los sistemas de primer orden son los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales de primer orden. En la práctica son muy frecuentes: circuitos RC, sistemas térmicos, etc.

- Muchos sistemas de orden superior se pueden aproximar por uno de primer orden.

- Sistema dinámico más sencillo: ecuación diferencial con una única derivada.

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot u(t) \qquad \text{con} \qquad K, T > 0$$

- Aplicando la transformada de Laplace:

$$T \cdot s \cdot Y(s) + Y(s) = K \cdot U(s)$$

- A partir de esta expresión se obtiene la función de transferencia para un sistema de primer orden:

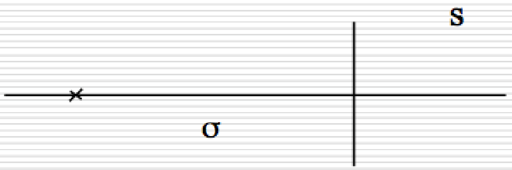
$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{1+Ts}}$$

Parámetros característicos de sistemas de 1er orden

- Parámetros característicos de un sistema de primer orden

$$T\dot{y}(t) + y(t) = ku(t)$$

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$$



k = Ganacia estática.

T = Constante de tiempo.

$\sigma = \frac{1}{T}$ = Factor de decrecimiento.

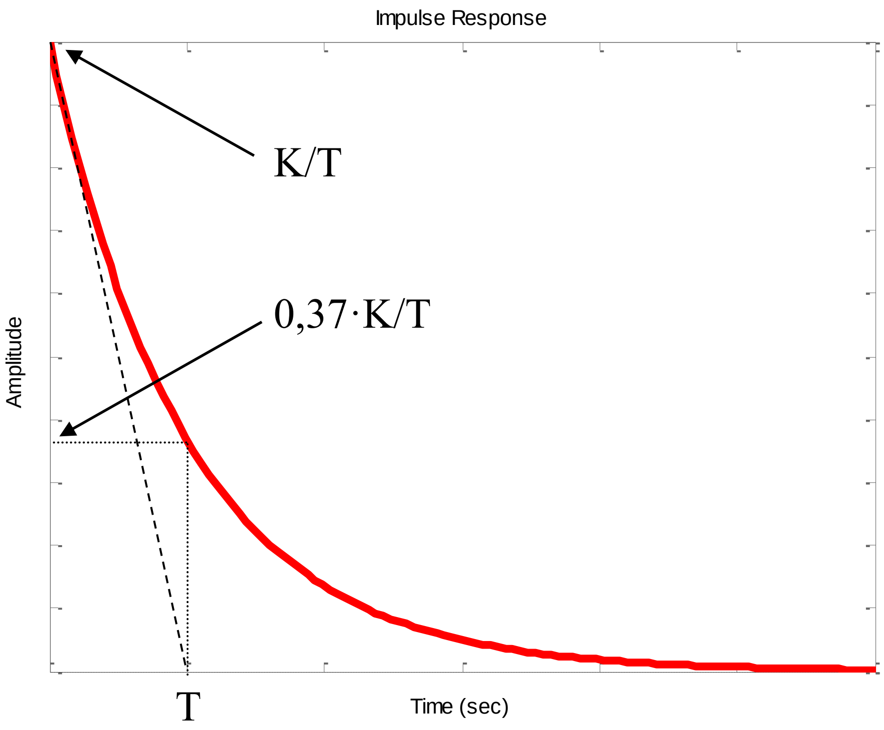
Como K y T se admiten mayores que cero, los sistemas de primer orden tienen un único polo situado en s = - σ, siempre en el semiplano negativo (izquierdo), luego son sistemas estables en régimen permanente.

Sistemas 1er orden: respuesta frente a impulso

Supongamos un sistema de primer orden sometido a una entrada impulso. La salida se calcula como:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{K}{T\cdot s+1}\cdot 1\right\} = \frac{K}{T}\cdot e^{\frac{-t}{T}}$$

- ✓ Si t = 0   y(0) = K/T
- ✓ Si t = T   y(T) = (K/T)·e^{-1} = 0.37·y(0)
- ✓ Si t $\to \infty$ y(∞) = 0



La constante de tiempo T es el tiempo que tardaría el sistema en alcanzar su valor final si variase al ritmo que lo hace inicialmente, que vale:

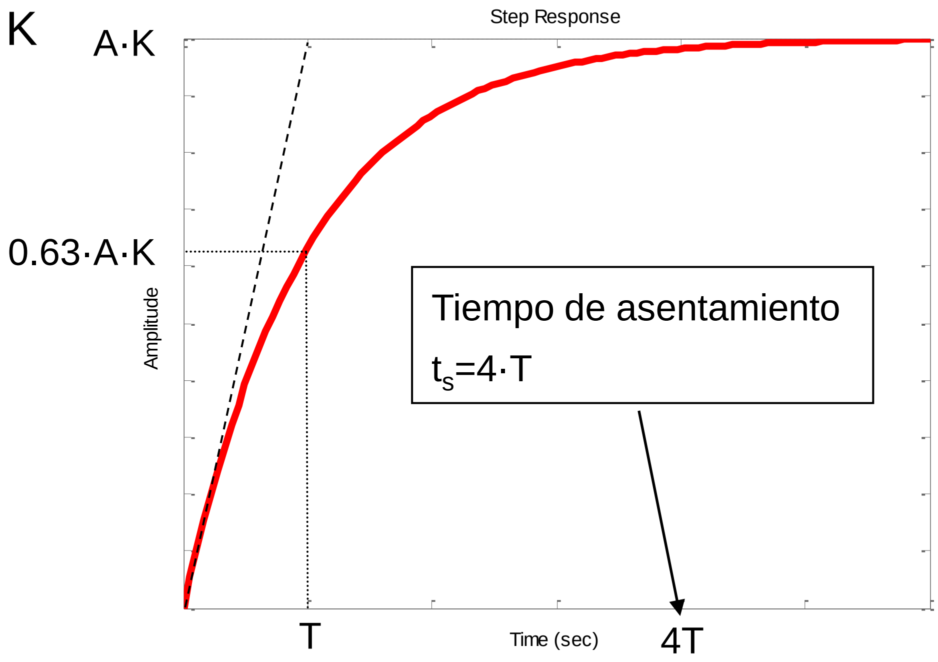
$$\dot{g}(0) = -\frac{k}{T^2} = -\frac{k/T}{T}$$

Sistemas 1er orden: respuesta frente a escalón

Supongamos un sistema de primer orden sometido a una entrada escalón de amplitud "A". La salida se calcula como:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{K}{T\cdot s+1}\cdot\frac{A}{s}\right\} = A\cdot K\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{T}{T\cdot s+1}\right\} = A\cdot K\cdot\left(1-e^{\frac{-t}{T}}\right)$$

- ✓ Si $t\to 0$ $y(0) = 0$
- ✓ Si $t\to T$ $y(T) = A\cdot K\cdot(1-e^{-1}) = 0.63\cdot A\cdot K$
- ✓ Si $t\to\infty$ $y(\infty) = A\cdot K$



- De nuevo, la constante de tiempo T es el tiempo que tardaría el sistema en alcanzar su valor final si variase al ritmo que lo hace inicialmente.
- Se denomina tiempo de asentamiento a ts = 4T. Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar un 98.2% de su valor final.
- t_s se considera una buena estimación del "tiempo de respuesta" del sistema.

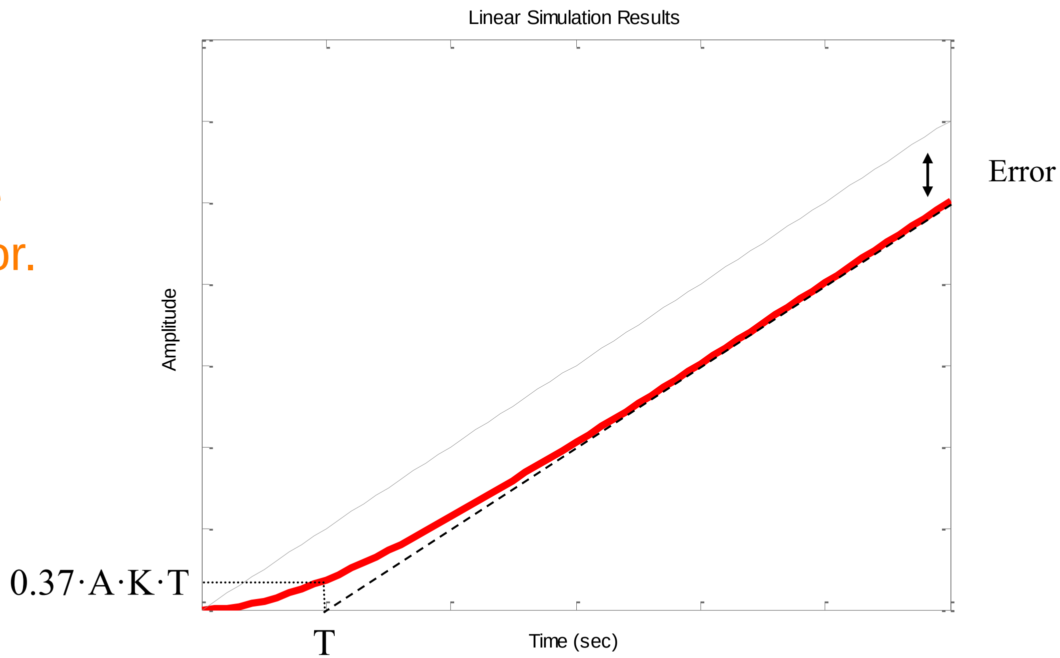
Sistemas 1er orden: respuesta frente a rampa

Supongamos un sistema de primer orden sometido a una entrada rampa de amplitud “A”. La salida se calcula como:

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{K}{T\cdot s+1}\cdot\frac{A}{s^2}\right\}=A\cdot K\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}-\frac{T}{s}-\frac{T^2}{T\cdot s+1}\right\}=A\cdot K\cdot\left(t-T+T\cdot e^{\frac{-t}{T}}\right)$$

- ✓ Si $t\to 0$ $\quad y(0) = 0$
- ✓ Si $t\to T$ $\quad y(T) = A\cdot K\cdot T\cdot e^{-1} = 0.37\cdot A\cdot K\cdot T$
- ✓ Si $t\to\infty$ $\quad y(\infty) = t-T$

- En estado estacionario y frente a una entrada rampa, un sistema de primer orden tiene siempre un error.
- La constante de tiempo T representa en este caso el tiempo del que parte la asíntota a la que tiende la respuesta del sistema en estado estacionario ($t\to\infty$).



Sistemas de segundo orden

Los sistemas de segundo orden son los sistemas cuyo comportamiento dinámico está descrito por ecuaciones diferenciales de orden dos.

- En la práctica son menos frecuentes que los de primer orden.
- Sin embargo se busca que sean de segundo orden mediante el empleo de la realimentación y de controladores adecuados, de ahí la importancia de su estudio.
- Presentan un rango de respuestas a las entradas estándar mucho más variado que los sistemas de primer orden.

Supongamos un sistema descrito por la ecuación diferencial:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = K \cdot u(t)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}$$

Universidad Rey Juan Carlos

Segundo orden: Forma adimensional

En la función de transferencia conviene usar unos parámetros que estén ligados al comportamiento físico de la respuesta y a la situación de sus polos en el plano "s".

Para ello, se utiliza la expresión conocida como "forma adimensional (o forma estándar) de un sistema de segundo orden":

$$\cancel{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}}$$

$$G(s) = \frac{k\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

k = Ganacia estática.

ω_n = Frecuencia natural no amortiguada.

ζ = Coeficiente de amortiguamiento. (también "razón" de amortiguamiento)

$\sigma = \zeta\omega_n$ = Factor de decrecimiento.

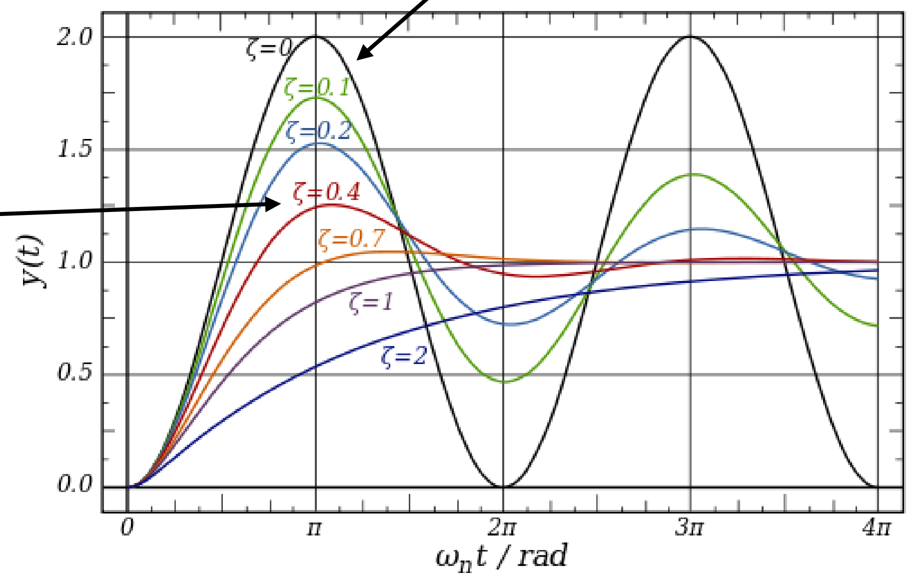
$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ = Frecuencia amortiguada.

$\vartheta = \cos^{-1}(\zeta)$

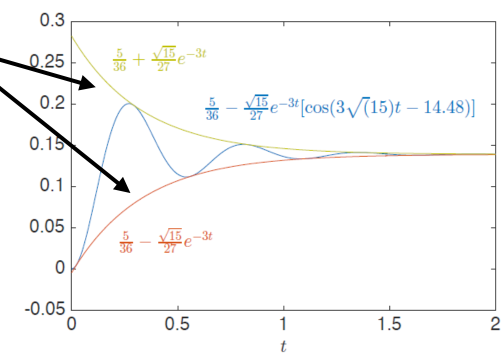
Significado físico de las constantes

- ω_n es la frecuencia natural del sistema porque si $\zeta=0$ veremos que el sistema tiene una respuesta sinusoidal con frecuencia igual a ω_n (en este caso $\sigma=0$ y $\omega_d=\omega_n$).

- A veces la salida es una señal amortiguada, donde ω_d es la frecuencia amortiguada del sistema siendo ζ el coeficiente de amortiguamiento $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

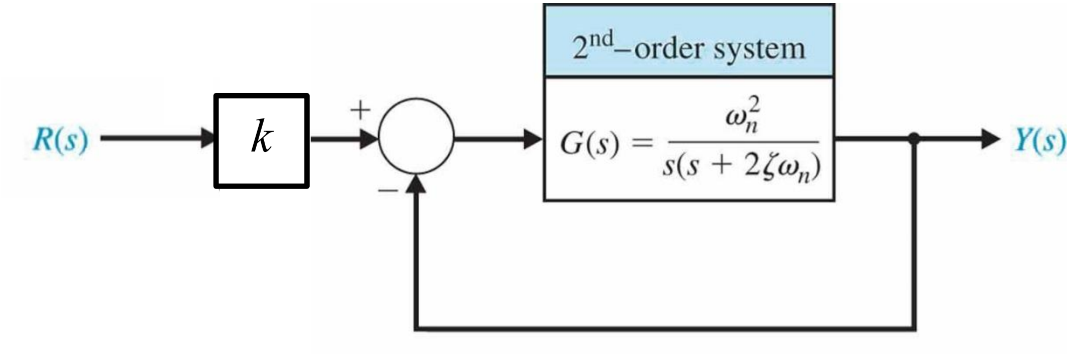


- $\sigma=\zeta\omega_n$ es el factor de decrecimiento.. Representa una modulación exponencial para la función sinusoidal que va asociada a la respuesta. Su inversa $1/\sigma$ es una medida de la constante de tiempo del sistema. Si σ crece el sistema es más rápido.

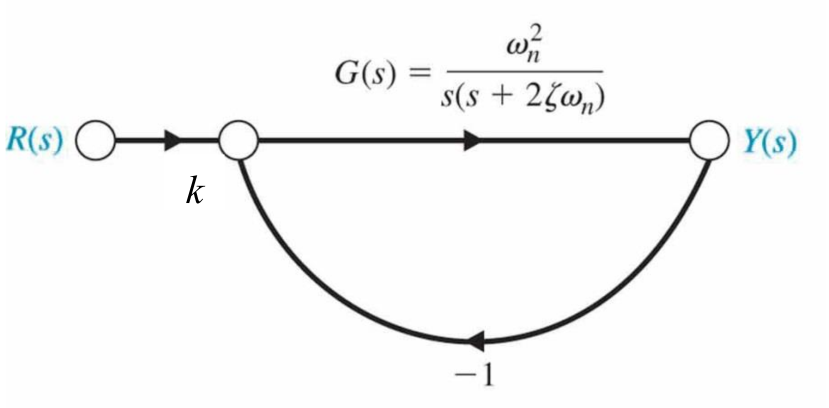


Sistemas de segundo orden realimentados

El diagrama de bloques de un sistema con realimentación negativa unitaria que da lugar a la forma estándar de la función de transferencia total del sistema es:



Que se corresponde con el siguiente grafo de flujo:



$$\boxed{G(s) = \frac{k\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

Polos en un sistema de 2º orden

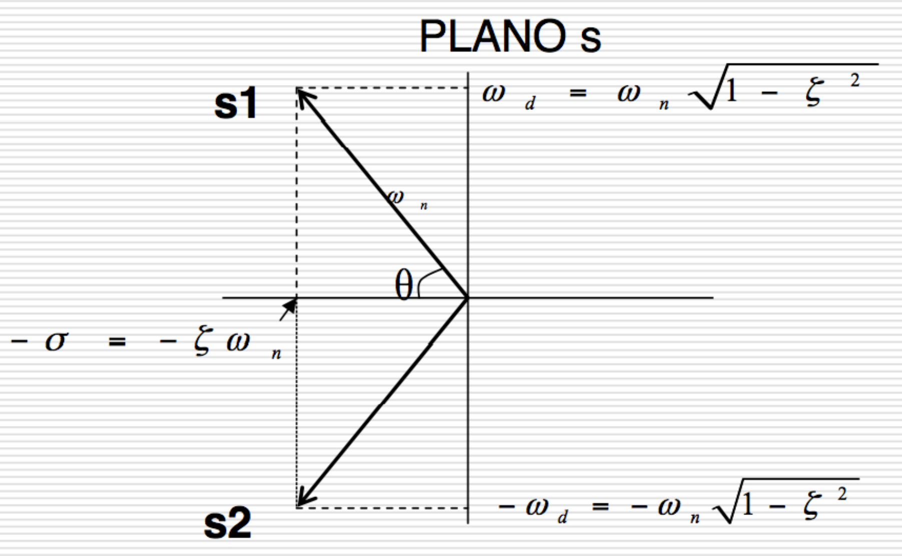
¿Cuáles son los polos de un sistema de 2º orden? Recordemos que los polos del sistema son las raíces del denominador (polinomio o ecuación característica) de la función de transferencia. Entonces:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\,2} = 0$$

$$s = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^{\,2} - \omega_n^2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

- ω_n es siempre > 0. Entonces si el coeficiente de amortiguamiento $\xi < 0$ el sistema es inestable.
- Si $\xi > 0$, los polos están en el semiplano negativo "s" o en el eje imaginario. Su posición exacta depende del valor que tome ξ



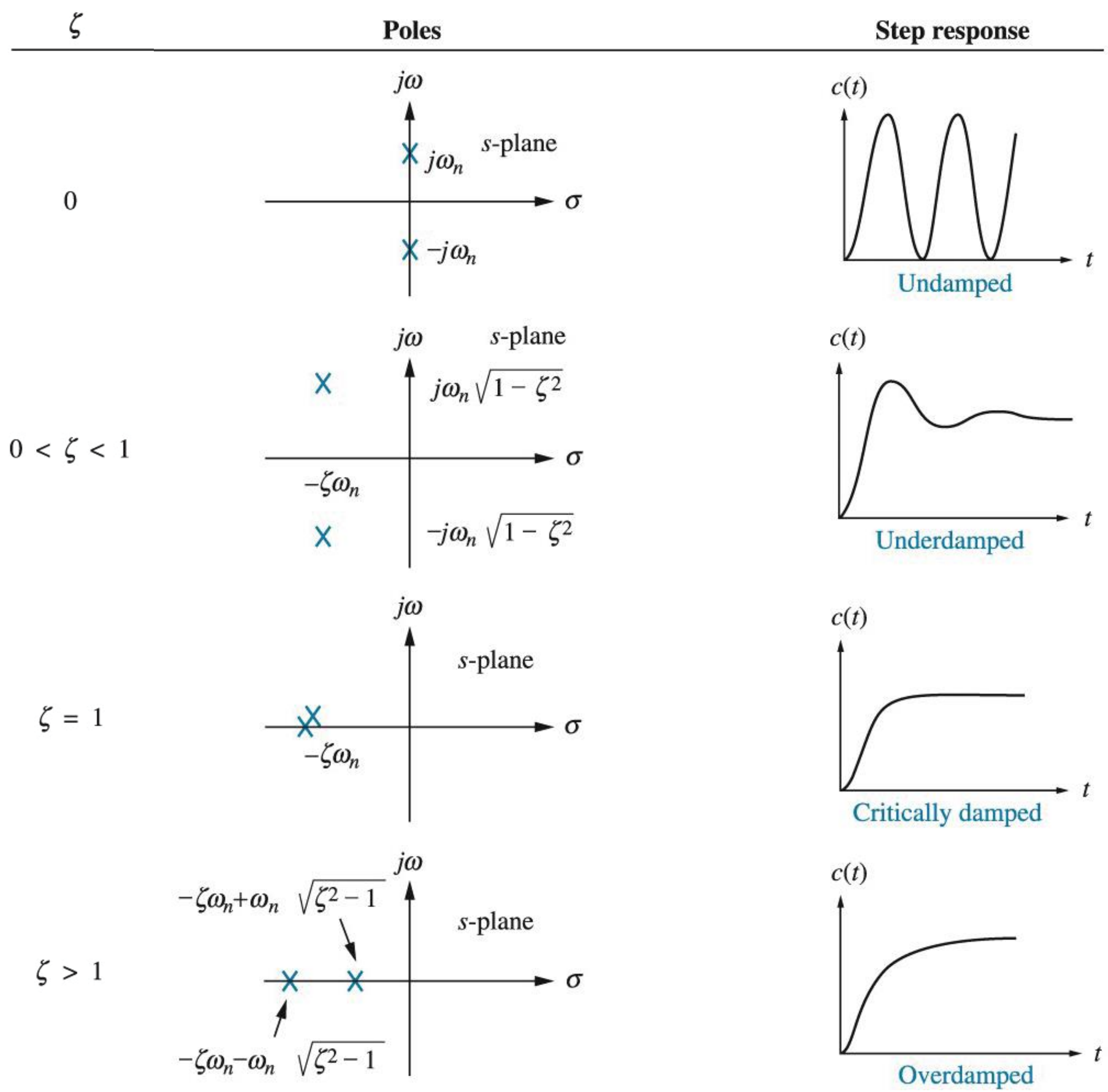
Polos y tipos de respuesta a escalón

Sistema no amortiguado (oscilador)

Sistema subamortiguado

Sistema críticamente amortiguado

Sistema sobreamortiguado



Tipos de sistemas de 2º orden

En resumen, simplemente con conocer el valor del coeficiente de amortiguamento ξ (y por ello el tipo de los dos polos del sistema) se puede determinar la forma de la respuesta y por ello el tipo de sistema de segundo orden:

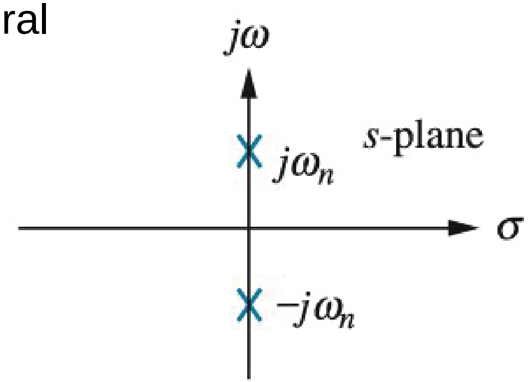
- Sobreamortiguado ($\zeta > 1$) ⇒ Polos reales negativos ⇒ $s = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$
- Críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) ⇒ Polo doble real negativo ⇒ $s = -\xi\omega_n$
- Subamortiguado ($0 < \zeta < 1$) ⇒ Polos complejos conjugados con parte real negativa ⇒ $s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$
- Oscilador ($\zeta = 0$) ⇒ Polos imaginarios puros ⇒ $s = \pm j\omega_n$
- Inestable ($\zeta < 0$)s⇒ Polos complejos conjugados con parte real positiva ⇒ $s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$, $\alpha_i = -\xi\omega_n > 0$

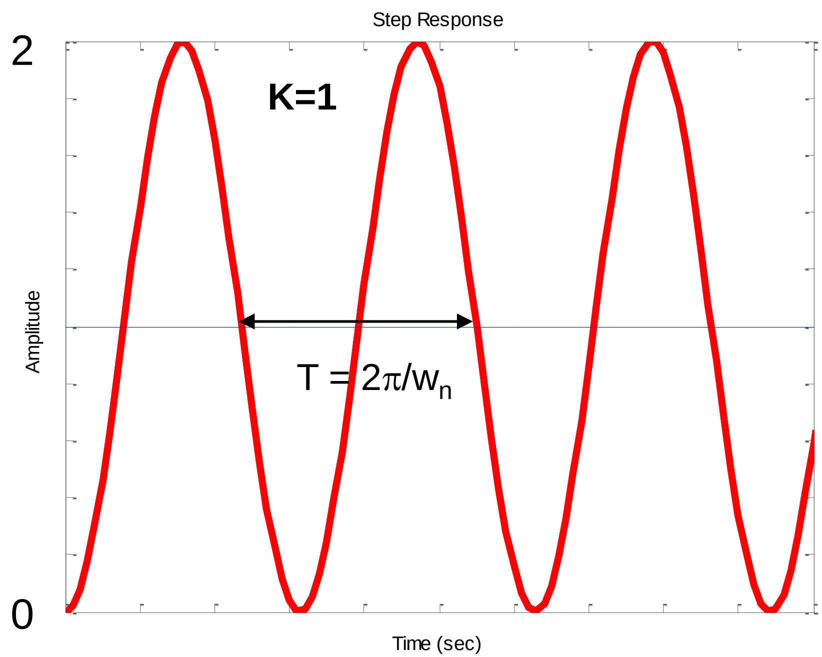
Sistemas de 2º orden no amortiguados

Supongamos un sistema no amortiguado (es decir, con $\zeta = 0$) sometido a una entrada escalón. ¿Cuánto vale la salida y(t)?

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{K\omega_n^2}{s^2+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}\right\} = K\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+\omega_n^2}\right\} = K\cdot\left[1-\cos\left(\omega_n t\right)\right]$$

- La frecuencia de dicha señal oscilatoria es ω_n, es decir, la frecuencia natural o no amortiguada del sistema.
- Cuanto más alejados están los polos del origen, mayor es la frecuencia natural





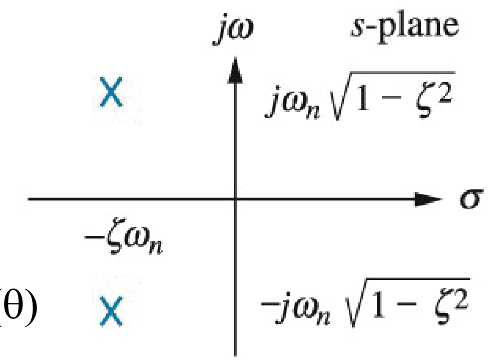
Universidad Rey Juan Carlos

Sistemas de 2º orden subamortiguados

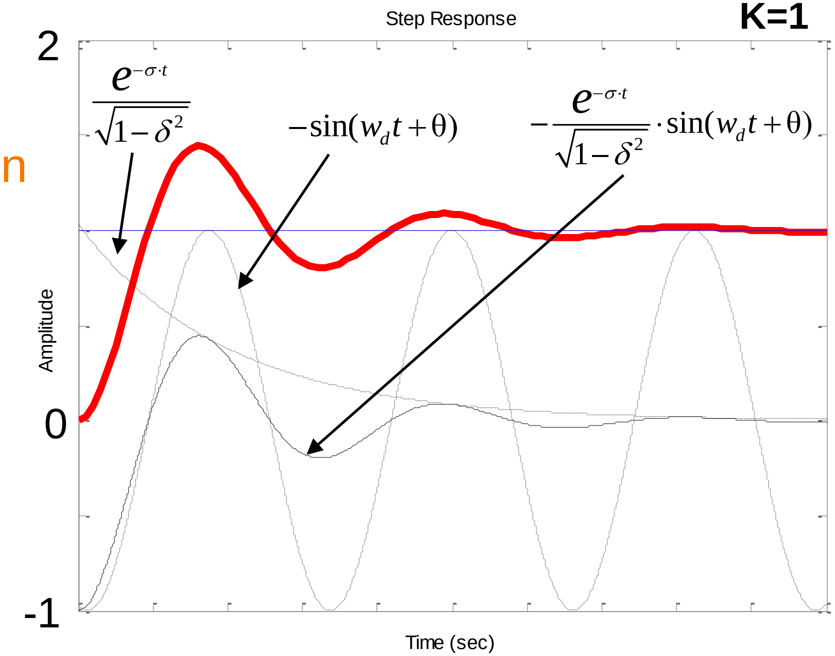
Supongamos un sistema subamortiguado (es decir, con $0<\zeta<1$) sometido a una entrada escalón. ¿Cuánto vale la salida y(t)?

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n\cdot s+\omega_n^2}\cdot\frac{1}{s}\right\} = K\cdot\left[1-\frac{e^{-\sigma\cdot t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot\sin(\omega_d t+\theta)\right]$$

- La salida es oscilatoria amortiguada. La frecuencia de dicha señal oscilatoria es ahora ω_d (frecuencia amortiguada). La oscilación está amortiguada por el término exponencial decreciente.
- Cuanto más negativo es el factor de decrecimiento $\sigma=-\zeta\cdot\omega_n$, la amortiguación es más pronunciada (polos rápidos).



$\zeta = \cos(\theta)$

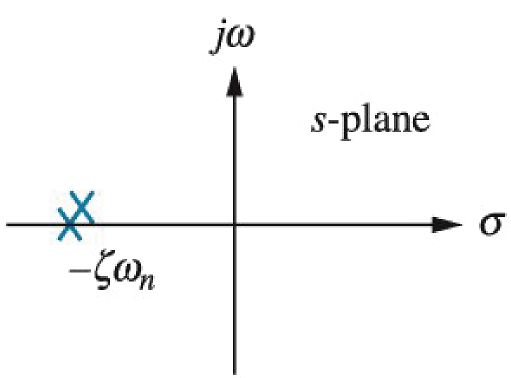


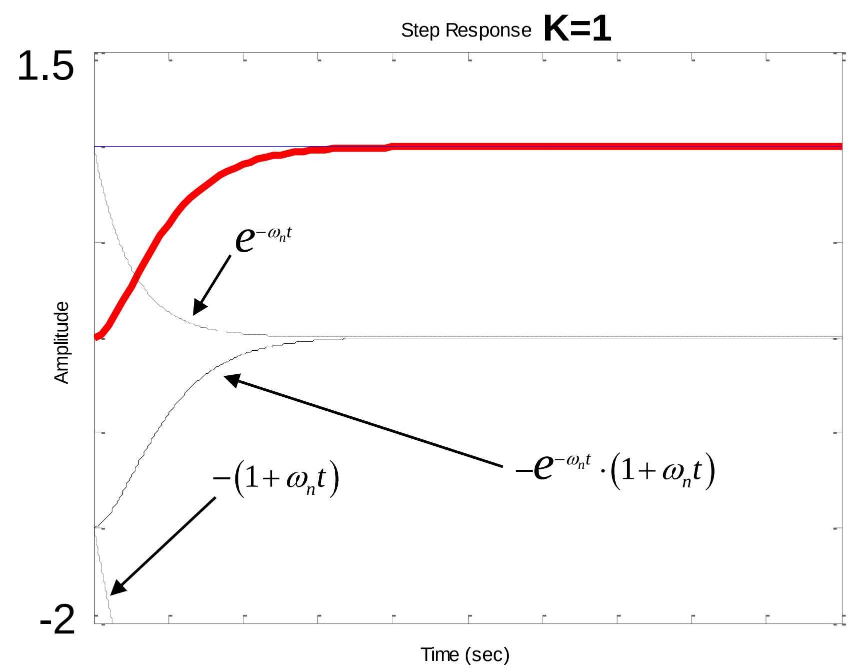
Sistemas de 2º orden con amortiguamiento crítico

Supongamos un sistema con amortiguamiento crítico (es decir, con $\zeta = 1$) sometido a una entrada escalón. ¿Cuánto vale la salida y(t)?

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n \cdot s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{K\omega_n^2}{\left(s + \omega_n\right)^2}\right\} = K \cdot \left[1 - e^{-\omega_n t} \cdot \left(1 + \omega_n t\right)\right]$$

- En este caso la salida y(t) es el producto de una exponencial decreciente y una recta.
- Los dos polos del sistema son reales, negativos e iguales, y de valor $-\omega_n$.
- Representa la respuesta más rápida posible del sistema sin que haya oscilación (sobreelongación).



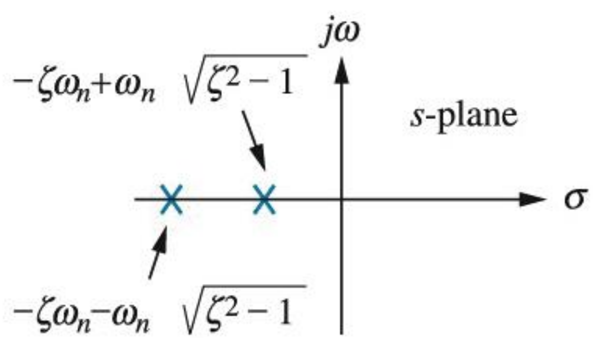


Sistemas de 2º orden sobreamortiguados

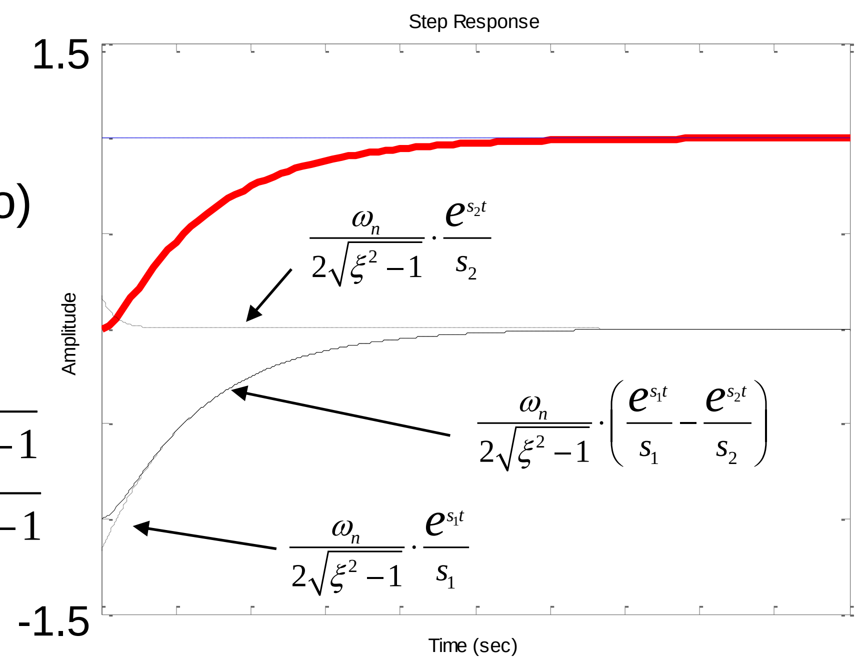
Supongamos un sistema sobreamortiguado (es decir, con $\zeta>1$) sometido a una entrada escalón. ¿Cuánto vale la salida y(t)?

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{K\omega_n^2}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)}\right\}=K\cdot\left[1+\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\cdot\left(\frac{e^{s_1t}}{s_1}-\frac{e^{s_2t}}{s_2}\right)\right]$$

- En este caso la salida y(t) es la combinación lineal de dos exponenciales decrecientes.
- Los dos polos del sistema son reales, negativos y distintos. Para $\zeta \gg 1$ la exponencial con el polo s_2 (el más rápido) se puede despreciar. La respuesta está dominada por el polo s_1 (polo lento).

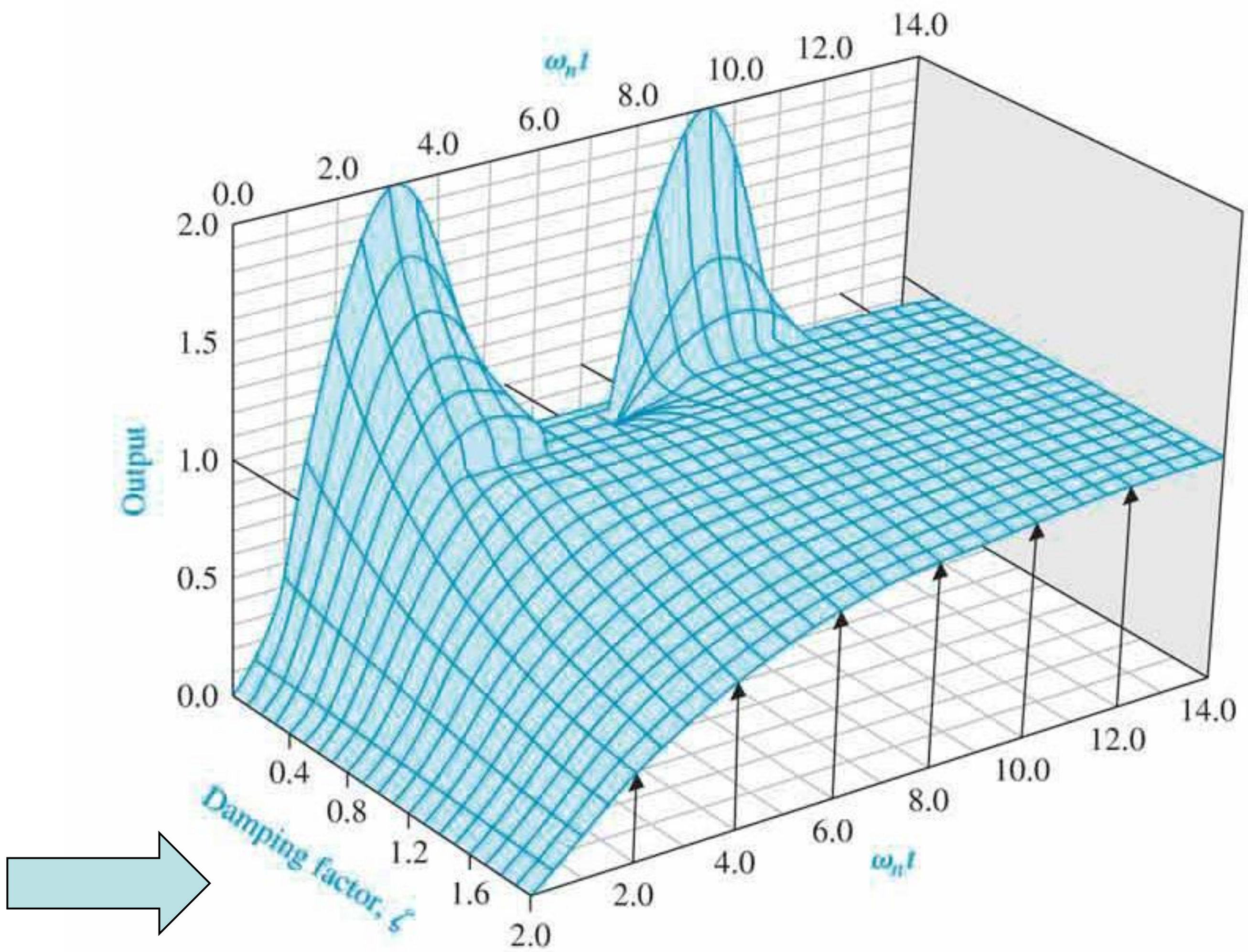


$$s_1=-\sigma+\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$
$$s_2=-\sigma-\omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$



Sistemas de 2º orden: Representación conjunta

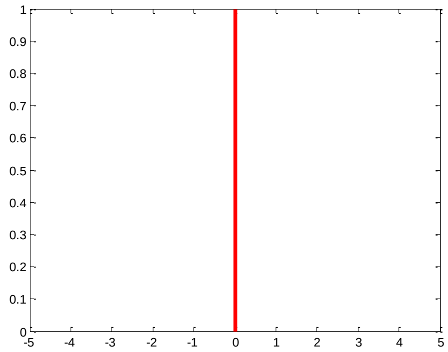
Las respuestas al escalón de los cuatro casos anteriores (no amortiguado, sub-, sobre-amortiguado y con amortiguamiento crítico) se pueden representar conjuntamente añadiendo un nuevo eje ζ



Sistemas de 2º orden: respuesta a impulso unitario

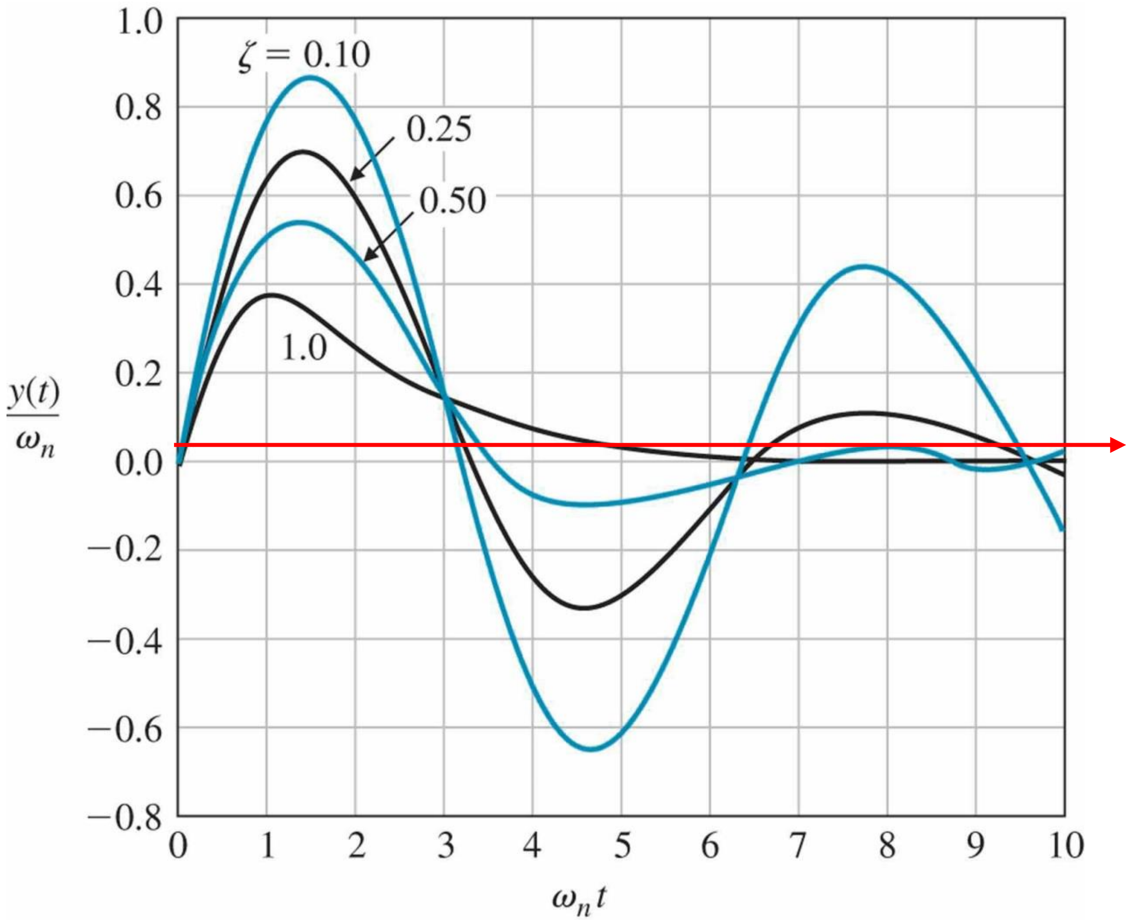
La respuesta a un impulso unitario de un sistema de segundo orden sigue exactamente los mismos criterios que se han visto para la respuesta a un escalón unitario:

Impulso (impulse)



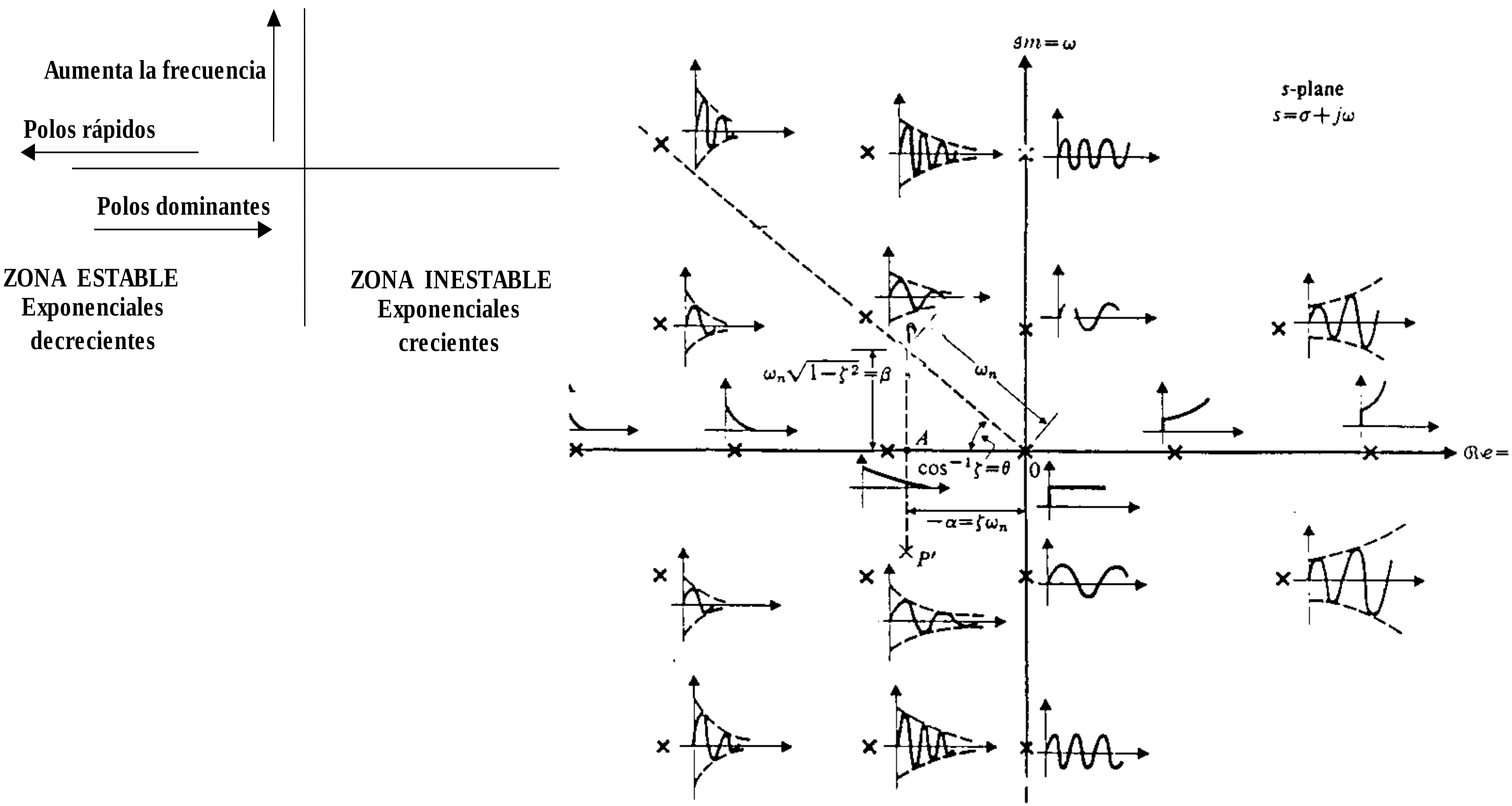
$$r(t) = \delta(t)$$

$$R(s) = 1$$



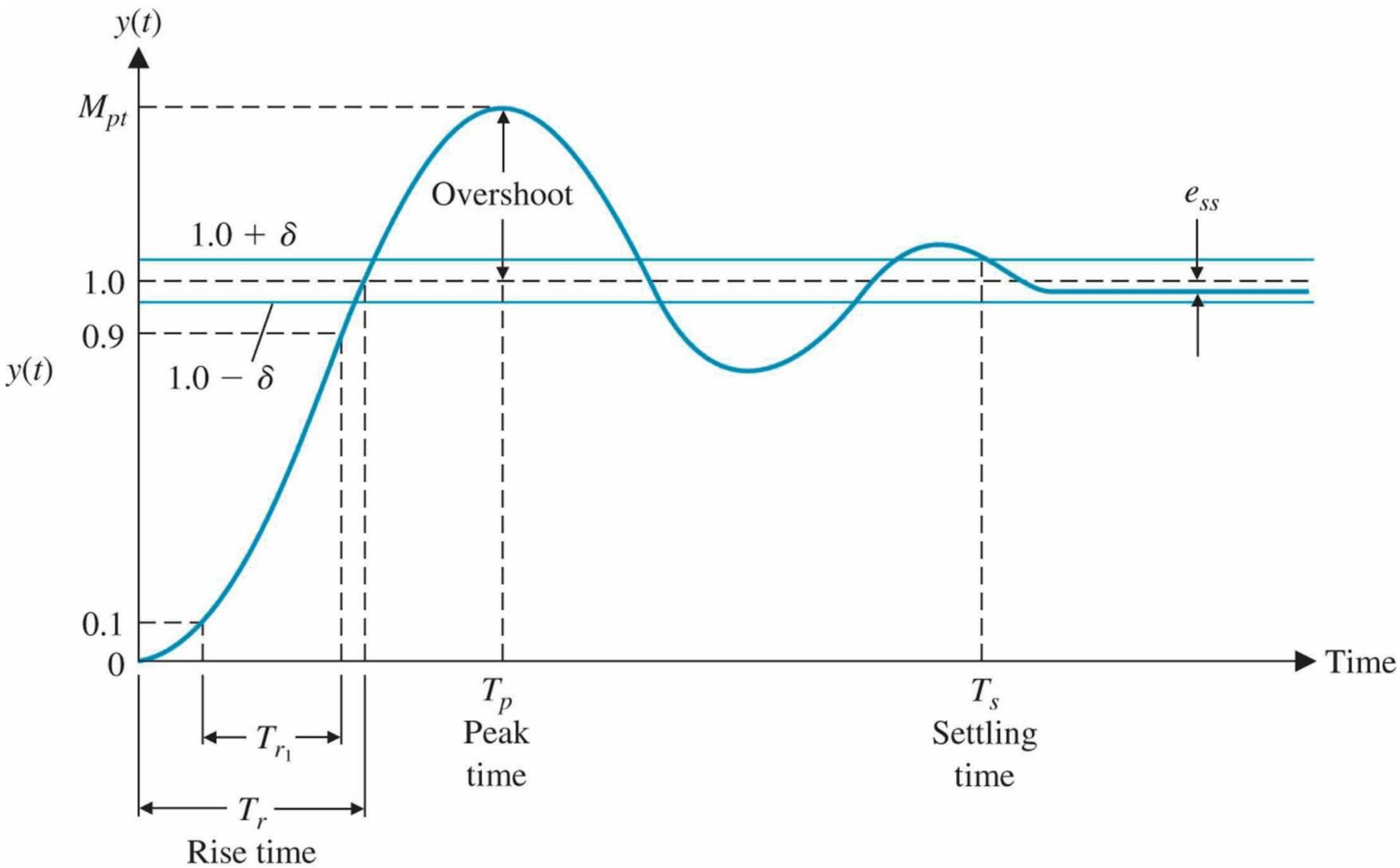
Resumen: localización polos y respuesta

El efecto de las distintas localizaciones de los polos en el plano "s" (lugar de las raíces) para un sistema de 2º orden sería, en resumen:



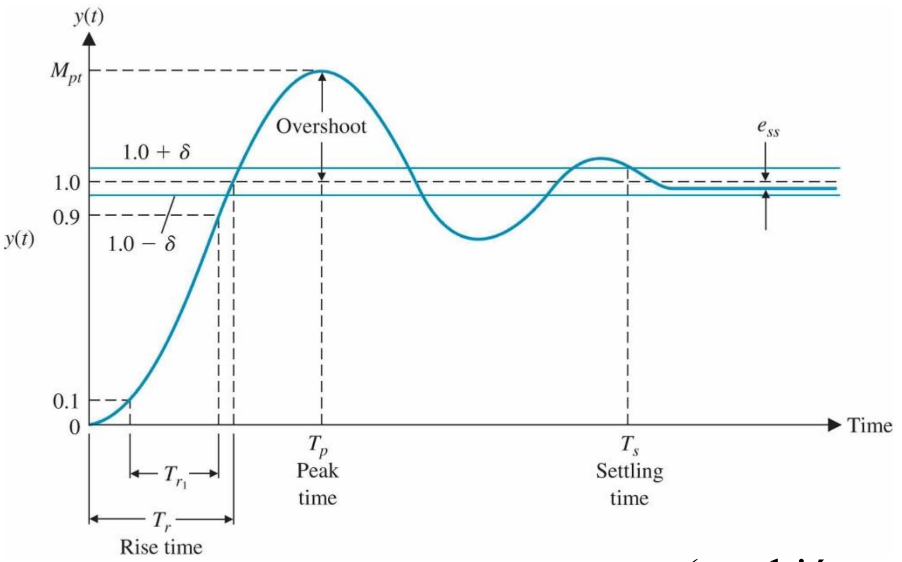
Forma general de la respuesta transitoria

La respuesta transitoria genérica se puede caracterizar por un conjunto de parámetros (especificaciones) que permiten comparar distintos sistemas.



Parámetros de la respuesta transitoria

Los parámetros más importantes, junto con sus valores aproximados para sistemas de segundo orden son los siguientes:



- Tiempo de estabilización: $t_s \approx \dfrac{\pi}{\sigma}$, $(recordar \quad \sigma = \zeta\omega_n)$ → (también "tiempo de asentamiento")
- Tiempo de subida: $t_r \approx \dfrac{\pi - \vartheta}{\omega_d}$, $(recordar \quad \vartheta = \cos^{-1}(\zeta))$
- Tiempo de pico: $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$
- Sobreoscilación: $M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = e^{-\frac{\pi}{\mathrm{tg}\,\theta}}$ → (también "valor de pico" o "sobreelongación")

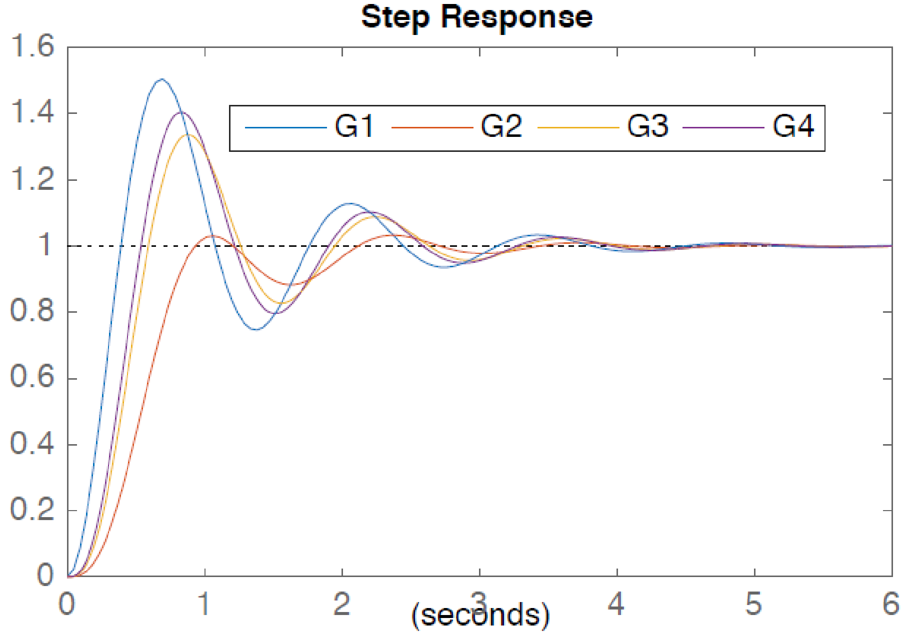
(menor ζ, amortiguamiento, mayor sobreoscilación)

Sistemas de orden superior

Consideremos un sistema de tercer orden, añadiendo un polo adicional diferente al mismo sistema de segundo orden subamortiguado:

$$G_1(s) = \frac{22}{s^2 + 2s + 22} \qquad G_2(s) = \frac{44}{(s+2)(s^2+2s+22)}$$

$$G_3(s) = \frac{110}{(s+5)(s^2+2s+22)} \qquad G_4(s) = \frac{154}{(s+7)(s^2+2s+22)}$$



¿qué tendencia observas? ¿cómo describes el efecto de la adición de un tercer polo?

Efecto de los ceros en la respuesta transitoria

Consideremos el mismo sistema de segundo orden subamortiguado al que le añadimos un cero (raíz del numerador) de diferente valor:

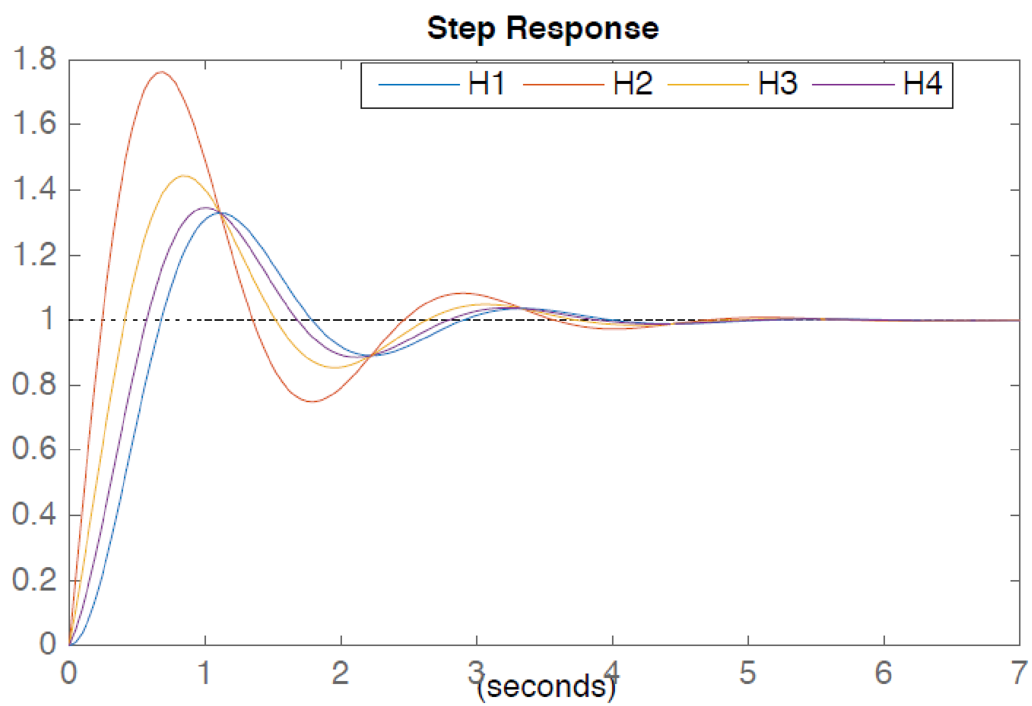
Respuesta transitoria de un sistema con ceros $(s+a)C(s) = \underbrace{sC(s)}_{\text{derivada de la respuesta original}} + \underbrace{aC(s)}_{\text{respuesta original multiplicada por } a}$

$$H_1 = \frac{9}{s^2+2s+9}$$

$$H_2 = \frac{(9/2)(s+2)}{s^2+2s+9}$$

$$H_3 = \frac{3(s+3)}{s^2+2s+9}$$

$$H_4 = \frac{(9/10)(s+10)}{s^2+2s+9}$$



¿cómo describes el comportamiento de un sistema con ceros respecto al sistema sin ceros (H_1)?