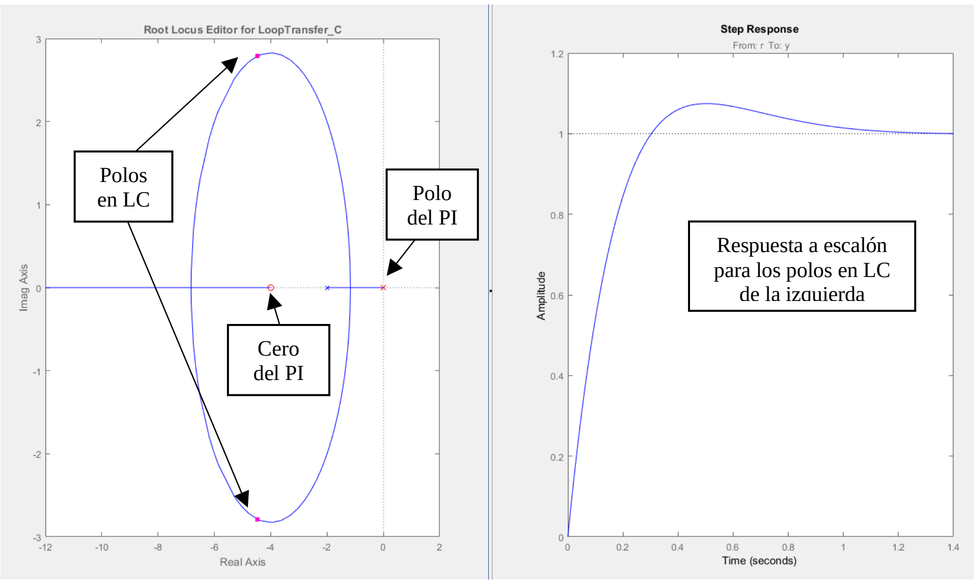
SOLUCIONES EJERCICIOS TEMA 5: Controladores PID

Problema 5.1. La planta $G(s)$ del sistema de la figura es de primer orden, por lo que:

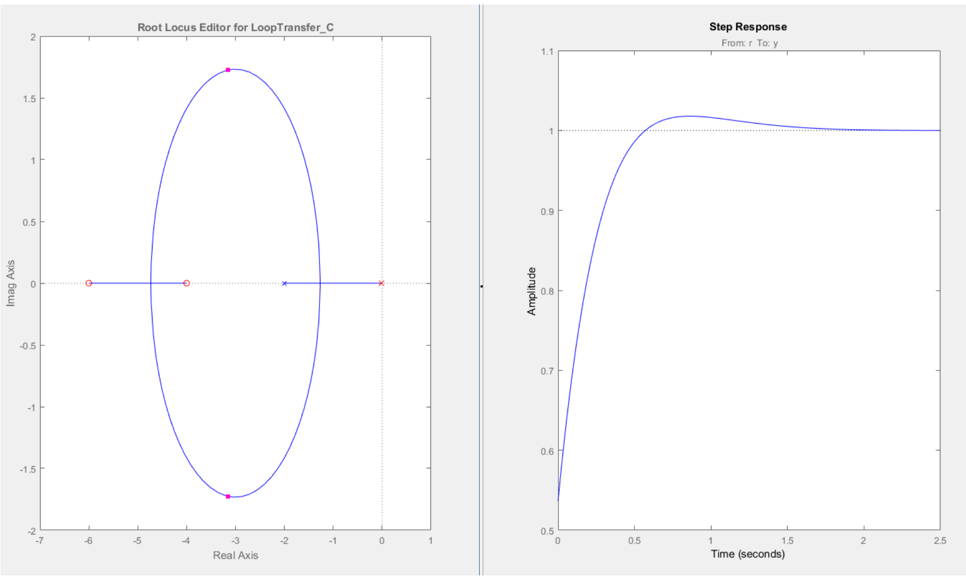
a) Con un **controlador proporcional (P)** sólo conseguiríamos comportamientos en lazo cerrado sobreamortiguados, ya que el único polo en lazo cerrado (LC) siempre estaría sobre el eje real negativo.

b) Con un **controlador proporcional derivativo (PD)** añadiríamos un cero (cuya posición se puede elegir). Independientemente de la posición del cero, el lugar de las raíces del sistema sería un segmento del eje real, por lo que estamos en la misma situación que en a).

c) Con un **controlador proporcional integral (PI)** añadimos un polo en el origen y un cero de posición seleccionable al sistema. El sistema pasa a ser de orden dos. Si se sitúa el cero a la izquierda de ambos polos (por ejemplo, en s=-4), el lugar de las raíces muestra que podrán existir polos en lazo cerrado complejos, por lo que el sistema podrá tener un comportamiento subamortiguado. Por ejemplo:



d) Con un **PID** (dos ceros y un polo en el origen) también se puede lograr un comportamiento similar. Por ejemplo, con uno de los ceros en s=-4 y otro en s=-6:



Problema 5.2.

Del requisito del error en estado estacionario se obtiene el valor de $\boldsymbol{K_p}$**=100.**

Del requisito del tiempo de asentamiento, y utilizando la expresión del mismo para un sistema de 2º orden canónico (sin ceros) de $\boldsymbol{t_s=4/\sigma}$, se obtiene que la parte real de los polos (en valor absoluto) debe ser de $\boldsymbol{\sigma=0{,}5}$.

Calculando la ecuación característica del sistema en lazo cerrado e igualándola por términos a la de un sistema genérico de 2º orden se obtiene, por comparación de los coeficientes, que $\boldsymbol{\omega_n}$ **es igual a 10 rad/s**. La parte real de las raíces es debe ser igual a $\sigma = 0{,}5 = \omega_n \cdot \zeta$ por lo que el coeficiente de amortiguamiento es de $\zeta=0{,}05$.

Con un coeficiente de amortiguamiento tan bajo, la respuesta ante una entrada escalón será muy oscilatoria. La sobreelongación máxima M_p esperada es de $100 \cdot \exp(-\pi/\tan\theta) = 85{,}5\%$.

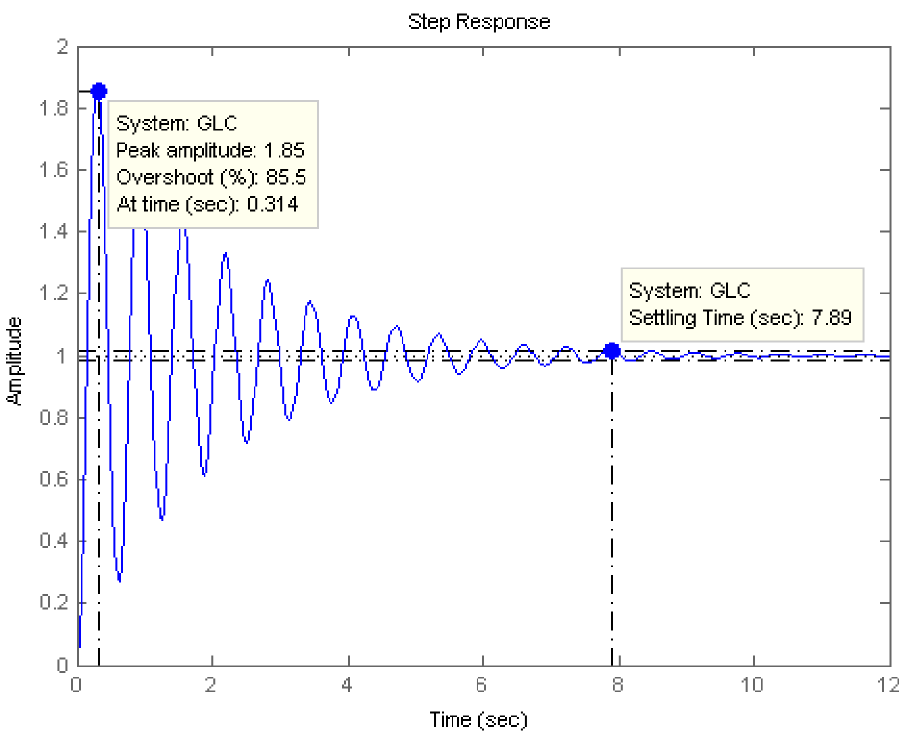
Los polos del sistema en lazo cerrado estarán situados en $\boldsymbol{s = -0.5 \pm 9{,}99j}$

Igualando coeficientes se obtiene la constante de tiempo del regulador PD, $\boldsymbol{T_d}$ **= 0,01 s.** La función de transferencia del controlador PD diseñado es $\boldsymbol{G_c(s) = 100(1+0{,}01s) = (s+100)}$, es decir, tiene un cero en s=-100.

¿Es válido el uso de las expresiones de $\boldsymbol{t_s}$ y $\boldsymbol{M_p}$ correspondientes a un sistema de segundo orden canónico (sin ceros) en este sistema con un PD, que sí tiene un cero en $\boldsymbol{s}$=-100?

El cero del controlador PD está en s=-100, es decir, que está alejado 200 veces más del eje imaginario que los polos en lazo cerrado de $\boldsymbol{s = -0{,}5 \pm 9{,}99j}$. Como la diferencia entre ambos supera el "factor 10", en ese caso el uso de las expresiones de un sistema de segundo orden sin ceros está justificado, y los valores reales de M_p y t_s serán muy parecidos a los calculados.

Comprobación: La simulación mediante MATLAB de la respuesta al escalón del sistema compensado nos confirma que la sobreelongación y tiempo de asentamiento calculados con las expresiones (M_p=85,5%, t_s = 8 s) son prácticamente iguales a los valores reales:

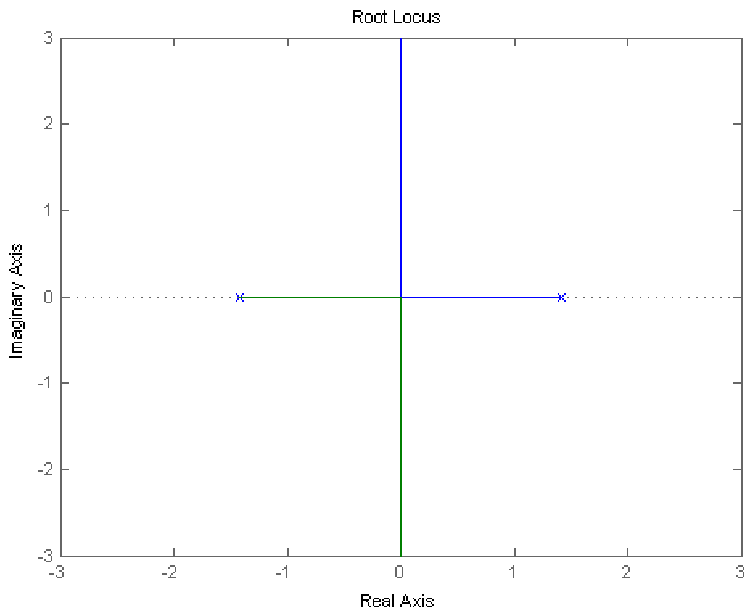


Problema 5.3.

a) Usando las expresiones del sistema de 2º orden sin ceros, un tiempo de asentamiento inferior a 1 s requiere que la parte real de las raíces dominantes de la ecuación característica (polos del sistema en lazo cerrado) sea **menor que -4.** Una sobreelongación máxima del 20% se corresponde con $\boldsymbol{\theta = 62{,}87^{\circ}}$, por lo que el coeficiente de amortiguamiento será de $\boldsymbol{\zeta = \cos(\theta) = 0{,}456}$**.**

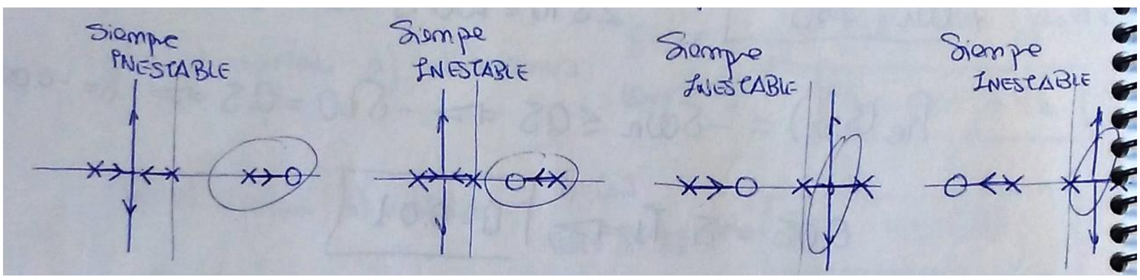
De ambos requisitos se extrae que $\boldsymbol{\omega_n = 8{,}77}$ **rad/s**. Por ello, los polos dominantes serán complejos conjugados y deberán estar situados en $\boldsymbol{s = -\sigma \pm j\omega_d = -4 \pm 7{,}8j}$

b) Los polos del sistema en lazo abierto están situados en $\boldsymbol{s = \pm 1{,}41}$**,** luego el lugar de las raíces de la planta no compensada (sin controlador) nos muestra un sistema siempre inestable en lazo cerrado (una raíz en el semiplano complejo positivo) o no amortiguado (las dos raíces del sistema sobre el eje imaginario), ya que el lugar de las raíces del sistema no compensado es el siguiente:

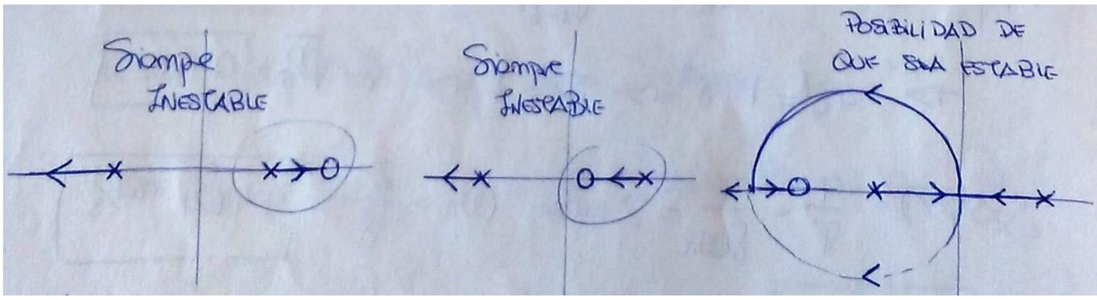


Si utilizamos un controlador PI (que recordemos que se caracteriza por tener un polo en el origen y un cero en una posición configurable $s = -1/T$) podemos situar el cero del controlador **en cuatro posiciones diferentes:** a la derecha del polo positivo en lazo abierto, entre cero y el polo positivo, entre el polo negativo y cero o a la izquierda del polo negativo.

Sin embargo, en ninguna de las configuraciones anteriores conseguiríamos que el lugar de las raíces del sistema controlado pase por los puntos $\boldsymbol{s = -4 \pm 7{,}8j}$:

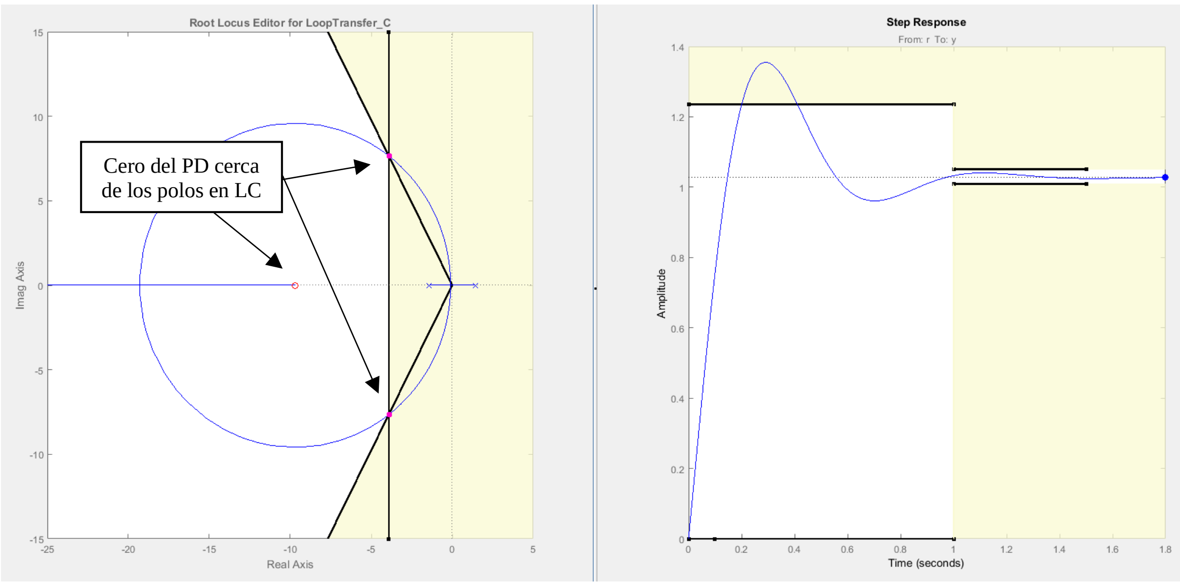


Sin embargo, si utilizamos un controlador PD (que se caracteriza por tener un cero en una posición $s=-1/T$) el sistema controlado pasará de dos asíntotas a tener sólo una asíntota (ángulo -180º). Por ello, si **situamos el cero a la izquierda del polo negativo** conseguiremos que haya un punto de ruptura entre los dos polos en lazo abierto y un punto de reencuentro a la izquierda del cero:



c) Este apartado se realiza en la práctica 4 de la asignatura (controladores PID con MATLAB), utilizando la herramienta "rltool" de MATLAB.

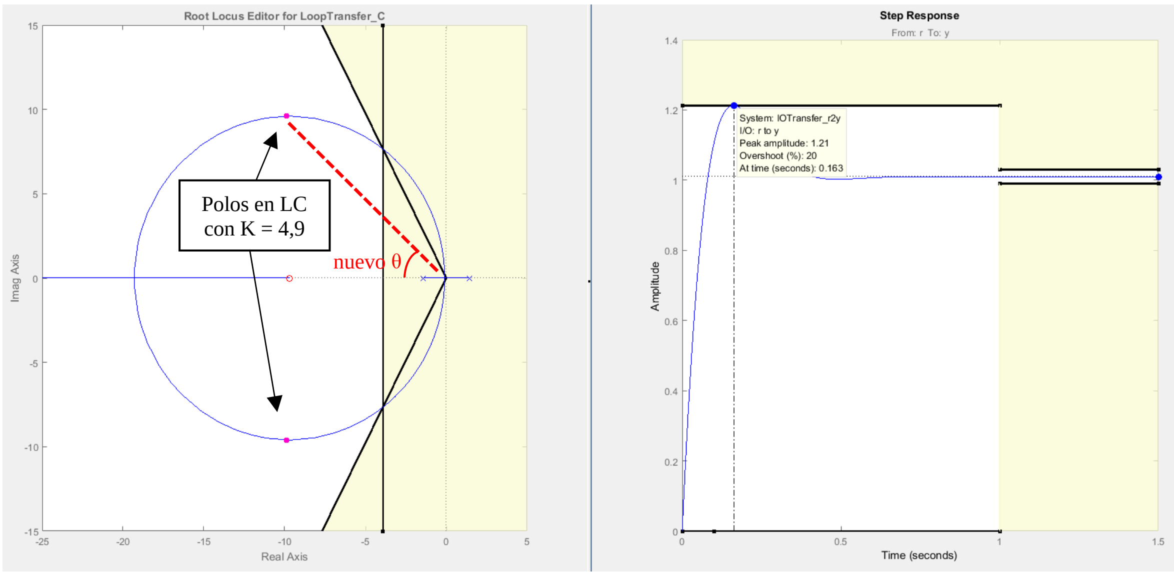
Si la posición del cero del controlador PD es s=-9,7, el lugar de las raíces del sistema compensado pasa exactamente por los puntos del plano complejo $\boldsymbol{s = -4 \pm 7{,}8j}$, para los que se cumplirían simultáneamente los requisitos de sobreelongación igual al 20% y tiempo de asentamiento igual a 1 s. Estableciendo una ganancia de K=1,95 en el controlador PD (es decir, si la función de transferencia del controlador es $G_c(s) = 1{,}95(s+9{,}7)$) logramos situar los polos dominantes en lazo cerrado del sistema exactamente sobre esos puntos (figura de la izquierda):



En la figura de la derecha comprobamos que el sistema con ese controlador PD cumple el requisito de tiempo de asentamiento. Sin embargo, el cero en s = - 9,7 está muy cerca **de los polos en lazo cerrado** (a menos de 6 veces la distancia de éstos al eje imaginario). Como se vio en el Tema 2, esto altera la respuesta esperada al escalón, **aumentando la sobreelongación de la misma** (en la figura comprobamos que supera con creces el 20%).

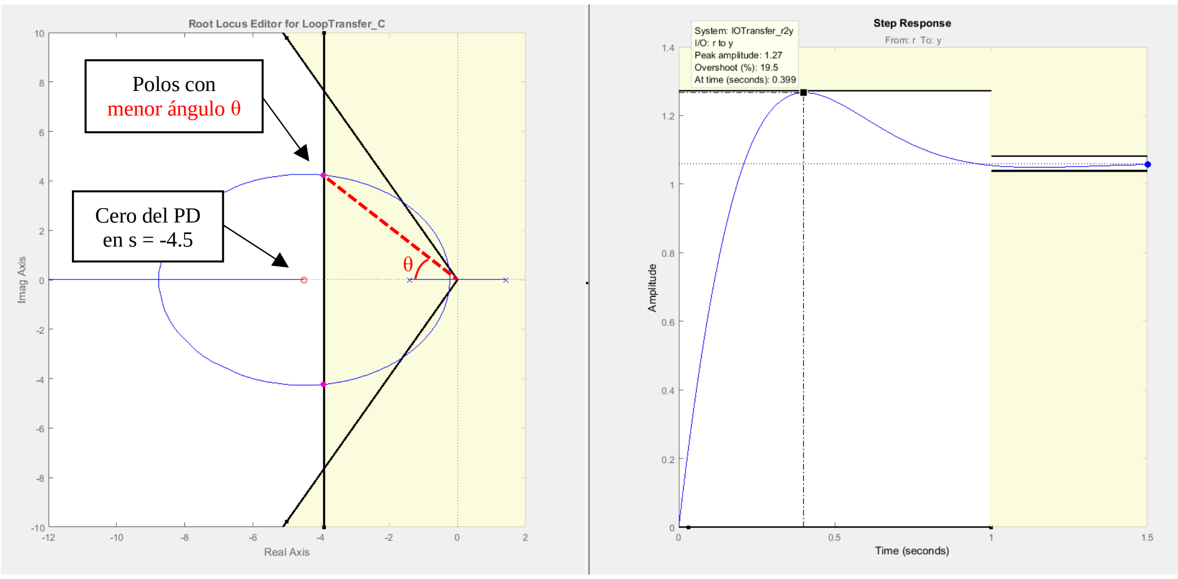
Por ello, la expresión que relaciona sobreelongación M_p con el coeficiente de amortiguamiento usada en el apartado a) (para sistemas de 2º orden sin ceros) deja de ser válida en este caso.

Para **compensar el efecto del cero tan cercano** es necesario que el ángulo θ (y por ello el coeficiente de amortiguamiento) de los polos en lazo cerrado sea algo menor que el valor calculado (**ζ = cos θ = 0,456**), para lo que se pueden hacer dos cosas. La primera de ella es simplemente aumentar el valor de K, lo que hace que los polos se desplazan hacia la izquierda, reduciendo su ángulo y bajando M_p. Si se sube hasta K=4,9 ($G_c(s)$ = 4,9(s+9,7)) se consigue que M_p no supere el 20%. Como ahora dichos polos tienen su parte real más negativa, el sistema es todavía más rápido, cumpliendo sobradamente con el requisito de tiempo de asentamiento:

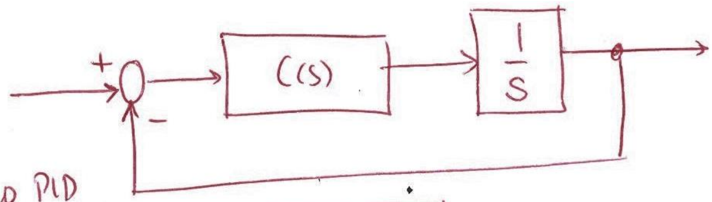


Existe una segunda opción para disminuir el ángulo θ de los polos en lazo cerrado sin tener que desplazarlos hacia la izquierda en el plano complejo, que consiste en **mover el cero del controlador hacia la derecha**. De esta manera se reduce el radio de la circunferencia del lugar de las raíces, por lo que disminuye la parte imaginaria de los polos en lazo cerrado sin que varíe su parte real.

Así, si se desplaza el cero hasta la posición s=-4.5 se consigue, para la misma K de 1,95 ($G_c(s)$ = 1,95 (s+4,5)) que los polos se sitúen donde muestra la siguiente figura, permitiendo que el tiempo de asentamiento sea ligeramente inferior a 1 s y que M_p no supere el 20%:

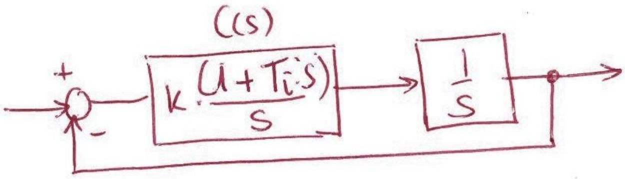


Problema 5.4.



a) Diseña $C(s)$ tipo PID para que $\boxed{e_{ss,\text{aceleración}} = 0.1}$ $\boxed{t_s = 16s}$

- Para que el sistema tenga un error de aceleración FINITO, el sistema tiene que ser de TIPO 2 ⇒ el controlador debe tener un polo en el origen, que sumado al polo de la planta dan $\frac{1}{s^2}$ → TIPO 2
- Opciones: PI o PID. Elegimos el MAS SENCILLO → PI



- $e_{ss,a} = \frac{1}{K_a} = 0.1$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2}\, k\frac{(1+T_i s)}{\cancel{s^2}}$$

$$\boxed{k_a = k = \frac{1}{0.1} = 10}$$

- Calculamos $G_{LC}(s)$:

$$G_{LC}(s) = \frac{C(s)\cdot G(s)}{1+C(s)\cdot G(s)} = \frac{10(1+T_i s)/s^2}{1+10\cdot(1+T_i\cdot s)/s^2} = \frac{10(1+T_i\cdot s)}{s^2+10\cdot T_i\cdot s+10}$$

- Tiempo de asentamiento de un sistema de 2º orden: $t_s = \frac{4}{\sigma}$
- En este caso $t_s = \frac{4}{\sigma} = 16 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{4}{16} = 0.25}$
- Como $10\cdot T_i\cdot s = 2\xi\omega_n s = 2\sigma\cdot s \Rightarrow \sigma = \frac{10\cdot T_i}{2} = 5\cdot T_i = 0.25$
- Podemos despejar $\boxed{T_i = \frac{0.25}{5} = 0.05}$
- La función de transferencia del controlador es:

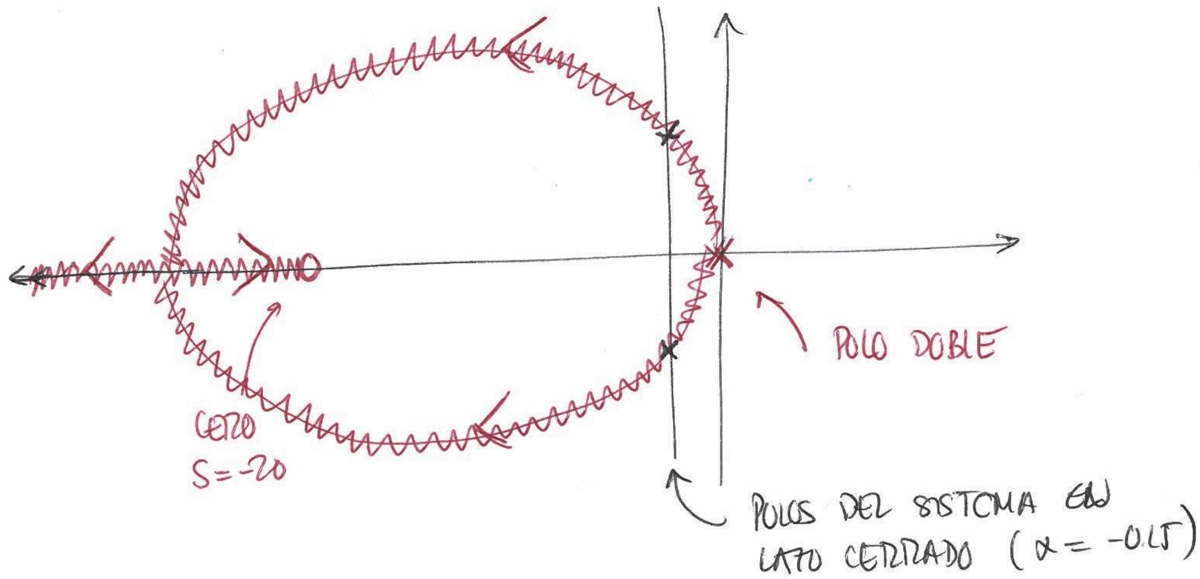
$$\boxed{C(s) = 10\cdot\frac{(1+0.05\cdot s)}{s}} =$$

Tiene el cero en $s = -\frac{1}{0.05} = -20$
⇒ muy alejado, vale la aprox. de 2 polos dominantes (que están con $\sigma = -0.25$)

b) ¿Se puede inestabilizar si aumentamos la ganancia k?

Para contestar a esta pregunta usamos el lugar de las raíces de la planta y el controlador ($C(s) \cdot G(s)$)

- Polo doble en $s = 0$
- Cero simple en $s = -20$



• Por mucho que aumente k nunca pasaríamos al semiplano complejo negativo

⇒ estable para todos los valores de k.

Problema 5.5. Para resolver el ejercicio trazamos el lugar de las raíces del sistema en MATLAB (mediante *"rlocus"*) y utilizamos el comando *"sgrid"* para encontrar el valor de K que se corresponde con un coeficiente de amortiguamiento o una frecuencia natural dada. Como alternativa a "*rlocus + sgrid*" se puede utilizar también la herramienta "*rltool*"

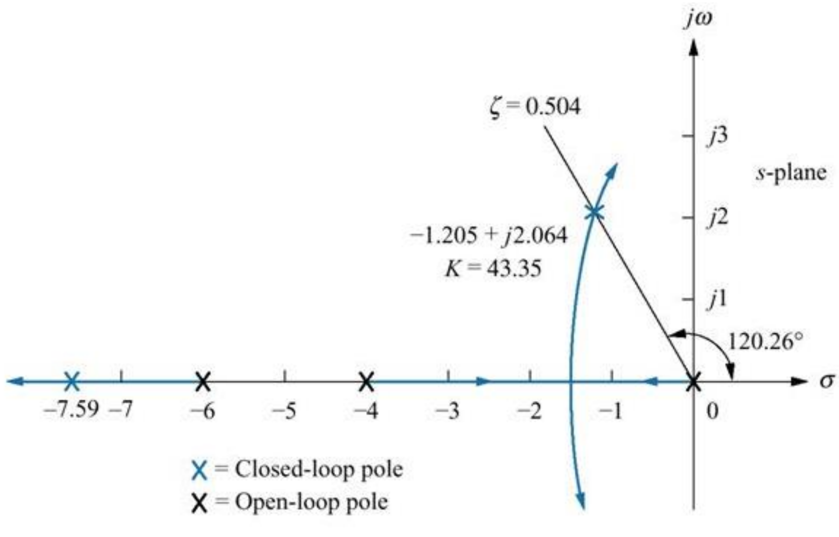
Los resultados son:

a) Se necesita un coeficiente de amortiguamiento ζ de 0,69, para lo que ***K*=5,42**
b) Se necesita un valor de σ (parte real de las raíces) de 0,4, para lo que ***K*=2,31**
c) Se necesita un coeficiente de amortiguamiento ζ de 0,5, para lo que ***K*=8,28**
d) Se necesita una frecuencia natural ω_n igual a 2 rad/s , para lo que ***K*=20,9**
e) No hay valor de K que permita una frecuencia natural w_n igual a 3,5 rad/s y que mantenga el sistema estable en lazo cerrado.

Problema 5.6.

a) De la expresión para un sistema de 2º orden, $M_p = 100\cdot\exp(-\pi/\tan\theta)$, podemos obtener que una sobreelongación del 16% se corresponde con un ángulo de las raíces complejas de 59,74º medido desde el eje real negativo (o, lo que es lo mismo, 120,26º medido desde el eje real positivo) y con un coeficiente de amortiguamiento de $\boldsymbol{\zeta = \cos(\theta) = \cos(59{,}74) = 0{,}504}$.

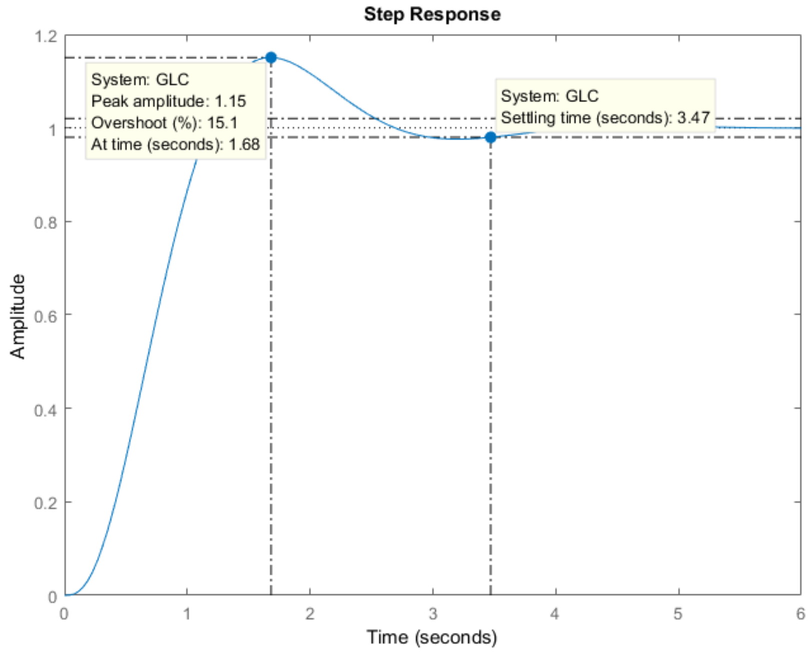
Si trazamos el lugar de las raíces del sistema de tercer orden (MATLAB) y buscamos el punto donde los polos dominantes en lazo cerrado cortan la línea de ζ = 0,504 encontramos que la ganancia del controlador proporcional debe ser de ***K*=43,35.**



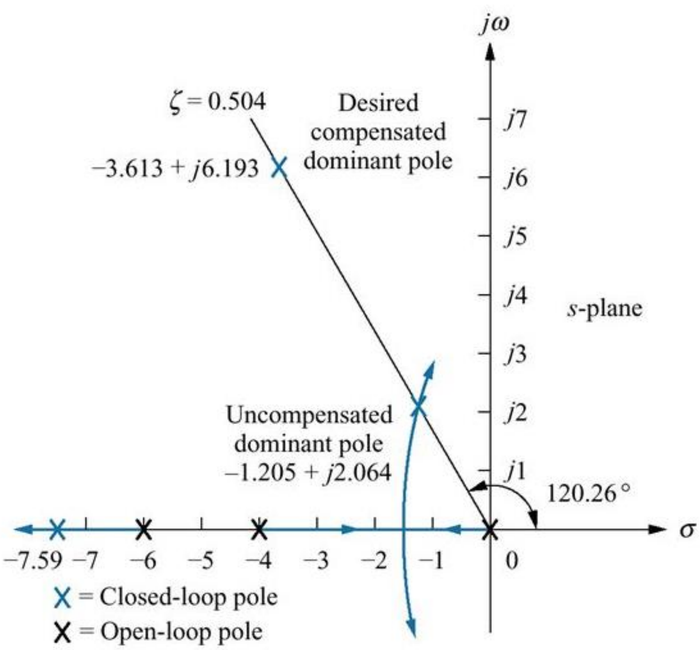
Para ese valor de K=43,35 los polos dominantes en lazo cerrado se encuentran en la posición $\boldsymbol{s = -1{,}205 \pm 2{,}064j}$, mientras que el tercer polo (polo rápido) está en s = -7,59 para ese valor de K. Como dicho polo se encuentra alejado del eje imaginario un poco más de 6 veces la distancia al mismo de los polos dominantes, la aproximación del sistema de tercer orden a uno de segundo orden está justificada.

El tiempo de asentamiento del sistema con el controlador proporcional K=43,45 será entonces de $\boldsymbol{t_s = 4/\sigma = 4/1{,}205 = 3{,}32}$ **s**

Utilizamos MATLAB para comprobar que la respuesta al escalón unitario tiene una sobreelongación y un tiempo de asentamiento muy parecidos a los calculados con las expresiones para un sistema de 2º orden, validando dicha aproximación:



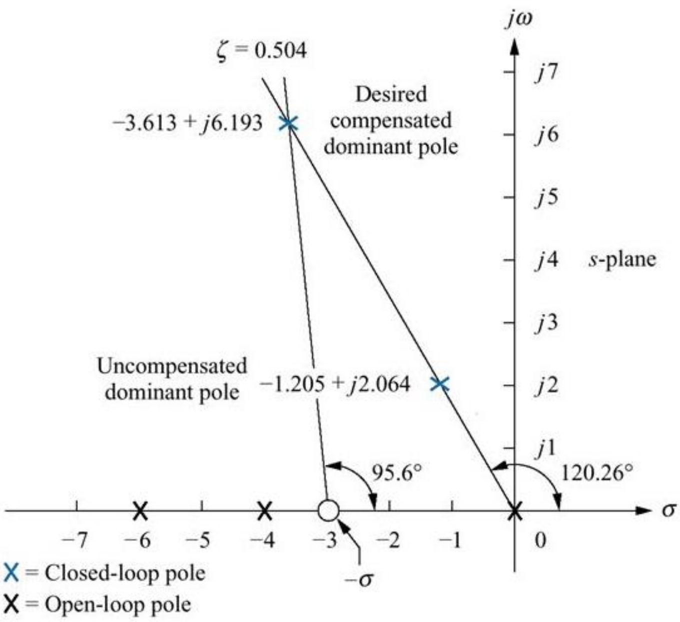
b) Si queremos tener un tiempo de asentamiento tres veces más rápido que en a), es decir, de 1,107 s, la parte real de los nuevos polos dominantes debe estar ahora en $\boldsymbol{\sigma = 4/t_s = 3{,}613}$**.** Como dichos polos deben mantener su ángulo (para que no se modifique el coeficiente de amortiguamento y con ello la sobreelongación), la posición de los nuevos polos dominantes deberá ser $\boldsymbol{s = -3{,}613 \pm 6{,}193j}$,



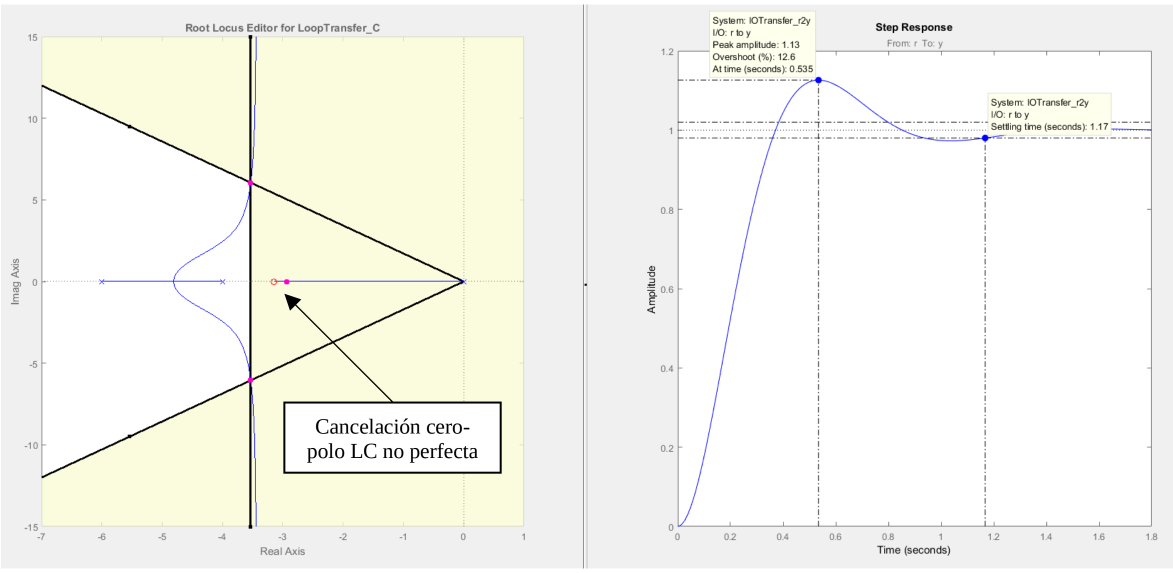
¿Dónde debemos colocar el cero del controlador PD para que eso ocurra?

Podemos realizar una estimación previa de la posición de dicho cero calculando el ángulo de los polos en lazo abierto (situados en s = 0, -4 y -6) al punto donde ahora queremos que estén los polos dominantes en lazo cerrado, $\boldsymbol{s = -3{,}613 + 6{,}193j}$. Llamando a estos ángulos φ_1, φ_2 y φ_3 respectivamente, ya conocemos que φ_1 es 120,26º. Un cálculo trigonométrico básico nos da que φ_2 = 86,42º y φ_3 = 68,92º. La suma de los tres ángulos es de **275,6º**.

Como la función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado debe tener un ángulo de -180º, y dicho ángulo es resultado de "ángulo de ceros " – "ángulo de polos", se puede deducir que el único cero del sistema, el del compensador PD, deberá aportar 275,6º - 180º = 95,6º, esto es, **estará situado aproximadamente en la posición del eje real σ=-3**:



Para comprobarlo y ajustar la nueva ganancia utilizamos la herramienta RLTOOL de MATLAB: La función de transferencia final del PD diseñado será de $\boldsymbol{G_c(s) = 47{,}45\,(s+3)}$.



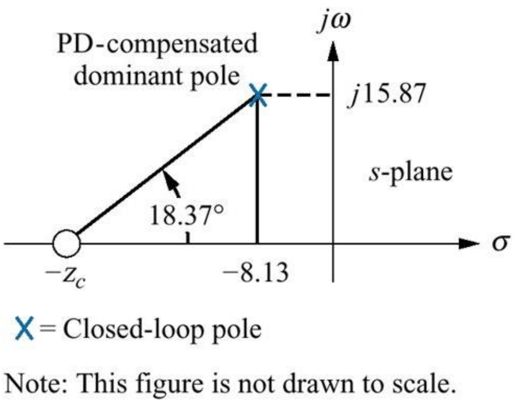
Para terminar, podemos comprobar también cómo la sobreelongación y el tiempo de asentamiento de la respuesta real al escalón difieren ligeramente de los valores calculados. Esto se debe a que no **hay una cancelación perfecta entre el cero del PD y el tercer polo en lazo cerrado** del sistema, como se muestra en la figura, lo que afecta mínimamente a los valores calculados con las expresiones para un sistema de 2º orden sin ceros.

Problema 5.7

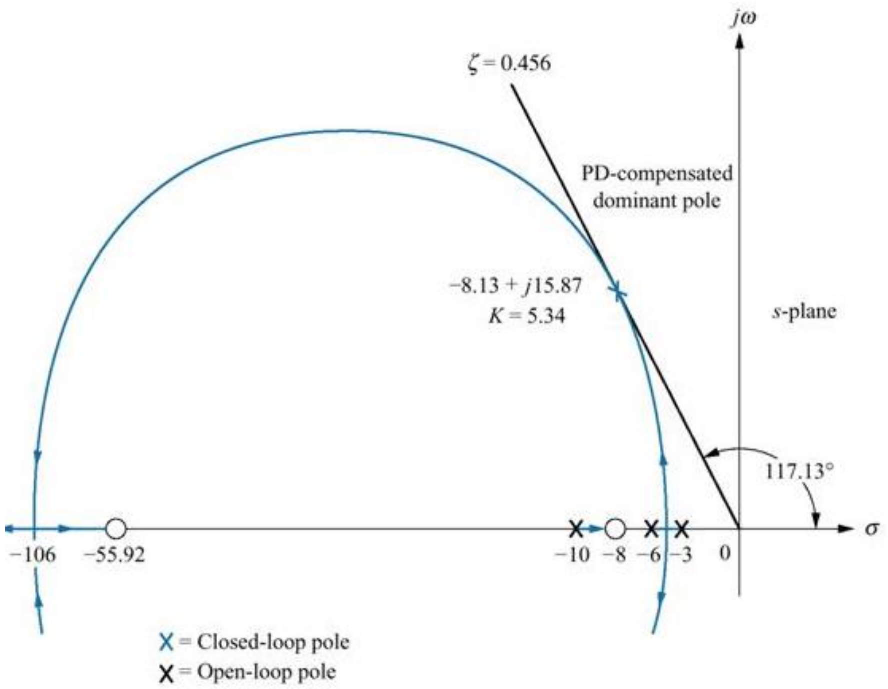
a) Comenzamos diseñando el controlador PD para conseguir el requisito de diseño de sobreelongación del 20% para un tiempo de pico de 0,198 s. Este paso se realiza de igual manera que en el ejercicio anterior, salvo porque ahora extraemos la parte real de las raíces dominantes del sistema del requisito de tiempo de pico. Así:

- Utilizando las expresiones para el sistema de 2º orden sin ceros, la sobreelongación del 20% está asociada con un ángulo de los polos dominantes en LC complejos de 62,87º, medido desde el semieje real negativo (117,13º medido desde el semieje real positivo) y con un coeficiente de amortiguamiento de **$\zeta = \cos(\theta) = \cos(62{,}87) = 0{,}456$.**
- Un tiempo de pico $t_p = \pi/\omega_d = 0.198$ s está asociado a una frecuencia $\omega_d = \pi/t_p = 15{,}87$ rad/s. Recordemos que ω_d es la parte imaginaria de los polos en LC.
- Conocida la parte imaginaria de los polos y el ángulo, la parte real de los mismos viene dada por $\sigma = \omega_d/\tan(\theta) = 15{,}87/\tan(62{,}87) = 8{,}13$. Los polos dominantes del sistema deben situarse entonces en el punto del plano complejo **$s = -8{,}13 \pm 15{,}87j$**,
- La posición del cero del controlador PD **se puede hallar analíticamente**, de nuevo, calculando el ángulo de los tres polos (situados en s = -3, -6 y -10) y el cero (s = -8) de la planta en lazo abierto al punto calculado para los polos dominantes en lazo cerrado. Elegimos, por ejemplo, el valor positivo, **$s = -8{,}13 + 15{,}86j$**.

  Llamando a los ángulos de los polos φ_3, φ_6, φ_{10} (respectivamente) y al ángulo del cero θ_8, y realizando cálculos trigonométricos básicos obtenemos que φ_3 = 107,92º, φ_6 = 97,65º, φ_{10} = 83,28º y θ_8 = 90,47º (todos medidos desde el semieje real positivo en este caso). Por ello, el ángulo total de la planta en LA, $G(s)$ al punto "s" es $\arg(G) = \theta_8 - \varphi_3 - \varphi_6 - \varphi_{10} = -198{,}37$º
- De lo anterior se deduce que la contribución del cero del compensador PD debe ser de arg(G) + arg(PD) = -180º (para que la suma total de ángulos sea de -180º), luego arg(PD) = 198,37 - 180 =18,37º.
- El cero z_c del PD debe entones estar situado en el punto s=-55,92 (ver figura de la derecha)

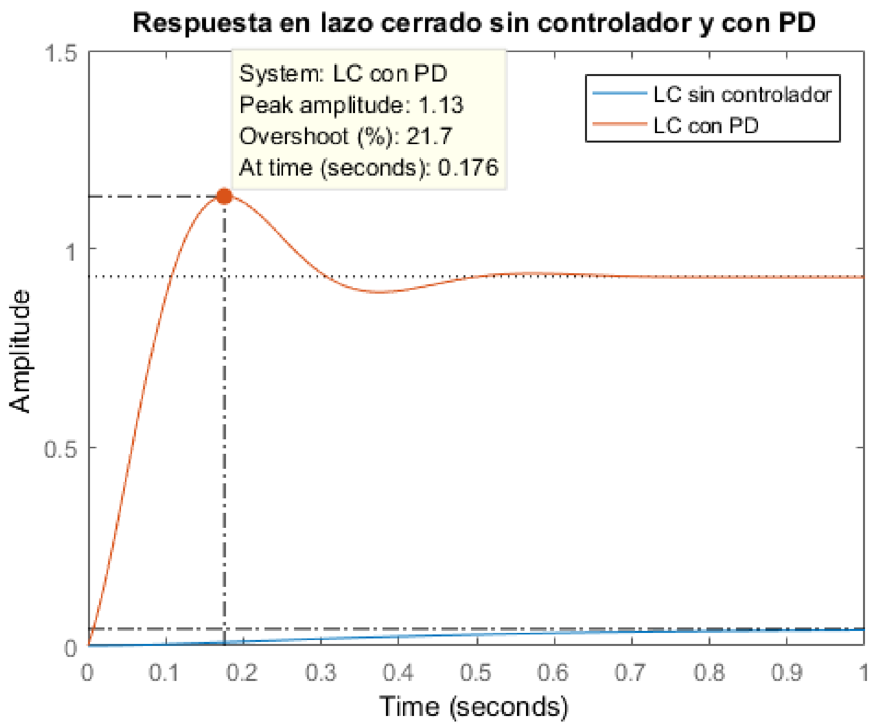


La figura inferior lugar de las raíces del sistema compensado con el PD (MATLAB). Se deduce que hace falta una K=5,34 para situar los polos dominantes en LC en el lugar deseado.



Además, se observa que el tercer polo en LC estaría situado entre -10 y -8, es decir, bastante cerca del cero de la planta (situado en s=-8) y por ello **su efecto en la dinámica del sistema quedaría prácticamente anulado.**

De hecho, la siguiente figura muestra la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado sin PD y con PD, demostrando que se cumplen razonablemente bien los dos requisitos de diseño del transitorio, dando validez a la aproximación del sistema de tercer orden por uno de 2º orden sin ceros (y con ello al uso que hemos realizado de las expresiones para M_p y t_p). Recordemos que cuando los valores reales de M_p y t_p difieren ligeramente de los valores calculados es porque no **hay una cancelación perfecta entre el cero del PD y el tercer polo en lazo cerrado**:

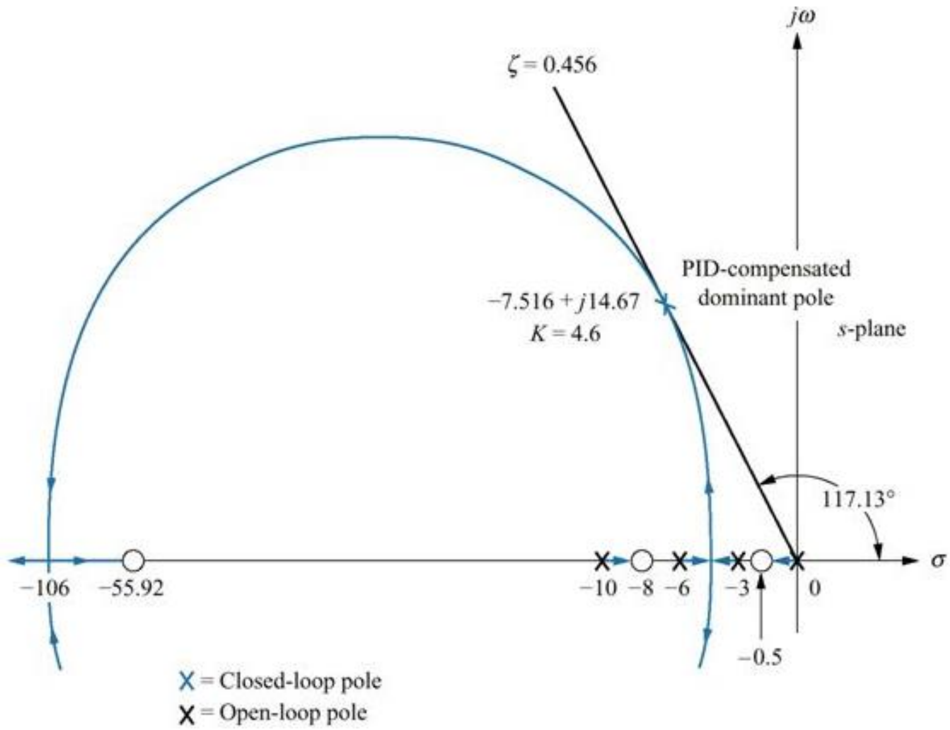


b) En la figura anterior también se observa cómo el sistema (con o sin PD), al ser de Tipo 0, tiene un error no nulo frente a la entrada escalón (de hecho el error sin controlador es muy acusado).

Para eliminar este error hay que **subir el tipo de sistema a Tipo 1 introduciendo un polo en el origen.** Eso cambiaría drásticamente la respuesta transitoria diseñada en el punto anterior. Lo que se hace entonces es introducir el polo en el origen y un cero adicional muy cerca del mismo (es decir, un controlador PI) que prácticamente anule la dinámica del nuevo polo en LC y no modifique mucho el transitorio ya ajustado anteriormente con el PD. Podemos, por ejemplo, situar el cero del PI en el punto *s*=-0,5. El controlador PI que incorporamos ahora quedaría:

$$C_{PI}(\mathrm{s}) = \frac{K_{PI}(s+0{,}5)}{s}$$

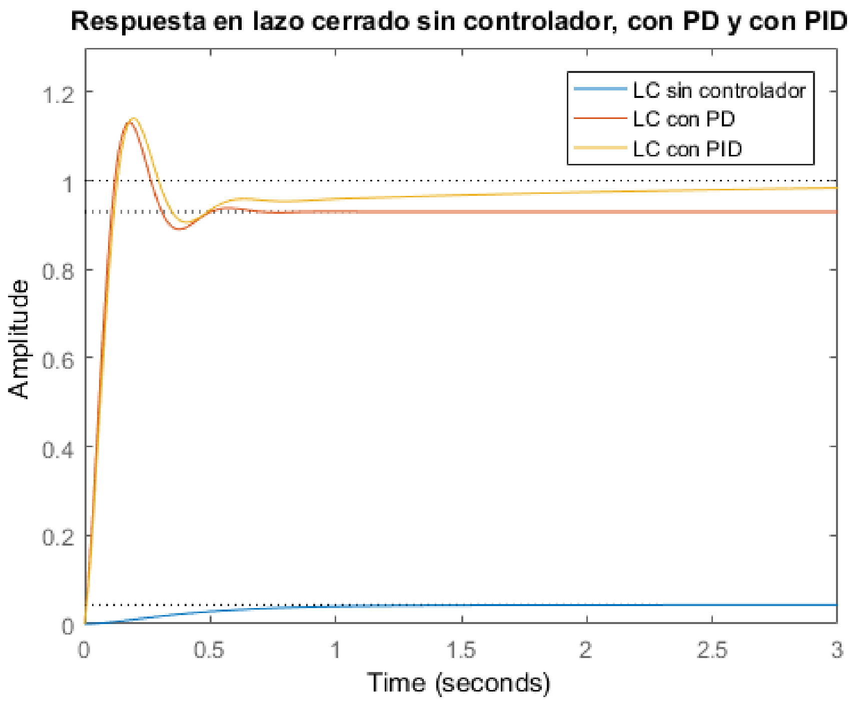
El nuevo lugar de las raíces de la planta con el PD + PI (PID) sería (MATLAB):



Del LDR se extrae que ahora es necesaria una ganancia total en el controlador de *K*=4,6, por lo que la **función de transferencia final del PID diseñado** sería:

$$C_{PID}(\mathrm{s}) = \frac{4.6(s+55{,}92)(s+0{,}5)}{s}$$

La siguiente figura muestra la respuesta al escalón del sistema sin controlador, con el PD del apartado a) y añadiendo el PI del apartado b). Se puede comprobar cómo del PD al PID el transitorio apenas cambia, y sin embargo **el error de posición se anula con el PID:**



Problema 5.8. En la figura observamos que la temperatura (salida del sistema térmico) tiene un comportamiento **sobreamortiguado y con forma de S frente a una entrada escalón**, con un tiempo de asentamiento de aproximadamente 80 segundos.

Al no conocer el modelo de la planta y tener la respuesta transitoria experimental en lazo abierto forma de S, podemos aplicar el primer método de Ziegler-Nichols para extraer el tiempo de retardo "*L*" y la constante de tiempo "*T*" del sistema, con las que sintonizar un controlador PID:

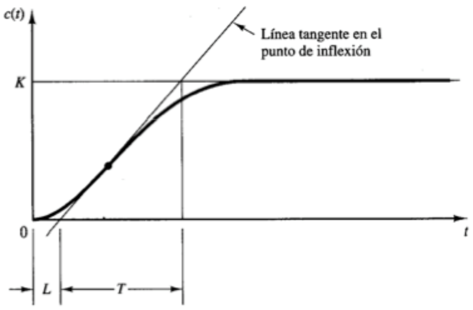


Tabla 10–1 Regla de sintonización de Ziegler-Nichols basada en la respuesta escalón de la planta (primer método)

Tipo de controlador	K_p	Ti	T_d
P	$\frac{T}{L}$	∞	0
PI	$0.9\frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2\frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

- Se **traza la recta tangente** a la salida del sistema por el punto de inflexión de la misma (aproximadamente en t = 10 s). El punto de corte de dicha tangente con el eje de tiempo nos permite extraer un valor de L de aproximadamente ***L* = 2 s.**
- La recta tangente corta con el valor final y(t) = 1 en aproximadamente t=30 s, por lo que la constante de tiempo T del sistema es de ***T* = 28 s**.
- Según las reglas de sintonía de la tabla 10.1, las constantes del PID serán K_p = 16,8, T_i = 4, T_d = 1. La función de transferencia del controlador PID hallado tiene un polo en el origen y dos ceros (un cero doble) en s=-0,5:

$$C_{PID}(\mathrm{s}) = \frac{16{,}8\,(s+0{,}5)^2}{s}$$

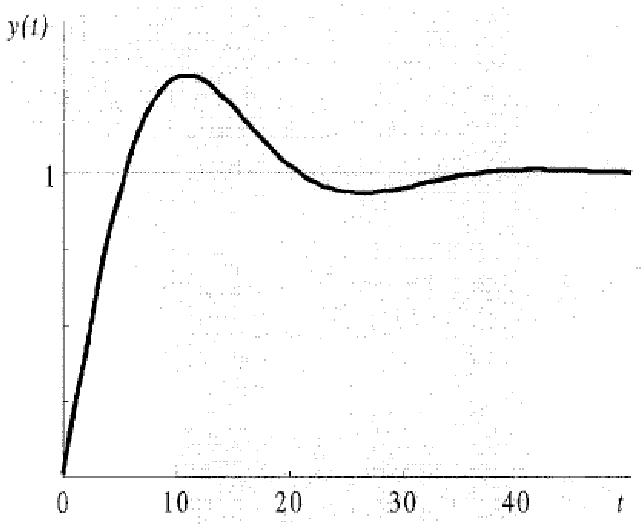
Si quisiéramos estudiar el efecto del PID en la respuesta de la planta al escalón unitario, tendríamos que extraer primero un modelo matemático de la planta en lazo abierto. La planta se puede intentar aproximar a un sistema de primer orden (con constante de tiempo igual a T) más un retardo añadido de 2 s. Aunque **queda fuera del temario de esta asignatura**, los retardos se modelan con una **exponencial decreciente en el dominio de Laplace**, como se explica en:

https://es.mathworks.com/help/control/ug/analyzing-control-systems-with-delays.html

Entonces, el modelo aproximado de la planta en lazo abierto podría ser de la forma:

$$G_{Lazo\ abierto}(s) = \frac{e^{-Ls}}{Ts+1}$$

Al añadir el PID ($C_{PID}(s)$) y realizar la realimentación unitaria, **la planta reduciría su tiempo de asentamiento a menos de la mitad**, pero presentaría cierta sobreelongación:



Problema 5.9.

En este caso el modelo de la planta en lazo abierto es conocido, e igual a:

$$G_{Lazo\ abierto}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

Como tiene un integrador (polo en el origen), se utiliza el **segundo método de Ziegler-Nichols** (no tendría sentido realizar una respuesta a escalón en lazo abierto de dicha planta, ya que la salida crecería indefinidamente).

Para aplicar el segundo método se busca primero la ganancia del controlador proporcional (K_p) que en lazo cerrado hace que el sistema tenga oscilaciones sostenidas, es decir, que sea un **sistema no amortiguado (marginalmente estable)**. A dicho valor se le denomina "ganancia crítica" K_{cr}. Al ser el sistema de tercer orden (LDR con tres asíntotas) sabemos que dos de dichas asíntotas cruzarán el eje imaginario.

El valor de K_p que hace al sistema marginalmente estable para que ocurra una oscilación sostenida se obtiene mediante el criterio de estabilidad de Routh. Como la ecuación característica para el sistema en lazo cerrado es

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$$

el array de Routh es:

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \dfrac{30 - K_p}{6} & \\ s^0 & K_p & \end{array}$$

Examinando los coeficientes de la primera columna del array de Routh, se encuentra que ocurrirá una oscilación sostenida si $K_p = 30$. Así, la ganancia crítica K_{cr} es

$$K_{cr} = 30$$

Para dicho valor, la frecuencia de oscilación es de $\omega = 2{,}236$ rad/s, y por ello el **periodo de oscilación es entonces igual a $P_{cr} = 2\pi/\omega = 2{,}81$ s**

Conocidos K_{cr} y P_{cr}, la siguiente tabla indica los valores de los parámetros de los controladores P, PI y PID sintonizados con este segundo método de Ziegler-Nichols:

Tabla 10–2 Regla de sintonización de Ziegler-Nichols basada en la ganancia crítica K_{cr} y en el periodo crítico P_{cr} (segundo método)

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

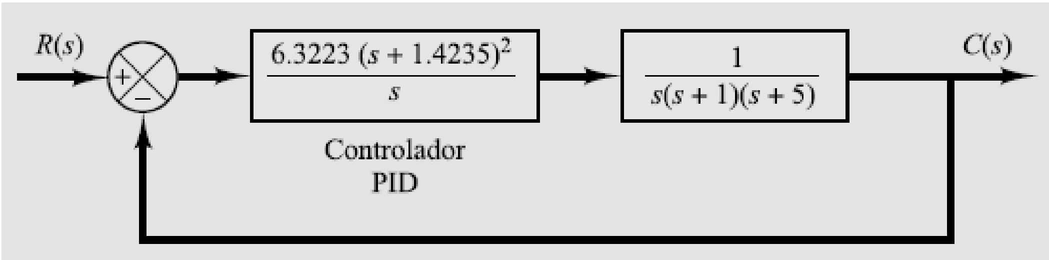
El valor concreto de los parámetros para el controlador PID sería:

$$\begin{aligned} K_p &= 0.6K_{cr} = 18 \\ T_i &= 0.5P_{cr} = 1.405 \\ T_d &= 0.125P_{cr} = 0.35124 \end{aligned}$$

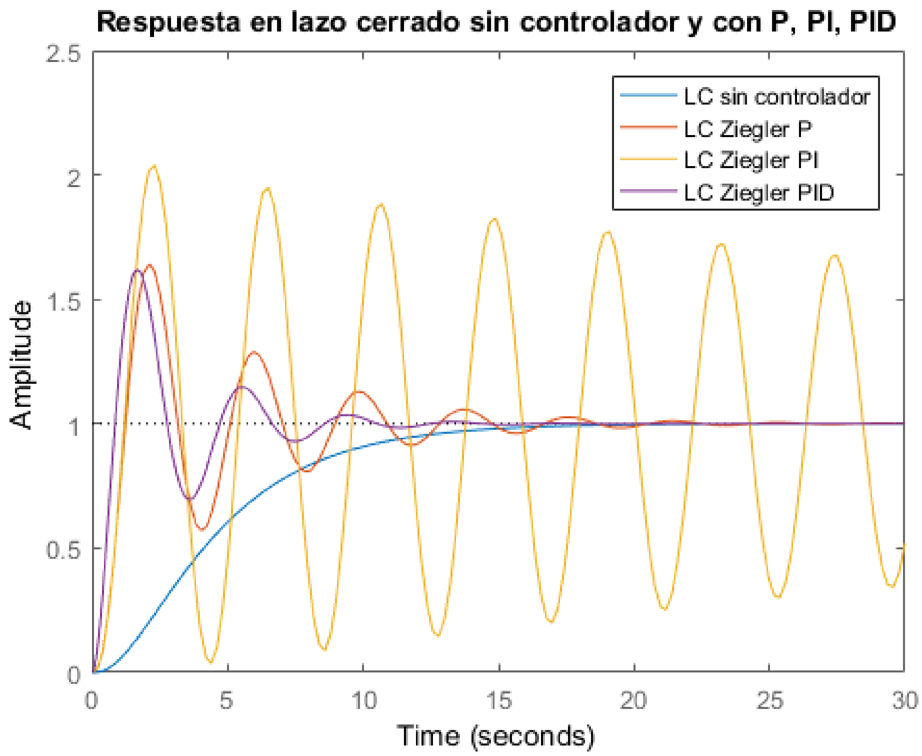
Y la **función de transferencia del PID sintonizado** con estas reglas tiene una ganancia de 6,32, un polo en el origen y un cero doble en $s = -4/P_{cr}$, es decir, en $s=-1{,}42$:

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \\
&= 18\left(1 + \frac{1}{1.405s} + 0.35124s\right) \\
&= \frac{6.3223(s + 1.4235)^2}{s}
\end{aligned}
$$

Por lo que el sistema completo en lazo cerrado con PID sintonizado mediante Ziegler-Nichols es:



La siguiente gráfica muestra una simulación con MATLAB de la respuesta al escalón del sistema con el controlador PID diseñado. Se han incluido también la respuesta en lazo cerrado sin controlador (ganancia K_p=1) y con los controladores P (ganancia K_p=15) y PI (K_p=13,5, polo en s=0 y cero en s=-0,427) sintonizados con los parámetros de la tabla 10.2 (para comparar):

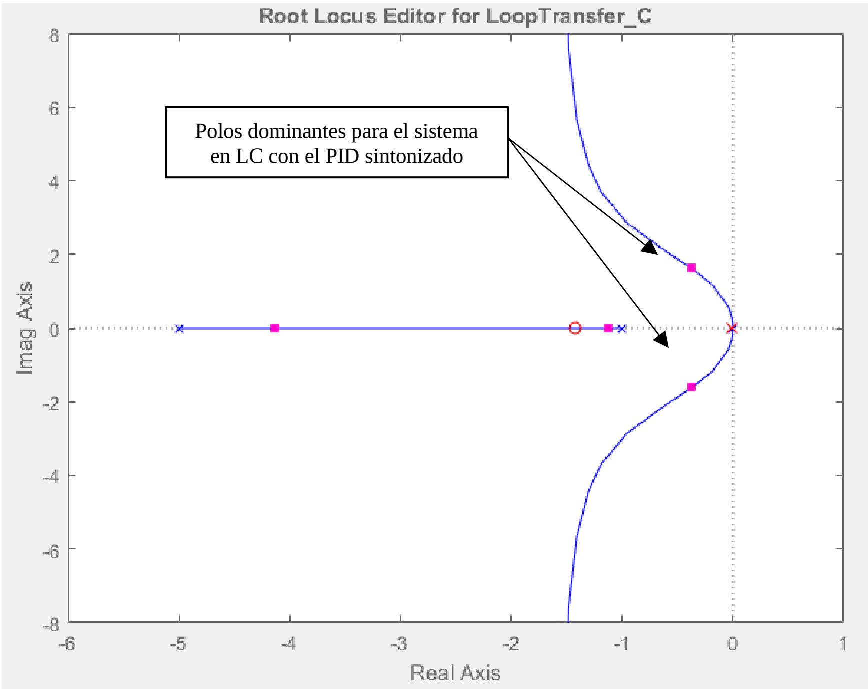


En la gráfica anterior se observa que el sistema sin controlador tiene un comportamiento subamortiguado, con un tiempo de asentamiento de unos 15 s. El controlador que mejor características consigue es el PID, ya que mejora el tiempo de establecimiento hasta 10 s, aunque introduce una sobreelongación en la respuesta del sistema bastante apreciable (más del 60%).

Para reducir la sobreelongación por debajo del 20% y el tiempo de asentamiento por debajo de 2s necesitamos realizar una sintonía fina del controlador PID, es decir, necesitamos **modificar la posición de sus ceros y la ganancia con RLTOOL** hasta que se cumplan los requisitos de diseño.

Esto es habitual, ya que **las reglas de sintonía de Ziegler-Nichols se deben tomar simplemente como un punto de partida para realizar posteriormente una sintonía fina.**

Para ver cómo proceder en dicho ajuste fino, necesitamos conocer el lugar de las raíces del sistema con el PID sintonizado anteriormente. Se muestra en la siguiente figura (MATLAB). Recordemos que $G_c(s)\cdot G(s)$ tiene cuatro polos, dos de ellos en el origen, uno en s=-1 y otro en s=-5; y un cero doble en s = -1,42. Es decir, se trata de un sistema de **orden cuatro**:



La figura también muestra la posición de los cuatro polos en LC para un valor de K=6,32 (ganancia del PID sintonizado). Los polos dominantes se encuentran muy próximos al eje imaginario. Por ello, la sintonía fina del PID anterior debe permitir que los polos dominantes se alejen del eje imaginario, haciendo con ello que el sistema sea más rápido.

Esto se podría conseguir **aumentando la ganancia K del PID**, pero es estrategia no conseguiría disminuir la sobreelongación del sistema, ya que el ángulo de los polos dominantes no disminuiría (al contrario, tendería a aumentar ya que dicho par de polos se desplazarían hacia puntos del plano complejo más alejados del eje real).

Por ello, la alternativa más adecuada consiste en **acercar el cero doble del PID** (que inicialmente está en la posición s=-1,42) hacia el origen. De esta manera se consiguen varias cosas:

a) Por un lado, desplazar la asíntota hacia la parte izquierda del plano complejo (polos más rápidos)
b) Por otro lado, si el cero doble está cerca **suficientemente cerca del origen**, los polos en lazo cerrado correspondientes a esas dos ramas prácticamente se cancelarían con el cero doble, y los polos dominantes del sistema en lazo cerrado serían los otros dos (**los más rápidos**).
c) Además, como consecuencia de lo anterior y como pasaba en otros ejercicios, el sistema de orden 4 se podría aproximar por un sistema de orden dos sin ceros, y se podrían usar las expresiones correspondientes.

Utilizando la herramienta **RLTOOL** de MATLAB se puede demostrar que si movemos el cero doble hasta s=-0,25 y fijamos una nueva ganancia de K=44, es decir, si el controlador PID reajustado tiene la siguiente función de transferencia:

```
Value:
  44 (s+0.25)^2
  -------------
        s
```

El controlador así diseñado permite que **la sobreelongación sea del 19,4% y que el tiempo de asentamiento sea de tan sólo 1,33 s**, cumpliendo los requisitos pedidos: