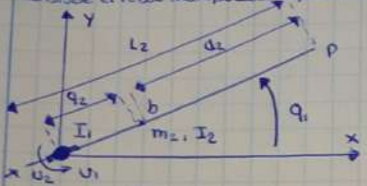
Resumen Ingeniería del Control primer cuatrimestre:

Prácticas entregables:

① Modelo dinámico de un robot manipulador con el método de Lagrange

Considere el robot manipulador representado en la figura 1, que se mueve en un plano vertical.



El modelo dinámico de este sistema está representado por la ecuación diferencial de segundo orden: $B(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + N(q) = u$

$$B(q) = \begin{pmatrix} m_2 q_2^2 + I_1 + I_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix},\ C(q,\dot{q}) = \begin{pmatrix} 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 m_2 q_2 \\ -\dot{q}_1^2 m_2 q_2 \end{pmatrix},\ N(q) = \begin{pmatrix} m_2 g q_2 \cos(q_1) \\ m_2 g \operatorname{sen}(q_1) \end{pmatrix}$$

$q = (q_1, q_2)^T$ es el vector de variables de configuración, donde q_1 es la posición angular del eslabón con respecto al eje x del marco de referencia $\{x, y\}$ y q_2 es la posición lineal del centro de masa b del enlace con respecto al origen del marco de referencia. El vector $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)^T$ es el vector de velocidades articulares, donde $\dot{q}_1$ es una velocidad angular y $\dot{q}_2$ es una velocidad lineal. El vector $\ddot{q} = (\ddot{q}_1, \ddot{q}_2)^T$ es el vector de aceleraciones, donde $\ddot{q}_1$ es una aceleración angular y $\ddot{q}_2$ es una aceleración lineal. Las entradas de control del sistema son $u = (u_1, u_2)^T$, donde u_1 es el par aplicado por el actuador angular al enlace y u_2 es la fuerza aplicada por el actuador lineal al enlace. I_1 es el momento de inercia baricéntrico de los actuadores angulares y lineales, I_2 es el momento de inercia baricéntrico del enlace y m_2 es la masa del enlace.

a) Demostrar las ecuaciones del modelo dinámico utilizando el método de Lagrange.

$U_1 = (I_1 + I_2 + m_2 q_2^2)\ddot{q}_1 + 2 m_2 q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m g q_2 \cos(q_1)$

$U_2 = m_2 \ddot{q}_2 - m g_2 \dot{q}_1^2 + m g \operatorname{sen}(q_1)$

$x = q_2 \cos q_1 \Rightarrow \dot{x} = \dot{q}_2 \cos q_1 - q_2 \operatorname{sen} q_1 \dot{q}_1$ ⋮ $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{q}_2^2 - q_2 \dot{q}_1^2$

$y = q_2 \operatorname{sen} q_1 \Rightarrow \dot{y} = \dot{q}_2 \operatorname{sen} q_1 + q_2 \cos q_1 \dot{q}_1$

$T = 1/2 (I_1 + I_2)\dot{q}_1^2 + 1/2\, m_2 \dot{q}_2^2 + 1/2\, m_2 q_2 \dot{q}_1^2$

$V = m_2 g q_2 \operatorname{sen} q_1$

$L = T - V = 1/2 (I_1 + I_2)\dot{q}_1^2 + 1/2\, m_2 \dot{q}_2^2 + 1/2\, m_2 q_2 \dot{q}_1^2 - m_2 g q_2 \operatorname{sen} q_1$

$d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_1) - \partial L/\partial q_1 = U_1 \Rightarrow (I_1 + I_2)\ddot{q}_1 + m_2 q_2^2 \ddot{q}_1 + 2 m_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 q_2 + m_2 g q_2 \cos q_1 = U_1$

$d/dt(\partial L/\partial \dot{q}_2) - \partial L/\partial q_2 = U_2 \Rightarrow m_2 \ddot{q}_2 - m_2 q_2 \dot{q}_1^2 + m_2 g \operatorname{sen} q_1 = U_2$

b) Calcula la representación del espacio de estado de la dinámica del manipulador en la que $x = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^T = (q_1\ q_2\ \dot{q}_1\ \dot{q}_2)^T$. Tome las coordenadas del punto p como las variables de salida.

$$d/dt \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}$$

$\dot{x}_1 = x_3$

$\dot{x}_2 = x_4$

$\dot{x}_3 = U_1 - 2 m_2 x_3 x_4 x_2 - m_2 g x_2 \cos x_1 / I_1 + I_2 + m_2 x_2^2$

$\dot{x}_4 = U_2 + m_2 x_3^2 x_2 - m_2 g \operatorname{sen} x_1 / m_2$

$P_x = (q_2 + d_2)\cos x_1$ → $\dot{x} = f(x, u)$

$P_y = (q_2 + d_2)\operatorname{sen} x_1$ $\quad y = g(x)$