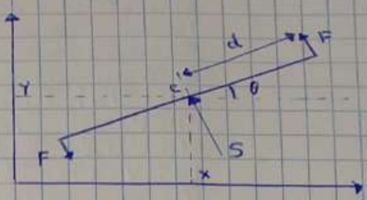
Formulas Ingeniería del Control primer parcial:

Examen tipo:



Datos: Centro de masas ($c = (x, y)^T$), ángulo (θ), fuerzas (S y F), entradas (U_1 y U_2).

Modelo dinámico del sistema: $\ddot{x} = -1/m\, \text{sen}(\theta) S$, $\ddot{y} = -g + 1/m \cos(\theta) S$, $\ddot{\theta} = 2d/J\, F$

Parámetros: $J = 10000$, $m = 30000$, $d = 5'5$, $g = 9'81$

① Demostrar ecuaciones del modelo dinámico utilizando el método de Lagrange.

$L = T - V = (1/2\, m\dot{x}^2 + 1/2\, m\dot{y}^2 + 1/2\, J\dot{\theta}^2) - (mgy)$

$d/dt(\partial L/\partial\dot{x}) - \partial L/\partial x = f \Rightarrow m\ddot{x} = -\text{sen}(\theta)S \Rightarrow \ddot{x} = -1/m\, \text{sen}(\theta) S$

$d/dt(\partial L/\partial\dot{y}) - \partial L/\partial y = f \Rightarrow m(\ddot{y} + g) = \cos(\theta) S \Rightarrow \ddot{y} = -g + 1/m \cos(\theta) S$

$d/dt(\partial L/\partial\dot{\theta}) - \partial L/\partial\theta = f \Rightarrow J\ddot{\theta} = 2dF \Rightarrow \ddot{\theta} = 2d/J\, F$

② Espacio de estados $x = (x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -1/m\, \text{sen}(x_3) U_1 \\ -g + 1/m \cos(x_3) U_1 \\ 2d/J \cdot U_2 \end{pmatrix} ; \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ F \end{pmatrix}$$

③ Calcular todos los puntos de equilibrio del sistema.

```
close all; clear all; clc;
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 S F m g d J
f1 = x4 == 0; // f2 = x5 == 0; // f3 = x6 == 0; // f4 = -(sen(x3)S)/m == 0; // f5 = -g + 1/m cos(x3)S == 0; // f6 = 2d/J F == 0;
result = solve([f1, f2, f3, f4, f5, f6], [x1, x2, x3, x4, x5, x6, S, F], ReturnConditions = true, IgnoreAnalyticConstraints = true)
```

④ Calcular el punto de equilibrio correspondiente a $U_1 = mg$, $U_2 = 0$. Linealizar el sistema sobre este punto.

```
close all; clear all; clc;
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 S F m g d J
f1 = x4; // f2 = x5; // f3 = x6; // f4 = -(sen(x3)S)/m; // f5 = -g + 1/m cos(x3)S; // f6 = 2d/J F; // y1 = x1; // y2 = x2;
A = jacobian([f1 f2 f3 f4 f5 f6], [x1 x2 x3 x4 x5 x6]);     A = subs(A, [x3 S], [0 g·m])
B = jacobian([f1 f2 f3 f4 f5 f6], [S F]);                  B = subs(B, x3, 0)
C = jacobian([y1, y2], [x1 x2 x3 x4 x5 x6]);               C
```

⑤ Controlabilidad del sistema utilizando ambas entradas (U_1, U_2) o solo una (U_1).

```
close all; clear all; clc;
syms x1 x2 x3 x4 x5 x6 S F m g d J
J = 10000; m = 30000; d = 5'5; g = 9'81;
Crear matrices A y B obtenidas en el apartado 4.
```

Controlabilidad para ambas entradas

```
Co = ctrb(A, B);
unco = length(A) - rank(Co)
```

```
Ob = obsv(A, C), unob = obsv(sys)
```

Controlabilidad para una entrada

```
B(end, end) = 0;
Co = ctrb(A, B);
unco = length(A) - rank(Co)
```

⑥ Usando el método de desplazamiento de polos o LQR, representar el cambio de estado $(1, 5, 0.0174533, -0'1, -0'2, 0'00174533)^T = (0, 2'4, 0, 0, 0, 0)^T$.

Archivo main

```
init;
m = 30000; g = 9'81; d = 5'5; J = 10000; S = mg;
x = [1; 5; 0.0174533; -0.1; -0.2; 0.00174533]; (Estado inicial)
x_eq = [0; 0; 0; 0; 0; 0]; w_eq = [0; 0]; u_eq = [mg; 0] (P.eq)
t = 0;
Crear matrices A y B obtenidas en el apartado 4.
poles = [-2 : -0.1 : -2.5];  } Pole placement method
K = place(A, B, poles)
Q = matriz 6x6 (I => 100000, 100, 10000000, 100000);  } LQR
R = matriz 2x2 (I => 0.000000001, 0.6);                } method
K = lqr(A, B, Q, R);
E = matrix 2x6 (I => 1, 1);
H = -inv(E·inv(A - B·K)·B);
frame_counter = 0;
dt = 0.01;
for t = 0 : dt : 10
    w = [0; 2.4] (Estado final)
    u = u_eq - Kx + Hw
    x = x + f(x, w)·dt;
    x = x + dt (0.25 + f(x, u) + 0.75 (f(x + dt·2/3·f(x, u), u)));
    pause(dt);
    frame_counter = frame_counter + 1;
    if frame_counter == 15
        draw(x);
        plot(t, x(1), 'k--', t, x(2), 'r--', t, x(3), 'b--',
            t, u, 'g--')
        Legend('x(t)', 'y(t)', 'theta(t)', 'u(t)')
        frame_counter = 0;
    end
end
```

Archivo f

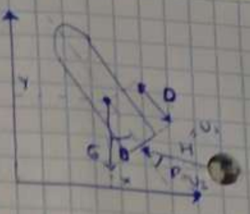
```
function xdot = f(x, u)
    J = 10000; m = 30000; d = 5.5; g = 9.81;
    x1 = x(1); x2 = x(2); x3 = x(3); x4 = x(4); x5 = x(5); x6 = x(6);
    S = u(1); F = u(2);
    xp = x4; yp = x5; thetap = x6
    xpp = -1/m sen(x3)S; ypp = -g + 1/m cos(x3)S; thetapp = 2d/J F;
    xdot = [xp; yp; thetap; xpp; ypp; thetapp];
end
```

Archivo draw

```
function draw(x)
    clc(), clf(), hold on, axis square, axis([-10, 17, -10, 17])
    x1 = x(1); y1 = x(2); theta = x(3);
    pendulo = [matrix 3x7 (dibujo)];
    rotacion = [cos(th), -sen(th), 0; sen(th), cos(th), 0; 0, 0, 1];
    traslacion = [1, 0, x1; 0, 1, y1; 0, 0, 1];
    aplica = rotacion · traslacion;
    resultado = aplica · pendulo;
    plot(resultado(1, :), resultado(2, :), 'black', 'Linewidth', 1)
end
```

Archivo init

```
close all; clear all; clc;
figure('Position', [2000 1000 750 750]);
grid
hold
xmin = ;
xmax = ;
ymin = ;
ymax = ;
axis([xmin xmax ymin ymax]);
axis('square');
```



Ecuaciones de Lagrange examen Noviembre 2020:

Datos: Centro de masas ($c=(x,y)^T$), ángulo (θ), entradas (U_1, U_2).

Modelo dinámico del sistema: $\ddot{x} = -1/m \, \text{sen}(\theta+U_2)U_1$, $\ddot{y} = -g + 1/m \cos(\theta+U_2)U_1$, $\ddot{\theta} = -D/J \, \text{sen}(U_2)U_1$

Parámetros: $J = 1050$, $m = 450$, $D = 1'25$, $g = 9'81$

① Demostrar ecuaciones del modelo dinámico obteniendo el método de Lagrange.

$d/dt(\partial L/\partial\dot{x}) - \partial L/\partial x = F \Rightarrow m\ddot{x} = -\text{sen}(\theta+U_2)U_1 \Rightarrow \ddot{x} = -1/m \, \text{sen}(\theta+U_2)U_1$

$d/dt(\partial L/\partial\dot{y}) - \partial L/\partial y = F \Rightarrow m(\ddot{y}+g) = \cos(\theta+U_2)U_1 \Rightarrow \ddot{y} = -g + 1/m \cos(\theta+U_2)U_1$

$d/dt(\partial L/\partial\dot{\theta}) - \partial L/\partial\theta = F \Rightarrow J\ddot{\theta} = -D\,\text{sen}(U_2)U_1 \Rightarrow \ddot{\theta} = -D/J \, \text{sen}(U_2)U_1$

$L = T - V = (1/2 m\dot{x}^2 + 1/2 m\dot{y}^2 + 1/2 J\dot{\theta}^2) - (mgy)$

② Espacio de estados $x = (x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta})^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ -1/m \, \text{sen}(x_3+U_2)U_1 \\ -g + 1/m \cos(x_3+U_2)U_1 \\ -D/J \, \text{sen}(U_2)U_1 \end{pmatrix} ; \; u = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios resueltos en clase (IMPORTANTES):

Modelo de un vehículo robótico:

Vector de estados ($x = (x, y, \theta, V_1, V_2)^T = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{V}_1, \dot{V}_2)^T = (v\cos\theta, v\,\text{sen}\,\theta, V_2 - V_1/L, RU_1, RU_2)^T$, $V_2 = V_1 + L\dot{\theta}$, $v = V_1 + V_2/2$.

Modelo de un péndulo:

Newton: Dinámica ($u(t) - mgL\,\text{sen}(q(t)) = J\ddot{q}(t)$, $J = mL^2$), $E_m = E_c + E_p = 1/2 mL^2\dot{q}^2 + mgL(1-\cos q)$

Lagrange: $L = T - V$, sustituir q por x, hallar $d/dt(\partial L/\partial\dot{x}) - \partial L/\partial x = u$, obtener $\ddot{x}$ y hallar ecuaciones de estado.

Modelo de un péndulo invertido:

Newton: Tr. carro ($(u - r_x)\vec{i} = m_c\ddot{s}\vec{i}$), tr. péndulo ($r_x\vec{i} + r_y\vec{j} - mg\vec{j} = m_r\ddot{b}$), rot. péndulo ($r_xL\cos\theta + r_yL\,\text{sen}\,\theta = O\ddot{\theta}$),

$b = (s - L\,\text{sen}\,\theta)\vec{i} + (L\cos\theta)\vec{j}$, vector de estados ($x = (s \; \theta \; \dot{s} \; \dot{\theta}) = (\ddot{s} \; \ddot{\theta} \; r_x \; r_y)$).

Lagrange: $E_c(1/2 m_c\dot{s}^2 + 1/2 m_r(d/dt(s - L\,\text{sen}\,\theta))^2 + 1/2 m_r(d/dt(L\cos\theta))^2)$, $E_p(m_rgL\cos\theta)$, ecuaciones de Lagrange ($d/dt(\partial L/\partial\dot{s}) - \partial L/\partial s = u$, $d/dt(\partial L/\partial\dot{\theta}) - \partial L/\partial\theta = 0$).

Modelo de un coche / coche con trailer:

Coche: $x = (x \; y \; \theta \; v \; \delta)^T = (\dot{x} \; \dot{y} \; \dot{\theta} \; \dot{v} \; \dot{\delta})^T = (V_H\cos\theta, V_H\,\text{sen}\,\theta, v\,\text{sen}\,\delta/L, U_1, U_2)^T$, $v\cos\delta = V_H$, $v\,\text{sen}\,\delta = L\dot{\theta}$.

Coche con trailer: Igual que en coche, pero $\dot{\theta}_r = V_r\,\text{sen}\,\delta_r / L_r$ donde $V_r = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = v\cos\delta$, $\delta_r = \theta - \theta_r$.

Estado no-controlable y no-observable:

Función de transferencia: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Polinomio característico: $\det(sI - A)$ = autovalores de A (estable: todos negativos; inestable: alguno positivo).

Tipos de polos: Polos de transmisión (polos negativos), polos ocultos (polos positivos).

Resolución de la ecuación de colocación de polos:

$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$ $\quad \left.\begin{matrix} P_{cn}(s) = (s+p_1)\ldots(s+p_n) \\ \det(sI - A + BK) = P_{cn}(s) \end{matrix}\right\}$ Hallar los diferentes valores de K

Realimentación de salida de un sistema escalar:

Método KLH: Hallar K ($\det(sI - A + BK) = (s+p)$), hallar L ($\det(sI - A + LC) = (s+p)$).

Precompensador: $E = 1 \Rightarrow H = -(E(A - BK)^{-1}B)^{-1}$ // Observador: $d/dt\,\hat{x}$; Sistema: $\dot{x}$

Ecuaciones del controlador: $\left\{\begin{matrix} d/dt\,\hat{x} = (A - BK - LC)\hat{x} + BHw + Ly \\ u = -K\hat{x} + Hw \end{matrix}\right.$ $\;$ Matriz A: $\dot{x}$ (sustituir u), $d/dt\,\hat{x}$ (sustituir y) $\begin{pmatrix} x & \hat{x} \\ x & \hat{x} \end{pmatrix}$

Controlador PID:

Ecuación de estados: $\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$; Con el vector de estados $x = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$, hallar $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{z}, y$ (sustituir u) $\Rightarrow$ Matriz A

Ecuación de estado del controlador: $\left\{\begin{matrix} z(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau \Rightarrow \dot{z}(t) = e(t) = -x_1 + w \\ u(t) = d_{-1}\int_0^t e(\tau)d\tau + d_0e(t) + d_1\dot{e}(t) = d_{-1}z + d_0(w - x_1) + d_1(\dot{w} - \dot{x}_1) = d_{-1}z + d_0w - d_0x_1 - d_1\dot{x}_1 \end{matrix}\right.$

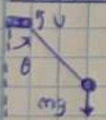
Control de un sistema no lineal de primer orden:

$\left.\begin{matrix} \dot{x} = 2x^2 + u \\ y = 3x \end{matrix}\right\}$ P. eq $\left\{\begin{matrix} 0 = 2\bar{x}^2 + \bar{u} \\ \bar{y} = 3\bar{x} \end{matrix}\right.$ $\;$ Conociendo los valores de $\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}$.

Linealización: $A = \partial f/\partial x(\bar{x},\bar{u})$, $B = \partial f/\partial u(\bar{x},\bar{u})$, $C = \partial g/\partial x(\bar{x},\bar{u})$, $D = \partial g/\partial u(\bar{x},\bar{u})$

Ecuación de estados: $\left\{\begin{matrix} \tilde{x} = x - \bar{x} \\ \tilde{u} = u - \bar{u} \end{matrix}\right.$; $\begin{matrix} \dot{\tilde{x}} = \text{—} \\ y = \text{—} \end{matrix}$; $\begin{matrix} \bar{y} = \bar{w} \\ E = \bar{y}/2 \end{matrix}$; $\left.\begin{matrix} d/dt\,\hat{x} = (A - BK - LC)\hat{x} + BH(w - \bar{w}) + L(y - \bar{y}) \\ u = \bar{u} - K\hat{x} + H(w - \bar{w}) \end{matrix}\right\}$ Método KLK y precompensador

Retroalimentación del estado:



Ecuaciones de estado: $\left\{\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u - \text{sen}\,x_1 - x_2 \end{matrix}\right.$; Puntos de equilibrio: $\left\{ f(\bar{x},\bar{u}) = 0, \bar{u} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\pi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right.$

$\dot{x} = f(\bar{x},\bar{u}) + A(x - \bar{x}) + B(x - \bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - \pi \\ x_2 - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$; Controlador: $u = -K(x - \bar{x})$

ANOTACIONES DEL EXAMEN TIPO:

③

A point $(\bar{x},\bar{u})$ is an operating point if $f(\bar{x},\bar{u}) = 0$ (vector de estados = 0), eq4 ($\theta \in \{0, \pi\}$), eq5 ($\theta = 0$, $S = gm$), eq6 ($F = 0$)

④

$\left\{\begin{matrix} \dot{x} = f(\bar{x},\bar{u}) + A(x - \bar{x}) + B(u - \bar{u}) \\ y = g(\bar{x},\bar{u}) + C(x - \bar{x}) \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{matrix} A = \partial f/\partial x(\bar{x},\bar{u}) \quad B = \partial f/\partial u(\bar{x},\bar{u}) \\ C = \partial g/\partial x(\bar{x},\bar{u}) \end{matrix}$

$\tilde{u} = u - \bar{u}$, $\tilde{x} = x - \bar{x}$, $\tilde{y} = y - \bar{y}$: $\left\{\begin{matrix} d/dt\,\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \\ \tilde{y} = C\tilde{x} \end{matrix}\right.$

⑤

The system is controllable if and only if $\text{rank}(B | AB | A^2B | \ldots | A^{n-1}B) = n$, where n is the dimension of x.

C_o = ctrb (A, B);

unco = Length (A) - rank (C_o) (comentar resultados).

Observable: Same as controllable but changing $B \Rightarrow C$.