

## **RESUMEN MÓDULO III ROBÓTICA AÉREA:**

### **ÍNDICE DE CONTENIDOS:**

#### **TEMA 1: SENSORES**

##### **1.1 SISTEMA DE NAVEGACIÓN INERCIAL**

###### **1.1.1 SISTEMA DE NAVEGACIÓN INERCIAL**

###### **1.1.1.1 NAVEGACIÓN CON FIJACIÓN DE POSICIÓN**

###### **1.1.1.2 NAVEGACIÓN INERCIAL**

###### **1.1.2 INS DE PLATAFORMA ESTABLE**

###### **1.1.2.1 EFECTO GIROSCÓPICO**

###### **1.1.2.2 GIROSCOPIO DE ESTABILIZACIÓN**

###### **1.1.2.3 INS DE PLATAFORMA ESTABLE**

###### **1.1.3 INS CON CORREAS**

###### **1.1.3.1 INS CON CORREAS**

###### **1.1.3.2 COMPLEJIDAD DE COMPUTACIÓN**

###### **1.1.3.3 DIAGRAMA DE BLOQUES FUNCIONAL**

###### **1.1.3.4 CONSTRUCCIÓN DE BLOQUES**

##### **1.2 TASA DE GIROSCOPIOS**

###### **1.2.1 GIROSCOPIO MECÁNICO**

###### **1.2.1.1 GIROSCOPIO CON UN EJE DE VELOCIDAD**

###### **1.2.2 GIROSCOPIO ÓPTICO**

###### **1.2.2.1 EFECTO E INTERFERÓMETRO SAGNAC**

###### **1.2.2.2 GIROSCOPIO INTERFEROMÉTRICO DE FIBRA ÓPTICA**

###### **1.2.2.3 GIROSCOPIO LÁSER DE ANILLO**

###### **1.2.3 GIROSCOPIO MEMS**

###### **1.2.3.1 TECNOLOGÍA MEMS**

###### **1.2.3.2 FUERZAS DE CORIOLIS**

###### **1.2.3.3 GIROSCOPIO DIAPASÓN**

###### **1.2.3.4 GIROSCOPIO CILÍNDRICO VIBRATORIO**

###### **1.2.3.5 GIROSCOPIO MEMS DE ANILLOS RESONANTES**

##### **1.3 ACELERÓMETROS**

###### **1.3.1 ACELERÓMETROS MECÁNICOS**

###### **1.3.1.1 PRINCIPIOS DE ACELERÓMETROS**

###### **1.3.1.2 ACELERÓMETRO PENDULAR CON RETROALIMENTACIÓN DE FUERZA**

###### **1.3.2 ACELERÓMETRO DE ESTADO SÓLIDO (SEMICONDUCTOR)**

###### **1.3.2.1 ACELERÓMETRO DE HAZ VIBRATORIO**

###### **1.3.2.2 ACELERÓMETRO DE ONDAS ACÚSTICAS DE SUPERFICIE**

###### **1.3.3 ACELERÓMETROS MEMS**

###### **1.3.3.1 ACELERÓMETROS MEMS**

###### **1.3.3.2 PRINCIPIOS DE TRANSDUCCIÓN**

###### **1.3.3.2 PRINCIPIOS DE TRANSDUCCIÓN**

##### **1.4 ERRORES DEL SENSOR INERCIAL**

###### **1.4.1 ERRORES SISTEMÁTICOS**

###### **1.4.1.1 ERRORES SISTEMÁTICOS**

###### **1.4.1.2 CALIBRACIÓN DEL SENSOR PARA ERRORES SISTEMÁTICOS**

###### **1.4.2 ERRORES ALEATORIOS**

###### **1.4.2.1 ERRORES ALEATORIOS**

###### **1.4.3 FUSIÓN DE SENSORES**

###### **1.4.3.1 FUSIÓN DE SENSORES**

## **TEMA 2: FILTRO DE BAYES**

### **2.1 FUSIÓN DE DATOS MULTISENSOR Y ROBÓTICA PROBABILÍSTICA**

#### **2.1.1 ROBÓTICA PROBABILÍSTICA**

#### **2.1.2 LOCALIZACIÓN DE UN ROBOT MÓVIL**

### **2.2 REGLA DE BAYES**

#### **2.2.1 FUNCIÓN DE MASA/DENSIDAD DE PROBABILIDAD (PMF Y PDF)**

##### **2.2.1.1 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DISCRETA**

##### **2.2.1.2 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONTÍNUA**

##### **2.2.1.3 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDAD MAXWELLIANA**

##### **2.2.1.4 PROBABILIDAD CONJUNTA, CONDICIONADA Y TOTAL**

#### **2.2.2 REGLA DE BAYES**

##### **2.2.2.1 REGLA DE BAYES**

##### **2.2.2.2 INDEPENDENCIA E INDEPENDENCIA CONDICIONAL**

### **2.3 FILTRO DE BAYES**

#### **2.3.1 SUPOSICIÓN DE MARKOV**

##### **2.3.1.1 ESTADO, MEDIDA Y CONTROL**

##### **2.3.1.2 RED DE BAYES DINÁMICA**

##### **2.3.1.3 SUPOSICIÓN DE MARKOV**

#### **2.3.2 FILTRO DE BAYES**

##### **2.3.2.1 FILTRADO PROBABILÍSTICO**

##### **2.3.2.2 ENTRADAS Y SALIDAS**

##### **2.3.2.3 PASO DE PREDICCIÓN/PROPAGACIÓN**

##### **2.3.2.4 PASO DE ACTUALIZACIÓN/CORRECCIÓN**

## **EJERCICIOS TEMA 2: FILTRO DE BAYES**

### **EJERCICIO 1**

### **EJERCICIO 2**

### **EJERCICIO 3**

## **TEMA 3: FILTRO DE KALMAN**

### **3.1 ESPERANZA Y MOMENTO**

#### **3.1.1 ESPERANZA**

#### **3.1.2 MOMENTO**

### **3.2 DISTRIBUCIÓN NORMAL**

### **3.3 COVARIANZA**

#### **3.3.1 DISTRIBUCIÓN BIVARIADA**

#### **3.3.2 ESPERANZA DE LA DISTRIBUCIÓN BIVARIABLE**

#### **3.3.3 COVARIANZA DE LA DISTRIBUCIÓN BIVARIABLE**

#### **3.3.4 COVARIANZA, SIMETRÍA E INDEPENDENCIA**

#### **3.3.5 COVARIANZA Y CORRELACIÓN**

#### **3.3.6 COVARIANZA Y VARIABILIDAD CONJUNTA**

#### **3.3.7 DISTRIBUCIÓN MULTIVARIABLE**

#### **3.3.8 DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIABLE**

### **3.4 FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS**

#### **3.4.1 FUNCIÓN ESCALAR**

#### **3.4.2 FUNCIÓN MULTIVARIABLE**

### **3.5 FILTRO DE KALMAN**

#### **3.5.1 MODELO DE OBSERVACIÓN Y ESTADO**

#### **3.5.2 HIPÓTESIS**

##### **3.5.2.1 PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN DE ESTADOS**

##### **3.5.2.2 PROBABILIDAD DE MEDICIÓN**

#### **3.5.3 ALGORITMO DEL FILTRO DE KALMAN**

##### **3.5.3.1 PASO DE PREDICCIÓN**

##### **3.5.3.2 PASO DE MEDICIÓN Y ACTUALIZACIÓN**

#### **3.5.4 ILUSTRACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN**

### **3.6 FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO**

#### **3.6.1 NO LINEALIDAD**

#### **3.6.2 FUNCIÓN LINEAL DE VARIABLES GAUSSIANAS**

#### **3.6.3 FUNCIÓN NO LINEAL DE VARIABLES GAUSSIANAS**

#### **3.6.4 APROXIMACIÓN GAUSSIANA POR LINEARIZACIÓN**

#### **3.6.5 LINEARIZACIÓN POR EXPANSIÓN DE TAYLOR (MONOVARIABLE...)**

#### **3.6.6 LINEARIZACIÓN POR EXPANSIÓN DE TAYLOR (MULTIVARIABLE...)**

#### **3.6.7 LINEARIZACIÓN POR EXPANSIÓN DE TAYLOR (MÚLTIPLES...)**

#### **3.6.8 MODELO DE ESTADOS**

#### **3.6.9 MODELO DE OBSERVACIÓN**

#### **3.6.10 ALGORITMO DEL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO**

#### **3.6.11 SOFTWARE A BORDO GNC**

#### **3.6.12 ENTORNO DE DISEÑO GNC**

## **EJERCICIOS TEMA 3: FILTRO DE KALMAN**

### **EJERCICIO 1: DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDAD MAXWELLIANA EN 2D**

### **EJERCICIO 2: DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIABLE**

### **EJERCICIO 3: MODELO DE OBSERVACIÓN Y ESTADO**

## TEMA 1: SENSORES

### 1.1 SISTEMA DE NAVEGACIÓN INERCIAL

#### 1.1.1 SISTEMA DE NAVEGACIÓN INERCIAL

##### 1.1.1.1 NAVEGACIÓN CON FIJACIÓN DE POSICIÓN

**Medios para localizarse:** Puntos de referencia (edificios, carreteras, montañas, ríos, valles), mapas con latitud y longitud, estrellas en el sistema de referencia inercial.

**Cronómetro preciso (John Harrison):** Resolvió el problema de la longitud a la hora de navegar de forma precisa en el mar, y que medía el tiempo a bordo del barco con gran precisión.

**Radiobrújula / Radiogoniómetro (1920):** Muestra el rumbo relativo entre el rumbo de la aeronave y una estación de radio adecuada, además de poder determinar el estado de navegación con respecto a posiciones conocidas basadas en observaciones del mundo exterior, pero requieren una línea de visión directa entre la plataforma por la que se va a navegar y las posiciones fijas conocidas.

##### 1.1.1.2 NAVEGACIÓN INERCIAL

**Acelerómetro:** Posee la capacidad de detectar la aceleración en una sola dirección, por lo que normalmente se requieren tres acelerómetros perpendiculares entre sí para hallar el vector de aceleración.

**Sensores giroscópicos:** Detectan el movimiento de rotación del cuerpo con respecto al sistema de referencia inercial.

**Unidad de Medición Inercial (IMU):** Comprende tres acelerómetros y tres giroscopios montados a lo largo de tres ejes ortogonales entre sí que capturan movimientos en 3D, además de combinarse con el procesamiento de datos básico a bordo para convertir las mediciones brutas discretizadas en cantidades físicas deseadas.

**Navegación inercial:** Técnicas que utilizan mediciones inerciales de las IMU para adquirir el estado de navegación de un instante dado.

**Sistema de Navegación Inercial (INS):** Contiene una IMU junto con algunos medios que procesan mediciones inerciales, proporcionando una solución de navegación completa.

**Símbles posición fijada - inercial:** El INS realiza la navegación en sentido relativo con respecto al estado de navegación inicial de la plataforma en movimiento, y además es autónomo, ya que no depende de la transmisión de señales, recepción de una fuente externa, y estimaciones del vehículo sin referencia a informaciones externas.

**Sistemas de plataforma estable:** Requiere que los sensores inerciales estén montados en una plataforma estabilizada que esté mecánicamente aislada del movimiento de rotación del vehículo.

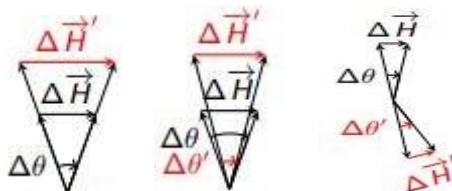
**Sistemas de montaje rígido:** Los sensores inerciales están sujetos rígidamente al vehículo, además de su movimiento de rotación.

**Momento de inercia:**  $\vec{F}_I = -m\vec{a} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - m\vec{\alpha} \times \vec{r}$ ,

donde  $-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$  (fuerza de Coriolis),  $-m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})$  (fuerza centrífuga),  $\vec{a}$  (aceleración),  $\vec{\Omega}$  (velocidad angular, si este valor es pequeño, se debe tener un valor de  $r$  grande para medir fuerza centrífuga),  $\vec{\alpha}$  (aceleración angular),  $\vec{r}$  (posición relativa de la masa con respecto a un punto),  $\vec{v}$  (velocidad fijada a la masa con respecto a un punto, si este valor es grande, se tiene una gran fuerza de Coriolis).

## 1.1.2 INS DE PLATAFORMA ESTABLE

### 1.1.2.1 EFECTO GIROSCÓPICO

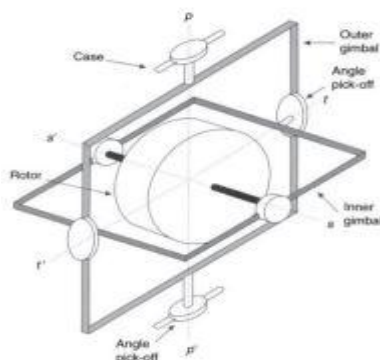


Conservación del momento angular de un objeto rotatorio:  $\overline{M}_G = \Sigma(\overline{GP} \times \overline{F}_P) = \frac{d\overline{H}_G}{dt}$ ,

donde  $H$  (magnitud del momento angular),  $\Delta H$  (vector del momento angular) y  $M$  (vector del torque).

Mayor velocidad del rotor ( $H' > H$ ): No se puede cambiar la velocidad de giro ( $\Delta\theta = \Delta\theta', \Delta H' > \Delta H \Rightarrow M' > M$ ), la precesión angular es más lenta ( $M' = M, \Delta H' = \Delta H \Rightarrow \Delta\theta' < \Delta\theta$ ).

### 1.1.2.2 GIROSCOPIO DE ESTABILIZACIÓN



Debido a la inercia giroscópica, la dirección del eje de giro permanece fija en el sistema de referencia inercial, es decir, fija a un sistema de coordenadas que no acelera ni gira con respecto a las estrellas fijas.

Para muchas aplicaciones, el momento angular se elige para que sea muy alto, de modo que cualquier par no deseado que actúe en el rotor introduzca un cambio insignificante en la dirección de giro del eje.

El rotor está sostenido por un conjunto de cardanes que están libres de rotar uno con respecto al otro con insignificante fricción.

El movimiento del rotor y la plataforma de montaje están desacoplados. La orientación del rotor no se ve afectada por cualquier rotación de la plataforma de montaje. De este modo, el vehículo puede girar libremente alrededor de 3 ejes ortogonales.

La orientación del vehículo con respecto al eje de giro se puede medir mediante dispositivos de captación de ángulo montados en los cardanes.

Se considera un giroscopio de estabilización montado en un barco anclado en el ecuador de la Tierra, con el eje de giro en la dirección oeste-este.

El eje de giro del rotor está fijado al marco inercial. La nave está fijada al marco no inercial de la Tierra que está girando.

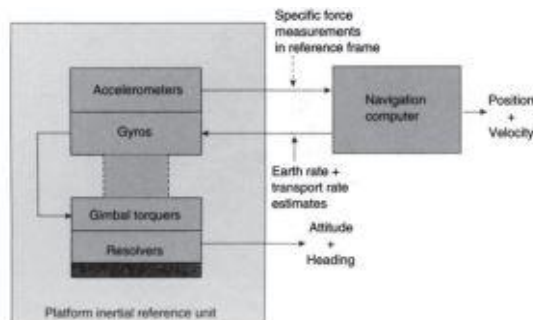
Para un observador en el barco, se observa un movimiento de rotación relativo en el eje de giro del rotor, donde el rotor regresa a su orientación original cada 24 horas.

Por lo tanto, el giroscopio no indica la orientación del barco.

No es deseable utilizar un giroscopio de estabilización para navegación. Se requieren motores para alinear el rotor del giroscopio con la navegación designada en el marco de referencia.

### 1.1.2.3 INS DE PLATAFORMA ESTABLE

Dado que la **tríada del acelerómetro** se mantiene en alineación con la navegación designada en el marco de referencia, es sencillo obtener estimaciones de velocidad y posición mediante integración directa. Esta configuración minimiza el costo computacional requerido para estimar el estado del vehículo. La eficacia del sistema está determinada por todas las partes de la plataforma (giroscopios, motores de torsión, pick-offs, amplificadores y cableado), todas de gran complejidad mecánica.



**Aplicaciones:** Utilizaban técnicas de plataforma estable. En ese momento, tampoco se utilizaron sensores con el rango dinámico necesario ni ordenadores lo suficientemente potentes para permitir la producción de sistemas de amarre.

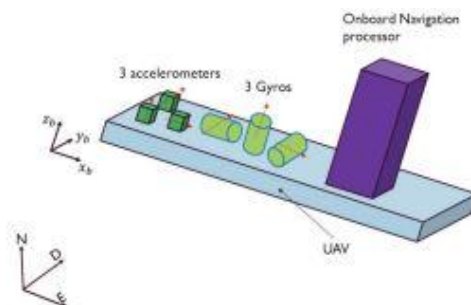
**Usos:** Aplicaciones como barcos y submarinos. Sin embargo, las desventajas de tales sistemas son el gran tamaño, el alto costo y la alta complejidad mecánica.

### 1.1.3 INS CON CORREAS

#### 1.1.3.1 INS CON CORREAS

En un **INS con correas**, los sensores inerciales están rígidamente sujetos con correas a la carrocería del vehículo anfitrión. En consecuencia, los giroscopios y los acelerómetros experimentan el movimiento dinámico completo del vehículo anfitrión.

**Ventajas:** Complejidad mecánica reducida, menor coste, tamaño reducido y mayor fiabilidad en comparación con la plataforma más estable del sistema.



**Desventajas:** Aumento sustancial en la complejidad computacional y la necesidad de utilizar sensores capaces de medir velocidades de rotación mucho más altas.

#### 1.1.3.2 COMPLEJIDAD DE COMPUTACIÓN

**Acelerómetros:** Miden la aceleración respecto al sistema de referencia inercial.

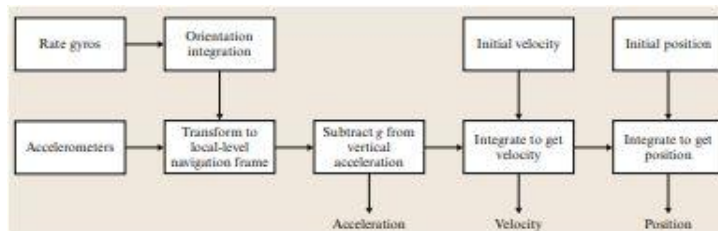
**Giroscopios de velocidad angular:** Miden la velocidad angular del vehículo respecto al sistema de referencia inercial. Esta es la medida fundamental base de todos los sistemas giroscópicos modernos.

Los **ejes sensibles de acelerómetros y giroscopios** están fijados al vehículo.

Las medidas de los vectores de aceleración y velocidad angular se proyectan en los ejes fijos del cuerpo, o se expresan utilizando una base vectorial fija en el cuerpo.

Los datos deben procesarse matemáticamente antes del paso de integración para obtener estimaciones de navegación. Así, la reducción de la complejidad mecánica se consigue a expensas de la complejidad computacional.

### 1.1.3.3 DIAGRAMA DE BLOQUES FUNCIONAL



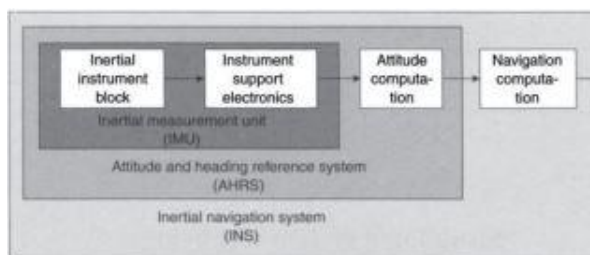
Se integran **tres mediciones de velocidad de giroscopio** para mantener una estimación continua de la orientación del vehículo.

Con base en esta información de orientación, se transforman **tres mediciones del acelerómetro** desde el marco de referencia fijo del cuerpo al marco de navegación designado.

El **vector de aceleración de la gravedad** se puede estimar y restar de la medición.

Con base en la velocidad inicial y la estimación de la posición del instante de tiempo anterior, la **aceleración resultante** se integra para obtener la velocidad actual del vehículo y luego integrarse nuevamente para obtener la posición actual.

### 1.1.3.4 CONSTRUCCIÓN DE BLOQUES



La **IMU** se combina con una computadora de actitud en la que las ecuaciones de actitud se resuelven, formando un **Sistema de Referencia de Actitud y Rumbo** (AHR).

**Computadora de navegación:** Proporciona información completa, además de la capacidad de navegación inercial, formando un INS con correas.

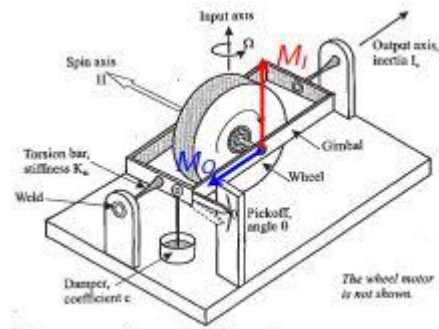
## 1.2 TASA DE GIROSCOPIOS

### 1.2.1 GIROSCOPIO MECÁNICO

#### 1.2.1.1 GIROSCOPIO CON UN EJE DE VELOCIDAD

Si la plataforma gira alrededor del eje de entrada con una velocidad angular  $\Omega$ , se le aplica un par paralelo al eje de entrada  $M_I$  en el rotor, provocando así que inicialmente precese aproximadamente el eje de salida  $\theta$ .

Como respuesta, la barra de torsión produce un par en el cardán y en el rotor paralelo al eje de salida, intentando girarlo hacia atrás. Como resultado, el rotor realiza una precesión alrededor del eje de entrada.



En estado estacionario, con  $\Omega$  y  $\theta$  constantes, la barra de torsión sostiene el único rotor de precesión sobre el eje de entrada ( $M_o \neq 0$ ), mientras no haya movimiento de precesión alrededor del eje de salida, el par paralelo al eje de entrada es cero ( $M_I = 0$ ).

Después de todo, para inferir la velocidad angular  $\Omega$  de la plataforma, es necesario medir el par de torsión de la barra de torsión  $M_o$ , tomando la lectura del ángulo de deflexión  $\theta$  del cardán desde el corte angular.

### 1.2.2 GIROSCOPIO ÓPTICO

#### 1.2.2.1 EFECTO E INTERFERÓMETRO SAGNAC

En una plataforma estacionaria, se emiten dos pulsos de luz enviados en direcciones opuestas alrededor de una **trayectoria óptica circular** ( $L = 2\pi R$ ). Después de recorrer la misma distancia con la misma velocidad de la luz, llegan al mismo punto de partida simultáneamente en  $t = L/c = 2\pi R/c$ .

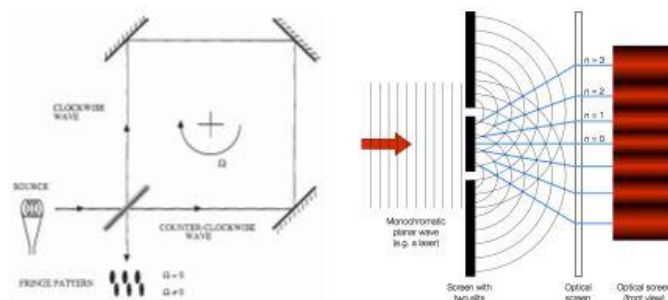
Sobre una plataforma giratoria con un ángulo en el sentido de las agujas del reloj a velocidad  $\Omega$ , la luz en el sentido de las agujas del reloj viaja más lejos que la distancia recorrida en el caso estacionario.

En términos más generales, la luz que viaja en el sentido de rotación viaja más lejos, mientras que la luz que viaja en contra de la dirección de rotación ve reducida su longitud de trayectoria.

$$L_+ = L + \Omega R t_+ = c t_+, \quad L_- = L - \Omega R t_- = c t_-$$

La **velocidad de rotación** se puede deducir de la diferencia de trayectoria óptica  $\Delta L$ .

$$\Delta t = \frac{L}{c - \Omega R} - \frac{L}{c + \Omega R} = \frac{2\Omega R L}{c^2 - R^2 \Omega^2} \approx \frac{2\Omega R L}{c^2} \Rightarrow \Delta L = \frac{4\pi R^2 \Omega}{c} \approx \frac{4A\Omega}{c}$$



El **interferómetro** emplea fenómenos de interferencia de ondas para realizar mediciones precisas.

Si dos ondas tienen la misma frecuencia y una diferencia de fase constante, se forma un patrón de interferencia estacionario. Las **franjas** (bandas alternas oscuras y claras) pueden ser líneas rectas, paralelas y equiespaciadas.

En un **interferómetro Sagnac**, la diferencia de fase de las dos luces que se propagan en sentido contrario a las vigas resulta en un cambio en el patrón de franjas.

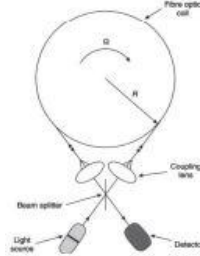


### 1.2.2.2 GIROSCOPIO INTERFEROMÉTRICO DE FIBRA ÓPTICA

En un **giroscopio interferométrico de fibra óptica (FOG)**, una fuente de luz dividida en dos haces de luz se propaga en direcciones opuestas alrededor de una bobina de fibra óptica.

Después de salir de la fibra, estos dos haces se combinan para formar un patrón de franjas de interferencia que es observado por el fotodetector.

En una plataforma giratoria, debido a la diferencia de trayectoria, dos haces contrarrotativos llegan al punto de recombinación con una **fase diferencia  $\Delta\phi$** , lo que resulta en un desplazamiento marginal en relación con el patrón observado en una plataforma estacionaria: ( $\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda} \approx \frac{8\pi A\Omega}{c\lambda}$ ).



En 1925, durante un famoso experimento, Michelson y Gale midieron la **velocidad de rotación de la Tierra**, que es aproximadamente de  $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . El **área del camino rectangular** es de  $A \approx 2 \times 10^5 \text{ m}^2$ .

La **diferencia del camino de la luz** es  $\Delta L \approx 1 \times 10^{-7} \text{ m}$ . El desplazamiento marginal medido divide 230 partes en 1000.

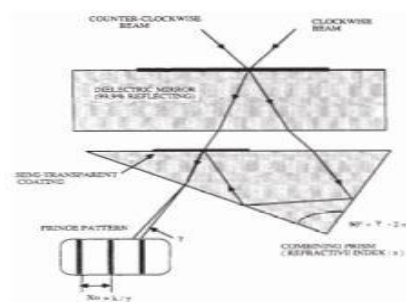
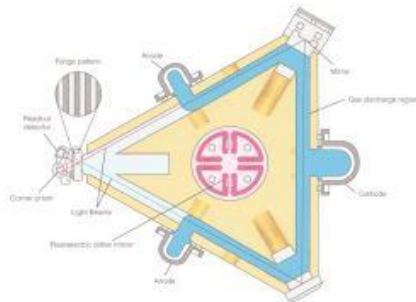
La **diferencia de camino es proporcional a la longitud de la fibra**. Por tanto, la sensibilidad se puede mejorar enormemente utilizando múltiples N vueltas de bobinas de fibra óptica ( $\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta L}{\lambda} \approx \frac{8\pi N A \Omega}{c\lambda}$ ).

### 1.2.2.3 GIROSCOPIO LÁSER DE ANILLO

**Giroscopios láser de anillo (RLGs, giróscopos láser de anillo):** Generan dos haces láser de onda viajera en direcciones opuestas mediante la ionización de un láser activo medio (gas helio-neón) en una cavidad anular con alto voltaje. Los caminos de luz rectos se forman utilizando tres o más espejos.

Para que la condición de resonancia se mantenga en la cavidad, **el número de longitudes de onda debe ser igual a un número entero** ( $m\lambda = mc/f = L$ ,  $m = 1, 2, 3$ ).

Cuando el sensor está estacionario, las ondas CW y CCW tienen la misma longitud de camino óptico L y frecuencia oscilante f.



En una plataforma giratoria, los cambios en la longitud del camino óptico dan como resultado la frecuencia. Cada haz de luz cambia para mantener la nueva condición resonante requerida por la acción del láser. La diferencia de trayectoria óptica  $\Delta L$  da como resultado una diferencia de frecuencia  $\Delta f$ .

$$\Delta f = \frac{mc}{L_-} - \frac{mc}{L_+} \approx \frac{mc\Delta L}{L^2} = \frac{\Delta L}{L} f \Rightarrow \Delta f = \frac{4A\Omega}{cL_-} \times \frac{c}{\lambda} = \frac{4A\Omega}{\lambda L}$$

Los dos rayos láser se combinan con un prisma.

A la salida del prisma, los dos haces, con un **ángulo  $\gamma$**  en el medio, interfieren para formar un patrón de franja en un conjunto de fotodetectores.

Suponiendo una **intensidad igual  $I_0$**  de los dos haces, la **intensidad de la onda de luz** que viaja en el detector (en el momento t y en la posición x) es  $I = I_0[1 + \cos(2\pi t\Delta f + 2\pi\gamma x/\lambda + \phi_0)]$ , siendo  $\phi_0$  una diferencia de fase constante.

Al detectar la velocidad a la que la interferencia de franjas se mueven a través de los detectores, la **frecuencia** se puede medir calculando la diferencia entre dos haces, pudiéndose inferir la velocidad angular de la plataforma.

### 1.2.3 GIROSCOPIO MEMS

#### 1.2.3.1 TECNOLOGÍA MEMS

**Sistemas MEMS:** Dispositivos que tienen una longitud característica de entre 1  $\mu\text{m}$  y 1 mm, que combinan componentes eléctricos y mecánicos, y que se fabrican mediante tecnologías de procesamiento en lotes de circuitos integrados.

Estos dispositivos tienen la capacidad de detectar, controlar y actuar a microescala.

La **tecnología MEMS** hace uso directo del silicio en técnicas desarrolladas por la industria de circuitos integrados electrónicos para permitir la miniaturización de sensores.

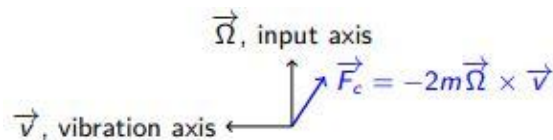
Se fabrican por lotes para que se puedan construir muchos circuitos idénticos simultáneamente en un único sustrato de silicio. Como resultado, se pueden fabricar grandes cantidades de dispositivos idénticos a un costo unitario muy bajo.

Nuevas aplicaciones que exigen sensores en miniatura con costo, tamaño y consumo de energía reducidos han proporcionado un importante incentivo para el desarrollo de MEMS.

Sin embargo, en general, las reducciones de tamaño dan lugar a disminuciones en la sensibilidad y resolución, además de aumentos del ruido y preocupaciones sobre la sensibilidad térmica.

#### 1.2.3.2 FUERZAS DE CORIOLIS

Los **giroscopios MEMS**, en lugar de utilizar rotores de giro rápido, se basan en datos ficticios. A continuación se muestra un **diagrama de las fuerzas de Coriolis** sobre una masa de prueba vibrante para detectar ángulos de rotación.



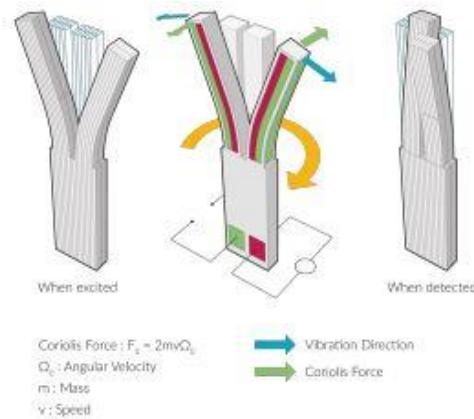
Dentro del giroscopio, hay una masa de prueba que se excita para tener una **vibración lineal  $\vec{v}$**  con respecto a la carcasa del giroscopio, en dirección perpendicular al eje de entrada del giroscopio.

Si el giroscopio gira alrededor de su eje de entrada con **velocidad angular  $\vec{\Omega}$** , la **fuerza de Coriolis**

**$\vec{F}_c = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}$**  actúa en dirección perpendicular a ambos ejes de vibración y al eje de entrada.

Esta fuerza de Coriolis ficticia da como resultado un movimiento relativo entre la masa de prueba y la carcasa del giroscopio en una dirección perpendicular tanto al eje de vibración como al eje de entrada.

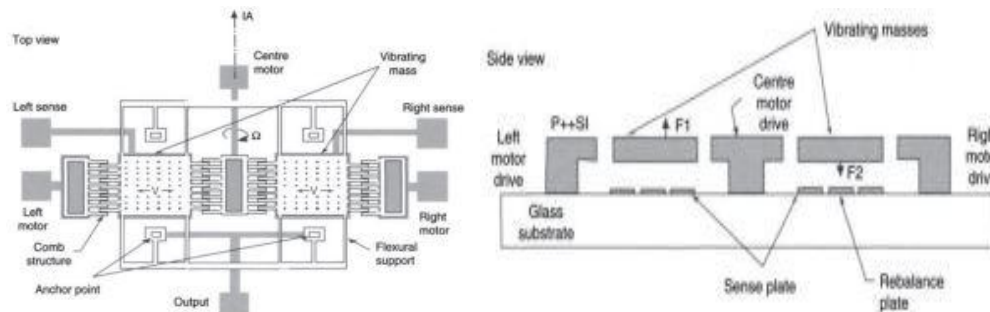
### 1.2.3.3 GIROSCOPIO DIAPASÓN



**Giroscopio diapasón:** Compuesto por dos estructuras vibratorias montadas en paralelo sobre una sola base. Las vibraciones en el plano se excitan en dos estructuras en dirección opuesta.

Si la horquilla gira alrededor del eje de entrada paralelo a la longitud de las dos vigas vibrantes, la fuerza de Coriolis produce un par de torsión alrededor de este eje de entrada.

El par oscilatorio genera una precesión fuera del plano que varía sinusoidalmente, cuya amplitud es proporcional a la velocidad de rotación.



**Giroscopio MEMS de diapasón Draper:** Consta de un silicio grabado en su estructura suspendida sobre un sustrato de vidrio.

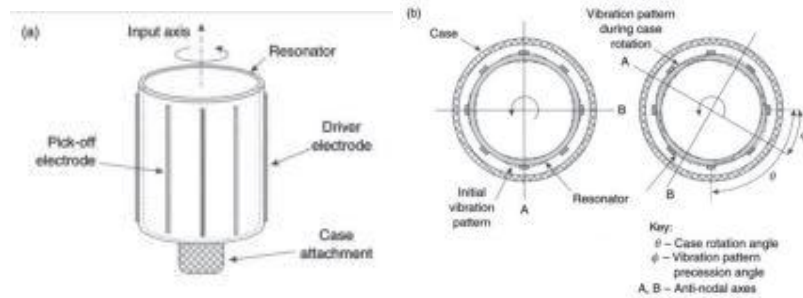
La **estructura de silicio** está unida al sustrato en los puntos de anclaje, dejando flotar la mayor parte del silicio. Dos masas oscilantes son accionadas electrostáticamente por los actuadores de peine. Los controladores de peine también están grabados fuera del silicio, con su estator fijado al sustrato de vidrio.

El sustrato de vidrio lleva en el capacitivo placas de captación capacitiva, donde las masas de prueba son impulsadas a oscilar en el plano del silicio con 180° de desfase.

Como resultado de la rotación de la plataforma sobre el eje de entrada y el plano de oscilación de las masas de prueba en sentido opuesto, la fuerza de Coriolis moverá una masa hacia arriba y otra hacia abajo.

La captación capacitiva detecta la amplitud de oscilación fuera del plano cuya tasa es proporcional a la rotación.

### 1.2.3.4 GIROSCOPIO CILÍNDRICO VIBRATORIO



Dentro de un **giroscopio cilíndrico vibratorio**, un resonador cilíndrico es obligado a vibrar a su frecuencia resonante por cuatro electrodos de conducción piezoeléctricos espaciados igualmente entre sí fijados a su circunferencia.

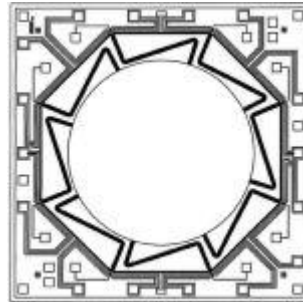
Cuando el cilindro está parado, el sensor está diseñado para generar una onda estacionaria.

Los **antinodos** se producen en los electrodos del controlador. Los **nodos**, con una vibración nula, están colocados exactamente a mitad de camino entre los electrodos impulsores, donde el pick-off de los electrodos no detecta vibraciones.

Si el cilindro gira alrededor del eje de entrada, una fuerza de Coriolis tangencial mueve el patrón de vibración, haciendo que los electrodos de extracción ahora puedan detectar un patrón de vibración no nulo.

El desplazamiento angular de los ejes antinodales es directamente proporcional a la velocidad de rotación.

### 1.2.3.5 GIROSCOPIO MEMS DE ANILLOS RESONANTES



La tecnología del giroscopio cilíndrico vibratorio evolucionó hasta convertirse en un dispositivo con un resonador en forma de anillo o disco.

La **fuerza tangencial de Coriolis** hace que cada punto en el anillo se mueva hacia afuera para doblarse en una dirección, mientras que los puntos se mueven hacia adentro para doblarlo de otra forma. El efecto neto de esto es mover la vibración alrededor del anillo a un desplazamiento angular proporcional a la velocidad de rotación.

## 1.3 ACELERÓMETROS

### 1.3.1 ACELERÓMETROS MECÁNICOS

#### 1.3.1.1 PRINCIPIOS DE ACELERÓMETROS

Los **acelerómetros** funcionan midiendo la fuerza de inercia experimentada por una masa de prueba cuando la caja de montaje acelera.

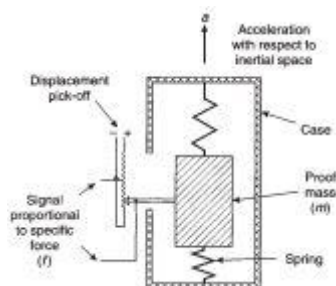
**En su forma más simple, un sistema resorte-masa contiene tres elementos:** Masa de prueba, suspensión como resorte y pickoff, que emite una señal relacionada con la aceleración.

Sólo existen la gravedad y la fuerza del resorte como fuerzas reales aplicadas directamente a la masa de prueba.

En el caso de aceleración constante a lo largo de la entrada sensible al eje, considerando el estado estacionario, la masa de prueba se acelera en caso de no haber movimiento relativo entre ambos.

Al observar el movimiento en el sistema de referencia no inercial fijado a la caja, no hay aceleración. Sin embargo, existe una fuerza de inercia que surge de la aceleración del caso. Por lo tanto, la fuerza del resorte debe equilibrar la fuerza de inercia y la de gravedad.

$$\overline{F}_I = -m\overline{a} - 2m\overline{\Omega} \times \overline{v} - m\overline{\Omega} \times (\overline{\Omega} \times \overline{r}) - m\overline{a} \times \overline{r} \Leftrightarrow \overline{F}_k = \overline{F}_I + \overline{F}_g$$



Dado que la fuerza del resorte equilibra las fuerzas de inercia y gravedad, la plataforma de aceleración se puede inferir de las mediciones de la fuerza del resorte y de las lecturas de desplazamiento del muelle.

El **selector de desplazamiento** puede ser tan simple como un potenciómetro, cuyo voltaje puede ajustarse mediante divisores.

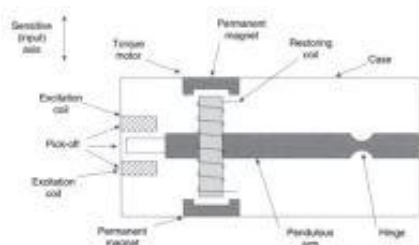
Para obtener la medida de la fuerza de inercia, se debe restar la gravedad al resorte. Esto también requiere conocer la orientación de la plataforma.

$$\overline{F}_I = \overline{F}_k - \overline{F}_g$$

#### 1.3.1.2 ACELERÓMETRO PENDULAR CON RETROALIMENTACIÓN DE FUERZA

El **acelerómetro pendular con retroalimentación de fuerza**, con un péndulo operado en circuito cerrado, es el acelerómetro de navegación más común.

El péndulo tiene una masa de prueba unida a un extremo y está sostenido por la bisagra en el otro extremo como un sistema de suspensión flexible.



El sistema de captación inductivo tiene dos bobinas que están fijadas a la caja e interactúan con una placa en el péndulo. Cuando el caso comienza a acelerar a lo largo del eje de entrada, un desplazamiento relativo entre la masa de prueba y el centro de las dos bobinas introduce una diferencia de voltaje en las bobinas. Esta señal se retroalimenta a un mecanismo de reequilibrio de fuerzas. Para oponerse a cualquier movimiento relativo detectado, se utiliza una fuerza restauradora electromagnética generada por el motor de torsión, que debe equilibrar la fuerza de inercia y la gravedad.

La aceleración se puede inferir midiendo la corriente de la bobina en la bobina de restauración, generando la fuerza restauradora electromagnética.

## 1.3.2 ACELERÓMETRO DE ESTADO SÓLIDO (SEMICONDUCTOR)

### 1.3.2.1 ACELERÓMETRO DE HAZ VIBRATORIO

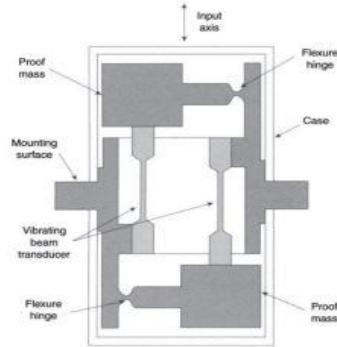
Un **acelerómetro de haz vibratorio** utiliza un par de vigas piezoeléctricas de cuarzo, soportando cada una una masa de prueba del péndulo.

En ausencia de aceleración, ambos haces vibran a la misma frecuencia de resonancia.

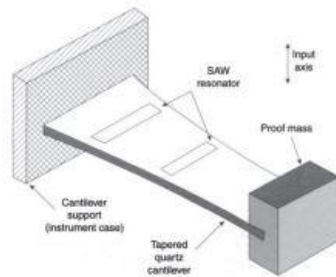
Cuando se aplica una aceleración a lo largo del eje de entrada, una viga se comprime mientras la otra se estira para contrarrestar la fuerza de inercia y la gravedad.

El resultado es que el haz en compresión experimenta una disminución en la frecuencia, mientras que el haz en tensión tiene un aumento de frecuencia.

Se mide la diferencia en la frecuencia de resonancia, directamente proporcional a la aceleración aplicada.



### 1.3.2.2 ACELERÓMETRO DE ONDAS ACÚSTICAS DE SUPERFICIE



En un **acelerómetro de ondas acústicas de superficie**, un haz voladizo de cuarzo piezoeléctrico está fijado rígidamente en un extremo al caso de la estructura, pero es libre de moverse en el otro extremo, donde está fijada rígidamente una masa de prueba.

Una **onda acústica superficial (SAW)** es generada por un par de electrodos metálicos (resonadores). La longitud de onda y la frecuencia están determinadas por la separación entre ellas.

Cuando se aplica una aceleración normal al plano que contiene la viga, ésta se doblará y su superficie estará sometida a una tensión aplicada (deformación), cambiando la frecuencia de los cambios de onda acústica superficial en proporción a la tensión aplicada.

El cambio en la frecuencia en comparación con la frecuencia de referencia proporciona una medida directa de la aceleración.

## 1.3.3 ACELERÓMETROS MEMS

### 1.3.3.1 ACELERÓMETROS MEMS

El **principio de funcionamiento básico** de la mayoría de los acelerómetros MEMS es el mismo, consiste en una masa de prueba unida a un sistema de suspensión.

Cuando se aplica una aceleración al caso, la masa de prueba experimenta una fuerza inercial  $\overline{F}_I = - m\overline{a}$  que hace que la masa de prueba se mueva respecto al caso y, por lo tanto, deforma elásticamente la suspensión. En sistemas de bucle abierto, esta deflexión se puede convertir en un cambio proporcional en el voltaje mediante una serie de principios de transducción para inferir la aceleración.

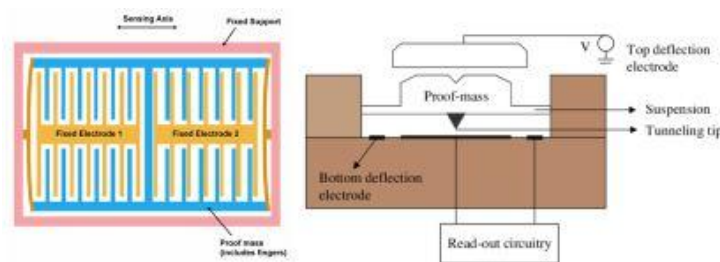
Para mejorar la precisión y la resolución, que funcionan en modo de circuito cerrado, el voltaje de salida se aplica como fuerza de retroalimentación a la masa de prueba del acelerómetro en dirección opuesta a la fuerza de inercia, que devuelve la masa de prueba a la posición nula. Midiendo esta fuerza de retroalimentación, se puede inferir la aceleración.



### 1.3.3.2 PRINCIPIOS DE TRANSDUCCIÓN

**Capacitivo ( $2\mu\text{g} - 10\text{g}$ ):** El desplazamiento de una masa provoca un cambio de capacitancia entre dos placas, una fija y otra unida a la masa en movimiento. El cambio de capacitancia puede deberse a un cambio en el área de superposición o a un cambio en el espacio.

**Túnel cuántico ( $10\text{ng} - 5\text{g}$ ):** Una masa de prueba con una punta afilada se separa de un electrodo inferior. Cuando la punta se acerca lo suficiente al electrodo, se establece una corriente de túnel, utilizada como medida de aceleración.



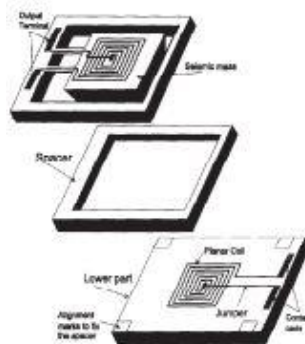
**Piezorresistivo ( $0,001 - 50\text{g}$ ):** La flexión de las vigas de suspensión debido al desplazamiento de la masa de prueba produce tensión en ellas. La deformación se mide como un cambio en la resistencia de un piezoresistor colocado en el extremo de apoyo de la viga.

**Piezoeléctrico ( $\text{g}$  alta):** En este tipo, el sensor elemental es un cristal, que tiene la propiedad de crear una carga cuando se somete a esfuerzos mecánicos. El desplazamiento de la masa de prueba deforma el cristal y, a su vez, emite una señal eléctrica.

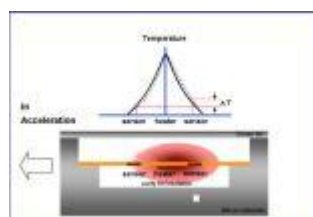
**Óptico ( $\text{ng} - \text{g}$  alta):** Cuando la luz de una fuente LED se proyecta sobre una membrana en movimiento, se detecta la luz reflejada. El cambio de intensidad, longitud de onda, polarización o del patrón de difracción, podría usarse como medida de aceleración.

**Resonante ( $5 - 5000\text{g}$ ):** Este tipo de medición de aceleración hace uso del cambio en la resonancia natural (frecuencia de la estructura con aceleración aplicada).

**Inducción electromagnética ( $0 - 50\text{g}$ ):** Se introduce un campo electromagnético alterno aplicando un voltaje en forma de onda a una bobina fija sobre el sustrato. El voltaje inducido en la bobina de inducción en el cambios de masa de prueba da como resultado la variación de inductancia debido al cambio en la distancia vertical entre dos bobinas.



**Térmica ( $0,5\text{mg} - \text{g}$  alta):** Los acelerómetros MEMS térmicos utilizan gas caliente como masa de prueba. Consta de un sustrato que está sellado con gas con un calentador exactamente en el medio. Dos termopares son distribuidos simétricamente por el calentador. Cuando se aplica la aceleración, el aire caliente alrededor del calentador es empujado hacia un lado con respecto a la carcasa. La diferencia de temperatura en los termopares es proporcional al acelerómetro.



## 1.4 ERRORES DEL SENSOR INERCIAL

### 1.4.1 ERRORES SISTEMÁTICOS

#### 1.4.1.1 ERRORES SISTEMÁTICOS

Los sensores inerciales son propensos a varios errores que se vuelven más complejos a medida que aumenta el precio del sensor. Estos errores se clasifican en dos grandes categorías:

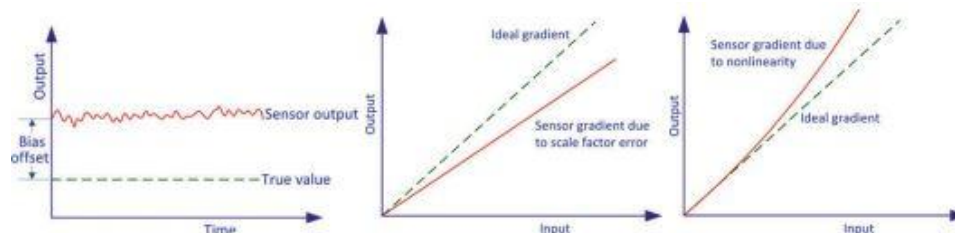
**Errores sistemáticos:** Son deterministas y pueden compensarse mediante calibración de laboratorio.

Todos los sensores inerciales exhiben una variedad de **errores estocásticos** (o aleatorios) de fuentes como ruidos eléctricos y termomecánicos. Generalmente no son deterministas y sólo pueden modelarse estocásticamente.

**Error de sesgo:** Diferencia entre el valor medido promediado y el valor cero verdadero cuando no hay aceleración ni rotación.

Un **error de factor de escala** ocurre cuando la pendiente lineal y la relación entre la entrada y la salida no se utilizan para lo que se había diseñado.

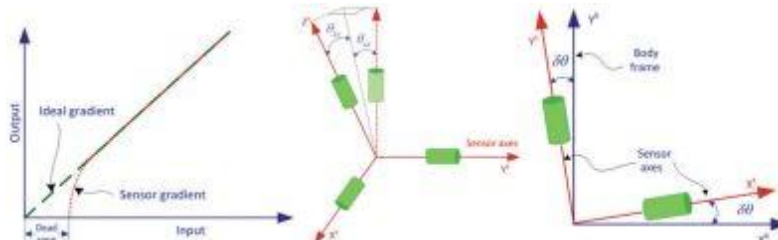
También existe **no linealidad** entre la entrada y la salida.



Hay una **zona muerta** donde no hay salida a pesar de la presencia de una entrada.

Los **errores de falta de ortogonalidad** ocurren cuando cualquiera de los ejes de la tríada de sensores se aparta de la ortogonalidad mutua.

Los **errores de desalineación** se introducen por la desalineación entre los ejes del sensor y la estructura de la carrocería como resultado de imperfecciones en el montaje.



#### 1.4.1.2 CALIBRACIÓN DEL SENSOR PARA ERRORES SISTEMÁTICOS

**Calibración:** Proceso de comparar la salida del instrumento con la información de referencia conocida para determinar el coeficiente que obliga a la salida a coincidir con la información de referencia sobre un rango de valores de salida.

Utilizando el **método de calibración de errores**, se pueden detectar errores deterministas como compensación, factor de escala, no ortogonalidad y desalineación, que se pueden eliminar de manera efectiva mediante compensación.

Esto permite que los parámetros operativos del sensor se determinen con precisión bajo condiciones dadas de funcionamiento, aumentando así la precisión y la fiabilidad del sensor.

El procedimiento de calibración más simple se puede realizar calibrando el ajuste del elipsoide, para determinar el factor de escala y el desplazamiento.

CALIBRATED DATA

UNCALIBRATED DATA

SCALE FACTOR

OFFSET

$v = k \cdot u + o$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{pmatrix}$$



## 1.4.2 ERRORES ALEATORIOS

### 1.4.2.1 ERRORES ALEATORIOS

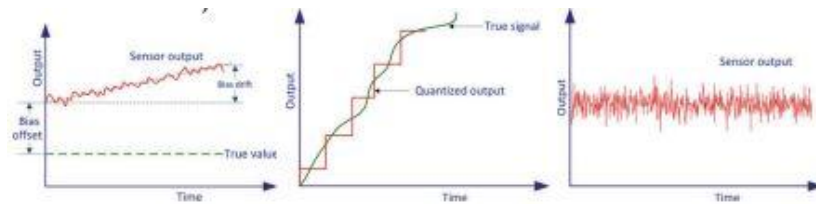
**Deriva de sesgo:** Cambio aleatorio en el sesgo durante un período prolongado de tiempo. El sesgo es determinista pero la deriva del sesgo es estocástica.

La **inestabilidad del factor de escala** lleva a cambios aleatorios en el factor de escala durante un período prolongado de tiempo.

Los **errores de cuantización** están presentes en todos los sistemas digitales que generan señales digitales discretizadas a partir de señales analógicas, y suelen tener un comportamiento aleatorio.

**Ruido blanco:** Ruido aleatorio no correlacionado que está distribuido uniformemente en todas las frecuencias. Cada punto de datos o muestra es independiente de los demás y no existe patrón, tendencia o correlación subyacente que pueda identificarse.

Los **errores aleatorios** no pueden compensarse mediante calibración debido a la derivada de la respuesta con respecto del tiempo en el sistema, que sólo puede caracterizarse por un tipo específico de distribución de análisis probabilístico (Gaussiana) y aproximada mediante modelado estocástico (media y varianza).



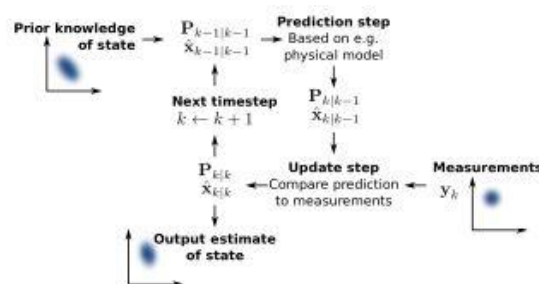
## 1.4.3 FUSIÓN DE SENSORES

### 1.4.3.1 FUSIÓN DE SENSORES

**Fusión de sensores:** Combina datos de diferentes sensores para reducir la incertidumbre y proporcionan información con mayor precisión que el sensor individual que funciona de forma aislada.

El **uso de múltiples sensores** ayuda a mejorar el rendimiento general y aumenta las coberturas temporales y espaciales, además de contribuir a la solidez del sistema.

Un enfoque común es corregir periódicamente la deriva utilizando datos de posición de un sistema de posicionamiento absoluto (GPS). Los datos del INS se combinan con el GPS utilizando técnicas de estimación como el filtro de Kalman.

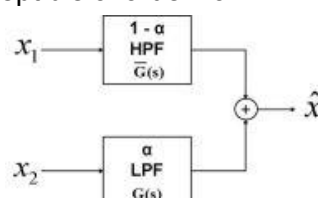


**Filtro complementario:** Técnica de fusión de sensores computacionalmente económica que consiste en un filtro de paso bajo y un filtro de paso alto.

Los giroscopios funcionan bien con movimientos de mayor frecuencia rápidos pero desviados en el tiempo, mientras que los acelerómetros y los magnetómetros funcionan bien con movimientos de baja frecuencia (funcionan bien durante un largo período de tiempo pero son inexactos para movimientos rápidos).

El **filtro complementario** combina mediciones de giroscopio filtradas de paso alto ( $G(s) = \frac{TS}{TS+1}$ ) con mediciones filtradas de paso bajo de acelerómetros o magnetómetros ( $G(s) = \frac{1}{TS+1}$ ).

La **frecuencia de corte** está determinada por la ganancia  $\tau$ . Un  $\tau$  más bajo eleva la frecuencia de corte y confía más en el giroscopio, siendo así más susceptible a la deriva.



## TEMAS 2: FILTRO DE BAYES

### 2.1 FUSIÓN DE DATOS MULTISENSOR Y ROBÓTICA PROBABILÍSTICA

#### 2.1.1 ROBÓTICA PROBABILÍSTICA

Los métodos estándar de fusión de datos multisensor empleados en robótica se basan en métodos probabilísticos.

La robótica probabilística pretende abordar las incertidumbres en las acciones y percepciones del robot. En lugar de depender de una única suposición, los algoritmos probabilísticos representan información mediante distribuciones de probabilidad en todo un espacio de conjeturas.

Al hacerlo, pueden representar ambigüedad y un grado de creencia de forma matemática. Las decisiones de estimación y control se toman de manera sólida teniendo en cuenta la incertidumbre.

Los métodos probabilísticos utilizados en robótica generalmente se basan en la regla de Bayes para combinar la información previa y la información de observación.

Todo esto se ilustra con el ejemplo de localización de robots móviles: El problema de estimar las coordenadas de un robot en relación con un marco de referencia externo.

La creencia  $bel(x)$  de su ubicación está representada por una función de densidad de probabilidad (PDF) sobre el espacio de todas las ubicaciones  $x$ .

#### 2.1.2 LOCALIZACIÓN DE UN ROBOT MÓVIL

Antes de las mediciones del sensor, la creencia  $bel(x)$  tiene una distribución uniforme en todos los lugares.

Después de la primera medición del sensor  $z$ , el robot se da cuenta de que está frente a una puerta.

Para una posición  $x$  dada, la probabilidad de que el sensor detecte una puerta en  $x$  viene dada por  $p(z | x)$ , lo que se traduce en tres distribuciones en forma de campana al frente de tres puertas.

Luego, el robot actualiza la creencia  $bel(x)$  en consecuencia, incluyendo tres hipótesis distintas, las cuales son igualmente plausibles dados los datos del sensor.

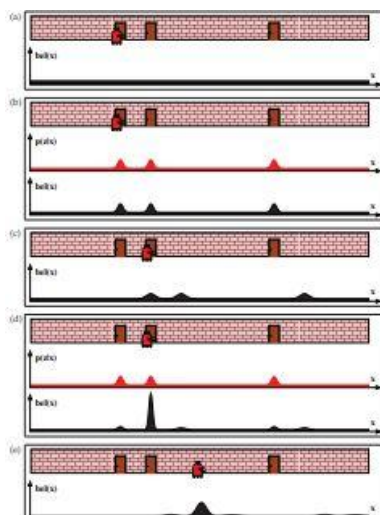
El robot también asigna valores pequeños pero distintos de cero a la probabilidad de encontrarse frente a las paredes, para contar las posibilidades de error mientras evalúa una puerta. La capacidad de mantener hipótesis de baja probabilidad es esencial para lograr solidez.

Después de mudarse, la creencia ha cambiado en la dirección de movimiento. La mayor extensión de  $bel(x)$  refleja la incertidumbre en el movimiento del robot.

El sensor detecta una segunda puerta.

La probabilidad de que el sensor detecte una puerta ( $p(z | x)$ ) es igual que la primera medición del sensor. Sin embargo, para la creencia  $bel(x)$ , basada en la información anterior y en las mediciones actuales del sensor, el algoritmo probabilístico ahora puede ubicar la mayoría de la probabilidad cerca de una de las puertas, haciendo que el robot esté bastante seguro de dónde está.

El algoritmo probabilístico actualiza la creencia  $bel(x)$  recursivamente a medida que el robot se mueve. En cada iteración, hay dos pasos: Predicción/propagación mediante la integración de ecuaciones de movimiento con entradas de control; y la actualización/corrección de los resultados de la predicción con entradas de observación.



## 2.2 REGLA DE BAYES

### 2.2.1 FUNCIÓN DE MASA/DENSIDAD DE PROBABILIDAD (PMF Y PDF)

#### 2.2.1.1 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DISCRETA

$$\sum_x p(x) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Una variable aleatoria discreta  $X$  puede tener un número contable de valores en  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

La función de masa de probabilidad de  $X$  (PMF,  $p(x) = P(X = x_i)$ ) denota la probabilidad de que  $X$  tenga un cierto valor  $x_i$  (una moneda justa da  $p(x) = p(\text{cruz}) = 0,5$ ).

#### 2.2.1.2 DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONTÍNUA

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b p(x) dx, \text{ o } \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

Una variable aleatoria continua  $X$  puede tener un número incontable de valores.

La función de densidad de probabilidad, también conocida como función de distribución de probabilidad (PDF,  $p(x)$ ), es la denominada como "probabilidad por unidad de longitud", donde no se puede especificar la probabilidad de que  $X$  tenga un valor particular  $x$ .

$P(X \in [x, x + dx]) = p(x) dx$ : Probabilidad de que  $X$  caiga dentro de un intervalo infinitesimal  $([x, x + dx])$ .

$P(X \in [a, b]) = \int_a^b p(x) dx$ : Probabilidad de que  $X$  caiga dentro del intervalo  $[a, b]$ .

Momento cero ( $\int_{-\infty}^{+\infty} x^0 p(x) dx = 1$ ): Integración del PDF en todo el espacio continuo (puede haber  $p(x) > 1$  para un PDF continuo pero no para un PMF discreto).

Función Delta de Dirac ( $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$ ): Tiene valor infinito en el origen y cero en otros lugares.

#### 2.2.1.3 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDAD MAXWELLIANA

$$f_M(u) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mu^2/2}{k_B T}\right)$$

Un gas en equilibrio térmico en reposo tiene una velocidad media  $\bar{u} = 0$ .

La temperatura  $T$  (Kelvin) mide la variación aleatoria del movimiento oscilante de los átomos, siendo  $k_B$  la constante de Boltzmann y  $k_B T$  la unidad de energía en Julios.

La posibilidad (fracción) de que las partículas tengan velocidades dentro de un rango  $du$  respecto de  $u$  ( $[u, u + du]$ ) es  $f_M(u)du$ .

Para el momento cero, se puede demostrar que  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^0 f_M(u) du = 1$  usando la integral de Gaussin

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}\right).$$

Si la densidad numérica de este gas es  $n$  ( $m^{-3}$ ), la densidad numérica de partículas teniendo velocidades dentro de un rango  $du$  alrededor de  $u$  ( $[u, u + du]$ ) es  $\int_{-\infty}^{+\infty} n f_M(u) du = n \int_{-\infty}^{+\infty} f_M(u) du = n$ .

La velocidad media cero se puede demostrar mediante el primer momento  $\int_{-\infty}^{+\infty} u^1 f_M(u) du = \bar{u} = 0$ .

La temperatura mide la energía promedio de la partícula, que se puede derivar desde el segundo momento

$$\text{como } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{mu^2}{2} f_M(u) du = k_B T.$$

#### 2.2.1.4 PROBABILIDAD CONJUNTA, CONDICIONADA Y TOTAL

La **probabilidad conjunta** de dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  describe la probabilidad de que ambos eventos  $X=x$  e  $Y=y$  ocurran juntos ( $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$ ).

La **probabilidad condicionada** de  $X=x$  dado  $Y=y$  ( $x$  dado  $y$ ) describe la probabilidad de que el evento  $X=x$  ocurra dada la ocurrencia de el otro evento  $Y=y$  como condición. En otras palabras, es la probabilidad de que  $X=x$  esté condicionado por  $Y=y$  ( $p(x|y) = P(X = x|Y = y)$ ).

La **probabilidad total** viene dada por  $p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x|y)p(y) dy$ .

#### 2.2.2 REGLA DE BAYES

##### 2.2.2.1 REGLA DE BAYES

$$p(x, y) = p(x|y)p(y) = p(y|x)p(x) \Rightarrow p(H|D) = \frac{p(D|H)p(H)}{p(D)}$$

En la teoría de probabilidad bayesiana existen dos eventos: La **hipótesis  $H$**  (posición  $x$ ) y los **datos de observación  $D$**  (medición  $z$  del sensor para detectar una puerta).

Se tiene como objetivo obtener la probabilidad de la hipótesis después de considerar los datos. Esta probabilidad condicional se llama **distribución de probabilidad posterior (probabilidad a posteriori)**, donde  **$p(H|D)$**  es la probabilidad de la posición  $H$  para una determinada medición del sensor  $D$ .

La **distribución de probabilidad previa  $p(H)$**  (probabilidad a priori) resume el conocimiento que tenemos sobre la hipótesis  $H$  antes de considerar los datos  $D$ .

La **función de verosimilitud  $p(D|H)$**  evalúa la probabilidad de los datos observados dado que la hipótesis es verdadera (la probabilidad de la medición del sensor  $D$  para la posición dada  $H$ ).

Normalmente, lo que necesitamos es la **probabilidad posterior  $p(H|D)$** . Sin embargo, es más fácil obtener la **función de verosimilitud  $p(D|H)$** .

La regla de Bayes proporciona una manera conveniente de calcular la **probabilidad posterior  $p(H|D)$**  usando la **función de verosimilitud  $p(D|H)$**  ( $p(H|D) = \frac{p(D|H)p(H)}{p(D)}$ ).

La **probabilidad total  $p(D)$**  describe la probabilidad de realizar una observación. Puede obtenerse integrando (o sumando)  $p(D|H)p(H)$  sobre todas las hipótesis posibles  $H$ .

$$p(D) \text{ (probabilidad total)} \Rightarrow \sum_H p(D, H) \text{ (probabilidad conjunta)} \Rightarrow \sum_H p(D|H)p(H)$$

Para calcular la distribución de **probabilidad posterior  $p(H|D)$**  para cualquier valor de  $H$ , el valor de  $p(D)$  es el mismo. Por esta razón, normalmente se utiliza un **coeficiente de normalización constante ( $\eta$ )** utilizado en la

regla de Bayes, que garantiza que  $\sum_x p(x|y) = 1$  ( $p(H|D) = \eta p(D|H)p(H)$ , donde  $\eta = \frac{1}{p(D)}$ ).

La regla de Bayes se puede utilizar para múltiples condiciones:  $p(x|y, z) = \frac{p(x, y, z)}{p(y, z)} = \frac{p(y|x, z)p(x, z)}{p(y, z)} = \frac{p(y|x, z)p(x|z)}{p(y|z)}$

La regla de Bayes juega un **papel predominante en la robótica probabilística**.

##### 2.2.2.2 INDEPENDENCIA E INDEPENDENCIA CONDICIONAL

**Dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son independientes** si la ocurrencia del evento  $X=x$  no afecta a la probabilidad de ocurrencia del evento  $Y=y$  ( $p(x, y) = p(x)p(y)$ ).

Equivalentemente, **dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son independientes** si conociendo el valor de  $Y$  no cambian las probabilidades de  $X$  ( $p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(y)} = \frac{p(x)p(y)}{p(y)} = p(x)$ ).

**Dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  son condicionalmente independientes** dada una tercera condicionante de la variable aleatoria  $Z$  si y sólo si son independientes en su condición dada la distribución de probabilidad  $Z$  ( $p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z)$ ).

Equivalentemente, la **independencia condicional** implica que una variable  $Y$  no contiene información sobre una variable  $X$  si se conoce el valor de la variable condicionante  $Z$

$$(p(x|z) = \frac{p(x, y|z)}{p(y|z)} = \frac{p(x, y, z)}{p(y, z)} = p(x|y, z), \text{ donde } p(y|z) = p(y|x, z)).$$

Generalmente, para la **independencia condicional y la independencia absoluta**, una condición no implica a la otra ( $p(x, y|z) = p(x|z)p(y|z) \Leftrightarrow p(x, y) = p(x)p(y)$ ).

## 2.3 FILTRO DE BAYES

### 2.3.1 SUPOSICIÓN DE MARKOV

#### 2.3.1.1 ESTADO, MEDIDA Y CONTROL

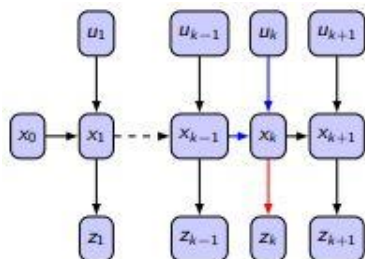
**Estado (x):** Colección de todos los aspectos del robot y su entorno que pueden afectar el futuro (pose, velocidad, velocidad angular, ubicación del obstáculo y punto de referencia).

**Datos de medición (z):** Proporciona información sobre un estado momentáneo del medio ambiente (imágenes de cámaras, escaneos de alcance, GPS, datos del rastreador de estrellas), donde dicha observación del entorno tiende a aumentar el conocimiento del robot.

**Datos de control (u):** Contienen información sobre el cambio de estado en el entorno causado por acciones de control (acción de tirar o empujar, datos de aceleración, un odómetro que mide la evolución de las ruedas del robot, el empuje del propulsor y la reacción del par de las ruedas en una nave espacial). El movimiento tiende a inducir una pérdida de conocimiento debido al ruido inherente en las acciones del robot.

Las **variables específicas** incluidas en  $x$ ,  $u$  y  $z$  dependen del contexto.

El **tiempo** generalmente se define discretamente en el instante  $t_k$ , donde  $k = 0, 1, 2, \dots$



#### 2.3.1.2 RED DE BAYES DINÁMICA

En el instante  $t_k$ , se definen las siguientes cantidades:  $x_k$  (vector de estado que se estimará en  $t_k$ ),

$x_{0:k} = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$  (historia de los estados),  $u_k$  (entradas de control aplicadas en el momento  $t_{k-1}$  para cambiar el estado de  $t_{k-1}$  a  $t_k$ ),  $u_{1:k} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  (historial de entradas de control),  $z_k$  (observaciones realizadas en  $t_k$  para estimar  $x_k$ ).

La evolución de estados y medidas se rige por distribuciones probabilísticas.

Dado que el surgimiento del estado  $x_t$  puede estar condicionado a todos los estados, mediciones y controles pasados, la **evolución del estado** se caracteriza por  $p(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1}, u_{1:k})$ .

La **evolución de la medición**  $z_k$  se caracteriza por  $p(z_k | x_{0:k}, z_{1:k-1}, u_{1:k})$ .

#### 2.3.1.3 SUPOSICIÓN DE MARKOV

La **suposición de Markov** postula que los datos pasados y futuros son independientes si uno de ellos conoce el estado actual  $x_k$ .

Suponiendo que el **estado**  $x_{k-1}$  es un resumen suficiente de todos los estados, controles y mediciones anteriores, la **probabilidad de transición de estados** se caracteriza por la evolución del estado como  $p(x_k | x_{0:k-1}, z_{1:k-1}, u_{1:k}) \approx p(x_k | x_{k-1}, u_k)$ . En otras palabras, dadas las variables condicionantes  $\{x_{k-1}, u_k\}$ , existe **independencia condicional** entre  $x_k$  y  $\{x_{0:k-2}, z_{1:k-1}, u_{1:k-1}\}$ .

Suponiendo que  $x_k$  es un resumen suficiente de todos los estados, controles y mediciones anteriores, la **probabilidad de medición** caracteriza la evolución de la medición como  $p(z_k | x_{0:k}, z_{1:k-1}, u_{1:k}) \approx p(z_k | x_k)$ . En otras palabras, dada la variable condicionante  $\{x_k\}$ , hay **independencia condicional** entre  $z_k$  y

$\{x_{0:k-1}, z_{1:k-1}, u_{1:k}\}$ .

## 2.3.2 FILTRO DE BAYES

### 2.3.2.1 FILTRADO PROBABILÍSTICO

El **filtrado** se ocupa del proceso secuencial de mantener un modelo probabilístico para un estado que evoluciona con el tiempo y es observado periódicamente por un sensor (constituye la base de muchos problemas de seguimiento y navegación).

El **problema general del filtrado** se puede formular en forma bayesiana.

El robot tiene una creencia interna sobre su verdadero estado. Las **creencias** están representadas por probabilidades condicionales de estado ( $x$ ) condicionadas a los datos disponibles ( $z$  y  $u$ ).

**Predicción  $\overline{bel}(x_k)$** : La distribución de probabilidad del estado  $x_k$  en el tiempo  $t_k$ , justo después de ejecutar el control  $u_k$  y antes de incorporar la medida  $z_k$ , acondicionado en todas las mediciones pasadas  $z_{1:k-1}$  y todos los controles pasados  $u_{1:k}$  ( $\overline{bel}(x_k) = p(x_k | z_{1:k-1}, u_{1:k})$ ).

**Creencia  $bel(x_k)$** : La distribución de probabilidad de el estado  $x_k$  en el momento  $t_k$ , después de incorporar la medida  $z_k$ , condicionado a todas las mediciones anteriores  $z_{1:k}$  y a todos los controles anteriores  $u_{1:k}$  ( $bel(x_k) = p(x_k | z_{1:k}, u_{1:k})$ ).

### 2.3.2.2 ENTRADAS Y SALIDAS

```
Recursive_Bayes_filter(  $bel(x_{k-1}), u_k, z_k$  )  
1: for all possible values of state  $x_k$  do  
2:   PREDICTION:  $\overline{bel}(x_k) = \int p(x_k | u_k, x_{k-1}) bel(x_{k-1}) dx_{k-1}$   
3:   UPDATE:  $bel(x_k) = \eta p(z_k | x_k) \overline{bel}(x_k)$   
4: end for  
5: return  $bel(x_k)$ 
```

El **pseudoalgoritmo anterior** representa una iteración del filtro de Bayes recursivo. En cada iteración, la creencia actual  $bel(x_k)$  se calcula a partir de la creencia anterior  $bel(x_{k-1})$ .

**Entradas:**  $bel(x_{k-1})$  (creencia en  $t_{k-1}$ ),  $u_k$  (control en  $t_k$ ),  $z_k$  (medida en  $t_k$ ).

**Salidas (retorno):**  $bel(x_k)$  (creencia actualizada en  $t_k$ ).

### 2.3.2.3 PASO DE PREDICCIÓN/PROPAGACIÓN

**Paso de predicción/propagación:** La **predicción  $\overline{bel}(x_k)$**  viene dada por la integración de la multiplicación de los estados de transición de probabilidad  $p(x_k | u_k, x_{k-1})$  y creencia en  $t_{k-1}$  y  $bel(x_{k-1})$  sobre todos los estados posibles en  $t_{k-1}$  y  $x_{k-1}$ .

**Predicción (definición):**  $\overline{bel}(x_k) = p(x_k | z_{1:k-1}, u_{1:k})$

**Probabilidad total:**  $\overline{bel}(x_k) = \int p(x_k, x_{k-1} | z_{1:k-1}, u_{1:k}) dx_{k-1}$

**Probabilidad condicionada:**  $\overline{bel}(x_k) = \int p(x_k | x_{k-1}, z_{1:k-1}, u_{1:k}) p(x_{k-1} | z_{1:k-1}, u_{1:k}) dx_{k-1}$

**Suposición de Markov:**  $\overline{bel}(x_k) = \int p(x_k | x_{k-1}, u_k) p(x_{k-1} | z_{1:k-1}, u_{1:k}) dx_{k-1}$

**Independencia condicional:**  $\overline{bel}(x_k) = \int p(x_k | x_{k-1}, u_k) p(x_{k-1} | z_{1:k-1}, u_{1:k-1}) dx_{k-1}$

**Creencia (definición):**  $\overline{bel}(x_k) = \int p(x_k | u_k, x_{k-1}) bel(x_{k-1}) dx_{k-1}$



### 2.3.2.4 PASO DE ACTUALIZACIÓN/CORRECCIÓN

**Paso de actualización/corrección:** La creencia  $bel(x_k)$  viene dada por la multiplicación del normalizador  $\eta$ , la probabilidad de medición  $p(z_k | x_k)$  y la predicción  $\overline{bel}(x_k)$ .

**Creencia (definición):**  $bel(x_k) = p(x_k | z_{1:k}, u_{1:k})$

**Regla de Bayes:**  $bel(x_k) = \frac{p(z_k | x_k, z_{1:k-1}, u_{1:k}) p(x_k | z_{1:k-1}, u_{1:k})}{p(x_k | z_{1:k-1}, u_{1:k})}$

**Normalizador:**  $bel(x_k) = \eta p(z_k | x_k, z_{1:k-1}, u_{1:k}) p(x_k | z_{1:k-1}, u_{1:k})$

**Suposición de Markov:**  $bel(x_k) = \eta p(z_k | x_k) p(x_k | z_{1:k-1}, u_{1:k})$

**Predicción (definición):**  $bel(x_k) = \eta p(z_k | x_k) \overline{bel}(x_k)$

Donde  $\eta = \frac{1}{p(z_k | z_{1:k-1}, u_{1:k})} = \frac{1}{\int p(z_k | x_k, z_{1:k-1}, u_{1:k}) p(x_k | z_{1:k-1}, u_{1:k}) dx_k} = \frac{1}{\int p(z_k | x_k) \overline{bel}(x_k) dx_k}$

## EJERCICIOS TEMA 2: FILTRO DE BAYES

### EJERCICIO 1

P	X = 0	X = 1
Y = 0	30	20
Y = 1	10	40

a) Calcula las probabilidades conjuntas.

$$P(X = 0, Y = 0) = 30\%$$

$$P(X = 0, Y = 1) = 10\%$$

$$P(X = 1, Y = 0) = 20\%$$

$$P(X = 1, Y = 1) = 40\%$$

b) Calcula las probabilidades condicionadas.

$$P(X = 0 | Y = 0) = \frac{P(X=0, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{30}{30+20} = 60\%$$

$$P(X = 0 | Y = 1) = \frac{P(X=0, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{10}{10+40} = 20\%$$

$$P(X = 1 | Y = 0) = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{20}{30+20} = 40\%$$

$$P(X = 1 | Y = 1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{40}{10+40} = 80\%$$

c) Calcula la probabilidad total.

$$P(X = 0) = \frac{P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1)}{100} = \frac{30+10}{100} = 40\%$$

$$P(X = 1) = \frac{P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1)}{100} = \frac{20+40}{100} = 60\%$$

$$P(Y = 0) = \frac{P(Y=0, X=0) + P(Y=0, X=1)}{100} = \frac{30+20}{100} = 50\%$$

$$P(Y = 1) = \frac{P(Y=1, X=0) + P(Y=1, X=1)}{100} = \frac{10+40}{100} = 50\%$$



## EJERCICIO 2

$p(x, y)$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$p(y)$
$y_1$	1/8	1/16	1/32	1/32	1/4
$y_2$	1/16	1/8	1/32	1/32	1/4
$y_3$	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
$y_4$	1/4	0	0	0	1/4
$p(x)$	1/2	1/4	1/8	1/8	$\Sigma = 1$

a) Hallar la probabilidad conjunta  $p(x_2, y_2)$ .

$$P(x = x_2, y = y_2) = 1/8$$

b) Hallar la probabilidad total  $p(y_2)$ .

$$\begin{aligned}
 P(y = y_2) &= \sum_{x_i} p(y_2, x_i) = P(y = y_2, x = x_1) + P(y = y_2, x = x_2) + P(y = y_2, x = x_3) + P(y = y_2, x = x_4) = \\
 &= 1/16 + 1/8 + 1/32 + 1/32 = 1/4
 \end{aligned}$$

c) Hallar la probabilidad condicional  $p(x_2|y_2)$ .

$$P(x = x_2 | y = y_2) = \frac{P(x=x_2, y=y_2)}{P(y=y_2)} = \frac{1/8}{1/4} = 1/2$$

d) Demostrar que  $\sum_{x_i} p(x_i) = \sum_{y_i} p(y_i)$ .

Sí, ambos son 1 (definición de la función de masa de probabilidad).

e) Hallar  $\sum_{x_i} p(x_i | y_2)$ .

$$P(x = x_1 | y = y_2) = \frac{P(x=x_1, y=y_2)}{P(y=y_2)} = \frac{1/16}{1/4} = 1/4$$

$$P(x = x_2 | y = y_2) = \frac{P(x=x_2, y=y_2)}{P(y=y_2)} = \frac{1/8}{1/4} = 1/2$$

$$P(x = x_3 | y = y_2) = \frac{P(x=x_3, y=y_2)}{P(y=y_2)} = \frac{1/32}{1/4} = 1/8$$

$$P(x = x_4 | y = y_2) = \frac{P(x=x_4, y=y_2)}{P(y=y_2)} = \frac{1/32}{1/4} = 1/8$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{x_i} p(x_i | y_2) &= P(x = x_1 | y = y_2) + P(x = x_2 | y = y_2) + P(x = x_3 | y = y_2) + P(x = x_4 | y = y_2) = \\
 &= 1/4 + 1/2 + 1/8 + 1/8 = 1
 \end{aligned}$$

### EJERCICIO 3

Usamos el ejemplo de un robot para estimar el estado de una puerta para ilustrar el algoritmo del filtro de Bayes.

**Características:** Estado  $x_k = \{open, closed\}$ , medición  $z_k = \{s\_open, s\_closed\}$  y control

$u_k = \{push, nothing\}$ .

Suponemos que el robot tiene las siguientes **creencias iniciales**:  $bel(x_0 = open)$  y  $bel(x_0 = closed) = 0,5$ .

El robot no conoce el estado de la puerta, por lo que se asigna la misma probabilidad para los dos posibles valores del estado de la puerta.

Se supone que el ruido del sensor se caracteriza por las siguientes **probabilidades de medición**:

$$P(z_k = s\_open | x_k = open) = 0,6$$

$$P(z_k = s\_closed | x_k = open) = 0,4$$

$$P(z_k = s\_open | x_k = closed) = 0,2$$

$$P(z_k = s\_closed | x_k = closed) = 0,8$$

El sensor es relativamente fiable a la hora de detectar una puerta cerrada (probabilidad de error 0,2), pero no una puerta abierta (probabilidad de error 0,4).

Se suponen las siguientes probabilidades de transición de estado para dos tipos de controles.

El robot utiliza su manipulador para empujar la puerta y abrirla:

$$P(x_k = open | u_k = push, x_{k-1} = open) = 1$$

$$P(x_k = closed | u_k = push, x_{k-1} = open) = 0$$

$$P(x_k = open | u_k = push, x_{k-1} = closed) = 0,8$$

$$P(x_k = closed | u_k = push, x_{k-1} = closed) = 0,2$$

Si la puerta está cerrada, el robot tiene un 80% de posibilidades de éxito para abrirla. Si la puerta ya está abierta, permanece abierta. Si el robot no hace nada:

$$P(x_k = open | u_k = nothing, x_{k-1} = open) = 1$$

$$P(x_k = closed | u_k = nothing, x_{k-1} = open) = 0$$

$$P(x_k = open | u_k = nothing, x_{k-1} = closed) = 0$$

$$P(x_k = closed | u_k = nothing, x_{k-1} = closed) = 1$$

La puerta sigue en su estado original.

**Recursive\_Bayes\_filter(  $bel(x_{k-1}), u_k, z_k$  )**

```
1: for all possible values of state  $x_k$  do
2:   PREDICTION:  $\overline{bel}(x_k) = \int p(x_k | u_k, x_{k-1}) bel(x_{k-1}) dx_{k-1}$ 
3:   UPDATE:  $bel(x_k) = \eta p(z_k | x_k) \overline{bel}(x_k)$ 
4: end for
5: return  $bel(x_k)$ 
```

En  $k = 1$ , el robot no hace nada ( $u_1 = nothing$ ) y detecta una puerta abierta ( $z_1 = s\_open$ ).

\* **Predicción:**  $\overline{bel}(x_1) = \sum_{x_0} p(x_1 | u_1, x_0) bel(x_0)$

$$\overline{bel}(x_1 = open) = P(x_1 = open | u_1 = nothing, x_0 = open) * bel(x_0 = open)$$

$$+ P(x_1 = open | u_1 = nothing, x_0 = closed) * bel(x_0 = closed) = 1 * 0,5 + 0 * 0,5 = 0,5$$

$$\overline{bel}(x_1 = closed) = P(x_1 = closed | u_1 = nothing, x_0 = open) * bel(x_0 = open)$$

$$+ P(x_1 = closed | u_1 = nothing, x_0 = closed) * bel(x_0 = closed) = 1 * 0,5 + 0 * 0,5 = 0,5$$

Como el robot no hace nada y estamos seguros de las consecuencias, la predicción es la misma que en la creencia anterior ( $\overline{bel}(x_1) = bel(x_0)$ ).

\* **Actualización:**  $bel(x_1) = \eta P(z_1 = s\_open | x_1) \overline{bel}(x_1)$ .

$$P(z_1 = s\_open | x_1 = open) * \overline{bel}(x_1 = open) = 0,6 * 0,5 = 0,3$$

$$P(z_1 = s\_open | x_1 = closed) * \overline{bel}(x_1 = closed) = 0,2 * 0,5 = 0,1$$

$$\text{Donde } \eta = \frac{1}{0,3 + 0,1} = 2,5$$

$$bel(x_1 = open) = \eta P(z_1 = s\_open | x_1 = open) * \overline{bel}(x_1 = open) = 0,75$$

$$bel(x_1 = closed) = P(z_1 = s\_open | x_1 = closed) * \overline{bel}(x_1 = closed) = 0,25$$

El objetivo de la normalización es el de obtener que:  $bel(x_1 = open) + bel(x_1 = closed) = 1$ .

En **k = 2**, el robot empuja la puerta ( $u_2 = push$ ) y detecta una puerta abierta ( $z_2 = s\_open$ ).

\* **Predicción:**

$$\overline{bel}(x_2 = open) = 1 \times 0,75 + 0,8 \times 0,25 = 0,95$$

$$\overline{bel}(x_2 = closed) = 0 \times 0,75 + 0,2 \times 0,25 = 0,05$$

\* **Normalizador:**

$$P(z_2 = s\_open | x_2 = open) * \overline{bel}(x_1 = open) = 0,6 * 0,95 = 0,57$$

$$P(z_2 = s\_open | x_2 = closed) * \overline{bel}(x_1 = closed) = 0,2 * 0,05 = 0,01$$

$$\text{Donde } \eta = \frac{1}{0,57 + 0,01} \approx 1,724$$

\* **Actualización:**

$$bel(x_2 = open) \approx 0,983$$

$$bel(x_2 = closed) \approx 0,017$$

## TEMA 3: FILTRO DE KALMAN

### 3.1 ESPERANZA Y MOMENTO

#### 3.1.1 ESPERANZA

La **esperanza matemática de la función  $g(X)$  de la variable aleatoria  $X$**  es la integral de la PDF  $p(x)$  multiplicada por  $g(x)$ , lo que generalmente viene a ser, la media de esta función.

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x) dx, \text{ donde } E \text{ es el operador de esperanzas}$$

El **k-ésimo momento de  $X$**  es la esperanza de la k-ésima potencia de  $x$  ( $g(x) = x^k$ ).

$$\mu_k = E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x) dx$$

El **k-ésimo momento central de  $X$  respecto de la media  $\mu$**  es la esperanza de la k-ésima potencia de  $(x - \mu)$ ,  $g(x) = (x - \mu)^2$ .

$$v_k = E[(X - \mu)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k p(x) dx, \mu = \mu_1 = E[X^1] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx$$

Para una **función lineal de una variable aleatoria**, las esperanzas de esta función y la variable aleatoria también son **lineales**.

$$E[aX + b] = aE[X] + b \Leftarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b)p(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx + b$$

#### 3.1.2 MOMENTO

**Momento cero** (masa, densidad de partículas, ecuación de continuidad):  $\mu_0 = E[X^0] = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$

**Primer momento** (centro de masa, flujo de densidad y ecuación de momento):

$$\mu = \mu_1 = E[X^1] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx$$

**Primer momento central:**  $v_1 = E[X^1 - \mu] = E[X^1] - \mu = 0$

**Segundo momento** (tensor de inercia, densidad de flujo de energía o momento y ecuación de energía):

$$\mu_2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$$

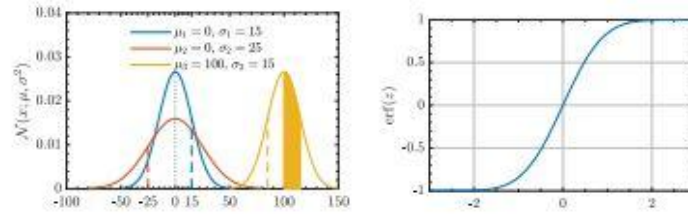
**Segundo momento central** (varianza  $\text{Var}[X]$ , momento de inercia respecto de los ejes que pasan CM y

temperatura):  $\text{Var}[X] = v_2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx$

Un resultado útil que relaciona el **segundo momento  $\mu_2$ , la media  $\mu$  y la varianza  $v_2$** :

$$\text{Var}[X] = E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2, v_2 = \mu_2 - \mu^2$$

### 3.2 DISTRIBUCIÓN NORMAL



La PDF de una distribución normal para una variable aleatoria escalar está dada por la función gaussiana:

$$N(x; \mu_1 = \mu, v_2 = \sigma^2): p(x) = N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

donde  $\mu$  es la media,  $\sigma = \sqrt{v_2}$  es la desviación típica que mide la propagación alrededor de  $X = \mu$ , y un  $\sigma$  mayor indica que los valores están dispersos en una gama más amplia.

Ejemplo (distribución de velocidad maxwelliana en 1 dimensión):

$$f_M(u) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mu^2/2}{k_B T}\right) = N(u; \mu_1 = \mu = 0, v_2 = \sigma^2 = k_B T/m)$$

La integral sobre todo el espacio variable es uno:

$$p(X \in [-\infty, +\infty]) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(x; \mu, \sigma^2) dx \Rightarrow t = \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \text{erf}(\infty) = 1$$

El área sombreada en amarillo es la probabilidad de que  $X$  caiga dentro del intervalo  $[\mu, \mu + \sigma]$ :

$$p(X \in [\mu, \mu + \sigma]) = \int_{\mu}^{\mu+\sigma} N(x; \mu, \sigma^2) dx \Rightarrow t = \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{2}} \exp(-t^2) dt = \frac{\text{erf}(1/\sqrt{2})}{2} = 0,34$$

, donde 0,34 es una constante independiente de  $\mu$  y  $\sigma$ .

$$\mu_1 = \mu \text{ (verificación): } \mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] d(x - \mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] d(x - \mu) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{(x-\mu)}{\sqrt{2}\sigma} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp(-t^2) dt + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \mu$$

### 3.3 COVARIANZA

#### 3.3.1 DISTRIBUCIÓN BIVARIADA

Considerando simultáneamente dos o más variables aleatorias que generalmente no son independientes, la probabilidad de las mismas se describe mediante PDFs conjuntas.

Primero introducimos distribuciones bivariadas de dos variables aleatorias. Los resultados pueden extenderse fácilmente a distribuciones multivariadas con más de dos variables aleatorias.

Para dos variables aleatorias continuas  $X$  e  $Y$ :

La probabilidad de que  $X$  esté en el rango  $[x, x + dx]$  e  $Y$  esté en el rango  $[y, y + dy]$  es:

$$p(X \in [x, x + dx], Y \in [y, y + dy]) = p(x, y) dx dy$$

La probabilidad de que  $X$  esté en el rango  $[a_1, a_2]$  e  $Y$  esté en el rango  $[b_1, b_2]$  es:

$$p(X \in [a_1, a_2], Y \in [b_1, b_2]) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} p(x, y) dx dy$$

La integral de la PDF sobre todo el espacio continuo es uno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dx dy = 1$$

#### 3.3.2 ESPERANZA DE LA DISTRIBUCIÓN BIVARIABLE

La expectativa de cualquier función  $g(X, Y)$  de las variables aleatorias  $X$  e  $Y$  es:

$$E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) p(x, y) dx dy$$

Media de  $X$ :  $\mu_x = \mu_1 = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right] dx$

Varianza de  $X$ :  $Var[X] = v_2 = E[(X - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y) dy \right] dx$

La covarianza de dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  viene dada por una especie de segundo momento central (usa  $(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$  en lugar de  $(X - \mu_x)^2$ ):

$$Cov[X, Y] = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) p(x, y) dx dy$$

Un resultado útil que relaciona el **segundo momento, la media y la covarianza**:

$$Cov[X, Y] = E[XY - \mu_x Y - \mu_y X + \mu_x \mu_y] = E[XY] - \mu_x \mu_y$$

#### 3.3.3 COVARIANZA DE LA DISTRIBUCIÓN BIVARIABLE

La covarianza de dos variables aleatorias independientes es cero:

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y p(y) dy = \mu_x \mu_y \Rightarrow Cov[X, Y] = E[XY] - \mu_x \mu_y = 0$$

La covarianza cero no implica independencia:  $Cov[X, Y] = 0 \nRightarrow p(x, y) = p(x)p(y)$

Por ejemplo, si una PDF es simétrica con respecto a  $X = \mu_x$ , existe  $p(\mu_x - t, y) = p(\mu_x + t, y)$  para cualquier  $t$  (distancia entre  $x$  y  $\mu_x$ ):

$$\begin{aligned} Cov[X, Y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) p(x, y) dx dy \Rightarrow t = x - \mu_x \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu_y) p(\mu_x + t, y) dy \right] dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow g(t) = t f(t) = - [t f(-t)] = - g(-t) \Rightarrow 0 \end{aligned}$$

### 3.3.4 COVARIANZA, SIMETRÍA E INDEPENDENCIA

Un ejemplo de  $Cov[X, Y] = 0$  para dos variables aleatorias dependientes:

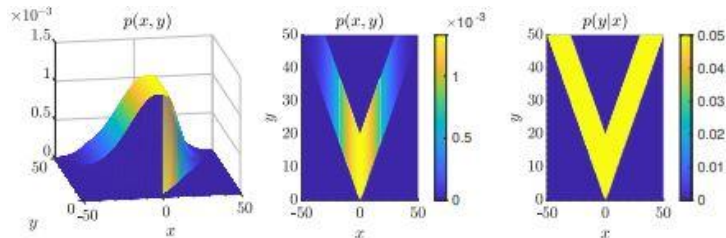
$$p(x, y) = \begin{cases} 0.05\mathcal{N}(x; \mu_x = 0, \sigma_x^2 = 15^2), & |x| \leq y \leq |x| + 20 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \mathcal{N}(x; \mu_x = 0, \sigma_x^2 = 15^2)$$

$$p(y|x) = \begin{cases} p(x, y)/p(x) = 0.05, & |x| \leq y \leq |x| + 20 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Como  $p(y|x)$  depende de  $x$ , las dos variables aleatorias  $x$  e  $y$  son dependientes.

Puedes encontrar algún tipo de analogía con el producto de inercia  $I_{xy} = \int xy \rho dV$ , siendo cero si hay simetría de distribución de masa alrededor de uno de los planos.



### 3.3.5 COVARIANZA Y CORRELACIÓN

$$p(x, y) = \begin{cases} 0.05\mathcal{N}(x; \mu_x = 0, \sigma_x^2 = 15^2), & |x| \leq y \leq |x| + 20 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

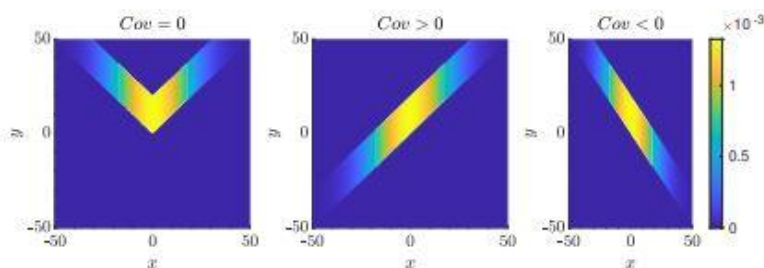
$$\Rightarrow Cov[X, Y] = 0, \text{ uncorrelated}$$

$$p(x, y) = \begin{cases} 0.05\mathcal{N}(x; \mu_x = 0, \sigma_x^2 = 15^2), & x \leq y \leq x + 20 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Cov[X, Y] = \sigma_x^2 > 0, \text{ positively correlated (correlación positiva)}$$

$$p(x, y) = \begin{cases} 0.05\mathcal{N}(x; \mu_x = 0, \sigma_x^2 = 15^2), & -x \leq y \leq -x + 20 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Cov[X, Y] = -\sigma_x^2 < 0, \text{ negatively correlated (correlación negativa)}$$



### 3.3.6 COVARIANZA Y VARIABILIDAD CONJUNTA

**Covarianza:** Medida de la variabilidad conjunta de dos variables aleatorias.

**Covarianza positiva:** Las dos variables tienden a aumentar o disminuir juntas.

**Covarianza negativa:** Las dos variables tienden a moverse en direcciones opuestas.

**Covarianza cero:** Las dos variables no están relacionadas.

### 3.3.7 DISTRIBUCIÓN MULTIVARIABLE

Para varias variables aleatorias  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , la PDF viene dada por:

$$p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \text{ siendo } x \in R^{n \times 1} \text{ un vector de columna multidimensional}$$

La integral de la PDF sobre todo el espacio continuo es uno:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

La esperanza de cualquier función escalar  $g(x)$  es un escalar:  $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)d^n x$

La media es un vector columna  $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$  con la  $i$ -ésima entrada dada por:  $\mu_i = E[X_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i p(x) d^n x$

En la matriz de covarianza  $\Sigma \in R^{n \times n}$ , la entrada diagonal  $ii$ -ésima es la varianza de  $X_i$  y la  $ij$ -ésima entrada fuera de la diagonal es la covarianza de  $X_i$  y  $X_j$  (matriz simétrica):

$$\Sigma_{ii} = \text{Var}[X_i] = E[(X_i - \mu_i)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_i)^2 p(x) d^n x$$

$$\Sigma_{ij} = \text{Cov}[X_i, X_j] = E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) p(x) d^n x$$

$$\Sigma = E[(x - \mu)(x - \mu)^T] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)(x - \mu)^T p(x) d^n x$$

### 3.3.8 DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIABLE

Las distribuciones normales sobre vectores multidimensionales se denominan distribuciones normales multivariadas:

$$N(x; \mu, \Sigma) = p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\Sigma^{-1})_{ij} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)\right]$$

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1})_{11}(x_1 - \mu_1)^2 - \frac{1}{2}(\Sigma^{-1})_{22}(x_2 - \mu_2)^2 - (\Sigma^{-1})_{12}(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\right]$$



### 3.4 FUNCIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

#### 3.4.1 FUNCIÓN ESCALAR

Conociendo  $p(x)$ , estamos interesados en la PDF de una variable aleatoria relacionada  $Y = g(X)$ .

Para  $y = g(x)$ , ¿hay  $p(y) = p(x)$ ? No.

Para una **distribución continua**, no podemos especificar la probabilidad de que  $X$  tenga un valor particular  $x$ .

Sólo podemos especificar la probabilidad de que  $X$  caiga dentro del intervalo infinitesimal  $[x, x + dx]$ .

Si sólo hay una  $x$  que corresponde a cada  $y = g(X)$ , la probabilidad de que  $Y$  se encuentre en el rango  $[y, y + dy]$  es la misma que el de  $X$  que se encuentre dentro del rango  $[x, x + dx]$  ( $p(y)dy = p(x)dx$ ).

Si  $X$  tiene distribución normal  $N\{x; \mu_x, \sigma_x^2\}$ , su función lineal  $Y = ax + b$  también tiene una distribución normal

$N\{y; \mu_y, \sigma_y^2\}$ , con la media y la varianza dadas por:

$$\mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)p(x)dx = a\mu_x + b$$

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)^2 p(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} [a(x - \mu_x)]^2 p(x)dx = a^2 + \sigma_x^2$$

#### 3.4.2 FUNCIÓN MULTIVARIABLE

En el caso de múltiples variables aleatorias en las que  $X$  e  $Y$  son  $m$ -dimensionales en cuanto a vectores columna, la relación  $Y = g(X)$  incluye  $n$  funciones como:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ g_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \vdots \\ g_m(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{bmatrix}$$

Si sólo hay un conjunto de  $x$  que corresponde a cada conjunto de  $y = g(X)$ , la probabilidad de que  $Y$  se encuentre en el rango  $[y, y + dy]$  es la misma que  $X$  que se encuentra dentro del rango

$[x, x + dx]$  ( $p(y)d^m y = p(x)d^n x$ ).

Si  $X$  tiene distribución normal  $N\{x; \mu_x, \Sigma_x\}$ , su función lineal  $Y = AX + B$  ( $A \in R^{m \times n}$  y  $B \in R^m$ ) también tiene una distribución normal  $N\{y; \mu_y, \Sigma_y\}$ , con la media y la matriz de covarianza dada por:

$$\mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y) d^m y = \int_{-\infty}^{\infty} (Ax + B)p(x)d^n x = A\mu_x + B$$

$$\Sigma_y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu_y)(y - \mu_y)^T p(y) d^m y = \int_{-\infty}^{\infty} A(x - \mu_x)(x - \mu_x)^T A^T p(x)d^n x = A\Sigma_x A^T$$

## 3.5 FILTRO DE KALMAN

### 3.5.1 MODELO DE OBSERVACIÓN Y ESTADO

Probablemente la técnica mejor estudiada para implementar filtros de Bayes sea la del **Filtro de Kalman (KF)**. El **KF** implementa el cálculo de creencias para un espacio de estados continuo. No es aplicable a espacios de estados discretos o híbridos.

El **KF** supone una dinámica de sistema lineal. El punto de partida del algoritmo consiste en definir las versiones en tiempo discreto para los siguientes modelos lineales.

**Ecuación de estado:**  $x_k (nx1) = A_k (nx1)x_{k-1} (nxn) + B_k (nxm)u_k (mx1) + \epsilon_k (nx1)$ , donde  $A_k$  es la matriz de transición de estados,  $B_k$  es la matriz de control, y  $\epsilon_k$  es el ruido del proceso, un vector aleatorio gaussiano que modela la incertidumbre introducida en la transición de estado.

**Modelo de observación/medición:**  $z_k (lx1) = C_k (lxn)x_k (nx1) + \delta_k (lx1)$ , donde  $C_k$  es la matriz de medidas y  $\delta_k$  es el ruido de observación/medición, un vector aleatorio gaussiano que modela la incertidumbre introducida en la medida.

### 3.5.2 HIPÓTESIS

En el tiempo  $t_k$ , el filtro de Kalman representa la **creencia posterior  $bel(x_k)$**  por momentos de parametrización, con la distribución normal caracterizada por la **media  $\mu_k$**  y la **matriz de covarianza  $\Sigma_k$** .

Además de los supuestos de Markov, la **creencia  $bel(x_k)$**  es siempre gaussiana si se cumplen las siguientes tres hipótesis:

1. La creencia inicial  $bel(x_0)$  debe tener una distribución normal de media  $\mu_0$  y covarianza matriz  $\Sigma_0$ .

$$bel(x_0) = p(x_0) = N(x_0; \mu_0, \Sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma_0)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_0 - \mu_0)^T \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0)\right]$$

2. La probabilidad de transición de estado  $p(x_k | u_k, x_{k-1})$  debe ser lineal en sus argumentos, con ruido de proceso gaussiano añadido  $\epsilon_k \in R^{nx1}$  de media 0 y matriz de covarianza  $R_k \in R^{nxn}$ .

3. La probabilidad de medición  $p(z_k | x_k)$  debe ser lineal en sus argumentos, con ruido de medición gaussiano  $\delta_k \in R^{lx1}$  de media 0 y matriz de covarianza  $Q_k \in R^{lxl}$ .

#### 3.5.2.1 PROBABILIDAD DE TRANSICIÓN DE ESTADOS

La **probabilidad de transición de estados  $p(x_k | u_k, x_{k-1})$**  debe ser lineal en sus argumentos, con el **ruido del proceso gaussiano  $\epsilon_k \in R^{nx1}$**  de **media 0** y **matriz de covarianza  $R_k \in R^{nxn}$** .

Con  $p(\epsilon_k) = N(\epsilon_k; 0, R_k)$ ,  $x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_k + \epsilon_k \Rightarrow p(x_k | u_k, x_{k-1}) = N(x_k; \mu, \Sigma)$ ,  $\mu = A_k x_{k-1} + B_k u_k$ ,  $\Sigma = R_k$ :

$$N(x_k; \mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi R_k)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_k - A_k x_{k-1} - B_k u_k)^T R_k^{-1} (x_k - A_k x_{k-1} - B_k u_k)\right]$$

#### 3.5.2.2 PROBABILIDAD DE MEDICIÓN

La **probabilidad de medición  $p(z_k | x_k)$**  debe ser lineal en sus argumentos, con el **ruido de medición gaussiano  $\delta_k \in R^{lx1}$**  de **media 0** y **matriz de covarianza  $Q_k \in R^{lxl}$** .

Con  $p(\delta_k) = N(\delta_k; 0, Q_k)$ ,  $z_k = C_k x_k + \delta_k \Rightarrow p(z_k | x_k) = N(z_k; \mu, \Sigma)$ ,  $\mu = C_k x_k$ ,  $\Sigma = Q_k$ :

$$N(z_k; \mu, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi Q_k)}} \exp\left[-\frac{1}{2}(z_k - C_k x_k)^T Q_k^{-1} (z_k - C_k x_k)\right]$$

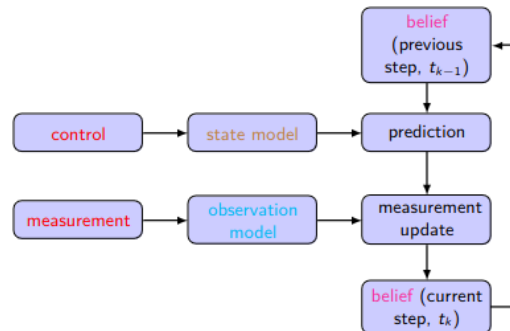
### 3.5.3 ALGORITMO DEL FILTRO DE KALMAN

Luego, el KF utiliza un algoritmo recursivo para actualizar la creencia  $bel(x_k)$  en cada momento  $t_k$ , que está representado por la media  $\mu_k$  y la matriz de covarianza  $\Sigma_k$ .

La media, como valor promedio, puede entenderse como el estado estimado.

Una entrada diagonal de la matriz de covarianza es la varianza  $E[(x_i - \mu_i)^2]$  de una variable escalar, cuya raíz cuadrada (desviación estándar) puede entenderse como un radio de incertidumbre/error y se visualiza como la extensión de una curva de campana.

Una entrada fuera de la diagonal de la matriz de covarianza es la covarianza  $E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]$  de dos variables aleatorias. La covarianza es una medida de la variabilidad conjunta de dos variables aleatorias.



Definir estado  $x_k \in R^{nx1}$ , control  $u_k \in R^{mx1}$ , y medida  $z_k \in R^{lx1}$ .

Suponga la creencia inicial  $(\mu_0 \in R^{nx1}, \Sigma_0 \in R^{nxn})$  en  $t_0$ .

Proporcionar el historial de control  $u_{1:k}$  y obtener el historial de mediciones  $z_{1:k}$ .

Construir modelo de estado  $(A_k \in R^{nxn}, B_k \in R^{nxm}, R_k \in R^{nxn})$  y de observación  $(C_k \in R^{lxn}, Q_k \in R^{lxl})$ .

Realizar el algoritmo del filtro de Kalman recursivo para actualizar la creencia  $(\mu_k \in R^{nx1}, \Sigma_k \in R^{nxn})$  en cada paso de tiempo  $t_k$ .

#### 3.5.3.1 PASO DE PREDICCIÓN

**Recursive\_Kalman\_filter (  $\mu_{k-1}, \Sigma_{k-1}, u_k, z_k$  )**

```

1:  $\bar{\mu}_k = A_k \mu_{k-1} + B_k u_k$ 
2:  $\bar{\Sigma}_k = A_k \Sigma_{k-1} A_k^T + R_k$ 
3:
4:
5:
6: return  $\mu_k, \Sigma_k$ 
  
```

**Predicción con probabilidad de transición de estado:**

$$\overline{bel}(x_k)(N(\bar{x}_k; \bar{\mu}_k, \bar{\Sigma}_k)) = p(x_k | u_k, x_{k-1})(N(x_k; A_k x_{k-1} + B_k u_k, R_k)) bel(x_{k-1})(N(x_{k-1}; \mu_{k-1}, \Sigma_{k-1})) d^n x_{k-1}$$

La estimación del estado anterior  $\bar{\mu}_k$  es una combinación lineal de la estimación anterior  $\mu_{k-1}$ , y la entrada de control  $u_k$ .

La covarianza del error anterior  $\bar{\Sigma}_k$  es una combinación lineal de la covarianza del error anterior  $\Sigma_{k-1}$  y la covarianza del ruido del proceso  $R_k$ . La actualización de la covarianza considera el hecho de que los estados dependen de la estimación del estado anterior  $\mu_{k-1}$  a través de la matriz de transición de estado  $A_k$ .

Como resultado de la covarianza del ruido del proceso  $R_k$ , las incertidumbres crecen después de incorporar el control, lo que se traduce en una mayor dispersión de la curva de la campana.

### 3.5.3.2 PASO DE MEDICIÓN Y ACTUALIZACIÓN

Recursive\_Kalman\_filter (  $\mu_{k-1}, \Sigma_{k-1}, u_k, z_k$  )

```

1:  $\bar{\mu}_k = A_k \mu_{k-1} + B_k u_k, \quad [n \times 1]$ 
2:  $\bar{\Sigma}_k = A_k \Sigma_{k-1} A_k^T + R_k, \quad [n \times n]$ 
3:  $K_k = \bar{\Sigma}_k C_k^T (C_k \bar{\Sigma}_k C_k^T + Q_k)^{-1}, \quad [n \times \ell]$ 
4:  $\mu_k = \bar{\mu}_k + K_k (z_k - C_k \bar{\mu}_k), \quad [n \times 1]$ 
5:  $\Sigma_k = (I - K_k C_k) \bar{\Sigma}_k, \quad [n \times n]$ 
6: return  $\mu_k, \Sigma_k$ 

```

Actualización de medidas con probabilidad de medida:

$$bel(x_k)(N(x_k; \mu_k, \Sigma_k)) = \eta p(z_k | x_k)(N(z_k; C_k x_k, Q_k)) \bar{bel}(x_k)(N(\bar{x}_k; \bar{\mu}_k, \bar{\Sigma}_k))$$

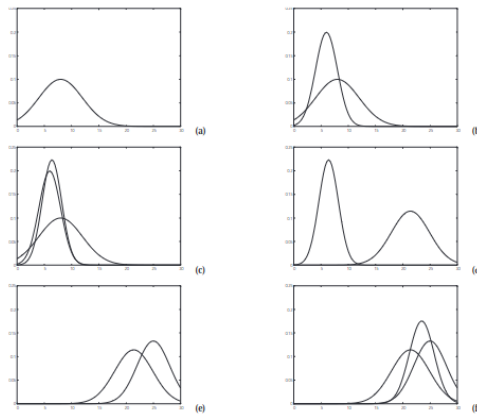
La **innovación/residuo**  $(z_k - C_k \bar{\mu}_k)$  describe la desviación entre la medición real  $z_k$  y medición prevista  $C_k \bar{\mu}_k$ .

La **ganancia de Kalman**  $K_k$  especifica el grado en que la medición se incorpora a la estimación actualizada. Si hay más ruido de medición  $Q_k$ , la ganancia de Kalman se reduce para incorporar menos medidas.

La **estimación del estado actualizado/posterior**  $\mu_k$  se obtiene sumando la innovación  $(z_k - C_k \bar{\mu}_k)$  que se ajusta mediante la ganancia de Kalman  $K_k$  a la **estimación del estado predicho**  $\bar{\mu}_k$ .

La **covarianza del error actualizado/posterior**  $\Sigma_k$  se calcula a partir de la predicción covarianza del error  $\bar{\Sigma}_k$  ajustando la información de la medición.

### 3.5.4 ILUSTRACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN



a) Predicción inicial con distribución normal.

b) Medición con incertidumbres asociadas.

c) Creencia posterior después de actualizar la medición, con el medio que se encuentra entre las dos medias originales y con el radio de incertidumbre más pequeño que ambos contribuyentes gaussianos.

d) Predicción tras movimiento, con la media desplazada debido al movimiento y con la incertidumbre aumentada debido a la transición del estado estocástico.

e) Medición.

f) Creencia posterior.

## 3.6 FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO

### 3.6.1 NO LINEALIDAD

El hecho de que cualquier transformación lineal de una variable aleatoria gaussiana resulte en otra variable aleatoria gaussiana juega un papel importante en la derivación del algoritmo del filtro de Kalman.

Desafortunadamente, las transiciones de estado y las mediciones rara vez son lineales en la práctica.

El **filtro de Kalman extendido** relaja el supuesto de linealidad, con el modelo de estado y el modelo de observación siendo funciones no lineales:

$$x_k(nx1) = g(u_k(nx1), x_{k-1}(nx1))(nx1) + \epsilon_k(nx1), z_k(lx1) = h(x_k(nx1))(lx1) + \delta_k(lx1)$$

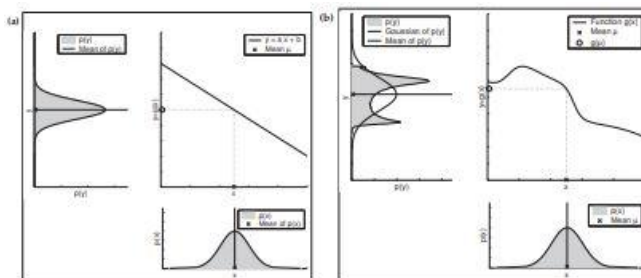
Este modelo generaliza el **modelo gaussiano lineal** que tiene  $g(u_k, x_{k-1}) = A_k x_{k-1} + B_k u_k$  y  $h(x_k) = C_k x_k$ .

Desafortunadamente, con **funciones no lineales arbitrarias g y h**, la creencia ya no es una gaussiana.

El filtro de Kalman extendido calcula una aproximación gaussiana a la creencia verdadera, que también es representada por una **media  $\mu_k$**  y una **covarianza  $\Sigma_k$** .

El filtro de Kalman extendido hereda del filtro de Kalman la **representación de creencias básicas**, pero se diferencia en que esta creencia es sólo aproximada, no exacta como en el caso del filtro de Kalman.

### 3.6.2 FUNCIÓN LINEAL DE VARIABLES GAUSSIANAS



**Transformación lineal  $y = g(x) = ax + b$ :**  $p(y)dy = p(x)dx \Rightarrow p(y)dy = p(x)dx$

**K constante:**  $p(y) = \frac{1}{\det(\partial g/\partial x)} p(x) \Rightarrow p(y) = \frac{dx}{dy} p(x) = kp(\mu_x)$

**Media:**  $\mu_y = g(\mu_x) = A\mu_x + B \Rightarrow \mu_x = g(x) = a\mu_x + b$

**Dispersión:**  $\Sigma_y = A\Sigma_x A^T \Rightarrow \sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$

### 3.6.3 FUNCIÓN NO LINEAL DE VARIABLES GAUSSIANAS

**Transformación no lineal  $y = g(x)$ :**  $p(y) = \frac{p(x)}{\det(\partial g/\partial x)} \Rightarrow p(y) = \frac{dx}{dy} p(x) = k(x)p(x)$ ,  $k(x)$  no es constante

**Media:**  $\mu_y = \int y p(y) d^n y = \int g(x) p(x) d^n x \Rightarrow \mu_y \neq g(\mu_x)$

**Dispersión:**  $\Sigma_y = \int (y - \mu_y)(y - \mu_y)^T p(y) d^n y \Rightarrow \sigma_y^2 = \int [g(x) - g(\mu_x)]^2 p(x) dx$

La **no linealidad** en los modelos de estado y de observación destruye la forma gaussiana de transición de estado y probabilidades de medición, por lo tanto también la de la creencia.

### 3.6.4 APROXIMACIÓN GAUSSIANA POR LINEARIZACIÓN

**Aproximación de Monte-Carlo:** Aún puedes calcular la media y la covarianza realizando integrales, para aproximar el gaussiano de  $p(y)$ .

Este método, que **requiere integración**, es más costoso computacionalmente que la aproximación del filtro de Kalman extendido que aplica la linealización.

La **linealización** se aproxima a la función no lineal  $g(x)$  por una función lineal que es tangente a  $g(x)$  en la media del gaussiano.

El **filtro de Kalman extendido** utiliza la media y covarianza de la distribución gaussiana obtenida de la aproximación lineal para representar la creencia.

El proceso de linealización utiliza la **expansión de Taylor de primer orden**.

### 3.6.5 LINEARIZACIÓN POR EXPANSIÓN DE TAYLOR (MONOVARIABLE)

Desarrollo de Taylor de una función  $f(x)$  con respecto al punto  $x_0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots$$

siendo  $f^{(n)}(x_0)$  la  $n$ -ésima derivada de la función evaluada en  $x_0$ .

### 3.6.6 LINEARIZACIÓN POR EXPANSIÓN DE TAYLOR (MULTIVARIABLE)

Expansión de Taylor de una función  $f(x, y)$  de dos variables, aproximadamente  $(x_0, y_0)$ :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right]$$

con todas las derivadas evaluadas en  $(x_0, y_0)$ ,  $\Delta x = x - x_0$  y  $\Delta y = y - y_0$ .

Para una función  $f(x)$  de múltiples variables  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  la expansión de Taylor en  $x_0$  es una extensión simple de lo anterior:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + \dots$$

con todas las derivadas evaluadas en  $x_0$ ,  $\Delta x = x - x_0$ .

### 3.6.7 LINEARIZACIÓN POR EXPANSIÓN DE TAYLOR (MÚLTIPLES FUNCIONES)

Para funciones múltiples  $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)]^T$  de múltiples variables  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ , la linealización de estas funciones alrededor de un punto de interés  $x_0$  es la expansión de Taylor de primer orden alrededor de  $x_0$ :

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f_1(x_0) \\ f_2(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

$f(x_0)$ : Funciones evaluadas en  $x_0$ .

$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$ : Matriz jacobiana evaluada en  $x_0$ .

$\Delta x = x - x_0$ : Cambio de  $x$  con respecto a  $x_0$ .

### 3.6.8 MODELO DE ESTADOS

Modelo de estados:  $x_k(n \times 1) = g(u_k(n \times 1), x_{k-1}(n \times 1))(n \times 1) + \epsilon_k(n \times 1)$

¿Sobre qué punto realizamos la linealización? ¿Sobre qué valor del estado  $x_k$ ?

Sobre el estado más probable que ocurra la estimación del estado posterior del último paso  $x_{k-1} \approx \mu_{k-1}$ .

Aproximación lineal de la función de transición de estado  $g(u_k, x_{k-1})$  acerca de  $x_{k-1} \approx \mu_{k-1}$ :

$$g(u_k, x_{k-1}) \approx g(u_k, \mu_{k-1}) + G_k(x_{k-1} - \mu_{k-1}), \text{ donde } G_k = \frac{\partial g(u_k, x_{k-1})}{\partial x_{k-1}} \in R^{n \times n}$$

Comparado con el modelo de estado lineal en el filtro de Kalman:

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_k + \epsilon_k = A_k \mu_{k-1} + B_k u_k + A_k(x_{k-1} - \mu_{k-1}) + \epsilon_k = g(u_k, \mu_{k-1}) + G_k(x_{k-1} - \mu_{k-1}) + \epsilon_k$$

La relación lineal en el filtro de Kalman se reemplaza por la generalización no lineal en el filtro de Kalman extendido:

$$A_k \mu_{k-1} + B_k u_k \Rightarrow g(u_k, \mu_{k-1}), \text{ donde } A_k \Rightarrow G_k$$

Después de esta linealización, la probabilidad de transición de estado  $p(x_k | u_k, x_{k-1})$  se aproxima mediante la distribución gaussiana como:  $p(x_k | u_k, x_{k-1}) = N\{x_k; \mu, \Sigma\}$ ,  $\mu = g(u_k, \mu_{k-1})$ ,  $\Sigma = R_k$ .

### 3.6.9 MODELO DE OBSERVACIÓN

Modelo de observación:  $z_k(lx1)(hx_k(nx1))(lx1) + \delta_k(lx1)$

Aproximación lineal de la función de medición  $h(x_k)$  sobre el estado más probable después de la predicción, la estimación del estado predicho  $x_k \approx \bar{\mu}_k$ :

$$h(x_k) \approx h(\bar{\mu}_k) + H_k(x_k - \bar{\mu}_k), \text{ donde } H_k = \frac{\partial h(\bar{\mu}_k)}{\partial x_k} \in R^{lxn}$$

Comparado con el modelo de observación lineal en el filtro de Kalman:

$$z_k = C_k x_k + \delta_k = C_k \bar{\mu}_k + C_k(x_k - \bar{\mu}_k) + \delta_k = h(\bar{\mu}_k) + H_k(x_k - \bar{\mu}_k) + \delta_k$$

La relación lineal en KF se reemplaza por la generalización no lineal en el filtro de Kalman extendido:

$$C_k \bar{\mu}_k \Rightarrow h(\bar{\mu}_k), \text{ donde } C_k \Rightarrow H_k$$

Después de esta linealización, la probabilidad de medición  $p(z_k | z_k)$  se aproxima por la distribución gaussiana como:  $p(z_k | x_k) = N\{z_k; \mu, \Sigma\}$ ,  $\mu = h(\bar{\mu}_k)$ ,  $\Sigma = Q_k$ .

### 3.6.10 ALGORITMO DEL FILTRO DE KALMAN EXTENDIDO

#### Recursive\_KF

$(\mu_{k-1}, \Sigma_{k-1}, u_k, z_k)$

- 1:  $\bar{\mu}_k = A_k \mu_{k-1} + B_k u_k$
- 2:  $\bar{\Sigma}_k = A_k \Sigma_{k-1} A_k^T + R_k$
- 3:  $K_k = \bar{\Sigma}_k C_k^T (C_k \bar{\Sigma}_k C_k^T + Q_k)^{-1}$
- 4:  $\mu_k = \bar{\mu}_k + K_k (z_k - C_k \bar{\mu}_k)$
- 5:  $\Sigma_k = (I - K_k C_k) \bar{\Sigma}_k$
- 6: return  $\mu_k, \Sigma_k$

#### Recursive\_EKF

$(\mu_{k-1}, \Sigma_{k-1}, u_k, z_k)$

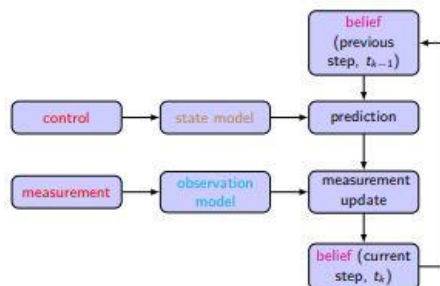
- 1:  $\bar{\mu}_k = g(u_k, \mu_{k-1})$
- 2:  $\bar{\Sigma}_k = G_k \Sigma_{k-1} G_k^T + R_k$
- 3:  $K_k = \bar{\Sigma}_k H_k^T (H_k \bar{\Sigma}_k H_k^T + Q_k)^{-1}$
- 4:  $\mu_k = \bar{\mu}_k + K_k [z_k - h(\bar{\mu}_k)]$
- 5:  $\Sigma_k = (I - K_k H_k) \bar{\Sigma}_k$
- 6: return  $\mu_k, \Sigma_k$

Filtro de Kalman recursivo:  $x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_k + \epsilon_k$ ,  $z_k = C_k x_k + \delta_k$

Filtro de Kalman extendido recursivo:  $x_k = g(u_k, x_{k-1}) + \epsilon_k$ ,  $z_k = h(x_k) + \delta_k$

Paso de predicción:  $A_k \mu_{k-1} + B_k u_k \Rightarrow g(u_k, \mu_{k-1})$ , donde  $A_k \Rightarrow G_k$

Paso de corrección:  $C_k \bar{\mu}_k \Rightarrow h(\bar{\mu}_k)$ , donde  $C_k \Rightarrow H_k$



Definir estado  $x_k \in R^{nx1}$ , control  $u_k \in R^{mx1}$  y medición  $z_k \in R^{lx1}$ .

Suponga la creencia inicial  $(\mu_0 \in R^{nx1}, \Sigma_0 \in R^{nxn})$  en  $t_0$ .

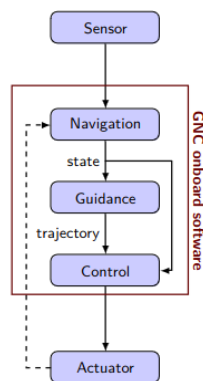
Proporcionar el historial de control  $u_{1:k}$  y obtener el historial de mediciones  $z_{1:k}$ .

Construir modelo de estado  $(g \in R^{nx1}, G_k \in R^{nxn}, R_k \in R^{nxn})$  y modelo de observación  $(h \in R^{lx1}, H_k \in R^{lxn}, Q_k \in R^{lx1})$ .

Realizar el algoritmo del filtro de Kalman para actualizar la creencia  $(\mu_k \in R^{nx1}, \Sigma_k \in R^{nxn})$  en cada paso de tiempo.



### 3.6.11 SOFTWARE A BORDO GNC



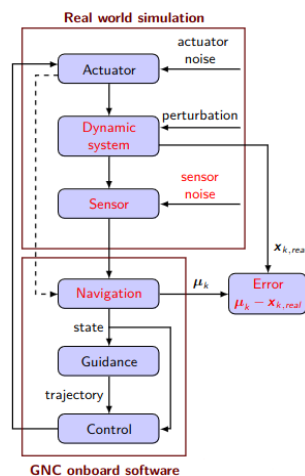
El software integrado GNC contiene **tres componentes**:

**Sistema de navegación:** Estima el estado (posición, velocidad, orientación, velocidad angular).

**Sistema de guiado:** Calcula la trayectoria de referencia (velocidad y ángulo de guiñada para el multicoptero PX4).

**Sistema de control:** Compara la trayectoria y el estado de referencia; calcula puntos de ajuste de fuerza y par; y genera señales de control a los actuadores (velocidad del motor de un multicoptero y desviación del ángulo del acelerador y del servo para aviones de ala fija).

### 3.6.12 ENTORNO DE DISEÑO GNC



Un **entorno de diseño GNC típico** contiene dos módulos de nivel, software integrado GNC para el mundo real y para simulación. La simulación del mundo real contiene **tres modelos de simulación**:

**Modelo de actuador:** Toma las señales de control como entradas, agrega ruido del actuador y genera salidas que son fuerza y torsión simuladas.

**Modelo de sistema dinámico:** Toma el modelo simulado, la fuerza y torque como entradas, agrega perturbaciones y genera una salida que simula el estado del vehículo en el mundo real.

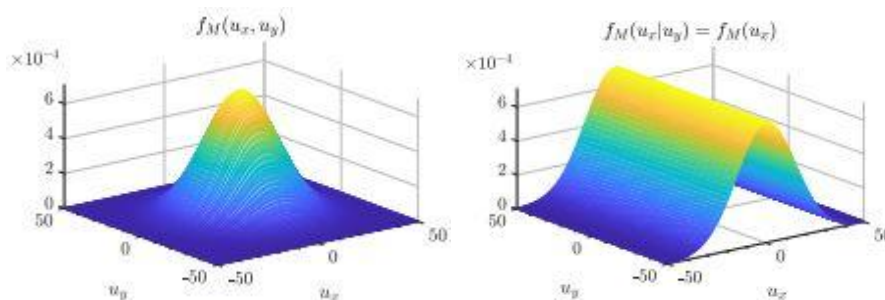
**Modelo de sensor:** Toma el estado en el mundo real simulado como entrada, agrega ruido del sensor y genera salidas que son mediciones de sensores simuladas.

La **matriz de covarianza del ruido del proceso R** debería tomar en cuenta el ruido del actuador, la perturbación y el ruido del sensor. La **matriz de covarianza del ruido de medición Q** debe tener en cuenta el ruido del sensor. Estas dos matrices de covarianza deben ajustarse para mejorar la forma de estimar el estado utilizando el filtro de Kalman.



## EJERCICIOS TEMA 3: FILTRO DE KALMAN

### EJERCICIO 1: DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDAD MAXWELLIANA EN 2D



$$f_M(u_x, u_y) = \frac{m}{2\pi k_B T} \exp\left(-\frac{mu_x^2/2 + mu_y^2/2}{k_B T}\right)$$

$$f_M(u_x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mu_x^2/2}{k_B T}\right)$$

$$f_M(u_y) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \exp\left(-\frac{mu_y^2/2}{k_B T}\right)$$

La figura superior muestra la superficie dada por la PDF  $f_M(u_x, u_y)$  con  $k_B T/m = 225$ .

El volumen da la probabilidad para un rango dado de  $u_x$  y  $u_y$ .

a) ¿Independencia de  $u_x$  y  $u_y$ ?

$$f_M(u_x, u_y) = f_M(u_x)f_M(u_y)$$

$$f_M(u_x|u_y) = f_M(u_x)$$

Como se muestra en la parte inferior de la figura, la probabilidad condicional  $f_M(u_x|u_y)$  es la mismo para cualquier  $u_y$ .

### EJERCICIO 2: DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIABLE

Distribución de velocidad maxwelliana en 3D:  $f_M(u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mu_x^2/2 + mu_y^2/2 + mu_z^2/2}{k_B T}\right)$

Las medias son cero:  $\mu = [0, 0, 0]^T$

Las covarianzas son cero debido a variables independientes:  $Cov[U_i, U_j] = 0$ , para  $i \neq j$ .

La matriz de covarianza es, por tanto, una matriz diagonal:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} k_B T/m & 0 & 0 \\ 0 & k_B T/m & 0 \\ 0 & 0 & k_B T/m \end{bmatrix}$$

Como se trata de una especie de segundo momento central, cada elemento diagonal debe tener la unidad de  $m^2/s^2$ .

Comparada con la distribución de velocidad Maxwelliana 1D:  $f_M(u) = N(u; \mu = 0, \sigma^2 = k_B T/m)$ .

### EJERCICIO 3: MODELO DE OBSERVACIÓN Y ESTADO

Por ejemplo, supongamos que queremos modelar un vehículo que circula en línea recta. Podemos medir la aceleración y la posición cada  $T$  segundos.

El vector de estado está compuesto por posición y velocidad  $x_k = [p_k, v_k]$ ,  $x_k \in R^{2 \times 1}$ .

El control  $u_k \in R^{1 \times 1}$ , es la aceleración (medida del acelerómetro,  $a_{k,acc}$ ).

La medición  $z_k \in R^{1 \times 1}$  es la posición (medida del láser,  $p_{k,range}$ ).

Modelo de estado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_k \\ v_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_{k-1} + v_{k-1}T + a_{k,acc}T^2/2 \\ v_{k-1} + a_{k,acc}T \end{bmatrix} + \epsilon_k \\ \Rightarrow x_k &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A_k} x_{k-1} + \underbrace{\begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}}_{B_k} u_k + \epsilon_k \end{aligned}$$

Modelo de observación:  $p_k = p_k + \delta_k \Rightarrow z_k = [1 \ 0](C_k)x_k + \delta_k$