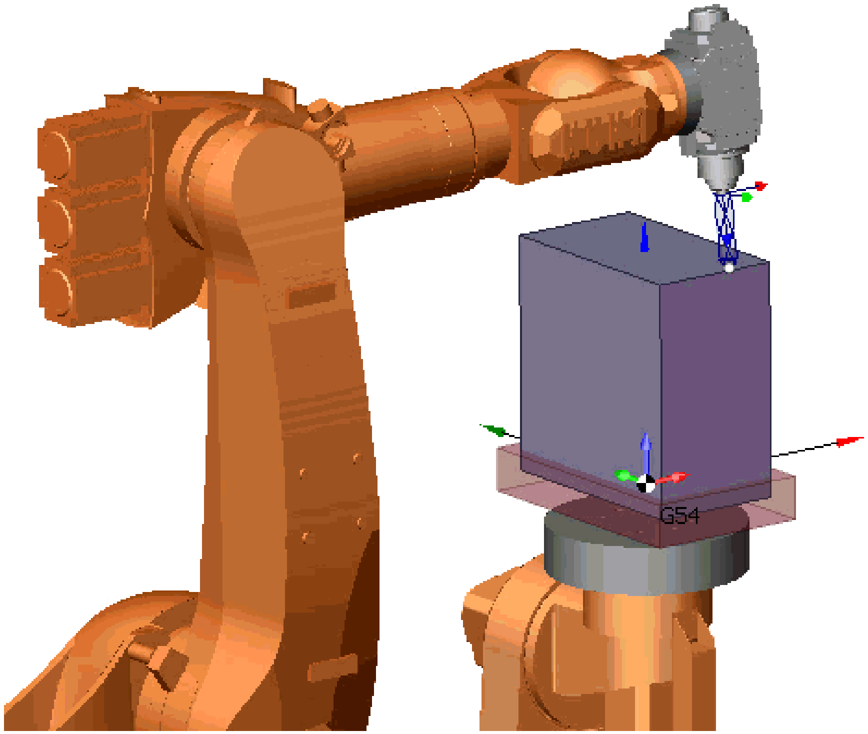
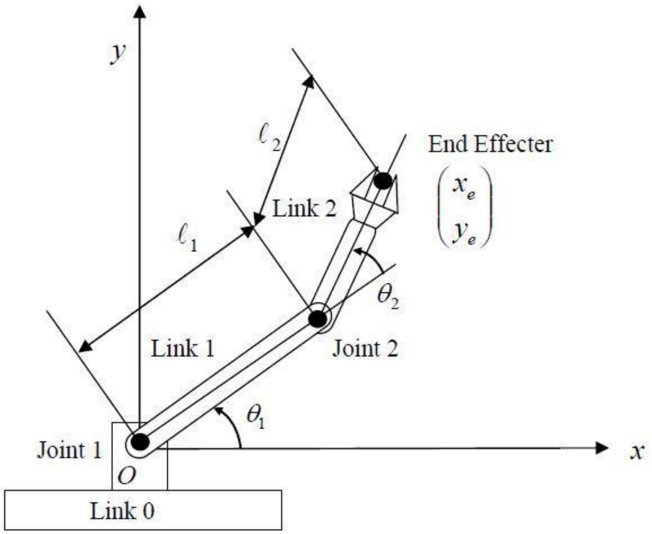


Tema 3 (parte 3). Cinemática diferencial del robot

Índice

Introducción a la cinemática diferencial del robot

La cinemática diferencial del robot se encarga de determinar la relación entre las velocidades de las n coordenadas articulares del robot [dq_1/dt, dq_2/dt, …, dq_n/dt] y las velocidades de movimiento lineal y angular del elemento terminal [dx/dt, dy/dt, …].



- A través de una matriz denominada Matriz Jacobiana (J) del robot

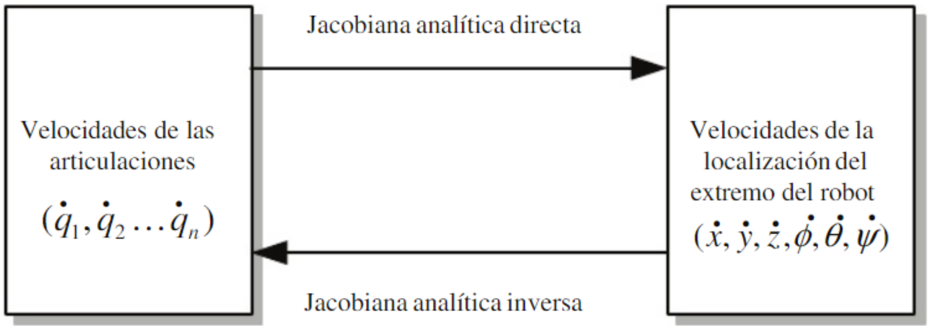
$$\boxed{\dot{x} = J \cdot \dot{q}}$$

- Hay diferentes posibilidades para seleccionar las variables de movimiento angular en el espacio del elemento terminal, que dan lugar a diferentes matrices Jacobianas. Se suele trabajar con dos:
  - Jacobiana analítica
  - Jacobiana geométrica (o simplemente Jacobiana)

Introducción a la cinemática diferencial del robot

Matriz Jacobiana analítica

La matriz Jacobiana analítica $\mathbf{J_a}$ utiliza las velocidades del elemento terminal en las coordenadas cartesianas x, y, z y los tres ángulos de Euler Φ, θ, Ψ (por ejemplo los "WVW")



- Los elementos de la matriz se extraen derivando el conjunto de ecuaciones obtenidas de la cinemática directa del robot. La matriz jacobiana analítica directa es:

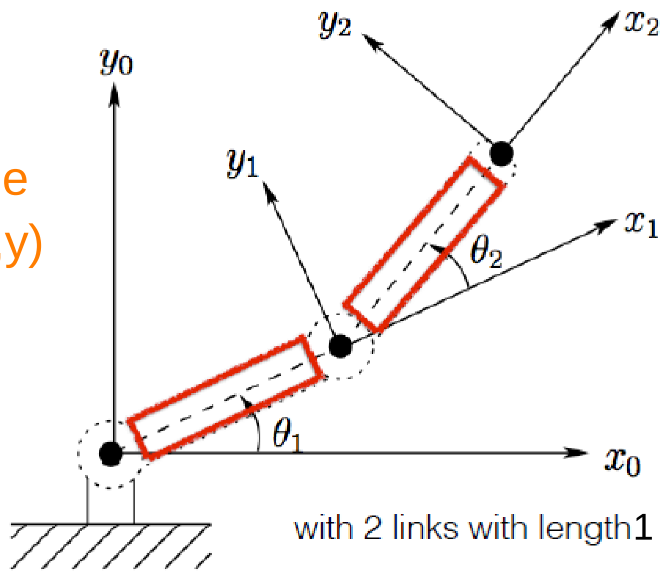
$$\dot{x} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_x}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad \dot{y} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_y}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad \dot{z} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_z}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\dot{\phi} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_\phi}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad \dot{\theta} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_\theta}{\partial q_i} \dot{q}_i \qquad \dot{\psi} = \sum_{1}^{n} \frac{\partial f_\psi}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_a \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_n} \end{bmatrix}}$$

Ejemplo: robot polar, de 2 GDL

Calcula la matriz jacobiana para el robot de 2 grados de libertad definido por la siguiente tabla de parámetros D-H, considerando sólo la posición (x,y) (sin la orientación) del elemento terminal

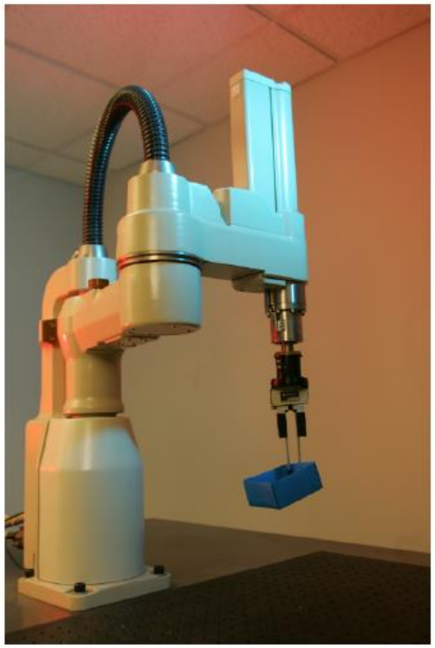


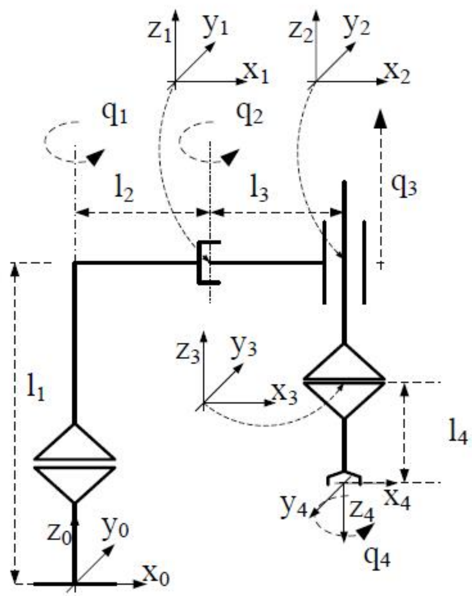
i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$q_1 = \theta_1$	0	1	0
2	$q_2 = \theta_2$	0	1	0

- La matriz Jacobiana del manipulador $J(q_1, q_2)$ es igual a:

$$\boxed{J(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_{12} - s_1 & -s_{12} \\ c_{12} + c_1 & c_{12} \end{bmatrix}}$$

Ejemplo: Jacobiana analítica del robot SCARA





$$J_a = \begin{bmatrix} -(l_3S_{12}+l_2S_1) & -l_3S_{12} & 0 & 0 \\ l_3C_{12}+l_2C_1 & l_3C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = l_3C_{12} + l_2C_1 \qquad \phi_Z = q_1 + q_2 + q_4$$
$$y = l_3S_{12} + l_2S_1 \qquad \theta_Y = \pi$$
$$z = l_1 - l_4 + q_3 \qquad \psi_Z = \pi$$

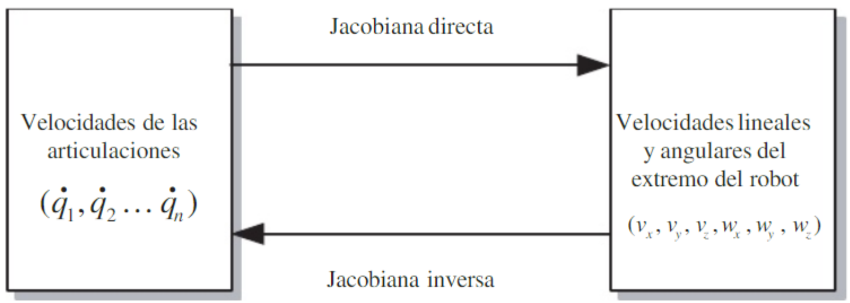
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = J_a \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

Matriz Jacobiana geométrica

La matriz Jacobiana geométrica (o simplemente Jacobiana) utiliza las velocidades con las que se mueve el elemento terminal a lo largo de una trayectoria. Incluye las velocifades lineales (v_x, v_y, v_z) y angulares (w_x, w_y, w_z), todas representadas respecto a la base del robot. **J** se divide en J_v y J_w

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$$

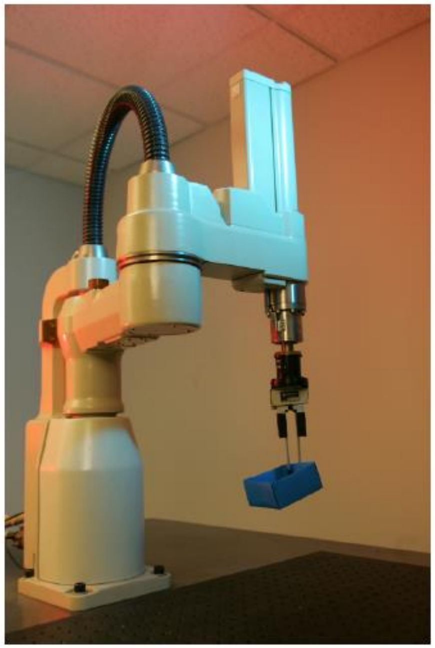


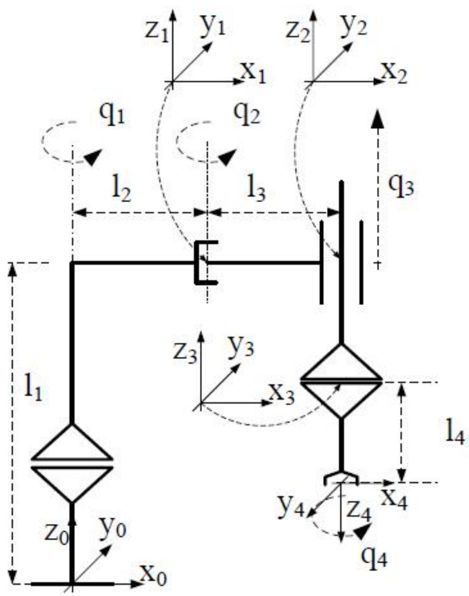
- La parte de velocidades lineales, J_v es la misma que en la Jacobiana analítica
- Para relacionar las velocidades angulares con las velocidades articulares se utiliza la matriz Ω. Se calcula a partir de la submatriz de rotación R de la cinemática directa del robot. Permite extraer J_w

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}}}$$

Ejemplo: Jacobiana (geométrica) del robot SCARA





$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_w \end{bmatrix} . \dot{q}$$

$$\boxed{J_v = \begin{bmatrix} -(l_3 S_{12} + l_2 S_1) & -l_3 S_{12} & 0 & 0 \\ l_3 C_{12} + l_2 C_1 & l_3 C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

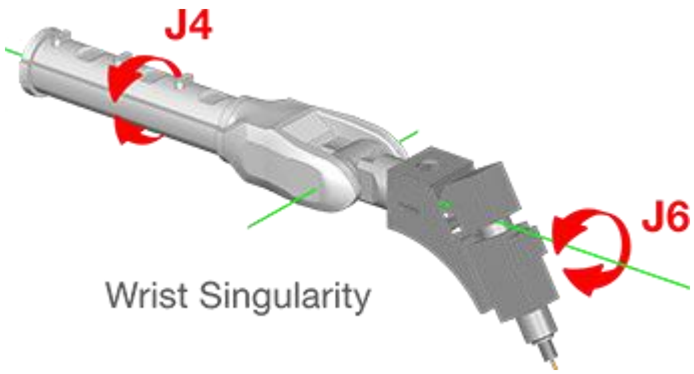
$$\mathbf{T} = {}^0\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_{124} & S_{124} & 0 & l_3 C_{12} + l_2 C_1 \\ S_{124} & -C_{124} & 0 & l_3 S_{12} + l_2 S_1 \\ 0 & 0 & -1 & -l_4 + q_3 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_4 & 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= 0 \\ \omega_y &= 0 \\ \omega_z &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{J_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

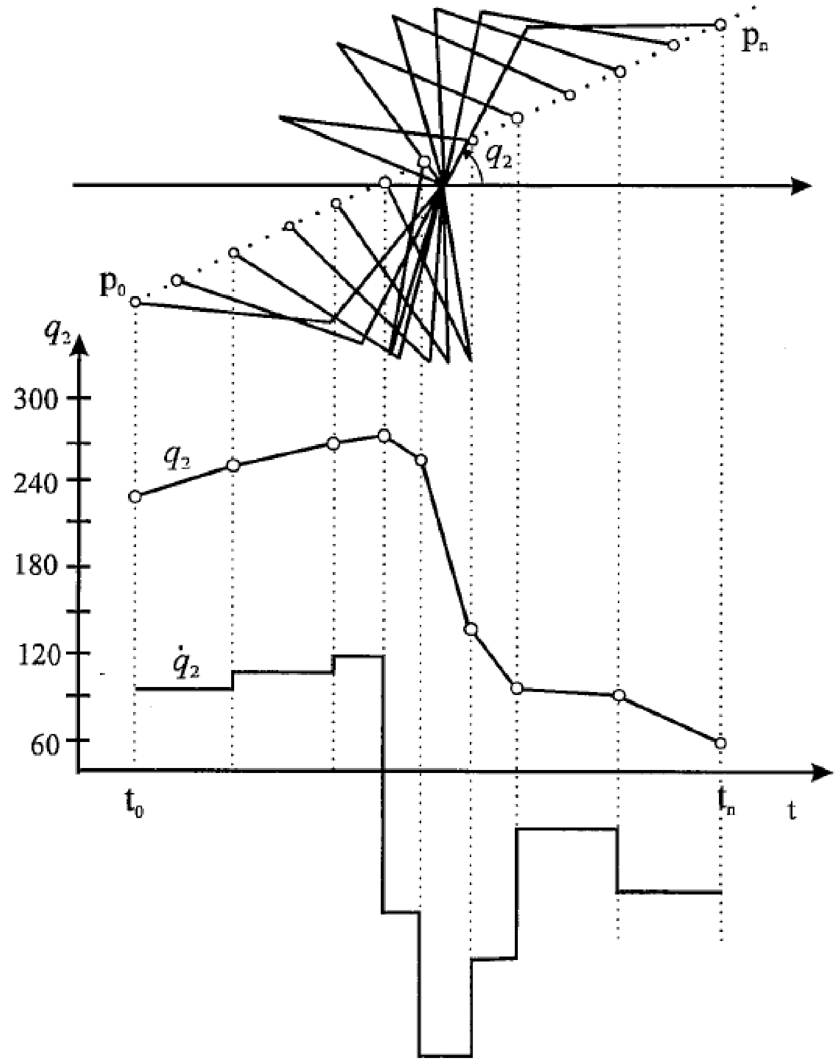
Singularidades

- Existen determinadas configuraciones singulares o singularidades, en los que se pierde alguno de los grados de libertad del robot, siendo imposible que el elemento terminal se mueva en una determinada dirección u orientación.



- En una singularidad el determinante de la matriz Jacobiana se anula, es decir, en dichos puntos no existe matriz Jacobiana inversa
- Existen dos tipos:
  1. Singularidades en los límites del espacio de trabajo: el robot no puede desplazarse en las direcciones que lo alejan más allá de dicho espacio.
  2. Singularidades en el interior del espacio de trabajo. Se producen, generalmente, por el alineamiento de dos o más ejes del robot, y provocan movimientos y velocidades abruptos en algunos eslabones

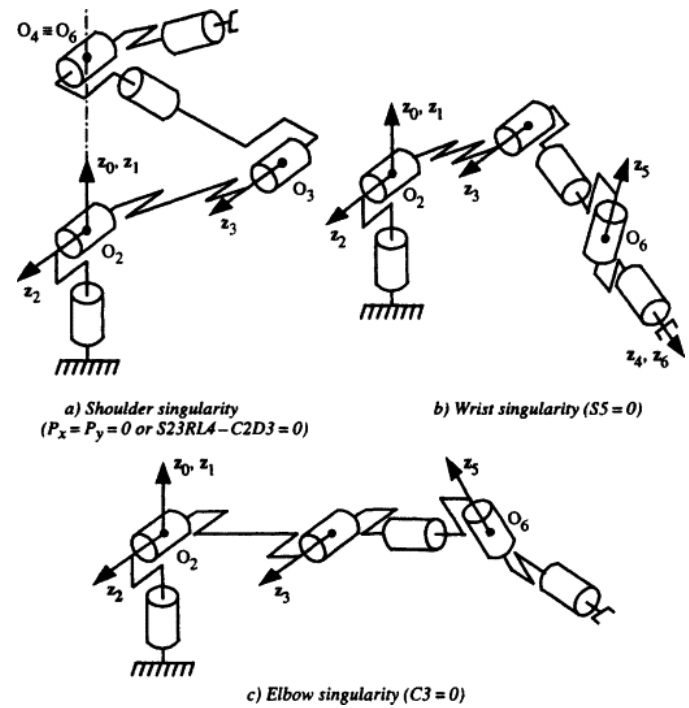
Singularidades



Singularidades en un robot industrial de 6 ejes

En un robot de 6 ejes ocurren cuando se alinean dos o más ejes. Por ello existen tres tipos de singularidades (de 1º orden):

- Singularidad "de muñeca" (*wrist*): se produce cuando se alinean los ejes 4 y 6 (eje 5 con $q_5 = 0$)
- Singularidad "de hombro" (*shoulder*): cuando el eje 6 se alinea con el eje 1, o cuando el centro de la muñeca se sitúa sobre el eje 1.
- Singularidad " de codo" (*elbow*): cuando el centro de la muñeca se sitúa en el mismo plano que los ejes 2 y 3 ("codo arriba" y "codo abajo")



a) Shoulder singularity ($P_x = P_y = 0$ or $S23RL4 - C2D3 = 0$)

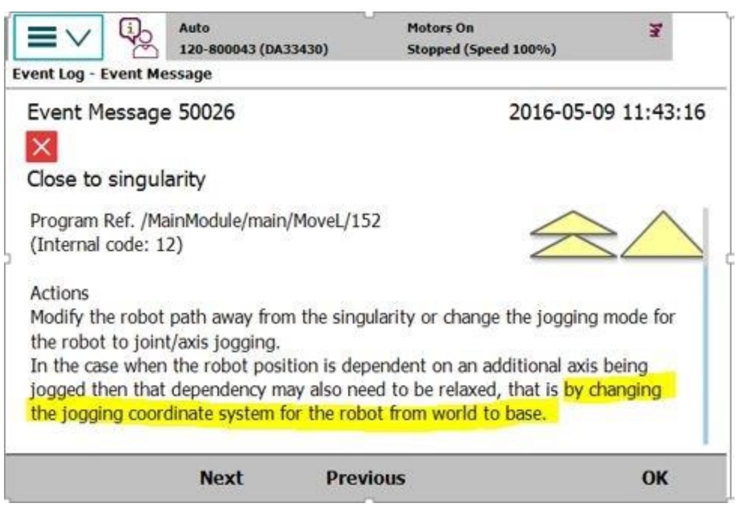
b) Wrist singularity ($S5 = 0$)

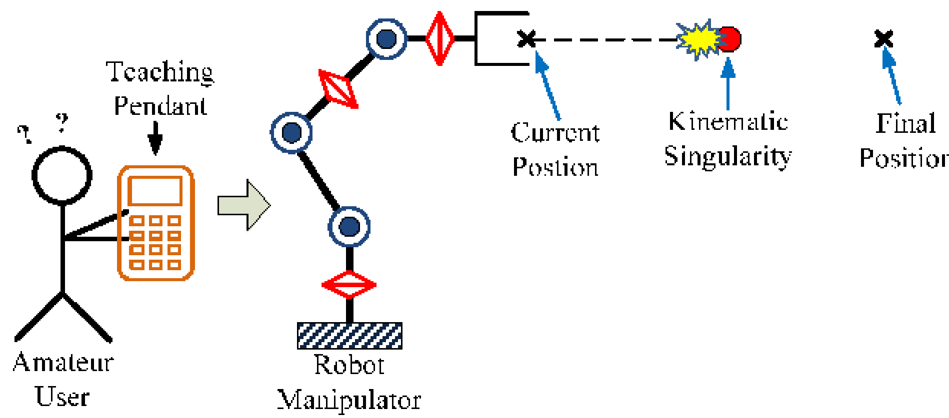
c) Elbow singularity ($C3 = 0$)

https://www.youtube.com/watch?v=lD2HQcxeNoA

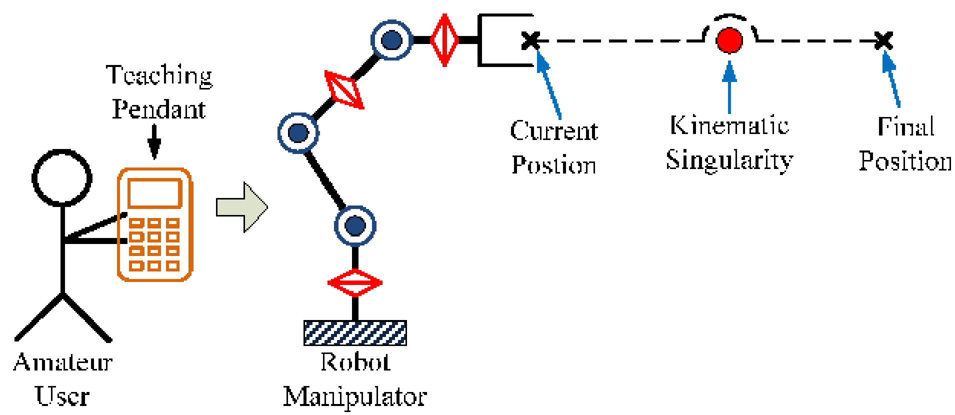
Como evitar las singularidades

En los robots comerciales, el controlador (computador de ejes) se encarga de restringir los movimientos y modificar las trayectorias para no caer en singularidades ni pasar cerca de ellas:



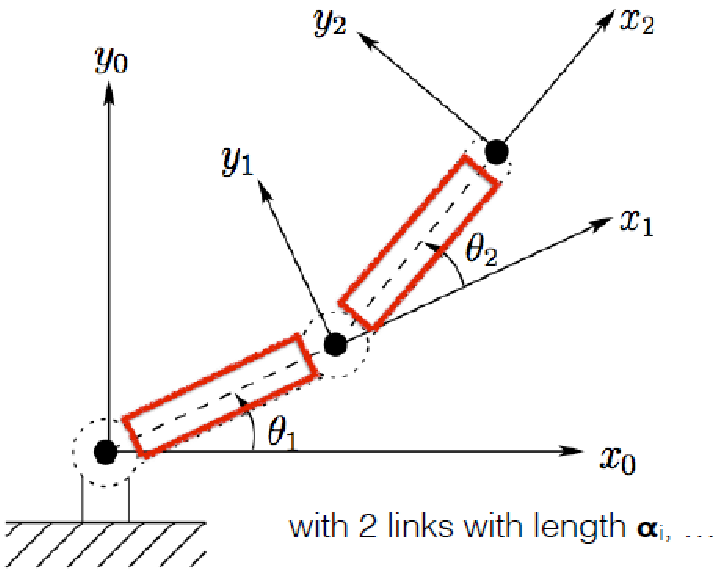


(a) Without considering singularity avoidance



(b) With considering singularity avoidance

Determinar singularidades



$$J(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = $$

$$= \begin{bmatrix} -s_{12} - s_1 & -s_{12} \\ c_{12} + c_1 & c_{12} \end{bmatrix}$$

$$|J(q_1, q_2)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{vmatrix} = -c_{12}(-s_{12} - s_1) + s_{12}(c_{12} + c_1) = 0$$

$$\sin(q_2) = 0 \Rightarrow q_2 = 0, \pi$$