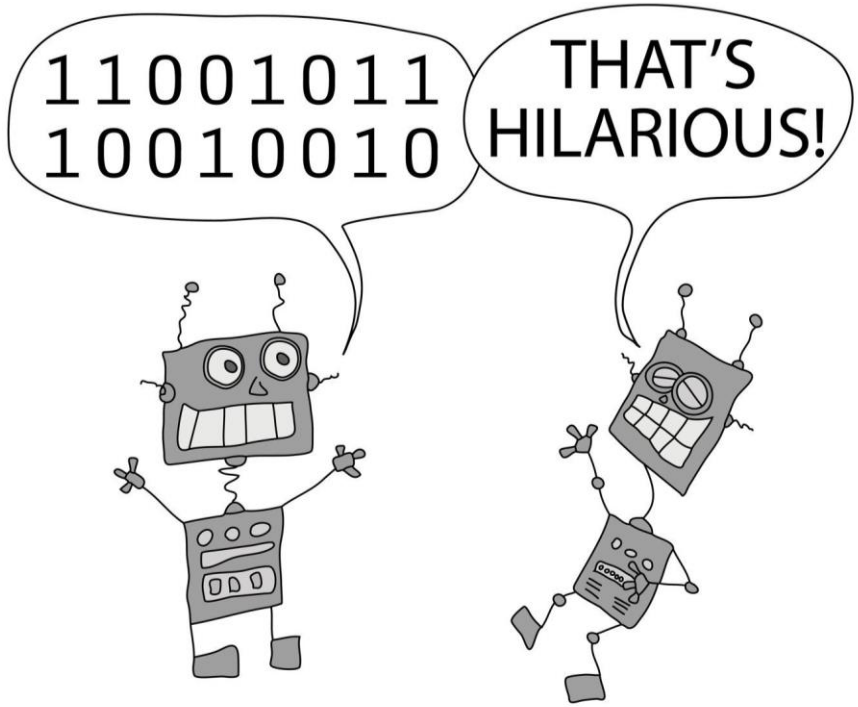
Universidad Rey Juan Carlos

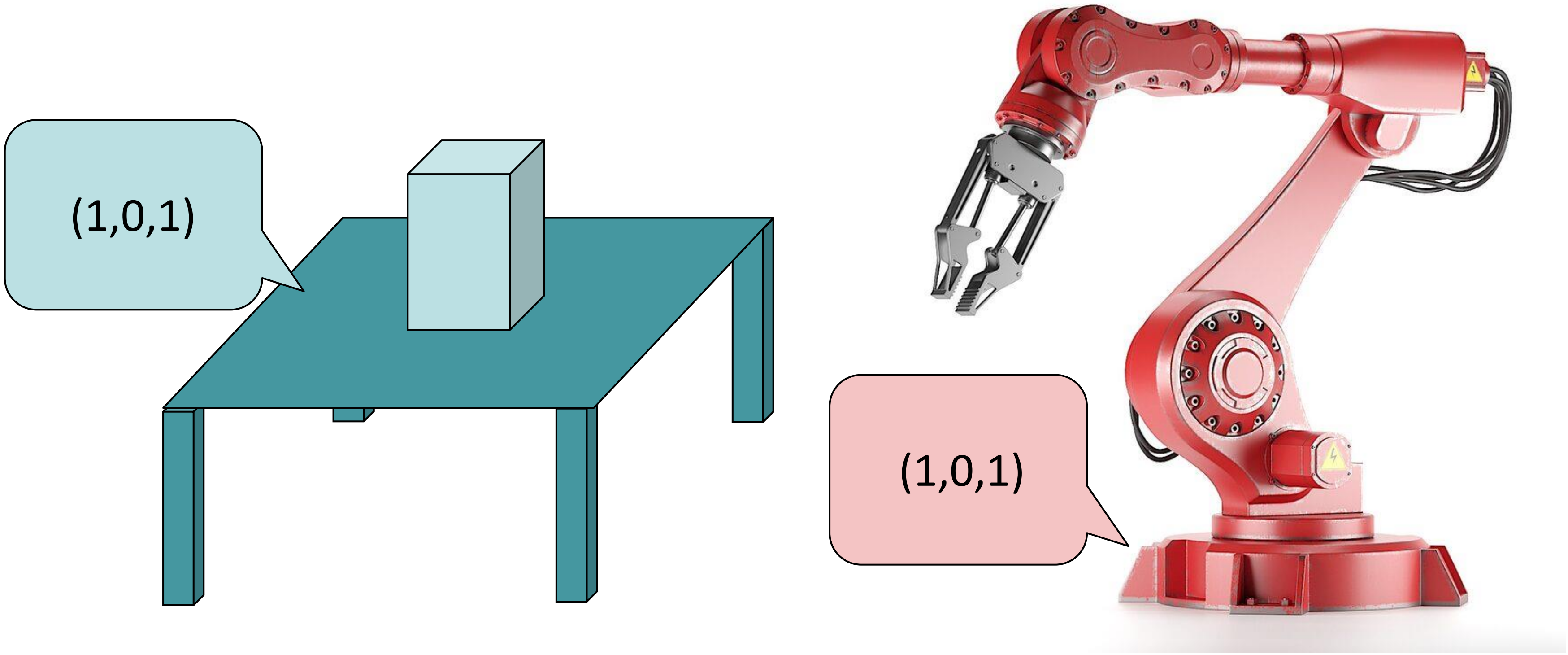


Tema 2 (parte 2). Herramientas matemáticas para la localización espacial

Índice

Introducción

Para que un robot pueda realizar tareas de manipulación es necesario que conozca la posición y orientación de los elementos a manipular (cuerpos rígidos) con respecto a la base del robot.

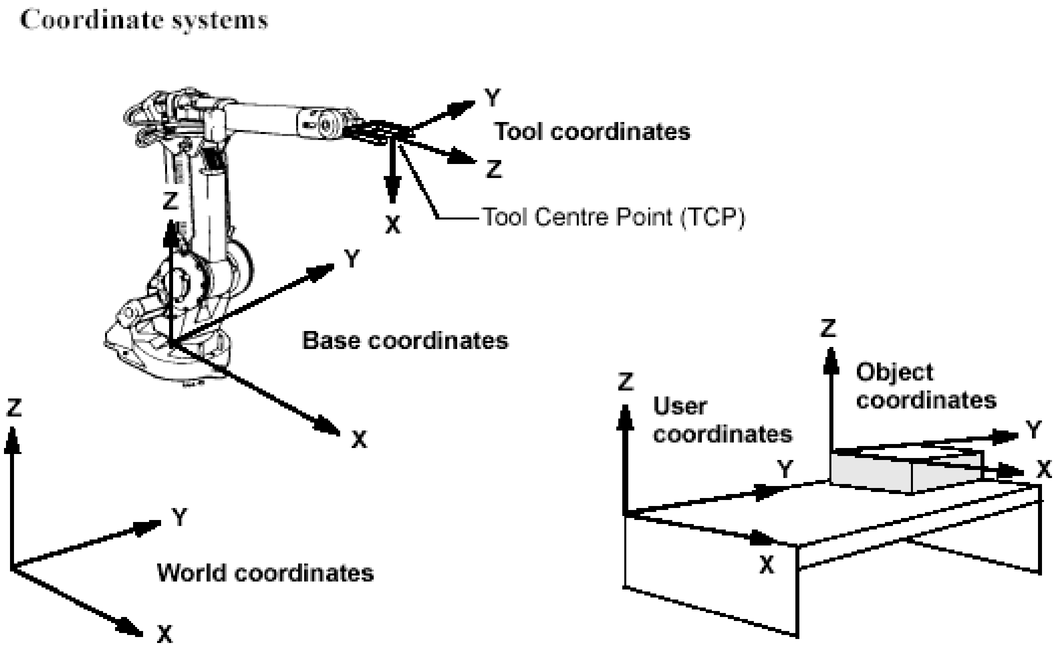


Introducción

Para que un robot pueda realizar tareas de manipulación es necesario que conozca la posición y orientación de los elementos a manipular (cuerpos rígidos) con respecto a la base del robot.

Sin embargo, en un sistema robótico puede haber hasta cinco sistemas de coordenadas:

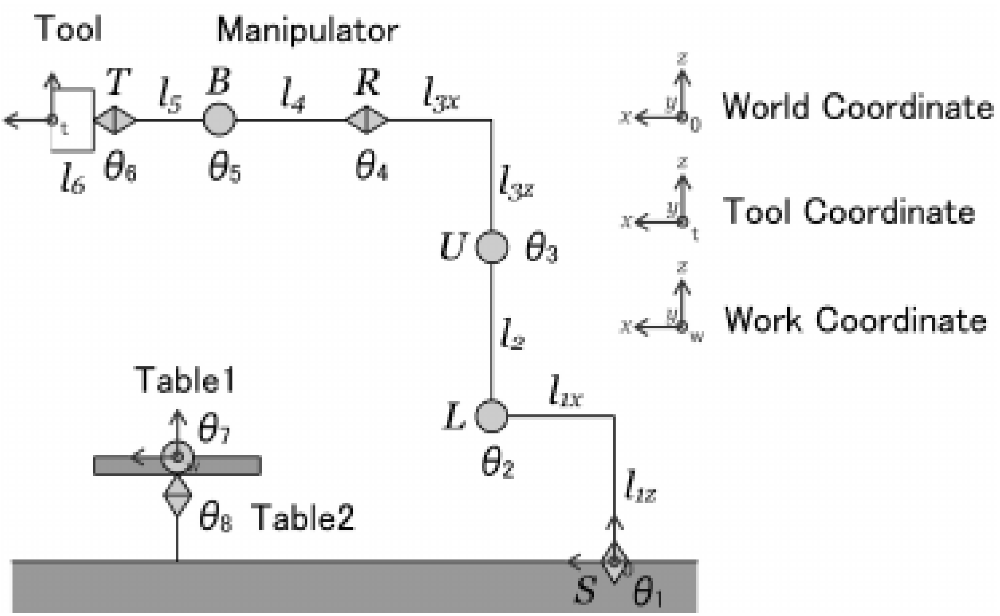
1) Mundo (inmóvil)
2) Base del robot (inmóvil si no hay ejes de desplazamiento del conjunto del robot).
3) Banco o plataforma de trabajo
4) Objeto de trabajo
5) Herramienta (sistema móvil solidario al *Tool Center Point* o *TCP* de la herramienta)



Introducción

Necesitamos herramientas de localización espacial para:

a) Representar la posición de un punto en un sistema de referencia (*robot targets*)
b) Representar la orientación de un objeto o de una herramienta en un sistema de referencia
c) Recalcular rápidamente ambas al cambiar a otro sistema de referencia, que puede ser móvil



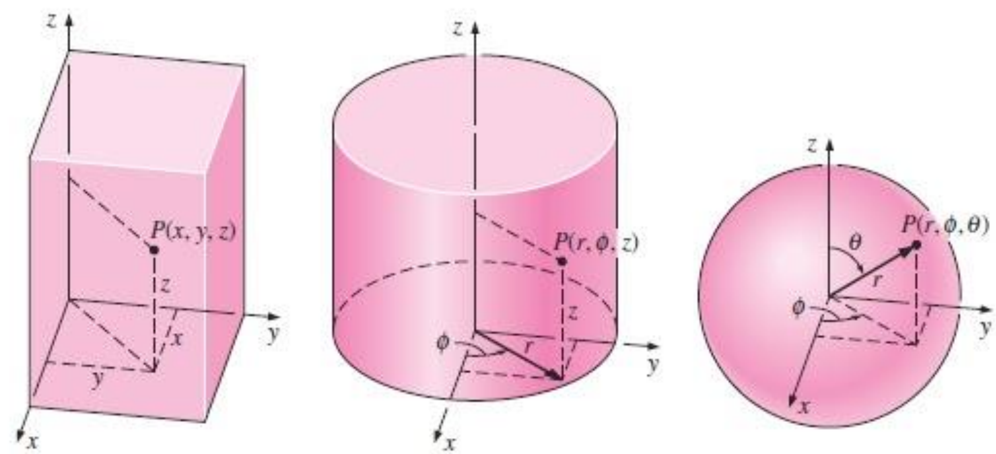
Representación de la posición. Coordenadas

En el espacio tridimensional (R^3) la posición de un punto precisa de tres componentes independientes en un sistema de coordenadas.

a) Coordenadas cartesianas. Terna ortonormal de vectores unitarios (ejes coordenados). Las coordenadas de P (x, y, z) representan la proyección ortogonal del punto en cada uno de los ejes cartesianos.

b) Coordenadas cilíndricas. Versión en 3D de las coordenadas polares. Terna de valores P (r, Φ, z): radial (distancia al eje z), azimutal (angulo de la proyección sobre el plano XY con respecto al eje x) y altura en z (con signo)

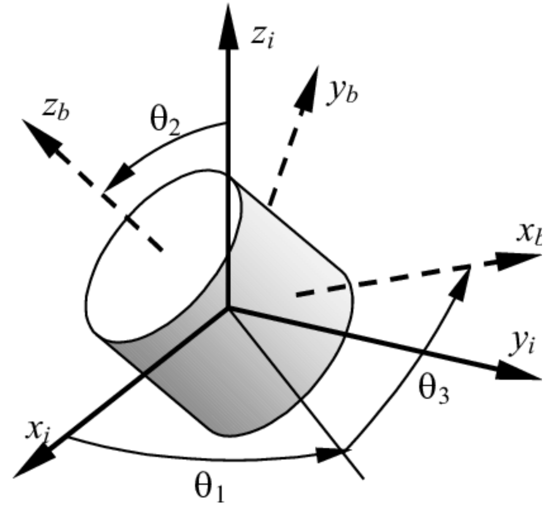
c) Coordenadas esféricas. P (r, Φ, θ): radial (distancia al origen), azimutal (mismo que en cilíndricas) y ángulo polar o colatitud (ángulo con respecto al eje z, normalmente de 0 a 180º)

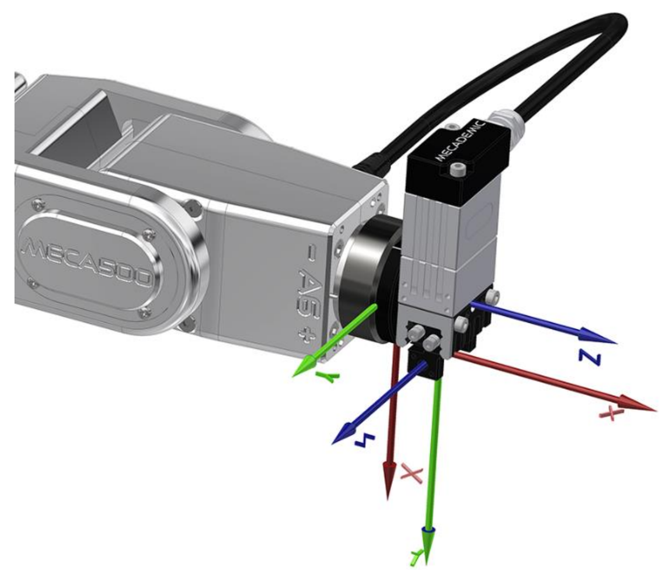


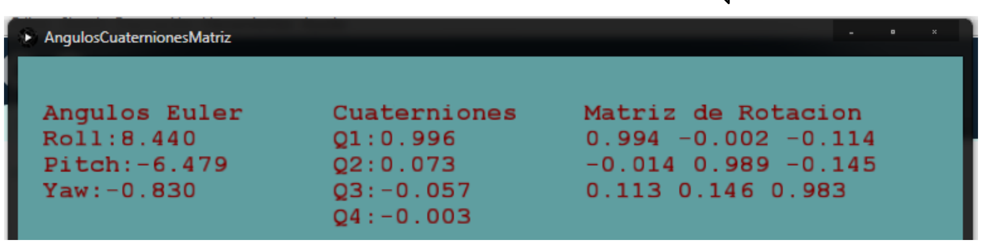
a) Coordenadas rectangulares b) Coordenadas cilíndricas c) Coordenadas esféricas

Representación de la orientación. Opciones

- La representación espacial de un sólido rígido requiere de su posición y su orientación con respecto a un sistema de referencia
- La orientación en el espacio tridimensional viene definida por tres GDL, es decir, tres componentes linealmente independientes
- Para representarla se pueden usar:
  1) Ángulos de Euler
  2) Pares de rotación
  3) Matrices de rotación
  4) Cuaterniones

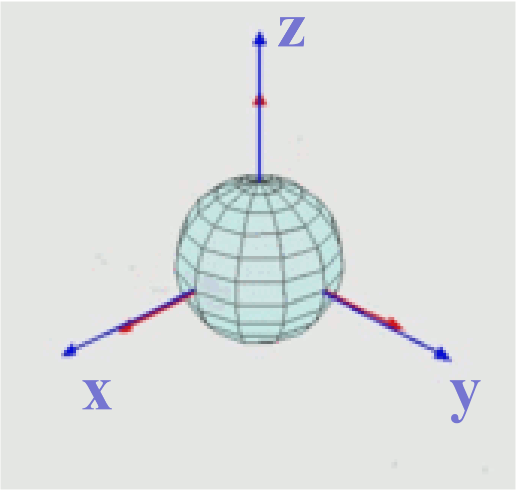




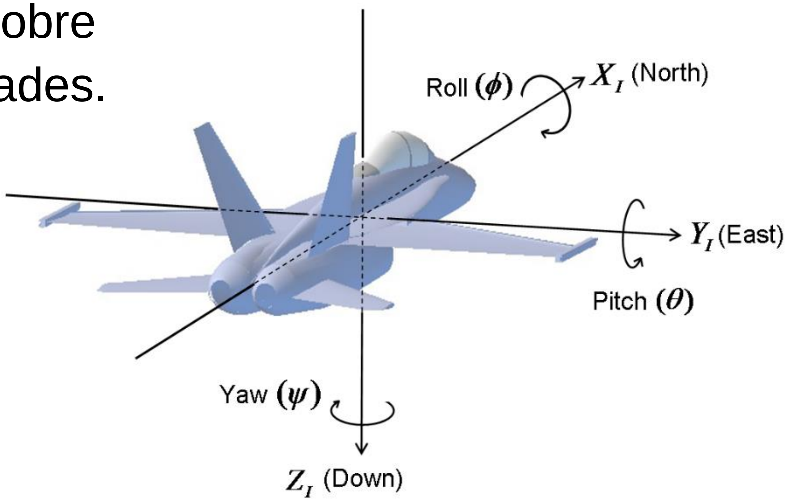


Representación de la orientación. Ángulos de Euler

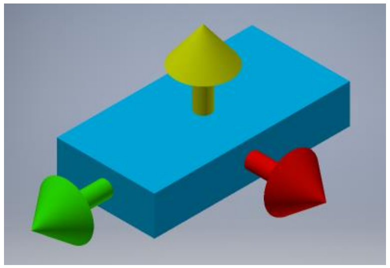
Son un conjunto de tres coordenadas angulares Φ, θ, Ψ que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia móvil OUVW de ejes ortogonales (y solidario al cuerpo cuya orientación se quiere describir), respecto a otro sistema de ejes ortogonales fijo OXYZ.



- Se realizan tres giros consecutivos, de ángulos Φ, θ, Ψ, uno sobre cada eje. No son conmutativos
- Es necesario conocer la secuencia de ejes sobre los que se realizan los giros. Varias posibilidades. Las más comunes son:
    a) Ángulos de Euler WUW
    b) Ángulos de Euler WVW
    c) Ángulos de Euler XYZ (UVW) (roll, pitch y yaw)



Ángulos de Euler – Ejemplo no conmutatividad



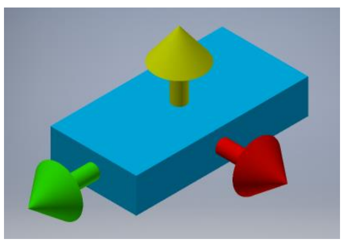
Eje U

Eje V

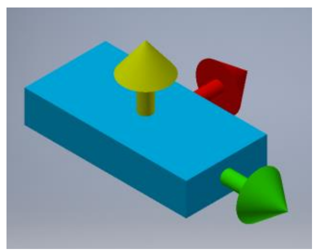
Eje W

W: 90º → U: 90º → V: 90º

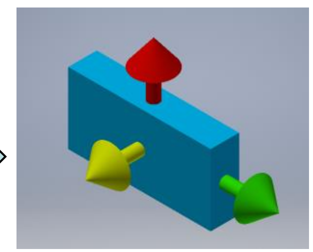
U: 90º → V: 90º → W: 90º



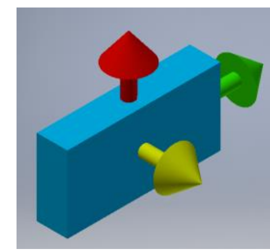
W: 90º

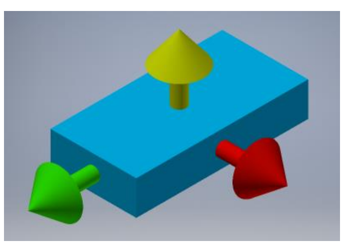


U: 90º

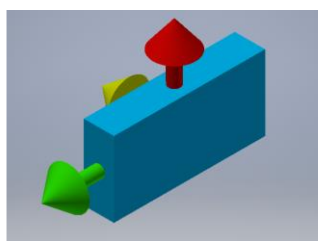


V: 90º

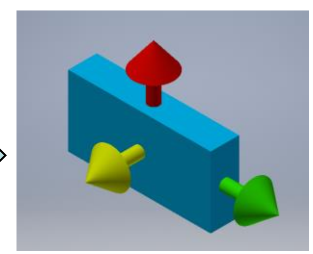




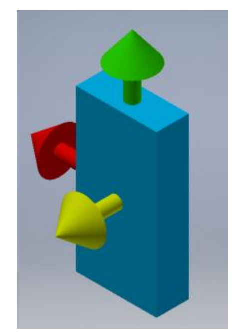
U: 90º



V: 90º

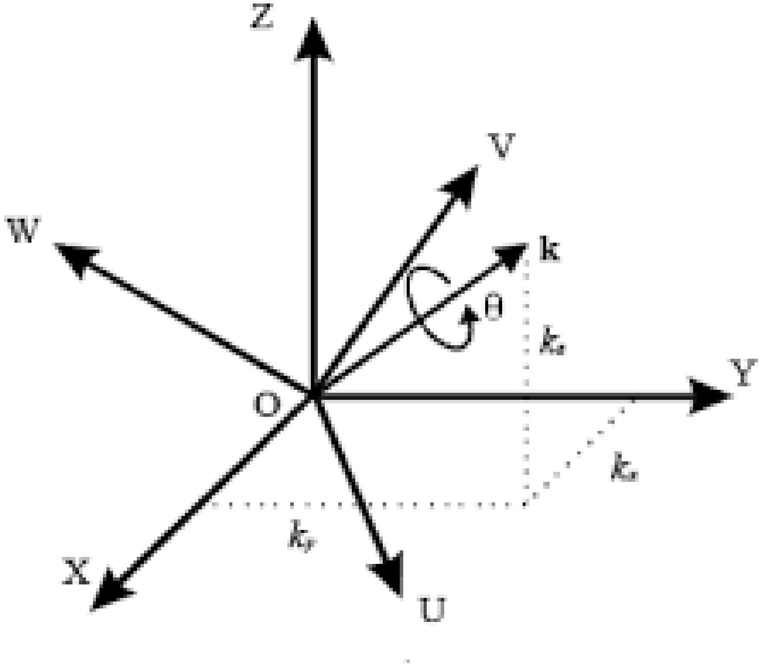


W: 90º

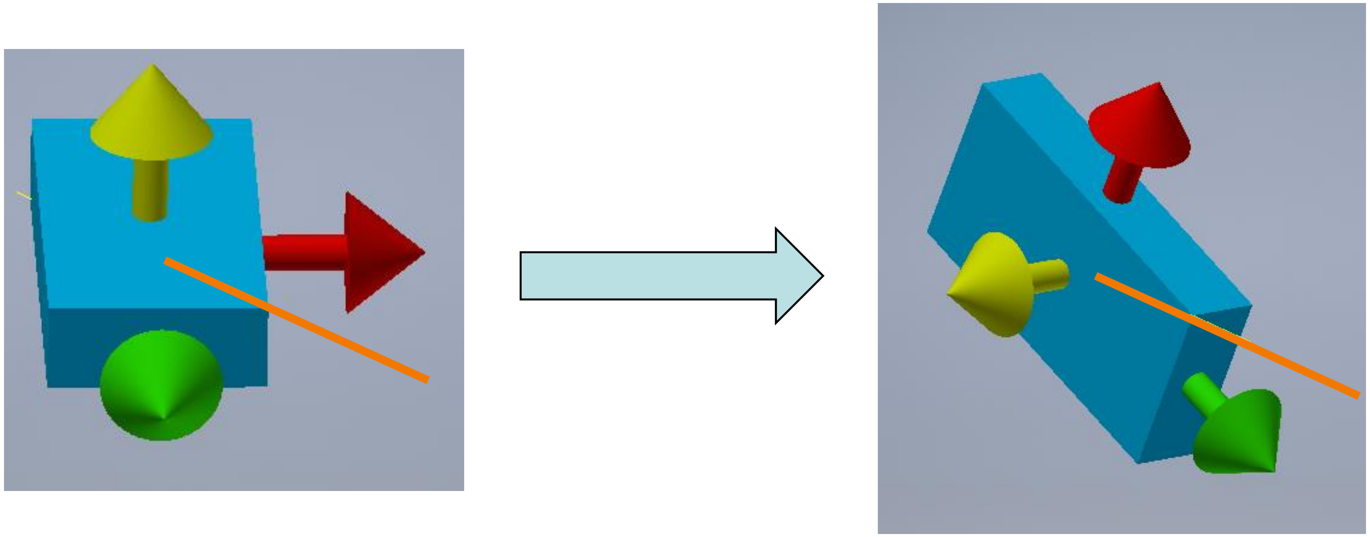


Representación de la orientación. Pares de rotación

- Basados en girar el sistema OXYZ un ángulo θ dado sobre un eje determinado (*Axis-Angle*) que no tiene que ser ninguno de los ejes del sistema de referencia
- El eje de giro viene definido mediante un vector **k = (kx, ky, kz)** dado en el sistema OXYZ



Representación de la orientación. Pares de rotación

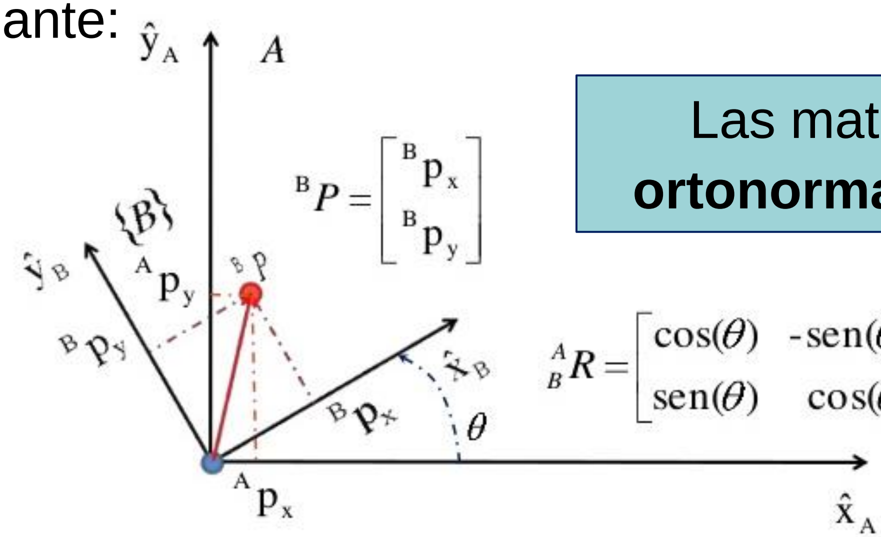


- Salvo casos muy concretos, la visualización de la orientación final no es sencilla
- La aplicación de un par de rotación **Rot (k, θ)** a un vector **p** se realiza mediante la siguiente expresión (Fórmula de Rodrigues)

$$\boxed{\mathbf{Rot}(\mathbf{k},\theta)\mathbf{p} = \mathbf{p}cos\theta - (\mathbf{k}\times\mathbf{p})sen\theta + \mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p})(1-cos\theta)}$$

Representación de la orientación. Matrices de rotación. 2D

- Las matrices de rotación R (o *matrices de cosenos directores*) son el método más extendido y cómodo para la descripción de orientaciones y rotaciones en el plano y en el espacio
- En el plano (2D), conocido P en el sistema de referencia B (**^{B}P**), la matriz **$^{A}R_{B}$** permite calcular la posición P en el sistema A (**^{A}P**) mediante:



$$^{B}P = \begin{bmatrix} ^{B}p_x \\ ^{B}p_y \end{bmatrix}$$

$$^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Las matrices de rotación R son **ortonormales** ($|R| = 1$ y $R^{-1} = R^{T}$)

Las columnas de R representan los **ejes coordenados de B** vistos desde A

$$^{A}P = ^{A}_{B}R \bullet {^{B}P} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{B}p_x \\ ^{B}p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^{B}p_x\cos(\theta) & -{^{B}p_y}\,\mathrm{sen}(\theta) \\ ^{B}p_x\,\mathrm{sen}(\theta) & +\ {^{B}p_y}\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Representación de la orientación. Matrices de rotación. 3D

- En el espacio (3D) la matriz de rotación ${}^{A}\mathbf{R}_{B}$ pasa a ser 3 x 3.
- Ahora se pueden realizar rotaciones sobre cualquier eje (vector)
- Las más usadas son las rotaciones sobre los tres ejes coordinados del sistema de referencia. En este caso las matrices básicas de rotación son:

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Rotation around the Z-Axis}$$

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Rotation around the Y-Axis}$$

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Rotation around the X-Axis}$$

Rotación en torno a un eje arbitrario

- Generalizando para el caso de un giro θ entorno al eje $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, con $|\vec{u}| = 1$.

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta + u_x^2\,(1-\cos\theta) & u_x u_y\,(1-\cos\theta) - u_z \operatorname{sen}\theta & u_x u_z\,(1-\cos\theta) + u_y \operatorname{sen}\theta \\ u_y u_x\,(1-\cos\theta) + u_z \operatorname{sen}\theta & \cos\theta + u_y^2\,(1-\cos\theta) & u_y u_z\,(1-\cos\theta) - u_x \operatorname{sen}\theta \\ u_z u_x\,(1-\cos\theta) - u_y \operatorname{sen}\theta & u_z u_y\,(1-\cos\theta) + u_x \operatorname{sen}\theta & \cos\theta + u_z^2\,(1-\cos\theta) \end{pmatrix}$$

- Se puede comprobar que los giros en torno a X, Y y Z son casos particulares de esta R
- A partir de esta matriz se puede obtener el eje y ángulo de giro

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\left(o_z - a_y\right)^2 + \left(a_x - n_z\right)^2 + \left(n_y - o_x\right)^2}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2}$$

¿Signo?

$$u_x = \frac{o_z - a_y}{2\sin\theta}$$

$$u_y = \frac{a_x - n_z}{2\sin\theta}$$

$$u_z = \frac{n_y - o_x}{2\sin\theta}$$

- Sólo se puede considerar $\theta \in [0º,\ 180º]$

Ejercicio: determinar eje y ángulo de rotación

Dada la matriz de rotación: $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, determinar el eje y ángulo de rotación

- Por estructura de la matriz:

  Eje Y; ángulo -30º.
- Mediante correspondencia con pares de rotación:

  Eje –Y, ángulo 30º

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\left(o_z - a_y\right)^2 + \left(a_x - n_z\right)^2 + \left(n_y - o_x\right)^2}}{2} = 0.5$$

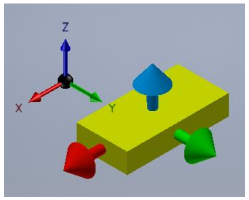
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}(\mathbf{R}) - 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^{\circ}$$

$$u_x = \frac{o_z - a_y}{2\sin\theta} = 0$$

$$u_y = \frac{a_x - n_z}{2\sin\theta} = -1$$

$$u_z = \frac{n_y - o_x}{2\sin\theta} = 0$$

Concatenación de rotaciones sobre sistema fijo vs movil



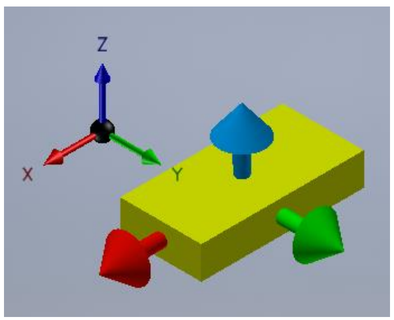
Eje X/U

Eje Y/V

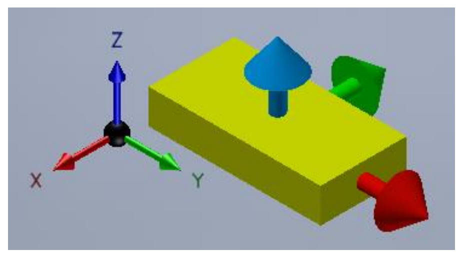
Eje Z/W

W: 90º → U: 90º
Z: 90º → X: 90º

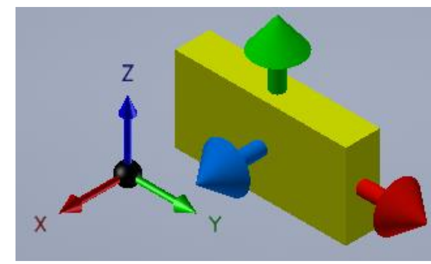
- Rotaciones sobre sistema móvil (rotaciones intrínsecas): $S_0={}^0\mathbf{R}_1 S_1={}^0\mathbf{R}_1{}^1\mathbf{R}_2 S_2$



W: 90º $\Rightarrow$ ${}^0\mathbf{R}_1$

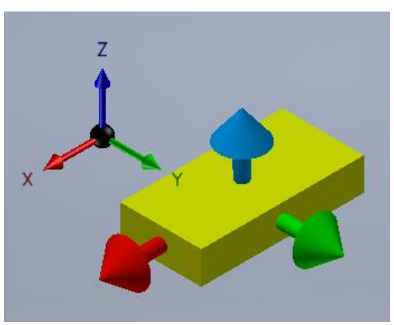


U: 90º $\Rightarrow$ ${}^1\mathbf{R}_2$

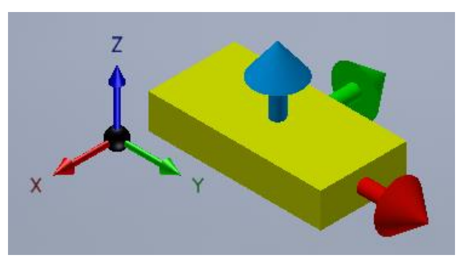


Rotaciones **intrínsecas**: **postmultiplicar** matrices de rotación

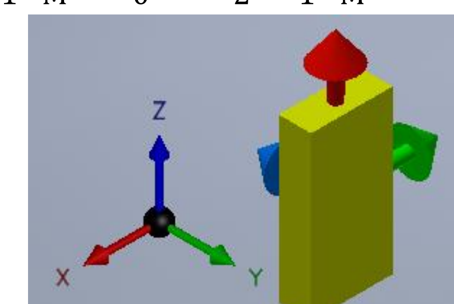
- Rotaciones sobre sistema fijo (rotaciones extrínsecas): $S_0={}^0\mathbf{R}_1 S_M \rightarrow S_0={}^0\mathbf{R}_2{}^0\mathbf{R}_1 S_M$



Z: 90º $\Rightarrow$ ${}^0\mathbf{R}_1$



X: 90º $\Rightarrow$ ${}^0\mathbf{R}_2$



Rotaciones **extrínsecas**: **premultiplicar** matrices de rotación

Composición de rotaciones con matrices de rotación (3D)

- La aplicación de varias rotaciones concatenadas se puede expresar mediante el producto de matrices básicas.
- El orden de las rotaciones es importante, ya que el producto de matrices NO es conmutativo:

$C\theta$ expresa $\cos\theta$ y $S\theta$ expresa $\mathrm{sen}\,\theta$.

ROTACIONES INTRÍNSECAS (I)

1º Rotación en **OZ (θ)**

2º Rotación en **OY' (ϕ)** (ya girado)

3º Rotación en **OX'' (α)** (ya girado)

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{z},\theta)\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi)\mathbf{R}(\mathbf{x},\alpha) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\theta C\phi & -S\theta C\alpha + C\theta S\phi S\alpha & S\theta S\alpha + C\theta S\phi C\alpha \\ S\theta C\phi & C\theta C\alpha + S\theta S\phi S\alpha & -C\theta S\alpha + S\theta S\phi C\alpha \\ -S\phi & C\phi S\alpha & C\phi C\alpha \end{bmatrix}$$

ROTACIONES INTRÍNSECAS (II)

1º Rotación en **OX (α)**

2º Rotación en **OY' (ϕ)** (ya girado)

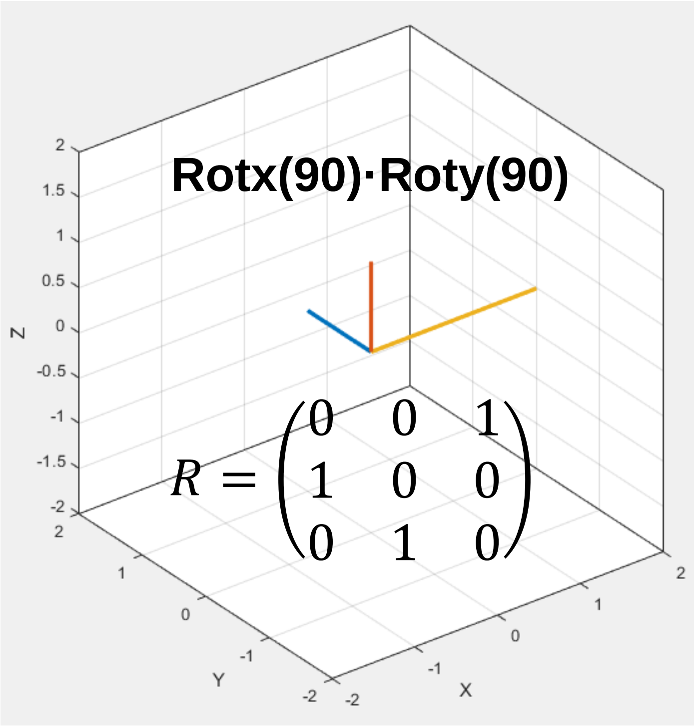
3º Rotación en **OZ'' (θ)** (ya girado)

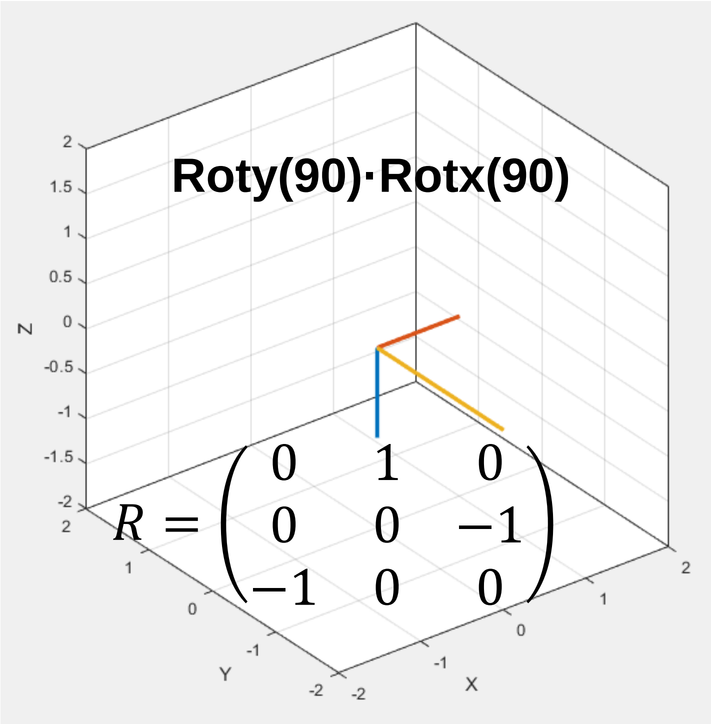
$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{x},\alpha)\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi)\mathbf{R}(\mathbf{z},\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\phi S\theta & S\phi \\ S\alpha S\phi C\theta + C\alpha S\theta & -S\alpha S\phi S\theta + C\alpha C\theta & -S\alpha C\phi \\ -C\alpha S\phi C\theta + S\alpha S\theta & C\alpha S\phi S\theta + S\alpha C\theta & C\alpha C\phi \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Composición de rotaciones intrínsecas (3D)

- Considera una rotación de +90º en X y otra de +90º en el eje Y intrínseco (eje relativo, es decir, ya girado). ¿Son conmutativas? Calcula las matrices finales.





Herramienta *Rotation Viewer* (para MATLAB):
https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/62511-rotationviewer

Ejercicio: Transformación de Matriz de Rotación a Ángulos de Euler

- Considera la matriz de rotación siguiente, ¿cuál sería su representación en ángulos de Eurler XYZ?

$$R = \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/4 & -\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/2 \\ 0.5 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}(\mathbf{x},\alpha)\,\mathbf{R}(\mathbf{y},\phi)\,\mathbf{R}(\mathbf{z},\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha & -S\alpha \\ 0 & S\alpha & C\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\phi & 0 & S\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\phi & 0 & C\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta & 0 \\ S\theta & C\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C\phi C\theta & -C\phi S\theta & S\phi \\ S\alpha S\phi C\theta + C\alpha S\theta & -S\alpha S\phi S\theta + C\alpha C\theta & -S\alpha C\phi \\ -C\alpha S\phi C\theta + S\alpha S\theta & C\alpha S\phi S\theta + S\alpha C\theta & C\alpha C\phi \end{bmatrix}$$

$$\frac{a_{23}}{a_{33}} = \frac{-\cos\phi\sin\alpha}{\cos\phi\cos\alpha} = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\frac{a_{23}}{a_{33}}\right) = 90º$$

$$a_{13} = \sin\phi \Rightarrow \phi = \arcsin(a_{13}) = 45º$$

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{\cos\phi\sin\theta}{-\cos\phi\cos\theta} = \tan\theta \Rightarrow \theta = \arctan\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right) = 30º$$

Matrices de transformación homogénea

Las matrices de transformación homogénea ${}^{A}T_{B}$ (transformadas afines o simplemente transformadas)

- En R^3 son matrices 4 x 4 compuestas por varias submatrices, que permiten una traslación y una rotación de un vector en coordenadas homogéneas
- Permiten concatenar varias operaciones de traslación + rotación, obteniendo el resultado mediante el uso del álgebra matricial.
- En el caso general pueden también incluir transformaciones de perspectiva y escalados, que no suelen ser útiles en robótica:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3x3} & \mathbf{p}_{3x1} \\ \mathbf{f}_{1x3} & \mathbf{w}_{1x1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rotacion & Traslacion \\ Perspectiva & Escalado \end{bmatrix}$$

R_{3x3}: matriz de rotación

p_{3x1}: vector de traslación

f_{1x3}: transformación de perspectiva

w_{1x1}: escalado global (1)

En robótica:

$f_{1x3} = 0\ 0\ 0$

$W_{1x1} = 1$

Coordenadas homogéneas

Un vector **p** = (a, b, c) en R^3 se representa en coordenadas homogéneas añadiendo una cuarta componente de escalado, **w**

- En robótica utilizaremos siempre factor de escala unitario, w = 1 (homogeneizado)

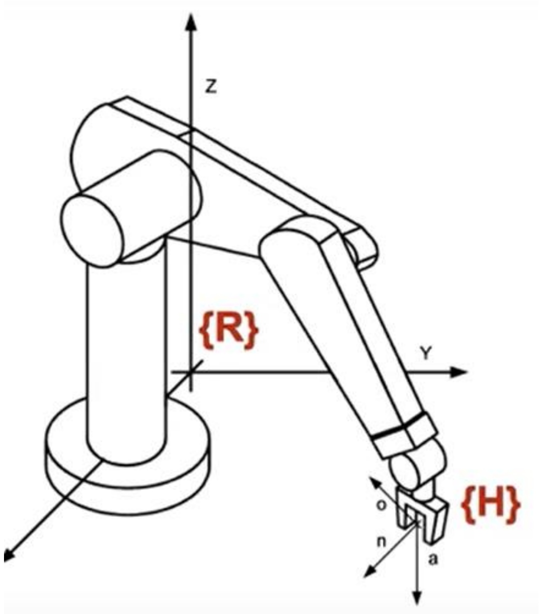
$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

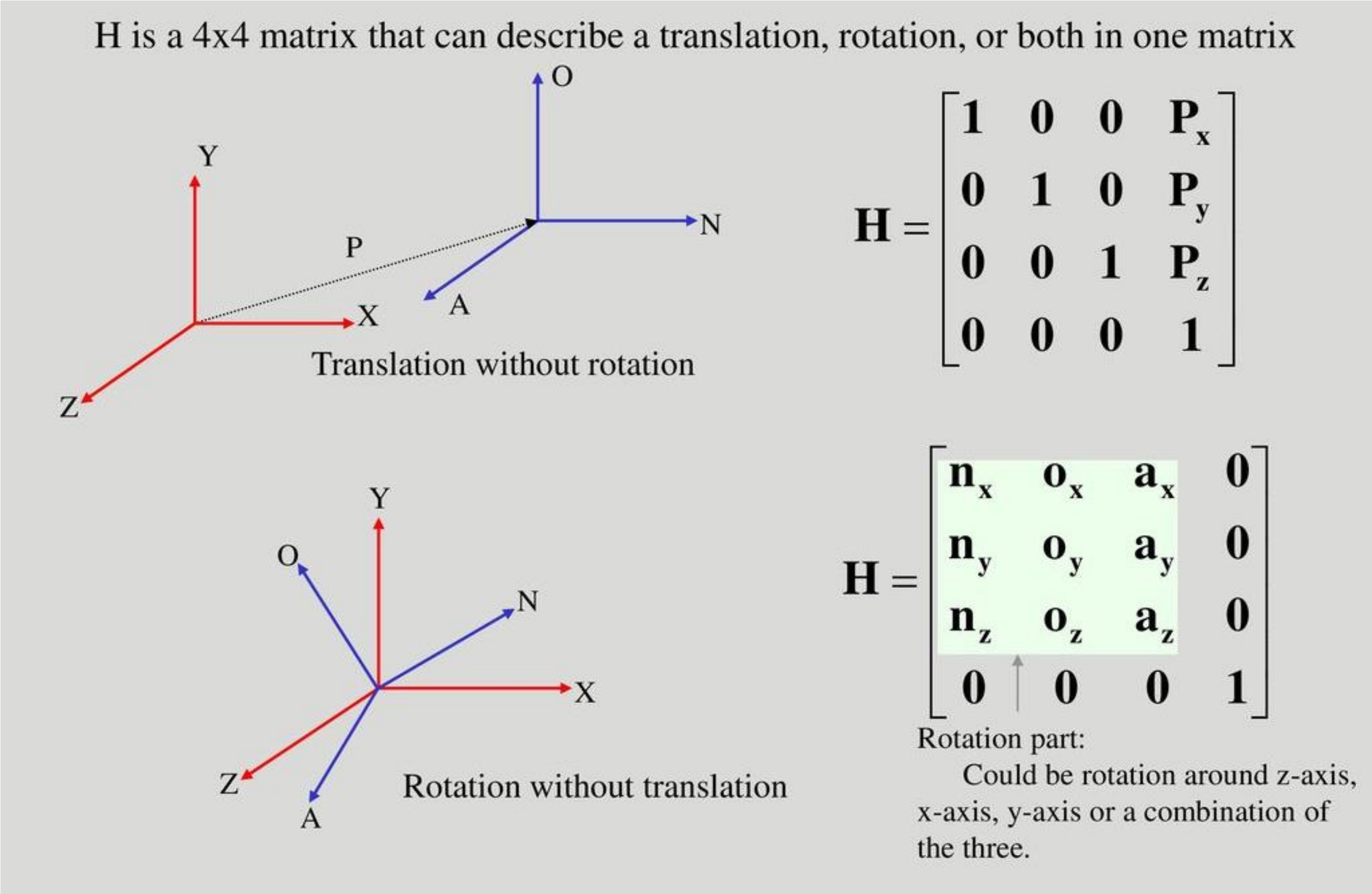
Rotación y desplazamiento se pueden combinar en la misma matriz si y sólo si son relativos al mismo sistema de referencia (mismo eje ya que son transformaciones intrínsecas)

Orientación de la herramienta
Dirección de aproximación
Posición de la herramienta

$$V_R = \mathbf{T} V_H = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V_H$$

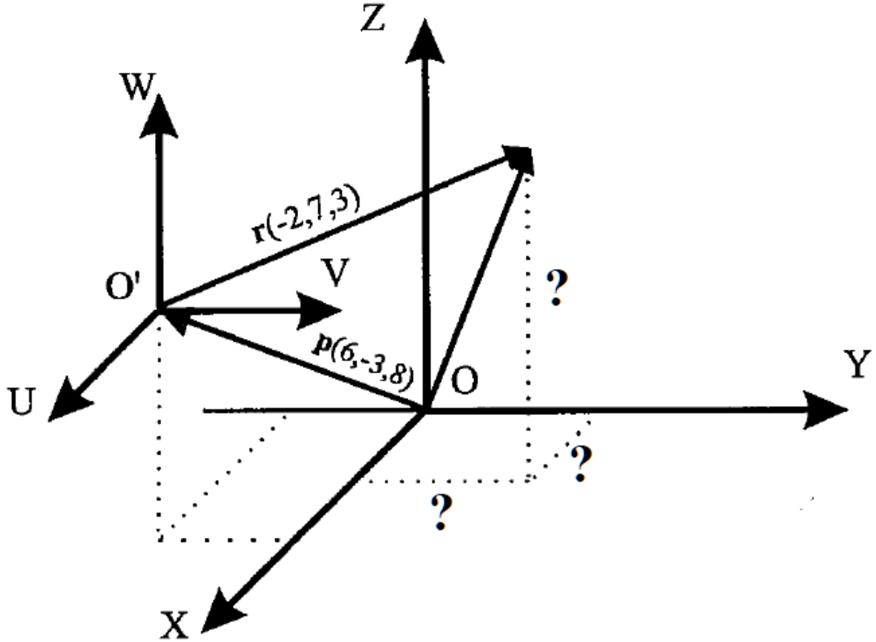


Rotaciones y translaciones individuales con matrices homogéneas en R^3



Ejemplo de traslación con matrices homogeneas

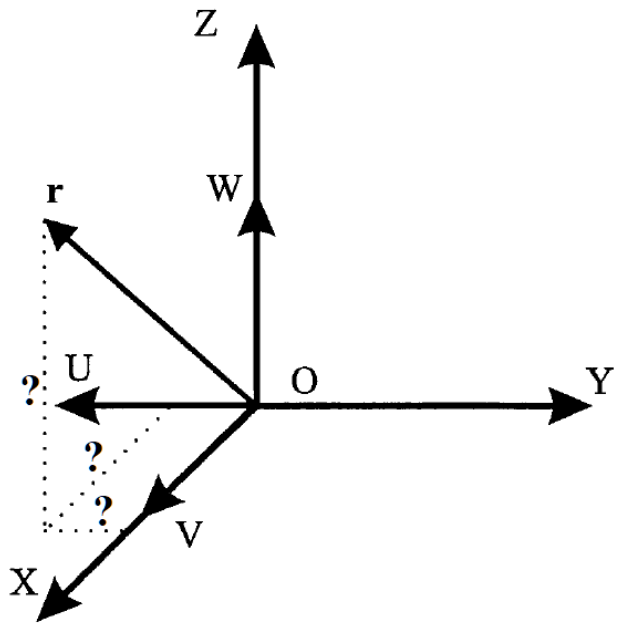
Según la figura, el sistema O'UVW está trasladado un vector **p**=(6,-3,8) con respecto el sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del punto situado al extremo del vector **r** cuyas coordenadas respecto el sistema móvil son $\mathbf{r}_{UVW}$=(-2,7,3)



$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de rotación con matrices homogeneas

Según la figura, el sistema O'UVW está girado -90º alrededor del eje OZ con respecto el sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{XYZ}$ si $\mathbf{r}_{UVW}$=(4,8,12)



$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

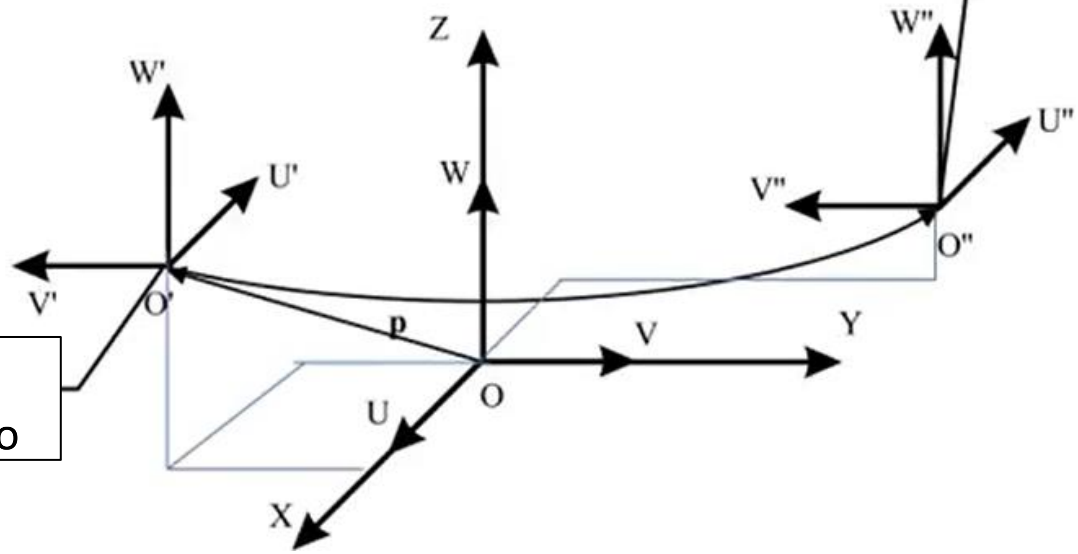
Universidad Rey Juan Carlos

Ejercicio: concatenación de movimiento con matrices de transformación homogenea

Considera una rotación de +180º en Z y traslación (-1, 1, 2) respecto el sistema de referencia movil. ¿Son conmutativas? Calcula las matrices finales.

1º Desplazamiento
2º Rotación

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1º Rotación
2º Desplazamiento

Transformaciones en el plano (R^2)

En este caso se utilizan matrices de transformación 3 x 3.

- Las matrices de rotación serán 2 x 2. Sólo se pueden realizar rotaciones con respecto al eje perpendicular al plano.
- Los vectores de tralación serán 2 x 1.
- Un vector **p** = (a, b) en R^2 se representa en coordenadas homogéneas de la misma manera: añadiendo una tercera componente w = 1.

$$\begin{bmatrix} X_{translated} \\ Y_{translated} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & D_x \\ 0 & 1 & D_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_{rotated} \\ Y_{rotated} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Caso general 2D: Traslación y rotación combinadas

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & x_t \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & y_t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Representación de la orientación. Cuaterniones

- Es la manera más concisa y eficiente (computacionalmente) de representar orientaciones y giros en el espacio

- Codifican la misma información que los pares de rotación (eje de rotación y ángulo de giro)

- Son elementos de un espacio vectorial de dimensión 4. Se construyen como una extensión de los números complejos mediante la adición de dos unidades imaginarias adicionales: *j*, *k*.

$$Q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = (s, \mathbf{v})$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

Algebra de cuaterniones

- Suma de cuaterniones:

$$q_1 + q_2 = (s_1, \mathbf{v}_1) + (s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

- Producto por un escalar

$$Q_2 = a \cdot Q_1 = a(s_1, \mathbf{v}_1) = (as_1, a\mathbf{v}_1)$$

- Producto de cuaterniones (asociativo, no conmutativo).
  - Se realiza componente a componente de acuerdo con las Reglas de Hamilton:
  - Mediante producto escalar y vectorial

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

$$Q_3 = Q_1 \circ Q_2 = (s_1, \mathbf{v}_1) \circ (s_2, \mathbf{v}_2) = (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1)$$

- Cuaternión conjugado:

$$Q^* = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3] = (s, -\mathbf{v})$$

- Norma:

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

- Inverso

$$Q^{-1} = \frac{Q*}{\|Q\|}$$

Representación de orientación y traslación

- Definición de cuaternión de rotación: giro sobre un eje dado por el vector **k** un ángulo **θ**:

$$Q = \mathrm{Rot}(\mathbf{k}, \theta) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \mathbf{k}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$$

- Aplicación de cuaternión de rotación a un vector **r** en R^3: producto del cuaternion **(0,r)** por Q y Q*

$$(0, \mathbf{r}_{XYZ}) = Q \circ (0, \mathbf{r}_{UVW}) \circ Q^*$$

- Traslaciones mediante cuaterniones: la traslación del vector **r** en R^3 definida por el vector **t** se realiza sumando el cuaternion **(0,t)**.

$$(0, \mathbf{r}_2) = (0, \mathbf{r}_1) + (0, \mathbf{t})$$

Ejercicio

- ¿Cuál es el cuaternio que representa una rotación de 60º sobre el eje **k**=(3, -2, 1)?

$$Q = Rot(k, 60^{o}) = \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) * \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}\right]$$

$$Q = Rot(k, 60^{o}) = \left[\cos 30 + \sin 30 * \frac{(3i + -2j + k)}{\sqrt{14}}\right]$$

$$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{1}{2\sqrt{14}}\right)$$

Ejercicio

- Desde un sistema de referencia móvil se conoce el vector $\vec{r} = (1,2,3)$
- El sistema de referencia móvil se localiza rotando 90º respecto al eje Z de un sistema de referencia fijo
- Calcula las coordenadas del vector visto desde el sistema de referencia fijo usando matrices de rotación y cuaterniones

1. Matrices de rotación

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos 90 & -\sin 90 & 0 \\ \sin 90 & \cos 90 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Cuaterniones

$$Q = [\cos 45 + \sin 45(0i + 0j + k)]$$

$$(0, r_2) = Q \circ (0, r_1) \circ Q*$$

$$(0, r_2) = (\cos 45 + k \sin 45) \circ (0, r_1) \circ (\cos 45 - k \sin 45)$$

$$(0, r_2) = 0 - 2i + j + 3k$$

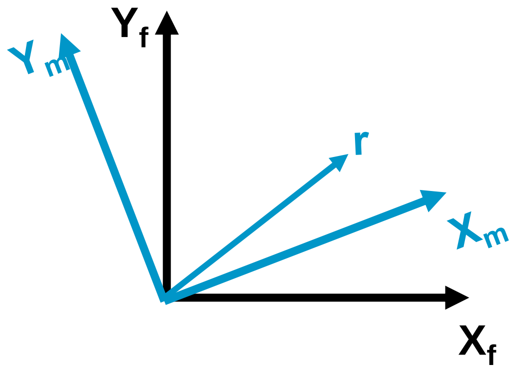
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j$$

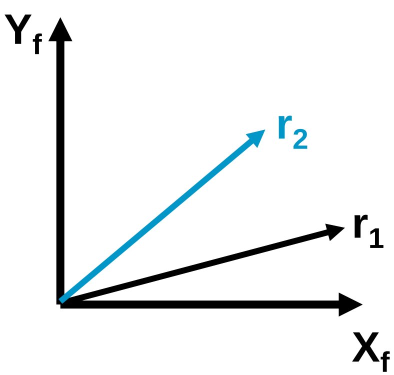
Rotaciones de vectores

- Hasta ahora hemos partido de un sistema de referencia móvil que ha rotado desde un sistema de referencia fijo y de la representación de un vector que es constante dentro del sistema de referencia movil



$$\mathbf{r}_f = {}^m_f\mathbf{R}\mathbf{r}_m$$

- La rotación de vectores es equivalente a considerar el vector original visto en el sistema fijo y el vector final visto en el sistema movil



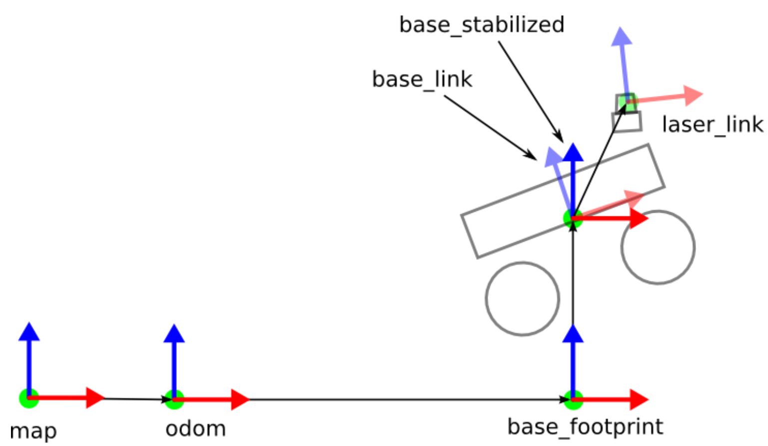
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}\mathbf{r}_2 \Rightarrow \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}^T\mathbf{r}_1$$

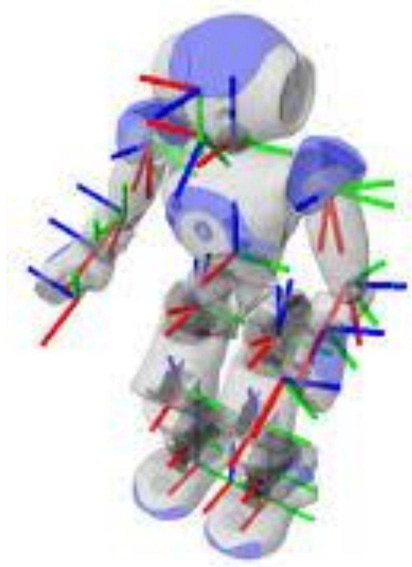
Comparación de métodos de localización espacial

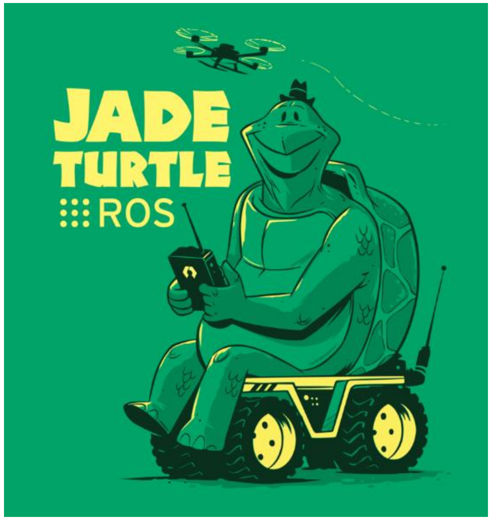
- Matrices de transformación homogénea
  - Representación conjunta de posición y orientación
  - Facilidad para realizar composición de transformaciones (multiplicación de matrices)
  - Posibilidad de transformar la representación de un vector referido a un sistema fijo
  - Facilidad de cálculo
  - Inconveniente: alto nivel de redundancia (12 componentes para 6 grados de libertad)
- Ángulos de Euler
  - Sólo representan orientación
  - Notación compacta (3 elementos)
  - Díficil de representar rotaciones compuestas y de aplicar sobre vector
- Par de rotación
  - Sólo representa orientación
  - Compato (4 elementos)
  - Aplicable en la rotación de vectores
  - Expresión compleja que limita su utilidad
- Cuaternios
  - Sólo representa orientación aunque pueden componerse rotaciones junto a traslaciones
  - Copacto (4 elementos) y cálculo computacionalmente económico
  - Transformación de vector en traslación y rotación

Librerías para computación: ROS TF

- **ROS** (*Robotic Operating System*) es el entorno de software libre más usado el desarrollo de aplicaciones robóticas (fundamentalmente para robots de servicio, aunque también para robots industriales)
- Posee librerías para el cálculo y publicación de transformaciones entre los múltiples sistemas de referencia de un robot (TF)

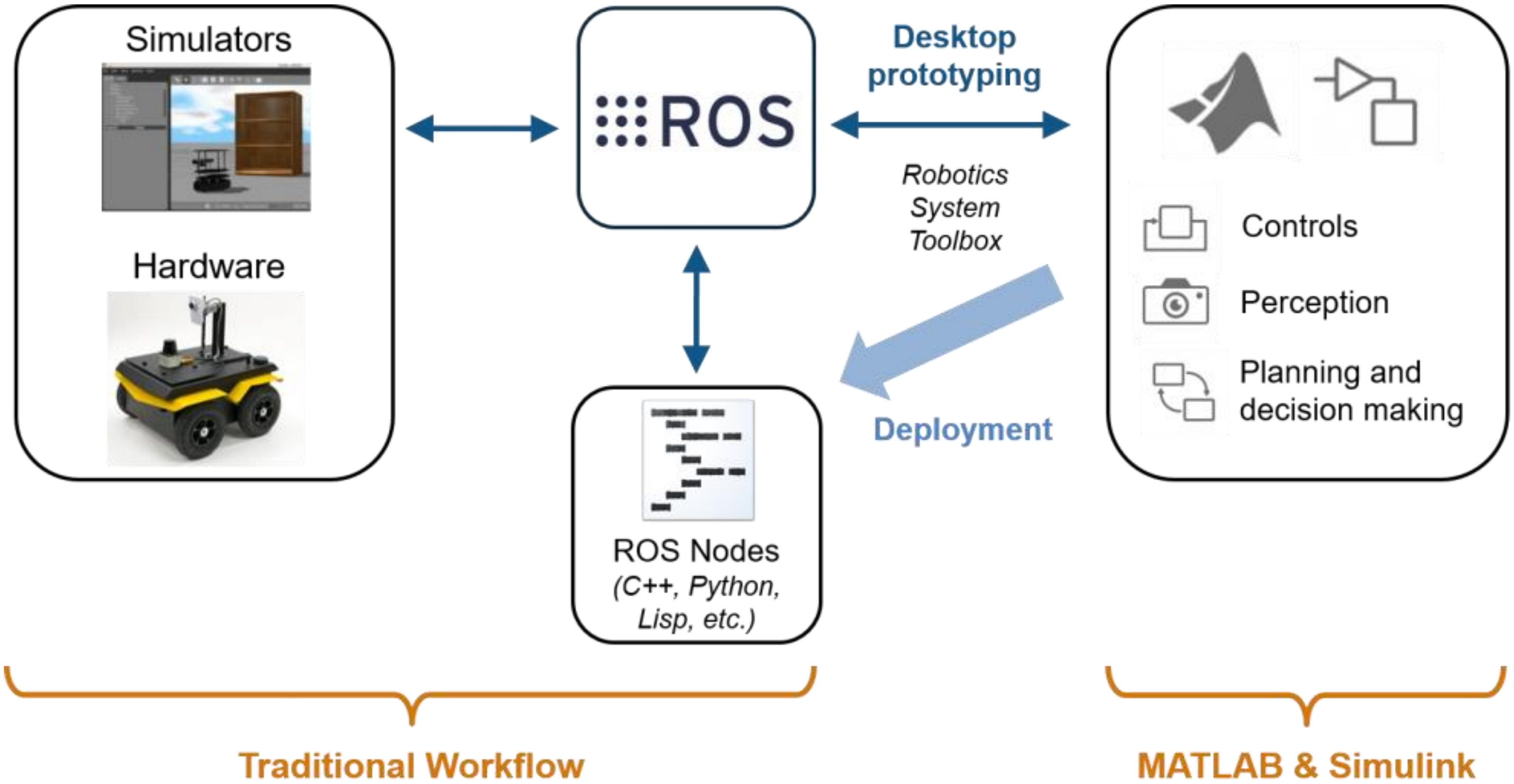






Workflow

- El Robotic Systems Toolbox de MATLAB ofrece una interfaz de conexión con ROS, luego son entornos de trabajo compatibles



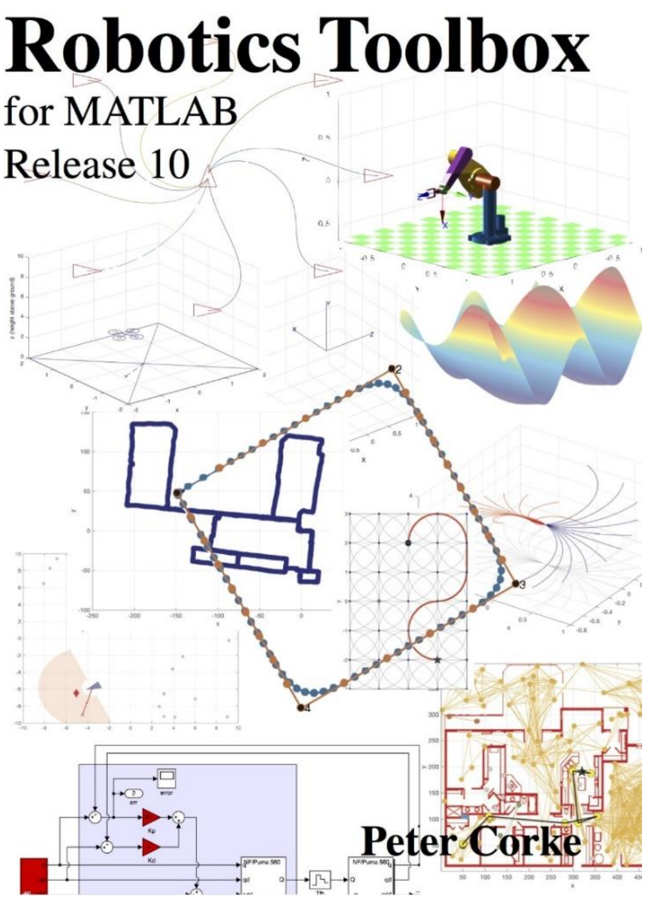
Computación de transformaciones con MATLAB

- El *Robotic Systems Toolbox* de MATLAB permite trabajar con todas las representaciones de la orientación. Por ejemplo, para cuaterniones

  https://es.mathworks.com/help/aerotbx/ug/quatrotate.html

- Además posee funciones que permiten traducir de una representación a otra:

Converting To / Converting From	Axis-Angle (axang)	Euler Angles (eul)	Quaternion (quat)	Rotation Matrix (rotm)	Homogeneous Transformation (tform)	Translation Vector (trvec)
Axis-Angle (axang)						
Euler Angles (eul)						
Quaternion (quat)						
Rotation Matrix (rotm)						
Homogeneous Transformation (tform)						
Translation Vector (trvec)						



Funciones para el cálculo de orientaciones

- Generación de matrices de rotación :

```
rotx(angDeg)
roty(angDeg)
rotz(angDeg)
```

- Conversión de representación

```
angEuler=rotm2eul(rotM, 'XYZ')
quat=eul2quat(angEuler, 'XYZ')
quat=rotm2quat(rotM)
rotm=axang2rotm([axisX, axisY, axisZ, angRad])
trHom=quat2tform(quat)
```

- Calculo de cuaterniones

```
quat1_conj=quatconj(quat1)
quat3=quatmultiply(quat1, quat2)
```

Composición de rotaciones básicas – Ejercicio 1

Un sistema de referencia OXYZ se gira 45º con respecto a su eje X y posteriormente otros 45º con respecto a su eje Z’ intrínseco o relativo (ya girado).

a) Construye las matrices básicas de rotación con respecto a cada eje, y calcula la matriz final de rotación R que representa ambos giros.

b) Representa gráficamente la orientación del sistema final girado basándote en las columnas de la matriz de rotación.

c) Comprueba el resultado mediante la aplicación *Rotation Viewer* para MATLAB.

d) Realiza las rotaciones en orden inverso e indica si el resultado es el mismo.

Composición de rotaciones básicas – Ejercicio 2

Un sistema de referencia OXYZ se gira 90º con respecto a su eje Z y posteriormente otros -90º con respecto a sus eje X', seguido un giro final de 90º con respecto a Y'' (rotaciones intrínsecas o relativas).

a) Construye las matrices básicas de rotación con respecto a cada eje, y calcula la matriz final de rotación R que representa ambos giros.

b) Representa gráficamente la orientación del sistema final girado basándote en las columnas de la matriz de rotación.

c) ¿Hay algún eje que permanezca en la misma orientación?

d) Comprueba el resultado mediante la aplicación *Rotation Viewer* para MATLAB.

Matrices de transformación homogénea

Ejercicio 3. Un sistema de referencia O'UVW se ha trasladado un vector p = (3,-4, 0) con respecto a otro sistema fijo OXYZ, sin realizar ninguna rotación. Si las coordenadas de un vector r en el sistema O'UVW son r_{uvw} = (4. -5, -11), calcula las coordenadas de dicho vector en el sistema OXYZ.

Ejercicio 4. Un sistema de referencia OUVW se ha girado -30º alrededor del eje OZ de un sistema fijo OXYZ, sin ninguna traslación Si r_{uvw} = (-3, 4, 15), calcula las coordenadas del r en el sistema OXYZ.

Ejercicio 5. Un sistema de referencia O'UVW se gira 90º alrededor del eje OX de un sistema fijo OXYZ y posteriormente se traslada un vector p = (8 -4,12) también con respecto a OXYZ. Si r_{uvw} = (-3, 4, -11), calcula las coordenadas del r en el sistema OXYZ utilizando matrices de transformación y coordenadas homogéneas.

Ejercicio 6. Obtén la matriz de transformación T que representa las siguientes transformaciones concatenadas sobre un sistema de referencia OXYZ fijo: traslación de un vector p_{xyz} = (-3,10,10), un giro de -90º sobre el eje O'U del sistema trasladado y por último un giro de 90º sobre el eje O'V del sistema girado.

Matrices de transformación homogénea

Ejercicio 3. Un sistema de referencia O'UVW se ha trasladado un vector p = (3,-4, 0) con respecto a otro sistema fijo OXYZ, sin realizar ninguna rotación. Si las coordenadas de un vector r en el sistema O'UVW son r_{uvw} = (4. -5, -11), calcula las coordenadas de dicho vector en el sistema OXYZ.

Ejercicio 4. Un sistema de referencia OUVW se ha girado -30º alrededor del eje OZ de un sistema fijo OXYZ, sin ninguna traslación Si r_{uvw} = (-3, 4, 15), calcula las coordenadas del r en el sistema OXYZ.

Ejercicio 5. Un sistema de referencia O'UVW se gira 90º alrededor del eje OX de un sistema fijo OXYZ y posteriormente se traslada un vector p = (8 -4,12) también con respecto a OXYZ. Si r_{uvw} = (-3, 4, -11), calcula las coordenadas del r en el sistema OXYZ utilizando matrices de transformación y coordenadas homogéneas.

Ejercicio 6. Obtén la matriz de transformación T que representa las siguientes transformaciones concatenadas sobre un sistema de referencia OXYZ fijo: traslación de un vector p_{xyz} = (-3,10,10), un giro de -90º sobre el eje O'U del sistema trasladado y por último un giro de 90º sobre el eje O'V del sistema girado.

Cuaterniones (I)

Ejercicio 7. Calcula utilizando las expresiones vistas en teoría el cuaternión que representa una rotación de 90º sobre el eje dado por el vector u = (3, -2, 1). Comprueba el resultado utilizando MATLAB.

Ejercicio 8. Utiliza MATLAB para obtener el vector resultante de aplicar la rotación representada por el cuaternión del ejercicio anterior al vector r = (5, 2, -6)

Ejercicio 9. Utiliza MATLAB para obtener la matriz de transformación equivalente a la rotación representada por el cuaternión del ejercicio 7.

Ejercicio 10. Utiliza MATLAB para obtener los tres ángulos de Euler, en grados, equivalentes a la rotación representada por el cuaternión del ejercicio 7, en las secuencias de rotación de ejes “XYZ” y “ZYZ”. ¿Hay alguna diferencia entre ambas opciones de rotación de ejes?

Cuaterniones (II)

Ejercicio 11. Sea el movimiento consistente en trasladar un sistema de referencia OXYZ mediante el vector (4, 2, 8), seguido de girarlo 30º entorno al vector (1,1,0), y trasladarlo nuevamente según el vector (1, 0, 1) convirtiéndose en el sistema OUVW, y estando estas transformaciones definidas en el sistema de referencia móvil.

a) Utilizando cuaterniones, calcula la representación del vector $v_{UVW}(3, -1, 2)$ visto en el sistema fijo.

b) Utilizando matrices de transformación homogenea, calcula la representación del mismo vector $v_{UVW}(3, -1, 2)$ visto en el sistema fijo.

c) Comprueba que ambas formulaciones dan el mismo resultado