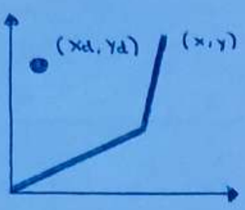
Apuntes Robótica Industrial:

Tema 3 (Parte 2): Cinemática inversa del robot

TEORÍA



$$E = (x_d - x)^2 + (y_d - y)^2$$
$$x = L_1 C_1 + L_2 C_{12}$$
$$y = L_1 S_1 + L_2 S_{12}$$

Ortonormalidad de una matriz de transformación homogenea inversa:
$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -n^T p \\ o_x & o_y & o_z & -o^T p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A \cdot \cos\theta + B \cdot \text{sen}\,\theta = 0$, donde $\theta = \text{atan2}(A, -B)$ y $\theta = \text{atan2}(-A, B)$

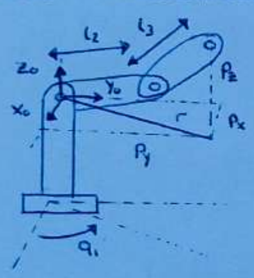
$A \cdot \cos\theta + B \cdot \text{sen}\,\theta = C$, donde $\theta = \text{atan2}(B, A) \pm \text{atan2}\left(\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}, C\right)$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot \cos\theta - B \cdot \text{sen}\,\theta &= C \\ A \cdot \text{sen}\,\theta + B \cdot \cos\theta &= D \end{aligned}\right\} \theta = \text{atan2}(D, C) - \text{atan2}(B, A)$$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot \cos\theta + B \cdot \text{sen}\,\theta &= C \\ D \cdot \text{sen}\,\theta + E \cdot \cos\theta &= F \end{aligned}\right\} \theta = \text{atan2}(CF - CE, CD - BF)$$

EJEMPLOS

① Obtener la cinemática inversa de un robot de 3 Grados De Libertad.

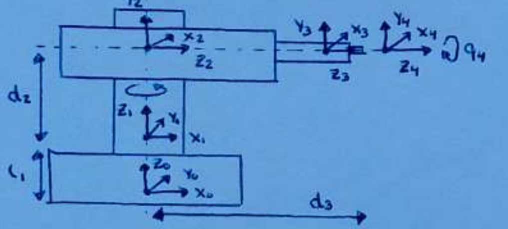


$$\left.\begin{aligned} r^2 &= P_x^2 + P_y^2 \\ r^2 + P_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 \cos q_3 \end{aligned}\right\} \cos q_3 = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3} \; ; \quad \text{sen}\, q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$q_3 = \text{arctg}\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}} \right) \qquad q_1 = \text{arctg}\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

$$q_2 = \text{Cato abajo} - \text{Cato arriba} = \text{arctg}\left(\frac{P_z}{\pm\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}\right) - \text{arctg}\left(\frac{l_3 \,\text{sen}\, q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

② Obtener la cinemática inversa de un robot de 4 Grados De Libertad.



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	0
2	90°	d_2	0	90°
3	0	d_3	0	0
4	q_4	l_4	0	0

Todos los cálculos previos se han realizado en el ejemplo 4 del Tema 3 (Parte 1):

$$T = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4 = \begin{pmatrix} -\text{sen}(q_1)\cos(q_4) & \text{sen}(q_1)\,\text{sen}(q_4) & \cos(q_1) & \cos(q_1)(d_3 + l_4) \\ \cos(q_1)\cos(q_4) & -\cos(q_1)\,\text{sen}(q_4) & \text{sen}(q_1) & \text{sen}(q_1)(d_3 + l_4) \\ \text{sen}(q_4) & \cos(q_4) & 0 & d_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{aligned} P_x &= \cos(q_1)(d_3 + l_4) \\ P_y &= \text{sen}(q_1)(d_3 + l_4) \\ P_z &= d_2 + l_1 \end{aligned}$$

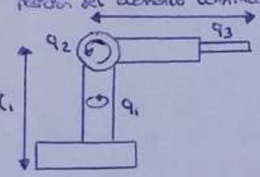
$P_z = d_2 + l_1 \Rightarrow d_2 = P_z - l_1$

$P_x^2 + P_y^2 = \cos^2(q_1)(d_3 + l_4)^2 + \text{sen}^2(q_1)(d_3 + l_4)^2 = (\text{sen}^2(q_1) + \cos^2(q_1))(d_3 + l_4)^2 = d_3^2 + l_4^2 \Rightarrow d_3 = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} - l_4$

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{\text{sen}(q_1)(d_3 + l_4)}{\cos(q_1)(d_3 + l_4)} \Rightarrow q_1 = \text{arctg}\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$$

$$q_4 = \text{arctg}\left(\frac{\text{sen}(q_4)}{\cos(q_4)}\right)$$

③ Obtener la cinemática inversa de un robot esférico de 3 Grados De Libertad definido por la siguiente tabla de parámetros D-H, considerando sólo la posición del elemento terminal.



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	q_2	0	0	-90°
3	0	q_3	0	0

$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\mathrm{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ) & -\mathrm{sen}(90^\circ) & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & \mathrm{sen}(q_1) & 0 \\ \mathrm{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\mathrm{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & -\mathrm{sen}(-90^\circ) & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\mathrm{sen}(q_2) & 0 \\ \mathrm{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2) & -\mathrm{sen}(q_1) & -\cos(q_1)\mathrm{sen}(q_2) & -q_3\cos(q_1)\mathrm{sen}(q_2) \\ \mathrm{sen}(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1) & -\mathrm{sen}(q_1)\mathrm{sen}(q_2) & -q_3\,\mathrm{sen}(q_1)\mathrm{sen}(q_2) \\ \mathrm{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & q_3\cos(q_2) + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando $({}^0A_1)^{-1}\,T = {}^1A_2\,{}^2A_3$, se tiene que: $\mathrm{Sen}(q_1)P_x - \cos(q_1)P_y = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}(q_1) = \frac{\mathrm{sen}(q_1)}{\cos(q_1)} = \frac{P_y}{P_x} \Rightarrow q_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{P_y}{P_x}\right)$

Y por último, aplicando $({}^1A_2)^{-1}({}^0A_1)^{-T}\,T = {}^2A_3$, se puede obtener lo siguiente:

$\cos(q_2)\cos(q_1)P_x + \cos(q_2)\mathrm{sen}(q_1)P_y + \mathrm{sen}(q_2)P_z - l_1\mathrm{sen}(q_2) = \cos(q_2)\left(\cos(q_1)P_x + \mathrm{sen}(q_1)P_y\right) + \mathrm{sen}(q_2)(P_z - l_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{tg}(q_2) = \frac{\mathrm{sen}(q_2)}{\cos(q_2)} = -\frac{\cos(q_1)P_x + \mathrm{sen}(q_1)P_y}{(P_z - l_1)}$

$q_3 = -\mathrm{sen}(q_2)\cos(q_1)P_x - \mathrm{sen}(q_2)\mathrm{sen}(q_1)P_y + \cos(q_2)P_z - \cos(q_2)l_1 = \cos(q_2)(P_z - l_1) - \mathrm{sen}(q_2)\left(\cos(q_1)P_x + \mathrm{sen}(q_1)P_y\right)$

IMPORTANTE: Desacoplo cinemático para un robot de 6 Grados de Libertad $\Rightarrow {}^3R_6 = ({}^0R_3)^T\,[noa]$, donde R es una matriz de rotación.

EJERCICIOS DEL TEMA 3 - PARTE 2

Cinemática inversa del robot

Ejercicio 1. Obtén la representación gráfica y resuelve el problema cinemático inverso para el robot de 3 grados de libertad definido por la siguiente tabla de parámetros D-H, considerando sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal (sin la orientación).

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	q_1	0	0
2	q_2	0	0	-90
3	0	q_3	0	0

Ejercicio 2 Obtén la representación gráfica y resuelve el problema cinemático inverso para el robot esférico definido por la siguiente tabla de parámetros D-H, considerando sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal (sin la orientación):

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90
2	q_2	0	0	-90
3	0	q_3	0	0

Ejercicio 3. Obtén la representación gráfica y resuelve el problema cinemático inverso para el robot esférico de 4 grados de libertad definido por la siguiente tabla de parámetros D-H, considerando sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal (sin la orientación):

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	-90
2	q_2	0	0	90
3	0	q_3	0	0
4	q_4	0	0	0

Ejercicio 4. Obtén la representación gráfica y resuelve el problema cinemático inverso para el robot de 3 grados de libertad definido por la siguiente tabla de parámetros D-H, considerando sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal (sin la orientación):

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90
2	q_2	0	l_2	-90
3	0	q_3	0	0

Ejercicio 5. Se dispone de un robot definido por la siguiente tabla de parámetros D-H:

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	-90
2	q_2	0	0	90
3	0	q_3	0	0

Obtén la representación gráfica aproximada del robot. Resuelve el problema cinemático inverso, considerando sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal. Indica cómo es el espacio de trabajo.

Ejercicio 6. Se dispone de un robot definido por la siguiente tabla de parámetros D-H:

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	-90
2	0	q_2	0	90
3	0	q_3	0	0

Obtén la representación gráfica aproximada del robot. Resuelve el problema cinemático inverso, considerando sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal.

Ejercicio 7. Se dispone de un robot definido por la siguiente tabla de parámetros D-H:

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	0
2	-90	q_2	0	-90
3	0	q_3	0	0

Obtén la representación gráfica aproximada del robot. Resuelve el problema cinemático inverso, considerando sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal.

Ejercicio 8. Se dispone de un robot definido por la siguiente tabla de parámetros D-H:

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	q_1	0	-90
2	q_2	100	200	0
3	0	q_3	0	0

a) Obtén la representación gráfica aproximada del robot. Resuelve el problema cinemático inverso, considerando sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal.

b) ¿Se encuentra el punto (x,y,z) = (100,200,300) dentro del espacio de trabajo del robot? En caso afirmativo, ¿para qué valores de las coordenadas articulares?

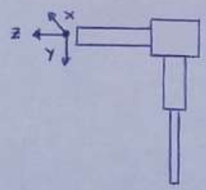
Apuntes Robótica Industrial:

Tema 3 (Parte 2): Cinemática inversa del robot

EJERCICIOS

①

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	q_1	0	0
2	q_2	0	0	$-90°$
3	0	q_3	0	0



$$^0A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\operatorname{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1\, {}^1A_2\, {}^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\operatorname{sen}(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2)\, q_3 \\ \operatorname{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & \cos(q_2)\, q_3 \\ 0 & -1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= -\operatorname{sen}(q_2)\, q_3 \\ y &= \cos(q_2)\, q_3 \\ z &= q_1 \end{aligned}$$

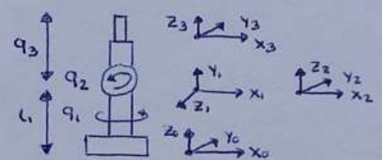
$q_1 = z$

$$tg(q_2) = \frac{x}{y} = \frac{-\operatorname{sen}(q_2) q_3}{\cos(q_2) q_3} = \frac{-\operatorname{sen}(q_2)}{\cos(q_2)} \Rightarrow q_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-x}{y}\right)$$

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2(q_2)\, q_3^2 + \cos^2(q_2)\, q_3^2 = q_3^2\left(\operatorname{sen}^2(q_2) + \cos^2(q_2)\right) \Rightarrow q_3 = \sqrt{x^2+y^2}$$

②

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	$90°$
2	q_2	0	0	$-90°$
3	0	q_3	0	0



$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\operatorname{sen}(90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & \operatorname{sen}(q_1) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

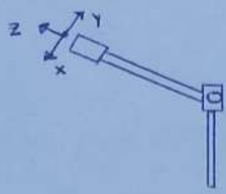
$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\operatorname{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1\, {}^1A_2\, {}^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_1) & -\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_2) & -q_3\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_2) \\ \operatorname{sen}(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1)\operatorname{sen}(q_2) & -q_3\operatorname{sen}(q_1)\operatorname{sen}(q_2) \\ \operatorname{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & q_3\cos(q_2) + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= -q_3\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_2) \\ y &= -q_3\operatorname{sen}(q_1)\operatorname{sen}(q_2) \\ z &= q_3\cos(q_2) + l_1 \end{aligned}$$

③

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	$-90°$
2	q_2	0	0	$90°$
3	0	q_3	0	0
4	q_4	0	0	0



$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\text{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \text{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\text{sen}(90°) & 0 \\ 0 & \text{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & 0 & \text{sen}(q_2) & 0 \\ \text{sen}(q_2) & 0 & -\cos(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^3A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\text{sen}(q_4) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1\, {}^1A_2\, {}^2A_3\, {}^3A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_4) - \text{sen}(q_1)\text{sen}(q_4) & -\cos(q_1)\cos(q_2)\text{sen}(q_4) - \text{sen}(q_1)\cos(q_4) & \cos(q_1)\text{sen}(q_2) & \cos(q_1)\text{sen}(q_2)q_3 \\ \text{sen}(q_1)\cos(q_2)\cos(q_4) + \cos(q_1)\text{sen}(q_4) & -\text{sen}(q_1)\cos(q_2)\text{sen}(q_4) + \cos(q_1)\cos(q_4) & \text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2) & \text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2)q_3 \\ -\cos(q_1)\text{sen}(q_2) & \text{sen}(q_2)\text{sen}(q_4) & \cos(q_2) & \cos(q_2)q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

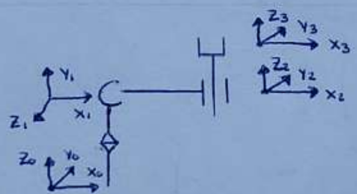
$x = \cos(q_1)\,\text{sen}(q_2)\,q_3$

$y = \text{sen}(q_1)\,\text{sen}(q_2)\,q_3$

$z = \cos(q_2)\,q_3$

④

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	$90°$
2	q_2	0	l_2	$-90°$
3	0	q_3	0	0



$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\text{sen}(90°) & 0 \\ 0 & \text{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & \text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\text{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \text{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\text{sen}(q_2) & l_2\cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & l_2\,\text{sen}(q_2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1\, {}^1A_2\, {}^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2) & -\text{sen}(q_1) & -\cos(q_1)\text{sen}(q_2) & -\cos(q_1)\text{sen}(q_2)q_3 + \cos(q_1)\cos(q_2)l_2 \\ \text{sen}(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2) & -\text{sen}(q_1)\text{sen}(q_2)q_3 + \text{sen}(q_1)\cos(q_2)l_2 \\ \text{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & \cos(q_2)q_3 + \text{sen}(q_2)l_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

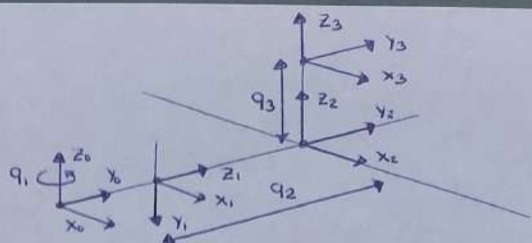
$x = -\cos(q_1)\,\text{sen}(q_2)\,q_3 + \cos(q_1)\cos(q_2)\,l_2$

$y = -\text{sen}(q_1)\,\text{sen}(q_2)\,q_3 + \text{sen}(q_1)\cos(q_2)\,l_2$

$z = \cos(q_2)\,q_3 + \text{sen}(q_2)\,l_2 + l_1$

⑥

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	-90°
2	0	q_2	0	90°
3	0	q_3	0	0



$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ) & -\text{sen}(-90^\circ) & 0 \\ 0 & \text{sen}(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ) & -\text{sen}(90^\circ) & 0 \\ 0 & \text{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {^0A_1}\,{^1A_2}\,{^2A_3} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & -\text{sen}(q_1)\,q_2 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & \cos(q_1)\,q_2 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= -\text{sen}(q_1)\,q_2 \\ y &= \cos(q_1)\,q_2 \\ z &= q_3 \end{aligned}$$

$q_3 = z$

$$tg(q_1) = \frac{x}{y} = \frac{-\text{sen}(q_1)\,q_2}{\cos(q_1)\,q_2} = \frac{-\text{sen}(q_1)}{\cos(q_1)} \Rightarrow q_1 = \text{arctg}\left(-\frac{x}{y}\right)$$

$$x^2 + y^2 = \text{sen}^2(q_1)\,q_2^2 + \cos^2(q_1)\,q_2^2 = q_2^2\left(\text{sen}^2(q_1) + \cos^2(q_1)\right) = q_2^2 \Rightarrow q_2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

⑤

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	-90°
2	q_2	0	0	90°
3	0	q_3	0	0

$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & -\text{sen}(-90^\circ) & 0 \\ 0 & \text{sen}(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\text{sen}(q_1) & 0 \\ \text{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

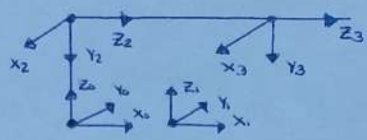
$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ) & -\text{sen}(90^\circ) & 0 \\ 0 & \text{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & 0 & \text{sen}(q_2) & 0 \\ \text{sen}(q_2) & 0 & -\cos(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {^0A_1}\,{^1A_2}\,{^2A_3} = \begin{pmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2) & -\text{sen}(q_1) & \cos(q_1)\,\text{sen}(q_2) & q_3\cos(q_1)\,\text{sen}(q_2) \\ \text{sen}(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1) & \text{sen}(q_1)\,\text{sen}(q_2) & q_3\,\text{sen}(q_1)\,\text{sen}(q_2) \\ -\text{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & q_3\cos(q_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= q_3\cos(q_1)\,\text{sen}(q_2) \\ y &= q_3\,\text{sen}(q_1)\,\text{sen}(q_2) \\ z &= q_3\cos(q_2) \end{aligned}$$

7

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	0
2	$-90°$	q_2	0	$-90°$
3	0	q_3	0	0



$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\operatorname{sen}(-90°) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\operatorname{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1\, {}^1A_2\, {}^2A_3 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) & \cos(q_1)\, q_3 \\ -\cos(q_1) & 0 & \operatorname{sen}(q_1) & \operatorname{sen}(q_1)\, q_3 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = \cos(q_1)\, q_3 \\ y = \operatorname{sen}(q_1)\, q_3 \\ z = q_2 \end{matrix}$$

$q_2 = z$

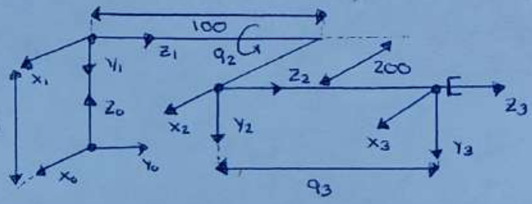
$$\operatorname{tg}(q_1) = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}(q_1)\, q_3}{\cos(q_1)\, q_3} = \frac{\operatorname{sen}(q_1)}{\cos(q_1)} \Rightarrow q_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x^2 + y^2 = \cos^2(q_1)\, q_3^2 + \operatorname{sen}^2(q_1)\, q_3^2 = q_3^2\left(\cos^2(q_1) + \operatorname{sen}^2(q_1)\right) = q_3^2 \Rightarrow q_3 = \sqrt{x^2+y^2}$$

8

a)

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	q_1	0	$-90°$
2	q_2	100	200	0
3	0	q_3	0	0



$$^0A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\operatorname{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & 200\cos(q_2) \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 200\operatorname{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & 200\cos(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 100 + q_3 \\ -\operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & q_1 - 200\operatorname{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = 200\cos(q_2) \\ y = 100 + q_3 \\ z = q_1 - 200\operatorname{sen}(q_2) \end{matrix}$$

$q_3 = y - 100$

$q_1 = z + 200\operatorname{sen}(q_2) = z + 200\operatorname{sen}(\arccos(x/200))$

$q_2 = \arccos(x/200)$

b)

$$(x,y,z) = (100, 200, 300) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} q_3 = y - 100 = 200 - 100 = 100 \\ q_2 = \arccos\left(\frac{x}{200}\right) = \arccos\left(\frac{100}{200}\right) = \arccos(0'5) = 60° \\ q_1 = z + 200\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{x}{200}\right)\right) = 300 + 200 \cdot \operatorname{sen}(60°) = 473'2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow q_1, q_2, q_3 = (473'2, 60°, 100)$$