

Tema 3 (parte 2). Cinemática inversa del robot

Índice

Introducción a la cinemática inversa del robot

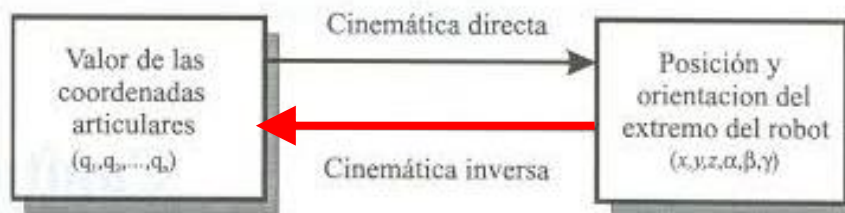
Métodos analíticos de resolución del problema cinemático inverso

Cinemática inversa mediante matrices de transformación

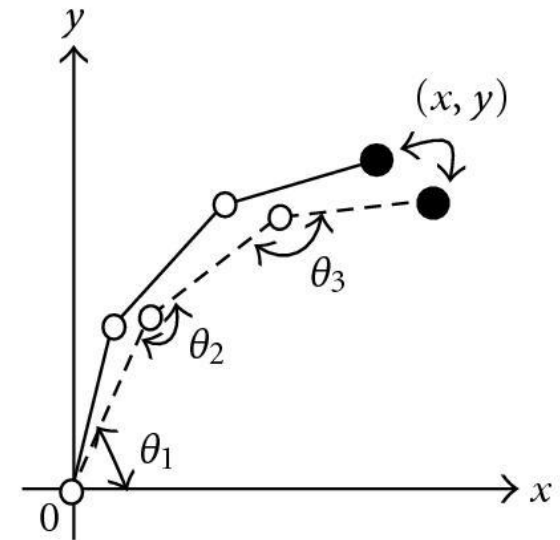
Espacio de trabajo del robot. Número de soluciones. Ejemplos de uso.

Introducción a la cinemática inversa del robot

La **cinemática inversa del robot** se basa en encontrar los valores que deben adoptar las **n coordenadas articulares del robot** $[q_1, q_2, \dots, q_n]$ para que su elemento terminal se posicione y oriente según una **localización espacial conocida**



- Más complejo. Con frecuencia la solución del problema cinemático inverso **no es única**.
- Hay **soluciones numéricas** basadas en **métodos iterativos** (problemas de convergencia y mínimos locales)
- **Solución analítica cerrada**. Siempre que se pueda, conviene encontrar una solución matemática explícita de la forma:

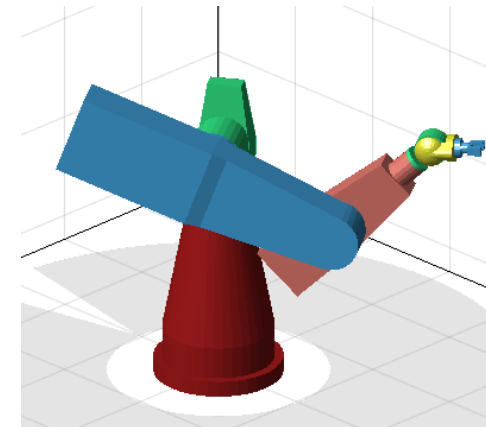
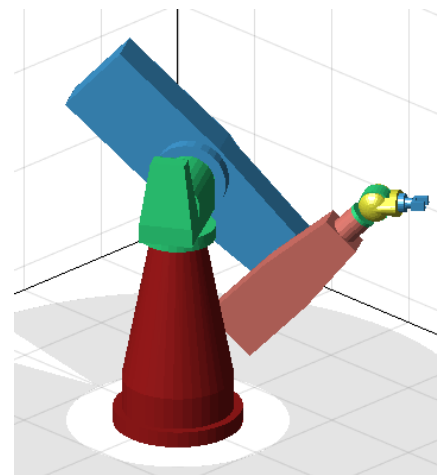
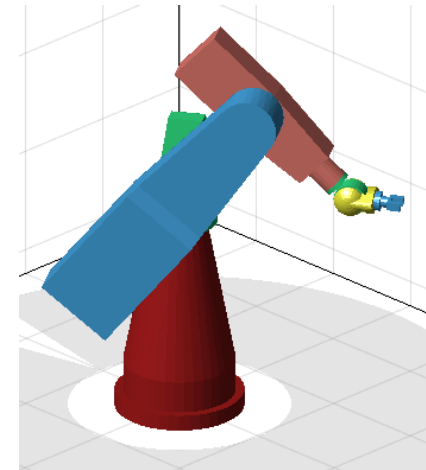
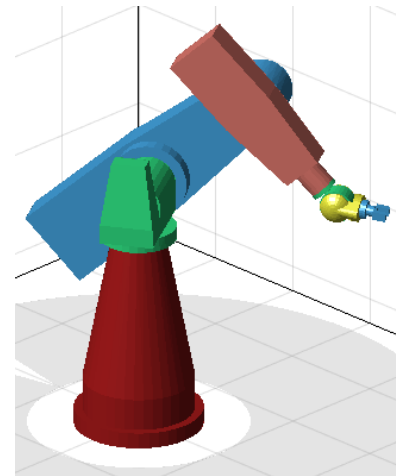
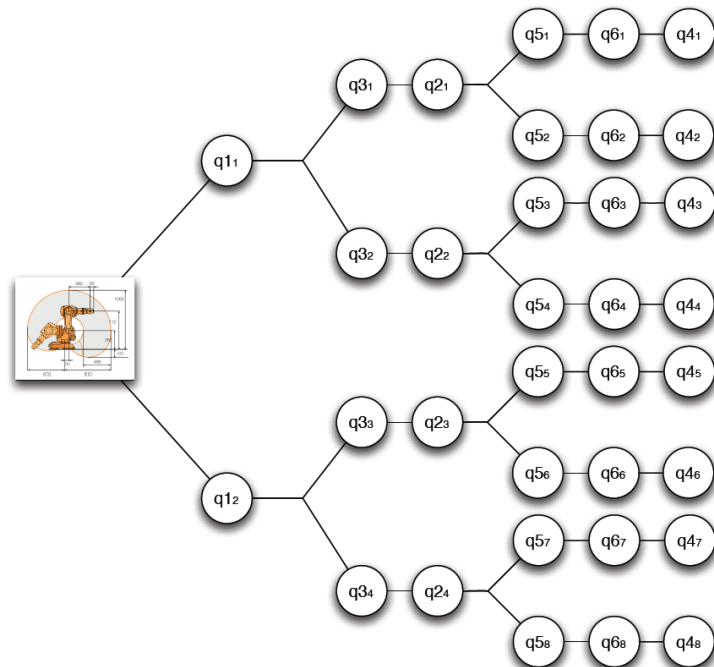


$$q_k = f_k(x, y, z, \phi, \theta, \psi)$$

$$k = 1 \dots n \quad (\text{GDL})$$

Soluciones Múltiples

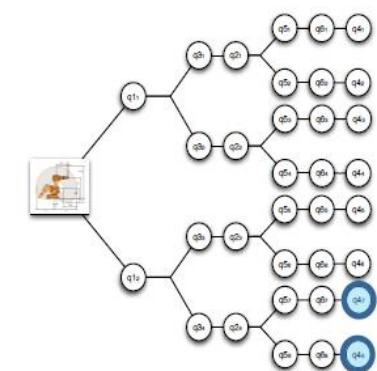
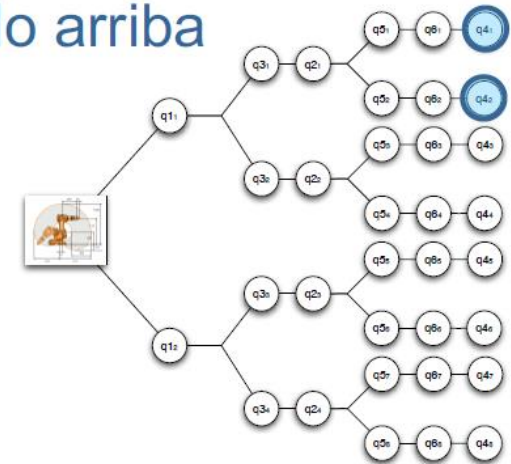
- Unas coordenadas en el espacio de la tarea, pueden corresponder a varias coordenadas articulares
- Se deben evitar cambios bruscos de configuración



Soluciones Múltiples



Codo arriba



Codo abajo

Métodos iterativos numéricos (idea conceptual)

- Se dispone del Modelo Cinemático Directo (MCD)
- Establecer una función de error a minimizar (error entre el punto actual y el deseado)

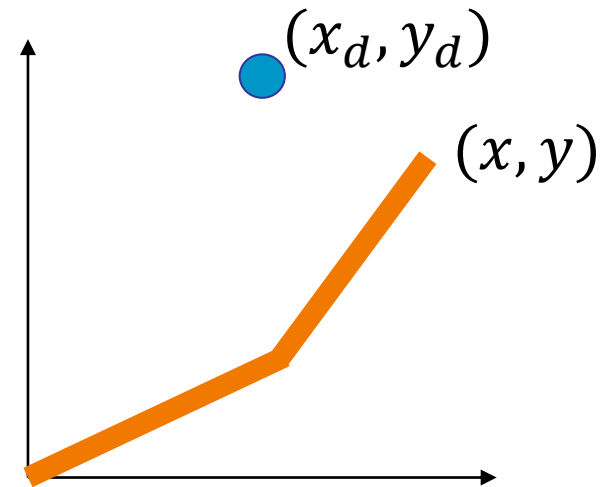
$$E = (x_d - x)^2 + (y_d - y)^2$$

- Proponer una solución q
- Evaluar (x, y) con esa q mediante el MCD

$$x = L_1 C_1 + L_2 C_{12}$$

$$y = L_1 S_1 + L_2 S_{12}$$

- Ir mejorando la propuesta de q en base a minimiar el error (gradiente)

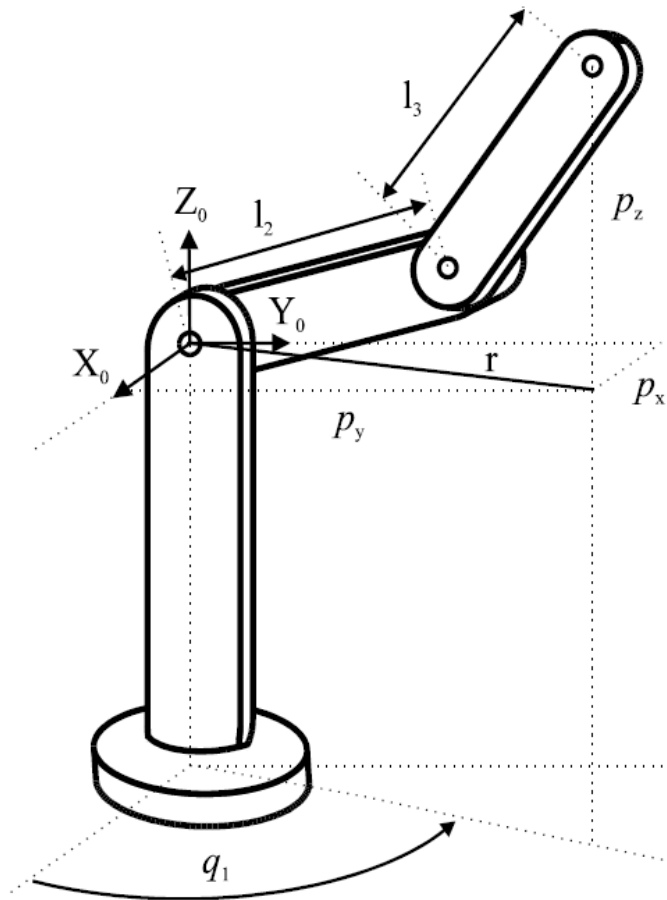


Métodos analíticos de resolución del problema cinemático inverso

Al igual que ocurría con el problema cinemático directo, la cinemática inversa puede abordarse mediante dos enfoques:

- **Métodos geométricos:** Sólo válidos para casos simples (robots con pocos GDL) o si se resuelve **sólo para la posición** del elemento terminal (para cualquier orientación)
- **Métodos basados en el cambio del sistema de referencia:** validos para robots con **n grados** de libertad. Basados en la **manipulación matemática** de las soluciones del problema **cinemático directo**:
 - Usando **matrices de transformación**.
 - Usando **cuaterniones** (ABB RobotWare)

Métodos geométricos – Robot 3 Grados de libertad



$$q_1 = \arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= p_x^2 + p_y^2 \\ r^2 + p_z^2 &= l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3\cos q_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

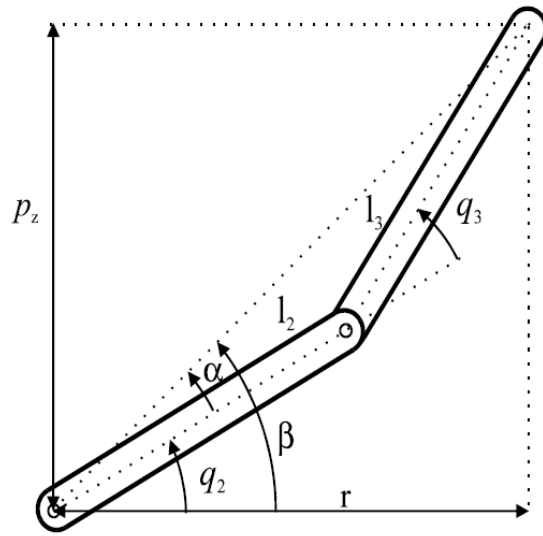
$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

Solución Doble

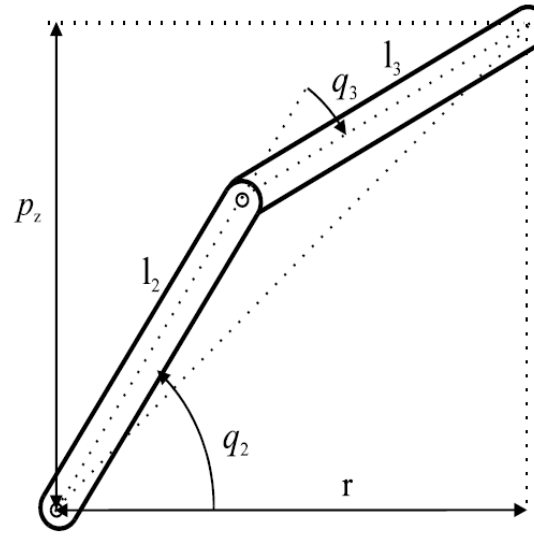
$$q_3 = \arctg\left(\frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

con $\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$

Métodos geométricos – Robot 3 Grados de libertad (II)



a) Codo abajo



b) Codo arriba

$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

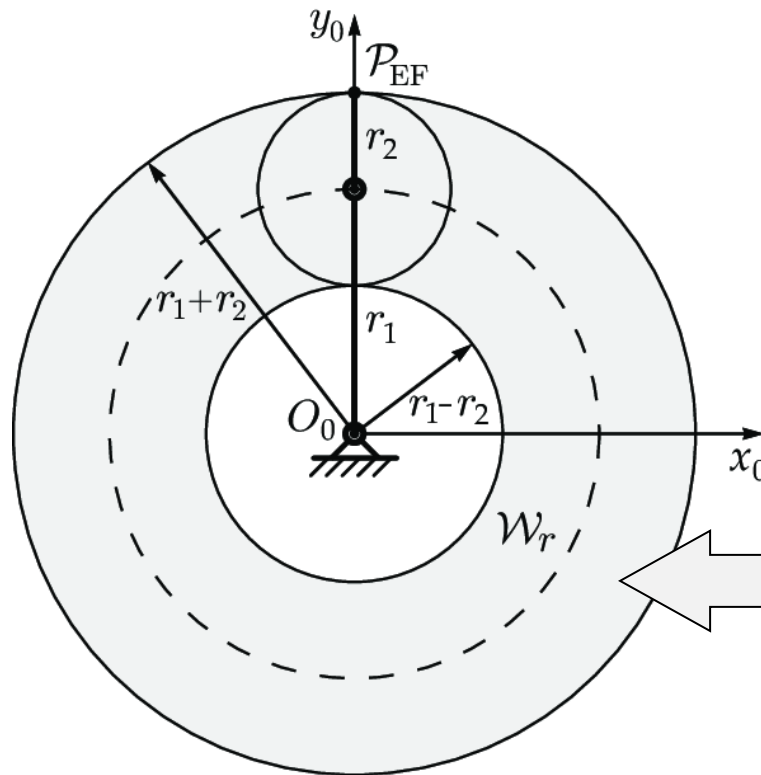
$$\alpha = \arctg\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

$$q_2 = \arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - \arctg\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

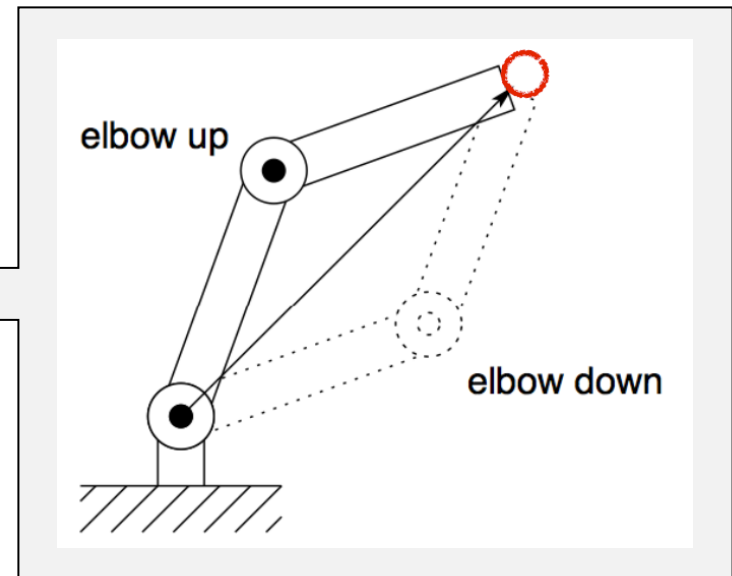
Solución Doble

Robot polar de 2 GDL

¿Existen soluciones para cualquier punto $P = (x,y)$? ¿Cuántas?



- Fuera del espacio de trabajo **no hay soluciones**.
- En las fronteras (exterior e interior) hay **solo una única solución**
- Dentro del espacio de trabajo del robot existen **dos soluciones**:



Cinemática inversa mediante matrices de transformación

Basada en la **solución del problema cinémático directo**, que recordemos que permite relacionar el sistema de referencia de la base y del elemento terminal mediante una **única matriz de transformación T**

$$T(q_1 \cdots q_n) = {}^0 A_1(q_1) \cdot {}^1 A_2(q_2) \cdots {}^{n-1} A_n(q_n)$$

- Obtenida T se conocen las relaciones matemáticas que expresan la posición y orientación del extremo del robot **en función de sus coordenadas articulares**



- La cinemática inversa se resuelve manipulando matemáticamente dichas relaciones para despejar $[q_1, q_2, \dots, q_n]$:

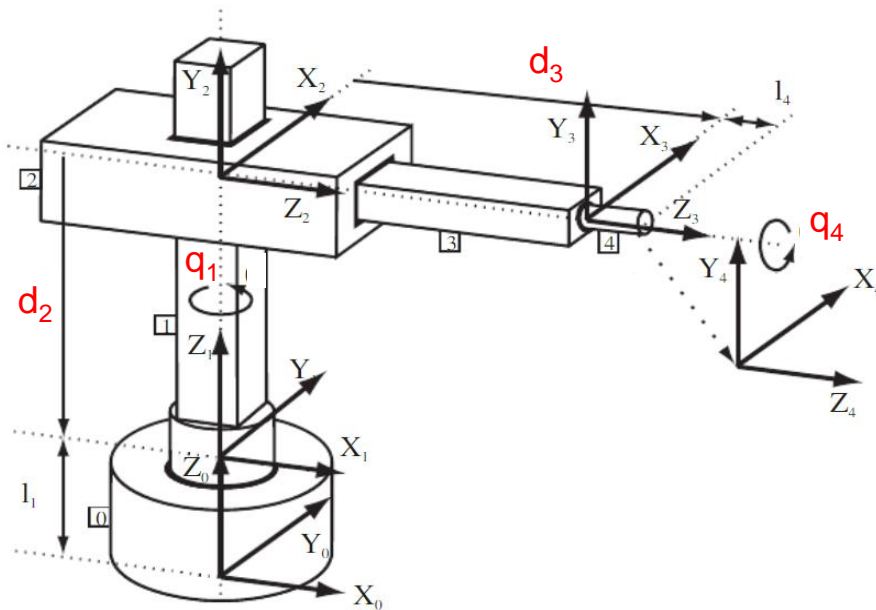
$$\begin{aligned}
 q_k &= f_k(x, y, z, \phi, \theta, \psi) \\
 k &= 1 \dots n \quad (\text{GDL})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\
 y &= f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\
 z &= f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\
 \phi &= f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\
 \theta &= f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\
 \psi &= f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)
 \end{aligned}$$

- Este procedimiento **no es trivial**. A menudo aparecen ecuaciones transcendentales y/o se tienen más ecuaciones de las necesarias

Cinemática inversa mediante matrices de transformación

Ejemplo con un robot de cuatro grados de libertad



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	0
2	90	d_2	0	90
3	0	d_3	0	0
4	q_4	l_4	0	0

$$T^0 A_1^1 A_2^2 A_3^3 A_4^4 = \begin{bmatrix} -S_1 C_4 & S_1 S_4 & C_1 & C_1 (d_3 + l_4) \\ C_1 C_4 & -C_1 S_4 & S_1 & S_1 (d_3 + l_4) \\ S_4 & C_4 & 0 & d_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p_z = d_2 + l_1 \Rightarrow d_2 = p_z - l_1$$

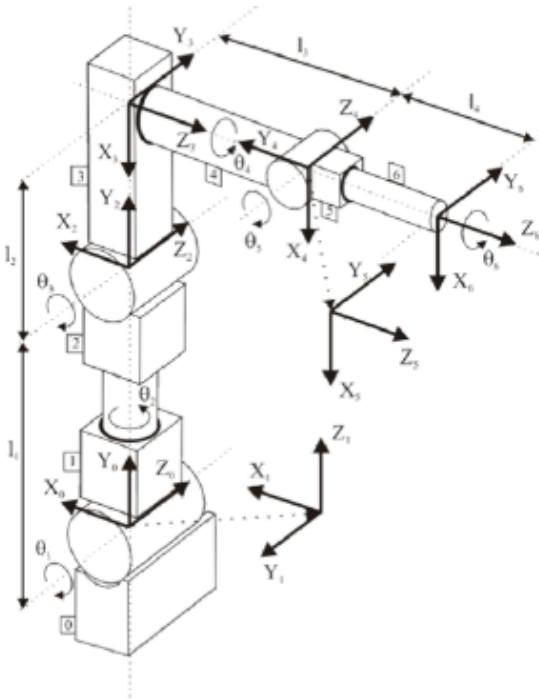
$$\left. \begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 &= C_1^2 (d_3 + l_4)^2 + S_1^2 (d_3 + l_4)^2 \\ &= (S_1^2 + C_1^2) (d_3 + l_4)^2 \end{aligned} \right\} d_3 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} - l_4$$

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{S_1 (d_3 + l_4)}{C_1 (d_3 + l_4)} \Rightarrow q_1 = \arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$q_4 = \arctg\left(\frac{S_4}{C_4}\right) = \arctg\left(\frac{n_z}{o_z}\right)$$

Cinemática inversa mediante matrices de transformación

Sistema de 12 ecuaciones no lineales con n incógnitas



$$\begin{aligned}
 n_x &= (C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_1 S_2(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + (-C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3)S_5 C_6 \\
 n_y &= (-S_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + S_1 S_2(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + (-S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3)S_5 C_6 \\
 n_z &= (-S_2 S_3)(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_2(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + S_2 C_3 S_5 C_6 \\
 o_x &= (C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(-C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_1 S_2(-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + (-C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3)(-S_5 C_6) \\
 o_y &= (-S_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(-C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + S_1 S_2(-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + (-S_1 C_2 C_3 - C_1 S_3)(-S_5 C_6) \\
 o_z &= (-S_2 S_3)(-C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_2(-S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) + S_2 C_3(-S_5 C_6) \\
 p_x &= (C_1 C_2 S_3 + S_1 C_3)(l_4 C_4 S_5) + C_1 S_2(l_4 S_4 S_5) + (C_1 C_2 C_3 + S_1 S_3)(-l_4 C_5 + l_3) + \\
 &\quad (-l_2 C_1 C_2 S_3 - l_2 S_1 C_3 - l_1 S_1) \\
 p_y &= (-S_1 C_2 S_3 - C_1 C_3)(l_4 C_4 S_5) + S_1 S_2(l_4 S_4 S_5) + (-C_1 C_2 C_3 - C_1 S_3)(-l_4 C_5 + l_3) + \\
 &\quad (-l_2 S_1 C_2 S_3 - l_2 C_1 C_3 + l_1 C_1) \\
 p_z &= (-S_2 S_3)(l_4 C_4 S_5) + C_2(l_4 S_4 S_5) + S_2 C_3(-l_4 C_5 + l_3) + l_2 S_2 S_3
 \end{aligned}$$

Inviabile despejar todas las incógnitas a la vez.

Mejor aislar las variables y despejarlas una a una

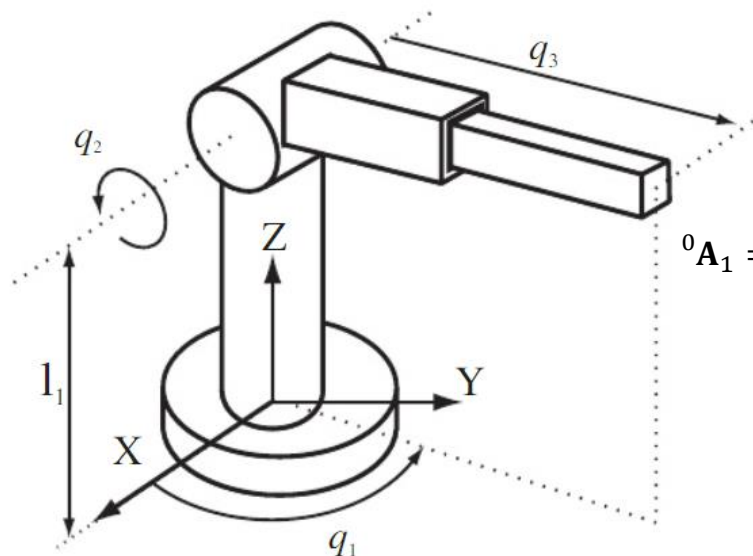
**Matrices
Inversas**

Robot esférico, de 3 GDL

Resuelve el problema cinemático inverso para el robot de 3 grados de libertad definido por la siguiente tabla de parámetros D-H, considerando sólo la posición del elemento terminal

En este caso se trata de un **robot esférico**.
 Resolvemos en 3D (transformadas 4x4):

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90
2	q_2	0	0	-90
3	0	q_3	0	0



$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 = {}^0A_3 = \begin{bmatrix} C_1 C_2 & -S_1 & -C_1 S_2 & -q_3 C_1 S_2 \\ S_1 C_2 & C_1 & -S_1 S_2 & -q_3 S_1 S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & q_3 C_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$({}^0A_1)^{-1} T = {}^1A_2 {}^2A_3$$

Inciso – Inversa matriz de transformación homogenea

No son Ortonormales

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ o_x & o_y & o_z & -\mathbf{o}^T \mathbf{p} \\ a_x & a_y & a_z & -\mathbf{a}^T \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2\mathbf{A}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Robot esférico, de 3 GDL

$$({}^0\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{T} = {}^1\mathbf{A}_2 {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & -S_2 q_3 \\ S_2 & 0 & C_2 & C_2 q_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_1 p_x - C_1 p_y = 0 \Rightarrow \tan(q_1) = \frac{S_1}{C_1} = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$({}^1\mathbf{A}_2)^{-1}({}^0\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{T} = {}^2\mathbf{A}_3$$

$$\begin{bmatrix} C_2 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_1 \\ S_1 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_2 C_1 & C_2 S_1 & S_2 & -l_1 S_2 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ -S_2 C_1 & -S_2 S_1 & C_2 & -C_2 l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_2 C_1 p_x + C_2 S_1 p_y + S_2 p_z - l_1 S_2 = C_2 (C_1 p_x + S_1 p_y) + S_2 (p_z - l_1) = 0$$

$$\tan(q_2) = \frac{S_2}{C_2} = -\frac{C_1 p_x + S_1 p_y}{(p_z - l_1)}$$

$$q_3 = -S_2 C_1 p_x - S_2 S_1 p_y + C_2 p_z - C_2 l_1 = C_2 (p_z - l_1) - S_2 (C_1 p_x + S_1 p_y)$$

Relaciones trigonométricas frecuentes

$$A.\cos(\theta) + B.\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = \text{atan2}(A, -B) \\ \theta = \text{atan2}(-A, B) \end{cases}$$

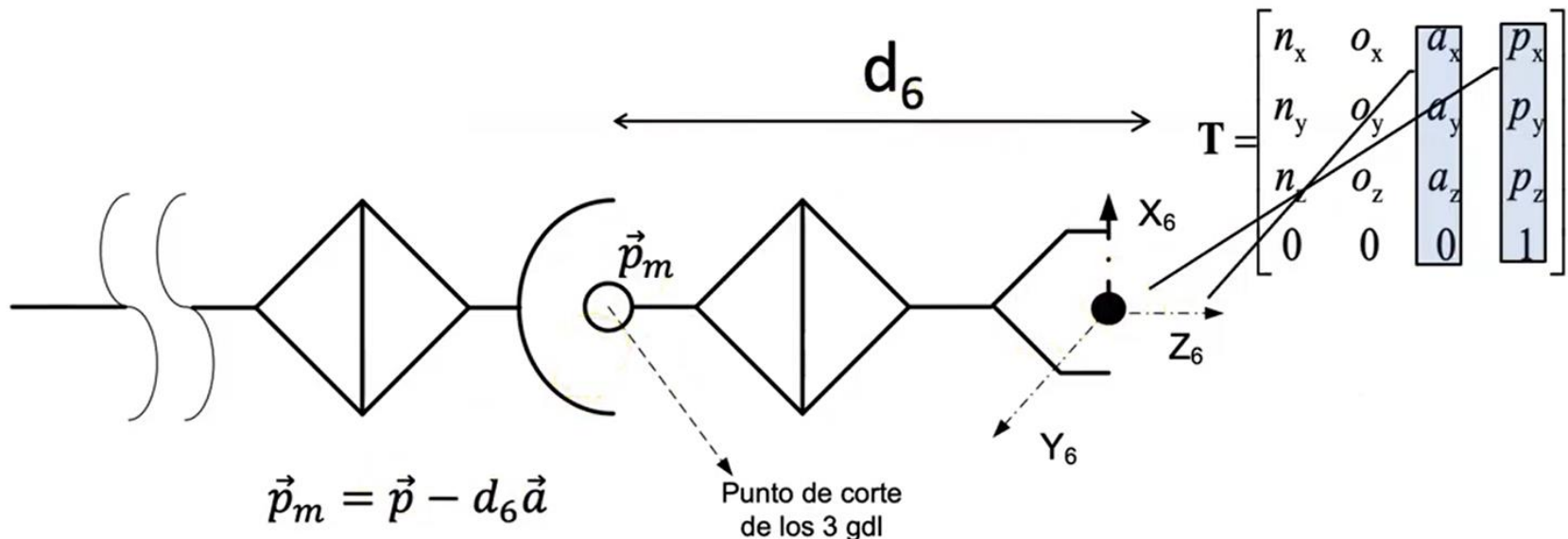
$$A.\cos(\theta) + B.\sin(\theta) = C \Rightarrow \theta = \text{atan2}(B, A) \pm \text{atan2}(\sqrt{A^2 + B^2 - C^2}, C)$$

$$\begin{cases} A.\cos(\theta) - B.\sin(\theta) = C \\ A.\sin(\theta) + B.\cos(\theta) = D \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{atan2}(D, C) - \text{atan2}(B, A)$$

$$\begin{cases} A.\cos(\theta) + B.\sin(\theta) = C \\ D.\sin(\theta) + E.\cos(\theta) = F \end{cases} \Rightarrow \theta = \text{atan2}(CF - CE, CD - BF)$$

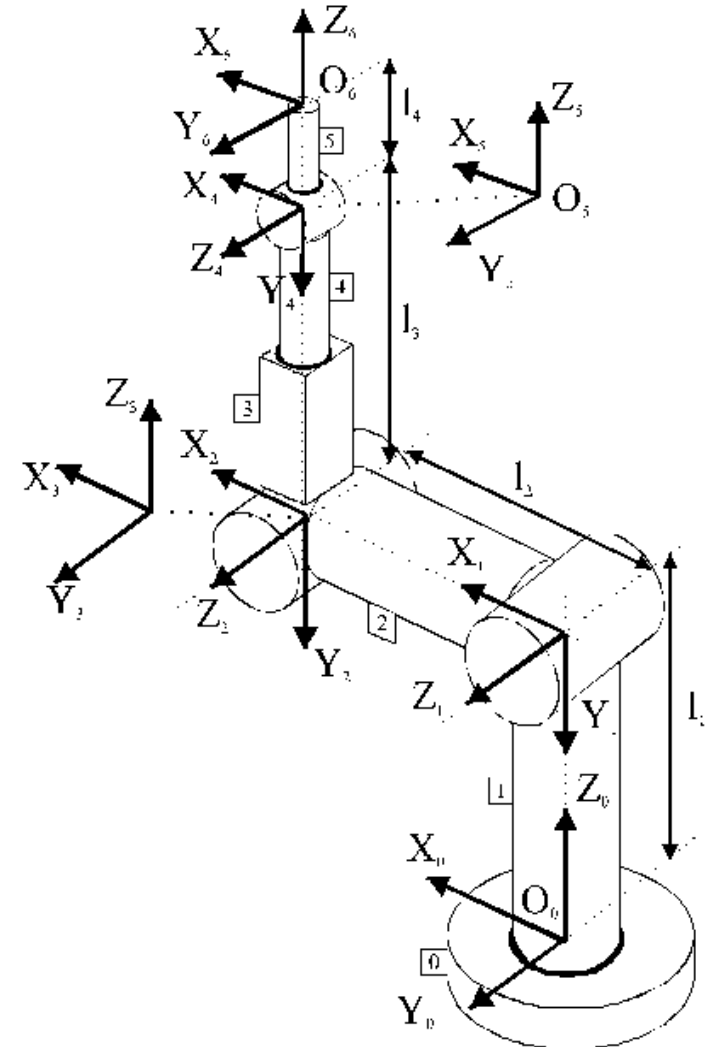
Desacoplo cinemático

- Los procedimientos anteriores son complejos, o inutilizables, cuando el número de grados de libertad es elevado.
- El desacoplamiento cinemático trata de dividir el problema de 6 gdl en 2 de 3 gdl
- Es aplicable cuando los 3 últimos grados de libertad se cortan en un punto



Desacoplo cinemático

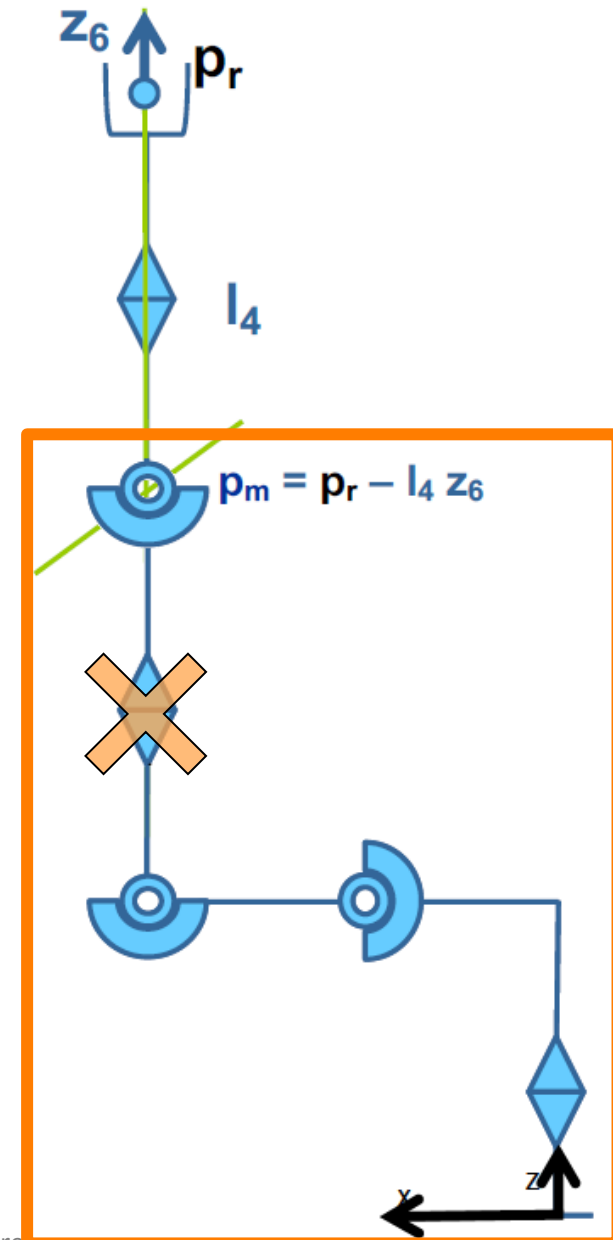
1. Desacopla los 3 primeros gdl de los 3 últimos (utilizados para orientar el efector final)
 - A partir de la posición y orientación deseadas se establece la posición donde debe estar la “muñeca” (punto de corte de los ejes de las 3 últimas articulaciones)
2. Se calculan los valores de q_1, q_2, q_3 que posicionan la muñeca en este punto.
3. Con los datos de orientación [noa] y los valores ya calculados de q_1, q_2 y q_3 se obtiene los de q_4, q_5, q_6



Desacoplo cinemático

Fase 1.- Obtención de q_1 , q_2 y q_3

- Conocida la posición y orientación final deseada, se puede conocer las coordenadas de donde debe estar p_m (muñeca)
- q_1 , q_2 , q_3 se obtienen para poner p_m en dichas coordenadas (método geométrico u otro)



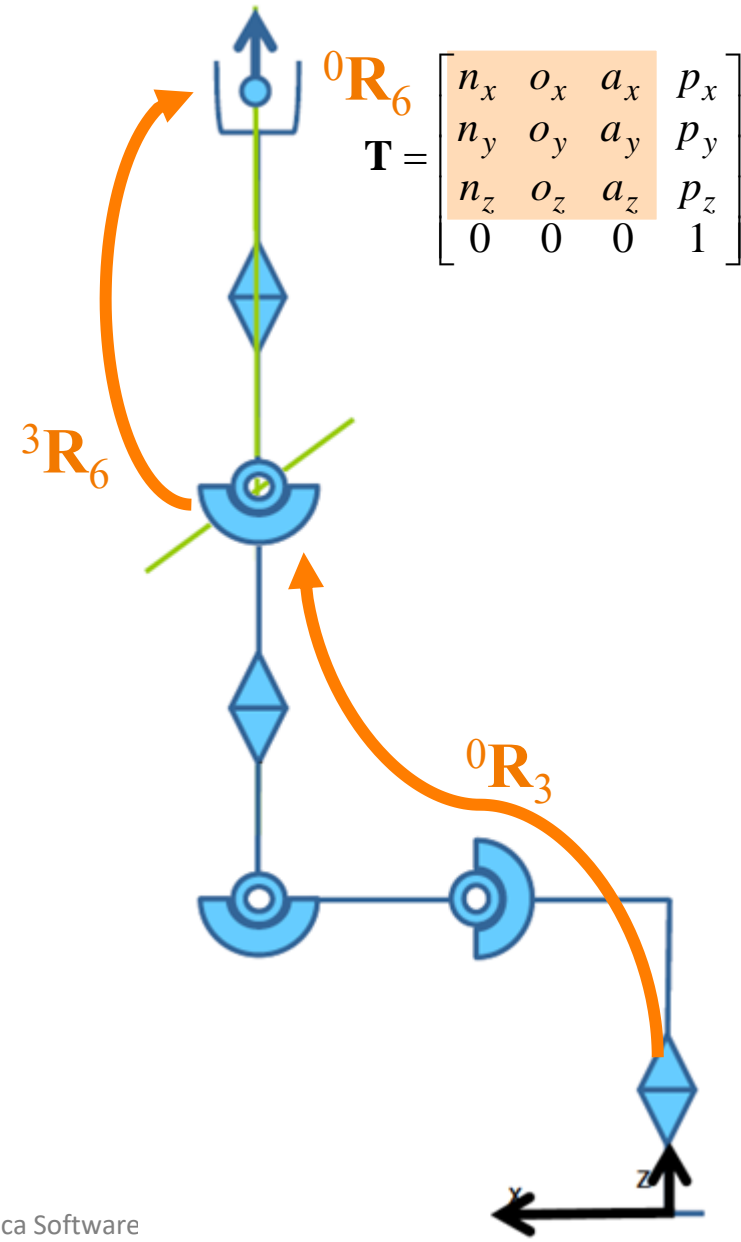
Desacoplo cinemático

Fase 2.- Obtención de q4, q5 y q6 (q1,q2,q3 ya conocidas)

- A partir de 0R_6 (= [noa] conocida) y de 0R_3 (conocida al conocer q1,q2,q3) se obtiene 3R_6 , que depende de q4, q5, q6

$${}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_6 = [\mathbf{noa}] \Rightarrow {}^3\mathbf{R}_6 = \left({}^0\mathbf{R}_3\right)^T [\mathbf{noa}]$$

- De las 9 ecuaciones que resultan se despejan q_4, q_5, q_6 (se puede proceder despejando variable a variable)



Desacoplo cinemático

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	0	90
4	q_4	l_3	0	-90
5	q_5	0	0	90
6	q_6	l_4	0	0

$$\mathbf{R}_6^3 = (\mathbf{R}_3^0)^T [\text{noa}]$$

$${}^3\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 \\ S_4 & 0 & C_4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^4\mathbf{R}_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 \\ S_5 & 0 & -C_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^5\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3\mathbf{R}_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & -S_4 C_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{bmatrix}$$

$$q_4 = \arcsen\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right)$$

$$q_5 = \arccos(r_{33})$$

$$q_6 = \arctan\left(-\frac{r_{32}}{r_{31}}\right)$$

