Apuntes Robótica Industrial :

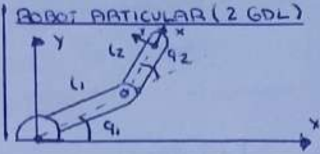
Tema 3 (Parte 1) : Cinemática directa del robot

TEORÍA

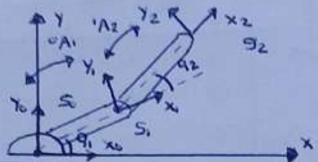
ROBOT POLAR (2 GDL)

$x = q_2 \cos q_1$
$y = q_2 \operatorname{sen} q_1$
$z = 0$
$[noa] = Rot_z(q_1)$

ROBOT ARTICULAR (2 GDL)



$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1+q_2)$
$y = l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2)$
$z = 0$
$[noa] = Rot_z(q_1+q_2)$



$$T(q_1 \dots q_n) = {}^0A_1(q_1) \cdot {}^1A_2(q_2) \dots {}^{n-1}A_n(q_n)$$

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1				
2				
...				
i				

$$^{i-1}A_i = Rot_z(\theta_i) \cdot T(0,0,d_i) \cdot T(a_i,0,0) \cdot Rot_x(\alpha_i)$$

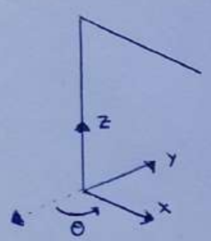
θ_i : Rotación sobre el eje Z original hasta que el X original sea paralelo al X final.

d_i : Traslación en el eje Z original hasta que ambos ejes X sean coincidentes.

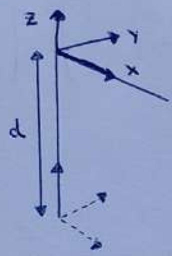
a_i : Traslación en el eje X final hasta que coincidan ambos orígenes de los sistemas de referencia.

α_i : Rotación sobre el eje X final para que los ejes Z coincidan.

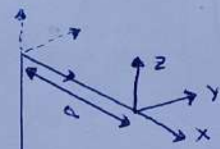
θ



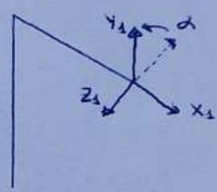
d



a

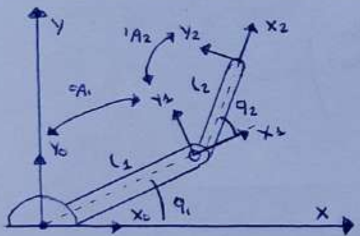


α



EJEMPLOS

① Obtener la matriz de transformación T en 3D para el robot angular de 2 GDL de la figura.



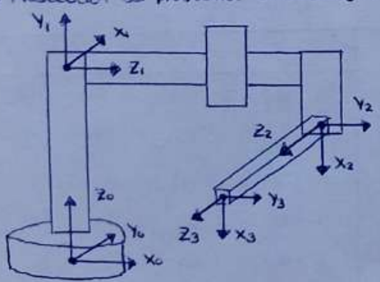
$$^0A_1 = Rot_z(q_1) \cdot T(l_1,0,0) = \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = Rot_z(q_2) \cdot T(l_2,0,0) = \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1 \, {}^1A_2 = \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1C_2 - S_1S_2 & -C_1S_2 - S_1C_2 & 0 & l_1C_1 + l_2C_{12} \\ S_1C_2 + C_1S_2 & -S_1S_2 + C_1C_2 & 0 & l_1S_1 + l_2S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1C_1 + l_2C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1S_1 + l_2S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x &= l_1C_1 + l_2C_{12} \\ y &= l_1S_1 + l_2S_{12} \\ z &= 0 \end{aligned}$$

② Resolución del problema cinemático directo con Denavit - Hartenberg (DH)



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$q_1 + 90°$	L1	0	90°
2	$q_2 - 90°$	L2+L3	L4	90°
3	0	q_3	0	0

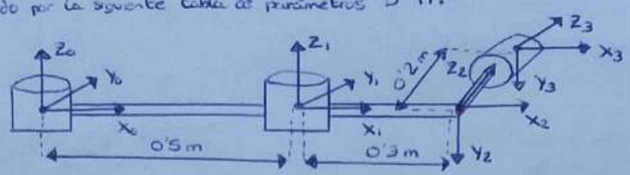
$$^0A_1 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ \cos(q_1) & 0 & \operatorname{sen}(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(q_2) & 0 & -\cos(q_2) & L4\operatorname{sen}(q_2) \\ -\cos(q_2) & 0 & -\operatorname{sen}(q_2) & -L4\cos(q_2) \\ 0 & 1 & 0 & L2+L3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

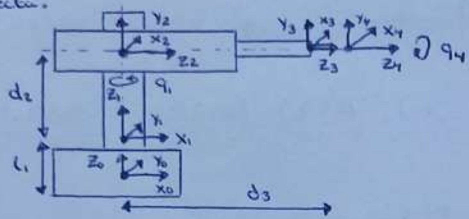
$$T = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3 = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(q_1)\operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_1) & \cos(q_2)\operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1)(L2+L3) - L4\operatorname{sen}(q_1)\operatorname{sen}(q_2) + q_3\cos(q_2)\operatorname{sen}(q_1) \\ \cos(q_1)\operatorname{sen}(q_2) & \operatorname{sen}(q_1) & -\cos(q_1)\cos(q_2) & \operatorname{sen}(q_1)(L2+L3) + L4\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_2) - q_3\cos(q_1)\cos(q_2) \\ -\cos(q_2) & 0 & -\operatorname{sen}(q_2) & L1 - L4\cos(q_2) - q_3\operatorname{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ Obtén la representación gráfica del robot definido por la siguiente tabla de parámetros D-H.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0'5	0
2	q_2	0	0'3	-90°
3	q_3	0'2	0	0



④ Obtén la tabla de parámetros D-H correspondiente al robot cilíndrico con giro terminal de la figura, indicando sus GDL y resuelve su cinemática directa.



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	0
2	90°	d_2	0	90°
3	0	d_3	0	0
4	q_4	l_4	0	0

$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

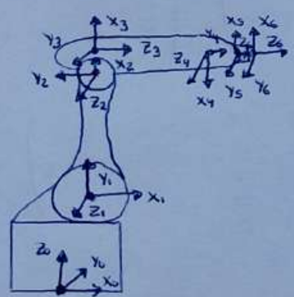
$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) & 0 & 0 \\ \sin(90°) & \cos(90°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\sin(90°) & 0 \\ 0 & \sin(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^3A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

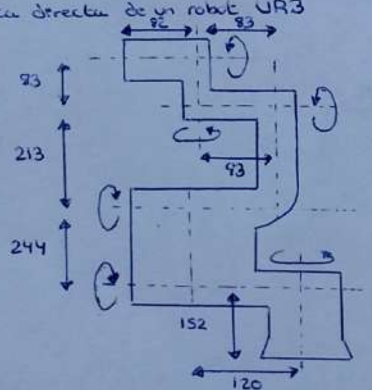
$$T = {}^0A_1 \, {}^1A_2 \, {}^2A_3 \, {}^3A_4 = \begin{pmatrix} -\sin(q_1)\cos(q_4) & \sin(q_1)\sin(q_4) & \cos(q_1) & \cos(q_1)(d_3+l_4) \\ \cos(q_1)\cos(q_4) & -\cos(q_1)\sin(q_4) & \sin(q_1) & \sin(q_1)(d_3+l_4) \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & d_2+l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

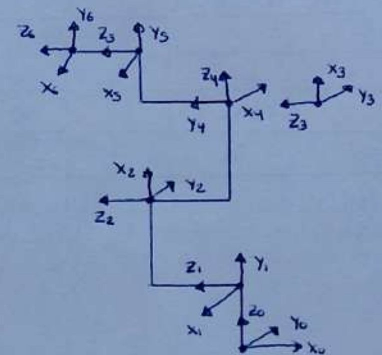
⑤ Representación geométrica del robot manipulador industrial de 6 ejes Kuka KR5 SIXX R650.



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	335	75	90°
2	$q_2+90°$	0	270	0
3	q_3	0	90	90°
4	$q_4+180°$	295	0	90°
5	$q_5+180°$	0	0	90°
6	q_6	80	0	0

⑥ Cinemática directa de un robot UR3





i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$q_1-90°$	152	0	90°
2	$q_2+90°$	120	244	0
3	q_3	-93	213	0
4	$q_4+90°$	83	0	90°
5	$q_5+180°$	83	0	90°
6	q_6	82	0	0

EJERCICIOS DEL TEMA 3 PARTE 1

Cinemática directa del robot

Ejercicio 1. Obtén la representación gráfica del robot de definido por la siguiente tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg. Indica sus GDL y cada tipo de articulación teniendo en cuenta que las variables articulares aparecen en color rojo. Resuelve su cinemática directa.

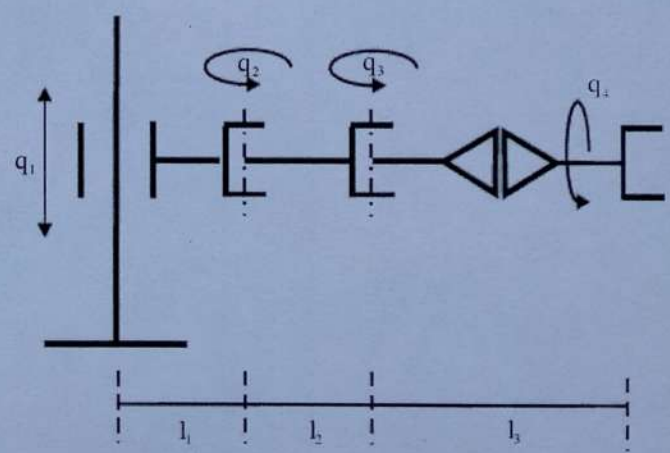
i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0

Ejercicio 2. Obtén la representación gráfica del robot de definido por la siguiente tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg. Indica sus GDL y cada tipo de articulación. Argumenta si esta configuración de robot recibe algún nombre. Por último, resuelve su cinemática directa.

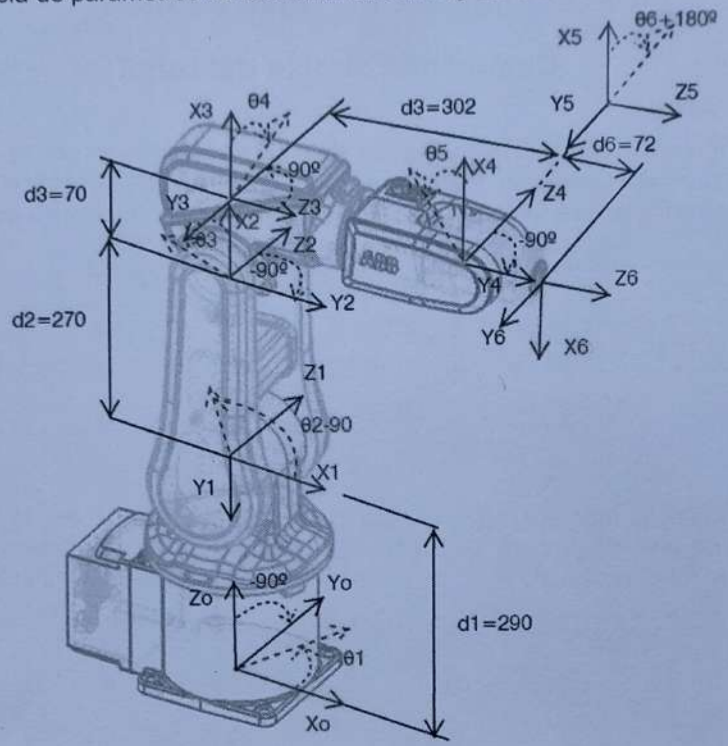
i	θ_i	d_i	a_i	α_i
0	0	0.5	0	0
1	q_1	0	0.7	0
2	q_2	0	0.7	0
3	0	q_3	0	0
4	q_4	0	0	0

Nota: La fila i = 0 representa la base (fija) del robot

Ejercicio 3. Extrae la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg y resuelve la cinemática directa del robot con una articulación prismática y tres de rotación (tipo R-R-T) de la figura:



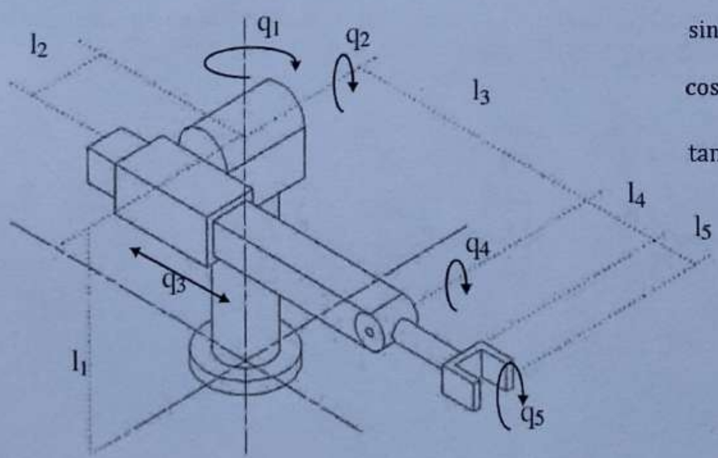
Ejercicio 4. La figura indica las dimensiones, en mm, de los eslabones que componen el robot industrial ABB IRB 120, y la posición y orientación de los seis sistemas de referencia del robot. Con ellos, extrae la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg del IRB 120.



Ejercicio 5. El robot de la figura tiene qi coordenadas articulares y su TCP está centrado en el extremo del elemento terminal.

a) Extrae su representación de Denavit-Hartenberg, dibujando los sistemas de referencia Si necesarios de acuerdo al estándar D-H (puedes usar la figura para representar los Si)

b) Resuelve su cinemática directa sólo para la posición (x,y,z) del elemento terminal.



$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

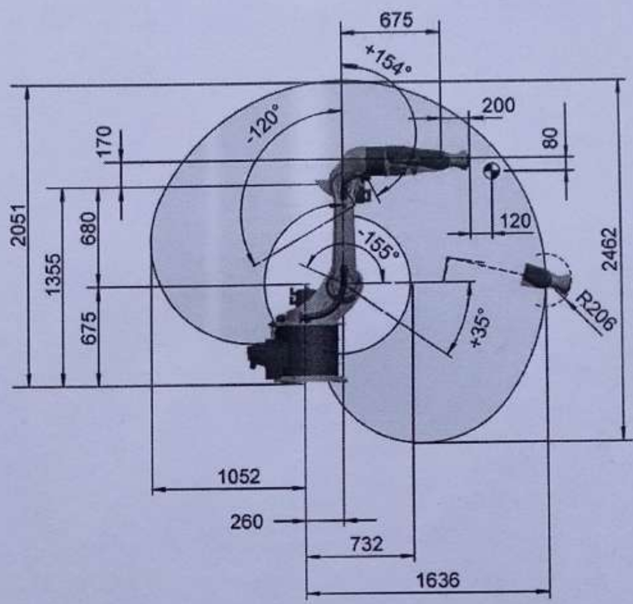
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

Ejercicio 6. Las figuras muestran la geometría y dimensiones de un robot manipulador industrial de 6 ejes Kuka KR 16, usado para operaciones de soldadura. Su TCP está centrado en el extremo del elemento terminal, y puede rotar.

a) Dibuja un boceto del robot que incluya los sistemas de referencia Si de acuerdo al estándar Denavit-Hartenberg. Puedes utilizar offsets, pero debes justificarlo.

b) Extrae su representación de Denavit-Hartenberg,



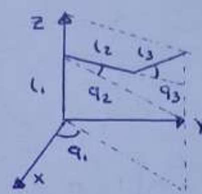
Apuntes Robótica Industrial:

Tema 3 (Parte 1): Cinemática directa del robot

EJERCICIOS

1

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0



$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\operatorname{sen}(90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & \operatorname{sen}(q_1) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & l_2\cos(q_2) \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2\operatorname{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(q_3) & -\operatorname{sen}(q_3) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_3) & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_3) & -\operatorname{sen}(q_3) & 0 & l_3\cos(q_3) \\ \operatorname{sen}(q_3) & \cos(q_3) & 0 & l_3\operatorname{sen}(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(q_1)\cos(q_2+q_3) & -\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_2+q_3) & \operatorname{sen}(q_1) & l_3\cos(q_1)\cos(q_2+q_3) + l_2\cos(q_1)\cos(q_2) \\ \operatorname{sen}(q_1)\cos(q_2+q_3) & -\operatorname{sen}(q_1)\operatorname{sen}(q_2+q_3) & -\cos(q_1) & l_3\operatorname{sen}(q_1)\cos(q_2+q_3) + l_2\operatorname{sen}(q_1)\cos(q_2) \\ \operatorname{sen}(q_2+q_3) & \cos(q_2+q_3) & 0 & l_3\operatorname{sen}(q_2+q_3) + l_2\operatorname{sen}(q_2) + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
0	0	0'5	0	0
1	q_1	0	0'7	0
2	q_2	0	0'7	0
3	0	q_3	0	0
4	q_4	0	0	0

$$^BA_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0'5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0'7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1) & 0 & 0'7\cdot\cos(q_1) \\ \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0'7\cdot\operatorname{sen}(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

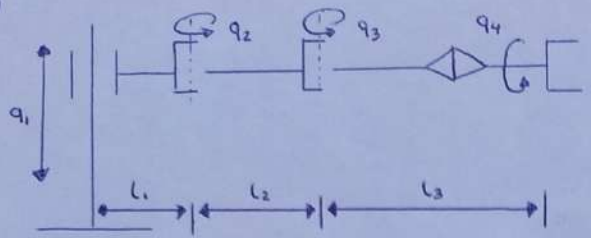
$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0'7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & 0'7\cdot\cos(q_2) \\ \operatorname{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0'7\cdot\operatorname{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^3A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\operatorname{sen}(q_4) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^BA_0\,{}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_1+q_2+q_4) & -\operatorname{sen}(q_1+q_2+q_4) & 0 & 0'7(\cos(q_1+q_2)+\cos(q_1)) \\ \operatorname{sen}(q_1+q_2+q_4) & \cos(q_1+q_2+q_4) & 0 & 0'7(\operatorname{sen}(q_1+q_2)+\operatorname{sen}(q_1)) \\ 0 & 0 & 1 & q_3+0'5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	90°	q_1	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0
3	$q_3+90°$	0	0	90°
4	q_4	l_3	0	0

$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(90°) & -\text{sen}(90°) & 0 & 0 \\ \text{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

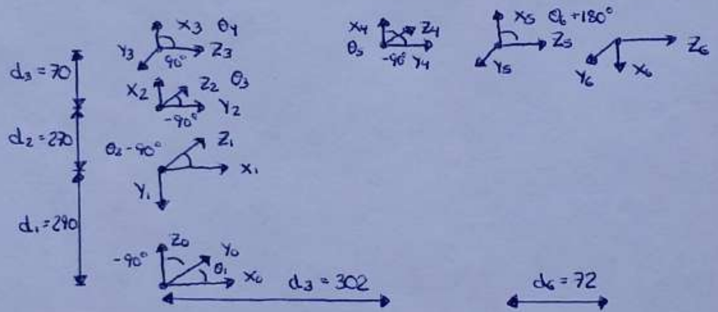
$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & l_2\cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2\,\text{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(q_3+90°) & -\text{sen}(q_3+90°) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_3+90°) & \cos(q_3+90°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\text{sen}(90°) & 0 \\ 0 & \text{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(q_3) & 0 & \cos(q_3) & 0 \\ \cos(q_3) & 0 & \text{sen}(q_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^3A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\text{sen}(q_4) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\text{sen}(q_4) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4 = \begin{pmatrix} -\cos(q_4)\cos(q_2+q_3) & \text{sen}(q_4)\cos(q_2+q_3) & -\text{sen}(q_2+q_3) & -l_3\,\text{sen}(q_2+q_3) - l_2\,\text{sen}(q_2) \\ -\cos(q_4)\,\text{sen}(q_2+q_3) & \text{sen}(q_4)\,\text{sen}(q_2+q_3) & \cos(q_2+q_3) & l_3\cos(q_2+q_3) + l_2\cos(q_2) + l_1 \\ \text{sen}(q_4) & \cos(q_4) & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

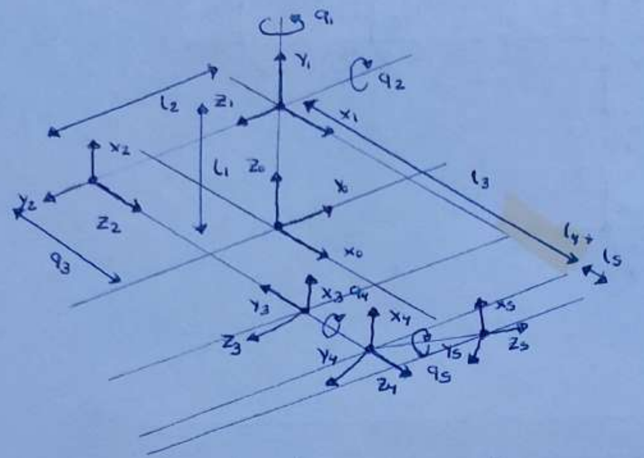
④



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	290	0	-90°
2	$\theta_2-90°$	0	270	0
3	θ_3	0	70	-90°
4	θ_4	302	0	90°
5	θ_5	0	0	-90°
6	$\theta_6+180°$	72	0	0

⑤

a)



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	0	90°
2	$q_2+90°$	l_2	0	90°
3	0	q_3	0	-90°
4	q_4	0	0	90°
5	q_5	l_4+l_5	0	0

b)

$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\operatorname{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\operatorname{sen}(90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & \operatorname{sen}(q_1) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_1) & 0 & -\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2+90°) & -\operatorname{sen}(q_2+90°) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_2+90°) & \cos(q_2+90°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\operatorname{sen}(90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ \cos(q_2) & 0 & \operatorname{sen}(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\operatorname{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

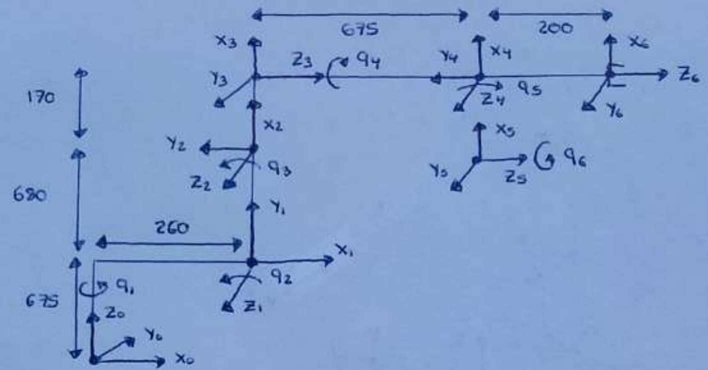
$$^3A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\operatorname{sen}(q_4) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\operatorname{sen}(90°) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & 0 & \operatorname{sen}(q_4) & 0 \\ \operatorname{sen}(q_4) & 0 & -\cos(q_4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^4A_5 = \begin{pmatrix} \cos(q_5) & -\operatorname{sen}(q_5) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_5) & \cos(q_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4+l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_5) & -\operatorname{sen}(q_5) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(q_5) & \cos(q_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4+l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3\,{}^3A_4\,{}^4A_5 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(q_1)\operatorname{sen}(q_2)\operatorname{sen}(q_4)(l_4+l_5) + \cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_4)(l_4+l_5) + \operatorname{sen}(q_1)l_2 + \cos(q_1)\cos(q_2)q_3 \\ -\operatorname{sen}(q_1)\operatorname{sen}(q_2)\operatorname{sen}(q_4)(l_4+l_5) + \operatorname{sen}(q_1)\cos(q_2)\cos(q_4)(l_4+l_5) - \cos(q_1)l_1 + \operatorname{sen}(q_1)\cos(q_2)q_3 \\ -\cos(q_2)\operatorname{sen}(q_4)(l_4+l_5) + \operatorname{sen}(q_2)\cos(q_4)(l_4+l_5) + l_1 + \operatorname{sen}(q_2)q_3 \end{pmatrix}$$

⑥

a)



b)

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	675	260	90°
2	q_2+90°	0	680	0
3	q_3	0	170	90°
4	q_4	675	0	-90°
5	q_5	0	0	90°
6	q_6	200	0	0