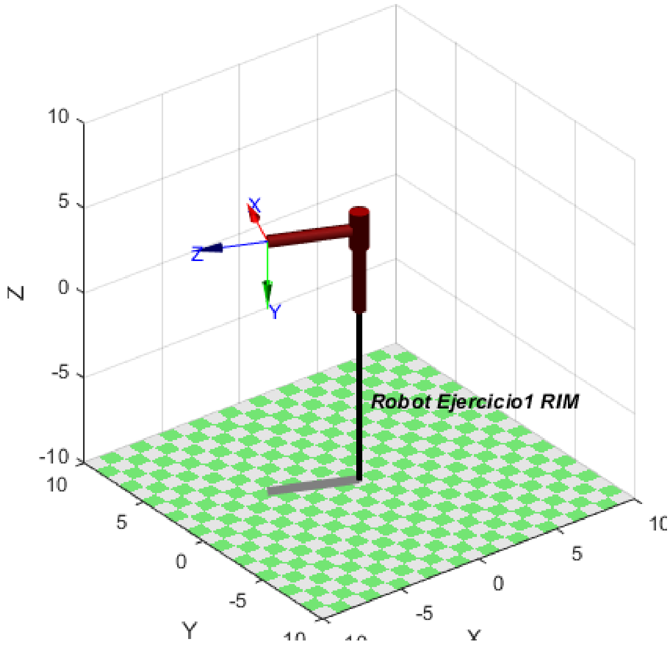
SOLUCIONES DEL TEMA 3 - PARTE 2

Cinemática inversa del robot

Solución ejercicio 1. Robot sencillo de 3 GDL, con dos articulaciones prismáticas y una de rotación. Su representación gráfica es la que aparece a continuación:



a) Cinemática directa: La matriz de transformación T del robot es:

$$T = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & -s_2 q_3 \\ s_2 & 0 & c_2 & c_2 q_3 \\ 0 & -1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Cinemática inversa. Consideramos sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal. En este caso despejar las coordenadas articulares q_i resulta muy sencillo:

$$q_1 = z$$

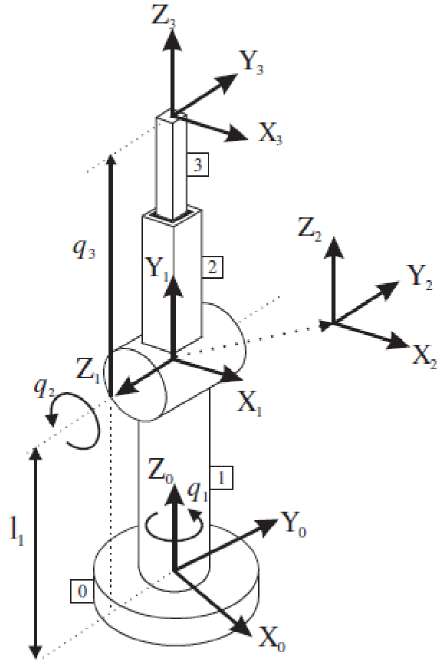
$$q_2 = \arctan\left(-\frac{x}{y}\right)$$

$$q_3 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Vemos que las dimensiones de las coordenadas articulares son consistentes: q_1 y q_3 son distancias, q_2 es un ángulo. Además, las coordenadas obtenidas tienen sentido geométrico.

Solución ejercicio 2. *A. Barrientos, "Fundamentos de Robótica", ejemplo resuelto, pág. 139.*

Se trata de un robot esférico (también llamado polar) de 3 GDL (dos articulaciones de rotación, una prismática):



a) La matriz de transformación T que representa la cinemática directa del robot es:

$$
{}^{0}\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^{1}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^{2}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & 0 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & C_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -q_3C_1S_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -q_3S_1S_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & q_3C_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

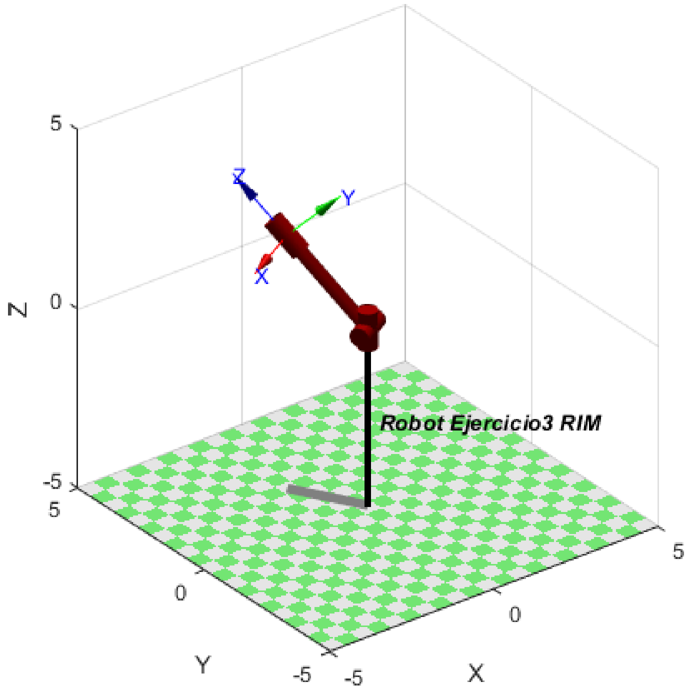
b) *Cinemática inversa.* Consideramos sólo la posición (p_x,p_y,p_z) del elemento terminal. En este caso despejar las coordenadas articulares q_i resulta bastante más costoso matemáticamente. Se recomienda consultar el ejemplo resuelto en el libro para ver los detalles del proceso:

$$q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$q_2 = \arctan\frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{l_1 - p_z}$$

$$q_3 = C_2(p_z - l_1) - S_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

Solución ejercicio 3. Robot esférico de 4 GDL (3 + rotación en último eslabón). Su representación gráfica es la que aparece a continuación:



a) Cinemática directa: La matriz de transformación T del robot tiene una submatriz de rotación algo más compleja, pero sólo estamos interesados en la parte de traslación, que es sencilla:

$$T = \begin{bmatrix} c_1c_2c_4 - s_1s_4 & -c_1c_2s_4 - s_1c_4 & c_1s_2 & c_1s_2q_3 \\ s_1c_2c_4 + c_1s_4 & -s_1c_2s_4 + c_1c_4 & s_1s_2 & s_1s_2q_3 \\ -c_1s_2 & s_2s_4 & c_2 & c_2q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Cinemática inversa. Consideramos sólo la posición (x,y,z) del elemento terminal. En este caso vuelve a ser sencillo despejar las coordenadas articulares q_i :

$$q_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

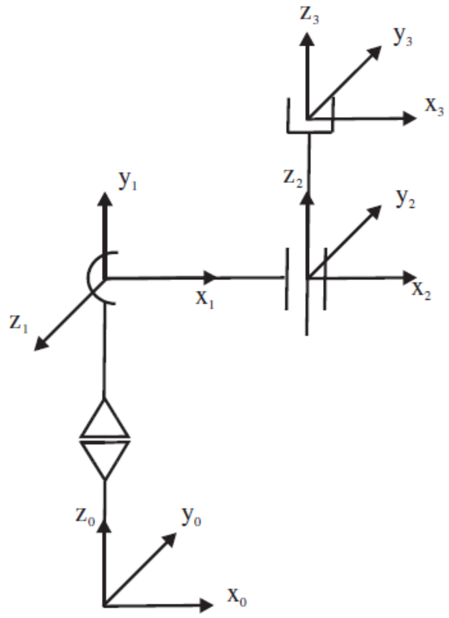
$$q_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

$$q_3 = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Podemos comprobar que geométricamente la solución tiene sentido. Además, las dimensiones de las coordenadas articulares son consistentes: q_1 y q_2 son ángulos, q_3 es una distancia.

Solución ejercicio 4. *A. Barrientos, "Fundamentos de Robótica", ejercicio resuelto 4.7, pág. 194.*

Se trata de un robot esférico (también llamado polar) de 3 GDL (dos articulaciones de rotación, una prismática):



a) La matriz de transformación T que representa la cinemática directa del robot es:

$$\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_1 \cdot {}^{1}\mathbf{A}_2 \cdot {}^{2}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -C_1S_2q_3 + C_1C_2l_2 \\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -S_1S_2q_3 + S_1C_2l_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & C_2q_3 + S_2l_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) *Cinemática inversa.* Consideramos sólo la posición (p_x,p_y,p_z) del elemento terminal. Despejar las coordenadas articulares q_i es también bastante costoso matemáticamente para algunas de las coordenadas. Se recomienda consultar el ejemplo resuelto en el libro para ver los detalles del proceso:

$$q_1 = arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$q_2 = arctg\left(\frac{(p_z - l_1)\, l_2 - q_3\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}{(p_z - l_1)\, q_3 + l_2\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$q_3 = \sqrt{A^2 + B^2 - l_2^2} = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2) + (p_z^2 - l_1)^2 - l_2^2}$$

Solución ejercicios 5, 6 y 7. Ver soluciones detalladas en PDFs aparte.