Apuntes Robótica Industrial:

Tema 3 (Parte 3): Cinemática diferencial del robot

TEORÍA

Cinemática diferencial (definición): Velocidad lineal/angular = Matriz Jacobiana · Coordenadas articulares $\Rightarrow \dot{x} = J \cdot \dot{q}$

Matriz jacobiana analítica directa:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\\ \dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix} = J_a \cdot \begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix} \text{ con } J_a = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n}\\ \dots & \ddots & \dots\\ \frac{\partial f_\psi}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_\psi}{\partial q_n}\end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \sum_1^n \frac{\partial f_x}{\partial q_i}\dot{q}_i \quad ; \quad \dot{\phi} = \sum_1^n \frac{\partial f_\phi}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\dot{y} = \sum_1^n \frac{\partial f_y}{\partial q_i}\dot{q}_i \quad ; \quad \dot{\theta} = \sum_1^n \frac{\partial f_\theta}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

$$\dot{z} = \sum_1^n \frac{\partial f_z}{\partial q_i}\dot{q}_i \quad ; \quad \dot{\psi} = \sum_1^n \frac{\partial f_\psi}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

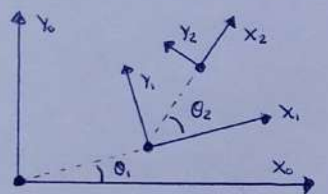
Matriz jacobiana geométrica:

$$\begin{bmatrix}V_x\\ V_y\\ V_z\\ \omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}J_v\\ J_\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix} \Rightarrow \Omega = \dot{R}\cdot R^T = \begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}$$

Singularidades: $|J(q_1, q_2, \dots, q_n)| = 0$

EJEMPLOS

① Calcula la matriz Jacobiana para el robot de 2 Grados De Libertad definido por la siguiente tabla de parámetros D-H, considerando sólo la posición (x, y) (sin la orientación) del elemento terminal. Además, determina las singularidades de dicho sistema.



i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	$q_1 = \theta_1$	0	1	0
2	$q_2 = \theta_2$	0	1	0

$${}^0A_1 = \begin{pmatrix}\cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & 0\\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1)\\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & \text{sen}(q_1)\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{pmatrix}\cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & 0\\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2)\\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & \text{sen}(q_2)\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

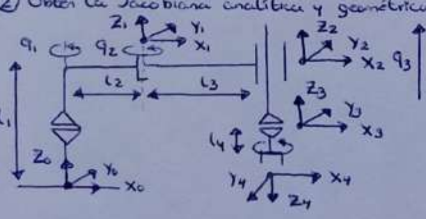
$$T = {}^0A_1\,{}^1A_2 = \begin{pmatrix}\cos(q_1+q_2) & -\cos(q_1)\text{sen}(q_2) - \text{sen}(q_1)\cos(q_2) & 0 & \cos(q_1)+\cos(q_1+q_2)\\ \text{sen}(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & \text{sen}(q_1)+\text{sen}(q_1+q_2)\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$x = \cos(q_1) + \cos(q_1+q_2)$
$y = \text{sen}(q_1) + \text{sen}(q_1+q_2)$

$$J(q_1, q_2) = \begin{bmatrix}\partial x/\partial q_1 & \partial x/\partial q_2\\ \partial y/\partial q_1 & \partial y/\partial q_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\text{sen}(q_1+q_2) - \text{sen}(q_1) & -\text{sen}(q_1+q_2)\\ \cos(q_1+q_2)+\cos(q_1) & \cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}$$

$$|J(q_1,q_2)| = -\cos(q_1+q_2)\left(-\text{sen}(q_1+q_2)-\text{sen}(q_1)\right) + \text{sen}(q_1+q_2)\left(\cos(q_1+q_2)+\cos(q_1)\right) = 0 \Rightarrow \text{sen}(q_2) = 0 \Rightarrow q_2 = 0, \pi$$

② Obtén la Jacobiana analítica y geométrica del robot SCARA.



$x = l_3\cos(q_1+q_2) + l_2\cos(q_1)$
$y = l_3\,\text{sen}(q_1+q_2) + l_2\,\text{sen}(q_1)$
$z = l_1 - l_4 + q_3$
$\phi_z = q_1 + q_2 + q_4$
$\theta_y = \pi$
$\psi_z = \pi$

$$J_a = \begin{bmatrix}-(l_3\,\text{sen}(q_1+q_2)+l_2\,\text{sen}(q_1)) & -l_3\,\text{sen}(q_1+q_2) & 0 & 0\\ l_3\cos(q_1+q_2)+l_2\cos(q_1) & l_3\cos(q_1+q_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$J_v = \begin{bmatrix}-(l_3\,\text{sen}(q_1+q_2)+l_2\,\text{sen}(q_1)) & -l_3\,\text{sen}(q_1+q_2) & 0 & 0\\ l_3\cos(q_1+q_2)+l_2\cos(q_1) & l_3\cos(q_1+q_2) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$J_\omega = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

EJERCICIOS DEL TEMA 3 - PARTE 3

Cinemática diferencial del robot

Ejercicio 1. Obtén la representación gráfica del robot definido por la siguiente tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg.

a) Calcula la matriz Jacobiana considerando sólo la posición del (x,y,z) (sin la orientación) del elemento terminal.

b) Estudia las posibles configuraciones singulares del robot.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	q_1	0	0
2	q_2	0	0	-90
3	0	q_3	0	0

Ejercicio 2. Obtén la representación gráfica del robot SCARA definido por la siguiente tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg.

a) Calcula la matriz Jacobiana considerando sólo la posición del (x,y,z) (sin la orientación) del elemento terminal.

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	l_2	0
2	q_2	0	l_3	0
3	0	q_3	0	0
4	q_4	$-l_4$	0	180

Ejercicio 3. Se dispone de un robot definido por la siguiente tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg:

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	-90
2	0	q_2	0	90
3	0	q_3	0	0

Calcula la matriz Jacobiana considerando sólo la posición del (x,y,z) (sin la orientación) del elemento terminal. Estudia las posibles configuraciones singulares del robot.

Ejercicio 4. Se dispone de un robot definido por la siguiente tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg:

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	0
2	-90	q_2	0	-90
3	0	q_3	0	0

Calcula la matriz Jacobiana considerando sólo la posición del (x,y,z) (sin la orientación) del elemento terminal. Estudia las posibles configuraciones singulares del robot.

Apuntes Robótica Industrial:

Tema 3 (Parte 3): Cinemática diferencial del robot

EJERCICIOS

1

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	q_1	0	0
2	q_2	0	0	$-90°$
3	0	q_3	0	0

a)

$$^0A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\text{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \text{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\text{sen}(q_2) & 0 \\ \text{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {^0A_1}\, {^1A_2}\, {^2A_3} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\text{sen}(q_2) & -\text{sen}(q_2)\, q_3 \\ \text{sen}(q_2) & 0 & \cos(q_2) & \cos(q_2)\, q_3 \\ 0 & -1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= -\text{sen}(q_2)\, q_3 \\ y &= \cos(q_2)\, q_3 \\ z &= q_1 \end{aligned}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos(q_2)\, q_3 & -\text{sen}(q_2) \\ 0 & -\text{sen}(q_2)\, q_3 & \cos(q_2) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

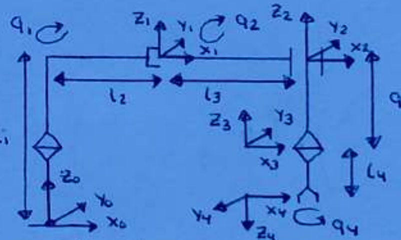
b)

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & \cos(q_2)\, q_3 & -\text{sen}(q_2) \\ 0 & -\text{sen}(q_2)\, q_3 & \cos(q_2) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cos^2(q_2)\, q_3 - \text{sen}^2(q_2)\, q_3 = q_3\left(\cos^2(q_2) - \text{sen}^2(q_2)\right) = -q_3 = 0$$

2

a)

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	l_1	l_2	0
2	q_2	0	l_3	0
3	0	q_3	0	0
4	q_4	$-l_4$	0	$180°$



$$^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\text{sen}(q_1) & 0 & l_2\cos(q_1) \\ \text{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_2\,\text{sen}(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\text{sen}(q_2) & 0 & l_3\cos(q_2) \\ \text{sen}(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_3\,\text{sen}(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^3A_4 = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & -\text{sen}(q_4) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(180°) & -\text{sen}(180°) & 0 \\ 0 & \text{sen}(180°) & \cos(180°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_4) & \text{sen}(q_4) & 0 & 0 \\ \text{sen}(q_4) & -\cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = {^0A_1} \cdot {^1A_2}\, {^2A_3}\, {^3A_4} = \begin{pmatrix} \cos(q_1+q_2+q_4) & \text{sen}(q_1+q_2+q_4) & 0 & l_3\cos(q_1+q_2) + l_2\cos(q_1) \\ \text{sen}(q_1+q_2+q_4) & -\cos(q_1+q_2+q_4) & 0 & l_3\,\text{sen}(q_1+q_2) + l_2\,\text{sen}(q_1) \\ 0 & 0 & -1 & -l_4 + q_3 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= l_3\cos(q_1+q_2) + l_2\cos(q_1) \\ y &= l_3\,\text{sen}(q_1+q_2) + l_2\,\text{sen}(q_1) \\ z &= -l_4 + q_3 + l_1 \end{aligned}$$

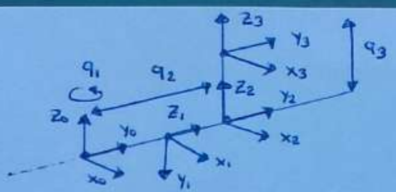
$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(l_3\,\text{sen}(q_1+q_2) + l_2\,\text{sen}(q_1)\right) & -l_3\,\text{sen}(q_1+q_2) & 0 \\ l_3\cos(q_1+q_2) + l_2\cos(q_1) & l_3\cos(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|J| = \begin{pmatrix} -\left(l_3\,\text{sen}(q_1+q_2) + l_2\,\text{sen}(q_1)\right) & -l_3\,\text{sen}(q_1+q_2) & 0 \\ l_3\cos(q_1+q_2) + l_2\cos(q_1) & l_3\cos(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = l_2\left(-\text{sen}(q_1)\cos(q_1+q_2) + \cos(q_1)\,\text{sen}(q_1+q_2)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(q_1)\,\text{sen}(q_1+q_2) - \text{sen}(q_1)\cos(q_1+q_2) = \text{sen}(q_1+q_2-q_1) = \text{sen}(q_2) = 0 \Rightarrow q_2 = 0°,\ 180°$$

③

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	$-90°$
2	0	q_2	0	$90°$
3	0	q_3	0	0



$$ {}^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\mathrm{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\mathrm{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & 0 & -\mathrm{sen}(q_1) & 0 \\ \mathrm{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^1A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90°) & -\mathrm{sen}(90°) & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

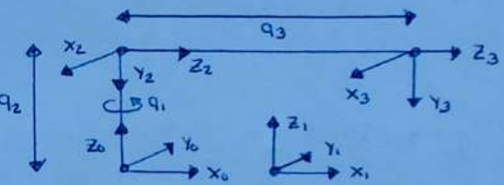
$$ T = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\mathrm{sen}(q_1) & 0 & -\mathrm{sen}(q_1)q_2 \\ \mathrm{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & \cos(q_1)q_2 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = -\mathrm{sen}(q_1)q_2 \\ y = \cos(q_1)q_2 \\ z = q_3 \end{matrix} $$

$$ J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(q_1)q_2 & -\mathrm{sen}(q_1) & 0 \\ -\mathrm{sen}(q_1)q_2 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ |J| = \begin{pmatrix} -\cos(q_1)q_2 & -\mathrm{sen}(q_1) & 0 \\ -\mathrm{sen}(q_1)q_2 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\cos^2(q_1)q_2 - (\mathrm{sen}^2(q_1)q_2) = -q_2(\cos^2(q_1) + \mathrm{sen}^2(q_1)) = -q_2 = 0 $$

④

i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	q_1	0	0	0
2	$-90°$	q_2	0	$-90°$
3	0	q_3	0	0



$$ {}^0A_1 = \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\mathrm{sen}(q_1) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^1A_2 = \begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\mathrm{sen}(-90°) & 0 & 0 \\ \mathrm{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90°) & -\mathrm{sen}(-90°) & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}(-90°) & \cos(-90°) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ {}^2A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

$$ T = {}^0A_1\,{}^1A_2\,{}^2A_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(q_1) & 0 & \cos(q_1) & \cos(q_1)q_3 \\ -\cos(q_1) & 0 & \mathrm{sen}(q_1) & \mathrm{sen}(q_1)q_3 \\ 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = \cos(q_1)q_3 \\ y = \mathrm{sen}(q_1)q_3 \\ z = q_2 \end{matrix} $$

$$ J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(q_1)q_3 & 0 & \cos(q_1) \\ \cos(q_1)q_3 & 0 & \mathrm{sen}(q_1) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} $$

$$ |J| = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(q_1)q_3 & 0 & \cos(q_1) \\ \cos(q_1)q_3 & 0 & \mathrm{sen}(q_1) \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \cos(q_1)q_3\cos(q_1) - (\mathrm{sen}(q_1)q_3\,\mathrm{sen}(q_1)) = \cos^2(q_1)q_3 + \mathrm{sen}^2(q_1)q_3 = $$

$$ = q_3(\cos^2(q_1) + \mathrm{sen}^2(q_1)) = q_3 = 0 $$