SOLUCIONES DEL TEMA 3 - PARTE 3

Cinemática diferencial del robot

Solución ejercicio 1. Este ejercicio plantea la cinemática diferencial de un robot sencillo de 3 GDL, con dos articulaciones prismáticas y una de rotación. Es el mismo que el planteado en el ejercicio 1 de la relación de cinemática inversa (Ejercicios Parte 2)

a) Al resolver la *cinemática directa* se llegó a que a matriz de transformación T del robot es:

$$T = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & -s_2 q_3 \\ s_2 & 0 & c_2 & c_2 q_3 \\ 0 & -1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nos quedamos sólo con la posición (x,y,z) del elemento terminal:

$$x = -s_2 q_3$$

$$y = c_2 q_3$$

$$z = q_1$$

b) La *matriz Jacobiana* viene entonces dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_2 q_3 & -s_2 \\ 0 & -s_2 q_3 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

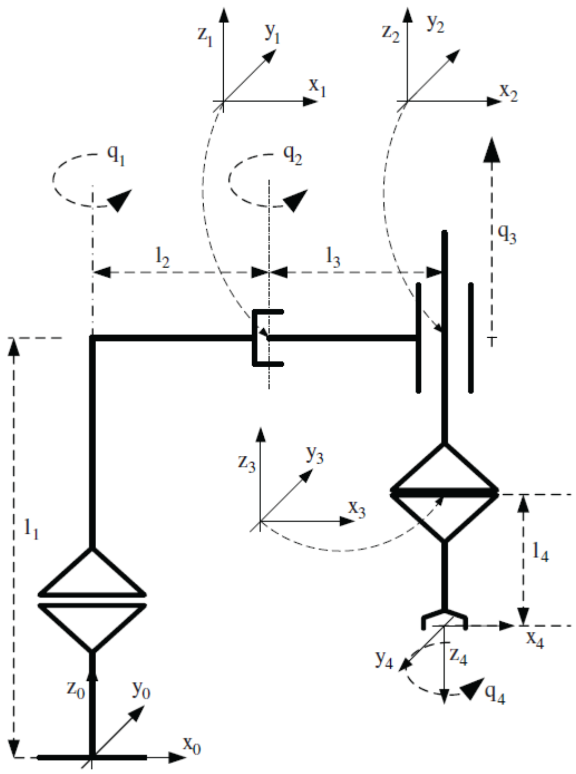
c) Las posibles *singularidades del robot* se calculan estudiando las configuraciones que anulan el determinante de la matriz (Jacobiano). En este caso el resultado es muy sencillo:

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & c_2 q_3 & -s_2 \\ 0 & -s_2 q_3 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = -q_3 = 0$$

La única configuración singular que existe se da cuando **q_3 es nulo**, lo que haría que el elemento terminal se situase siempre sobre el eje Z_0 y por ello la coordenada articular q_2 no pudiera desplazarlo de su posición, fuese cual fuese su valor.

Solución ejercicio 2. *A. Barrientos, "Fundamentos de Robótica", ejemplos resueltos 4.4 y 4.7, pág. 148 y siguientes.*

En este caso se trata de un robot de tipo SCARA, y por ello tiene 4 GDL (tres articulaciones de rotación y una prismática). La siguiente figura muestra la representación gráfica del mismo:



1. *Cinemática directa:* La matriz de transformación T de este robot viene dada por:

$$
{}^{0}\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_2 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_2 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; {}^{1}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_3 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_3 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{2}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad {}^{1}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_4 & S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & -C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_3 C_{12} + l_2 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_3 S_{12} + l_2 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; {}^{0}\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_3 C_{12} + l_2 C_1 \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_3 S_{12} + l_2 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{T} = {}^{0}\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} C_{124} & S_{124} & 0 & l_3 C_{12} + l_2 C_1 \\ S_{124} & -C_{124} & 0 & l_3 S_{12} + l_2 S_1 \\ 0 & 0 & -1 & -l_4 + q_3 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Nos quedamos sólo con la posición (x,y,z) del elemento terminal:

$$x = l_3 c_{12} + l_2 c_1$$

$$y = l_3 s_{12} + l_2 s_1$$

$$z = q_3 + l_1 - l_4$$

b) Antes de calcular la *matriz Jacobiana* debemos observar que la coordenada articular q_4 (rotación del elemento terminal) no interviene en la posición (x,y,z) del mismo.

Por ello, debemos plantear la matriz Jacobiana prescindiendo del grado de libertad q_4 y usando únicamente las coordenadas articulares q_1, q_2 y q_3:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -(l_3 S_{12} + l_2 S_1) & -l_3 S_{12} & 0 \\ l_3 C_{12} + l_2 C_1 & l_3 C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Las posibles *singularidades del robot* se calculan, como siempre, estudiando las configuraciones que anulan el Jacobiano:

$$|\mathbf{J}\ | = -\left[-l_3 C_{12}\left(l_3 S_{12} + l_2 S_1\right) + l_3 S_{12}\left(l_3 C_{12} + l_2 C_1\right)\right]$$

Igualando a cero el Jacobiano y operando:

$$l_2(-s_1 c_{12} + c_1 s_{12}) = 0$$

l_2 es una constante, luego la única posibilidad es que el segundo término sea nulo. Utilizando la expresión del seno de la resta de dos ángulos:

$$c_1 s_{12} - s_1 c_{12} = sen\ (q_1 + q_2 - q_1) = sen(q_2) = 0$$

Por ello, las dos configuraciones singulares del robot SCARA están relacionadas en este caso con los límites del espacio de trabajo del robot, en los que siempre se pierde un grado de libertad en el movimiento del elemento terminal:

- **q_2 = 0**, brazo totalmente extendido, que se corresponde con el límite exterior del espacio de trabajo.
- **q_2 = 180º**, que se corresponde con el límite interior del espacio de trabajo.

Solución ejercicio 3. Ver solución detallada en PDF aparte.

Solución ejercicio 4. Ver solución detallada en PDF aparte.