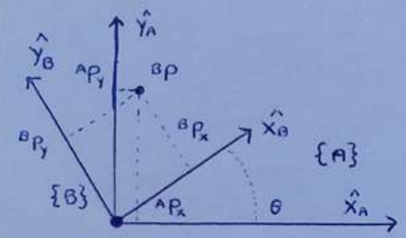
Apuntes Robótica Industrial:

Tema 2 (Parte 2): Herramientas matemáticas para la localización espacial

TEORÍA

Par de rotación: $Rot(k,\theta)\,p = p\cos\theta - (k \times p)\,\text{sen}\,\theta + k(k \cdot p)(1-\cos\theta)$, donde $Rot(k,\theta)\,p$ es un par de rotación aplicado a un vector p y $k = (k_x, k_y, k_z)$ es el eje de giro sobre un ángulo θ (Fórmula de Rodrigues).



$$^A_BR = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$^BP = \begin{bmatrix} ^BP_x \\ ^BP_y \end{bmatrix}$$

$$^AP = {}^A_BR \cdot {}^BP = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^BP_x \\ ^BP_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^BP_x\cos(\theta) - {}^BP_y\,\text{sen}(\theta) \\ ^BP_x\,\text{sen}(\theta) + {}^BP_y\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Ortonormalidad de una matriz de rotación: $|R| = 1$ y $R^{-1} = R^T$.

ROTACIÓN EJE X

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ROTACIÓN EJE Y

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ROTACIÓN EJE Z

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta + U_x^2(1-\cos\theta) & U_xU_y(1-\cos\theta) - U_z\,\text{sen}\,\theta & U_xU_z(1-\cos\theta) + U_y\,\text{sen}\,\theta \\ U_yU_x(1-\cos\theta) + U_z\,\text{sen}\,\theta & \cos\theta + U_y^2(1-\cos\theta) & U_yU_z(1-\cos\theta) - U_x\,\text{sen}\,\theta \\ U_zU_x(1-\cos\theta) - U_y\,\text{sen}\,\theta & U_zU_y(1-\cos\theta) + U_x\,\text{sen}\,\theta & \cos\theta + U_z^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}}{2}; \quad \cos\theta = \frac{tr(R) - 1}{2}; \quad U_x = \frac{o_z - a_y}{2\,\text{sen}\,\theta}; \quad U_y = \frac{a_x - n_z}{2\,\text{sen}\,\theta}; \quad U_z = \frac{n_y - o_x}{2\,\text{sen}\,\theta}$$

Conmutatividad de una matriz: $Rot_1(\alpha) \cdot Rot_2(\beta) = Rot_2(\beta) \cdot Rot_1(\alpha)$

MATRIZ HOMOGÉNEA

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ \epsilon & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Rotación} & \text{Traslación} \\ \text{Perspectiva} & \text{Escalado} \end{bmatrix}$$

VECTOR HOMOGÉNEO

$$p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aw \\ bw \\ cw \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE TRASLACIÓN

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ DE ROTACIÓN

$$H = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIÓN EN EL PLANO (TRASLACIÓN)

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & D_x \\ 0 & 1 & D_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

TRANSFORMACIÓN EN EL PLANO (ROTACIÓN)

$$\begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuaternión (definición): $Q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = (s, v)$

Suma de cuaterniones: $q_1 + q_2 = (s_1, v_1) + (s_2, v_2) = (s_1 + s_2, v_1 + v_2)$

Producto por un escalar: $Q_2 = a \cdot Q_1 = a(s_1, v_1) = (as_1, av_1)$

Producto de cuaterniones: $Q_3 = Q_1 \cdot Q_2 = (s_1, v_1) \cdot (s_2, v_2) = (s_1s_2 - v_1v_2,\ v_1 \times v_2 + s_1v_2 + s_2v_1)$

Cuaternión conjugado: $Q^* = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3] = (s, -v)$

Norma: $\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$

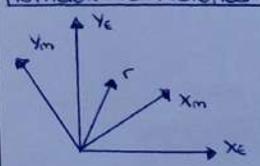
Inverso: $Q^{-1} = Q^* / \|Q\|$

Cuaternión de rotación (definición): $Q = Rot(k,\theta) = (\cos(\theta/2),\ k\,\text{sen}(\theta/2)) \Rightarrow Rot(k, 60°) = \left[\cos 30° + \text{sen}\,30° \frac{(3i - 2j + k)}{\sqrt{14}}\right]$, $k = (3, -2, 1)$

Cuaternión de rotación a un vector: $(0, r_{xyz}) = Q \cdot (0, r_{uvw}) \cdot Q^*$

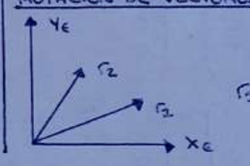
Traslación de cuaterniones: $(0, r_2) = (0, r_1) + (0, t)$

ROTACIÓN DE VECTORES (CASO 1)



$$r_E = {}^m_E R\, r_m$$

ROTACIÓN DE VECTORES (CASO 2)



$$r_1 = R r_2 \Rightarrow r_2 = R^{-1} r_1 = R^T r_1$$

EJEMPLOS

① Dada la matriz de rotación R, determina el eje y el ángulo de rotación.

$$R = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -0'5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0'5 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{\sqrt{(o_z - a_y)^2 + (a_x - n_z)^2 + (n_y - o_x)^2}}{2} = \frac{\sqrt{(0-0)^2 + (-0'5-0'5)^2 + (0-0)^2}}{2} = \frac{1}{2} = 0'5 \\ \cos\theta &= \frac{tr(R) - 1}{2} = \frac{(\sqrt{3}/2 + 1 + \sqrt{3}/2) - 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ \end{aligned}$$

$$U_x = \frac{o_z - a_y}{2\operatorname{sen}\theta} = \frac{0-0}{2\operatorname{sen}(30^\circ)} = 0 \ ; \ U_y = \frac{a_x - n_z}{2\operatorname{sen}\theta} = \frac{-0'5-0'5}{2\operatorname{sen}(30^\circ)} = \frac{-1}{1} = -1 \ ; \ U_z = \frac{n_y - o_x}{2\operatorname{sen}\theta} = \frac{0-0}{2\operatorname{sen}(30^\circ)} = 0$$

Por lo tanto, se rota en el eje $-Y$ un ángulo de 30°.

② Considera una rotación de $+90^\circ$ en X y otra de $+90^\circ$ en el eje Y intrínseco (eje relativo, es decir, ya girado). ¿Son conmutativas? Calcula las matrices finales.

$$Rot_x(90^\circ)\cdot Rot_y(90^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ) & -\operatorname{sen}(90^\circ) \\ 0 & \operatorname{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \operatorname{sen}(90^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Rot_y(90^\circ)\cdot Rot_x(90^\circ) = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \operatorname{sen}(90^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ) & -\operatorname{sen}(90^\circ) \\ 0 & \operatorname{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NO SON CONMUTATIVAS

③ Considerando la matriz de rotación R, ¿cuál sería su representación en ángulos de Euler XYZ?

$$T = R(x,\alpha)R(y,\phi)R(z,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

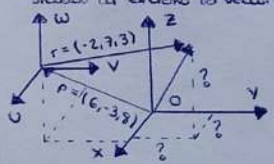
$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi\cos\theta + \cos\alpha\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + \cos\alpha\cos\theta & -\operatorname{sen}\alpha\cos\phi \\ -\cos\alpha\operatorname{sen}\phi\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\theta & \cos\alpha\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\alpha\cos\theta & \cos\alpha\cos\phi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{6}/4 & -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/4 & -\sqrt{2}/4 & -\sqrt{2}/2 \\ 0'5 & \sqrt{3}/2 & 0 \end{pmatrix} = R$$

$$\frac{-\sqrt{2}/2}{0} = \frac{-\cos\phi\operatorname{sen}\alpha}{\cos\phi\cos\alpha} = tg\,\alpha \Rightarrow \alpha = arctg\left(-\frac{\sqrt{2}/2}{0}\right) = 90^\circ$$

$$\sqrt{2}/2 = \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \phi = \operatorname{arcsen}(\sqrt{2}/2) = 45^\circ$$

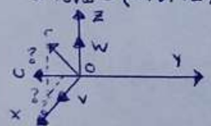
$$\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{6}/4} = \frac{\cos\phi\operatorname{sen}\theta}{-\cos\phi\cos\theta} = tg\,\theta \Rightarrow \theta = arctg\left(-\frac{-\sqrt{2}/4}{\sqrt{6}/4}\right) = 30^\circ$$

④ Según la figura, el sistema O'UVW está trasladado un vector $p = (6,-3,8)$ con respecto el sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del punto situado al extremo del vector r cuyas coordenadas respecto el sistema móvil son $r_{uvw} = (-2,7,3)$.



$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⑤ Según la figura, el sistema O'UVW está girado -90° alrededor del eje OZ con respecto el sistema OXYZ. Calcular las coordenadas del vector r_{xyz} si $r_{uvw} = (4,8,12)$.



$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⑥ Considera una rotación de $+180^\circ$ en Z y traslación $(-1,1,2)$ respecto al sistema de referencia móvil. ¿Son conmutativas? Calcula las matrices finales.

$$Rot_z(180^\circ)\cdot T(-1,1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(-1,1,2)\cdot Rot_z(180^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NO SON CONMUTATIVAS

⑦ Desde un sistema de referencia móvil se conoce el vector $\bar{r} = (1,2,3)$. El sistema de referencia móvil se localiza rotando 90° respecto al eje Z de un sistema de referencia fijo. Calcula las coordenadas del vector visto desde el sistema de referencia fijo usando matrices de rotación y cuaterniones.

$$r_2 = Rr_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = [\cos 45^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ(0\bar{i} + 0\bar{j} + \bar{k})]$$

$$(0, r_2) = Q\cdot(0, r_1)\cdot Q^* = (\cos 45^\circ + k\operatorname{sen} 45^\circ)(0, r_1)(\cos 45^\circ - k\operatorname{sen} 45^\circ) = 0 - 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$$

EJERCICIOS DEL TEMA 2 - PARTE 2

Composición de rotaciones básicas

Ejercicio 1. Un sistema de referencia OXYZ se gira 45º con respecto a su eje X y posteriormente otros 45º con respecto a su eje Z' intrínseco o relativo (ya girado).

a) Construye las matrices básicas de rotación con respecto a cada eje, y calcula la matriz final de rotación R que representa ambos giros.
b) Representa gráficamente la orientación del sistema final girado basándote en las columnas de la matriz de rotación.
c) Comprueba el resultado mediante la aplicación *Rotation Viewer* para MATLAB.
d) Realiza las rotaciones en orden inverso e indica si el resultado es el mismo.

Ejercicio 2. Un sistema de referencia OXYZ se gira 90º con respecto a su eje Z y posteriormente otros -90º con respecto a sus eje X', **seguido** un giro final de 90º con respecto a Y'' **(rotaciones** intrínsecas o relativas).

a) Construye las matrices básicas de rotación con respecto a cada eje, y calcula la matriz final de rotación R que representa ambos giros.
b) Representa gráficamente la orientación del sistema final girado basándote en las columnas de la matriz de rotación.
c) ¿Hay algún eje que permanezca en la misma orientación?
d) Comprueba el resultado mediante la aplicación *Rotation Viewer* para MATLAB.

Coordenadas homogéneas. Matrices de trasformación

Ejercicio 3. Un sistema de referencia O'UVW **se ha trasladado** un vector p = (3,-4, 0) con respecto a otro sistema fijo OXYZ, sin realizar ninguna rotación. Si las coordenadas de un vector r en el **sistema** O'UVW son r_{uvw} = (4. -5, -11), calcula las coordenadas de dicho vector en el sistema OXYZ.

Ejercicio 4. Un sistema de referencia OUVW se ha girado -30º alrededor del eje OZ de un sistema fijo OXYZ, sin ninguna traslación Si r_{uvw} = (-3, 4, 15), calcula las coordenadas del r en el sistema OXYZ.

Ejercicio 5. Un sistema de referencia O'UVW se gira **90º alrededor del eje OX de un sistema fijo** OXYZ y posteriormente se traslada un vector p = (8 -4,12) también con respecto a OXYZ. Si r_{uvw} = (-3, 4, -11), calcula las coordenadas del r en el sistema OXYZ utilizando matrices de transformación y coordenadas homogéneas.

Ejercicio 6. Obtén la matriz de transformación T que representa las siguientes transformaciones concatenadas sobre un sistema de referencia OXYZ fijo: traslación de un vector p_{xyz} = (-3,10,10), un giro de -90º **sobre el eje O'U del sistema trasladado** y por último un giro de 90º **sobre el eje O'V** del sistema girado.

Robotics System Toolbox de MATLAB. Representación de la rotación mediante cuaterniones.

Para resolver los ejercicios de este apartado se utilizarán las herramientas del Robotics System Toolbox de MATLAB (https://es.mathworks.com/help/robotics/index.html)

Puedes encontrar toda la información sobre las herramientas disponibles en el Toolbox para representar rotaciones y traslaciones utilizando cuaterniones, transformaciones homogéneas (incluyendo traslaciones y rotaciones individuales), ángulos de Euler y eje/ángulo en el siguiente enlace:

https://es.mathworks.com/help/robotics/ug/coordinate-transformations-in-robotics.html

Ejercicio 7. Calcula utilizando las expresiones vistas en teoría el cuaternión que representa una rotación de 90° sobre el eje dado por el vector u = (3, -2, 1). Comprueba el resultado utilizando MATLAB.

Ejercicio 8. Utiliza MATLAB para obtener el vector resultante de aplicar la rotación representada por el cuaternión del ejercicio anterior al vector r = (5, 2, -6)

Ejercicio 9. Utiliza MATLAB para obtener la matriz de transformación equivalente a la rotación representada por el cuaternión del ejercicio 7.

Ejercicio 10. Utiliza MATLAB para obtener los tres ángulos de Euler, en grados, equivalentes a la rotación representada por el cuaternión del ejercicio 7, en las secuencias de rotación de ejes “XYZ” y “ZYZ”. ¿Hay alguna diferencia entre ambas opciones de rotación de ejes?

Ejercicio 11. Sea el movimiento consistente en trasladar un sistema de referencia OXYZ mediante el vector (4, 2, 8), seguido de girarlo 30° entorno al vector (1,1,0), y trasladarlo nuevamente según el vector (1, 0, 1) convirtiéndose en el sistema OUVW, y estando estas transformaciones definidas en el sistema de referencia móvil.

a) Utilizando cuaterniones, calcula la representación del vector $v_{UVW}(3, -1, 2)$ visto en el sistema fijo.
b) Utilizando matrices de transformación homogenea, calcula la representación del vector $v_{UVW}(3, -1, 2)$ visto en el sistema fijo.
c) Comprueba que ambas formulaciones dan el mismo resultado

Apuntes Robótica Industrial:

Tema 2 (Parte 2): Herramientas matemáticas para la localización espacial

EJERCICIOS

①

$$R_x(45^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45^\circ) & -\operatorname{sen}(45^\circ) \\ 0 & \operatorname{sen}(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$R_z(45^\circ) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\operatorname{sen}(45^\circ) & 0 \\ \operatorname{sen}(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_{final} = R_x(45^\circ) \cdot R_z(45^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

NO SON CONMUTATIVAS

$$R_{inversa} = R_z(45^\circ) \cdot R_x(45^\circ) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

②

$$R_z(90^\circ) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & -\operatorname{sen}(90^\circ) & 0 \\ \operatorname{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_x(-90^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & -\operatorname{sen}(-90^\circ) \\ 0 & \operatorname{sen}(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_y(90^\circ) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \operatorname{sen}(90^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_{final} = R_z(90^\circ) \cdot R_x(-90^\circ) \cdot R_y(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

③

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

④

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & P_x \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-30^\circ) & -\operatorname{sen}(-30^\circ) & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⑤

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & P_y \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_u \\ r_v \\ r_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & \cos(90^\circ) & -\operatorname{sen}(90^\circ) & -4 \\ 0 & \operatorname{sen}(90^\circ) & \cos(90^\circ) & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⑥

$$T = t(-3, 10, 10) \cdot R_x(-90^\circ) \cdot R_y(90^\circ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-90^\circ) & -\operatorname{sen}(-90^\circ) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(90^\circ) & 0 & \operatorname{sen}(90^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}(90^\circ) & 0 & \cos(90^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑦

$u = (3, -2, 1)$

$\|u\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

$\hat{u} = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right) = (\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$

$q_{(\theta = 90° = \pi/2)} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{u}_x, \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{u}_y, \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{u}_z \right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{3}{\sqrt{14}}, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{-2}{\sqrt{14}}, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \right) =$

$= (0'7071, 0'5661, -0'3771, 0'1886)$

⑧

$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) = (0'7071, 0'5661, -0'3771, 0'1886)$

$q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3) = (0'7071, -0'5661, 0'3771, -0'1886)$

$r = (5, 2, -6) \Rightarrow$ Cuaternión puro : $r = (0, 5, 2, -6)$

$V_r = q \cdot r \cdot q^* = (0'7071, 0'5661, -0'3771, 0'1886) \cdot (0, 5, 2, -6) \cdot (0'7071, -0'5661, 0'3771, -0'1886) =$

$= (-0'9447, 5'4209, 5'7538, -1'2249) \cdot (0'7071, -0'5661, 0'3771, -0'1886) = (0, 3'7446, 5'4280, 4'6134)$

Propiedad : Dados dos cuaterniones $q_1 = (w_1, x_1, y_1, z_1)$ y $q_2 = (w_2, x_2, y_2, z_2)$, su multiplicación será la siguiente :

$q_1 q_2 = (w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2, w_1 x_2 + x_1 w_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2, w_1 y_2 - x_1 z_2 + y_1 w_2 + z_1 x_2, w_1 z_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2 + z_1 w_2)$

⑨

$q = (w, x, y, z) = (0'7071, 0'5661, -0'3771, 0'1886)$

Sustituyendo estos valores en la matriz R :

$$R = \begin{pmatrix} 1 - 2(y^2 + z^2) & 2(xy - wz) & 2(xz + wy) & 0 \\ 2(xy + wz) & 1 - 2(x^2 + z^2) & 2(yz - wx) & 0 \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & 1 - 2(x^2 + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0'6445 & -0'6936 & -0'3197 & 0 \\ -0'1526 & 0'2879 & -0'9428 & 0 \\ 0'7468 & 0'6583 & 0'0746 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑩