Cálculo de presión en manómetro con resorte como indicador

Sensores y actuadores

Grado en Ingeniería en Robótica Software

GSyC, Universidad Rey Juan Carlos

Descripción

Como ya hemos visto en la teoría, en los manómetros —y de forma generalizada— se usa una escala sobre la cual algún indicador, como una aguja o un resorte, refleja el valor de presión medido, relacionando la altura alcanzada por el líquido del manómetro con la presión aplicada, siempre y cuando se conozca la presión de referencia, que suele ser la atmosférica.

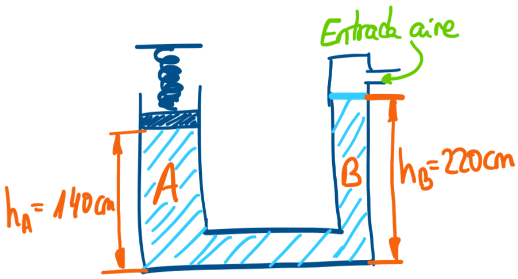

Figura 1: Manómetro de tipo columna en U

Para este problema, disponemos de un manómetro de tipo columna, cuyo líquido interior es aceite. El lado cerrado está conectado a un pistón, que a su vez está conectado a un muelle o resorte. Inicialmente, cuando el pistón indica el valor 0, este toca el muelle sin comprimirlo; sería la posición de referencia.

Se pide obtener la presión medida por el manómetro, p, cuando el muelle se comprime $30cm$.

Datos:

1. Constante elástica del muelle: $K = 340\frac{kN}{m}$
2. Densidad del aceite a 20^oC y $1atm$: $\rho_m = 0{,}85\frac{g}{cm^3}$
3. Densidad del aire a 20^oC y $1atm$: $\rho = 1{,}29E - 3\frac{g}{cm^3}$
4. Diámetro del lado A: $\varnothing_A = 50cm$
5. Diámetro del lado B: $\varnothing_B = 30cm$
6. Presión atmosférica: $1atm = 1013{,}25hPa$

7. Variación longitudinal del muelle: $\Delta_l = \Delta_{h_A} = 30cm$
8. Altura del lado cerrado: $h_A = 140cm$
9. Altura del lado abierto: $h_B = 220cm$

Solución

0.1. Peso del pistón

En primer lugar, vamos a calcular cuál es el peso del pistón. Recordemos que, gracias al peso de este elemento, se consigue la posición inicial de equilibrio cuyos datos se han enumerado.

Para este propósito, debemos emplear la ecuación vista en teoría, y que nos relaciona la presión que se ejerce por uno de los vasos del manómetro (la que se quiere medir) relativamente a la presión atmosférica, que es la aplicada de forma natural en el otro vaso.

$$p = p_{atm} + \rho_m gh - \rho gd \tag{1}$$

Como $\rho \lll \rho_m$ ($\rho_m = 0{,}85$ y $\rho = 1{,}29E - 3$), se puede simplificar la Ecuación 1, y nos quedaría del siguiente modo:

$$p = p_{atm} + \rho_m gh \tag{2}$$

No debemos confundir la h con las alturas de los líquidos en ambos lados del manómetro. Esta h es la diferencia de dichas alturas en la situación de equilibrio. Esto es:

$$h = h_B - h_A = 2{,}2 - 1{,}4 = 0{,}8m \tag{3}$$

Sustituyendo este valor de h, y los otros ya conocidos ($p_{atm} = 1atm = 1013{,}25hPa = 101325Pa$, $\rho_m = 0{,}85\frac{g}{cm^3} = 0{,}85\frac{kg}{l}$), en la Ecuación 2, nos queda:

$$p = p_{atm} + \rho_m gh \implies p = 101325 + 0{,}85 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}8 = 101325 + 6{,}664 \approx 101331{,}7Pa \tag{4}$$

Siendo esta la presión ejercida por el pistón, y conociendo la superficie de este ($\varnothing = 50cm = 0{,}5m \implies r = 0{,}25m$), podemos ya calcular el peso del mismo:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{P}{S} \implies P = p \cdot S = 101331{,}7 \cdot \pi 0{,}25^2 \approx 19896{,}5N \tag{5}$$

0.2. Presión medida por manómetro

Una vez conseguido el peso del pistón, gracias al cual se consigue la situación de equilibrio descrita, podemos calcular qué presión se está ejerciendo en el lado B (es la presión que queremos medir) cuando el muelle sufre un acortamiento $\Delta_l = 30cm = 0{,}3m$.

En primer lugar, calculamos qué desnivel se sufre en el lado B (Δ_{h_B}), cuando en lado A se produce esa diferencia ($\Delta_{h_A} = 0{,}3m$. Para ello, igualamos el volumen que se ocupa en el lado A (V_A) al volumen que se desaloja en el lado B (V_B).

$$V_A = V_B \tag{6}$$
$$S_A \cdot \Delta_{h_A} = S_B \cdot \Delta_{h_B} \tag{7}$$
$$\cancel{\pi} \cdot r_A^2 \cdot \Delta_{h_A} = \cancel{\pi} \cdot r_B^2 \cdot \Delta_{h_B} \tag{8}$$
$$\frac{r_A^2 \cdot \Delta_{h_A}}{r_B^2} = \Delta_{h_B} \tag{9}$$
$$\Delta_{h_B} = \frac{0{,}25^2 \cdot 0{,}3}{0{,}15^2} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83m \tag{10}$$

En este punto conviene recordar la ley de Hooke. Cuando estiramos o comprimimos un muelle, la fuerza recuperadora es proporcional al cambio de longitud x de la posición de equilibrio (Ecuación 12). Con K como constante elástica del muelle. El signo menos se debe a que la fuerza recuperadora es siempre opuesta a la deformación.

$$P = -K \cdot \Delta_{h_A} \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

Sustituimos la P de la Ecuación 12 en la ecuación de presión, para conocer la presión que se está ejerciendo sobre el pistón para desplazarlo (en sentido ascendente):

$$P = p_A \cdot S \tag{13}$$
$$-K \cdot \Delta_{h_A} = p_A \cdot S \tag{14}$$
$$p_A = \frac{-K \cdot \Delta_{h_A}}{S} \tag{15}$$
$$p_A = \frac{-340000 \cdot 0{,}3}{\pi \cdot 0{,}25^2} \tag{16}$$
$$p_A = \frac{-102000}{0{,}1964} \tag{17}$$
$$p_A \approx -519348{,}3Pa(= \frac{N}{m^2}) \tag{18}$$

0.3. Bonus: demostración

Recordemos que en la Ecuación 4 ya obtuvimos la presión que ejerce el pistón por su propio peso: $101331{,}7Pa$ (sentido descendente). Así, la presión real de empuje o avance que se está ejerciendo sobre el pistón para que este se desplace es:

$$p_{empuje} = p_{aparente} - p_{peso} \tag{19}$$
$$p_{empuje} = -519348{,}3Pa - 101331{,}7Pa \tag{20}$$
$$p_{empuje} \approx -620680Pa \tag{21}$$

Como era de esperar, la presión real de empuje ejercida sobre el pistón es mayor que la obtenida en la Ecuación 18, pues para desplazar el pistón Δ_{h_A}, ha habido que *vencer* además su peso. Nótese que el símbolo menos indica el sentido en que se está ejerciendo la presión, y que en este caso hemos tomado como tal el sentido ascendente. Sería perfectamente válido haber considerado el sentido descendente como negativo en la Ecuación 4 y, por tanto, en la Ecuación 18 se consideraría el sentido ascendente como positivo. El resultado no se vería alterado; solo su signo.

Pero claro, hemos de tener en cuenta que la presión atmosférica está *ayudando* en esa presión de empuje calculada en la Ecuación 18. Así que, para calcular la presión absoluta que se está ejerciendo y, por tanto, la que debería medir el manómetro, debemos restar esa *ayuda* de la atmósfera.

Y es en este punto donde adquiere vital importancia el hecho de tener en cuenta la situación de equilibrio inicial, pues es así porque la presión debida al peso del pistón es la misma que la presión atmosférica. Por tanto, se anulan y obtenemos que que:

$$p_{absoluta} = p_{empuje} - p_{atm} \tag{22}$$

$$p_{absoluta} = -620680Pa + 101325Pa \tag{23}$$

$$p_{empuje} = -519335Pa \tag{24}$$

Vemos que, efectivamente, la presión absoluta obtenida en la Ecuación 24, $519335Pa$, es similar a la presión aparente calculada en la Ecuación 18, $519348Pa$. No es exactamente igual por los redondeos aplicados de forma sucesiva, pero en la práctica serían valores iguales; de otro modo, no habría situación de equilibrio.