Problema 1 *Se consideră problema bilocală*

$$y'' + \sin y = 0, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$
$$y(0) = 0, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

care descrie mişcarea unghiulară a unui pendul.

(a) *Aproximând derivata de ordinul doi prin diferenţe centrate*

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

şi considerând o grilă uniformă, $x_k = \frac{k}{n+1}\frac{\pi}{4}$*,* $k = 0, 1, \ldots, n, n+1$*, să se dea un algoritm de rezolvare a problemei bilocale de mai sus prin metoda lui Newton astfel:*

(a1) *Necunoscutele vor fi valorile functiei* y *pe punctele grilei,* $y_k = y(x_k)$*,* $k = 1, \ldots, n$*. Înlocuind derivata de ordinul 2 cu aproximarea de mai sus ajunge la un sistem neliniar. Scrieți sistemul la care se ajunge. (2p)*

(a2) *Scrieți jacobianul sistemului. (1p)*

(a3) *Sistemul se rezolvă cu metoda lui Newton.*

(b) *Implementaţi algoritmul de la (a) în MATLAB. (2p)*

Problema 2 *Fie* $\Delta : a = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ *o diviziune a lui* $[a, b]$ *în* $n - 1$ *subintervale. Presupunem că se dau valorile* $f_i = f(x_i)$ *ale funcţie* f *în punctele* x_i*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*. În această problemă* $s \in \mathbb{S}_2^1$ *va fi un spline cuadratic (de gradul II) care interpolează* f *pe* Δ*, adică* $s(x_i) = f_i$*,* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

(a) *Explicaţi de ce este nevoie de o condiţie suplimentară pentru a determina* s *unic. (1p)*

(b) *Definim* $m_i = s'(x_i)$*,* $i = 1, 2, \ldots, n-1$*. Determinaţi* $p_i := s|_{[x_i, x_{i+1}]}$*,* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *în funcţie de* f_i, f_{i+1} *şi* m_i*. (2p)*

(c) *Presupunem că* $m_n = f'(b)$*. (Conform lui (a), aceasta determină* s *unic.) Arătaţi cum pot fi calculate* m_1*,* m_2*, …,* m_{n-1}*. (1p)*