# Suport seminar algoritmica grafurilor
# VI. Grafuri planare, colorarea grafurilor

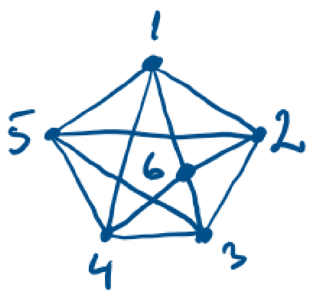
Probleme:

1. Să se verifice formula lui Euler pe următorul graf:

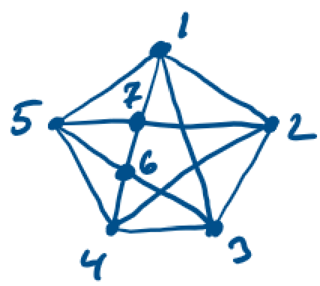
2. Fie mulțimea vârfurilor $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, în $G = (V, E)$ există o muchie între $i$ și $j$ dacă $i$ este divizibil cu $j$ sau $j$ este divizibil cu $i$. Pentru $n \geq 16$ este $G$ planar?

3. Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat și neponderat. Care este numărul minim de vârfuri astfel încât $G$ să fie 4-regular simplu și planar?

4. Sunt următoarele grafuri planare?

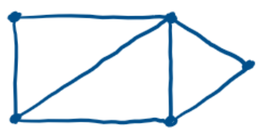



(a)



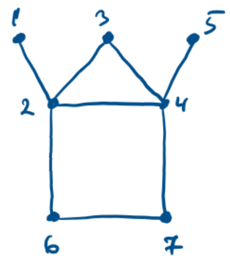

(b)

5. Să se determine dualul grafului de mai jos.

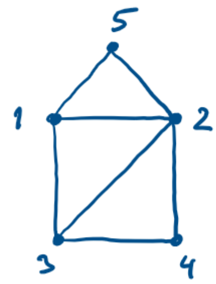


6. Fie $G = (V, E)$ un graf r-regular cu $n$ noduri să se demonstreze că $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$, unde $\bar{G}$ este complementarul grafului $G$.

7. Să se determine polinomul cromatic și numărul cromatic pentru următoarele grafuri.




(a)



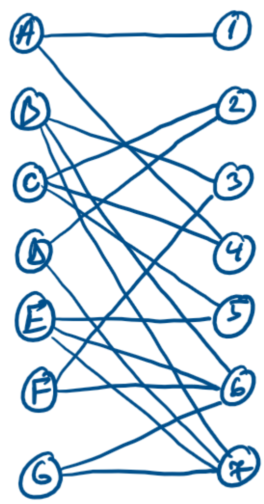

(b)

8. Într-un graf cu $n = 128$ de vârfuri există muchie între vârfurile $i$ și $j$ dacă $cmmdc(i, j) \neq 1$. Care este numărul cromatic pentru un astfel de graf?

9. Să se deseneze un graf 3−regular al cărui număr cromatic de muchie este mai mare sau egal cu 4.

10. Firma Transport S.R.L. are 4 camioane în următoarele orașe: Carei, Cluj, Oradea, Brașov. Firma a primit simultan 4 comenzi, toate cele 4 camioanele trebuie să se prezinte în următoarele orașe: Satu-Mare, Timișoara, București, Iași. Distanțele dintre orașe se cunosc. Să se determine cu metoda maghiară destinația fiecărui camion astfel încât un camion să parcurgă distanța minimă.

11. Să se determine cuplajul maxim pentru graful de mai jos cu algoritmul Hopcroft-Karp.

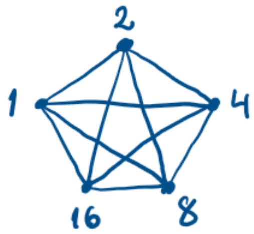



## Soluții

### Problema 1

Formula lui Euler: $n - m + r = 2$, pentru graful respectiv $n = 4$, $m = 6$, $r = 4$.

**Problema 2** Graful nu este planar deoarece se poate găsi ca și subgraf graful complet $K_5$ format din vârfurile $1, 2, 4, 8, 16$ (figura de mai jos).

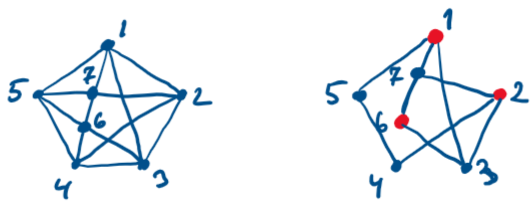



**Problema 3** Dacă graful este 4-regular și simplu → are minim 5 vârfuri, $K_5$ este 4-regular, dar nu este simplu, de aceea trebuie să aibă minim 6 vârfuri. Desenați un astfel de graf.

**Problema 4** Graful din figura (4a) este planar (figura 3) iar graful din figura (4b) nu este planar deoarece se poate găsi graful $k_3$ (figura 4).


(a) (b)

Figura 3: Graful din cerinţa (4a) şi reprezentarea planară a acestuia.




(a) (b)

Figura 4: Graful din cerinţa (4b) şi subgraful $K_3$.

**Problema 5** Dacă pentru un graf se poate găsi dualul acestuia atunci graful este planar. Un graf dual se determină în felul următor:

1. fiecare regiune din graful inițial reprezintă un vârf în graful dual;

2. fiecare muchie din graful inițial trebuie traversată de o muchie din graful dual.

Figura 5 prezintă graful inițial și dualul acestuia.

**Problema 6** Știm că $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, deoarece graful $G$ este $r-$regular $\rightarrow \Delta(G) = r$.
Pentru garful complementar $\Delta(\bar{G}) = n - r - 1$.

(a) (b)

Figura 5: Graful din cerinţa (5) şi dualul acestuia (graful dual este colorat în roşu).

Atunci:

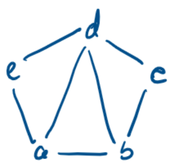
$$\begin{array}{r} (\chi(G) \leq r + 1) \\ + \Big(\chi(\bar{G}) \leq n - r - 1 + 1\Big) \\ \hline \chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1 \end{array}$$

**Problema 7** Se aplică pașii descriși în cursul 10 pentru determinarea polinomului cromatic.

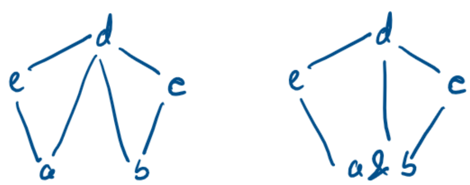
*Calculul polinomului cromatic* Pentru a determina polinomul cromatic al unui graf $G = (V, E)$ neorientat există două metode recursive:

1. $c_G(k) = c_{G-e}(k) - c_{G/e}(k)$: se reduce $G$ eliminând pe rând câte o muchie $e \in E$ până când se obțin grafurile $E_n, T_n$ sau $K_n$;
2. $c_G(k) = c_{\bar{G}}(k) - c_{\bar{G}/e}(k)$: se extinde $G$ adăugând pe rând muchii $e$ care lipsesc din $G$, $\bar{G} = G + e$.

Fie graful de mai jos, se utilizează ambele variante pentru a determina polinomul cromatic al grafului.

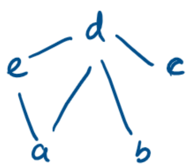



**Metoda 1** Graful se descompune în $c_G(k) = c_{G_1}(k) - c_{G_2}(k)$

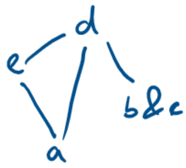



(a) $G_1$ (b) $G_2$

Primul termen $c_{G_1}$ se descompune în $c_{G_1}(k) = c_{G_{11}}(k) - c_{G_{12}}(k)$, unde $G_{11} = G_1 - (b/c)$ și $G_{12} = G_1/(b, c)$.




(a) $G_{11}$




(b) $G_{12}$

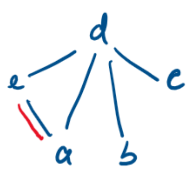
Termenul $c_{G_2}$ se descompune în $c_{G_2} = c_{G_{21}}(k) - c_{G_{22}}(k)$, unde $G_{21} = G_2 - (a\&b, c)$ și $G_{22} = G_2/(a\&bb, c)$.


(a) $G_{21}$

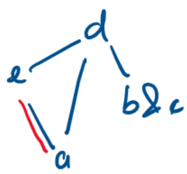

(b) $G_{22}$

Grafurile $G_{12}$ și $G_{21}$ sunt izomorfe, graful $G_{22}$ este un graf complet $K_3$, $c_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2))$.Până acum

$$c_G(k) = c_{G_{11}}(k) - 2c_{G_{12}}(k) + c_{K_3}(k).$$




(a) $G_{11}$

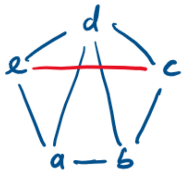



(b) $G_{12}$

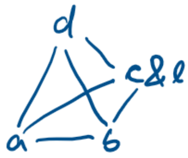
Se observă că

$$c_{G_{11}}(k) = c_{T_5}(k) - c_{T_4}(k) = k(k-1)^4 - k(k-1)^3,$$
$$c_{G_{12}}(k) = c_{T_4}(k) - c_{T_3}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)^2.$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow c_G(k) &= k(k-1)^4 - k(k-1)^3 - 2[k(k-1)^3 - k(k-1)^2] + k(k-1)(k-2)\\ &= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k\end{aligned}$$

**Metoda 2** Graful se descompune în $c_G(k) = c_{G_1}(k) + c_{G_2}(k)$, unde $G_1 = G + (c, e)$ și $G_2 = G/(c, e)$.

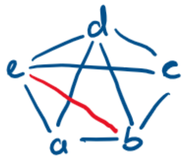



(a) $G_1$

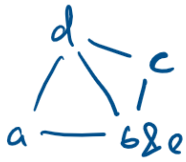



(b) $G_2$

$G_2 = K_4 \Rightarrow c_{G_2}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$, $C_{G_1}(k) = c_{G_{11}}(k) + c_{G_{12}}(k)$, unde



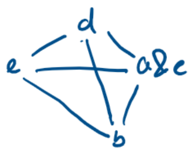

(a) $G_{11}$




(b) $G_{12}$

$C_{G_{11}}(k) = c_{G_{111}}(k) + c_{G_{112}}(k) = c_{K_5}(k) + c_{K_4}(k)$, unde

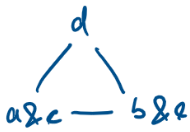

(a) $G_{111}$




(b) $G_{112}$

$C_{G_{12}}(k) = c_{G_{121}}(k) + c_{G_{122}}(k) = c_{K_4}(k) + c_{K_3}(k)$, unde


(a) $G_{121}$




(b) $G_{122}$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow c_G(k) &= c_{G_1}(k) + c_{G_2}(k) \\
&= \ldots \\
&= c_{K_5}(k) + 3c_{K_4}(k) + c_{K_3}(k) \\
&= k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k
\end{aligned}
$$

**Problema 8** Numerele pare $2, 4, \ldots, 128$ formează un graf complet $\rightarrow \chi(G) \geq 64$.

Trebuie să se arate că ajung 64 de culori: vârfurile impare se pot colora cu culoarea lui i+1, de exemplu vârful 1 cu culoarea vârfului 2, vârful 3 cu culoarea vârfului 4, ș.a.m.d.

**Problema 9** Colorare de muchii: un vârf din graf nu leagă două muchii de aceeași culoare. Figura 14 prezintă un astfel de graf.

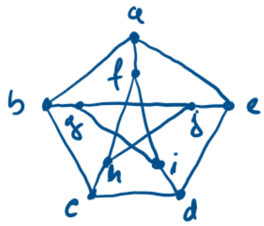



Figura 14: Soluţia pentru problema 8.

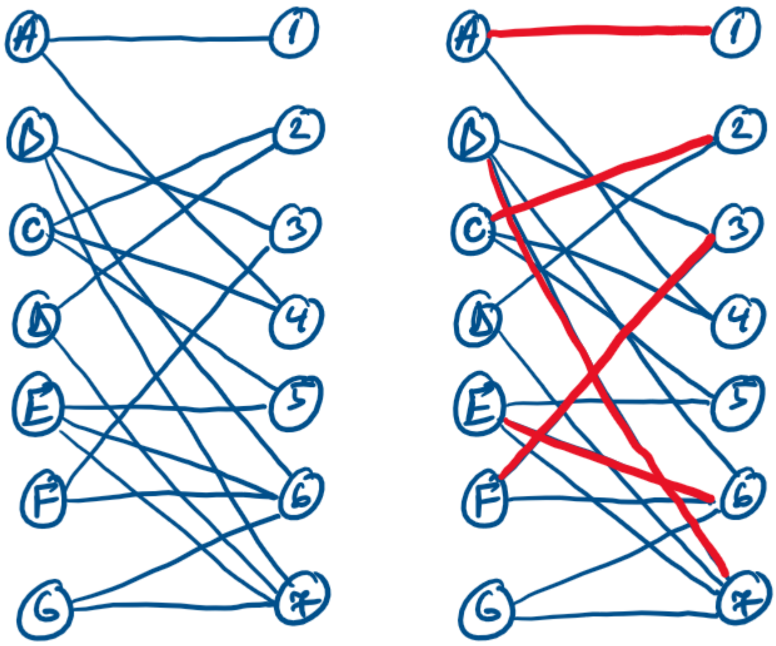
**Problema 11** Algoritmul $Hopcroft - Karp(G)$ determină un cuplaj maxim. Algoritmul este prezentat mai jos.

**Hopcroft_Karp**($G$)

$M = \varnothing$ (cuplaj maxim nul)
**while** există lanț de creștere în $G$ **do**
  folosește $BFS$ pentru a construi un graf alternant cu rădăcina în vârf nesaturat
  îmbunătățește cuplajul $M$ cu $DFS$
**return** M

Figura 15 prezintă graful inițial și inițializarea grafului (găsirea unui cuplaj în graf - figura 15b). Cuplajul inițial se găsește după primul pas $BFS$. După primul pas, vârfurile $D, G, 4$ și 5 nu fac parte din cuplaj.

În pașii următori se rulează $BFS$ pe graful din figura 16 și se obțin lanțurile de creștere $4-C-2-D$ și $5-E-6-G$. După acești doi pași, cuplajul maxim este format din $(A, 1), (C, 4), (D, 2), (E, 5)$ și $(G, 6)$.




(a) (b)

Figura 15: Graful din cerinţă şi iniţializarea unui cuplaj în graf.

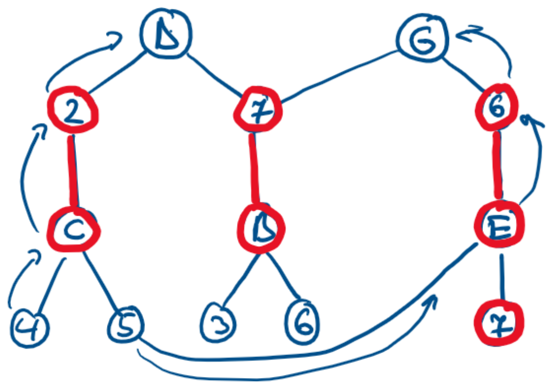



Figura 16