Ejercicios sugeridos, adaptados de Elementary Differential Equations, Boyce-DiPrima, Wiley.

1) En los ejercicios sugeridos anteriores, usted utilizó el método de Euler con diferentes valores de paso para calcular valores aproximados de la solución en el intervalor $0 \leq t \leq 5$. Ahora implemente el método de Runge-Kutta de 4º orden para comparar con lo obtenido con Euler, determinando el error en cada caso. Grafique las soluciones con Python/matplotlib.
La ecuación diferencial es

$$\frac{dy}{dt} = 4 - t + 2y, \quad y(0) = 1$$

Y su solución analítica resulta

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + \frac{11}{4}e^{2t}$$

2) Considere el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} = -100y + 100t + 1, \quad y(0) = 1$$

Con solución analítica

$$y(t) = e^{-100t} + t.$$

Encuentre aproximaciones numéricas a la solución para $0 \leq t \leq 1$. Compare los resultados numéricos con la solución exacta. Utilice valores de h = 0.04, 0.0333, 0.25. Grafique las soluciones con Python/matplotlib.

3) Determine valores aproximados de la solución $x = \varphi(t), y = \gamma(t)$ del problema de valores iniciales

$$x' = x - 4y, \qquad x(0) = 1, \quad y' = -x + y, \qquad y(0) = 0,$$

En el punto t=0.2. Use el método de Euler con h=0.1 y el método de Runge-Kutta con h=0.2. Compare los resultados con la solución exacta:

$$\varphi(t) = \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2}, \quad \gamma(t) = \frac{e^{-t} - e^{3t}}{4}$$

Verifique que si bien el método de RK requiere el doble de evaluaciones comparado con el método de Euler, el error al emplear RK es aprox. 200 veces menor que con Euler.