Andrés Merino • Junio 2024

1. DEFINICIONES

A lo largo de todo el documento se considera $a, t_0 \in \mathbb{R}$ y $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ al menos continua.

Función	**Definición**
Transformada de Laplace	$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$
Función Gamma	$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$, con $x > 0$.
Función Beta	$\beta(x,y) = \int_0^{1} u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du$, con $x, y > 0$.
Función de Heaviside	$u(t-a) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > a, \\ 0 & \text{si } t < a. \end{cases}$
Convolución	$f(t) * g(t) = \int_0^{t} f(u) g(t-u)\, du.$
Delta de Dirac*	$\delta(t-a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = a, \\ 0 & \text{si } t \neq a. \end{cases}$

* De manera formal, esta no es una función, y lo presentado sería solo la idea intuitiva.

2. PRINCIPALES TRANSFORMADAS

Función $f(t)$	**Transformada de Laplace** $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$
1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0.$
t	$\dfrac{1}{s^2}, \quad s > 0.$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},\ s > 0.$
t^α	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1,\ s > 0.$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a.$
$\operatorname{sen}(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$

Función $f(t)$	**Transformada de Laplace** $\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert.$
$\operatorname{senh}(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert.$
$\delta(t-a)$	e^{-as}, para todo s.
$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0.$
$\dfrac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\dfrac{1}{s(s+a)}, \quad s > 0.$
$\dfrac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}, \quad s > 0.$
$\dfrac{1}{b-a}\left(be^{-bt}-ae^{-at}\right)$	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}, \quad s > 0.$

3. Propiedades de la Transformada de Laplace

- Linealidad:

$$\mathscr{L}\left[af(t)+bg(t)\right](s)=a\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)+b\mathscr{L}\left[g(t)\right](s),$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[a\varphi(s)+b\psi(s)\right](t)=a\mathscr{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t)+b\mathscr{L}^{-1}\left[\psi(s)\right](t).$$

- Transformada de la derivada:
  - $\mathscr{L}\left[f'(t)\right](s)=s\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)-f(0^+)$,
  - $\mathscr{L}\left[f''(t)\right](s)=s^2\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)-sf(0^+)-f'(0^+)$,
  - $\mathscr{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s)=s^n\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}s^{n-i}f^{(i-1)}(0^+)$.
- Transformada de la integral:

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right](s)=\frac{1}{s}\mathscr{L}\left[f(t)\right](s), \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\varphi(s)\right](t)=\int_0^t \mathscr{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t)\,dt.$$

- Traslación en la base:

$$\mathscr{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)=\mathscr{L}\left[f(t)\right](s-a), \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\varphi(s-a)\right](t)=e^{at}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t).$$

- Derivada de la transformada:

$$\mathscr{L}\left[t^nf(t)\right](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)\right), \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\varphi^{(n)}(s)\right](t)=(-1)^n\,t^n\,\mathscr{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t).$$

- Traslación:

$$\mathscr{L}\left[u(t-a)f(t-a)\right](s)=e^{-as}\,\mathscr{L}\left[f(t)\right](s), \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[e^{-as}\varphi(s)\right](t)=u(t-a)\,\mathscr{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t-a).$$

- Función periódica: (con periodo p)

$$\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)=\frac{\displaystyle\int_0^p e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-ps}}.$$

- Convolución:

$$\mathscr{L}\left[f(t)*g(t)\right](s)=\mathscr{L}\left[f(t)\right](s)\mathscr{L}\left[g(t)\right](s), \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\varphi(s)\psi(s)\right](t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\varphi(s)\right](t)*\mathscr{L}^{-1}\left[\psi(s)\right](t).$$

4. Otras propiedades

4.1 Función Gamma

- $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$,
- $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$,
- $\Gamma(n+1)=n!$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

4.2 Función Beta

- $\beta(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

4.3 Función de Heaviside o función de salto unitario

- $$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{si} \quad t < t_1, \\ f_2(t) & \text{si} \quad t_1 \leqslant t < t_2, \\ f_3(t) & \text{si} \quad t_2 \leqslant t < t_3, \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$f(t) = f_1(t) + u(t - t_1)[f_2(t) - f_1(t)] + u(t - t_2)[f_3(t) - f_2(t)] + \cdots .$$

4.4 Convolución

- $[f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)]$,
- $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

4.5 Delta de Dirac

- $u'(t - a) = \delta(t - a)$,
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\delta^{(n)}(t - t_0)\, dt = \begin{cases} f^{(n)}(t_0) & \text{si } t_0 \in (a, b), \\ 0 & \text{si } t_0 \notin (a, b). \end{cases}$