Escuela Politécnica Nacional

Nombre: Daniel Lara **Fecha:** Diciembre, 2023
Tema: Tarea 1 **Materia:** Analisis Funcional - M101

Teorema 1.
En un espacio métrico de dimensión finita todas las normas son equivalentes.

● **Observación.** En el caso de dimensión infinita, no todas las normas son equivalentes. Por ejemplo, en el espacio $C([0,1])$ con la norma del supremo, la norma $\|\cdot\|_1$ no es equivalente a la norma del supremo.

Ejercicio 1. Sean (X, d_1) y (X, d_2) dos espacios métricos y sean a y b números positivos tales que para todo $x, y \in X$, se cumple que

$$ad_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq bd_1(x,y).$$

Muestre que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X, d_1) entonces también es una sucesión de Cauchy en (X, d_2).

Esquema. Gracias a la desigualdad de la hipótesis se puede acotar la sucesión en la métrica d_2 con la métrica d_1, luego el resultado es evidente. □

Ejercicio 2. Muestre que el subespacio $Y \subseteq C([a,b])$ que consiste de todas las funciones $u \in C([a,b])$ tales que $u(a) = u(b)$, es completo.

Esquema. Mostremos que Y es cerrado en $(C([a,b]), d_\infty)$, por lo tanto, completo. En efecto, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en Y y como la convergencia del espacio es uniforme, entonces $f(a) = f(b)$. Por lo tanto, el espacio es cerrado en un espacio completo, lo que implica que Y es completo con la métrica d_∞ □