Espais Vectorials.

Preparació quart Quiz | Curs 2020-2021

---

1. Donada l'aplicació lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donada per $f(x,y,z) = (x+2y+3z, 2x+3y+4z, 3x+4y+5z)$. Trobeu A on $f = T_A$. Calculeu els valors singulars de f. Trobeu la factorització AVD de la matriu A.

2. Donada la matriu simètrica $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$. Trobeu una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada de vectors propis de A. Trobeu P invertible i D diagonal on $A = PDP^t$.

3. Trobeu una solució de mínims quadrats per al sistema lineal:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$
És única la solució de mínims quadrats per aquest sistema? Justifiica la resposta.

4. Trobeu una base ortonormal pel subespai de $\mathbb{R}^4$:
$$< (1,2,3,4), (2,3,4,5), (3,4,5,6), (1,1,2,1) > .$$

5. Trobeu una base ortonormal pel subespai
$$\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x+y+z=0\}$$

6. Considera l'aplicació lineal $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donada per la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors singulars i la descomposició en valors singulars (SVD) per a la matriu A, tot explicitant una base ORTONORMAL de $\mathbb{R}^2$ on en fer T_A d'aquests vectors continuen sent vectors ORTONORMALS de $\mathbb{R}^3$.

7. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors singulars per a A i la descomposició de valors singulars (SVD) per a la matriu A.

8. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Trobeu un base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal formada per vectors propis de A. Trobeu la factorització $A = PDP^t$ amb P invertible amb $P^{-1} = P^t$ i D una matriu diagonal, tot explicitant D i P. Trobeu els valors singulars per a A i la descomposició de valors singulars (SVD) per a la matriu A

9. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Trobeu la factorització PAQ, donant una matriu P i Q.

ii) Trobeu una matriu P invertible on PAP^{-1} sigui diagonal.

iii) Trobeu una matriu Q ortogonal on QAQ^t sigui diagonal.

iv) Trobeu la descomposició en valors singulars per a A.

10. Considera l'aplicació lineal $T_{A^t} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donada per la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors singulars i la descomposició en valors singulars (SVD) per a la matriu A, tot explicitant una base ORTONORMAL de $\mathbb{R}^3$ on en fer T_A d'aquests vectors continuen sent vectors ORTONORMALS de $\mathbb{R}^2$.

11. Pensant a $\mathbb{R}^2$ decidiu que minimitza la solució de mínims quadrats del sistema lineal incompatible:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

12. Demostreu que si un sistema lineal és compatible, llavors les solucions de mínims quadrats és exactament les solucions del sistema lineal.

13. Què significa que una matriu $A \in M_N(\mathbb{R})$ diagonalitza als nombres reals?

14. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, trobeu una matriu ortogonal P i D diagonal of $PDP^t = A$. Trobeu una base ORTONORMAL de $\mathbb{R}^2$ formada per vectors propis de A.

15. Donada la matriu $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors singulars de B i una descomposició en valors singulars per a B (descomposició SVD per a B).

16. Donada la matriu $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Trobeu els valors singulars de C i una descomposició en valors singulars per a C.

17. Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

    i) Demostreu que A diagonalitza i trobeu P invertible i D diagonal on $A = PDP^{-1}$.

    ii) Demostreu que $\mathbb{R}^2$ té una base ortonormal formada per vectors propis de A, tot explicitant la base, i calculeu Q ortogonal on $A = QDQ^t$ amb D una matriu diagonal que també heu d'explicitar.

    iii) Calculeu els valors singulars de A, i trobeu U i V ortogonals i Σ diagonal on $A = U\Sigma V^t$.

18. Considera $B = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 20 & 40 \end{pmatrix}$ matriu a coeficients reals.

    i) Trobeu una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ formada de vectors propis de B.

    ii) Trobeu P invertible (ortogonal) i D diagonal on $B = PDP^t$.

19. Considera l'aplicació lineal $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donada per $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ matriu a coeficients reals.

i) Calculeu els valors singulars de A i doneu la matriu Σ.

ii) Trobeu una factorització en valors singulars per a A, descomposició (SVD) per a A, donant matrius V i U.

iii) Expliciteu una base ORTONORMAL de $\mathbb{R}^2$ on en fer T_A d'aquests vectors continuen sent vectors ORTOGONALS de $\mathbb{R}^2$.

20. Considera $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ i $A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

i) Explica què significa que un vector $v \in \mathbb{R}^3$ és un vector propi de $M \in M_3(\mathbb{R})$ de valor propi 12 i si té alguna relació amb el nucli de l'aplicació lineal T_{M-12I_3} tot justificant-ho.

ii) Justifica que l'apliació lineal $T_{A^tA} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diagonalitza tot trobant una matriu $P \in M_3(\mathbb{R})$ invertible i $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonal on

$$PDP^{-1} = A^tA.$$

Podem trobar P ortogonal? en cas afirmatiu, trobeu P ortogonal i calculeu P^{-1}.

iii) Trobeu els valors singulars per a A i una descomposició en valors singulars (SVD) per a la matriu A, (és a dir una descomposició $A = U\Sigma V^t$) explicitant U, Σ i V.

iv) Considera el sistema lineal incompatible

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Trobeu una solució de mínims quadrats u^* per a aquest sistema lineal, i el valor de la distància que minimitza u^* (aquesta distància és zero quan el sistema té solució).

21. Considera λ un valor propi de A, on té un vector unitari u on $Au = \lambda u$. És veritat que A^tA té valor propi λ^2? Justifiqueu la resposta.

22. Proveu que si λ és valor propi de A, també ho és de A^t.

23. Demostreu que si A de mida 3x3 amb tres valors singulars diferents i diferents de zero, i sigui v_1, v_2, v_3 una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada per vectors propis de A^tA. Justifiqueu que $w_1 := Av_1, w_2 := Av_2, w_3 := A_v 3$ son vectors de $\mathbb{R}^3$ ortogonals dos a dos, i que (w_1, w_2, w_3) forma una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Forma una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$?

24. Calculeu una base ortonormal pels subespais vectorials següents, i la projecció ortogonal del vector $(1, 0, 2, 5)$ en cada un dels subespais següents:

i) $W_1 :=< (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6), (4, 5, 6, 7) >$

ii) $W_2 := \{(x, y, z, t) | x + y + z + t = 0\}$.

iii) $W_3 := W_1^\perp$

25. Considera les aplicacions lineals T_A i T_{A^t}. Demostreu

$$(Im(T_A))^\perp = Ker(T_{A^t}).$$

26. Justifica perquè u^* solució de mínims quadrats per un sistema lineal $(A|b)$ compleix $||b - Au^*|| \leq ||b - A\vec{x}||$ per a qualsevol vector $\vec{x}$.