

# ZADANIA Z ANALIZY MATEMATYCZNEJ (cz.1)

## Literatura:

[2] kurs „e-podręcznik z matematyki”(Rozdział 2)

[5] kurs „Wstęp do analizy matematycznej - e-zbiór zadań z testami” <https://cmf.edu.p.lodz.pl/course/view.php?id=3>

[WT] -> testy

[WZ] -> zadania

## 1 Funkcja kwadratowa, wartość bezwzględna

**Zad. 1** Narysuj wykres funkcji  $f$  i określ jej własności:

a)  $f(x) = x^2 - 5x$

e)  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

b)  $f(x) = -2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2})$

f)  $f(x) = -2(x + 4)^2 + 3$

c)  $f(x) = x^2 - 4x + 4$

g)  $f(t) = -t^2 + t + 6$

d)  $f(x) = x^2 + 5x - 6$

h)  $f(t) = 1 - 2t - 3t^2$

**Zad. 2** Metodą przekształceń narysuj wykres funkcji  $f$  i podaj jej własności:

a)  $f(x) = |3 - 2x|$

e)  $f(x) = ||x| - 5|$

b)  $f(x) = |x - 3| - 2$

f)  $f(x) = 2 - ||x + 1| - 5|$

c)  $f(x) = 5 - |x - 4|$

g)  $f(x) = 4 - |1 - x^2|$

d)  $f(x) = 3 + |1 - x|$

h)  $f(x) = |x^2 + 2x| - 3$

**Zad. 3** Rozwiąż równania i nierówności:

a)  $|x^2 - 4| = 5$

d)  $|x + 1| + x - 1 \leq x^2$

b)  $|x - 4| \geq 2$

e)  $|x^2 - 2x| > x$

c)  $|2x - 6| < x$

f)  $|x^2 + 2x + 1| < 3$

[WZ] - Rozdział 4 - zad. 4.1, 4.3, 4.8

[WT] - Rozdział 4 - test 1-5, test sprawdzający

## 2 Wielomiany, funkcje wymierne

**Zad. 4** Narysuj wykres funkcji  $f$ , podaj jej dziedzinę i miejsca zerowe:

a)  $f(x) = x^3 - 8$

b)  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

c)  $f(x) = 16 - x^4$

d)  $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$

e)  $f(x) = (x^2 + 2x)(x^2 + 5x + 4)$

**Zad. 5** Metodą przekształceń narysuj wykres funkcji  $f$  oraz określ jej własności:

a)  $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

e)  $f(x) = \frac{2-3x}{x-5}$

b)  $f(x) = \frac{2x}{x+3}$

f)  $f(x) = \left| \frac{3x-1}{2x-4} \right|$

c)  $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

g)  $f(x) = \frac{1}{x^2+2x+1}$

d)  $f(x) = \frac{1-x}{x+4}$

h)  $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{x^2-4x+4} \right|$

**Zad. 6** Rozwiąż równania i nierówności:

a)  $x^3 - 5x^2 + 6x > 0$

g)  $\frac{1}{x^4} \geq \frac{1}{x^3}$

b)  $x^3 + 3x^2 - 4 \geq 0$

c)  $x^4 - 2x^2 + 3 \leq 0$

h)  $\frac{x^2+1}{x} \leq 2$

d)  $\frac{1}{x} - \frac{x}{2-x} = 1$

i)  $x + \frac{2}{x} > 3$

e)  $\frac{16-4x^2}{x-3} \geq 0$

j)  $1 + \frac{1}{x-4} < \frac{5}{x+3}$

f)  $\frac{2x^2+x+1}{x^2-7x+12} < 0$

**Zad. 7** Rozwiąż równania i nierówności:

a)  $\frac{x-1}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} < \frac{3}{2+x} + 2$

c)  $\frac{1}{|x-4|} < 2$

b)  $-4 < \frac{3}{x^2-1} < 1$

d)  $\frac{1}{|x+2|} < \frac{2}{|x-1|}$

**Zad. 8** Narysuj wykres funkcji  $f$  oraz określ jej własności:

a)  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x, & \text{gdy } x \leq 0 \\ 2 - |x|, & \text{gdy } x > 0 \end{cases}$

b)  $f(x) = x^2 - 5|x| + 6$

c)  $f(x) = \left| 1 - \frac{1}{x+2} \right|$

d)  $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2}, & \text{gdy } x > \frac{1}{2} \\ |x^2 + x|, & \text{gdy } x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

e)  $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & \text{gdy } |x| \leq 1 \\ 3 - |x|, & \text{gdy } |x| > 1 \end{cases}$

f)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{gdy } |x+1| < 1 \\ \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}, & \text{gdy } |x+1| \geq 1 \end{cases}$

**Zad. 9** Wyznacz dziedzinę funkcji:

a)  $f(x) = \sqrt{-4 + 4x - x^2}$

b)  $f(x) = \frac{x}{1-x^3}$

c)  $f(x) = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$

d)  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}} + x - 2$

[WT] - Rozdział 3 - test 4, test sprawdzający

[WZ] - Rozdział 3 - zad. 3.9 (a-d), 3.10, 3.11

[WZ] - Rozdział 5 - zad. 5.7, 5.10, 5.22, 5.24

[WT] - Rozdział 5 - test 1, 2, 3, test sprawdzający

[WZ] - Rozdział 6 - zad. 6.3, 6.5, 6.13-16, 6.19-21 (3-4 wybrane przykłady z każdego zadania)

[WT] - Rozdział 6 - test 1, 2, 3, test sprawdzający

### 3 Funkcja wykładnicza

**Zad. 10** Metodą przekształceń narysuj wykres funkcji  $f$  i określ jej własności:

a)  $f(x) = 2^{x+3} + 2$

b)  $f(x) = 3^{-x} - 1$

c)  $f(x) = 5 - (\frac{1}{2})^{-2x+6}$

d)  $f(x) = 1 - |(\frac{1}{4})^{x+2} - 3|$

e)  $f(x) = \begin{cases} -3^{x+1} & \text{dla } x < 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \\ 2^x - 4 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

f)  $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{dla } x < 0 \\ 1 & \text{dla } x \in [0, 2) \\ |1 - (\frac{1}{2})^x| & \text{dla } x \geq 2 \end{cases}$

**Zad. 11** Rozwiąż równania i nierówności:

a)  $(\frac{2}{3})^{x+1} \cdot (\frac{3}{4})^{x+1} \cdot (\frac{1}{8})^x = \frac{1}{32}$

b)  $(\frac{2}{3})^{x+1} \cdot (\frac{3}{4})^{x+1} \cdot (\frac{1}{8})^x < 8$

c)  $(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2} - \frac{2}{x}} > \frac{1}{27}$

d)  $7^{x-4} = \sqrt{7}^{2-3x}$

e)  $16^x + 4^{x+2} = 36$

f)  $5^x \cdot 5^{x^2} \cdot 5^{x^3} \leq \frac{1}{5}$

g)  $3^{x+1} + 3^{x-1} - 30 > 0$

h)  $2^{2x-4} - 17 \cdot 2^{x-4} + 1 < 0$

i)  $16^x + 4^{x+2} \leq 36$

j)  $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0$

[WZ] - Rozdział 7 - zad. 7.2-7.14 (3-4 wybrane przykłady z każdego zadania)

[WT] - Rozdział 7 - testy

### 4 Funkcja logarytmiczna

**Zad. 12** Oblicz:

$$\log_2 8, \log_2 16, \log_2(2^5), \log_2 \frac{1}{2}, \log_2(\sqrt{2}), \log_2(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}), \log_2(\frac{\sqrt[5]{2}}{16}), \log_{\frac{1}{2}} 4, \log_{0,5}(\frac{2}{\sqrt[6]{2}}), \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{128}), \log 10, \\ \log 1000, \log(10^{15}), \log(10^{-4}), \log 1, \log \sqrt[3]{10}, \log \frac{100}{\sqrt{10}}, \log_3 \sqrt{3}, \log_{\frac{1}{3}} 27, \log_{\sqrt{5}} 125, \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(5^3), \log_{1,5}(\frac{2}{3}), \\ 2^{\log_2 3}, 3^{\log_3 7}, 4^{\log_2 5}, 9^{\log_{\frac{1}{3}} 5}, 1000^{\log 3}, \frac{\log_5 27}{\log_5 3}, \frac{\log_{\sqrt{2}} 27}{\log_{\sqrt{2}} 3}, 2^{\log_4 3}, 5^{\frac{\log 3}{\log 5}}, (\frac{1}{4})^{\log_2 3}, 3^{\log_{\frac{1}{3}} 4}.$$

**Zad. 13** Metodą przekształceń narysuj wykresy funkcji  $f$  i określ jej własności:

a)  $f(x) = 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

b)  $f(x) = 3 - \log(-x)$

c)  $f(x) = |-1 + \log_4(x-2)|$

d)  $f(x) = 4 - \log_3(9x+3)$

e)  $f(x) = 3 - |2 - \log_5(x+1)|$

f)  $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}}(x+3) \right| - 2$

g)  $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) & \text{gdzie } x \geq 2 \\ 3 - (\frac{1}{2})^x, & \text{gdzie } x < 2 \end{cases}$

**Zad. 14** Rozwiąż równania i nierówności:

a)  $\frac{\log_4(x^2 - 1)}{\log_4(x - 2)} = 2$

b)  $\log(2^x - 4^x) - \log 8 = \log(2^{x-1} - \frac{1}{4})$

c)  $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{5x+4}{x-2}\right) > 1$

d)  $\log_3(3^x - 8) \leq 2$

e)  $\log_2(8 - x) - \log_2(x - 2) < 2$

f)  $|\log_2 |x| + \frac{1}{2}| \geq 1$

g)  $\ln^2 x - \ln x < 0$

h)  $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 1 \leq 0$

i)  $\log(4^x - 2^{x+1} + 1) \leq 0$

**Zad. 15** Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$ , jeśli

a)  $f(x) = \log_{1-x}(x^2 - 4)$

b)  $f(x) = \log(x + 2) - \log(3 - x)$

c)  $f(x) = \ln \sqrt{x - 2}$

d)  $f(x) = \sqrt{\ln(x - 2)}$

e)  $f(x) = \frac{\log(2^x - 4^x)}{\log x}$

f)  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3x+5}{x-3}\right)$

[WZ] - Rozdział 8 - zad. 8.1, 8.3, 8.6–8.11, 8.13–8.15, 8.17 (3-4 wybrane przykłady z każdego zadania)

[WT] - Rozdział 8 - testy

## 5 Dziedzina funkcji

**Zad. 16** Wyznacz dziedzinę funkcji  $f$ , jeśli

a)  $f(x) = \frac{\sqrt{4^x - 2^{x+1}}}{|x + 4| - 1}$

b)  $f(x) = \sqrt{\log(1 - x)} + \sqrt{x^2 + x + 1}$

c)  $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{x-2}\right) - \log(\log x)$

d)  $f(x) = \frac{1}{\log_3(x^2 - 4)} + \frac{1}{\sqrt{x - 1}}$

e)  $f(x) = \log_2 \frac{2x-1}{4-x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - x}$

f)  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\arcsin(x^2 - x - 1)} + \arccos \sqrt{x}$

g)  $f(x) = \log_{(\frac{x}{2}+1)}(3 + 2x - x^2)$

h)  $f(x) = \frac{\log(\arcsin(2x))}{\sqrt{x^2+3x}}$

i)  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^3}}{\arcsin\left(5^{\log \frac{2}{x+2}}\right)}$

j)  $f(x) = \arccos(2^x - 4) + \arcsin(|x| - 1)$

k)  $f(x) = 1 + \log(\operatorname{arctg} x) - \arcsin \sqrt{x}$

[WT] - Rozdział 8 - test 1b, 1c, 2, 4, 5, 8

## 6 Ciągi liczbowe

**Zad. 17** Zbadaj monotoniczność ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , gdy

a)  $a_n = n^2 - n$

b)  $a_n = \frac{3n}{n^2 + 1}$

c)  $a_n = \frac{5n-1}{3n+2}$

d)  $a_n = \frac{n^2 - 3}{n^2 + 1}$

e)  $a_n = \frac{n}{4^{n+1}}$

f)  $a_n = \frac{n!}{2^n}$

g)  $a_n = \frac{3^{n+2}}{(n+1)!}$

h)  $a_n = 3 + \cos n\pi$

**Zad. 18** Oblicz granicę ciągu:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - n + 2)$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-4n^3 + n^2 + n - 1)$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{2 - n}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^4 + 2n + 7}{3n^4 + 2n^3 - 4}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{4n^4 - n - 1}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^7 + n^2 + 7}{2n^4 + 2n^3 - 1}$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^5 + 1} + 1}$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 1} - \sqrt{2n + 1})$

i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (3k - \sqrt{k^2 - k + 2})$

j)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 2})$

k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 5n + 2} - 3n)$

l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt{n^2 + 2})$

m)  $\lim_{m \rightarrow \infty} (m - 2 - \sqrt{m^2 + 6m + 9})$

**Zad. 19** Oblicz granicę ciągu:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} - 5}{2^{2n} - 7}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 2^{2n+1} - 5 \cdot 3^{2n-1} + 1}{2^{3n} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-n} + 2}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^n + 3^{n-1}}{3 + 2^{2n+1}}$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^{n+2}}{3^{n+2}}$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n + 7}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^3 - n^2 + 2}$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^{n+1} + 3^{n-1} + 2}$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 \cdot 3^{2n+1} + 2^{n+1} - 1}$

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3n - 2}{2^{n+1} + 3}}$

j)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + 3^{-m} + 2^{1-2m}}$

k)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

l)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 4^n}}$

**Zad. 20** Oblicz granicę ciągu:

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{5n}\right)^{-3n}$

c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 1}{n + 3}\right)^n$

d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n - 1}{4n + 3}\right)^n$

e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n - 7}\right)^{n-1}$

f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 3}{n + 1}\right)^{n^2}$

g)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 - 3}{5n^2 + 1}\right)^{-n^2}$

h)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n - 1}{4n + 3}\right)^{2n}$

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n \ln(1 + \frac{2}{n})]$

j)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \{m[\ln(m + 2) - \ln m]\}$

**Zad. 21** Wykaż, że nie istnieje granica ciągu  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ , gdy

a)  $a_n = \left(\frac{1-n}{n}\right)^n$

d)  $a_n = \sqrt[n]{5^n + (-5)^n + 0.1}$

b)  $a_n = \frac{(-4)^n}{3^n + 1}$

e)  $a_n = \frac{2 + (-1)^n n}{3n + 1}$

c)  $a_n = e^{(-1)^n n}$

f)  $a_n = (2 - (-1)^{n+1})^n$

[WZ] - Rozdział 13 - wybrane przykłady z każdego zadania,

[WT] - Rozdział 13 - testy 1-3

[2] - Lekcje 1-3