



DOKUMENTATION ZUR BESONDEREN LERNLEISTUNG

im Fachbereich: Mathematik

Thema: Penrose-Tilings

vorgelegt von: Alexander Jan Droste

Schuljahr: 2020/21

Externer Betreuer: Dr. F. Göring

Professur Algorithmische und Diskrete Mathematik

Technische Universität Chemnitz

Interner Betreuer: Frau A. Krüger

Leipzig, 15.01.2021

Abstract

Überdeckungen von Flächen durch Kacheln kommen in der Architektur aller Völker vor. Wie bei Kirchenfenstern wird dabei Symmetrie immer als ästhetisch angesehen. Eine periodische Parkettierung (Tiling) der euklidischen Ebene ist zum Beispiel durch Quadrate möglich. Ein großes Problem der Mathematik war es, Kacheln zu finden, die nur Parkettierungen ohne Translations-symmetrie zulassen. Eine derartige “aperiodische” Menge mit 20426 verschiedenen Kacheln wurde erstmals 1966 von Robert Berger gefunden. Im Jahr 1974 entdeckte Roger Penrose (Oxford) zwei Kacheln, die die Ebene sogar auf unendlich viele Weisen ohne Translationssymmetrie überdecken. Diese Parkettierungen heißen Penrose-Parkettierungen. Sie können Rotationssymmetrie aufweisen, also ästhetisch sehr ansprechend aussehen, haben aber keine Translationssymmetrie. Eine Überraschung war eine kurz darauf entdeckte Verbindung zwischen Penrose-Tilings und der Kristallografie: Der Querschnitt bestimmter Legierungen bildet ein Penrose-Tiling. Mein Gesamtziel ist es, Penrose-Tilings zu verstehen und eigene Beispiele zu entwickeln.

Eine systematische Konstruktion von Penrose-Tilings erfolgt durch Zerlegungen von Kacheln in Dreiecke und geeignetes Zusammensetzen dieser Dreiecke. In dieser Arbeit stelle ich einen für die Existenz von Parkettierungen der gesamten Ebene benötigten allgemeinen Existenzsatz dar. Ich beweise, dass sich dieser allgemeine Existenzsatz auf Penrose-Kacheln anwenden lässt und dass keine dieser Parkettierungen eine echte Translationssymmetrie aufweist. Zu jeder Penrose-Parkettierung (mit einem gewählten Bezugspunkt) lässt sich eine spezielle Folge aus Nullen und Einsen konstruieren und ich gebe einen vollständigen Beweis für die Umkehrung an, dass jede derartige Folge eine Penrose-Parkettierung darstellt. Diese Beziehung ist bijektiv. Zusätzlich charakterisiere ich mithilfe dieser 01-Folgen diejenigen Penrose-Tilings, die zu ihrer Expansion ähnlich sind. Dies stellt Zusammenhänge zwischen arithmetischen Eigenschaften der 01-Folgen und der Geometrie von Penrose-Tilings dar. Alle Konstruktionen werden durch Beispiele und Bilder erläutert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Grundlagen und Beispiele	7
3	Nicht-periodische Parkettierungen	13
4	Existenz von Parkettierungen	20
5	Penrose-Parkettierungen	29
5.1	Rauten, Drachen und Pfeile	29
5.2	A- und B-Kacheln	42
5.3	Inflation von partiellen $\{A,B\}$ -Parkettierungen	47
5.4	Existenz von Penrose-Parkettierungen	55
5.5	Aperiodizität von Penrose-Parkettierungen	56
6	Darstellung durch 01-Folgen	60
6.1	Konstruktion von $\{0,1\}$ -Folgen	60
6.2	Konstruktion von Parkettierungen	63
6.3	Eindeutigkeit von Parkettierungen	78
7	Selbstähnlichkeit der Penrose-Parkettierungen	82
8	Zusammenfassung und Ausblick	90
9	Literaturverzeichnis	92

1 Einleitung

Überdeckungen von Flächen der Ebene durch Kacheln sind in der menschlichen Umgebung allgegenwärtig. Sie finden sich in Fußböden und an Wänden, jedoch auch häufig in kunstvoller Form in Kirchenfenstern und an Moscheen. Für diese Mosaike können Architekten und Künstler komplexe geometrische Formen, oftmals mit Symmetrien, verwenden. Auch in den Naturwissenschaften spielen Symmetrien eine große Rolle, zum Beispiel weisen diverse Kristallgitter Symmetrien auf und werden durch diese charakterisiert. Eine Überraschung war 1984 die Entdeckung der sogenannten Quasikristalle, deren Gitter eine aperiodische Struktur aufweisen, wie zum Beispiel bei einer Aluminium-Mangan-Legierung. Diese Gitter haben sehr spezielle Symmetrien, aber nicht die von gewöhnlichen Kristallen bekannte Translationssymmetrie.

In der Mathematik war es lange Zeit ein offenes Problem, ein Kachelsystem zu finden, das aperiodisch ist. Das heißt, es lässt sich die ganze Ebene überdecken, wobei aber keine dieser Parkettierungen (engl. tilings) eine Translationssymmetrie aufweist. Dieses Problem wurde 1964 von Robert Berger gelöst. Sein Kachelsystem enthielt 20.426 verschiedene Kacheln. Diese hohe Zahl zeigt die Schwierigkeit des Problems. Später konnte er diese Zahl auf 104 Kacheln reduzieren. 1968 reduzierte Donald Knuth sein Kachelsystem auf 92 Kacheln. Raphael Robinson konnte Bergers Techniken wesentlich vereinfachen und fand 1971 ein aperiodisches Kachelsystem mit nur 6 Kacheln. Ein alternatives Kachelsystem mit 6 Kacheln fand Roger Penrose im Jahr 1974. Dieses vereinfachte er zu zwei verschiedenen aperiodischen Kachelsystemen mit jeweils nur 2 Kacheln. Bis heute ist es ein offenes Problem, ob ein aperiodisches Kachelsystem mit nur einer Kachel existiert.

Das Buch von Grünbaum und Shephard [2] enthält weitere Hintergrundinformationen zu diesem Thema. Ein aktuelles Vorlesungsskript einer Master Class

der Universität Oxford ist Ritter [3].

In dieser Arbeit untersuchen wir Symmetrieeigenschaften und Aperiodizität von Parkettierungen und Kachelsystemen, insbesondere für Penrose-Parkettierungen. Wir geben nun eine Zusammenfassung der wesentlichen Resultate an. Wir geben zunächst eine hinreichende Bedingung (Satz 3.2) dafür an, dass eine Parkettierung keine Translationssymmetrie aufweist. Dies verallgemeinert ein entsprechendes Resultat aus [2]. Als nächstes geben wir einen Existenzsatz (Satz 4.3) an, der garantiert, dass ein endliches System von Kacheln eine Parkettierung der Ebene zulässt. Der Beweis verwendet den Hausdorff-Abstand von Polygonen und eine Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß für Kacheln in \mathbb{R}^2 , nämlich den Auswahlssatz von Blaschke [1]. Im gesamten folgenden Teil der Arbeit untersuchen wir Penrose-Parkettierungen, insbesondere die von Penrose eingeführten Rauten, Drachen und Pfeile und dazugehörige Dreiecke. Diese Polygone verstehen wir wie bei Puzzles mit Zacken und Einkerbungen, so dass sie nur auf bestimmte Weise aneinandergelegt werden können. Wir zeigen, dass sich diese Bedingung auch durch Richtungen gewählter Kanten und Färbungen der Ecken realisieren lässt, wobei beim Anlegen von Kacheln diese Richtungen und Färbungen respektiert werden müssen. Wir wenden den zuvor genannten Existenzsatz auf diese Kachelsysteme an und erhalten, dass sich mit diesen Kacheln die gesamte Ebene parkettieren lässt (Sätze 5.1, 5.2). Anschließend zeigen wir, dass keine dieser Parkettierungen eine echte Translationssymmetrie hat (Sätze 5.3, 5.4). Danach untersuchen wir eine numerische Darstellung dieser geometrischen Parkettierungen durch spezielle Folgen von Nullen und Einsen (Konstruktion 6.1). Umgekehrt zeigen wir, dass sich für jede dieser Folgen eine Penrose-Parkettierung konstruieren lässt, die diese gegebene Folge realisiert (Satz 6.4). Dieser Beweis ist im Buch [2] und in [3] nur sehr kurz skizziert, wobei ein wesentlicher Fall in [3] gar nicht betrachtet wird. Wir geben einen vollständigen Beweis an. Dabei werden drei mögliche Fälle behandelt. Wir zeigen, dass tatsächlich nur diese drei Fälle auftreten können (Satz 6.9), und wir erläutern die verschiedenen Fälle durch Beispiele. Dies ist der umfangreichste Beweis dieser Arbeit. Wir zeigen danach, dass diese Beziehung zwischen Parkettierungen (mit einem speziell gewählten Punkt) und den speziellen Folgen von Nullen und Einsen bijektiv ist (Sätze 6.15, 6.17). Daher

stellen diese Folgen eine Charakterisierung der Penrose-Parkettierungen dar. Schließlich definieren wir die Expansion von Parkettierungen und charakterisieren, welche Penrose-Parkettierungen ähnlich zu ihrer Expansion sind. Dies sind genau 5 Parkettierungen, die wir explizit angeben (Satz 7.3). Dieses Resultat beruht auf einem Vorschlag des externen Betreuers und ist in der Literatur neu. Wir erläutern alle Konstruktionen und Beweise dieser Arbeit durch Beispiele und Bilder.

2 Grundlagen und Beispiele

Es sei $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Eine *Kachel* ist ein Polygon der Ebene. Eine abzählbare Menge $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von Kacheln heißt *Überdeckung* der Ebene \mathbb{R}^2 , falls $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$. Eine Überdeckung $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ heißt *Parkettierung*, wenn sich je zwei Kacheln höchstens in ihren Kanten oder Ecken schneiden, sich also nicht “überlappen”, das heißt, für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ ist $K_i \cap K_j$ entweder leer oder $K_i \cap K_j$ besteht aus Elementen von endlich vielen Kanten oder Ecken von K_i und K_j .

Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *Isometrie* oder *Kongruenztransformation*, falls f Abstände von Punkten erhält, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. Man kann zeigen, dass dann f bijektiv ist.

Beispiele von Isometrien sind Translationen, Rotationen und Spiegelungen an einer Geraden. Aus der Geometrie ist bekannt, dass jede Isometrie der Ebene eine Translation, eine Rotation, eine Spiegelung oder eine Gleitspiegelung (Spiegelung an einer Geraden gefolgt von einer Translation entlang dieser Geraden) ist. Wir bezeichnen mit id die Identitätsabbildung $id(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}^2$). Eine Isometrie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *nicht-trivial* oder *echt*, falls $f \neq id$.

Zwei Kacheln K und K' heißen kongruent (in Zeichen $K \cong K'$), falls sie, wie üblich, dieselbe Form und Größe haben, d.h. es gibt eine Isometrie f mit $f(K) = K'$. Jede endliche Menge M von Kacheln heißt eine Menge von *Protokacheln* (prototiles). Wir sagen, dass M die Parkettierung $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ der Ebene *zulässt* oder *erzeugt*, falls jede Kachel K_i ($i \in \mathbb{N}$) bis auf Kongruenz in M vorkommt, das heißt, es gibt ein $K \in M$ mit $K_i \cong K$. Wir nennen $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dann auch eine Parkettierung mit Kacheln aus M , eine Parkettierung über M oder eine M -Parkettierung.

Eine Isometrie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt eine *Symmetrie* der Parkettierung $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, falls f die Kacheln aufeinander abbildet, d.h. für jede Kachel K_i ($i \in \mathbb{N}$) gibt es eine Kachel K_j mit $f(K_i) = K_j$. Da $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Parkettierung und f bijektiv ist, ist dann auch die Umkehrabbildung f^{-1} eine Symmetrie. Wir nennen die Symmetrie f eine *Translationssymmetrie*, falls f eine Translation ist.

Eine Parkettierung $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ heißt *periodisch*, wenn es mindestens zwei nicht-triviale Translationssymmetrien der Parkettierung in nicht parallele Richtungen gibt. Eine *nicht-periodische* Parkettierung hat also entweder die Identitätsabbildung als einzige Translationssymmetrie oder aber nicht-triviale Translationssymmetrien in parallele Richtungen.

Die folgenden Parkettierungen (siehe Abbildung 2.1) weisen Translationssymmetrien in nicht-parallele Richtungen auf, sind also periodisch. Die linke Parkettierung in Abbildung 2.1 ist eine Parkettierung mit Kacheln aus der elementartigen Menge $M = \{\square\}$, die nur das Quadrat enthält. Für die mittlere Parkettierung können wir als Protokacheln das Einheitsquadrat und das 3×1 -Rechteck wählen. Für die rechte Parkettierung reicht das regelmäßige Sechseck als Protokachel. Jede dieser Parkettierungen hat Translationssymmetrien in horizontaler, vertikaler und verschiedene diagonale Richtungen. Darüber hinaus weist jede von ihnen Rotationen und Spiegelungen als weitere Isometrien auf.

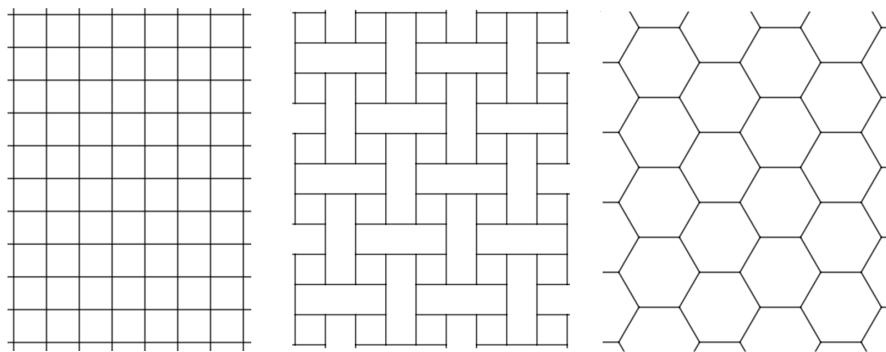


Abbildung 2.1: Ausschnitte von periodischen Parkettierungen

Die folgende einfache Bemerkung bietet Beispiele für periodische und nicht-periodische Parkettierungen. Sie charakterisiert diejenigen Rechtecke als Protokacheln, für die jede Parkettierung nicht-triviale Translationssymmetrien hat.

Bemerkung 2.1. Die Menge M enthalte lediglich ein beliebiges Rechteck R . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Jede Parkettierung der Ebene über M hat eine nicht-triviale Translationssymmetrie.
- (2) R ist ein Quadrat.

Beweis. (1) \longrightarrow (2): Angenommen, R ist kein Quadrat. Wir zeigen, dass es dann eine Parkettierung $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ der Ebene \mathbb{R}^2 über M gibt, deren einzige Translationssymmetrie die Identitätsabbildung ist. Dazu konstruieren wir die Parkettierung K_i , wie in Abbildung 2.2 dargestellt, so dass das Rechteck K_1 eine horizontale Ausrichtung hat (d.h. die längere Seite von K_1 ist parallel zur x-Achse) und alle übrigen Rechtecke K_i ($i \geq 2$) eine vertikale Ausrichtung haben (d.h. die längere Seite von K_i ist parallel zur y-Achse). Eine Translationssymmetrie f dieser Parkettierung kann K_1 nur auf ein Rechteck derselben Ausrichtung abbilden, also auf sich selbst, d.h. $f(K_1) = K_1$. Da f eine Translation ist, folgt $f = id$.

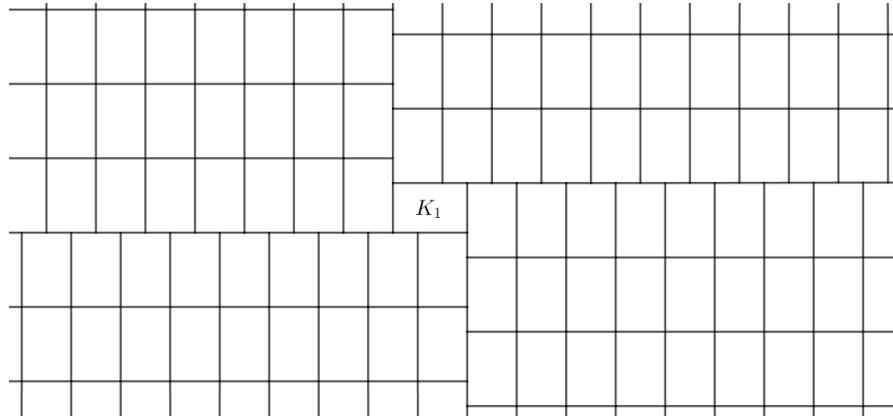


Abbildung 2.2: Ausschnitt einer Parkettierung mit $M = \{R\}$ ohne Translationssymmetrie

(2) \longrightarrow (1): Sei $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Parkettierung der Ebene über $M = \{R\}$. Alle Kacheln K_i sind also Quadrate kongruent zu R . Wir unterscheiden zwei Fälle. Falls die Parkettierung dieselbe Form wie die linke Parkettierung von Abbildung 2.1 hat, so hat sie offensichtlich nicht-triviale Translationssymmetrien in nicht-parallele Richtungen. Daher nehmen wir nun an, dass es in der Parkettierung zwei nicht-disjunkte Quadrate Q_1 und Q_2 gibt, so dass $Q_1 \cap Q_2$ mindestens zwei Elemente enthält, aber keine gemeinsame Kante von Q_1 und Q_2 ist. Durch ihre Position grenzen an Q_1 und Q_2 genau zwei Quadrate Q_0 und Q_3 an. Folglich grenzt an Q_2 und Q_3 ein weiteres Quadrat Q_4 an, wie in Abbildung 2.3 dargestellt. Wir erhalten eine Menge von Quadraten $\{Q_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, für die es eine Translation f der Ebene gibt mit $f(Q_i) = Q_{i+2}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Oberhalb der Quadrate Q_{2i} ($i \in \mathbb{Z}$) und unterhalb der Quadrate Q_{2i+1} ($i \in \mathbb{Z}$) besteht die Parkettierung aus weiteren Schichten von Quadraten, auf die sich f sukzessiv fortsetzt, so dass f eine Symmetrie der gesamten Parkettierung ist. \square

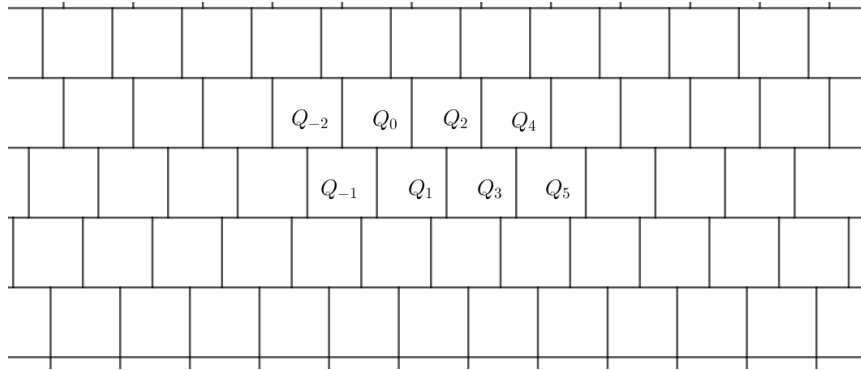


Abbildung 2.3: Ausschnitt einer Parkettierung mit $M = \{Q\}$

Ein Quadrat lässt sowohl periodische als auch nicht-periodische Parkettierungen der Ebene zu: Eine periodische Parkettierung ist in Abbildung 2.1 angegeben. Die nachfolgende Parkettierung in Abbildung 2.4 hat Translationssymmetrien in horizontaler Richtung und in keine andere Richtung, da eine nicht-horizontale Translation die verschobene Schicht S von Quadraten auf eine andere derartig verschobene Schicht abbilden müsste, die es aber in dieser Parkettierung nicht gibt. Also ist diese Parkettierung nicht-periodisch.

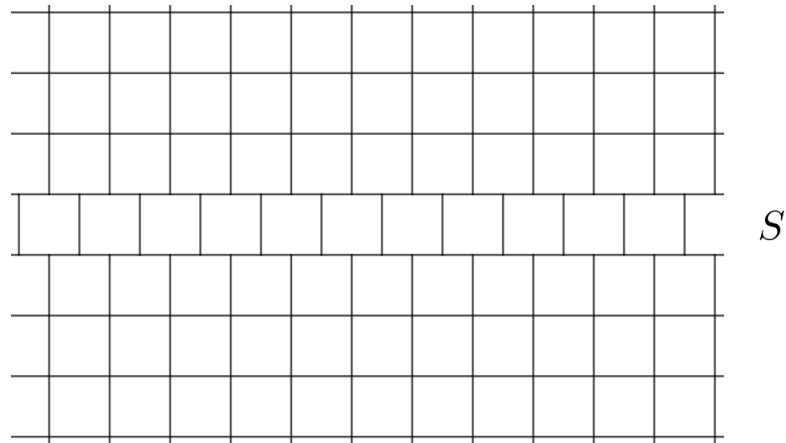


Abbildung 2.4: Ausschnitt einer nicht-periodischen Parkettierung mit $M = \{Q\}$

Wir geben nun ein weiteres Beispiel einer nicht-periodischen Parkettierung an, siehe Abbildung 2.5. Alle Kacheln dieser Parkettierung sind kongruent zu einem rechtwinkligen Trapez, dessen kurze Seiten die gleiche Länge haben und die längste Seite die doppelte Länge hat. In der Abbildung kann man durch Probieren überprüfen, dass keine echte Translation eine Symmetrie der Parkettierung ergibt. Der genaue Beweis, dass diese Parkettierung nicht-periodisch ist, ergibt sich aus Satz 3.2.

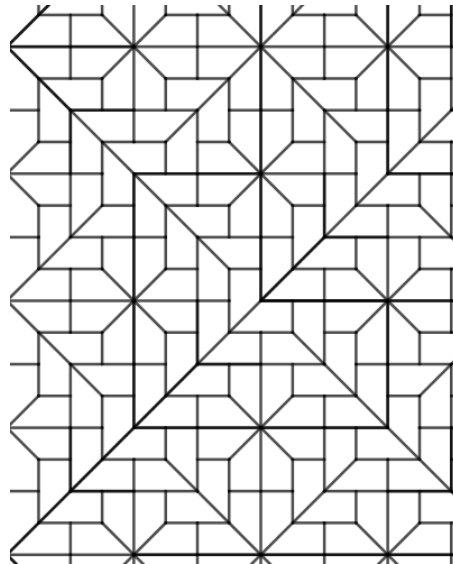


Abbildung 2.5: Ausschnitt einer nicht-periodischen Parkettierung

Eine Menge M von Protokacheln heißt *aperiodisch*, falls es mindestens eine Parkettierung $\{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit Kacheln aus M gibt, aber *jede* derartige Parkettierung nicht-periodisch ist.

Die Parkettierungen in den Abbildungen 2.2 und 2.5 sind nicht-periodisch. Die angegebenen Mengen von Protokacheln, die diese Parkettierungen jeweils zulassen, sind jedoch nicht aperiodisch, da sie auch andere Parkettierungen zulassen, die Translationssymmetrien in nicht-parallele Richtungen aufweisen, also periodisch sind. Im Fall von Abbildung 2.2 (Parkettierung durch ein Rechteck) ist dies offensichtlich. Im Fall von Abbildung 2.5 lassen sich zwei Kopien des angegebenen Trapezes zu einem Rechteck zusammensetzen, mit dem man dann eine periodische Parkettierung der Ebene erhält.

Wie in der Einleitung dargestellt, war es längere Zeit ein offenes Problem der Mathematik, ob es aperiodische Mengen von Protokacheln gibt und, falls ja, diese zu finden. Ziele dieser Arbeit sind die Darstellung von allgemeinen Resultaten über derartige aperiodische Mengen von Protokacheln, eine Untersuchung der von Roger Penrose gefundenen konkreten Protokacheln (Penrose-Rhomben, Drachen und Pfeile) und ihrer Symmetrieeigenschaften, sowie weitere Beispiele.

3 Nicht-periodische Parkettierungen

In diesem Kapitel geben wir ein allgemeines Resultat an, das für Mengen M von Protokacheln beschreibt, dass gegebene Parkettierungen über M nicht-periodisch sind. Grundlage für dieses Resultat sind Kompositionen, die wir gleich einführen.

Seien T_1 und T_2 zwei Parkettierungen und $k \in \mathbb{N}$. Wir sagen, dass man T_2 durch *Komposition* aus T_1 erhält, falls jede Kachel von T_2 eine Vereinigung von Kacheln aus T_1 ist. Falls hierbei jede Kachel von T_2 eine Vereinigung von k Kacheln von T_1 ist, so heißt T_2 eine *k-Komposition* von T_1 . Die Komposition heißt *echt*, falls $T_1 \neq T_2$ ist, d.h. mindestens eine Kachel von T_2 ist eine Vereinigung von mindestens zwei Kacheln von T_1 .

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt *Ähnlichkeitstransformation*, falls f die Abstände von Punkten um einen konstanten Faktor $m \in \mathbb{R}$ ändert, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt $|f(x) - f(y)| = m \cdot |x - y|$. Ähnlichkeitstransformationen bestehen aus einer Multiplikation mit einer Konstanten m (Streckung/Stauchung) gefolgt von einer Isometrie. Sie sind bijektiv und die Umkehrabbildung f^{-1} ist ebenfalls eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Streckungsfaktor m^{-1} . Ferner ergibt eine Hintereinanderausführung von zwei Ähnlichkeitstransformationen wieder eine Ähnlichkeitstransformation, wobei sich die Streckungsfaktoren multiplizieren.

Seien T_1 und T_2 zwei Parkettierungen. Wir sagen, dass T_1 und T_2 *ähnlich* sind und schreiben $T_1 \sim T_2$, falls es eine Ähnlichkeitstransformation $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

der Ebene gibt, die T_1 auf T_2 abbildet. Das heißt, f bildet jede Kachel von T_1 auf eine Kachel von T_2 ab, insbesondere ist die Bildkachel, wie in der Geometrie definiert, ähnlich zur Ausgangskachel. Wir sagen, dass T_1 und T_2 *isometrisch* sind und schreiben $T_1 \cong T_2$, falls es eine Isometrie f der Ebene gibt, die T_1 auf T_2 abbildet.

Wir sagen, dass zwei Parkettierungen $T_1 = \{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $T_2 = \{K'_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ *gleich* sind und schreiben $T_1 = T_2$, falls T_1 und T_2 aus denselben Kacheln bestehen, d.h. jede Kachel K_i von T_1 ist auch eine Kachel K'_j von T_2 und umgekehrt. Tatsächlich reicht hierfür aus, dass $T_1 \subseteq T_2$ ist, weil T_1 und T_2 Parkettierungen der gesamten Ebene sind. Denn falls K'_j eine beliebige Kachel von T_2 ist, so gibt es eine Kachel K_i von T_1 , die mit K'_j überlappt, d.h. es gibt einen Punkt $x \in K_i \cap K'_j$, der im Inneren der Kacheln K_i und K'_j liegt, d.h. nicht auf ihren Kanten. Wegen der Voraussetzung $T_1 \subseteq T_2$ ist dann $K_i \in T_2$ und folglich $K_i = K'_j$. Also ist $K'_j \in T_1$ und damit $T_1 = T_2$.

Wir möchten anmerken, dass diese Definition der Gleichheit von zwei Parkettierungen T_1 und T_2 sich von der in Quelle [2] angegebenen Definition der Gleichheit (equal tilings) unterscheidet. In [2] heißen zwei Parkettierungen T_1 und T_2 *equal*, falls T_1 und T_2 , wie oben definiert, ähnlich sind. Unsere Definition entspricht genau der Gleichheit der Mengen T_1 und T_2 .

Eine Parkettierung T heißt *kompositionsselbstähnlich*, falls T ähnlich ist zu einer echten Komposition von sich selbst. Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Parkettierung T heißt *k-selbstähnlich*, falls T ähnlich ist zu einer k -Komposition von sich selbst.

Wir nennen die Parkettierung T *k-kompositionseindeutig*, falls für jede zu T ähnliche k -Komposition T_1 von T gilt: für jede k -Komposition T_2 von T , die isometrisch zu T_1 ist, gilt, dass $T_1 = T_2$, d.h. T_1 und T_2 bestehen aus denselben Kacheln.

Lemma 3.1. Seien T und T' zwei ähnliche Parkettierungen und sei $k \in \mathbb{N}$.

- (a) Ist T k -selbstähnlich, so auch T' .
- (b) Ist T k -kompositionseindeutig, so auch T' .

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Ähnlichkeitstransformation, die T auf T' abbildet.

(a) Nach Voraussetzung zu T gibt es eine Parkettierung $T_1 = \{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, die eine k -Komposition von T und ähnlich zu T ist. Da jede Kachel K_i ($i \in \mathbb{N}$) von T_1 eine Vereinigung von k Kacheln von T ist und f die Parkettierung T auf T' abbildet, ist $f(K_i)$ eine Vereinigung von k Kacheln von T' . Also ist $T'_1 = \{f(K_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine k -Komposition von T' . Die Ähnlichkeitstransformation f bildet die Parkettierung T_1 auf T'_1 ab (siehe Abbildung 3.1). Da T' ähnlich zu T und T ähnlich zu T_1 ist, ist auch T' ähnlich zu T'_1 . Also ist T' k -selbstähnlich.

$$\begin{array}{ccc} \text{k-Komposition} & T_1 & \xrightarrow{f} T'_1 \\ & \wr & \\ & T & \xrightarrow{f} T' \end{array}$$

Abbildung 3.1: Erhalt der k -Selbstähnlichkeit

(b) Sei $T'_1 = \{K'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine k -Komposition von T' , die ähnlich zu T' ist, und sei $T'_2 = \{M'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine weitere k -Komposition von T' , die zu T'_1 isometrisch ist. Wie im Beweis von (a) sind dann $T_1 = \{f^{-1}(K'_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $T_2 = \{f^{-1}(M'_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ zwei k -Kompositionen von T (siehe Abbildung 3.2), und T_1 ist ähnlich zu T . Die Ähnlichkeitsabbildung f bildet T_1 auf T'_1 ab mit einem Streckungsfaktor $m \in \mathbb{R}$ und T'_1 ist isometrisch zu T'_2 . Die Ähnlichkeitsabbildung f^{-1} bildet T'_2 auf T_2 ab mit dem Streckungsfaktor m^{-1} . Die Komposition dieser drei Abbildungen ist also eine Ähnlichkeitstransformation von T_1 auf T_2 mit dem Streckungsfaktor 1, ist also eine Isometrie. Die Voraussetzung an T ergibt $T_1 = T_2$. Da f bijektiv ist, folgt $T'_1 = T'_2$. Daher ist T' k -kompositionseindeutig. \square

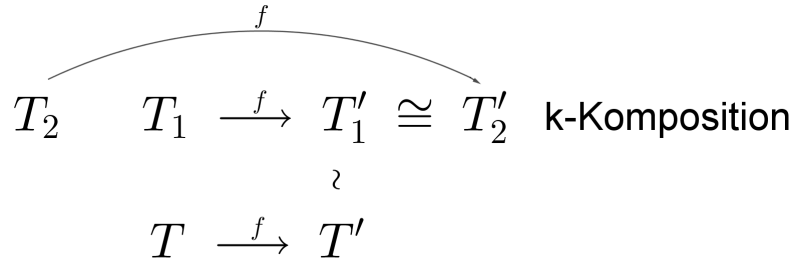


Abbildung 3.2: Erhalt der k -Kompositionseindeutigkeit

Das folgende Resultat gibt eine hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Parkettierung T nicht-periodisch ist.

Satz 3.2. Sei $k \geq 2$ und sei T eine k -selbstähnliche und k -kompositionseindeutige Parkettierung. Dann ist die einzige Translationssymmetrie von T die Identitätsabbildung. Insbesondere ist T nicht-periodisch.

Beweis. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Translationssymmetrie von T . Es gibt also einen Verschiebungsvektor $d \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = x + d$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $f = id$, d.h. $d = 0$. Nach Voraussetzung gibt es eine k -Komposition $T_1 = \{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von T , die ähnlich ist zu T mit einem Streckungsfaktor $m > 1$. Dann ist $T'_1 = \{f(K_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Parkettierung der Ebene, die isometrisch ist zu T_1 (und daher ähnlich zu T). Wie im Beweis von Lemma 3.1(a) ist T'_1 eine k -Komposition von T . Da T k -kompositionseindeutig ist, folgt $T_1 = T'_1$, also ist f eine Symmetrie auch von T_1 . Nach Lemma 3.1 ist die Parkettierung T_1 ferner k -selbstähnlich und k -kompositionseindeutig, erfüllt also dieselben Voraussetzungen wie für T .

Wir konstruieren nun eine k -Komposition T_2 aus T_1 genauso, wie wir T_1 aus T konstruiert haben, wie folgt: Sei $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Ähnlichkeitsabbildung mit Streckungsfaktor m , die T auf T_1 abbildet. Sei $T_2 = \{g(K_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ (siehe Abbildung 3.3). Wie oben folgt, dass T_2 eine k -Komposition von T_1 ist. Nach Konstruktion ist T_2 ähnlich zu T_1 mit dem Streckungsfaktor m . Wie oben gezeigt, ist f dann eine Symmetrie auch von T_2 und T_2 wieder k -selbstähnlich und k -kompositionseindeutig. Wir erhalten also eine Folge von Parkettierungen T_n

($n \in \mathbb{N}$), so dass stets f eine Symmetrie von T_n ist und die Parkettierung T_n ähnlich ist zu T mit dem Streckungsfaktor m^n . Wenn n genügend groß ist, enthält T_n eine Kachel K mit einem Element z im Inneren von K , so dass $f(z) = z + d$ auch im Inneren von K liegt. Da f eine Symmetrie von T_n ist, ist $f(K)$ eine Kachel von T_n . Also gilt $z + d \in K \cap f(K)$. Weil $z + d$ im Inneren von K und nicht auf einer Kante liegt, folgt $f(K) = K$. Aus $f(x) = x + d$ für alle $x \in K$ folgt $d = 0$, also $f = id$. \square

$$\begin{array}{ccc}
 \text{k-Komposition} & T_2 & \xrightarrow{f} T'_2 \\
 & \uparrow g & \\
 \text{k-Komposition} & T_1 & \xrightarrow{f} T'_1 \\
 & \uparrow g & \\
 & T & \xrightarrow{f} T
 \end{array}$$

Abbildung 3.3: Ähnlichkeitsstreckungen von T

Der obige Satz verallgemeinert Satz 10.1.1 aus [2] in dreierlei Hinsicht: Satz 10.1.1 setzt voraus, dass die Parkettierung “monohedral” ist, d.h. eine Parkettierung über genau einer Protokachel ist. Unser Satz macht keine derartige Voraussetzung. Ferner ist unsere Voraussetzung von k -Selbstähnlichkeit schwächer, da wir nicht fordern, dass k mit der gegebenen Eigenschaft minimal ist. Schließlich ist auch die Voraussetzung der k -Kompositionseindeutigkeit schwächer, da sich unsere Voraussetzung nur auf isometrische k -Kompositionen bezieht, während [2] das für alle ähnlichen k -Kompositionen fordert.

Als Beispiel zeigen wir nun, wie sich mit Hilfe von Satz 3.2 zeigen lässt, dass die Parkettierung von Abbildung 2.5 nicht-periodisch ist und sogar keine echte Translationssymmetrie besitzt. Hierfür sei $k = 4$. Nach Satz 3.2 genügt es zu zeigen, dass T 4-selbstähnlich und 4-kompositionseindeutig ist.

Wir zeigen zunächst, dass T 4-selbstähnlich ist. Dazu betrachte in der folgenden Abbildung 3.4 die Parkettierung T_1 , die aus den Kacheln mit blauen Kanten besteht.

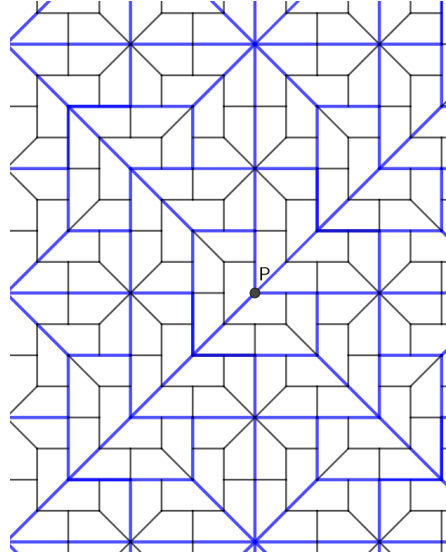


Abbildung 3.4: Anwendung von Satz 3.2 am Beispiel von Abbildung 2.5

Offensichtlich ist jede Kachel von T_1 eine Vereinigung von genau 4 Kacheln von T . Also ist T_1 eine 4-Komposition von T . Als nächstes behaupten wir, dass T ähnlich ist zu T_1 . Hierfür betrachte den Punkt P als Koordinatenursprung der Ebene. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Streckung mit dem Faktor 2, d.h. $f(x) = 2x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Es ist $f(P) = P$. Man sieht, dass f die Parkettierung T auf T_1 abbildet. Also ist T 4-selbstähnlich.

Wir zeigen nun, dass T 4-kompositionseindeutig ist. Dafür sei T_1 eine beliebige zu T ähnliche 4-Komposition von T , und sei T_2 eine beliebige 4-Komposition von T , die isometrisch zu T_1 ist. Die Kacheln von T_2 sind also kongruente rechtwinklige Trapeze und ähnlich zu jedem Trapez von T . Nun betrachte eine beliebige Kachel von T . Wie man leicht sieht, gibt es nur eine Möglichkeit, diese Kachel mit drei weiteren Kacheln von T zu vereinigen, so dass man ein ähnliches Trapez erhält. Wir zeigen nun, dass $T_1 = T_2$ ist. Wähle $K \in T_2$ beliebig. Dann ist K die Vereinigung von 4 Kacheln K_1, K_2, K_3, K_4 von T . Da T_1 eine 4-Komposition von T ist, ist K_1 in einer Kachel K' von T_1 enthalten,

die eine Vereinigung von K_1 mit drei weiteren Kacheln von T ist. Aufgrund der vorher erwähnten Eindeutigkeit der Komposition von Kacheln sind diese drei weiteren Kacheln genau die Kacheln K_2, K_3, K_4 . Damit ist $K = K' \in T_1$. Also ist $T_2 \subseteq T_1$ und somit $T_1 = T_2$. Folglich ist T 4-kompositionseindeutig.

Aus Satz 3.2 folgt direkt unsere Behauptung, dass T keine echte Translations-symmetrie hat.

4 Existenz von Parkettierungen

Ziel dieses Kapitels ist ein Resultat mit einer hinreichenden Bedingung für endliche Mengen von Protokacheln, so dass sie eine Parkettierung der gesamten Ebene zulassen.

Wir folgen mit kleinen Abwandlungen der Vorlesungsschrift (Oxford Masterclasses in Geometry 2014) von Alexander F. Ritter [3].

Sei M eine endliche Menge von Protokacheln. Wenn diese Protokacheln eine einfache Form haben, ist es häufig nicht schwierig festzustellen, ob es eine Parkettierung der Ebene über M gibt oder nicht. Hierfür siehe z.B. die Parkettierungen in Kapitel 2, bei denen unser Schwerpunkt nicht auf ihrer offensichtlichen Existenz lag, sondern auf ihren Symmetrieeigenschaften. Bei komplizierteren Formen der Protokacheln ist diese Entscheidung häufig wesentlich schwieriger. Es kann passieren, dass man mit den Kacheln aus M große Teile der Ebene überdecken kann. Die Frage ist dann, ob sich diese Überdeckung durch Hinzufügen weiterer Kacheln zu einer Parkettierung erweitern lässt.

Es ist möglich, dass sich diese Überdeckung an verschiedenen Stellen erweitern lässt, diese Erweiterungen sich aber in Hinsicht zur Vervollständigung zu einer Parkettierung gegenseitig beeinflussen oder sogar ausschließen.

Das Rechteck in Abbildung 4.1 hat die Seitenlängen 5 bzw. 2. An das Rechteck 0 können wir sowohl Rechteck 1 als auch Rechteck 2 jeweils an den vorgegebenen Stellen anlegen. Wenn wir jedoch beide Rechtecke an diesen Stellen anlegen, kann diese Überdeckung nicht mehr zu einer Parkettierung erweitert werden. Es ist jedoch offensichtlich, dass M diverse Parkettierungen der Ebene

zulässt.

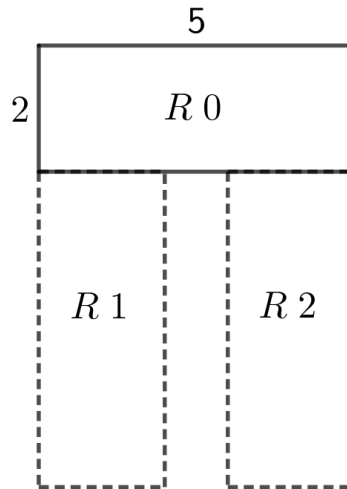


Abbildung 4.1: Beeinflussung der Anlegemöglichkeiten

Wir verwenden im Folgenden den Satz von Bolzano-Weierstraß. Dieser besagt, dass jede Folge von Punkten x_n ($n \in \mathbb{N}$), die in einem Quadrat in \mathbb{R}^2 liegt, einen Häufungspunkt und damit auch eine konvergente Teilfolge hat.

Diesen Satz müssen wir auf eine Folge von Kacheln in \mathbb{R}^2 übertragen.

Hierfür brauchen wir zunächst einen Abstandsbegriff für Kacheln. Dieser ist wie folgt definiert. Seien $S, S' \subset \mathbb{R}^2$ zwei Polygone. Wir definieren ihren *Hausdorff-Abstand* $d(S, S')$ wie folgt:

$$d(S, S') = \max\left\{\sup_{s \in S} \inf_{s' \in S'} |s - s'|, \sup_{s' \in S'} \inf_{s \in S} |s - s'|\right\}$$

Diese Distanz $d(S, S')$ ist die kleinste Zahl d , so dass jeder Punkt von S von einem geeignet gewählten Punkt aus S' höchstens den Abstand d hat und auch jeder Punkt von S' von einem geeignet gewählten Punkt aus S höchstens den Abstand d hat. Anschaulich beschreibt dies, wie schnell man von einem beliebigen Punkt von S aus die Menge S' erreichen kann und außerdem von einem beliebigen Punkt von S' aus die Menge S erreichen kann.

Wir sagen, dass eine Folge S_1, S_2, \dots von Polygonen gegen das Polygon S *konvergiert*, falls $d(S_n, S) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Hierfür schreiben wir auch $S_1, S_2, \dots \rightarrow S$.

Wir nennen zwei Kacheln S, T *kongruente Kopien*, falls T aus S durch Rotation und Translation erhalten werden kann.

Der folgende Satz ist eine Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß für Kacheln in \mathbb{R}^2 . Er ist ein Spezialfall des Auswahlssatzes von Blaschke (Blaschke Selection Theorem), der 1916 von W. Blaschke vorgestellt wurde [1].

Satz 4.1 (Selektionstheorem). Sei T eine Protokachel und $p \in \mathbb{R}^2$. Seien $S_1, S_2, \dots \subset \mathbb{R}^2$ Kacheln, so dass $p \in S_n$ und S_n eine kongruente Kopie von T ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Teilfolge S_{j_1}, S_{j_2}, \dots , die gegen eine Kachel $S \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert, so dass $p \in S$ und S eine kongruente Kopie von T ist.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : S_n \rightarrow T$ eine Translation gefolgt von einer Rotation, die S_n in T überführt, und sei $q_n = f_n(p)$, also $q_n \in T$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge q_1, q_2, \dots eine konvergente Teilfolge q_{i_1}, q_{i_2}, \dots in T mit $\lim_{n \rightarrow \infty} q_{i_n} = q$ für ein $q \in T$. Wir wählen nun eine kongruente Kopie T' von T so, dass p unter dieser Kongruenzabbildung das Bild von q ist. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass $T = T'$ und $q = p$ ist. Eine Translation mit $q - q_{i_n}$ überführt S_{i_n} auf eine kongruente Kopie S'_{i_n} , aus der wir T aufgrund der Abbildung f_{i_n} durch eine Rotation um q mit einem Winkel α_{i_n} erhalten. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat die Folge dieser Winkel $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots$ eine konvergente Teilfolge $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \dots$ mit Limes α . Nun sei S die Kachel, die wir aus T durch Rotation um q mit dem Winkel $-\alpha$ erhalten. Es ist klar, dass $p = q \in S$ und S eine kongruente Kopie von T ist. Die Kacheln S'_{i_n} erhalten wir aus T durch Rotation mit $-\alpha_{i_n}$ und hieraus die Kacheln S_{i_n} durch Translation um $q_{i_n} - q$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} q_{i_n} - q = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{i_n} = \alpha$ folgt, dass sich die Kacheln S_{i_n} anschaulich immer mehr der Kachel S annähern, also $d(S_{i_n}, S) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. \square

Wir verallgemeinern nun Satz 4.1 von einer Protokachel auf eine endliche Menge von Protokacheln.

Folgerung 4.2. Sei M eine endliche Menge von Protokacheln und $p \in \mathbb{R}^2$. Seien $S_1, S_2, \dots \subset \mathbb{R}^2$ Kacheln, so dass $p \in S_n$ und jedes S_n eine kongruente Kopie von irgendeiner Kachel aus M ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Teilfolge S_{j_1}, S_{j_2}, \dots , die gegen eine Kachel $S \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert, so dass $p \in S$ und S eine kongruente Kopie von einer Kachel aus M ist.

Beweis. Da M endlich ist, muss es eine Kachel $T \in M$ geben, so dass die Folge S_1, S_2, \dots unendlich viele Kopien S_{k_1}, S_{k_2}, \dots von T enthält. Auf diese Folge S_{k_1}, S_{k_2}, \dots , den Punkt p und die Protokachel T wenden wir nun Satz 4.1 an. \square

Eine Menge $\{K_i \mid i \in I\}$ von Kacheln (mit einer endlichen oder unendlichen Menge $I \subseteq \mathbb{N}$) heißt *partielle Parkettierung*, wenn sich je zwei Kacheln höchstens in ihren Kanten oder Ecken schneiden, sich also nicht “überlappen”, das heißt, für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ ist $K_i \cap K_j$ entweder leer oder $K_i \cap K_j$ besteht aus Elementen von endlich vielen Kanten oder Ecken von K_i und K_j . Hierbei kann die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} K_i$ der Kacheln eine echte Teilmenge von \mathbb{R}^2 sein. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir sagen, dass die partielle Parkettierung $\{K_i \mid i \in I\}$ die Menge X *überdeckt*, falls $X \subseteq \bigcup_{i \in I} K_i$ ist. Diese partielle Parkettierung ist also eine Parkettierung, falls sie \mathbb{R}^2 überdeckt.

Nun sei M eine Menge von Protokacheln. Wir sagen, dass M die partielle Parkettierung $\{K_i \mid i \in I\}$ *erlaubt*, falls jede Kachel K_i ($i \in I$) eine kongruente Kopie einer Kachel K aus M ist.

Satz 4.3 (Existenzsatz). Sei M eine endliche Menge von Protokacheln, die für jeden Kreis D in \mathbb{R}^2 (mit beliebigem Radius und Mittelpunkt) eine partielle Parkettierung erlaubt, die diesen Kreis D überdeckt. Dann erlaubt M eine

Schritt 3. Für $r > 0$ sei $D_r(0)$ der Kreis um $(0, 0)$ mit Radius r . Sei $s \in \mathbb{N}$. Wir wählen ein beliebiges $r > 0$, so dass $x_s \in D_r(0)$. Nach Voraussetzung gibt es eine partielle Parkettierung T_r , die von M erlaubt wird und $D_r(0)$ überdeckt. Dann enthält T_r eine Kachel $T_{r,s}$, die den Gitterpunkt x_s enthält, und wir wählen eine derartige Kachel $T_{r,s}$ für r und s fest. Es ist also $x_s \in T_{r,s}$ für alle $s, r \in \mathbb{N}$ mit $x_s \in D_r(0)$.

Schritt 4. Wie in Schritt 3 sei $s \in \mathbb{N}$. Sei r_1, r_2, \dots eine beliebige Folge von Radien, so dass $x_s \in D_{r_n}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Wir betrachten die zugehörige Folge $T_{r_1,s}, T_{r_2,s}, \dots$ von Kacheln wie in Schritt 3. Nach Folgerung 4.2 enthält diese Folge eine Teilfolge $T_{r'_1,s}, T_{r'_2,s}, \dots$, die gegen eine Kachel $S \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert, so dass $x_s \in S$ und S eine kongruente Kopie von einer Kachel aus M ist.

Schritt 5. Wir wenden nun Schritt 4 nacheinander für alle Gitterpunkte x_s und bestimmte Folgen von Radien wie folgt an.

Als erstes erhalten wir für $s = 1$ und die Folge der Radien $r_1 = 1, r_2 = 2, \dots$ durch Schritt 4 eine Teilfolge r'_1, r'_2, \dots und eine Folge von Kacheln $T_{r'_1,1}, T_{r'_2,1}, \dots$, die gegen eine Kachel $S_1 \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert, so dass $x_1 \in S_1$ und S_1 eine kongruente Kopie von einer Kachel aus M ist. Dies ist möglich, da $x_1 = (0, 0) \in D_{r_n}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da r'_1, r'_2, \dots eine Teilfolge von $r_1 = 1, r_2 = 2, \dots$ ist, gilt $r'_1 < r'_2 < r'_3 < \dots$. Wir können annehmen, dass $x_2 \in D_{r'_1}(0)$ ist (sonst beginne die Folge mit einem späteren Folgenglied). Dann ist $x_2 \in D_{r'_n}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies stellt eine Voraussetzung für den nächsten Schritt sicher.

Als nächstes erhalten wir für $s = 2$ und die Folge der Radien r'_1, r'_2, \dots durch Schritt 4 eine Teilfolge r''_1, r''_2, \dots und eine Folge von Kacheln $T_{r''_1,2}, T_{r''_2,2}, \dots$, die gegen eine Kachel $S_2 \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert, so dass $x_2 \in S_2$ und S_2 eine kongruente Kopie von einer Kachel aus M ist. Wir können analog zu vorher annehmen, dass $x_3 \in D_{r''_1}(0)$ ist (sonst beginne die Folge mit einem späteren Folgenglied). Dann ist $x_3 \in D_{r''_n}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir verfahren nun induktiv weiter. Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, dass wir eine Folge von Radien $r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots$ erhalten haben, so dass $r_1^{(m)} < r_2^{(m)} < \dots$ und $x_{m+1} \in D_{r_n^{(m)}}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Dabei bedeutet der Exponent (m) die Anzahl der Striche ' für r_n .) Dann erhalten wir für $s = m + 1$ und die Folge der Radien $r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots$ durch Schritt 4 eine Teilfolge $r_1^{(m+1)}, r_2^{(m+1)}, \dots$ und eine Folge von Kacheln $T_{r_1^{(m+1)}, m+1}, T_{r_2^{(m+1)}, m+1}, \dots$, die gegen eine Kachel $S_{m+1} \subset \mathbb{R}^2$ konvergiert, so dass $x_{m+1} \in S_{m+1}$ und S_{m+1} eine kongruente Kopie von einer Kachel aus M ist. Wir können analog zu vorher annehmen, dass $x_{m+2} \in D_{r_n^{m+1}}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Durch diese Konstruktion haben wir also Kacheln S_1, S_2, \dots erhalten und weitere Folgen von Kacheln $T_{r_n^{(m)}, m}$ für $n = 1, 2, \dots$ und jedes $m = 1, 2, \dots$, so dass

$$x_m \in S_m \quad \text{und} \quad T_{r_1^{(m)}, m}, T_{r_2^{(m)}, m}, \dots \rightarrow S_m \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert auch jede Teilfolge dieser Kacheln gegen S_m . Wenn $k \geq m$ ist, ist $r_1^{(k)}, r_2^{(k)}, \dots$ eine Teilfolge von $r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots$ und die Folge der Kacheln $T_{r_1^{(k)}, m}, T_{r_2^{(k)}, m}, \dots$ nach Konstruktion eine Teilfolge von $T_{r_1^{(m)}, m}, T_{r_2^{(m)}, m}, \dots$. Somit gilt auch:

$$T_{r_1^{(k)}, m}, T_{r_2^{(k)}, m}, \dots \rightarrow S_m \quad \text{für jedes } k \geq m \quad \text{und alle } m \in \mathbb{N}$$

Schritt 6 Wir zeigen, dass S_1, S_2, \dots eine Parkettierung der Ebene \mathbb{R}^2 ist.

Es ist möglich, dass die Kacheln S_1, S_2, \dots nicht alle paarweise verschieden sind. Es kann sein, dass z.B. S_7 mehrfach in der Liste vorkommt. Wir müssen die folgenden beiden Eigenschaften nachweisen:

- (1) Je zwei Kacheln S_i, S_j schneiden sich höchstens in ihren Kanten oder Ecken, oder aber $S_i = S_j$. D.h., wenn die beiden Kacheln sich echt "überlappen", dann sind sie gleich.
- (2) $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$.

Zu (1): Angenommen, S_i und S_j überlappen, d.h. es gibt einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$, der zum Inneren von S_i und S_j gehört, also $p \in S_i \cap S_j$, aber p liegt nicht auf den Kanten oder Ecken von S_i oder S_j . Wähle $k \geq \max\{i, j\}$. Wir haben die Konvergenz der folgenden beiden Folgen von Kacheln:

$$T_{r_1^{(k)},i}, T_{r_2^{(k)},i}, \dots \rightarrow S_i \quad \text{und} \quad T_{r_1^{(k)},j}, T_{r_2^{(k)},j}, \dots \rightarrow S_j.$$

Da sich die Kacheln $T_{r_n^{(k)},i}$ der Kachel S_i und die Kacheln $T_{r_n^{(k)},j}$ der Kachel S_j für $n \rightarrow \infty$ beliebig genau annähern, muss für genügend großes n die Kachel $T_{r_n^{(k)},i}$ mit der Kachel $T_{r_n^{(k)},j}$ überlappen. Diese beiden Kacheln gehören jedoch der partiellen Parkettierung $T_{r_n^{(k)}}$ an. Somit ist $T_{r_n^{(k)},i} = T_{r_n^{(k)},j}$. Da S_i der Limes der Kacheln $T_{r_n^{(k)},i}$ und S_j der Limes der Kacheln $T_{r_n^{(k)},j}$ ist, folgt $S_i = S_j$.

Zu (2): Wir verfahren indirekt. Angenommen, es gibt einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$. Da die Menge M von Protokacheln endlich ist, gibt es einen (großen) Radius $R > 0$, so dass jede kongruente Kopie einer Kachel aus M , die p enthält, ganz in dem Kreis $D_R(p)$ liegt. Da jede der Kacheln S_i den Kreis D überdeckt und daher mindestens die Fläche $\pi\delta^2$ hat, gibt es nur endlich viele verschiedene Kacheln S_i ($i \in E, E \subseteq \mathbb{N}$ endlich), die innerhalb des Kreises $D_R(p)$ liegen oder diesen Kreis schneiden. Für $i \in E$ ist $p \notin S_i$, also gibt es einen (kleinen) Radius r_i mit $D_{r_i}(p) \cap S_i = \emptyset$. Sei r das Minimum dieser endlich vielen Radien r_i ($i \in E$). Dann folgt, $D_r(p) \cap S_i = \emptyset$ für alle $i \in E$. Also haben alle Kacheln S_i ($i \in E$) mindestens den Abstand r von p . Sei k das größte Element von E . Dann gilt $T_{r_1^{(k)},i}, T_{r_2^{(k)},i}, \dots \rightarrow S_i$ für alle $i \in E$. Die Kacheln $T_{r_n^{(k)},i}$ nähern sich also für $n \rightarrow \infty$ immer mehr der Kachel S_i an. Wenn n genügend groß ist, haben daher die Kacheln $T_{r_n^{(k)},i}$ mindestens den Abstand $\frac{r}{2}$ von p . Für ein genügend großes n überdeckt der Kreis $D_{r_n^{(k)}}(0)$ den großen Kreis $D_R(p)$. Nach Schritt 3 überdeckt die partielle Parkettierung $T_{r_n^{(k)}}$ den Kreis $D_{r_n^{(k)}}(0)$ und damit auch den Kreis $D_R(p)$. Daher gibt es eine Kachel X dieser Parkettierung $T_{r_n^{(k)}}$ mit $p \in X$. Nach Wahl von $D_R(p)$ gilt $X \subseteq D_R(p)$. Nach Schritt 1 enthält X einen Gitterpunkt x_i (für ein $i \in \mathbb{N}$) in seinem Inneren. Es ist $x_i \in S_i$. Falls $i \notin E$, ist S_i zu $D_R(p)$ disjunkt und damit auch $S_i \cap X = \emptyset$, ein Widerspruch

zu $x_i \in S_i \cap X$. Also ist $i \in E$. Es sind X und $T_{r_n^{(k)},i}$ beides Kacheln der Parkettierung $T_{r_n^{(k)}}$. Wegen $x_i \in T_{r_n^{(k)},i}$ folgt $X = T_{r_n^{(k)},i}$. Da $p \in X$ folgt $p \in T_{r_n^{(k)},i}$. Das ist ein Widerspruch, da wegen $i \in E$ die Kachel $T_{r_n^{(k)},i}$ von p mindestens den Abstand $\frac{r}{2}$ hat. \square

Wir werden Satz 4.3 anwenden auf die im Folgenden untersuchten Mengen von Penrose-Kacheln (siehe Satz 5.1).

5 Penrose-Parkettierungen

5.1 Rauten, Drachen und Pfeile

Wir beginnen mit den folgenden beiden Parkettierungen der Ebene.

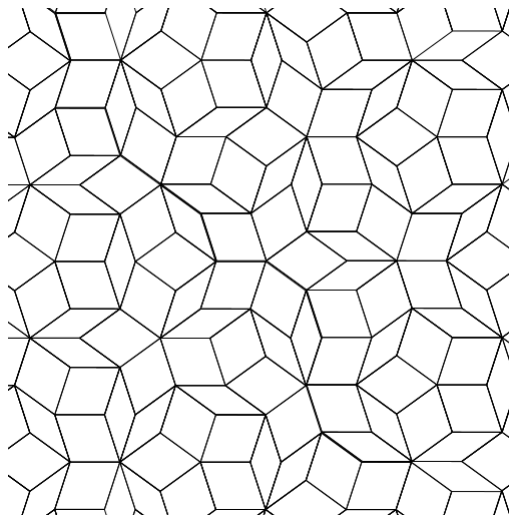


Abbildung 5.1: Ausschnitt einer Parkettierung mit Rauten

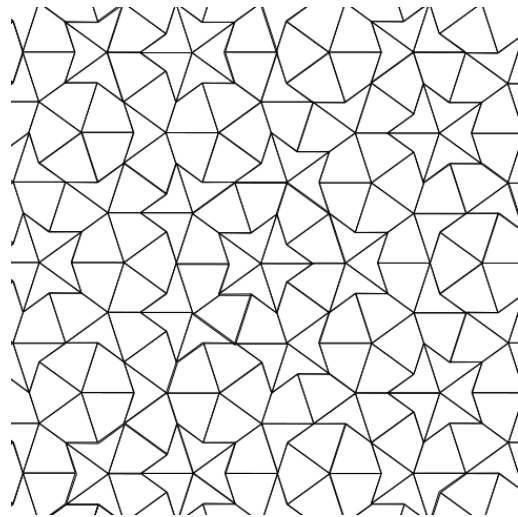


Abbildung 5.2: Ausschnitt einer Parkettierung mit Drachen und Pfeilen

Für diese Abbildungen kann man nach ausgiebigem Probieren vermuten, dass in beiden Fällen keine echte Translation eine Symmetrie der Parkettierung ergibt. Der Beweis hierfür sowie Konstruktionsmethoden für derartige Parkettierungen und ihre Symmetrieeigenschaften sind das Ziel dieser Arbeit.

Offensichtlich verwenden diese beiden Parkettierungen jeweils die folgenden Kacheln als Protokacheln, siehe Abbildung 5.3 und 5.4.

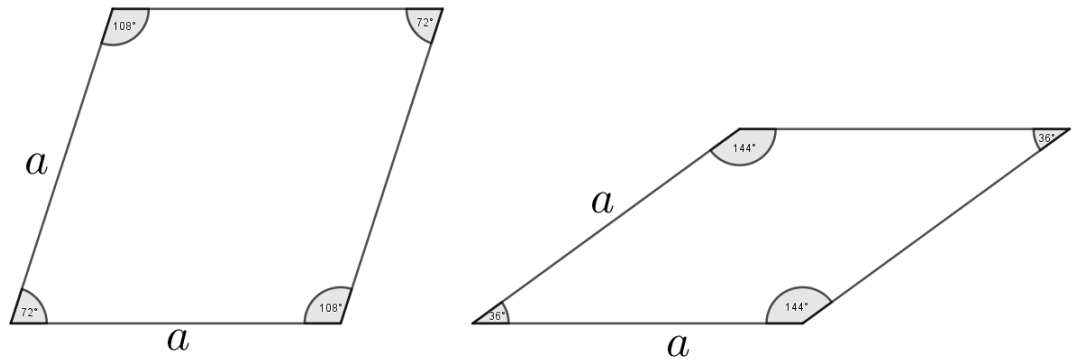


Abbildung 5.3: Die dicke und dünne Raute

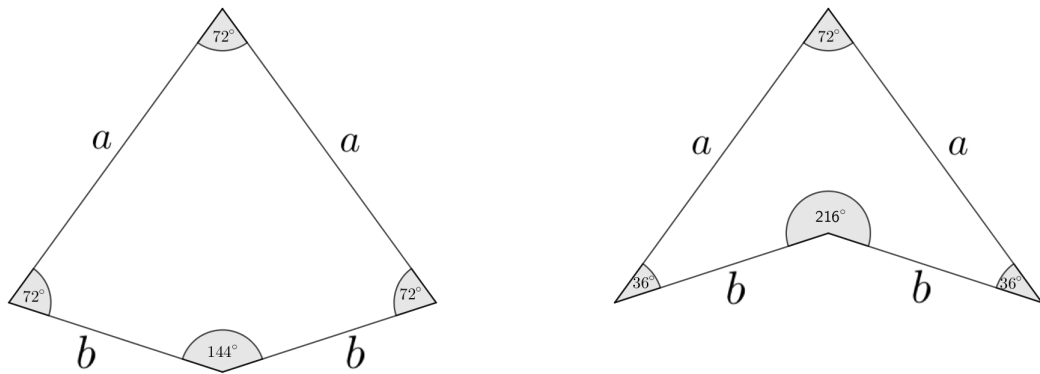


Abbildung 5.4: Der Drachen und der Pfeil

Wir beschreiben nun die Kacheln in diesen Abbildungen. Abbildung 5.3 enthält zwei Rauten (Rhomben) derselben Seitenlänge, aber mit unterschiedlichen Winkeln. Die linke Kachel hat die Innenwinkel $72^\circ = \frac{2}{5}\pi$ und $108^\circ = \frac{3}{5}\pi$ und wird *dicke Raute* genannt. Die rechte Kachel hat die Innenwinkel $36^\circ = \frac{1}{5}\pi$ und $144^\circ = \frac{4}{5}\pi$ und wird *dünne Raute* genannt.

Abbildung 5.4 enthält zwei Vierecke. Aufgrund ihrer Form wird das linke Viereck *Drache* (engl. kite) und das rechte Viereck *Pfeil* (engl. dart) genannt werden. Beide sind Drachenvierecke, d.h. sie haben zwei Paare gleich langer benachbarter Seiten. Die Winkel des Drachens sind 72° , 72° , 72° und 144° . Die Winkel des Pfeils sind 36° , 72° , 36° und $216^\circ = \frac{6}{5}\pi$. Damit ist der Pfeil ein

konkaves Drachenviereck.

Der Goldenen Schnitt τ ist definiert als $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803$. Elementargeometrisch lässt sich zeigen, dass das Verhältnis zwischen den Seitenlängen a und b dem Goldenen Schnitt entspricht: $\frac{a}{b} = \frac{a}{2\cos(72^\circ) \cdot a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau$. Später werden wir Drachen und Pfeile verwenden mit den Seitenlängen $b = 1$ und $a = \tau$.

Es ist offensichtlich, dass jede Raute als Protokachel periodische Parkettierungen zulässt. Dies trifft auch für die Drachen und die Pfeile zu, wie die beiden folgenden Abbildungen 5.5 und 5.6 zeigen.

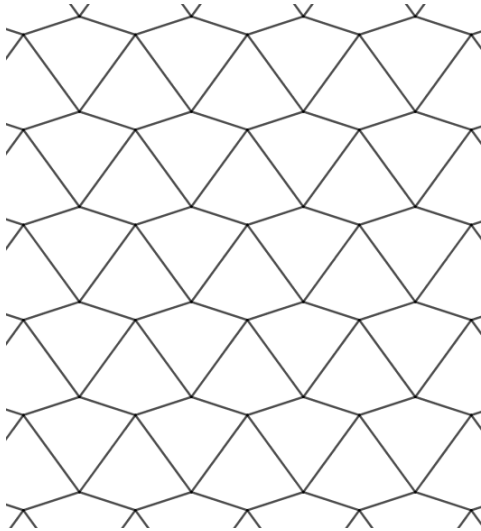


Abbildung 5.5: Ausschnitt einer periodischen Parkettierung mit Drachen

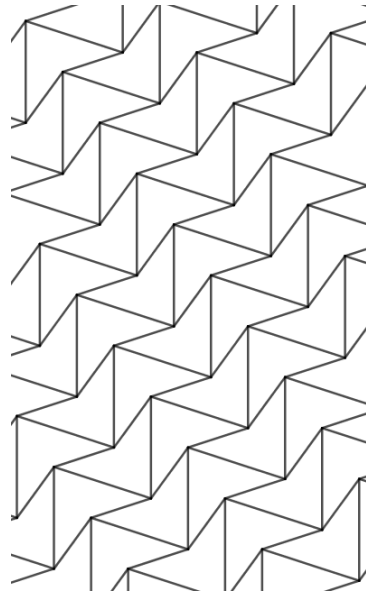


Abbildung 5.6: Ausschnitt einer periodischen Parkettierung mit Pfeilen

Die beiden angegebenen Mengen von Protokacheln, bestehend aus den beiden Rauten bzw. dem Drachen und Pfeil, lassen also jeweils sowohl periodische wie nicht-periodische Parkettierungen zu. Wie bereits früher angegeben, heißt eine Menge von Protokacheln *aperiodisch*, falls sie mindestens eine Parkettierung der Ebene zulässt und jede derartige Parkettierung der Ebene nicht-periodisch ist. Die beiden zuvor angegebenen Mengen von Protokacheln sind also nicht

aperiodisch. Sie stellen jedoch die Grundform für aperiodische Mengen von Protokacheln dar, die nach ihrem Entdecker Penrose-Parkettierungen genannt werden. Die Idee dabei ist, zusätzliche Anlegeregeln für diese Kacheln einzuführen, die gerade die periodischen Parkettierungen mit Rauten oder wie in den Abbildungen 5.5 und 5.6 mit den angegebenen Drachen und Pfeilen ausschließen.

Um zu erreichen, dass man die Rauten nur an bestimmten Kanten aneinanderlegen darf, kann man diese Kanten wie bei Puzzles mit zusätzlichen Zacken oder Einkerbungen versehen, siehe Abbildung 5.7. Genauso kann man mit dem Drachen und dem Pfeil verfahren.

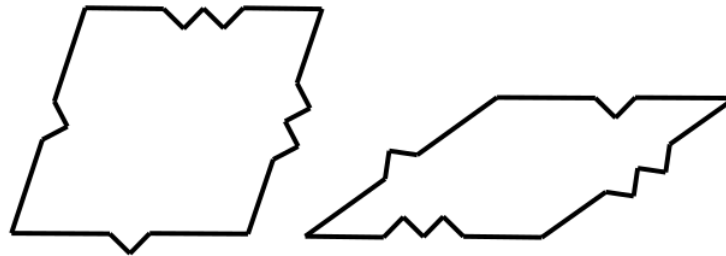


Abbildung 5.7: Rauten mit Zacken und Einkerbungen

Hierdurch erhält man wieder Polygone. Auf diese sind daher die bisherigen Definitionen und Konzepte anwendbar.

Für die bildliche Darstellung der resultierenden Parkettierungen sind jedoch diese Zacken und Einkerbungen etwas unhandlich. Eine alternative Darstellung ist möglich, indem man die Eckpunkte schwarz oder weiß färbt und den Kanten Richtungen gibt. Die Anlegeregeln besagt dann, dass nur Ecken gleicher Farbe aneinandergelegt werden dürfen und aneinanderstoßende Kanten dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben müssen. Die Protokacheln, die Abbildung 5.7 entsprechen, sehen dann wie folgt aus. Diese Menge von Protokacheln wurde von R. Penrose untersucht und trägt den Namen $P3$.

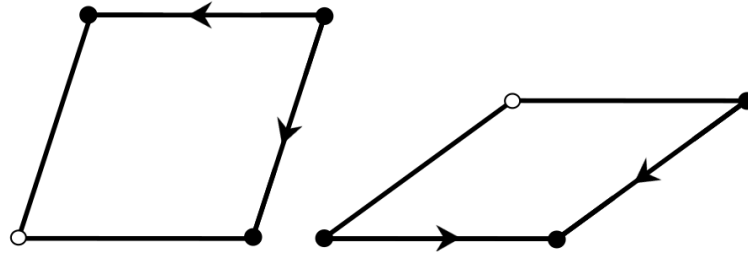


Abbildung 5.8: Protokacheln P3 mit gefärbten Ecken und gerichteten Kanten

Eine dritte Möglichkeit ist es, auf den Kacheln verschieden gefärbte Bögen anzubringen. Die Anlegeregeln besagt, dass nur Kanten gleicher Länge aneinandergelegt werden dürfen, so dass die Ecken übereinstimmen und außerdem die möglichen Farbmarkierungen von Punkten der Kanten ebenfalls übereinstimmen. Die gefärbten Protokacheln, die den Kacheln aus Abbildung 5.7 entsprechen, sind dann die folgenden in Abbildung 5.9. Dabei erfolgt die Färbung von Punkten auf den Bögen innerhalb der Kacheln nur aus optischen Gründen. Wesentlich ist nur die Färbung der Punkte auf den Kanten.

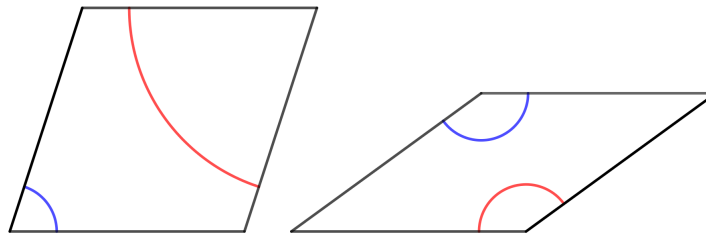


Abbildung 5.9: Rauten mit Farben

Es ist jedoch wichtig, dass sich nicht nur die Rauten mit Zacken und Einkerbungen, die Rauten mit Richtungen für die Kanten und Farben für die Ecken und die Rauten mit Farben für Elemente der Kanten bijektiv entsprechen, sondern auch, dass sich hierbei auch die Anlegeregeln eindeutig übertragen (eine Art Isomorphie). Dies weisen wir im Folgenden für alle Paare derartiger Kacheln und ihre Anlegemöglichkeiten nach, siehe Abbildung 5.10. Hierbei gibt es für die drei Sorten von Rauten jeweils 12 Fälle.

Die linke Spalte von Abbildung 5.10 enthält Rauten mit Zacken und Ein-

kerbungen, die mittlere enthält Rauten mit gerichteten Kanten und die rechte enthält Rauten mit Kantenfärbungen. In der linken Spalte betrachten wir zunächst die Anlegemöglichkeiten der dicken Raute mit Zacken an sich selbst. Dabei halten wir die oberste Kachel der linken Spalte in ihrer Ausrichtung fest und legen die zweite Kachel der Reihe nach unten, links, oben bzw. rechts an. Dies ergibt vier Fälle. Danach legen wir an die oberste, dicke Raute analog die dünne Raute mit Zacken an. Dies ergibt wieder vier Fälle. Schließlich legen wir zwei dünne Rauten aneinander. Wie zuvor halten wir die eine Raute in ihrer Ausrichtung fest und legen die andere nacheinander links, oben, rechts bzw. unten an. Dies ergibt die letzten vier Fälle.

Wir ersetzen nun in der ersten Zeile die beiden Rauten mit Zacken aus der ersten Spalte in der zweiten Spalte durch die beiden zugehörigen Rauten mit gerichteten Kanten und gefärbten Ecken bzw. in der dritten Spalte durch die beiden zugehörigen Rauten mit gefärbten Kanten. Die hierfür geforderte Anlegeregeln bleibt in beiden Fällen erhalten. Analog verfahren wir mit jeder der nachfolgenden Zeilen.

Schließlich ist zu überprüfen, dass es für die Rauten in der mittleren bzw. in der letzten Spalte keine weiteren Anlegemöglichkeiten gibt. Dafür betrachten wir zunächst in der mittleren bzw. rechten Spalte die oberste, dicke Raute. Es gibt genau die vier dargestellten Möglichkeiten, eine zweite dicke Raute an die Ausgangsraute anzulegen, und genau die vier dargestellten Möglichkeiten, eine zweite dünne Raute an die Ausgangsraute anzulegen. Ferner gibt es für zwei dünne Rauten genau die vier dargestellten Möglichkeiten, diese aneinanderzulegen.

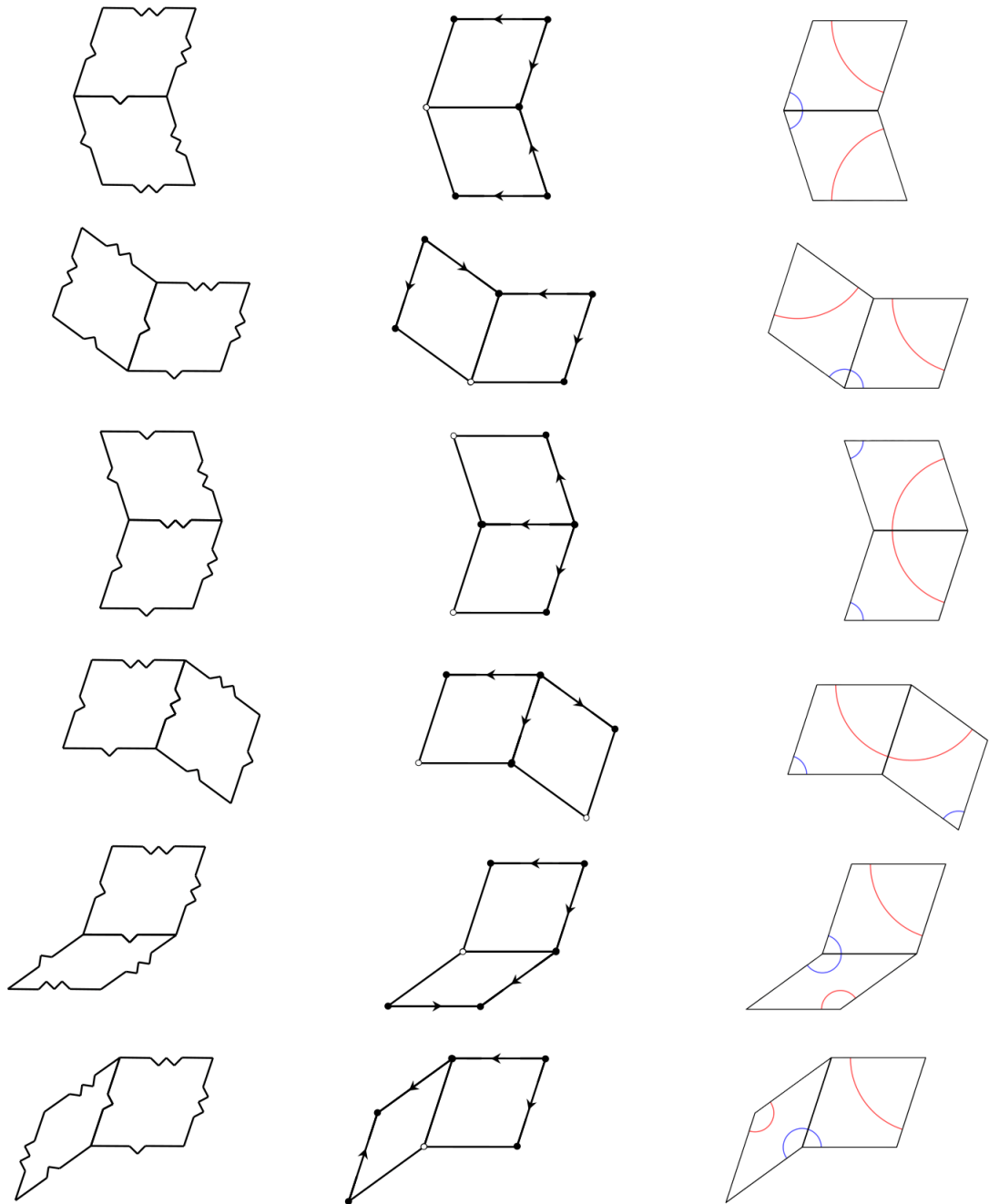
Damit ist nachgewiesen, dass sich die Rauten mit Zacken und Einkerbungen aus Abbildung 5.7, die Rauten mit gerichteten Kanten und gefärbten Eckpunkten aus Abbildung 5.8 und die Rauten mit teils gefärbten Kanten aus Abbildung 5.9 inklusive der jeweiligen Anlegeregeln in äquivalenter Weise entsprechen und sich jeweils in die andere Sorte bijektiv transformieren lassen.

Wir fügen noch zwei Bemerkungen zu Abbildung 5.10 an.

In den ersten beiden Zeilen erhält man in der ersten Spalte durch die beiden Anlegungen nach Rotation dasselbe Endresultat zusammengefügt aus zwei Kacheln. Das Gleiche tritt auch bei den zusammengesetzten Kacheln in Spalte zwei und Spalte drei auf, was natürlich auch aus unserem Resultat über die Äquivalenz der Darstellungen folgt. Bei unserem Verfahren entstehen diese beiden Zeilen, weil wir alle Anlegemöglichkeiten einer zweiten Kachel an die vier Seiten der obersten Kachel betrachten und deshalb müssen wir diese Anlegemöglichkeiten unterscheiden. Dasselbe Endresultat (nach Rotation) erhalten wir jeweils auch in Zeile 3 und 4, in Zeile 9 und 10 und in Zeile 11 und 12.

Die beiden zusammengesetzten Kacheln in Zeile 12 (bzw. 11) weisen noch eine Besonderheit auf. An den beiden Seiten mit jeweils zwei Zacken bzw. Einkerbungen lässt sich weder die dicke noch die dünne Raute mit Zacken und Einkerbungen einfügen. Daher können keine Parkettierungen der Ebene zwei derartig aneinandergefügte Kacheln enthalten. Jede andere Zusammensetzung von jeweils zwei Kacheln lässt sich an jeder Kante erweitern durch Anlegen einer weiteren Kachel und tritt sogar in einer Parkettierung der Ebene auf, wie man anhand der späteren Abbildung 5.13 überprüfen kann.

Im Folgenden werden wir vor allem die zweite Möglichkeit der Darstellung von Kacheln und ihrer Parkettierungen benutzen, um durch ihre Färbung der Ecken und die Richtung der Kanten die Anlegemöglichkeiten der Kacheln darzustellen.



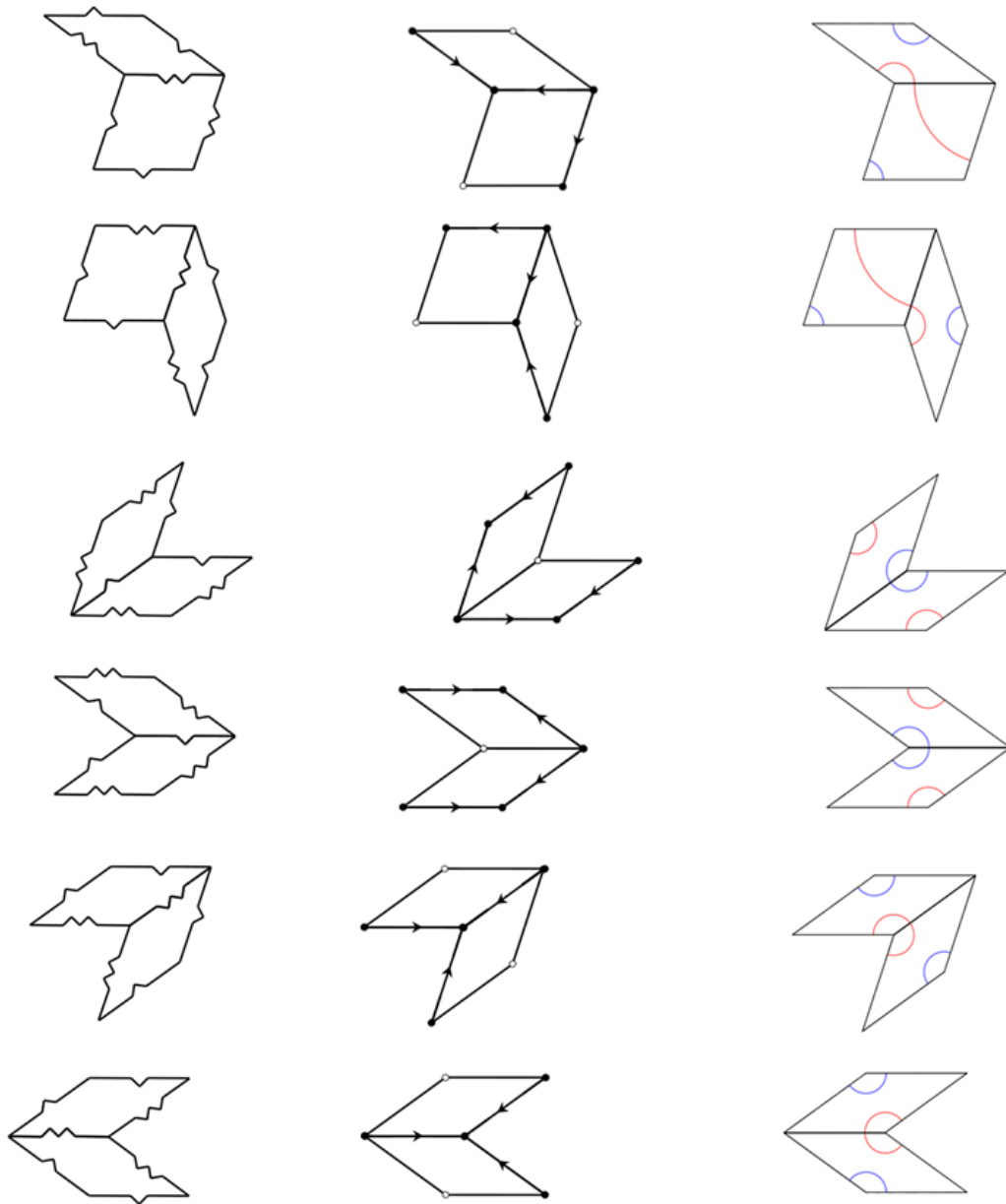


Abbildung 5.10: alle Anlegemöglichkeiten für drei Sorten von Rauten

Für Drachen und Pfeile genügt es, die Eckpunkte schwarz oder weiß zu färben. Die Anlegeregeln besagt, dass bei aneinanderstoßenden Kanten die Ecken jeweils übereinstimmen und gleich gefärbt sein müssen. Da bei Drachen und Pfeilen im Gegensatz zu den Rauten die Kanten unterschiedliche Längen haben, kön-

nen wir hier auf eine Richtung der Kanten verzichten. Wir merken nur an, dass es analog zum oben im Detail betrachteten Fall der Rauten auch für die Drachen und Pfeile möglich ist, ihre Kanten mit Zacken oder Einkerbungen zu versehen, so dass die entstehenden Polygone genau dieselben Anlegemöglichkeiten haben. Die beiden Protokacheln von Drachen und Pfeilen mit gefärbten Eckpunkten sind die Folgenden; dies ist die Menge $P2$.

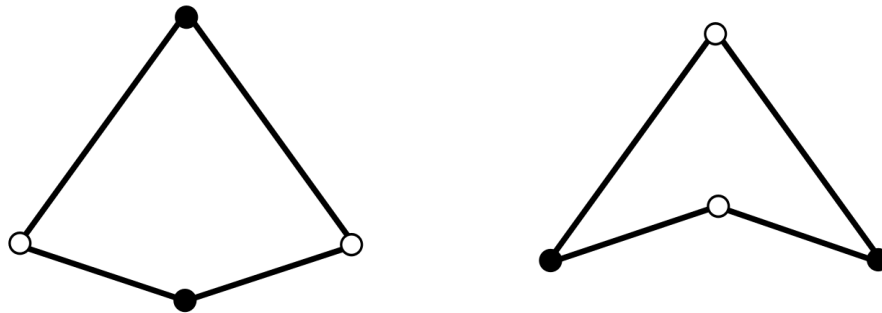


Abbildung 5.11: Protokacheln $P2$: Drachen und Pfeil mit gefärbten Ecken

In Abbildung 5.12 beschreiben wir alle Möglichkeiten, jeweils zwei Protokacheln aus Abbildung 5.11 entsprechend der Anlegeregeln aneinanderzulegen. Es gibt jeweils vier Möglichkeiten einen Drachen an einen anderen Drachen (siehe linke Spalte) bzw. einen Pfeil an einen Drachen (siehe mittlere Spalte) anzulegen, sowie zwei Möglichkeiten, einen Pfeil an einen anderen Pfeil anzulegen (siehe rechte Spalte).

In Spalte 1 erhält man in Zeile 1 und 2 bzw. in Zeile 3 und 4, ebenso in Spalte 3 nach Rotation jeweils dasselbe Resultat. Dies ergibt sich aus der Symmetrie der verwendeten Drachenvierecke. In Spalte 2 sind die Resultate von Zeile 1 und 2 bzw. von Zeile 3 und 4 spiegelsymmetrisch, aber nicht rotationssymmetrisch.

Alle diese 10 Resultate von Aneinanderlegungen können in einer Parkettierung der Ebene vorkommen, wie man anhand der späteren Abbildung 5.14 überprüfen kann.

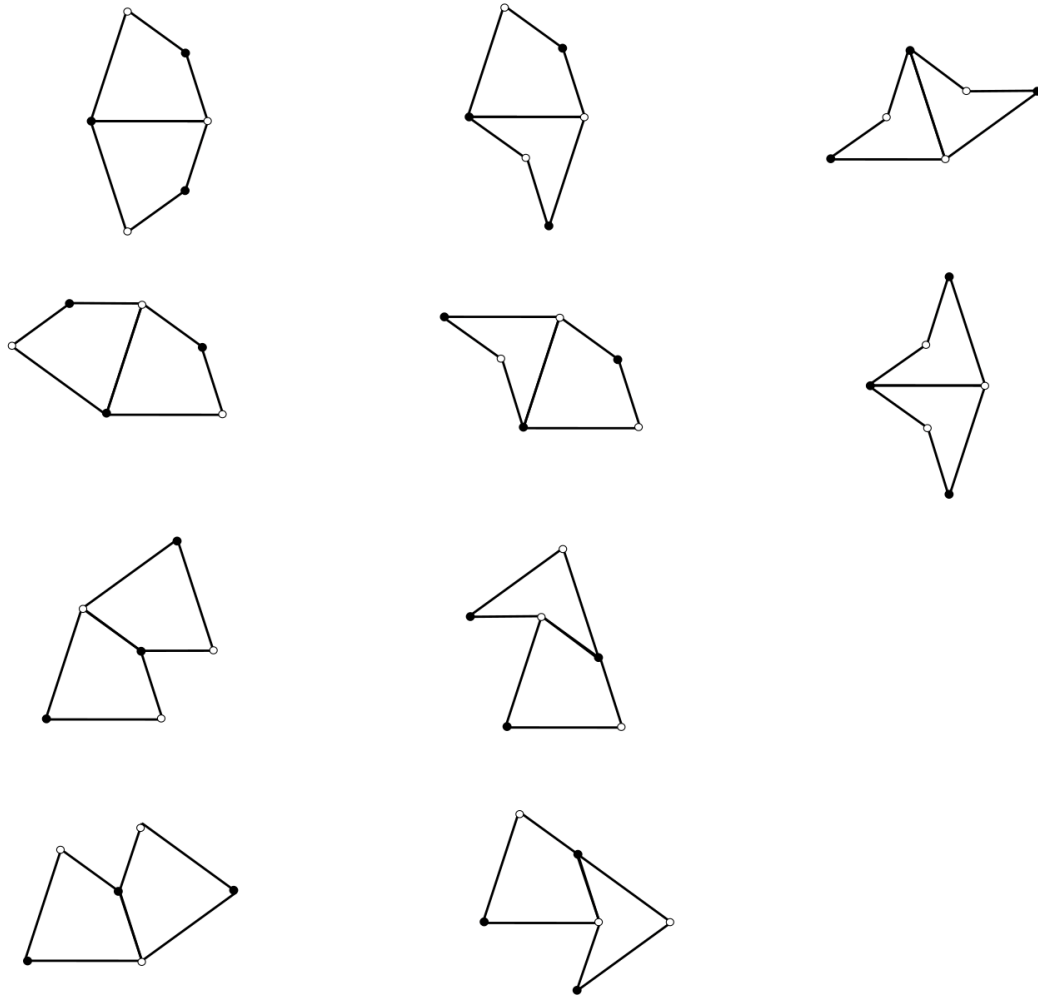


Abbildung 5.12: Anlegemöglichkeiten für Drachen und Pfeile aus P_2

Die beiden folgenden Abbildungen 5.13 und 5.14 zeigen dieselben Ausschnitte von Parkettierungen wie die Abbildungen 5.1 und 5.2, jedoch mit der Verwendung von Rauten aus P_3 bzw. Drachen und Pfeilen aus P_2 . Zur Verbesserung der Sichtbarkeit der gerichteten Kanten und der Färbungen der Ecken haben wir die Ausschnitte vergrößert dargestellt.

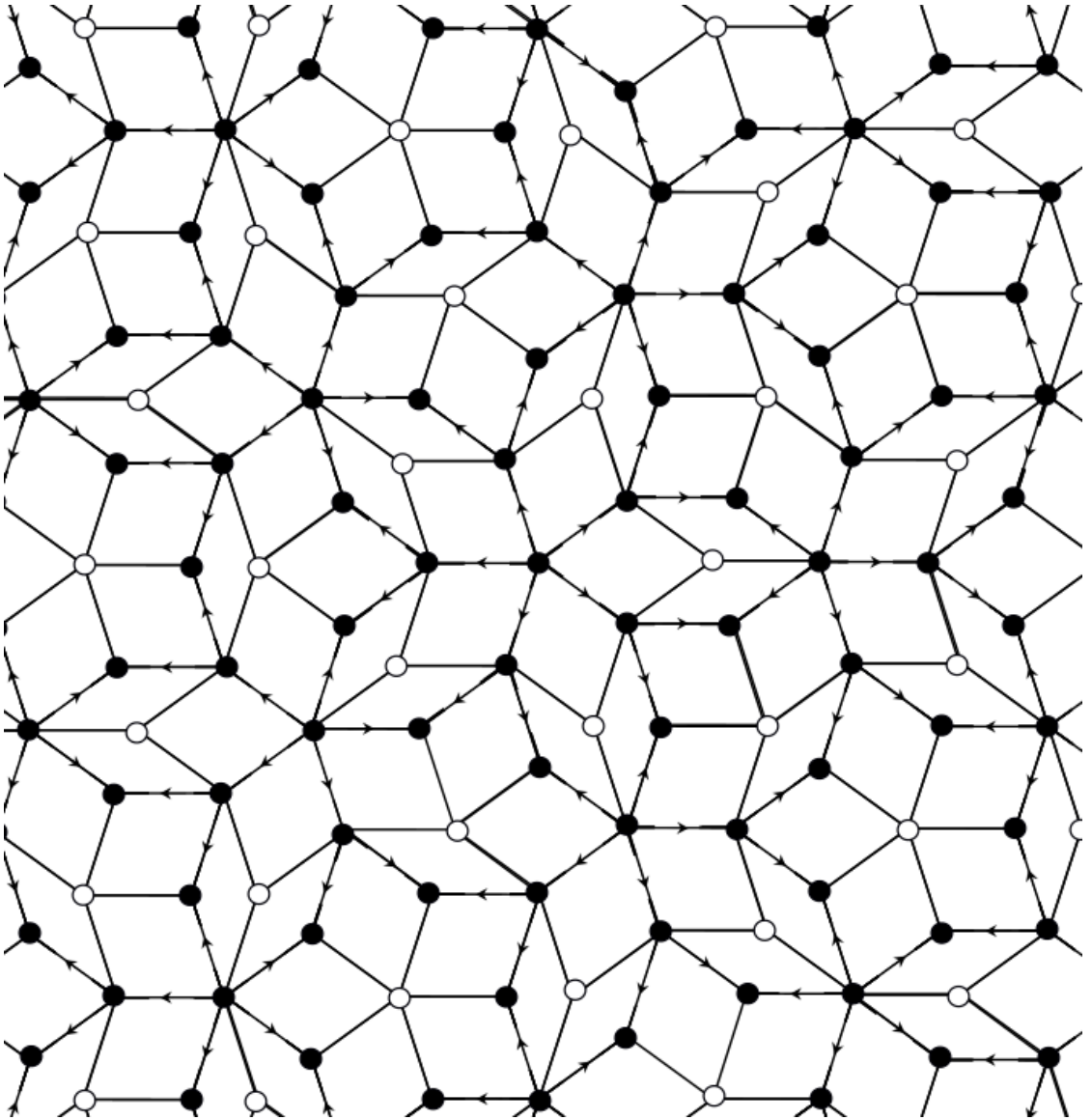
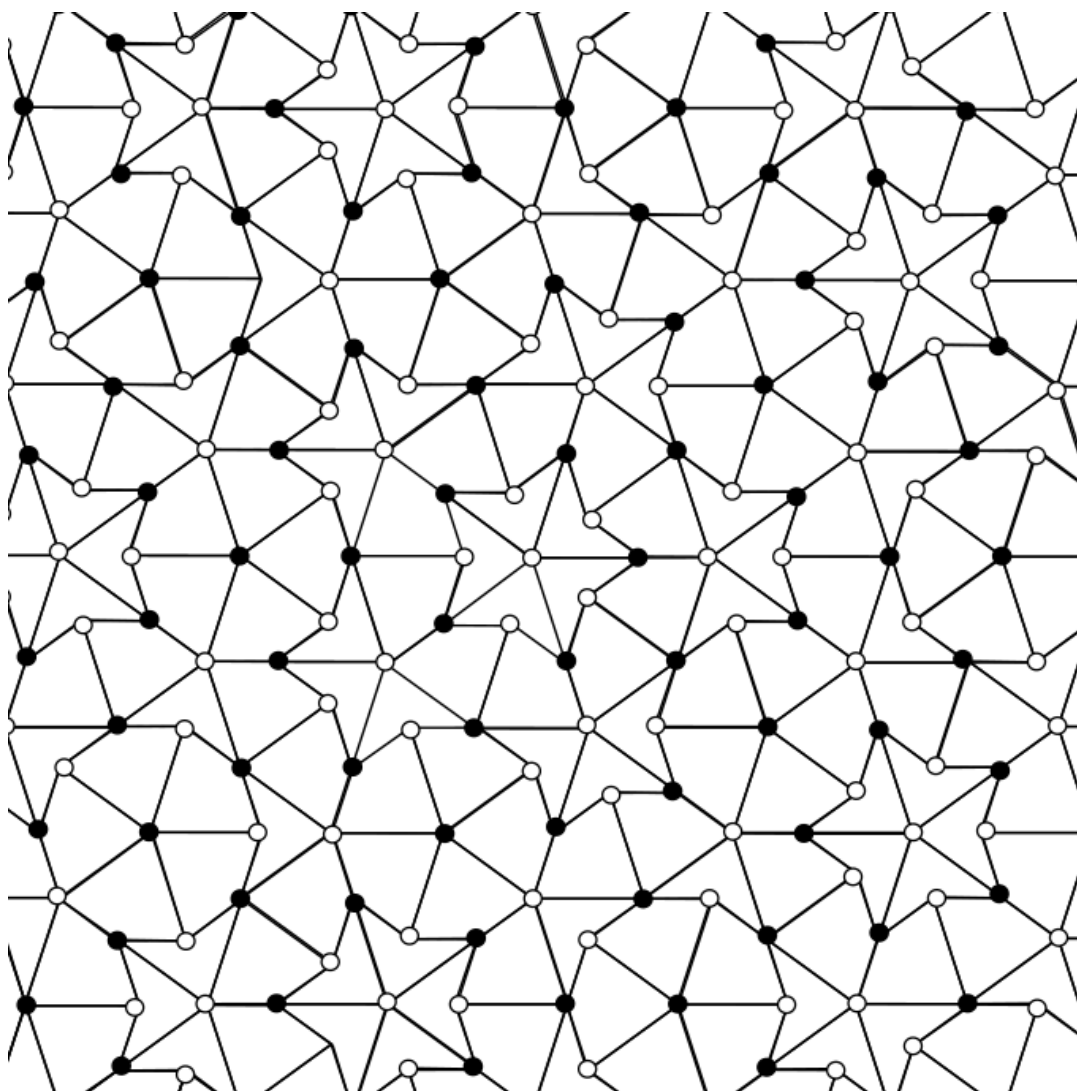


Abbildung 5.13: Ausschnitt einer Parkettierung über $P3$


 Abbildung 5.14: Ausschnitt einer Parkettierung über P_2

Dies veranschaulicht, dass die Mengen P_3 und P_2 von Protokacheln jeweils eine Parkettierung der Ebene zulassen. Der genaue Beweis hierfür verwendet spezielle Kompositionen und Dekompositionen für Parkettierungen mit Dreieckskacheln A,B, die wir als Nächstes einführen. Wir werden ferner sehen, dass P_2 und P_3 *aperiodische* Mengen von Protokacheln sind, d.h. sie lassen Parkettierungen der Ebene zu, aber *jede* Parkettierung der Ebene mit Kacheln aus P_2 bzw. P_3 ist nicht-periodisch. Dies ist ein Hauptergebnis von R. Penrose.

5.2 A- und B-Kacheln

In diesem Abschnitt führen wir spezielle gleichschenklige Dreiecke, die A- und B-Kacheln, ein und untersuchen ihre engen Zusammenhänge mit Drachen und Pfeilen sowie Rauten. In Kapitel 5.3 werden wir Komposition, Dekomposition und Inflation als Konstruktionsverfahren für partielle Parkettierungen definieren. Für diese Konstruktionsverfahren sind die A- und B-Kacheln essentiell.

Die neuen A- und B-Kacheln sind gleichschenklige Dreiecke mit farbigen Ecken und einer gerichteten Kante. Wir erhalten sie aus Drachen D und Pfeilen P mit gefärbten Ecken folgendermaßen.

Wir versehen die Symmetrieachsen in D bzw. P mit einer Richtung; diese zeigt auf die Ecke mit dem größten Innenwinkel. Danach spalten wir D bzw. P entlang dieser gerichteten Achsen in jeweils zwei Dreiecke auf. Dabei ergibt der Drache D die beiden Dreiecke A1 und A2 und der Pfeil P die beiden Dreiecke B1 und B2, siehe Abbildung 5.15.

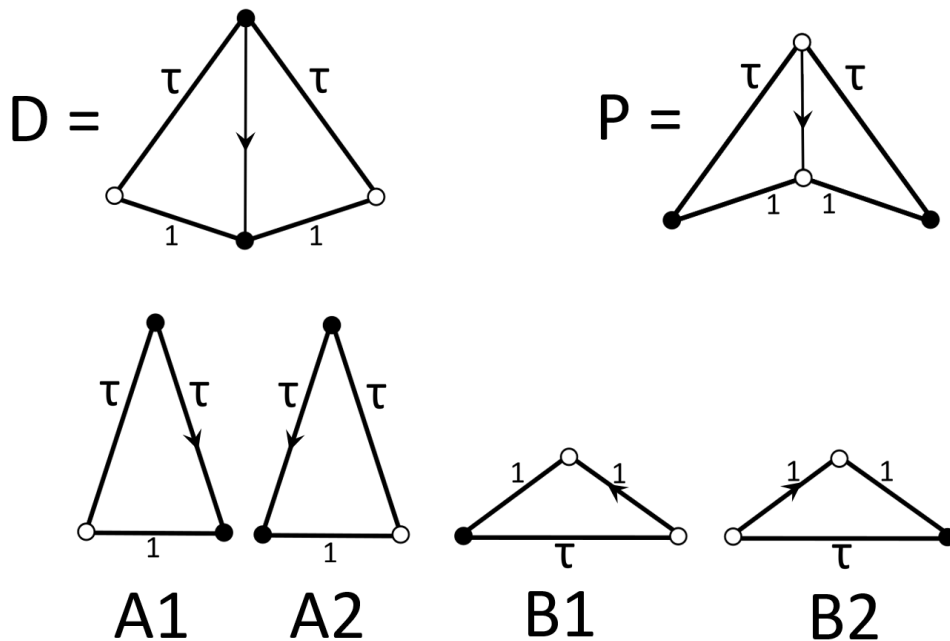


Abbildung 5.15: Zerlegung von D in A1-, A2- Kacheln bzw. P in B1-, B2-Kacheln

Offensichtlich sind $A1$ und $A2$ spiegelsymmetrisch, und ebenso $B1$ und $B2$. Im Folgenden sprechen wir anstatt von $A1$ - und $A2$ -Kacheln häufig kurz von A -Kacheln und analog anstatt von $B1$ - und $B2$ -Kacheln kurz von B -Kacheln. Entsprechend nennen wir eine partielle $\{A1, A2, B1, B2\}$ -Parkettierung auch kurz eine partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung oder partielle Parkettierung über $\{A, B\}$.

Durch diese Zerlegung können wir eine partielle Parkettierung aus D - und P -Kacheln in einfacher und eindeutiger Weise in eine partielle Parkettierung mit A - und B -Kacheln verwandeln. Dabei bleibt die durch die partielle $\{D, P\}$ -Parkettierung überdeckte Fläche invariant, da lediglich Linien in die vorhandenen Kacheln eingezeichnet werden.

Die Anlegeregeln für $\{A, B\}$ -Kacheln besagen, dass nur Ecken gleicher Farbe aneinandergelegt werden dürfen und aneinanderstoßende Kanten dieselbe Länge und, sofern vorhanden, dieselbe Richtung haben müssen.

Im Nachfolgenden werden wir obige Transformation von $\{D, P\}$ -Kacheln in $\{A, B\}$ -Kacheln und auch zurück nur für Parkettierungen der Ebene verwenden. Wir untersuchen sie jedoch zur genaueren Erläuterung dieser Transformationsprozesse auch für partielle Parkettierungen.

Nun betrachten wir eine partielle Parkettierung mit $\{A, B\}$ -Kacheln. Auf Grund der Anlegeregeln kann an die gerichtete Kante einer $A1$ -Kachel nur die gerichtete Kante einer $A2$ -Kachel anstoßen. Analog kann an die gerichtete Kante einer $B1$ -Kachel nur die gerichtete Kante einer $B2$ -Kachel anstoßen und Entsprechendes gilt auch für $A2$ - und $B2$ -Kacheln. Wir möchten jetzt alle aneinanderstoßenden Kanten mit Richtungen entfernen. Zwei an gerichteten Kanten anstoßende $A1$ - bzw. $A2$ -Kacheln ergeben dann eine D -Kachel und zwei an gerichteten Kanten anstoßende $B1$ - bzw. $B2$ -Kacheln ergeben dann eine P -Kachel. Es kann jedoch passieren, dass es am Rand einer partiellen Parkettierung eine $A1$ -Kachel (oder auch $A2$ -, $B1$ - oder $B2$ -Kachel) gibt, an dessen gerichteter Kante keine weitere Kachel anliegt. In diesem Fall ist es möglich, das Gegenstück dieser Kachel anzufügen. An eine derartige $A1$ -Kachel wird

eine $A2$ -Kachel angefügt, an eine derartige $B1$ -Kachel wird eine $B2$ -Kachel angefügt und entsprechend für $A2$ - und $B2$ -Kacheln. Hierdurch vergrößert sich das durch die partielle Parkettierung überdeckte Gebiet. Wenn wir nun alle aneinanderstoßenden Kanten mit Richtungen entfernen, erhalten wir in eindeutiger Weise eine partielle Parkettierung mit Drachen und Pfeilen mit gefärbten Ecken. Falls unsere partielle Parkettierung mit $\{A, B\}$ -Kacheln eine Parkettierung der gesamten Ebene ist, entsteht obiges Problem mit “Kacheln am Rand” nicht und wir erhalten direkt eine Parkettierung der Ebene mit Drachen und Pfeilen mit gefärbten Ecken.

Diese beiden Prozesse sind bijektiv und invers zueinander zwischen den partiellen Parkettierungen mit $\{D, P\}$ -Kacheln und den partiellen Parkettierungen mit $\{A, B\}$ -Kacheln, für die an jede gerichtete Kante einer Kachel eine entsprechende gerichtete Kante einer anderen Kachel anstößt: Falls wir eine partielle Parkettierung mit $\{D, P\}$ -Kacheln mit obigen Verfahren in eine partielle Parkettierung mit $\{A, B\}$ -Kacheln verwandeln und aus dieser wieder eine partielle Parkettierung mit $\{D, P\}$ -Kacheln konstruieren, so erhalten wir genau die Ausgangsparkettierung. Entsprechendes gilt, falls wir mit einer partiellen Parkettierung mit $\{A, B\}$ -Kacheln mit obiger Zusatzeigenschaft anfangen. Insbesondere für Parkettierungen der Ebene mit $\{D, P\}$ -Kacheln bzw. mit $\{A, B\}$ -Kacheln sind diese beiden Prozesse invers zueinander.

Wenn K ein Polygon ist, dessen Ecken schwarz oder weiß gefärbt sind, so sei K' das Polygon mit der umgedrehten Färbung der Ecken, d.h. in K schwarz gefärbte Ecken sind in K' weiß gefärbt und umgekehrt. Es gilt $K'' = K$. Falls in K eine Kante mit einer Richtung versehen ist, so übernehmen wir diese Richtung in K' . Hierbei folgen wir der Konstruktion in Quelle [2], Seite 540. Im Gegensatz hierzu wird in [3] beim Übergang von K zu K' die Richtung von Kanten umgedreht. Für das Endresultat ist dieser Unterschied nicht wichtig, denn wenn wir z.B. wie in Abbildung 5.15 zwei A -Kacheln bzw. zwei B -Kacheln an den gerichteten Kanten zusammenfügen, so entfernen wir diese gerichtete Kante, um den Drachen bzw. Pfeil zu erhalten. Diese beiden Drachenvierecke haben nur gefärbte Ecken. Ferner sei τK eine Kopie von K , die um dem Faktor

$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gestreckt ist.

Für die Kacheln $A1$, $A2$, $B1$, $B2$ aus Abbildung 5.15 erhalten wir nun die Kacheln $\tau A1'$, $\tau A2'$, $\tau B1'$, $\tau B2'$, wie in Abbildung 5.16 dargestellt.

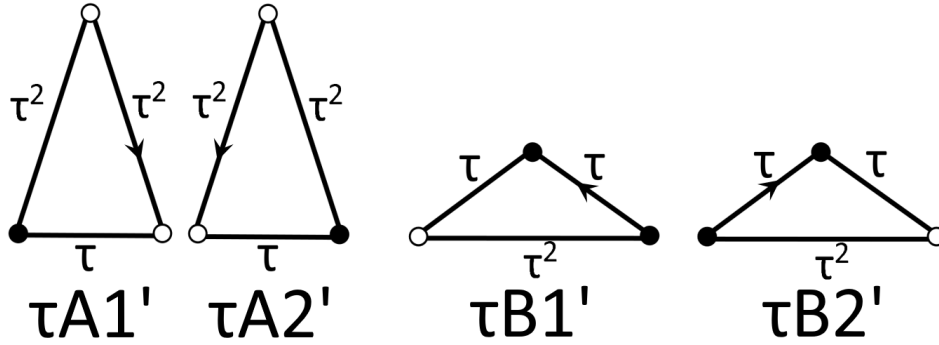


Abbildung 5.16: $\tau K'$ für die Dreieckskacheln K aus Abbildung 5.15

Offensichtlich sind $\tau A1'$ und $\tau A2'$ spiegelsymmetrisch, und ebenso $\tau B1'$ und $\tau B2'$. Im Folgenden sprechen wir anstatt von $\tau A1'$ - und $\tau A2'$ -Kacheln häufig kurz von $\tau A'$ -Kacheln und analog anstatt von $\tau B1'$ - und $\tau B2'$ -Kacheln kurz von $\tau B'$ -Kacheln.

Die Anlegeregeln für die Kacheln $\tau A1'$, $\tau A2'$, $\tau B1'$, $\tau B2'$ untereinander und auch mit den $\{A, B\}$ -Kacheln sind dieselben wie für die $\{A, B\}$ -Kacheln beschrieben.

Wir führen jetzt eine ähnliche Zerlegung wie in Abbildung 5.15 für Drachen und Pfeile mit gefärbten Ecken für die Protokacheln $P3$, d.h. für die Rauten mit gefärbten Ecken und gerichteten Kanten, ein. In beiden Rauten betrachten wir die Symmetrieachse, d.h. die Diagonale, die den eindeutig bestimmten Eckpunkt enthält, in dem die beiden gerichteten Kanten zusammentreffen. Diese Symmetrieachse zerlegt die dünne Raute S (wie schlank) in die beiden Dreiecke $A1$ und $A2$ und die dicke Raute F (wie fett) in die beiden Dreiecke $\tau B1'$ und $\tau B2'$, siehe Abbildung 5.17.

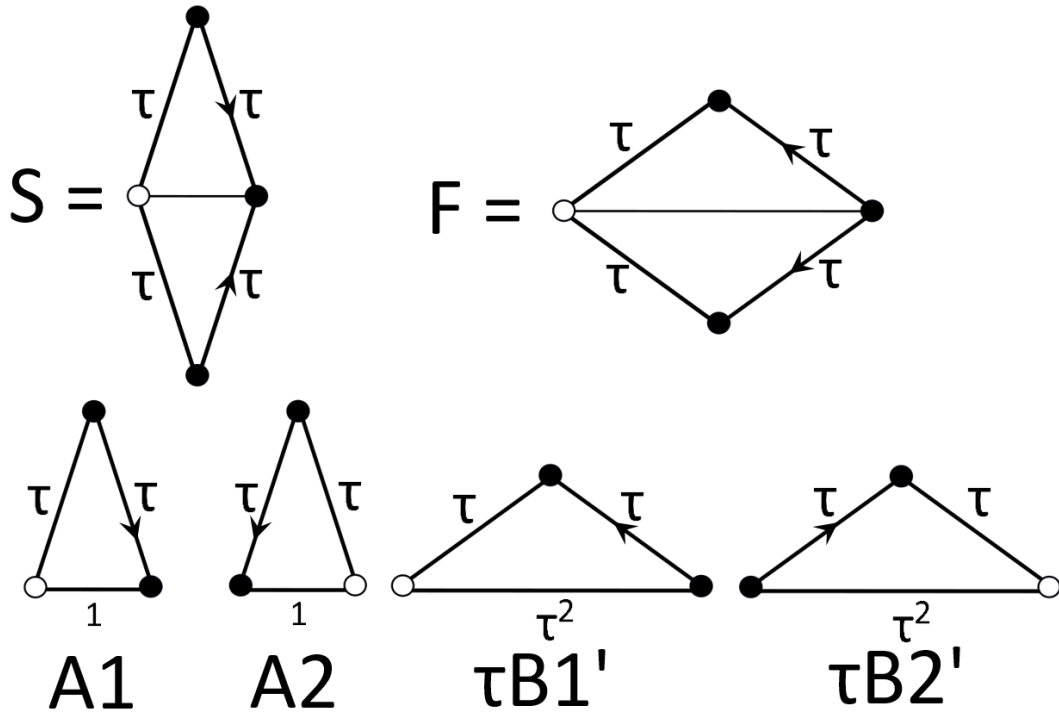


Abbildung 5.17: Zerlegung von S in $A1$ -, $A2$ - Kacheln bzw. F in $\tau B1'$ -, $\tau B2'$ - Kacheln

Durch diese Zerlegung können wir eine partielle Parkettierung aus S - und F -Kacheln in einfacher und eindeutiger Weise in eine partielle Parkettierung mit A - und $\tau B'$ -Kacheln verwandeln. Dabei bleibt die durch die partielle $\{S, F\}$ -Parkettierung überdeckte Fläche invariant, da lediglich Linien in die vorhandenen Kacheln eingezeichnet werden.

Nun betrachten wir eine Parkettierung der Ebene mit $\{A, \tau B'\}$ -Kacheln. Auf Grund der Anlegeregeln kann an die kurze Kante einer $A1$ -Kachel nur die kurze Kante einer $A2$ -Kachel anstoßen. Analog kann an die lange Kante einer $\tau B1'$ -Kachel nur die lange Kante einer $\tau B2'$ -Kachel anstoßen und Entsprechendes gilt auch für die $A2$ - und die $\tau B2'$ -Kacheln. Wir entfernen jetzt die kurzen Seiten der A -Kacheln und die langen Seiten der $\tau B'$ -Kacheln. Zwei an kurzen Kanten anstoßende $A1$ - bzw. $A2$ -Kacheln ergeben dann eine S -Kachel und zwei an langen Kanten anstoßende $\tau B1'$ - bzw. $\tau B2'$ -Kacheln ergeben dann eine F -Kachel. Hierdurch erhalten wir in eindeutiger Weise eine Parkettierung

der Ebene mit Rauten mit gefärbten Ecken und gerichteten Kanten.

Diese beiden Prozesse sind bijektiv und invers zueinander zwischen den Parkettierungen mit $\{S, F\}$ -Kacheln und den Parkettierungen mit $\{A, \tau B'\}$ -Kacheln: Falls wir eine Parkettierung mit $\{S, F\}$ -Kacheln mit obigen Verfahren in eine Parkettierung mit $\{A, \tau B'\}$ -Kacheln verwandeln und aus dieser wieder eine Parkettierung mit $\{S, F\}$ -Kacheln konstruieren, so erhalten wir genau die Ausgangsparkettierung. Entsprechendes gilt, falls wir mit einer Parkettierung mit $\{A, \tau B'\}$ -Kacheln anfangen.

Analog zu den partiellen Parkettierungen mit $\{D, P\}$ -Kacheln gibt es auch eine Bijektion zwischen partiellen Parkettierungen mit $\{S, F\}$ -Kacheln und den partiellen Parkettierungen mit $\{A, \tau B'\}$ -Kacheln, für die an jede kurze Kante einer A -Kachel eine entsprechende kurze Kante einer anderen A -Kachel bzw. an jede lange Kante einer $\tau B'$ -Kachel eine entsprechende lange Kante einer anderen $\tau B'$ -Kachel anstößt.

5.3 Inflation von partiellen $\{A, B\}$ -Parkettierungen

Wir führen zunächst vier Kompositionsverfahren ein, durch die man aus einer partiellen $\{A, B\}$ -Parkettierung eine neue partielle Parkettierung mit größeren Kacheln erhält.

Kompositionstrick 1 (CT1): von A, B zu $A, \tau B'$.

Wir fügen an die kurze Seite ohne Richtung einer $B1$ -Kachel die kurze Seite einer $A2$ -Kachel an und erhalten eine $\tau B1'$ -Kachel. Entsprechend fügen wir an die kurze Seite ohne Richtung einer $B2$ -Kachel die kurze Seite einer $A1$ -Kachel an und wir erhalten eine $\tau B2'$ -Kachel. Hierfür siehe Abbildung 5.18.

Man beachte, dass an eine $B1$ -Kachel entsprechend den Anlegeregeln keine $A1$ -Kachel und auch keine weitere $B1$ -Kachel angelegt werden kann. Außerdem kann an die kurze ungerichtete Seite einer $B1$ -Kachel eine $A2$ -Kachel nur in obiger Weise angelegt werden. Wir können an die kurze ungerichtete Seite

einer $B1$ -Kachel die kurze ungerichtete Seite einer $B2$ -Kachel anlegen. Danach können wir an die gerichtete Seite der $B1$ -Kachel nur die gerichtete Seite einer $B2$ -Kachel anlegen, erhalten dann jedoch eine partielle Parkettierung, wie in Abbildung 5.19 dargestellt. An der mit ζ markierten Stelle lässt sich jedoch keine $A1$ -, $A2$ -, $B1$ - oder $B2$ - Kachel einfügen, so dass sich diese partielle Parkettierung nicht zu einer Parkettierung der Ebene erweitern lässt.

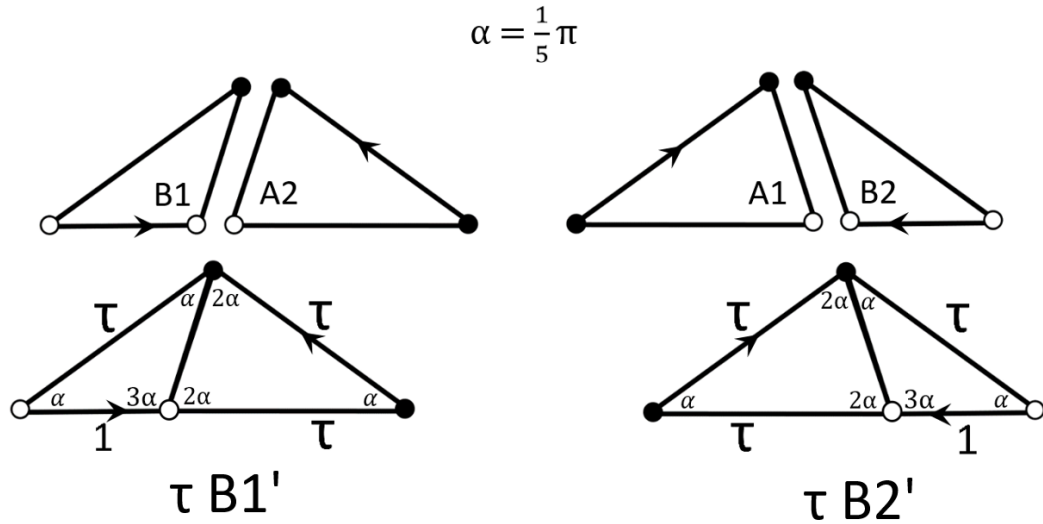


Abbildung 5.18: Kompositionstrick 1

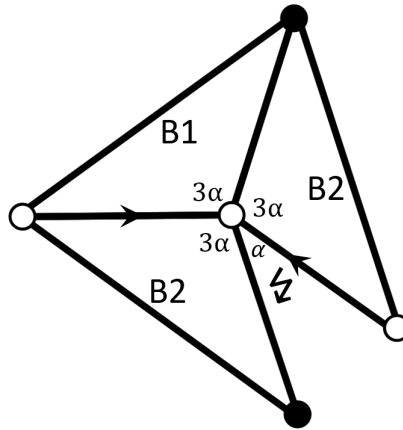


Abbildung 5.19: keine Parkettierung der Ebene möglich

In einer $\{A, B\}$ -Parkettierung der Ebene grenzt also an jeder $B1$ -Kachel an ihrer kurzen ungerichteten Seite die kurze Seite einer $A2$ -Kachel, wie in Abbildung 5.18 dargestellt. Entsprechendes gilt für $B2$ -Kacheln mit angrenzenden $A1$ -Kacheln. Wenn wir also auf eine $\{A, B\}$ -Parkettierung der Ebene obigen Kompositionstrick 1 anwenden, wird jede B -Kachel mit einer A -Kachel vereinigt und wir erhalten eine $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung.

Für $\{A', B'\}$ -Kacheln haben wir ein zum Kompositionstrick 1 völlig analoges Verfahren.

Kompositionstrick 1' (CT1'): von A', B' zu $A', \tau B$.

Wir fügen an die kurze Seite ohne Richtung einer $B1'$ -Kachel die kurze Seite einer $A2'$ -Kachel an und erhalten eine $\tau B1$ -Kachel. Entsprechend fügen wir an die kurze Seite ohne Richtung einer $B2'$ -Kachel die kurze Seite einer $A1'$ -Kachel an und wir erhalten eine $\tau B2$ -Kachel.

Wir untersuchen nun die Umkehrung von Kompositionstrick 1.

Dekompositionstrick 1 (DT1): von $A, \tau B'$ zu A, B .

Wir zerlegen eine $\tau B1'$ -Kachel in eine $B1$ - und eine $A2$ -Kachel bzw. eine $\tau B2'$ -Kachel in eine $B2$ - und eine $A1$ -Kachel, wie in Abbildung 5.18 dargestellt.

Aus Abbildung 5.18 und den Anlegeregeln ergibt sich, dass der Dekompositionstrick 1 die einzige Möglichkeit darstellt, eine $\tau B1'$ -Kachel in $\{A, B\}$ -Kacheln zu zerlegen. Das Gleiche gilt für $\tau B2'$ -Kacheln.

Mit dem Dekompositionstrick 1 erhalten wir aus einer partiellen $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung eine partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung. Dabei bleibt die durch die Parkettierung überdeckte Fläche unverändert. Wenn wir auf diese partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung den Kompositionstrick 1 anwenden, so erhalten wir die partielle Ausgangsparkettierung über $\{A, \tau B'\}$ zurück. Für Parkettierungen der Ebene sind diese beiden Transformationen mittels CT1 und DT1 bijektiv und invers zueinander: Wenn wir auf eine $\{A, B\}$ -Parkettierung der Ebene CT1

und auf die entstandene $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung DT1 anwenden, so erhalten wir die Ausgangsparkettierung über $\{A, B\}$ zurück. Entsprechend können wir auf eine $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung der Ebene DT1 gefolgt von CT1 anwenden und wir erhalten die Ausgangsparkettierung über $\{A, \tau B'\}$.

In Kapitel 5.2 haben wir gezeigt, dass sich $\{D, P\}$ -Parkettierungen in $\{A, B\}$ -Parkettierungen sowie $\{S, F\}$ -Parkettierungen in $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierungen (und jeweils umgekehrt) verwandeln lassen. Zusammen mit den obigen Transformationen CT1 und DT1 erhalten wir bijektive Transformationen zwischen $\{D, P\}$ -Parkettierungen und $\{S, F\}$ -Parkettierungen. Zum Beispiel kann man überprüfen, dass sich die Ausschnitte der Parkettierungen in den Abbildungen 5.13 und 5.14 entsprechen.

Für $\{A', \tau B\}$ -Kacheln haben wir ein zum Dekompositionstrick 1 völlig analoges Verfahren.

Dekompositionstrick 1' (DT1'): von $A', \tau B$ zu A', B' .

Wir zerlegen eine $\tau B1$ -Kachel in eine $B1'$ - und eine $A2'$ -Kachel bzw. eine $\tau B2$ -Kachel in eine $B2'$ - und eine $A1'$ -Kachel.

Wir untersuchen nun einen Kompositionstrick für $\{A, \tau B'\}$ -Kacheln.

Kompositionstrick 2 (CT2): von $A, \tau B'$ zu $\tau A', \tau B'$.

Wir fügen an die gerichtete Seite einer $A1$ -Kachel die gerichtete Seite einer $\tau B1'$ -Kachel an und erhalten eine $\tau A1'$ -Kachel. Entsprechend fügen wir an die gerichtete Seite einer $A2$ -Kachel die gerichtete Seite einer $\tau B2'$ -Kachel an und wir erhalten eine $\tau A2'$ -Kachel. Hierfür siehe Abbildung 5.20.

Man beachte, dass an die gerichtete Seite einer $A1$ -Kachel entsprechend den Anlegeregeln weder eine $A1$ - noch eine $\tau B2'$ -Kachel angelegt werden kann. Außerdem kann an die gerichtete Seite einer $A1$ -Kachel eine $\tau B1'$ -Kachel nur in obiger Weise angelegt werden. Wir können an die gerichtete Seite einer $A1$ -Kachel die gerichtete Seite einer $A2$ -Kachel anlegen. Danach können wir an

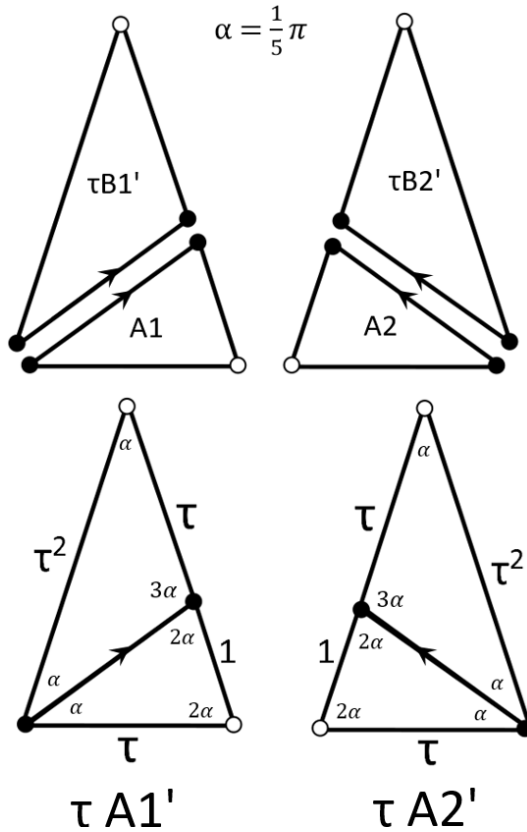


Abbildung 5.20: Kompositionstrick 2

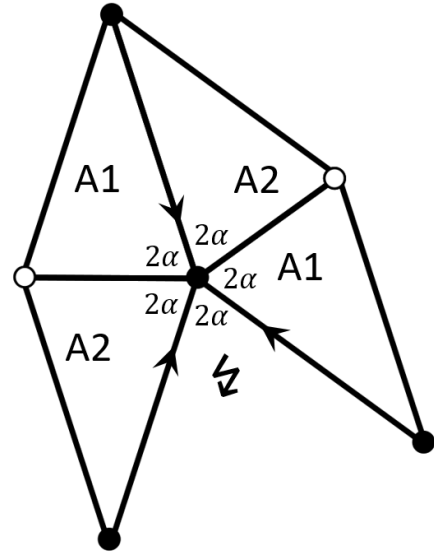


Abbildung 5.21: keine Parkettierung der Ebene möglich

die kurze Seite der $A1$ -Kachel nur die kurze Seite einer weiteren $A2$ -Kachel anlegen und an die kurze Seite der ersten $A2$ -Kachel können wir nur die kurze Seite einer weiteren $A1$ -Kachel anlegen. Damit erhalten wir jedoch eine partielle Parkettierung, wie in Abbildung 5.21 dargestellt. An der mit ζ markierten Stelle lässt sich jedoch keine $A1$ -, $A2$ -, $\tau B1'$ - oder $\tau B2'$ - Kachel einfügen, so dass sich diese partielle Parkettierung nicht zu einer Parkettierung der Ebene erweitern lässt.

In einer $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung der Ebene grenzt also an jeder $A1$ -Kachel an ihrer gerichteten Seite die gerichtete Seite einer $\tau B1'$ -Kachel, wie in Abbildung 5.20 dargestellt. Entsprechendes gilt für alle $A2$ -Kacheln mit angrenzenden $\tau B1'$ -Kacheln. Wenn wir also auf eine $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung der Ebene obi-

gen Kompositionstrick 2 anwenden, wird jede A -Kachel mit einer $\tau B'$ -Kachel vereinigt und wir erhalten eine $\{\tau A', \tau B'\}$ -Parkettierung.

Für $\{A', \tau B\}$ -Kacheln haben wir ein zum Kompositionstrick 2 völlig analoges Verfahren.

Kompositionstrick 2' (CT2'): von $A', \tau B$ zu $\tau A, \tau B$.

Wir fügen an die gerichtete Seite einer $A1'$ -Kachel die gerichtete Seite einer $\tau B1$ -Kachel an und erhalten eine $\tau A1$ -Kachel. Entsprechend fügen wir an die gerichtete Seite einer $A2'$ -Kachel die gerichtete Seite einer $\tau B2$ -Kachel an und wir erhalten eine $\tau A2$ -Kachel.

Wir untersuchen nun die Umkehrung von Kompositionstrick 2.

Dekompositionstrick 2 (DT2): von $\tau A', \tau B'$ zu $A, \tau B'$.

Wir zerlegen eine $\tau A1'$ -Kachel in eine $A1$ - und eine $\tau B1'$ -Kachel bzw. eine $\tau A2'$ -Kachel in eine $A2$ - und eine $\tau B2'$ -Kachel, wie in Abbildung 5.20 dargestellt.

Aus Abbildung 5.20 und den Anlegeregeln ergibt sich, dass der Dekompositionstrick 2 die einzige Möglichkeit darstellt, eine $\tau A1'$ -Kachel in $\{A, \tau B'\}$ -Kacheln zu zerlegen. Das Gleiche gilt für $\tau A2'$ -Kacheln.

Mit dem Dekompositionstrick 2 erhalten wir aus einer partiellen $\{\tau A', \tau B'\}$ -Parkettierung eine partielle $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung. Dabei bleibt die durch die Parkettierung überdeckte Fläche unverändert. Wenn wir auf diese partielle $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung den Kompositionstrick 2 anwenden, so erhalten wir die partielle Ausgangsparkettierung über $\{\tau A', \tau B'\}$ zurück. Für Parkettierungen der Ebene sind diese beiden Transformationen mittels CT2 und DT2 bijektiv und invers zueinander: Wenn wir auf eine $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung der Ebene CT2 und auf die entstandene $\{\tau A', \tau B'\}$ -Parkettierung DT2 anwenden, so erhalten wir die Ausgangsparkettierung über $\{A, \tau B'\}$ zurück. Entsprechend können wir auf eine $\{\tau A', \tau B'\}$ -Parkettierung der Ebene DT2 gefolgt von CT2

anwenden und wir erhalten die Ausgangsparkettierung über $\{\tau A', \tau B'\}$.

Für $\{\tau A, \tau B\}$ -Kacheln haben wir ein zum Dekompositionstrick 2 völlig analoges Verfahren.

Dekompositionstrick 2' (DT2'): von $\tau A, \tau B$ zu $A', \tau B$.

Wir zerlegen eine $\tau A1$ -Kachel in eine $A1'$ - und eine $\tau B1$ -Kachel bzw. eine $\tau A2$ -Kachel in eine $A2'$ - und eine $\tau B2$ -Kachel.

Alle oben eingeführten Kompositionstricks und Dekompositionstricks lassen sich entsprechend auf die um den Faktor τ^n gestreckten Kacheln ($\tau^n A, \tau^n B$, usw., $n \in \mathbb{Z}$) anwenden.

Wir können die Konstruktionsverfahren CT1 und CT2 auf Parkettierungen auch hintereinander anwenden und erhalten hierdurch ein spezielles Kompositionsverfahren, das wir auch kurz *Komposition* nennen.

Komposition: $A, B \xrightarrow{CT1} A, \tau B' \xrightarrow{CT2} \tau A', \tau B'$

Anschließend können wir auf die $\{\tau A', \tau B'\}$ -Kacheln den Kompositionstrick 1' anwenden und erhalten $\{\tau A', \tau^2 B\}$ -Kacheln. Wir können auf diese $\{\tau A', \tau^2 B\}$ -Kacheln den Kompositionstrick 2' anwenden und erhalten $\{\tau^2 A, \tau^2 B\}$ -Kacheln. Dies ergibt insgesamt die *Doppelkomposition*.

Doppelkomposition:

$A, B \xrightarrow{CT1} A, \tau B' \xrightarrow{CT2} \tau A', \tau B' \xrightarrow{CT1'} \tau A', \tau^2 B \xrightarrow{CT2'} \tau^2 A, \tau^2 B$

Wir können die Konstruktionsverfahren DT2' und DT1' auf partielle $\{A, B\}$ -Parkettierungen auch hintereinander anwenden und erhalten hierdurch die *Dekomposition*.

Dekomposition: $A, B \xrightarrow{DT2'} \tau^{-1} A', B \xrightarrow{DT1'} \tau^{-1} A', \tau^{-1} B'$

Anschaulich fügen wir hier in die Kacheln neue Kanten ein. Die nach der Dekomposition entstandenen $\{\tau^{-1}A', \tau^{-1}B'\}$ -Kacheln sind um den Faktor $\frac{1}{\tau}$ kleiner als die Ausgangskacheln. Die durch die partielle Parkettierung überdeckte Fläche bleibt dabei unverändert.

Wir definieren nun die *Strichoperation* ' für Parkettierungen. Falls $T = \{K_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine partielle Parkettierung ist mit Kacheln K_i , deren Ecken schwarz oder weiß gefärbt sind, so sei $T' = \{K'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. D.h. in T' wurde die Färbung der Ecken der Kacheln von T einfach umgedreht.

Wir können nun auf eine partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung obige Dekomposition anwenden, bei den resultierenden Kacheln die Färbung der Ecken umdrehen und diese um den Faktor τ strecken. So erhalten wir wieder eine partielle Parkettierung über $\{A, B\}$. Diese Konstruktion nennen wir *Inflation*.

Inflation:

$$A, B \xrightarrow{DT_2'} \tau^{-1}A', B \xrightarrow{DT_1'} \tau^{-1}A', \tau^{-1}B' \xrightarrow{'} \tau^{-1}A, \tau^{-1}B \xrightarrow{\tau} A, B$$

Das überdeckte Gebiet der nach der Inflation entstandenen partiellen $\{A, B\}$ -Parkettierung ist genau das um den Faktor τ gestreckte Gebiet der Ausgangsparkettierung über $\{A, B\}$. (Der Flächeninhalt dieses neuen Gebiets ist also um den Faktor τ^2 größer als der Flächeninhalt des Ausgangsgebiets.) Dies erklärt den Namen "Inflation".

Die folgende Abbildung 5.22 stellt den Prozess der Inflation schrittweise dar, wobei die partielle Ausgangsparkettierung nur aus einer einzigen $A1$ -Kachel besteht.

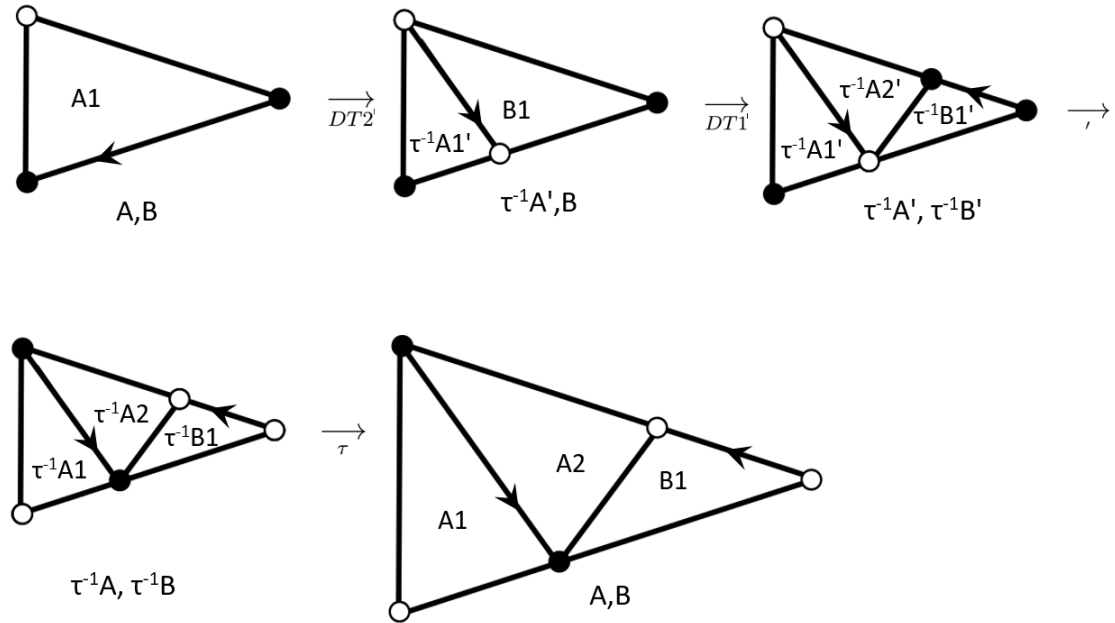


Abbildung 5.22: schrittweise Darstellung des Inflationsprozesses am Beispiel einer $A1$ -Kachel

5.4 Existenz von Penrose-Parkettierungen

Wir zeigen mit dem Existenzsatz 4.3, dass die $\{A, B\}$ -Kacheln eine Parkettierung der Ebene zulassen. Hieraus erhalten wir als Folgerung, dass auch die Penrosekacheln $P2$ und $P3$ eine Parkettierung der Ebene zulassen.

Satz 5.1. Es gibt eine Parkettierung der Ebene über $\{A, B\}$.

Beweis. Wir verwenden den Existenzsatz 4.3 mit $M = \{A1, A2, B1, B2\}$. Wir beginnen mit einer beliebigen partiellen $\{A, B\}$ -Parkettierung, z.B. mit der Kachel $A1$. Diese partielle Parkettierung überdeckt einen Kreis mit Radius $r > 0$. Wenn wir die Inflation n -mal anwenden, so erhalten wir eine partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung, die genau das um den Faktor τ^n gestreckte Gebiet, das von der partiellen Ausgangsparkettierung überdeckt wurde, und damit einen Kreis mit Radius $\tau^n \cdot r$ überdeckt. Wenn wir n genügend groß wählen und diese partielle Parkettierung geeignet verschieben, können wir jeden beliebigen Kreis D vollständig überdecken. Nach Satz 4.3 lässt M eine Parkettierung der

Ebene zu. □

Wir erhalten ebenfalls die Existenz von Parkettierungen der Ebene über $\{D, P\}$ und $\{F, S\}$.

Satz 5.2. (a) Es gibt eine Parkettierung der Ebene über $\{D, P\}$.

(b) Es gibt eine Parkettierung der Ebene über $\{F, S\}$.

Beweis. Nach Satz 5.1 gibt es eine Parkettierung der Ebene über $\{A, B\}$.

(a) Wie in Abschnitt 5.2 dargestellt, erhalten wir aus der $\{A, B\}$ -Parkettierung eine $\{D, P\}$ -Parkettierung der Ebene.

(b) Wie in Abschnitt 5.3 dargestellt, erhalten wir aus der $\{A, B\}$ -Parkettierung mittels CT1 eine $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung der Ebene und hieraus, wie in Abschnitt 5.2 dargestellt, eine $\{F, S\}$ -Parkettierung der Ebene. □

5.5 Aperiodizität von Penrose-Parkettierungen

Wir zeigen, dass $\{A1, A2, B1, B2\}$ eine aperiodische Menge von Protokacheln ist. Dies verwendet die vorher betrachteten Kompositionstricks 1, 2, 1', 2' und am Ende ein ähnliches Argument wie im Beweis von Satz 3.2. Als Folgerung erhalten wir, dass auch die Penrosekacheln $P2$ und $P3$ aperiodische Mengen sind.

Satz 5.3. Die Menge $M = \{A1, A2, B1, B2\}$ ist aperiodisch. Insbesondere hat jede Parkettierung über M nur die Identität als Translationssymmetrie.

Beweis. Nach Satz 5.1 gibt es eine Parkettierung der Ebene über M . Nun sei T eine beliebige Parkettierung der Ebene über M und sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Translationssymmetrie von T . Es gibt also einen Verschiebungsvektor $d \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = x + d$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $f = id$, d.h. $d = 0$.

Sei T_1 die $\{A, \tau B'\}$ -Parkettierung, die aus T durch den Kompositionstrick 1

entsteht. Wir behaupten, dass f auch eine Symmetrie von T_1 ist. Sei K eine beliebige Kachel von T_1 . Wir wollen zeigen, dass $f(K)$ eine Kachel von T_1 ist. Falls K eine A -Kachel ist, ist K eine A -Kachel von T , die nicht durch CT1 mit einer B -Kachel von T vereinigt wird. Also liegt an der kurzen Seite der A -Kachel K keine B -Kachel an. Da f eine Translationssymmetrie von T ist, gilt die entsprechende Aussage auch für die A -Kachel $f(K)$ von T . Daher wird $f(K)$ eine A -Kachel von T_1 .

Nun sei K eine $\tau B1'$ -Kachel von T_1 . Dann entsteht K durch die Vereinigung einer $B1$ -Kachel K_1 mit einer $A2$ -Kachel K_2 von T , die an ihren kurzen ungerichteten Seiten angrenzen. Dann ist $f(K_1)$ eine $B1$ -Kachel von T , die an die $A2$ -Kachel $f(K_2)$ von T angrenzt. Die Kachel $f(K_2)$ kann nur an die kurze ungerichtete Seite von $f(K_1)$ angrenzen. Die Konstruktion CT1 kann also die $B1$ -Kachel $f(K_1)$ nur mit der $A2$ -Kachel $f(K_2)$ vereinigen. Daher ist $f(K_1) \cup f(K_2)$ die in T_1 durch CT1 entstehende $\tau B1'$ -Kachel. Also ist $f(K) = f(K_1 \cup K_2) = f(K_1) \cup f(K_2)$ eine $\tau B1'$ -Kachel in T_1 .

Ist K eine $\tau B2'$ -Kachel von T_1 , so folgt analog, dass $f(K)$ ebenfalls eine $\tau B2'$ -Kachel von T_1 ist. Also ist f eine Symmetrie von T_1 .

Nun sei T_2 die Parkettierung, die aus T_1 durch den Kompositionstrick 2 entsteht. Wir behaupten, dass f auch eine Symmetrie von T_2 ist. Sei K eine beliebige Kachel von T_2 . Wir wollen zeigen, dass $f(K)$ eine Kachel von T_2 ist. Falls K eine $\tau B'$ -Kachel ist, ist K eine $\tau B'$ -Kachel von T_1 , die nicht durch CT2 mit einer A -Kachel von T vereinigt wird. Also liegt an der gerichteten Seite der $\tau B'$ -Kachel K keine A -Kachel an. Da f eine Translationssymmetrie von T_1 ist, gilt die entsprechende Aussage auch für die $\tau B'$ -Kachel $f(K)$ von T_1 . Daher wird $f(K)$ eine $\tau B'$ -Kachel von T_2 .

Nun sei K eine $\tau A1'$ -Kachel von T_2 . Dann entsteht K durch die Vereinigung einer $A1$ -Kachel K_1 mit einer $\tau B1'$ -Kachel K_2 von T_1 , die an ihren gerichteten Seiten angrenzen. Dann ist $f(K_1)$ eine $A1$ -Kachel von T_1 , die an die $\tau B1'$ -Kachel $f(K_2)$ von T_1 angrenzt. Die Kachel $f(K_2)$ kann nur an die gerichtete Seite von $f(K_1)$ angrenzen. Die Konstruktion CT2 kann also die $A1$ -Kachel $f(K_1)$ nur mit der $\tau B1'$ -Kachel $f(K_2)$ vereinigen. Daher ist $f(K_1) \cup f(K_2)$ die in T_2 durch CT2 entstehende $\tau A1'$ -Kachel. Also ist

$f(K) = f(K_1 \cup K_2) = f(K_1) \cup f(K_2)$ eine $\tau A1'$ -Kachel in T_2 . Ist K eine $\tau A2'$ -Kachel von T_2 , so folgt analog, dass $f(K)$ ebenfalls eine $\tau A2'$ -Kachel von T_2 ist. Also ist f eine Symmetrie von T_2 .

Die Kacheln von T_2 bestehen nur aus $\{\tau A', \tau B'\}$ -Kacheln. Wie in Unterkapitel 5.3 beschrieben, können wir auf diese Parkettierung T_2 in analoger Weise den Kompositionstrick 1' anwenden und erhalten eine $\{\tau A', \tau^2 B\}$ -Parkettierung T_3 . Analog zu oben folgt, dass f eine Symmetrie von T_3 ist. Wie in Unterkapitel 5.3 beschrieben, können wir auf die Parkettierung T_3 in analoger Weise den Kompositionstrick 2' anwenden und erhalten eine $\{\tau^2 A, \tau^2 B\}$ -Parkettierung T_4 . Analog zu oben folgt, dass f eine Symmetrie von T_4 ist.

Die $\{\tau^2 A, \tau^2 B\}$ -Kacheln der Parkettierung T_4 sind mit dem Streckungsfaktor τ^2 ähnlich zu den $\{A, B\}$ -Kacheln von T . Diese Parkettierung T_4 ist aus T durch Doppelkomposition entstanden. Wir haben gezeigt, dass f auch eine Symmetrie der durch Doppelkomposition entstehende Parkettierung ist. Wir setzen diese Konstruktion der Folge von Parkettierungen fort. Sei T_{4n} die durch n -fache Doppelkomposition aus T entstandene $\{\tau^{2n} A, \tau^{2n} B\}$ -Parkettierung. Dann ist f auch eine Symmetrie von T_{4n} .

Wir können nun analog zum Beweis von Satz 3.2 verfahren. Wenn n genügend groß ist, enthält T_{4n} eine Kachel K mit einem Element z im Inneren von K , so dass $f(z) = z + d$ auch im Inneren von K liegt. Da f eine Symmetrie von T_{4n} ist, ist $f(K)$ eine Kachel von T_{4n} . Also gilt $z + d \in K \cap f(K)$. Weil $z + d$ im Inneren von K und nicht auf einer Kante liegt, folgt $f(K) = K$. Aus $f(x) = x + d$ für alle $x \in K$ folgt $d = 0$, also $f = id$. \square

Nun zeigen wir, dass die Penrosekacheln $P2$ und $P3$ aperiodische Mengen sind.

Satz 5.4. (a) Die Menge $M = \{D, P\}$ ist aperiodisch.

(b) Die Menge $M' = \{F, S\}$ ist aperiodisch.

Beweis. (a) Nach Satz 5.2 (a) gibt es eine Parkettierung der Ebene über

M . Nun sei $T_{D,P}$ eine beliebige Parkettierung der Ebene über M und sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Translationssymmetrie von $T_{D,P}$. Sei T die zugehörige Parkettierung über $\{A, B\}$ -Kacheln, wie in Unterkapitel 5.2 beschrieben. Sei $D_1 \in T_{D,P}$ eine beliebige D -Kachel und $f(D_1) = D_2$ die Bildkachel in $T_{D,P}$. Betrachte die Zerlegung $D_1 = A_1 \cup A_2$, wie in Abbildung 5.15 von D_1 in die $A1$ -Kachel A_1 und die $A2$ -Kachel A_2 . Es ist $D_2 = f(D_1) = f(A_1) \cup f(A_2)$ und $f(A_1), f(A_2)$ zerlegen D_2 in A -Kacheln von T . Wenn man in der Kachel A_1 von ihrer Spitze ausgehend die Ecken im Uhrzeigersinn durchläuft, so erhält man zuerst einen schwarzen und dann den weißen Eckpunkt. Da f eine Translationssymmetrie ist, erhält f diesen Orientierungssinn. Es folgt, dass $f(A_1)$ eine $A1$ -Kachel und $f(A_2)$ eine $A2$ -Kachel ist. Also bildet f die $A1$ -Kacheln von T auf $A1$ -Kacheln und die $A2$ -Kacheln auf $A2$ -Kacheln ab. Ferner werden in $T_{D,P}$ die P -Kacheln für T in $B1$ - und $B2$ -Kacheln zerlegt. Da f in $T_{D,P}$ die P -Kacheln auf P -Kacheln abbildet, folgt analog, dass f die $B1$ -Kacheln von T auf $B1$ -Kacheln und die $B2$ -Kacheln auf $B2$ -Kacheln abbildet. Also ist f eine Translationssymmetrie von T . Nach Satz 5.3 ist $f = id$.

(b) Nach Satz 5.2 (b) gibt es eine Parkettierung der Ebene über M' . Nun sei $T_{F,S}$ eine beliebige Parkettierung der Ebene über M' und sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Translationssymmetrie von $T_{F,S}$. Sei T die zugehörige Parkettierung über $\{A, \tau B'\}$ -Kacheln, wie in Unterkapitel 5.2 beschrieben. Die S -Kacheln von $T_{F,S}$ werden für T (wie die D -Kacheln in (a)) in $A1$ - und $A2$ -Kacheln zerlegt. Wie in (a) folgt, dass f die $A1$ -Kacheln von T auf $A1$ -Kacheln und die $A2$ -Kacheln auf $A2$ -Kacheln abbildet. Ferner werden in $T_{F,S}$ die F -Kacheln für T in $\tau B1'$ - und $\tau B2'$ -Kacheln zerlegt (wie in (a) die P -Kacheln in $B1$ - und $B2$ -Kacheln). Analog folgt, dass f die $\tau B1'$ -Kacheln von T auf $\tau B1'$ -Kacheln und die $\tau B2'$ -Kacheln auf $\tau B2'$ -Kacheln abbildet. Also ist f eine Translationssymmetrie von T . Es ist T eine Parkettierung über $\{A, \tau B'\}$, wie die Parkettierung T_1 im Beweis des Satzes 5.3. Wir können nun für f wie im Beweis von Satz 5.3 vorgehen und erhalten $f = id$. \square

6 Darstellung durch 01-Folgen

Ziel dieses Kapitels ist ein Strukturresultat für Penrose-Parkettierungen: Wir können $\{D, P\}$ -Parkettierungen gewisse unendliche Folgen über $\{0, 1\}$ zuordnen. Umgekehrt zeigen wir, dass sich jede dieser Folgen durch eine $\{D, P\}$ -Parkettierung realisieren lässt. Hierfür gibt [2] nur eine Beweisskizze an und verweist auf die unpublizierte Arbeit von Robinson [4]. Wir vervollständigen diesen Beweis und zeigen insbesondere, dass die dort angegebenen Fälle tatsächlich die einzig möglichen sind.

Dies zeigt, dass es unendlich viele, sogar überabzählbar viele verschiedene nicht-periodische Parkettierungen der Ebene über $\{D, P\}$ gibt.

6.1 Konstruktion von $\{0,1\}$ -Folgen

Sei $T_{D,P}$ eine Parkettierung der Ebene über $\{D, P\}$ und sei $p \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt der Ebene, der auf keiner Kante einer D - oder P - Kachel oder auf ihren Spiegelachsen liegt. Wir nennen dann das Paar $(T_{D,P}, p)$ eine *punktierte Parkettierung* der Ebene (über $\{D, P\}$). Wir definieren nun die $(T_{D,P}, p)$ zugeordnete *Indexfolge* $I(T_{D,P}, p) = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ mit $x_i \in \{0, 1\}$ (für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) mittels einer Folge von Parkettierungen T_0, T_1, T_2, \dots folgendermaßen.

Konstruktion 6.1. Sei $T = T_0$ die in Abschnitt 5.2 beschriebene, der Parkettierung $T_{D,P}$ entsprechende $\{A1, A2, B1, B2\}$ -Parkettierung. Dabei werden die Drachen in $A1$ -, $A2$ - Kacheln und die Pfeile in $B1$ -, $B2$ - Kacheln, jeweils mit gefärbten Ecken und gerichteten Kanten, zerlegt. Nun sei

T_1 die Parkettierung über $\{A, \tau B'\}$, die aus T durch den Kompositionstrick 1 entsteht,

T_2 die Parkettierung über $\{\tau A', \tau B'\}$, die aus T_1 durch den Kompositionstrick

2 entsteht,

T_3 die Parkettierung über $\{\tau A', \tau^2 B\}$, die aus T_2 durch den Kompositionstrick 1' entsteht,

T_4 die Parkettierung über $\{\tau^2 A, \tau^2 B\}$, die aus T_3 durch den Kompositionstrick 2' entsteht.

Wir verfahren induktiv analog zu oben wie folgt: Für ein $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei die Parkettierung T_{4i} über $\{\tau^{2i} A, \tau^{2i} B\}$ definiert. Dann sei T_{4i+1} die Parkettierung über $\{\tau^{2i} A, \tau^{2i+1} B'\}$, die aus T_{4i} durch den Kompositionstrick 1 entsteht. Als nächstes sei T_{4i+2} die Parkettierung über $\{\tau^{2i+1} A', \tau^{2i+1} B'\}$, die aus T_{4i+1} durch den Kompositionstrick 2 entsteht. Nun sei T_{4i+3} die Parkettierung über $\{\tau^{2i+1} A', \tau^{2i+2} B\}$, die aus T_{4i+2} durch den Kompositionstrick 1' entsteht. Schließlich sei T_{4i+4} die Parkettierung über $\{\tau^{2i+2} A, \tau^{2i+2} B\}$, die aus T_{4i+3} durch den Kompositionstrick 2' entsteht.

Anschaulich setzen wir nun $x_n = 1$, falls p in einer flächenmäßig kleinen Kachel von T_n liegt, und $x_n = 0$, falls p in einer flächenmäßig großen Kachel von T_n liegt. Genauer: Für $i \geq 0$ setze

$x_{4i} = 0$, falls p in einer $\tau^{2i} A$ -Kachel von T_{4i} liegt,

$x_{4i} = 1$, falls p in einer $\tau^{2i} B$ -Kachel von T_{4i} liegt,

$x_{4i+1} = 0$, falls p in einer $\tau^{2i+1} B'$ -Kachel von T_{4i+1} liegt,

$x_{4i+1} = 1$, falls p in einer $\tau^{2i} A$ -Kachel von T_{4i+1} liegt,

$x_{4i+2} = 0$, falls p in einer $\tau^{2i+1} A'$ -Kachel von T_{4i+2} liegt,

$x_{4i+2} = 1$, falls p in einer $\tau^{2i+1} B'$ -Kachel von T_{4i+2} liegt,

$x_{4i+3} = 0$, falls p in einer $\tau^{2i+2} B$ -Kachel von T_{4i+3} liegt,

$x_{4i+3} = 1$, falls p in einer $\tau^{2i+1} A'$ -Kachel von T_{4i+3} liegt.

Nun sei die der punktierten Parkettierung $(T_{D,P}, p)$ zugeordnete Indexfolge $I(T_{D,P}, p) = (x_0, x_1, x_2, \dots)$.

Wir erläutern diese Konstruktion an dem folgenden Beispiel.

Beispiel 6.2. Gegeben sei eine punktierte Parkettierung $(T_{D,P}, p)$, wie in Ab-

bildung 6.1 a). Der Punkt p ist blau dargestellt und liegt in einem Pfeil. Die entsprechende $\{A, B\}$ -Parkettierung $T = T_0$ ist in Teil b) dargestellt. Zur Vereinfachung sind hier und im Folgenden die Richtungen der Kanten weggelassen. Es ist $x_0 = 1$, da p in einer B -Kachel liegt. Durch CT1 erhalten wir die Parkettierung T_1 , wie in Teil c) dargestellt. Der Punkt p liegt in einer $\tau B'$ -Kachel, also ist $x_1 = 0$. Durch CT2 erhalten wir die Parkettierung T_2 , wie in Teil d) dargestellt. Da p in einer $\tau A'$ -Kachel liegt, ist $x_2 = 0$. Nun ergibt CT1' die Parkettierung T_3 , siehe Teil e). Es ist $x_3 = 0$, weil p in einer $\tau^2 B$ -Kachel liegt. Die Anwendung von CT2' ergibt die Parkettierung T_4 , wie in Teil f) dargestellt. Der Punkt p liegt unverändert in der $\tau^2 B$ -Kachel, also ist $x_4 = 1$. Dieses Verfahren wird wie in Konstruktion 6.1 beschrieben fortgesetzt. Wir erhalten die Indexfolge $I(T_{D,P}, p) = (1, 0, 0, 0, 1, \dots)$.

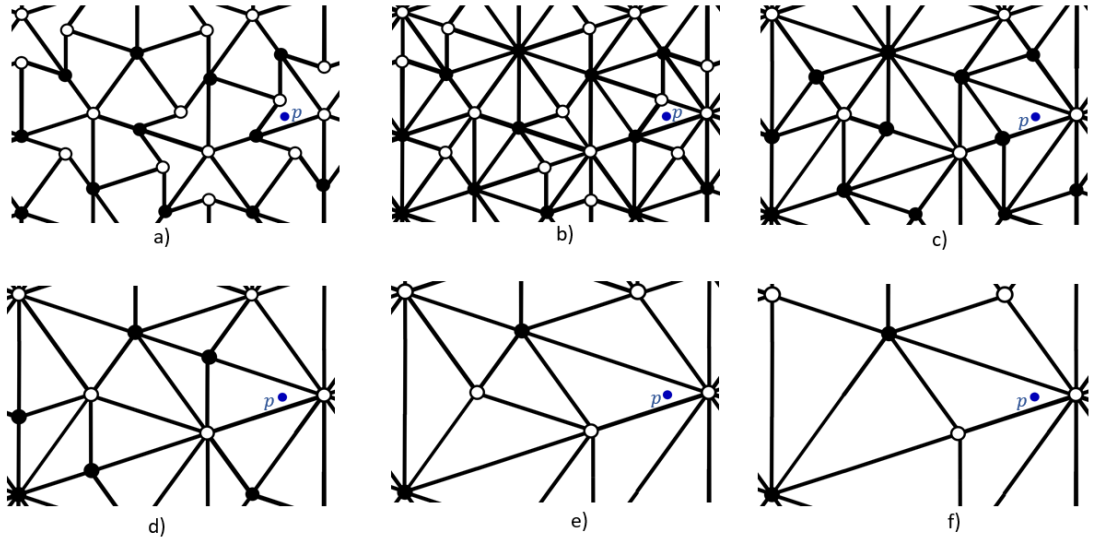


Abbildung 6.1: schrittweise Darstellung der Parkettierungen $T_{D,P}$, T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4

Wir zeigen nun eine wichtige Eigenschaft der zugeordneten Indexfolgen.

Proposition 6.3. Sei $(T_{D,P}, p)$ eine punktierte $\{D, P\}$ -Parkettierung der Ebene und $I(T_{D,P}, p) = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ die zugeordnete Indexfolge. Dann enthält $I(T_{D,P}, p)$ keine zwei direkt aufeinanderfolgende Einsen. Das heißt, wenn $x_n = 1$ ist, dann ist $x_{n+1} = 0$, für alle $n \geq 0$.

Beweis. Sei $n \geq 0$ und $x_n = 1$.

Wenn $n = 4i$ für ein $i \geq 0$ ist, so liegt nach Konstruktion 6.1 der Punkt p in einer $\tau^{2i}B$ -Kachel von T_{4i} und T_{4i+1} entsteht aus T_{4i} durch Anwendung von CT1. Dabei fügen wir diese $\tau^{2i}B$ -Kachel mit einer $\tau^{2i}A$ -Kachel zu einer $\tau^{2i+1}B'$ -Kachel zusammen. Diese $\tau^{2i+1}B'$ -Kachel enthält p , also ist $x_{4i+1} = 0$.

Wenn $n = 4i + 1$ für ein $i \geq 0$ ist, so liegt nach Konstruktion der Indexfolge der Punkt p in einer $\tau^{2i}A$ -Kachel von T_{4i+1} und T_{4i+2} entsteht aus T_{4i+1} durch Anwendung von CT2. Dabei fügen wir diese $\tau^{2i}A$ -Kachel mit einer $\tau^{2i+1}B'$ -Kachel zu einer $\tau^{2i+1}A'$ -Kachel zusammen. Diese $\tau^{2i+1}A'$ -Kachel enthält p , also ist $x_{2i+2} = 0$.

Falls $n = 4i + 2$ oder $n = 4i + 3$ für ein $i \geq 0$ ist, so verfahren wir mit Anwendung von CT1' bzw. CT2' analog zu oben und erhalten ebenfalls $x_{n+1} = 0$.

□

6.2 Konstruktion von Parkettierungen

Wir zeigen nun eine Umkehrung von Konstruktion 6.1, nämlich, dass jede $\{0, 1\}$ -Folge mit der in Proposition 6.3 beschriebenen Eigenschaft die Indexfolge einer punktierten Parkettierung ist.

Im Beweis von Satz 6.4 wird eine partielle Parkettierung T_I über $\{A, B\}$ konstruiert. Nach Grünbaum und Shephard [2] überdeckt T_I entweder eine Ebene, eine Halbebene oder einen Sektor der Ebene mit dem Winkel $\frac{\pi}{5}$. Hierfür gibt [2] jedoch leider keinen Beweis an. Die Autoren verweisen auf die unpublizierten Notes von Robinson [4]. Daher geben wir später einen Beweis für diese Aussage an.

Satz 6.4. Sei $I = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ eine unendliche Folge von Nullen und Einsen, in der keine zwei Einsen direkt aufeinanderfolgen. Dann ist $I = I(T_{D,P}, p)$ für eine punktierte $\{D, P\}$ -Parkettierung $(T_{D,P}, p)$ der Ebene.

Beweis. Falls $x_0 = 0$, wähle eine $A1$ -Kachel X_0 in \mathbb{R}^2 . Falls $x_0 = 1$, wähle eine $B1$ -Kachel X_0 in \mathbb{R}^2 . Nun wähle $p \in \mathbb{R}^2$ im Inneren von X_0 beliebig.

Falls $x_1 = 1$ (dies ist nur möglich, falls $x_0 = 0$), setze $Y_1 = \emptyset$ und $X_1 = X_0$. Falls $x_1 = 0$, so verfahren wir wie im Kompositionstrick 1. Wenn X_0 eine $A1$ -Kachel ist, so legen wir an die kurze Seite von X_0 eine $B2$ -Kachel Y_1 an. Es ist $X_1 = X_0 \cup Y_1$ eine $\tau B2'$ -Kachel. Wenn X_0 eine $B1$ -Kachel ist, so legen wir an die kurze ungerichtete Seite von X_0 eine $A2$ -Kachel Y_1 an. Dann ist $X_1 = X_0 \cup Y_1$ eine $\tau B1'$ -Kachel. In jedem Fall ist $X_1 = X_0 \cup Y_1$, und X_1 ist eine $A1$ -Kachel oder $\tau B'$ -Kachel.

Falls $x_2 = 1$ (dies ist nur möglich, falls $x_1 = 0$), setze $Y_2 = \emptyset$ und $X_2 = X_1$. Falls $x_2 = 0$, so verfahren wir wie im Kompositionstrick 2. Wenn X_1 eine $A1$ -Kachel ist, so legen wir an die gerichtete Seite von X_1 eine $\tau B1'$ -Kachel Y_2 an. Es ist $X_2 = X_1 \cup Y_2$ eine $\tau A1'$ -Kachel. Wenn X_1 eine $\tau B'$ -Kachel ist, so legen wir an die gerichtete Seite von X_1 eine A -Kachel Y_2 an. Dann ist $X_2 = X_1 \cup Y_2$ eine $\tau A'$ -Kachel. In jedem Fall ist $X_2 = X_1 \cup Y_2$ und X_2 ist eine $\tau A'$ -Kachel oder $\tau B'$ -Kachel.

Für x_3 verfahren wir analog zur Konstruktion für x_1 . Falls $x_3 = 1$ (dies ist nur möglich, falls $x_2 = 0$), setze $Y_3 = \emptyset$ und $X_3 = X_2$. Falls $x_3 = 0$, so verfahren wir wie im Kompositionstrick 1' und legen an X_2 eine $\tau A'$ - oder $\tau B'$ -Kachel Y_3 an. Es ist $X_3 = X_2 \cup Y_3$ eine $\tau A'$ -Kachel oder $\tau^2 B$ -Kachel.

Für x_4 verfahren wir analog zur Konstruktion für x_2 . Falls $x_4 = 1$ (dies ist nur möglich, falls $x_3 = 0$), setze $Y_4 = \emptyset$ und $X_4 = X_3$. Falls $x_4 = 0$, so verfahren wir wie im Kompositionstrick 2' und legen an X_3 eine $\tau A'$ - oder $\tau^2 B$ -Kachel Y_4 an. Es ist $X_4 = X_3 \cup Y_4$ eine $\tau^2 A$ -Kachel oder $\tau^2 B$ -Kachel.

Für x_5 verfahren wir nun wieder wie für x_1 und durchlaufen in Vierschritten diese Konstruktion.

Die hinzugefügten Mengen Y_i ($i \in \mathbb{N}$) sind paarweise disjunkt und falls Y_n nicht leer ist, so ist Y_i eine $\tau^n A$ -, $\tau^n B$ -, $\tau^n A'$ - oder $\tau^n B'$ -Kachel (n geeignet). Durch die Dekompositionstricks können wir Y_i eindeutig in $\{A, B\}$ -Kacheln zerlegen. Dies ergibt insgesamt eine partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung T_I .

Falls T_I eine Parkettierung der gesamten Ebene ist, so verfahren wir wie in Abschnitt 5.2 und erhalten aus T_I eine $\{D, P\}$ -Parkettierung $T_{D,P}$. Wenn wir

nun auf $T_{D,P}$ die Konstruktion 6.1 anwenden, so folgt zunächst $T = T_I$. Da die Kompositionsverfahren und die entsprechenden Dekompositionsverfahren invers zueinander sind, folgt, dass $I(T_{D,P}, p) = I$ ist, wie behauptet.

Es ist jedoch auch möglich, dass die partielle Parkettierung T_I *nicht* die gesamte Ebene \mathbb{R}^2 überdeckt. Nach dem nachfolgenden Satz 6.9 überdeckt T_I dann entweder eine Halbebene oder einen Sektor der Ebene mit dem Winkel $\frac{\pi}{5}$.

Falls T_I eine Halbebene überdeckt, spiegeln wir diese partielle Parkettierung an der Grenzlinie der Halbebene und erhalten eine $\{A, B\}$ -Parkettierung der gesamten Ebene. Wie in Abschnitt 5.2 ergibt diese Parkettierung dann eine $\{D, P\}$ -Parkettierung $T_{D,P}$ der gesamten Ebene. Wie oben erhalten wir $I(T_{D,P}, p) = I$.

Falls T_I einen Sektor der Ebene mit dem Winkel $\frac{\pi}{5}$ überdeckt, spiegeln wir diesen Sektor an einer der beiden Grenzlinien und erhalten insgesamt einen Sektor mit dem Winkel $\frac{2}{5}\pi$. Wir fügen nun vier weitere Kopien dieses größeren Sektors ein durch Drehung um jeweils $\frac{2}{5}\pi$ mit dem Schnittpunkt der Grenzlinien als Drehpunkt und erhalten damit eine $\{A, B\}$ -Parkettierung der gesamten Ebene. Für die zugehörige $\{D, P\}$ -Parkettierung $T_{D,P}$ folgt $I(T_{D,P}, p) = I$. \square

Wir merken an, dass wir im allerersten Schritt dieses Beweises statt einer $A1$ -Kachel auch eine $A2$ -Kachel bzw. statt einer $B1$ -Kachel auch eine $B2$ -Kachel hätten wählen können mit einer völlig analogen darauf folgenden Konstruktion. Dann erhalten wir eine Parkettierung, die spiegelsymmetrisch ist zu der obigen Parkettierung. Dies wird wichtig sein in Kapitel 7.

Zur Erläuterung dieses Beweises geben wir vier Beispiele an. Diese illustrieren zum Einen, wie wir aus einer Folge I die zugehörige $\{A, B\}$ -Parkettierung erhalten. Zum Anderen zeigen sie, dass die im Beweis von Satz 6.4 beschriebenen Fälle tatsächlich auftreten können: Es ist möglich, dass die konstruierte partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung T_I die gesamte Ebene, eine Halbebene oder auch nur einen Sektor mit Winkel $\frac{\pi}{5}$ überdeckt.

Beispiel 6.5. Für die periodische Folge $I = (0, 1, 0, 1, \dots)$ erhalten wir, dass T_I die gesamte Ebene überdeckt. In Abbildung 6.2 sind zur Vereinfachung die Pfeile, welche die Richtungen der Kanten angeben, weggelassen.

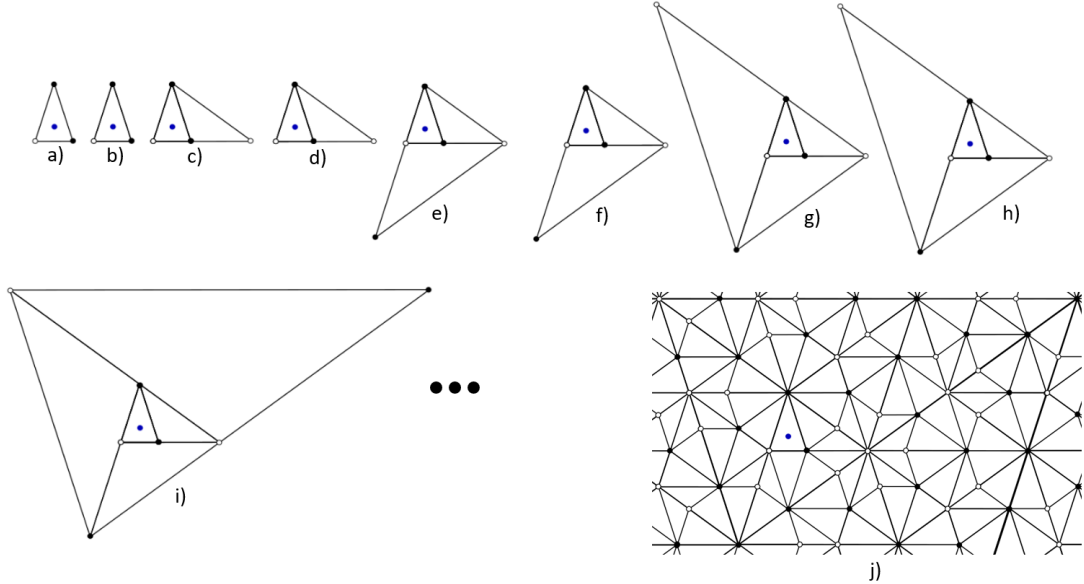


Abbildung 6.2: Parkettierung der Ebene für $I = (0, 1, 0, 1, \dots)$

Es ist $I = (x_0, x_1, \dots) = (0, 1, 0, 1, \dots)$. Da $x_0 = 0$ ist die Startkachel X_0 eine $A1$ -Kachel, siehe a) in Abbildung 6.2. Der blaue Punkt ist der gewählte Punkt p . Wegen $x_1 = 1$ fügen wir nichts an und es ist $X_1 = X_0$, siehe b). Da $x_2 = 0$ und X_1 eine $A1$ -Kachel ist, fügen wir durch CT2 eine $\tau B1'$ -Kachel Y_2 an und wir erhalten die $\tau A1'$ -Kachel X_2 , siehe c). Durch $x_3 = 1$ fügen wir wieder nichts an und wir erhalten $X_3 = X_2$, siehe d). Da $x_4 = 0$, fügen wir durch CT2' an die $\tau A1'$ -Kachel X_3 eine $\tau^2 B1$ -Kachel Y_4 an und erhalten die $\tau^2 A1$ -Kachel X_4 , siehe e). Nun wiederholt sich die Konstruktion. Wegen $x_5 = 1$, ist $X_5 = X_4$, siehe f). Da $x_6 = 0$, fügen wir an die $\tau^2 A1$ -Kachel X_5 eine $\tau^3 B1'$ -Kachel Y_6 und erhalten die $\tau^3 A1'$ -Kachel X_6 , siehe g). Durch $x_7 = 1$ ist $X_7 = X_6$, siehe h). Da $x_8 = 0$, fügen wir an die $\tau^3 A1'$ -Kachel X_7 eine $\tau^4 B1$ -Kachel Y_8 an und erhalten die $\tau^4 A1$ -Kachel X_8 , siehe i), usw.

An die $A1$ -Startkachel X_0 haben wir nacheinander rechts, unten, links und rechts oben weitere Kacheln angelegt und die $\tau^4 A1$ -Kachel X_8 erhalten. Auf

diese Kachel wird (wie auf die Startkachel X_0) die Sequenz $(1,0,1,0,\dots)$ angewandt. Daher überdecken diese Kacheln immer größere Bereiche der Ebene. Wie im Beweis von Satz 6.4 werden die hinzugefügten Kacheln Y_n durch die Dekompositionstricks in $\{A, B\}$ -Kacheln zerlegt. Daher überdeckt die resultierende $\{A, B\}$ -Parkettierung T_I die gesamte Ebene. Ein Ausschnitt hiervon ist in j) dargestellt.

Man beachte, dass alle hier erhaltenen Kacheln X_i jeweils $\tau^n A1$ - oder $\tau^n A1'$ -Kacheln sind (n geeignet).

Beispiel 6.6. Für die periodische Folge $I = (1, 0, 1, 0, \dots)$ erhalten wir, dass T_I die gesamte Ebene überdeckt. In Abbildung 6.3 sind zur Vereinfachung die Pfeile, welche die Richtungen der Kanten angeben, weggelassen.

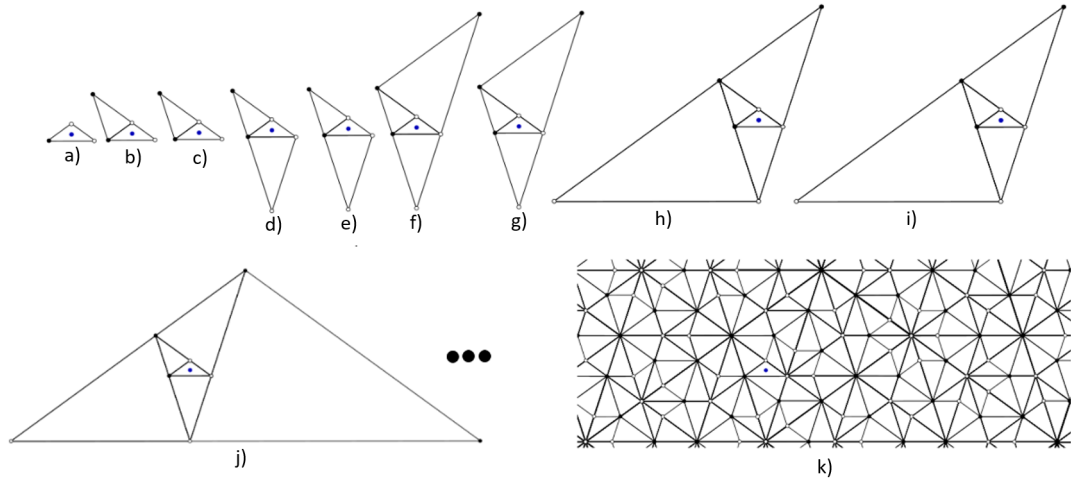


Abbildung 6.3: Parkettierung der Ebene für $I = (1, 0, 1, 0, \dots)$

Es ist $I = (x_0, x_1, \dots) = (1, 0, 1, 0, \dots)$. Da $x_0 = 1$ ist die Startkachel X_0 eine $B1$ -Kachel, siehe a) in Abbildung 6.3. Der blaue Punkt ist der gewählte Punkt p . Da $x_1 = 0$ und X_0 eine $B1$ -Kachel ist, fügen wir eine $A2$ -Kachel Y_1 an und wir erhalten eine $\tau B1'$ -Kachel X_1 , siehe b). Wegen $x_2 = 1$ fügen wir

nichts an und es ist $X_2 = X_1$, siehe c). Da $x_3 = 0$, fügen wir an die $\tau B1'$ -Kachel X_2 eine $\tau A2'$ -Kachel Y_3 an und wir erhalten die $\tau^2 B1$ -Kachel X_3 , siehe d). Wegen $x_4 = 1$, ist $X_4 = X_3$, usw.

An die $B1$ -Startkachel X_0 haben wir Kacheln angelegt und die $\tau^2 B1$ -Kachel X_4 erhalten. Auf diese Kachel wird (wie auf die Startkachel X_0) die Sequenz $(0, 1, 0, 1, \dots)$ angewandt. Daher überdecken diese Kacheln immer größere Bereiche der Ebene. Wie im Beweis von Satz 6.4 werden die hinzugefügten Kacheln Y_n durch die Dekompositionstricks in $\{A, B\}$ -Kacheln zerlegt. Daher überdeckt die resultierende $\{A, B\}$ -Parkettierung T_I die gesamte Ebene. Ein Ausschnitt hiervon ist in k) dargestellt.

Man beachte, dass alle hier erhaltenen Kacheln X_i jeweils $\tau^n B1$ - oder $\tau^n B1'$ -Kacheln sind (n geeignet).

Beispiel 6.7. Für die periodische Folge $I = (0, 0, 0, \dots)$ erhalten wir, dass T_I eine Halbebene überdeckt. In Abbildung 6.4 sind zur Vereinfachung die Pfeile, welche die Richtungen der Kanten angeben, wieder weggelassen.

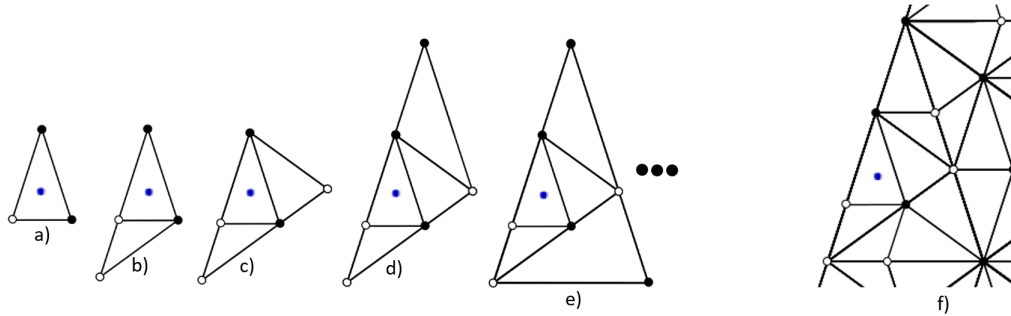


Abbildung 6.4: Parkettierung der Halbebene für $I = (0, 0, 0, \dots)$

Es ist $I = (x_0, x_1, \dots) = (0, 0, \dots)$. Da $x_0 = 0$, ist die Startkachel X_0 eine $A1$ -Kachel, siehe a) in Abbildung 6.4. Der blaue Punkt ist der gewählte Punkt p . Da $x_1 = 0$, und X_0 eine $A1$ -Kachel ist, fügen wir eine $B2$ -Kachel Y_1 an und wir erhalten eine $\tau B2'$ -Kachel X_1 , siehe b). Da $x_2 = 0$, und X_1 eine $\tau B2'$ -Kachel ist, fügen wir eine $A2$ -Kachel Y_2 an und wir erhalten eine $\tau A2'$ -Kachel X_2 , siehe c). Da $x_3 = 0$, fügen wir an X_2 eine $\tau B1'$ -Kachel Y_3 an und wir erhalten

eine $\tau^2 B1$ -Kachel X_3 , siehe d). Da $x_4 = 0$, fügen wir eine $\tau A1'$ -Kachel Y_4 an und wir erhalten eine $\tau^2 A1$ -Kachel X_4 , siehe e), usw.

An die $A1$ -Startkachel X_0 haben wir nacheinander unten, rechts oben, oben und rechts unten Kacheln angelegt und die $\tau^2 A1$ -Kachel X_4 erhalten. Auf diese Kachel wird (wie auf die Startkachel X_0) die Sequenz $(0, 0, 0, \dots)$ angewandt. Wie man gut in a) bis e) sehen kann, überdeckt die Vereinigung aller X_n ($n \in \mathbb{N}$) nicht die gesamte Ebene, sondern nur eine Halbebene. Wie im Beweis von Satz 6.4 werden die hinzugefügten Kacheln Y_n durch die Dekompositionstricks in $\{A, B\}$ -Kacheln zerlegt. Ein Ausschnitt dieser partiellen $\{A, B\}$ -Parkettierung ist in f) dargestellt. Durch Spiegelung an der Grenzlinie erhalten wir eine spiegelsymmetrische Parkettierung der Ebene.

Beispiel 6.8. Für die periodische Folge $I = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$ erhalten wir, dass T_I einen Sektor mit dem Winkel $\frac{\pi}{5}$ überdeckt. In Abbildung 6.5 sind zur Vereinfachung die Pfeile, welche die Richtungen der Kanten angeben, wieder weggelassen.

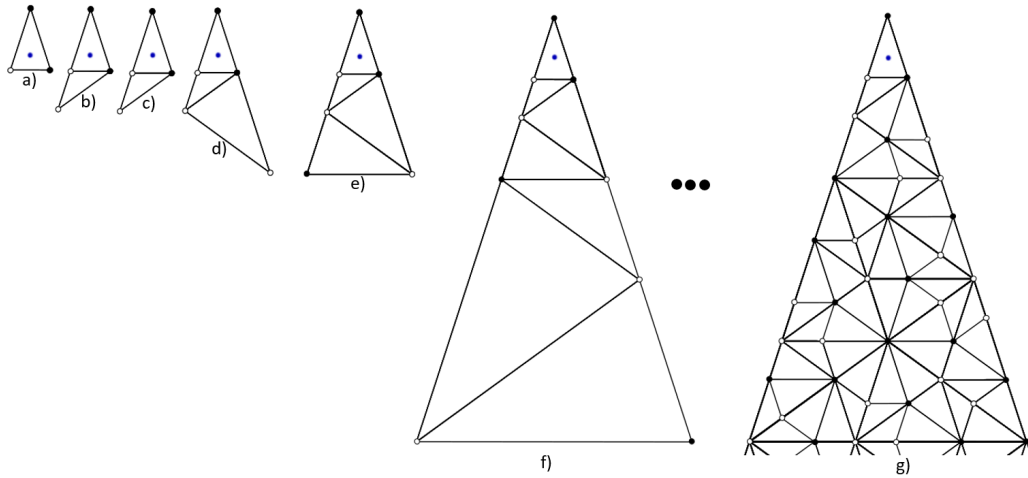


Abbildung 6.5: Parkettierung des Sektors mit dem Winkel $\frac{\pi}{5}$ für $I = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$

Es ist $I = (x_0, x_1, \dots) = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots)$. Da $x_0 = 0$, ist die Startkachel X_0 eine $A1$ -Kachel, siehe a) in Abbildung 6.5. Der blaue Punkt ist der gewähl-

te Punkt p . Da $x_1 = 0$ und X_0 eine $A1$ -Kachel ist, fügen wir eine $B2$ -Kachel Y_1 an und wir erhalten eine $\tau B2'$ -Kachel X_1 , siehe b). Da $x_2 = 1$, fügen wir nichts an und es ist $X_2 = X_1$, siehe c). Da $x_3 = 0$, fügen wir an X_2 eine $\tau A1'$ -Kachel Y_3 an und wir erhalten eine $\tau^2 B2$ -Kachel X_3 , siehe d). Da $x_4 = 0$, fügen wir an X_3 eine $\tau A2'$ -Kachel Y_4 an und wir erhalten eine $\tau^2 A2$ -Kachel X_4 , siehe e). Führen wir diesen Konstruktionsprozess weiter aus, erhalten wir eine $\tau^4 A1$ -Kachel X_8 , siehe f), usw.

An die $A1$ -Startkachel X_0 haben wir immer nur unten Kacheln angelegt und die $\tau^4 A1$ -Kachel X_8 erhalten. Auf diese Kachel wird (wie auf die Startkachel X_0) die Sequenz $(0, 0, 1, 0, \dots)$ angewandt. Wie man gut in a) bis f) sehen kann, überdeckt die Vereinigung aller X_n ($n \in \mathbb{N}$) nicht die gesamte Ebene, sondern nur einen Sektor mit dem Winkel $\frac{\pi}{5}$. Wie im Beweis von Satz 6.4 werden die hinzugefügten Kacheln Y_n durch die Dekompositionstricks in $\{A, B\}$ -Kacheln zerlegt. Ein Ausschnitt dieser partiellen Parkettierung ist in g) dargestellt. Durch mehrfache Spiegelung an den Grenzlinien erhalten wir eine spiegelsymmetrische Parkettierung der Ebene. Ein Ausschnitt der entsprechenden $\{D, P\}$ -Parkettierung ist in Abbildung 5.14 dargestellt.

Satz 6.9. Die im Beweis des Satzes 6.4 konstruierte partielle Parkettierung T_I überdeckt entweder die gesamte Ebene, eine Halbebene oder einen Sektor mit Winkel $\frac{\pi}{5}$.

Für den Beweis von Satz 6.9 analysieren wir im folgenden den Beweis von Satz 6.4. Wir beziehen uns auf die in diesem Beweis angegebene Konstruktion und Notation.

In der angegebenen Konstruktion erhalten wir schrittweise die Folge von Kacheln X_0, X_1, X_2, \dots . Nun werden wir diese Folge analysieren. Alle Kacheln X_i sind $\tau^n A$ -, $\tau^n A'$ -, $\tau^n B$ - oder $\tau^n B'$ -Kacheln (n geeignet). Dabei gilt $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$. Die von der partiellen Parkettierung T_I überdeckte Fläche ist genau $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$. Unser Ziel ist es also zu zeigen, dass $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ die gesamte Ebene, die Halbebene oder ein Sektor mit dem Winkel $\frac{\pi}{5}$ ist. Für die Folge der X_i

($i \in \mathbb{N}$) gibt es drei Möglichkeiten:

- (1) Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$, so dass jede Kachel X_j ($j \geq i$) eine $\tau^n A$ - oder $\tau^n A'$ -Kachel ist.
- (2) Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$, so dass jede Kachel X_j ($j \geq i$) eine $\tau^n B$ - oder $\tau^n B'$ -Kachel ist.
- (3) Die Folge enthält unendlich viele Kacheln X_i , die $\tau^m A$ - oder $\tau^m A'$ -Kacheln sind, und unendlich viele Kacheln X_j , die $\tau^n B$ - oder $\tau^n B'$ -Kacheln sind (m, n geeignet).

Zunächst zeigen wir, dass in den Fällen (1) und (2) jeweils $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = \mathbb{R}^2$ ist.

Lemma 6.10. Unter obigen Voraussetzungen liege Fall (1) vor. Dann ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = \mathbb{R}^2$.

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$ gewählt wie in (1), so dass also jede Kachel X_j ($j \geq i$) eine $\tau^n A$ - oder $\tau^n A'$ -Kachel ist (n geeignet). Wir wollen zeigen, dass $x_j = 1$ ist für alle ungeraden $j > i$. Sei also $j > i$, j ungerade. Angenommen, es wäre $x_j = 0$. Analog zu dem in der Konstruktion dargestellten Fall für $j = 1$ bzw. $j = 3$ wenden wir für X_{j-1} den Kompositionstrick 1 bzw. $1'$ an: Nach Voraussetzung ist X_{j-1} eine $\tau^n A$ - oder $\tau^n A'$ -Kachel. Also fügen wir an X_{j-1} eine $\tau^n B$ - oder $\tau^n B'$ -Kachel an und erhalten für X_j eine $\tau^{n+1} B'$ - oder $\tau^{n+1} B$ -Kachel, ein Widerspruch. Also ist $x_j = 1$.

In der Folge I folgt auf jede 1 eine 0. Die Folge I hat also ab $j \geq i$, j gerade die Form $(0, 1, 0, 1, \dots)$ und es ist X_j eine $\tau^n A$ - oder eine $\tau^n A'$ -Kachel. Auf diese Kachel X_j wird also dieselbe Konstruktion wie in Beispiel 6.5 (für $j = 0$) angewandt. Daher ist $\bigcup_{j \geq i} X_j = \mathbb{R}^2$. \square

Lemma 6.11. Unter obigen Voraussetzungen liege Fall (2) vor. Dann ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = \mathbb{R}^2$.

Beweis. Sei $i \in \mathbb{N}$ gewählt wie in (2), so dass also jede Kachel X_j ($j \geq i$) eine $\tau^n B$ - oder $\tau^n B'$ -Kachel ist (n geeignet). Wir wollen zeigen, dass $x_j = 1$ ist für alle geraden $j > i$. Sei also $j > i$, j gerade. Angenommen, es wäre $x_j = 0$.

Analog zu dem in der Konstruktion dargestellten Fall für $j = 2$ bzw. $j = 4$ wenden wir für X_{j-1} den Kompositionstrick 2 bzw. 2' an: Nach Voraussetzung ist X_{j-1} eine $\tau^n B'$ - oder $\tau^n B$ -Kachel. Also fügen wir an X_{j-1} eine $\tau^{n-1} A$ - oder $\tau^{n-1} A'$ -Kachel an und erhalten für X_j eine $\tau^n A'$ - oder $\tau^n A$ -Kachel, ein Widerspruch. Also ist $x_j = 1$.

In der Folge I folgt auf jede 1 eine 0. Die Folge I hat also ab $j > i$, j gerade die Form $(1, 0, 1, 0, \dots)$ und es ist X_j eine $\tau^n B$ - oder eine $\tau^n B'$ -Kachel. Auf diese Kachel X_j wird also dieselbe Konstruktion wie in Beispiel 6.6 (für $j = 0$) angewandt. Daher ist $\bigcup_{j \geq i} X_j = \mathbb{R}^2$. \square

Nun untersuchen wir Fall (3). Dazu analysieren wir die möglichen Lagen der Dreiecke X_i ($i \in \mathbb{N}$) und wie sich diese ineinander überführen lassen.

Seien X und X' zwei ähnliche Dreiecke. Wir sagen, dass X und X' *zueinander mit dem Winkel α gedreht* sind, falls wir X in X' durch eine Streckung, eine passende Translation und eine Rotation mit dem Winkel α um einen gemeinsamen Eckpunkt überführen können. Man sieht leicht: Falls X , X' und X'' drei ähnliche Dreiecke sind und X und X' *zueinander mit dem Winkel α* und X' und X'' *zueinander mit dem Winkel β gedreht* sind, so sind X und X'' *zueinander mit dem Winkel $\alpha + \beta$ gedreht*.

Wir nennen X eine *Typ A-Kachel*, falls X eine $\tau^n A$ - oder $\tau^n A'$ -Kachel ist ($n \in \mathbb{N}$ geeignet). Entsprechend heißt X *Typ B-Kachel*, falls X eine $\tau^n B$ - oder $\tau^n B'$ -Kachel ist ($n \in \mathbb{N}$ geeignet).

Wir zeigen zunächst das folgende allgemeine Resultat.

Lemma 6.12. Unter obigen Voraussetzungen seien X_i, X_j zwei Typ A-Kacheln ($i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$). Dann sind X_i und X_j *zueinander mit einem Winkel $m \cdot \frac{\pi}{5}$ mit $m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ gedreht*.

Beweis. Zunächst nehmen wir an, dass alle X_k mit $i < k < j$ Typ B-Kacheln sind. Wir unterscheiden drei Fälle.

Fall 1: Es ist $j = i + 1$.

Falls $X_i = X_{i+1}$ ist, sind die Kacheln zueinander mit dem Winkel 0 gedreht. Nun sei $X_i \neq X_{i+1}$. In diesem Fall entsteht aus der Typ A -Kachel X_i in unserer Konstruktion direkt die Typ A -Kachel $X_j = X_{i+1}$. Dies ist nur möglich durch den Kompositionstrick 2 bzw. 2'. In Abbildung 5.20 sieht man, dass die Kacheln X_i und X_{i+1} zueinander mit dem Winkel $\frac{7}{5}\pi$ oder $\frac{3}{5}\pi$ gedreht sind.

Fall 2: Es ist $j = i + 2$.

In diesem Fall ist X_{i+1} eine Typ B -Kachel. Diese entsteht aus X_i durch Kompositionstrick 1 bzw. 1' und X_{i+2} entsteht aus X_{i+1} durch Kompositionstrick 2 bzw. 2'.

Falls X_i eine $\tau^n A1$ - bzw. $\tau^n A1'$ -Kachel ist, so ist X_{i+1} eine $\tau^{n+1} B2'$ - bzw. $\tau^{n+1} B2$ -Kachel und entsprechend ist X_{i+2} eine $\tau^{n+1} A2'$ - bzw. $\tau^{n+1} A2$ -Kachel. Aus Abbildung 6.6 ergibt sich, dass X_i und X_{i+2} zueinander mit dem Winkel $\frac{4}{5}\pi$ gedreht sind.

Falls X_i eine $\tau^n A2$ - bzw. $\tau^n A2'$ -Kachel ist, so ist X_{i+1} eine $\tau^{n+1} B1'$ - bzw. $\tau^{n+1} B1$ -Kachel und entsprechend ist X_{i+2} eine $\tau^{n+1} A1'$ - bzw. $\tau^{n+1} A1$ -Kachel. Aus Abbildung 6.6 ergibt sich, dass X_i und X_{i+2} zueinander mit dem Winkel $\frac{6}{5}\pi$ gedreht sind.

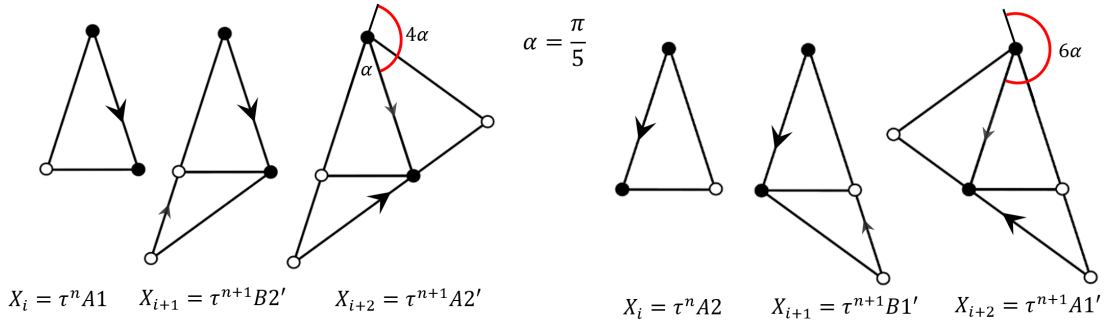


Abbildung 6.6: Darstellung der möglichen Winkel in Fall 2

Fall 3: Es ist $j \geq i + 3$.

Wie in Fall 2 ist X_{i+1} eine Typ B -Kachel und diese entsteht aus X_i durch Kompositionstrick 1 bzw. 1'. Nun entsteht aus der Typ B -Kachel X_{i+1} in unserer

Konstruktion direkt die Typ B -Kachel X_{i+2} . Dies ist nur möglich durch den Kompositionstrick 1 bzw. 1'. In Abbildung 5.18 sieht man, dass die Kacheln X_{i+1} und X_{i+2} zueinander mit dem Winkel $\frac{4}{5}\pi$ oder $\frac{6}{5}\pi$ gedreht sind. Dies setzt sich von X_{i+2} für alle Typ B -Kacheln bis zur Typ B -Kachel X_{j-1} fort. Wie in Fall 2 entsteht X_j aus X_{j-1} durch Kompositionstrick 2 bzw. 2'. Im Vergleich zu Fall 2 kann daher die Kachel X_j aufgrund der weiteren Typ B -Kacheln um die Winkel $\frac{4}{5}\pi$ bzw. $\frac{6}{5}\pi$ mehrfach zusätzlich gedreht sein. Es sind also X_i und X_j zueinander um einen Winkel $m \cdot \frac{\pi}{5}$ mit geradem m gedreht.

Im allgemeinen Fall gibt es Zahlen $i_0, i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ mit $i = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_n = j$, so dass jedes X_{i_h} eine Typ A -Kachel ist und jede Kachel X_k mit $i_h < k < i_{h+1}$ eine Typ B -Kachel ist, für alle $h = 0, 1, \dots, n-1$. Nach Fall 1, 2 und 3 sind für $h = 0, 1, \dots, n-1$ die Kacheln X_{i_h} und $X_{i_{h+1}}$ zueinander um einen Winkel $\frac{7}{5}\pi$ oder $\frac{3}{5}\pi$ oder $m \cdot \frac{\pi}{5}$ mit geradem m gedreht. Daher sind X_i und X_j um einen Winkel $m \cdot \frac{\pi}{5}$ mit $m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ gedreht. \square

Mit diesem Resultat können wir nun den Fall (3) untersuchen.

Lemma 6.13. Unter obigen Voraussetzungen liege Fall (3) vor. Dann ist $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ die gesamte Ebene, eine Halbebene oder ein Sektor mit dem Winkel $\frac{\pi}{5}$.

Beweis. Man beachte im Folgenden, dass $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$. Nach Voraussetzung enthält die Folge der X_i ($i \in \mathbb{N}$) unendlich viele Kacheln vom Typ A . Nach Lemma 6.12 sind die Typ A -Kacheln zueinander jeweils um einen Winkel $m \cdot \frac{\pi}{5}$ mit $m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ gedreht. Daher gibt es eine unendliche Teilfolge $X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, \dots$ mit $i_1 < i_2 < i_3 < \dots$ von Typ A -Kacheln, die zueinander jeweils um den Winkel 0 gedreht sind, d.h., ihre entsprechenden Kanten sind parallel. Wir analysieren nun die Möglichkeiten, wie diese Dreiecke zueinander liegen können. Wenn ein Dreieck in einem größeren Dreieck mit parallelen Kanten enthalten ist, sind entweder die Kanten disjunkt, genau eine Kante des kleineren Dreiecks ist in einer Kante des größeren Dreiecks enthalten, oder zwei Kanten des kleineren Dreiecks sind in Kanten des größeren Dreiecks enthalten. Im letzten Fall ist der Schnittpunkt der Kanten ein gemeinsamer Eckpunkt

beider Dreiecke. Daher gibt es für die Folge $X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, \dots$ drei Fälle:

Fall 1: Es gibt eine unendliche Teilfolge j_1, j_2, j_3, \dots von i_1, i_2, i_3, \dots , so dass die Kanten von X_{j_n} sich nicht mit den Kanten von $X_{j_{n+1}}$ schneiden, für alle $n \in \mathbb{N}$; siehe Abbildung 6.7 (a) und auch Abbildung 6.3 a) und j).

Sei $n \in \mathbb{N}$ und betrachte eine beliebige Kante von X_{j_n} und die entsprechende parallele Kante von $X_{j_{n+1}}$. Zwischen diesen beiden Kanten liegen $\{A, B\}$ -Kacheln. Daher beträgt der Abstand dieser beiden Kanten mindestens die Höhe einer B -Kachel. Alle drei Kanten von $X_{j_{n+1}}$ sind also von den entsprechenden Kanten von X_{j_n} mindestens um die Höhe einer B -Kachel entfernt. Daher ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{j_n} = \mathbb{R}^2$.

Fall 2: Es gibt eine unendliche Teilfolge j_1, j_2, j_3, \dots von i_1, i_2, i_3, \dots , so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ genau eine Kante von X_{j_m} für alle $n > m$ in der entsprechenden parallelen Kante von X_{j_n} als Teilmenge enthalten ist; siehe Abbildung 6.7 (b) und auch Abbildung 6.4 a) und e).

Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei E_m (wie "edge") die Kante von X_{j_m} , die für alle $n > m$ in der entsprechenden parallelen Kante E_n von X_{j_n} als Teilmenge enthalten ist. Die beiden Eckpunkte von E_m können jeweils keine Eckpunkte von E_n sein, da sonst eine weitere Kante von X_{j_m} in der entsprechenden Kante von X_{j_n} enthalten wäre. Die beiden Eckpunkte von E_m liegen also im Inneren von E_n . Die beiden anderen Kanten von X_{j_m} sind also disjunkt zu den entsprechenden parallelen Kanten von X_{j_n} und ihr Abstand ist mindestens die Höhe einer B -Kachel. Daher ist $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_{j_m}$ eine Halbebene, deren Begrenzungslinie genau die Menge $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m$ ist.

Fall 3: Es gibt eine unendliche Teilfolge j_1, j_2, j_3, \dots von i_1, i_2, i_3, \dots , so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ zwei Kanten von X_{j_m} für alle $n > m$ in den entsprechenden parallelen Kanten von X_{j_n} als Teilmenge enthalten sind; siehe Abbildung 6.7 (c) und auch Abbildung 6.5 a), e) und f).

Für $m \in \mathbb{N}$ seien E_m und E'_m die beiden in Fall 3 bezeichneten Kanten von X_{j_m} und sei V_m (wie "vertex") ihr Schnittpunkt. Für $n > m$ seien E_n und E'_n die entsprechenden Kanten von X_{j_n} mit $E_m \subseteq E_n$ und $E'_m \subseteq E'_n$. Wie

vor Fall 1 angemerkt, ist dann $V_m = V_n$. Aufgrund der Voraussetzung ist die dritte Kante von X_{j_m} zur dritten Kante von X_{j_n} disjunkt und ihr Abstand ist mindestens die Höhe einer B -Kachel. Daher ist $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_{j_m}$ ein Sektor, dessen Eckpunkt V_m ist und dessen Begrenzungslinien $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m$ und $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} E'_m$ sind. Es bleibt zu zeigen, dass der Winkel dieses Sektors genau $\frac{\pi}{5}$ ist. Der Eckpunkt V_m ist Eckpunkt einer Typ A -Kachel. Diese Kacheln haben die Winkel $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{2}{5}\pi$.

Angenommen, der Winkel des Sektors wäre $\frac{2}{5}\pi$. Dann ist der Punkt $V_m \in X_{j_m}$ Endpunkt der kurzen Seite von X_{j_m} . Diese kurze Seite ist also E_m oder E'_m und somit ist ihre Verlängerung eine der beiden Begrenzungslinien des Sektors. Angenommen, V_m wäre Endpunkt der gerichteten Seite von X_{j_m} . Dann ist die Verlängerung der gerichteten Seite die andere Begrenzungslinie des Sektors. In der Konstruktion erweitern wir X_{j_m} durch Kompositionstrick 1 bzw. 1' oder Kompositionstrick 2 bzw. 2'. Mit Kompositionstrick 1 bzw. 1' fügen wir an die kurze Seite von X_{j_m} eine Kachel an. Mit Kompositionstrick 2 bzw. 2' fügen wir an die gerichtete Seite von X_{j_m} eine Kachel an. Beides ist unmöglich, da die Verlängerungen der kurzen bzw. der gerichteten Seite die beiden Begrenzungslinien des Sektors sind.

Also ist V_m auch Endpunkt der langen ungerichteten Seite. Dann ist die Verlängerung dieser langen ungerichteten Seite die andere Begrenzungslinie des Sektors. Wie oben können wir Kompositionstrick 1 bzw. 1' nicht anwenden, da dies X_{j_m} an der kurzen Seite und damit über eine Begrenzungslinie hinaus erweitern würde. Also können wir nur Kompositionstrick 2 bzw. 2' anwenden. Damit erweitern wir X_{j_m} an der gerichteten Seite und erhalten eine weitere Typ A -Kachel. Ihre kurze Seite ist die lange ungerichtete Seite von X_{j_m} und ihre gerichtete Seite ist eine Verlängerung der kurzen ungerichteten Seite von X_{j_m} . Diese beiden Seiten der neuen Kachel sind also Teilmengen der beiden Begrenzungslinien des Sektors. Wie zuvor können wir daher weder an die kurze Seite der neuen Kachel noch an die gerichtete Seite der neuen Kachel etwas anlegen. Somit lässt sich diese partielle Parkettierung nicht wie gefordert fortsetzen, Widerspruch.

Daher ist der Winkel des Sektors genau $\frac{\pi}{5}$. □

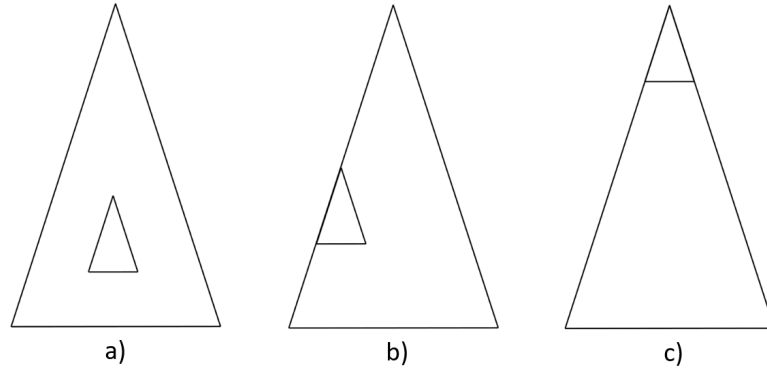


Abbildung 6.7: Darstellung zur Verdeutlichung der drei Fälle

Anmerkung. Wir skizzieren eine andere Begründung dafür, dass im obigen Beweis, Fall 3 der Winkel des Sektors genau $\frac{\pi}{5}$ ist. Da X_{j_m} eine Typ A -Kachel ist, ist, wie oben gezeigt, der Winkel des Sektors $\frac{\pi}{5}$ oder $\frac{2}{5}\pi$.

Nach Voraussetzung von Lemma 6.13 enthält die Folge der X_i ($i \in \mathbb{N}$) auch unendlich viele Kacheln vom Typ B . Man kann analog zu Lemma 6.12 zeigen, dass die Typ B -Kacheln zueinander jeweils um einen Winkel $m \cdot \frac{\pi}{5}$ mit $m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ gedreht sind. Da der Fall der Ebene bzw. Halbebene für die Parkettierung ausgeschlossen ist, erhalten wir mit einem analogen Argument, dass die Typ B -Kacheln den Sektor überdecken, den auch die Typ A -Kacheln überdecken. Der Winkel des Sektors ist ein Winkel einer Typ B -Kachel, somit $\frac{\pi}{5}$ oder $\frac{3}{5}\pi$.

Da beide Bedingungen zutreffen, ist der Winkel des Sektors $\frac{\pi}{5}$.

Wir erhalten nun:

Beweis von Satz 6.9. Klar mit Lemmas 6.10, 6.11 und 6.13. □

Damit ist auch Satz 6.4 vollständig bewiesen.

6.3 Eindeutigkeit von Parkettierungen

Wir untersuchen nun, inwiefern die im vorherigen Abschnitt 6.2 zu einer unendlichen Folge von Nullen und Einsen konstruierte punktierte Parkettierung durch die Folge eindeutig bestimmt ist.

In unseren Beweisen beziehen wir uns auf die vorherigen Konstruktionen. Wir merken an, dass die beiden Quellen [2] und [3] nur die entsprechenden Resultate angeben, ohne Hinweis auf mögliche Beweise.

Proposition 6.14. Seien (T_1, p_1) und (T_2, p_2) zwei punktierte $\{D, P\}$ -Parkettierungen der Ebene und sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Isometrie, die T_1 auf T_2 abbildet mit $f(p_1) = p_2$. Dann ist $I(T_1, p_1) = I(T_2, p_2)$, d.h. die beiden punktierten Parkettierungen haben dieselbe zugeordnete Indexfolge.

Beweis. Dies ist klar nach Konstruktion. Das Verfahren in Konstruktion 6.1 ist eindeutig und aufgrund der Isometrie erhalten wir somit dieselbe Indexfolge. \square

Das folgende Resultat ist eine Umkehrung von Proposition 6.14.

Satz 6.15. Seien (T_1, p_1) und (T_2, p_2) zwei punktierte $\{D, P\}$ -Parkettierungen der Ebene mit $I(T_1, p_1) = I(T_2, p_2)$. Dann gibt es eine Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die T_1 auf T_2 abbildet, so dass $f(p_1)$ in derselben Kachel wie p_2 liegt.

Beweisskizze. Wir folgen der Konstruktion 6.1 und der Konstruktion in Satz 6.4 und betrachten dafür die den Parkettierungen T_1, T_2 entsprechenden $\{A1, A2, B1, B2\}$ -Parkettierungen. Sei $X_{1,0}$ die A - oder B -Kachel der ersten Parkettierung, die p_1 enthält, und $X_{2,0}$ die entsprechende Kachel der zweiten Parkettierung, die p_2 enthält. Es sind $X_{1,0}$ und $X_{2,0}$ beides A - oder B -Kacheln. Daher gibt es eine Isometrie f_1 , die $X_{1,0}$ auf $X_{2,0}$ abbildet und die Richtungen der Kanten und die Färbungen der Ecken erhält, und wegen $p_1 \in X_{1,0}$ ist $f_1(p_1) \in X_{2,0}$. Wir verfahren nun induktiv weiter wie in Satz 6.4 angegeben und setzen die Abbildung f_1 isometrisch fort auf die dort konstruierten jeweils

angrenzenden Kacheln der ersten bzw. der zweiten Parkettierung. Da die beiden Indexfolgen genau übereinstimmen, ist dies möglich. Damit erhalten wir eine Isometrie von einer Vereinigung von $\{A, B\}$ -Kacheln der ersten Parkettierung auf eine Vereinigung von $\{A, B\}$ -Kacheln der zweiten Parkettierung. Falls diese Vereinigung die gesamte Ebene \mathbb{R}^2 ist, haben wir die gewünschte Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ erhalten. Falls die beiden Vereinigungen jedoch jeweils eine Halbebene oder jeweils einen Sektor mit Winkel $\frac{\pi}{5}$ ergeben, so folgt aus der Konstruktion in Satz 6.4, dass sich die Isometrie eindeutig auf \mathbb{R}^2 fortsetzen lässt.

Wir untersuchen nun die Indexfolgen für verschiedene Punkte einer gegebenen Parkettierung.

Satz 6.16. Sei T eine Parkettierung der Ebene über $\{D, P\}$ und seien $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte, so dass (T, p_1) und (T, p_2) zwei punktierte Parkettierungen sind. Dann unterscheiden sich die beiden zugeordneten Indexfolgen $I(T, p_1)$ und $I(T, p_2)$ nur in endlich vielen Folgengliedern.

Beweis. Wir verfahren ähnlich wie in der Beweisskizze für Satz 6.15. Wir folgen der Konstruktion 6.1 und der Konstruktion in Satz 6.4 und bilden dafür die der Parkettierung T entsprechende $\{A1, A2, B1, B2\}$ -Parkettierung. Sei X_0 die A - oder B -Kachel dieser Parkettierung, die p_1 enthält. Wir verfahren nun weiter wie in der Konstruktion für Satz 6.4 angegeben und betrachten die dort konstruierten jeweils angrenzenden Kacheln. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1. Die partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung T_I überdeckt die gesamte Ebene \mathbb{R}^2 . Gleichbedeutend hiermit ist, dass die Kacheln der in Konstruktion 6.1 konstruierten Folge von Parkettierungen, die p_1 enthalten, in alle Richtungen größer werden. In diesem Fall gibt es eine Kachel, die so groß ist, dass sie sowohl p_1 als auch p_2 enthält. Diese Kachel erhalten wir nach endlich vielen Schritten, etwa k Schritten. Ab diesem Schritt ergeben die beiden Konstruktionen, für (T, p_1) bzw. für (T, p_2) , dieselben Kacheln. Damit stimmen die beiden Indexfolgen $I(T, p_1)$ und $I(T, p_2)$ ab dem k -ten Folgenglied überein.

Fall 2. Die partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung T_I überdeckt eine Halbebene oder einen Sektor mit Winkel $\pi/5$. Gleichbedeutend hiermit ist, dass die Kacheln der in Konstruktion 6.1 konstruierten Folge von Parkettierungen, die p_1 enthalten, nicht in alle Richtungen größer werden. Wir unterscheiden nun zwei Unterfälle.

Fall 2a. Die beiden Punkte p_1 und p_2 liegen in derselben Halbebene bzw. in demselben Sektor. In diesem Fall können wir genau wie in Fall 1 argumentieren. Nach endlich vielen Schritten liegen p_1 und p_2 in derselben großen Kachel, und ab dieser Stelle stimmen die beiden Folgen $I(T, p_1)$ und $I(T, p_2)$ überein.

Fall 2b. Der Punkt p_2 liegt nicht in der Halbebene bzw. dem Sektor, in dem p_1 liegt. Nach dem Beweis von Satz 6.4 ist die Halbebene, in der p_2 liegt, spiegelsymmetrisch zur Halbebene von p_1 , bzw. der Sektor, in dem p_2 liegt, ist rotations- oder rotations- und spiegelsymmetrisch zu dem Sektor, in dem p_1 liegt. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Isometrie der Parkettierung T , die die Halbebene bzw. den Sektor von p_2 auf die Halbebene bzw. den Sektor von p_1 abbildet, und sei $p'_2 = f(p_2)$. Nach Proposition 6.14 ist $I(T, p_2) = I(T, p'_2)$. Der Punkt p'_2 liegt in derselben Halbebene bzw. Sektor wie p_1 . Nach Fall 2a stimmen also die beiden Folgen $I(T, p_1)$ und $I(T, p'_2)$ ab einer gemeinsamen Stelle überein, damit auch $I(T, p_1)$ und $I(T, p_2)$. \square

Das folgende Resultat ist eine Umkehrung von Satz 6.16.

Satz 6.17. Seien I_1 und I_2 zwei unendliche Folgen von Nullen und Einsen, in der keine zwei Einsen direkt aufeinanderfolgen, so dass I_1 und I_2 ab einer Stelle übereinstimmen. Dann gibt es eine $\{D, P\}$ -Parkettierung T der Ebene und zwei Punkte p_1 und p_2 , so dass $I_1 = I(T, p_1)$ und $I_2 = I(T, p_2)$.

Beweis. Nach Satz 6.4 ist $I_1 = I(T, p_1)$ für eine punktierte $\{D, P\}$ -Parkettierung (T, p_1) der Ebene. Wir müssen einen Punkt p_2 finden, so dass $I(T, p_2) = I_2$. Sei k die erste Stelle, ab der die Folgen I_1 und I_2 übereinstimmen. Wir folgen der Konstruktion 6.1 für (T, p_1) bis zu Stelle k und erhalten, dass p_1 in einer großen Kachel liegt. Später betrachten wir die Folge der Dekompositionen die-

ser Kachel.

Die Folge I_2 lässt sich nach Satz 6.4 realisieren als $I_2 = I(T', p'_2)$ für eine punktierte $\{D, P\}$ -Parkettierung (T', p'_2) der Ebene. Nun betrachten wir das Anfangsstück von I_2 , das aus den ersten k Folgenglieder von I_2 besteht. Wir führen die Konstruktion von Satz 6.4 für die ersten k Stellen durch und erhalten ein Folge von Kacheln, die p'_2 enthalten. Wir gehen nun diese Folge von Kacheln von Stelle k bis Stelle 1 rückwärts durch und wählen, wenn p'_2 in einer $\tau^i A$ -Kachel, $\tau^i A'$ -Kachel, $\tau^i B$ -Kachel bzw. $\tau^i B'$ -Kachel der Konstruktion von T' liegt, die entsprechende Kachel in der Folge der Dekompositionen der großen Kachel für T . Wir erhalten also eine Folge von Kacheln für T "vom selben Typ" wie bei der Folge für T' . Schließlich erhalten wir, wenn p'_2 in einer $A1$ -, $A2$ -, $B1$ - bzw. $B2$ -Kachel von T' liegt, eine entsprechende $A1$ -, $A2$ -, $B1$ - bzw. $B2$ -Kachel von T . Wir wählen einen Punkt p_2 im Inneren dieser Kachel von T . Auf Grund der Eindeutigkeit der Komposition und der Dekomposition stimmt das Anfangsstück (bis zur Stelle k) von $I(T, p_2)$ mit dem Anfangsstück (bis zu Stelle k) von $I(T', p'_2)$ überein, also mit I_2 . Ab der Stelle k liegen p_1 und p_2 in denselben Kacheln, also stimmen $I(T, p_1)$ und $I(T, p_2)$ sowie I_2 nach Voraussetzung ab Stelle k überein. Damit ist $I_2 = I(T, p_2)$. \square

Diese Resultate stellen eine bijektive Beziehung zwischen den punktierten Parkettierungen und den unendlichen Folgen von Nullen und Einsen her, bei denen keine zwei Einsen direkt aufeinanderfolgen. Dabei unterscheiden sich für zwei verschiedene Punkte einer Parkettierung die zugehörigen Folgen nur an endlich vielen Stellen. Wenn sich zwei Folgen an unendlich vielen Stellen unterscheiden, sind die zugehörigen Parkettierungen nicht isometrisch. Da es unendlich viele derartige Folgen gibt, die sich jeweils an unendlich vielen Stellen unterscheiden, gibt es auch unendlich viele nicht-isometrische Parkettierungen, die diese Folgen realisieren. Es lässt sich sogar zeigen, dass es nicht nur unendlich viele derartige Folgen gibt, sondern sogar überabzählbar viele, sogar so viele, wie es reelle Zahlen gibt. Daher gibt es entsprechend viele Parkettierungen über $\{D, P\}$, die nach Satz 5.4 (a) alle nicht-periodisch sind.

7 Selbstähnlichkeit der Penrose-Parkettierungen

In Kapitel 5 haben wir Kompositions- und Dekompositionsverfahren für partielle Parkettierungen von $\{A, B\}$ -Kacheln untersucht und hiermit die Existenz und Aperiodizität von Parkettierungen der Ebene nachgewiesen. Hierbei haben wir das Konstruktionsverfahren der Inflation verwendet. Im Folgenden führen wir ein vergleichbares Konstruktionsverfahren, genannt Expansion, für $\{D, P\}$ -Parkettierungen ein. Wir charakterisieren alle $\{D, P\}$ -Parkettierungen, die ähnlich sind zu ihrer Expansion.

Wir definieren die Expansion einer $\{D, P\}$ -Parkettierung T der Ebene folgendermaßen. Wir zerlegen die $\{D, P\}$ -Kacheln, wie in Kapitel 5.2 beschrieben in $\{A, B\}$ -Kacheln, wenden auf diese die Komposition, d.h. CT1 und CT2 an, kehren dann die Färbung der Ecken der Kacheln mittels der Strichoperation um und fügen die entstandenen $\{\tau A, \tau B\}$ -Kacheln wie in Kapitel 5.2 zu $\{\tau D, \tau P\}$ -Kacheln zusammen. Die entstandene $\{\tau D, \tau P\}$ -Parkettierung T' nennen wir die *Expansion* von T .

Expansion:

$$D, P \xrightarrow{\S 5.2} A, B \xrightarrow{CT1} A, \tau B' \xrightarrow{CT2} \tau A', \tau B' \xrightarrow{'} \tau A, \tau B \xrightarrow{\S 5.2} \tau D, \tau P$$

Man beachte, dass die Kacheln von T' um den Faktor τ gestreckte $\{D, P\}$ -Kacheln sind.

Wir nennen eine $\{D, P\}$ -Parkettierung T der Ebene *selbstähnlich*, falls es eine orientierungserhaltende Ähnlichkeitsabbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Ebene gibt, die T auf ihre Expansion T' abbildet. Dabei heißt eine Ähnlichkeitsabbildung f *orientierungserhaltend*, falls f beim Durchlaufen von Eckpunkten von Polygonen bei Erhalt der Reihenfolge den Orientierungssinn erhält. Orientierungserhaltende Ähnlichkeitsabbildungen bestehen aus einer Multiplikation mit einer Konstanten (Streckung/Strauchung) gefolgt von Translationen und/oder Rotationen, aber keinen Spiegelungen.

Wir charakterisieren nun die selbstähnlichen Parkettierungen über $\{D, P\}$.

Satz 7.1. Sei T eine $\{D, P\}$ -Parkettierung der Ebene. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

- (1) T ist selbstähnlich.
- (2) Es existiert ein Punkt $p \in \mathbb{R}^2$, so dass entweder $I(T, p) = (0, 0, 0, \dots)$ oder $I(T, p) = (0, 1, 0, 1, \dots)$ oder $I(T, p) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ ist.

Eine $\{D, P\}$ -Parkettierung T ist also genau dann selbstähnlich, wenn es einen Punkt p gibt, so dass die zugehörige Indexfolge $I(T, p)$ die Periode 2 hat.

Beweis. (1) \rightarrow (2): Sei T' die Expansion von T . Wir wählen einen beliebigen Punkt p' im Inneren einer Kachel von T . Wir verwenden p' als Zentrum einer Stauchung der Ebene um den Faktor τ^{-1} . Diese Stauchung überführt T' in eine $\{D, P\}$ -Parkettierung T'' der Ebene, die isometrisch zu T ist. Sei $I(T, p') = (x_0, x_1, x_2, \dots)$. Aus der Expansion ergibt sich, dass sich $I(T'', p') = (x_2, x_3, x_4, \dots)$. Durch die Isometrie zwischen T und T'' erhalten wir einen Bildpunkt p'' von p' und nach Proposition 6.14 folgt $I(T, p') = I(T'', p'')$. Nach Proposition 6.16 unterscheiden sich $I(T'', p')$ und $I(T'', p'')$ nur in endlich vielen Stellen. Es gibt also ein $k \in \mathbb{N}$, so dass die beiden Folgen $I(T, p')$ und $I(T'', p')$ ab Stelle k übereinstimmen. Wegen $I(T, p') = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots)$ und $I(T'', p') = (x_2, x_3, x_4, \dots, x_{k+2}, x_{k+3}, \dots)$ folgt $x_k = x_{k+2}$ und $x_n = x_{n+2}$ für jedes $n \geq k$. Wenn $n \in \mathbb{N}$ und $x_n = 1$, ist $x_{n+1} = 0$. Also gibt es drei Möglichkeiten für $I(T, p')$. Entweder es ist $I(T, p') = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, 0, 0, 0, \dots)$ oder

$I(T, p') = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, 0, 1, 0, 1, \dots)$ oder

$I(T, p') = (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, 1, 0, 1, 0, \dots)$.

Im ersten Fall gibt es nach Satz 6.17 eine $\{D, P\}$ -Parkettierung T^* und zwei Punkte p_1 und p_2 , so dass $I(T^*, p_1) = (0, 0, 0, \dots)$ und $I(T^*, p_2) = I(T, p')$. Aufgrund der letzten Beziehung gibt es nach Satz 6.15 eine Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die T^* auf T abbildet. Nun sei $p = f(p_1)$. Nach Proposition 6.14 ist dann $I(T, p) = I(T^*, p_1) = (0, 0, 0, \dots)$.

Im zweiten und dritten Fall unterscheiden wir, ob die Nullen an geraden oder ungeraden Stellen in $I(T, p')$ auftreten. Im ersten Unterfall gibt es nach Satz 6.17 eine $\{D, P\}$ -Parkettierung T^* und zwei Punkte p_1 und p_2 , so dass $I(T^*, p_1) = (0, 1, 0, 1, \dots)$ und $I(T^*, p_2) = I(T, p')$. Wie zuvor gibt es nach Satz 6.15 eine Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die T^* auf T abbildet und für $p = f(p_1)$ gilt $I(T, p) = I(T^*, p_1) = (0, 1, 0, 1, \dots)$. Im zweiten Unterfall gibt es nach Satz 6.17 eine $\{D, P\}$ -Parkettierung T^* und zwei Punkte p_1 und p_2 , so dass $I(T^*, p_1) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ und $I(T^*, p_2) = I(T, p')$. Wie zuvor erhalten wir den gesuchten Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ mit $I(T, p) = (1, 0, 1, 0, \dots)$.

(2) \rightarrow (1): Sei T' die Expansion von T . Der Punkt p liegt im Inneren einer Kachel von T' . Wir verwenden p als Zentrum einer Stauchung der Ebene um den Faktor τ^{-1} . Diese Stauchung überführt T' in eine $\{D, P\}$ -Parkettierung T'' der Ebene. Unser Ziel ist zu zeigen, dass es eine orientierungserhaltende Isometrie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Ebene gibt, die T auf T'' abbildet. Dann gibt es eine orientierungserhaltende Ähnlichkeitsabbildung, die T auf T' abbildet. Daher ist T selbstähnlich.

Wie in Abschnitt 5.2 sei

T_0 die der Parkettierung T entsprechende $\{A, B\}$ -Parkettierung,

T'_0 die der Parkettierung T' entsprechende $\{\tau A, \tau B\}$ -Parkettierung und

T''_0 die der Parkettierung T'' entsprechende $\{A, B\}$ -Parkettierung.

Wie in Konstruktion 6.1 sei

T_1 die Parkettierung über $\{A, \tau B'\}$, die aus T_0 durch den Kompositionstrick 1 entsteht und

T_2 die Parkettierung über $\{\tau A', \tau B'\}$, die aus T_1 durch den Kompositionstrick 2 entsteht. Wir analysieren nun die drei angegebenen Möglichkeiten für

$I(T, p) = (x_0, x_1, x_2, \dots)$. Hierbei sei X_i die Kachel von T_i mit $p \in X_i$ (für $i = 0, 1, 2$), vgl. Beweis von Satz 6.4.

Fall 1: $I(T, p) = (0, 0, \dots)$. Da $x_0 = 0$, ist X_0 eine A1-Kachel oder A2-Kachel. Wir können annehmen, dass X_0 eine A1-Kachel ist. Da $x_1 = 0$, ist X_1 nach Konstruktion 6.1 und CT1 eine $\tau B2'$ -Kachel. Da $x_2 = 0$, ist X_2 nach Konstruktion 6.1 und CT2 eine $\tau A2'$ -Kachel. Die entsprechende $\tau A2$ -Kachel ist die Kachel aus T'_0 , die p enthält. Also ist die Kachel X''_0 von T''_0 , die p enthält, eine A2-Kachel. Wir folgen nun dem Beweis von Satz 6.15. Es gibt eine Isometrie $f_1 : X_0 \rightarrow X''_0$, die die Orientierung umdreht. Diese Isometrie f_1 setzt sich fort zu einer Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Ebene, die T_0 auf T''_0 und folglich T auf T'' abbildet und dabei die Orientierung umdreht. Da $I(T, p) = (0, 0, \dots)$, hat T nach Beispiel 6.7 eine Spiegelsymmetrie. Daher erhalten wir aus f und der Spiegelsymmetrie eine orientierungserhaltende Isometrie g der Ebene, die T auf T'' abbildet.

Fall 2: $I(T, p) = (0, 1, 0, 1, \dots)$. Da $x_0 = 0$, ist X_0 eine A1-Kachel oder A2-Kachel. Wir können annehmen, dass X_0 eine A1-Kachel ist. Da $x_1 = 1$, ist auch $X_1 = X_0$ eine A1-Kachel. Da $x_2 = 0$, ist X_2 eine $\tau A1'$ -Kachel. Die entsprechende $\tau A1$ -Kachel ist die Kachel aus T'_0 , die p enthält. Also ist die Kachel X''_0 von T''_0 , die p enthält, eine A1-Kachel. Wir folgen nun dem Beweis von Satz 6.15. Es gibt eine Isometrie $f_1 : X_0 \rightarrow X''_0$, die die Orientierung erhält. Diese Isometrie f_1 setzt sich fort zur Isometrie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Ebene, die T auf T'' abbildet und dabei die Orientierung erhält.

Fall 3: $I(T, p) = (1, 0, 1, 0, \dots)$. Da $x_0 = 1$, ist X_0 eine B1-Kachel oder B2-Kachel. Wir können annehmen, dass X_0 eine B1-Kachel ist. Da $x_1 = 0$, ist X_1 eine $\tau B1'$ -Kachel. Da $x_2 = 1$, ist auch $X_2 = X_1$ eine $\tau B1'$ -Kachel. Die entsprechende $\tau B1$ -Kachel ist die Kachel aus T'_0 , die p enthält. Also ist die Kachel X''_0 von T''_0 , die p enthält, eine B1-Kachel. Wir folgen nun dem Beweis von Satz 6.15. Es gibt eine Isometrie $f_1 : X_0 \rightarrow X''_0$, die die Orientierung erhält. Diese Isometrie f_1 setzt sich fort zur Isometrie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Ebene, die T auf T'' abbildet und dabei die Orientierung erhält. □

Wir möchten nun die Anzahl der selbstähnlichen Penrose-Parkettierungen (bis auf orientierungserhaltende Isometrie) bestimmen. Dazu untersuchen wir zunächst für die $\{D, P\}$ -Parkettierungen aus Beispiel 6.5, 6.6 und 6.7, ob sie nicht-orientierungserhaltende Isometrien haben.

Proposition 7.2. (a) Sei T die zur Folge $(0, 1, 0, 1, \dots)$ oder $(1, 0, 1, 0, \dots)$ konstruierte $\{D, P\}$ -Parkettierung der Ebene. Dann gibt es keine nicht-orientierungserhaltende Isometrie der Ebene, die T auf T abbildet.

(b) Sei T die zur Folge $(0, 0, 0, \dots)$ konstruierte $\{D, P\}$ -Parkettierung der Ebene. Dann gibt es eine nicht-orientierungserhaltende Isometrie der Ebene, die T auf T abbildet.

Beweis. (a) Angenommen, es gäbe eine nicht-orientierungserhaltende Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Ebene, die T auf T abbildet. Sei T_0 die in Abschnitt 5.2 beschriebene der Parkettierung T entsprechende $\{A, B\}$ -Parkettierung. Dann ist f eine Symmetrie von T_0 . Nun sei T_n ($n \in \mathbb{N}$) die Folge der in Konstruktion 6.1 beschriebenen Parkettierungen. Insbesondere ist T_1 die Parkettierung über $\{A, \tau B'\}$, die aus T_0 durch den Kompositionstrick 1 entsteht. Wir behaupten, dass f auch eine Symmetrie von T_1 ist. Wir folgen dem Beweis von Satz 5.3.

Sei K eine beliebige Kachel von T_1 . Wir wollen zeigen, dass $f(K)$ eine Kachel von T_1 ist. Falls K eine A -Kachel ist, ist K eine A -Kachel von T_0 , die nicht durch CT1 mit einer B -Kachel von T_0 vereinigt wird. Also liegt an der kurzen Seite der A -Kachel K keine B -Kachel an. Da f eine Symmetrie von T_0 ist, gilt die entsprechende Aussage auch für die A -Kachel $f(K)$ von T_0 . Daher ist $f(K)$ eine A -Kachel von T_1 .

Nun sei K eine $\tau B1'$ -Kachel von T_1 . Dann entsteht K durch die Vereinigung einer $B1$ -Kachel K_1 mit einer $A2$ -Kachel K_2 von T_0 , die an ihren kurzen ungerichteten Seiten angrenzen. Da f nicht-orientierungserhaltend ist, ist $f(K_1)$ eine $B2$ -Kachel von T_0 , die an die $A1$ -Kachel $f(K_2)$ von T_0 angrenzt. Da f eine Isometrie ist, grenzt die Kachel $f(K_2)$ an die kurze ungerichtete Seite von $f(K_1)$. Die Konstruktion CT1 vereinigt also die $B2$ -Kachel $f(K_1)$ mit der $A1$ -Kachel $f(K_2)$. Daher ist $f(K_1) \cup f(K_2)$ die in T_1 durch CT1 entstehende

$\tau B2'$ -Kachel. Also ist $f(K) = f(K_1 \cup K_2) = f(K_1) \cup f(K_2)$ eine $\tau B2'$ -Kachel in T_1 .

Ist K eine $\tau B2'$ -Kachel von T_1 , so folgt analog, dass $f(K)$ eine $\tau B1'$ -Kachel von T_1 ist. Also ist f eine Symmetrie von T_1 .

Wir können nun dem Beweis von Satz 5.3 folgen, wobei wir wie oben für T_1 beachten, dass die Isometrie f nicht die Orientierung der Kacheln erhält. Wir erhalten, dass f eine nicht-orientierungserhaltende Symmetrie von T_n für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Wir untersuchen zunächst die Folge $(0, 1, 0, 1, \dots)$. Sei X_0 die A -Kachel, so dass für einen inneren Punkt $p \in X_0$ gilt, dass $I(T, p) = (0, 1, 0, 1, \dots)$. Wir können annehmen, dass X_0 eine $A1$ -Kachel ist. Sei $p' = f(p)$. Wir folgen nun dem Beweis von Satz 6.4 und erhalten eine Folge X_n ($n \in \mathbb{N}$) von Kacheln in T_n . Wie in Beispiel 6.5 gezeigt, ist X_{4n} eine $\tau^{2n}A1$ -Kachel und die Vereinigung der Kacheln X_{4n} überdeckt die gesamte Ebene. Daher gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass X_{4m} beide Punkte p und p' in seinem Inneren enthält. Dann ist $p' = f(p) \in f(X_{4m})$ und $f(X_{4m})$ ist eine Kachel von T_{4m} . Da p' im Inneren von X_{4m} und $f(X_{4m})$ liegt, folgt $X_{4m} = f(X_{4m})$. Da f die Orientierung nicht erhält, ist dies unmöglich, ein Widerspruch. Daher kann es keine derartige Abbildung f geben.

Für die Folge $(1, 0, 1, 0, \dots)$ verwenden wir Beispiel 6.6 und verfahren analog.

(b) Wir folgen dem Beweis von Satz 6.4 und erhalten eine partielle $\{A, B\}$ -Parkettierung T_I . Wie in Beispiel 6.7 gezeigt, überdeckt T_I eine Halbebene. Wie im Beweis von Satz 6.4 angegeben, spiegeln wir T_I an der Grenzlinie der Halbebene und erhalten so eine spiegelsymmetrische $\{A, B\}$ -Parkettierung der gesamten Ebene. Die zugehörige $\{D, P\}$ -Parkettierung T hat also eine Spiegelsymmetrie. \square

Wir bestimmen nun die Anzahl der selbstähnlichen Penrose-Parkettierungen der Ebene (bis auf orientierungserhaltende Isometrie).

Satz 7.3. Es gibt bis auf orientierungserhaltende Isometrie genau 5 selbstähnliche $\{D, P\}$ -Parkettierungen der Ebene.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz von 5 derartigen Parkettierungen. Für jede der beiden Folgen $(0, 1, 0, 1, \dots)$ und $(1, 0, 1, 0, \dots)$ gibt es nach der Konstruktion in Satz 6.4 je zwei zueinander spiegelsymmetrische $\{D, P\}$ -Parkettierungen der Ebene, die diese Folge realisieren (siehe Bemerkung nach Satz 6.4). Nach Proposition 7.2 haben die beiden Parkettierungen, die wir aus je einer Folge erhalten, keine Spiegelsymmetrie, sind also zueinander nicht orientierungserhaltend isometrisch. Ferner gibt es eine $\{D, P\}$ -Parkettierung mit der Indexfolge $(0, 0, 0, \dots)$. Diese hat eine Spiegelsymmetrie. Also gibt es zwischen diesen 5 Parkettierungen paarweise keine orientierungserhaltende Isometrie.

Nun sei T eine beliebige selbstähnliche $\{D, P\}$ -Parkettierung der Ebene. Nach Satz 7.1 gibt es einen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$, so dass entweder $I(T, p) = (0, 0, 0, \dots)$ oder $I(T, p) = (0, 1, 0, 1, \dots)$ oder $I(T, p) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ ist. Nach Satz 6.15 gibt es eine Isometrie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die T auf eine der obigen 5 Parkettierungen abbildet. Falls $I(T, p) = (0, 0, 0, \dots)$, gibt es eine derartige Symmetrie, die orientierungserhaltend ist. Falls $I(T, p) = (0, 1, 0, 1, \dots)$ und f die Parkettierung T auf T' abbildet, aber f nicht orientierungserhaltend ist, so wählen wir die andere, zu T' spiegelsymmetrische Parkettierung T'' mit derselben Indexfolge und erhalten eine orientierungserhaltende Isometrie der Ebene, die T auf T'' abbildet. Falls $I(T, p) = (1, 0, 1, 0, \dots)$, so verfahren wir analog und erhalten eine orientierungserhaltende Isometrie der Ebene, die T auf eine der beiden anderen Parkettierungen mit derselben Indexfolge abbildet. Daher gibt es, bis auf orientierungserhaltende Isometrie, genau 5 selbstähnliche $\{D, P\}$ -Parkettierungen. \square

Man beachte, dass wir durch den Beweis von Satz 7.3 nicht nur die Anzahl, sondern auch eine genaue Beschreibung der selbstähnlichen Penrose-Parkettierungen der Ebene (bis auf orientierungserhaltende Isometrie) erhalten haben. Dies sind jeweils zwei $\{D, P\}$ -Parkettierungen für die beiden Indexfol-

gen $(0, 1, 0, 1, \dots)$ und $(1, 0, 1, 0, \dots)$ sowie die Parkettierung für die Indexfolge $(0, 0, 0, \dots)$.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir Parkettierungen der Ebene und insbesondere Penrose-Tilings untersucht. Zunächst haben wir eine hinreichende Bedingung dafür hergeleitet, dass eine Parkettierung keine echte Translationssymmetrie aufweist. Als Nächstes zeigten wir einen allgemeinen Existenzsatz, der garantiert, dass ein endliches System von Kacheln eine Parkettierung zulässt. Anschließend untersuchten wir die von Penrose eingeführten Rauten, Drachen und Pfeile sowie Dreiecke und ihre Zusammenhänge. Mit Hilfe des zuvor genannten Existenzsatzes bewiesen wir, dass sich mit diesen Kacheln die gesamte Ebene parkettieren lässt. Weiterhin zeigten wir, dass keine dieser Parkettierungen eine echte Translationssymmetrie hat. Danach ordneten wir jeder punktierten Penrose-Parkettierung eine Indexfolge bestehend aus Nullen und Einsen zu. Wir entwickelten einen vollständigen Beweis dafür, dass wir umgekehrt aus jeder dieser Indexfolgen eine zugehörige punktierte Penrose-Parkettierung konstruieren können. Diese Beziehung ist bijektiv. Schließlich definierten wir die Expansion von Parkettierungen und nannten Parkettierungen selbstähnlich, falls sie zu ihrer Expansion ähnlich sind. Mithilfe der Indexfolgen bewiesen wir, dass es bis auf orientierungserhaltende Isometrie genau 5 selbstähnliche Parkettierungen gibt, die wir auch explizit angegeben haben.

Die zuletzt untersuchte Selbstähnlichkeit wirft Fragen für weitere Forschung auf. Wir können die n -fache Expansion einer Parkettierung T definieren als diejenige Parkettierung, die wir erhalten, wenn wir auf die Parkettierung T die Expansion n -mal hintereinander anwenden. Wir nennen eine Parkettierung selbstähnlich n -ten Grades, falls sie ähnlich ist zu ihrer n -fachen Expansion. Nun stellt sich die Frage, wie viele und welche Parkettierungen selbstähnlich n -ten Grades sind für $n \geq 2$. Für $n = 1$ wurde dieses Problem im letzten Kapitel

dieser Arbeit gelöst. Wir merken nur an, dass eine spiegelsymmetrische Parkettierung, die selbstähnlich 2. Grades ist, in Beispiel 6.8 angegeben ist. Aufgrund der Charakterisierung der Penrose-Parkettierungen durch Indexfolgen ist klar, dass es für jedes $n \geq 2$ bis auf Isometrie nur endlich viele Parkettierungen gibt, die selbstähnlich n -ten Grades sind. Ihre explizite Beschreibung verlangt unter anderem eine genaue Analyse, welche dieser Parkettierungen spiegelsymmetrisch sind.

9 Literaturverzeichnis

1. W. Blaschke: Kreis und Kugel, Chelsea Publishing Company, New York 1949 (Nachdruck der Ausgabe Leipzig 1916)
2. B. Grünbaum, G. C. Shephard: Tilings and Patterns, Dover Publications, Mineola, New York, 2016
3. A. F. Ritter: Oxford Masterclasses in Geometry, Lecture notes, Oxford 2014
<https://people.maths.ox.ac.uk/ritter/masterclasses/ritter-lectures-on-penrose-tilings.pdf>
aufgerufen am 25. Juli 2020
4. R.M. Robinson: Comments on the Penrose tiles. Mimeographed notes, September 1975.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Ausschnitte von periodischen Parkettierungen	8
2.2	Ausschnitt einer Parkettierung mit $M = \{R\}$ ohne Translations- symmetrie	9
2.3	Ausschnitt einer Parkettierung mit $M = \{Q\}$	10
2.4	Ausschnitt einer nicht-periodischen Parkettierung mit $M = \{Q\}$	11
2.5	Ausschnitt einer nicht-periodischen Parkettierung	11
3.1	Erhalt der k -Selbstähnlichkeit	15
3.2	Erhalt der k -Kompositionseindeutigkeit	16
3.3	Ähnlichkeitsstreckungen von T	17
3.4	Anwendung von Satz 3.2 am Beispiel von Abbildung 2.5	18
4.1	Beeinflussung der Anlegemöglichkeiten	21
4.2	Abbildung der Gitterpunkte auf eine Folge x_1, x_2, \dots	24
5.1	Ausschnitt einer Parkettierung mit Rauten	29
5.2	Ausschnitt einer Parkettierung mit Drachen und Pfeilen	29
5.3	Die dicke und dünne Raute	30
5.4	Der Drachen und der Pfeil	30
5.5	Ausschnitt einer periodischen Parkettierung mit Drachen	31
5.6	Ausschnitt einer periodischen Parkettierung mit Pfeilen	31
5.7	Rauten mit Zacken und Einkerbungen	32
5.8	Protokacheln P3 mit gefärbten Ecken und gerichteten Kanten	33
5.9	Rauten mit Farben	33
5.10	alle Anlegemöglichkeiten für drei Sorten von Rauten	37
5.11	Protokacheln P2: Drachen und Pfeil mit gefärbten Ecken	38
5.12	Anlegemöglichkeiten für Drachen und Pfeile aus P2	39

5.13	Ausschnitt einer Parkettierung über $P3$	40
5.14	Ausschnitt einer Parkettierung über $P2$	41
5.15	Zerlegung von D in $A1$ -, $A2$ - Kacheln bzw. P in $B1$ -, $B2$ -Kacheln	42
5.16	$\tau K'$ für die Dreieckskacheln K aus Abbildung 5.15	45
5.17	Zerlegung von S in $A1$ -, $A2$ - Kacheln bzw. F in $\tau B1'$ -, $\tau B2'$ - Kacheln	46
5.18	Kompositionstrick 1	48
5.19	keine Parkettierung der Ebene möglich	48
5.20	Kompositionstrick 2	51
5.21	keine Par-	51
5.22	schrittweise Darstellung des Inflationsprozesses am Beispiel ei- ner $A1$ -Kachel	55
6.1	schrittweise Darstellung der Parkettierungen $T_{D,P}$, T_0 , T_1 , ..., T_4	62
6.2	Parkettierung der Ebene für $I = (0, 1, 0, 1, \dots)$	66
6.3	Parkettierung der Ebene für $I = (1, 0, 1, 0, \dots)$	67
6.4	Parkettierung der Halbebene für $I = (0, 0, 0, \dots)$	68
6.5	Parkettierung des Sektors mit dem Winkel $\frac{\pi}{5}$ für $I = (0, 0, 1, 0, \dots)$	69
6.6	Darstellung der möglichen Winkel in Fall 2	73
6.7	Darstellung zur Verdeutlichung der drei Fälle	77

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei allen bedanken, die mich während der Arbeit an meiner BeLL begleitet und unterstützt haben.

Ich bedanke mich ausdrücklich bei meinem externen Betreuer Herrn Dr. Frank Göring. Er hat mir das einzigartige Thema der Penrose-Tilings vorgeschlagen und nahegebracht. Seine Einführung in dieses Thema, unser Treffen und seine weiteren Vorschläge haben mir sehr geholfen und angespornt. Es war seine Idee, Penrose-Tilings auf Selbstähnlichkeit zu untersuchen. Über seine Einladung, diese Arbeit im Forschungsseminar der Arbeitsgruppe Algorithmische und diskrete Mathematik an der TU Chemnitz vorzustellen, habe ich mich riesig gefreut.

Ebenfalls möchte ich mich bei Frau Alexandra Krüger sehr bedanken, die als interne Betreuerin am WOG mich mit positiver Kritik motiviert hat.

Anschließend möchte ich mich noch bei meinen Eltern bedanken, welche mich auf dem ganzen Weg durch die Oberstufe durchgehend tatkräftig unterstützt haben.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Abschlussarbeit selbstständig und nur unter Verwendung der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben. Sowohl inhaltlich als auch wörtlich entnommene Inhalte wurden als solche kenntlich gemacht.

Datum: _____ Unterschrift: _____