

Práctica final: Cadenas de Markov

Alejandro Rodríguez Arguimbau

alejandro.rodriguez7@estudiant.uib.cat

Sergi Mayol Matos

sergi.mayol1@estudiant.uib.cat

Métodos de álgebra lineal

Índice

1. Introducción del problema	2
2. Planteamiento del problema	3
3. Resolución del problema	4
3.1 Apartado a	4
3.2 Apartado b	6
3.3 Apartado c	7
3.4 Apartado d	7

1. Introducción del problema

Las cadenas de Markov son una herramienta matemática empleadas para modelar situaciones que aparecen en diversos contextos, este describe un experimento o medición que se realiza una serie de veces de la misma forma, donde el resultado del experimento es una posibilidad entre varias y viene representado por un número finito de estados. La probabilidad de moverse de un lugar a otro son constantes y solo dependen del estado presente. En concreto, en el problema asignado, se pide estudiar el movimiento entre nueve zonas de una ciudad, cada una de ellas cubiertas por una antena de telefonía móvil y con la posibilidad de movimiento limitadas mediante una serie de puertas. Sobre estas nueve zonas se realiza un estudio sobre la posición y el movimiento de un individuo en etapas sucesivas, de donde se obtiene que: un individuo tiene la posibilidad de permanecer en la zona que se encuentra o desplazarse a otra, pero la probabilidad de cambiar a una nueva zona es el doble a la de permanecer en la zona.

Las zonas 5 y 8 tienen tres aperturas, por tanto, si el individuo está en una de esas zonas o se queda o sale. Quedarse = $\frac{1}{3}$, Salir = $\frac{2}{9}$, (salir se calcula de $\frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$).

La matriz T es la siguiente:

```
T =
0.3333    0    0    0.3333    0    0    0    0    0
0    0.3333    0.6667    0    0.2222    0    0    0    0
0    0.3333    0.3333    0    0    0    0    0    0
0.6667    0    0    0.3333    0    0    0.3333    0    0
0    0.3333    0    0    0.3333    0.6667    0    0.2222    0
0    0    0    0    0.2222    0.3333    0    0    0
0    0    0    0.3333    0    0    0.3333    0.2222    0
0    0    0    0    0.2222    0    0.3333    0.3333    0.6667
0    0    0    0    0    0    0    0.2222    0.3333
```

La manera sencilla de verlo es que cada columna representa la zona, si el valor es 0 significa que desde esa zona no se puede llegar a la otra con un único movimiento. En esta matriz se representan los valores de quedarse y salir calculados anteriormente.

La matriz inversa de T es la siguiente:

```
invT =
-0.5000    1.0000   -2.0000    1.7500    1.0000   -2.0000   -1.2500   -0.5000    1.0000
 2.0000   -1.0000    2.0000   -1.0000    2.0000   -4.0000   -1.0000    2.0000   -4.0000
-2.0000    1.0000    1.0000    1.0000   -2.0000    4.0000    1.0000   -2.0000    4.0000
 3.5000   -1.0000    2.0000   -1.7500   -1.0000    2.0000    1.2500    0.5000   -1.0000
 3.0000    3.0000   -6.0000   -1.5000    3.0000   -6.0000   -1.5000    3.0000   -6.0000
-2.0000   -2.0000    4.0000    1.0000   -2.0000    7.0000    1.0000   -2.0000    4.0000
-2.5000   -1.0000    2.0000    1.2500   -1.0000    2.0000    1.2500    0.5000   -1.0000
-1.5000    3.0000   -6.0000    0.7500    3.0000   -6.0000    0.7500   -1.5000    3.0000
 1.0000   -2.0000    4.0000   -0.5000   -2.0000    4.0000   -0.5000    1.0000    1.0000
```

Esta matriz la utilizaremos para la resolución de los siguientes apartados.

3. Resolución del problema

3.1 Apartado a

Para la resolución del primer ejercicio, debemos obtener los dos vectores iniciales:

- $x_0 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
- $y_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$.

Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x^n = T x^{n-1}$

A partir de la matriz inversa, utilizando la ecuación $Ax = b$, donde $A = T^{-1}$ y $b = x_0$ (y y_0 respectivamente).

Al preguntarnos el resultado después de 10 etapas, calculamos hasta x_{10} .

Por tanto, resolvemos para cada $i \in \{1, \dots, 10\}$, utilizando el algoritmo de factorización LU con pivotaje.

Etapas de x :

ETAPA 1:	ETAPA 2:	ETAPA 3:	ETAPA 4:	ETAPA 5:
0	1.5860e-17	1.5860e-17	0	1.8333e-03
0.3333	4.0737e-01	3.3330e-01	0.3123	2.8457e-01
0.3333	2.2220e-01	2.0986e-01	0.1811	1.6447e-01
-0.0000	-9.2519e-18	-1.0408e-17	0.0055	9.1333e-03
0.3333	2.2220e-01	2.7569e-01	0.2688	2.7379e-01
0.0000	7.4067e-02	7.4067e-02	0.0860	8.8400e-02
-0.0000	-5.5511e-17	1.6459e-02	0.0219	3.1889e-02
-0.0000	7.4067e-02	7.4067e-02	0.1024	1.1577e-01
-0.0000	-3.8720e-17	1.6459e-02	0.0219	3.0056e-02

ETAPA 6:	ETAPA 7:	ETAPA 8:	ETAPA 9:	ETAPA 10:
3.6555e-03	6.1838e-03	8.9066e-03	0.011848	0.014859
2.6535e-01	2.4841e-01	2.3455e-01	0.222683	0.212536
1.4968e-01	1.3834e-01	1.2892e-01	0.121157	0.114613
1.4896e-02	2.0536e-02	2.6638e-02	0.032730	0.038794
2.7078e-01	2.6783e-01	2.6349e-01	0.258918	0.254171
9.0309e-02	9.0276e-02	8.9610e-02	0.088423	0.087012
3.9401e-02	4.7010e-02	5.3738e-02	0.059956	0.065584
1.3010e-01	1.4050e-01	1.4924e-01	0.156100	0.161628
3.5745e-02	4.0826e-02	4.4831e-02	0.048108	0.050725

El resultado de x10 es: (0.014859, 0.212536, 0.114613, 0.038794, 0.254171, 0.087012, 0.065584, 0.161628, 0.050725).

Etapas de y:

ETAPA 1:	ETAPA 2:	ETAPA 3:	ETAPA 4:	ETAPA 5:
1.0867e-17	9.9127e-18	0.024691	0.032922	0.042371
2.8784e-17	4.9382e-02	0.049383	0.068282	0.077224
1.3696e-33	-7.1274e-17	0.016461	0.021948	0.030077
3.7007e-17	7.4073e-02	0.074074	0.094192	0.102118
2.2222e-01	1.4815e-01	0.183812	0.179241	0.184355
3.2895e-17	4.9382e-02	0.049383	0.057308	0.058934
2.2222e-01	1.4815e-01	0.159121	0.146319	0.143812
3.3333e-01	3.8271e-01	0.308642	0.286388	0.259665
2.2222e-01	1.4815e-01	0.134430	0.113397	0.101441

ETAPA 6:	ETAPA 7:	ETAPA 8:	ETAPA 9:	ETAPA 10:
0.048163	0.052796	0.056069	0.058503	0.060260
0.086760	0.093695	0.099514	0.104086	0.107769
0.035767	0.040842	0.044846	0.048120	0.050735
0.110224	0.115410	0.119441	0.122277	0.124333
0.184186	0.184743	0.184576	0.184471	0.184319
0.060612	0.061134	0.061432	0.061494	0.061492
0.139680	0.137321	0.135251	0.133717	0.132469
0.243087	0.229531	0.219688	0.212118	0.206415
0.091517	0.084525	0.079182	0.075214	0.072209

El resultado de y10 es: (0.058503, 0.104086, 0.048120, 0.122277, 0.184471, 0.061494, 0.133717, 0.212118, 0.075214);

Como se nos pide el resultado en las zona 2, multiplicamos el resultado de la posición 2 del vector x10 por el de la posición 2 del vector y10. Respectivamente, para calcular la zona 5.

- Probabilidad de coincidir en la zona 2 $x_{10} \cdot y_{10} = 0.212536 \cdot 0.104086 = 0.021956$
- Probabilidad de coincidir en la zona 5 $x_{10} \cdot y_{10} = 0.254171 \cdot 0.184471 = 0.045986$

3.2 Apartado b

Si el individuo puede estar en cualquier zona, pero la probabilidad de estar en la zona 5 es el doble que la del resto, entonces el vector inicial será el de la columna 5 de la matriz $z_0 = (0,2/9,0,0,1/3,2/9,0,2/9,0)$. El otro individuo está en la zona 3, por tanto, el vector $x_0 = (0,0,1,0,0,0,0,0,0)$.

Procediendo igual que en el apartado anterior obtenemos el resultado:

Etapas de z:

Etapas de z:	Etapas de z:	Etapas de z:	Etapas de z:	Etapas de z:
Etapas de z:	Etapas de z:	Etapas de z:	Etapas de z:	Etapas de z:
-1.5860e-17	-7.9302e-18	5.4870e-03	9.1450e-03	0.013684
1.4815e-01	1.8381e-01	1.7924e-01	1.8253e-01	0.180531
7.4074e-02	7.4075e-02	8.5962e-02	8.8401e-02	0.090310
9.2519e-18	1.6461e-02	2.1948e-02	3.1906e-02	0.039426
3.8272e-01	3.0865e-01	2.9462e-01	2.7339e-01	0.261789
1.4815e-01	1.3443e-01	1.1340e-01	1.0327e-01	0.095177
4.9383e-02	4.9383e-02	6.2797e-02	6.8082e-02	0.074298
1.4815e-01	1.8382e-01	1.7925e-01	1.8436e-01	0.184192
4.9383e-02	4.9383e-02	5.7310e-02	5.8937e-02	0.060615
Etapas de z:	Etapas de z:	Etapas de z:	Etapas de z:	Etapas de z:
0.017703	0.021578	0.025112	0.028363	0.031322
0.178559	0.175667	0.172620	0.169456	0.166339
0.090280	0.089613	0.088427	0.087016	0.085491
0.047031	0.053759	0.059976	0.065603	0.070728
0.251823	0.244450	0.238343	0.233292	0.228957
0.089901	0.085928	0.082965	0.080620	0.078716
0.078840	0.083012	0.086609	0.089856	0.092781
0.184749	0.184582	0.184476	0.184324	0.184231
0.061137	0.061434	0.061496	0.061493	0.061459

$z_{10} = (0.031322, 0.166339, 0.085491, 0.070728, 0.228957, 0.078716, 0.092781, 0.184231, 0.061459)$

Etapas de x:

Etapas de x:	Etapas de x:	Etapas de x:	Etapas de x:	Etapas de x:
Etapas de x:	Etapas de x:	Etapas de x:	Etapas de x:	Etapas de x:
0	1.5860e-17	1.5860e-17	0	0
0.6667	4.4443e-01	4.1975e-01	0.3621	0.3289
0.3333	3.3333e-01	2.5925e-01	0.2263	0.1961
-0.0000	-8.2231e-18	-1.8504e-17	-0.0000	0.0037
0.0000	2.2223e-01	2.2222e-01	0.2579	0.2652
0.0000	6.5789e-17	4.9384e-02	0.0658	0.0792
-0.0000	-5.2083e-17	-8.3267e-17	0.0110	0.0183
-0.0000	-7.4012e-17	4.9384e-02	0.0658	0.0902
-0.0000	-4.3860e-17	-6.7447e-17	0.0110	0.0183
Etapas de x:	Etapas de x:	Etapas de x:	Etapas de x:	Etapas de x:
1.2333e-03	2.8555e-03	5.0828e-03	7.6409e-03	0.010455
2.9930e-01	2.7663e-01	2.5779e-01	2.4227e-01	0.229186
1.7500e-01	1.5810e-01	1.4491e-01	1.3423e-01	0.125500
7.3333e-03	1.2393e-02	1.7840e-02	2.3723e-02	0.029745
2.7088e-01	2.7079e-01	2.6879e-01	2.6524e-01	0.261006
8.5333e-02	8.8640e-02	8.9722e-02	8.9638e-02	0.088822
2.7378e-02	3.5415e-02	4.3163e-02	5.0230e-02	0.056729
1.0730e-01	1.2252e-01	1.3453e-01	1.4435e-01	0.152195
2.6144e-02	3.2559e-02	3.8080e-02	4.2589e-02	0.046274

$x_{10} = (0.010455, 0.229186, 0.125500, 0.029745, 0.261006, 0.088822, 0.056729, 0.152195, 0.046274)$

Como se nos pide en la zona 1, multiplicamos el resultado de la posición 1 del vector x_{10} por el de la posición 1 del vector z_{10} .

$$x_{10} * z_{10} = 0.031322 * 0.010455 = 3.2747e-04$$

3.3 Apartado c

Para resolver este apartado, seleccionamos el mayor de los valores entre x_{10} e y_{10} :

$$\text{Zona 1: } 0.060260 * 0.017884 = 1.0777e-03$$

$$\text{Zona 2: } 0.107769 * 0.203736 = 0.021956$$

$$\text{Zona 3: } 0.050735 * 0.109050 = 5.5327e-03$$

$$\text{Zona 4: } 0.124333 * 0.044699 = 5.5576e-03$$

$$\text{Zona 5: } 0.184319 * 0.249494 = 0.045986$$

$$\text{Zona 6: } 0.061492 * 0.085486 = 5.2567e-03$$

$$\text{Zona 7: } 0.132469 * 0.070710 = 9.3669e-03$$

$$\text{Zona 8: } 0.206415 * 0.166036 = 0.034272$$

$$\text{Zona 9: } 0.072209 * 0.052826 = 3.8145e-03$$

Por tanto, la zona más probable es la zona 5, al ser la zona con el valor más alto.

3.4 Apartado d

Debemos ver todos los valores de x_{10} y z_{10} . De esta manera obtenemos la probabilidad de que ambos individuos coincidan en la misma zona.

$$\text{Zona 1: } 0.031322 * 0.010455 = 3.2747e-04$$

$$\text{Zona 2: } 0.166339 * 0.229186 = 0.038123$$

$$\text{Zona 3: } 0.085491 * 0.125500 = 0.010729$$

$$\text{Zona 4: } 0.070728 * 0.029745 = 2.1038e-03$$

$$\text{Zona 5: } 0.228957 * 0.261006 = 0.059759$$

$$\text{Zona 6: } 0.078716 * 0.088822 = 6.9917e-03$$

$$\text{Zona 7: } 0.092781 * 0.056729 = 5.2634e-03$$

$$\text{Zona 8: } 0.184231 * 0.152195 = 0.028039$$

$$\text{Zona 9: } 0.061459 * 0.046274 = 2.8440e-03$$