

Elaborato Calcolo Numerico

Alessio Santoro (7029440) - Lorenzo Campinoti (7030227)

A.A. 2022/2023

Nota: Per gli esercizi che prevedono delle *function* Matlab, si specifica nella relativa risposta al quesito i file tra gli allegati a cui essa si riferisce.

1

Si considera lo sviluppo delle funzioni $f(x-h)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$, $f(x+3h)$:

$$\begin{aligned}f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \\f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \\f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \\f(x+3h) &= f(x) + 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) + \frac{27h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{81h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5)\end{aligned}$$

Si sostituiscono le espressioni così trovate nella parte sinistra dell'equazione iniziale e si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{4} \left[f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \right] + \\& -\frac{5}{6} [f(x)] + \\& +\frac{3}{2} \left[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \right] + \\& -\frac{1}{2} \left[f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \right] + \\& +\frac{1}{12} \left[f(x) + 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) + \frac{27h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{81h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \right]\end{aligned}$$

Si procede a moltiplicare i coefficienti di ogni espressione e poi raccogliere i termini che contengono le derivate dello stesso ordine, una volta raccolti i termini assumono i seguenti valori che, stando all'equazione iniziale dovranno poi essere

sommati:

$$f(x) \left[-\frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right] = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) \cdot h \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} 2 + \frac{1}{12} 3 \right] = hf'(x) \quad (2)$$

$$f''(x) \cdot \frac{h^2}{2} \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} 4 + \frac{1}{12} 9 \right] = 0 \quad (3)$$

$$f^{(3)}(x) \cdot \frac{h^3}{6} \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} 8 + \frac{1}{12} 27 \right] = 0 \quad (4)$$

$$f^{(4)}(x) \cdot \frac{h^4}{24} \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} 16 + \frac{1}{12} 81 \right] = 0 \quad (5)$$

Dalle espressioni (1)...(5) e dalle proprietà degli "O-grande" di moltiplicazione per una costante segue l'asserto.

2

La doppia precisione dello standard IEEE 754 è una rappresentazione in base binaria, in forma normalizzata (1.f) che approssima per arrotondamento e occupa 64 bit, di cui 52 dedicati alla frazione (53 alla mantissa).

Si può dunque ottenere il valore della precisione di macchina (u) dalla seguente espressione, dove: $b = 2$ rappresenta la base, e $m = 53$ la mantissa:

$$u = \frac{1}{2} b^{1-m} = 2^{-53}$$

Invece **eps** è definito dalla stessa funzione **help** di Matlab come la distanza tra 1.0 e il maggior valore a doppia precisione successivo disponibile, ovvero 2^{-52} .

Si osserva infatti che, considerato il valore $x = 1 + u = 1 + 2^{-53} \neq 1$ e sia fl la funzione di floating, allora vale che $fl(x) = 1$, poichè $u = 2^{-53} < 2^{-52} = \mathbf{eps}$.

Vi è dunque un errore di rappresentazione del valore x (ε_x), determinato dalla seguente espressione:

$$\varepsilon_x = \frac{|x - fl(x)|}{|x|} = \frac{|1 + 2^{-53} - 1|}{|1 + 2^{-53}|} = \frac{|2^{-53}|}{|1 + 2^{-53}|} < |2^{-53}| = u$$

3

La cancellazione numerica è quel fenomeno in cui, sommando in aritmetica finita due numeri quasi opposti si verifica la perdita di cifre significative. Questo è dovuto all'espressione del numero di condizionamento della somma in aritmetica finita (k) che per due valori x e y è dato da:

$$k = \frac{|x| + |y|}{|x + y|}$$

Infatti, se $x \rightarrow -y$ allora $k \rightarrow \infty$ e la somma tra x e y risulta mal condizionata.

4

Sia $x^* \in \mathbb{R}$ il valore di cui si ricerca la radice sesta.

Per calcolarlo si definisce una funzione $f(x)$ come segue:

$$f(x) = x^6 - x^*$$

La cui derivata è:

$$f'(x) = 6x^5$$

La funzione $f(x)$ si annulla solo nella radice sesta di x^* , quindi avendo un'approssimazione iniziale x_0 si può applicare il metodo di Newton alla funzione $f(x)$ per ricercarne una radice che coinciderà con il valore cercato:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^6 - x^*}{6x_i^5} = \frac{1}{6} \left[5x_i + \frac{x^*}{x_i} \right]$$

La function che implementa il metodo presentato è contenuta nel file `radice.m`:

```
function root = radice(x)
%
%   root = radice(x)
%
%   Questa funzione calcola la radice sesta di un valore non
%   negativo
%   attraverso il metodo iterativo di Newton utilizzando
%   solo operazioni elementari
%
%   Input:
%       x: valore di cui si vuole calcolare la radice sesta
%   Output:
%       root; risultato del calcolo
if(x<0), error("Value x must be not negative");end
if(x==0)
    root = 0;
    return;
end

root = x;
er = 1;

while(er >= eps*(1+abs(x)))
    xi = (5*root+x/root^5)/6;
    er = abs(root - xi);
    root = xi;
end
return;
end
```

I dati sul confronto tra il risultato offerto dalla funzione e il valore $x^{1/6}$ sono contenuti nel file `4_table.txt`:

x	radice(x)	$x^{1/6}$	errore
-----	-----	-----	-----
1e-10	0.021544	0.021544	3.4694e-18
1.1288e-09	0.032268	0.032268	6.9389e-18
1.2743e-08	0.048329	0.048329	6.9389e-18
1.4384e-07	0.072385	0.072385	1.3878e-17
1.6238e-06	0.10841	0.10841	4.1633e-17
1.833e-05	0.16238	0.16238	0
0.00020691	0.2432	0.2432	2.7756e-17
0.0023357	0.36425	0.36425	5.5511e-17
0.026367	0.54556	0.54556	0
0.29764	0.81711	0.81711	1.1102e-16
3.3598	1.2238	1.2238	2.2204e-16
37.927	1.833	1.833	0
428.13	2.7453	2.7453	4.4409e-16
4832.9	4.1118	4.1118	8.8818e-16
54556	6.1585	6.1585	0
6.1585e+05	9.2239	9.2239	1.7764e-15
6.9519e+06	13.815	13.815	1.7764e-15
7.8476e+07	20.691	20.691	3.5527e-15
8.8587e+08	30.99	30.99	3.5527e-15
1e+10	46.416	46.416	7.1054e-15

5

Il seguente testo è contenuto nel file `newtonMethod.m` e rappresenta il metodo di Newton:

```
function [x,n] = newtonMethod(f,df, x0, tol)
%
%   x = newtonMethod(f,df,x0,tol, itmax)
%
%   Ricerca la radice di una funzione di cui è nota la
%   derivata a partire
%   da un approssimazione iniziale mediante il metodo di
%   Newton
%
%   Input:
%   f: funzione di cui si ricercano le radici
%   df: derivata della funzione f
%   x0: approssimazione iniziale della radice
%   tol: errore assoluto ammissibile
%
%   Output:
%   x: approssimazione della radice di f
%   n: numero di iterazioni eseguite
%
% controllo valori input
if nargin ~= 4, error("Missing arguments"); end
```

```

if tol<0, error("Invalid arguments: tolerance must be non
    negative"); end
x = x0;
fx = feval(f,x);
dfx = feval(df,x);

x = x0- fx/dfx;

n = 1;
while abs(x-x0) > tol*( 1 + abs(x0))

    x0 = x;

    fx = feval(f,x0);
    dfx = feval(df, x0);

    if dfx==0
        error("Value of derivative function is 0, invalid
            first approximation");
    end
    n = n+1;
    x = x0 - fx/dfx; %calcolo effettivo
end
return
end

```

Da qui in poi viene presentato il contenuto del file `secantsMethod.m` che rappresenta il metodo delle secanti:

```

function [x,i] = secantsMethod(f, x0, x1, tol)
%
%   x = secantsMethod(f,df,x0,tol, itmax)
%
%   Ricerca la radice di una funzione di cui è nota la
%   derivata a partire
%   da un approssimazione iniziale mediante il metodo delle
%   secanti
%
%   Input:
%       f: funzione di cui si ricercano gli 0
%       x0: prima approssimazione iniziale della radice
%       x1: seconda approssimazione iniziale della radice
%       tol: errore assoluto ammissibile
%   Output:
%       x: approssimazione della radice di f
%       i: numero di iterazioni eseguite

%controllo valori input
if nargin ~= 4, error("Missing arguments"); end
if tol<0, error("Invalid arguments: tolerance must be non
    negative"); end

fx0 = feval(f,x0);
fx1= feval(f,x1);

```

```

x = x1-(fx1*(x1-x0))/(fx1-fx0);

i = 1;
while abs(x-x1) > tol*( 1 + abs(x1))
    i = i+1;

    x0 = x1;
    x1 = x;
    fx0 = fx1;
    fx1 = feval(f,x1);
    if fx0 == fx1, error("Invalid initial approximations: "+
        ...
        "function assume same value in different points
        ");end
    x = x1-(fx1*(x1-x0))/(fx1-fx0));
end
return
end

```

6

Nel file 6_result.txt è contenuta la tabella dei risultati delle funzioni precedentemente mostrate:

Tolleranza	Ris. Newton	Iterazioni Newton	Ris. secanti	Iterazioni secanti
-----	-----	-----	-----	-----
0.001	0.73909	8	0.7391	4
1e-06	0.73909	9	0.73909	6
1e-09	0.73909	10	0.73909	7
1e-12	0.73909	10	0.73909	7

Per entrambi i metodi, la parte più costosa computazionalmente è la valutazione funzionale, dato che tutte le altre operazioni che vengono svolte sono operazioni elementari.

Il metodo di Newton esegue due valutazioni in ogni iterazione.

Sia n il numero di iterazioni, il costo computazionale del metodo di Newton è dato da $2(n+1)$.

Il metodo delle secanti esegue due valutazioni iniziali e poi una per ogni iterazione, quindi il suo costo computazionale per n iterazioni è dato da $n+2$.

Tolleranza	Iterazioni Newton	Costo Newton	Iterazioni secanti	Costo secanti
10^{-3}	8	16	4	6
10^{-6}	9	18	6	8
10^{-9}	10	20	6	8
10^{-12}	10	20	7	9

7

La seguente tabella fornisce i risultati dell'utilizzo delle funzioni precedenti per calcolare la radice della funzione $f(x) = [x - \cos(x)]^5$:

tolleranza	Newton ris.	Newton iter.	Secant ris.	Secant iter.
10e-3	0.74512	18	0.73015	26
10e-6	0.73909	49	0.73908	70
10e-9	0.73909	80	0.73909	115
10e-12	0.73909	111	0.73909	159

Dopo aver sviluppato la *function* `modifiedNewtonMethod.m` si sono riscontrati i seguenti risultati:

tolleranza	risultato Newton modificato	numero di iterazioni
1e-3	0.73909	22
1e-6	0.73909	23
1e-9	0.73909	24
1e-12	0.73909	24

Come atteso, i metodi di Newton e delle secanti sono più lenti a causa del metodo di Newton modificato, a causa della natura multipla della radice.

Infatti il metodo di Newton e quello delle secanti hanno convergenza quadratica nel caso di radici a molteplicità 1, ma solo lineare nel caso di radici multiple.

La modifica che abbiamo fatto, ovvero $x_{i+1} = x_i - m \cdot \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, nonostante richieda che la molteplicità m della radice sia nota, ripristina la convergenza quadratica del metodo di Newton.

I risultati sono contenuti nel file `table_7.txt` e si mostra di seguito il codice della *function* del metodo di Newton modificato:

```
function [x,n] = modifiedNewtonMethod(f,df, m, x0, tol)
%
%   x = newtonMethod(f,df,x0,tol, itmax)
%
%   Ricerca la radice di una funzione di cui è nota la
%   derivata a partire
%   da un approssimazione iniziale mediante il metodo di
%   Newton
%
%   Input:
%       f: funzione di cui si ricercano le radici
%       df: derivata della funzione f
%       m: molteplicità (nota) della radice
%       x0: approssimazione iniziale della radice
%       tol: errore assoluto ammissibile
%
%   Output:
%       x: approssimazione della radice di f
%       n: numero di iterazioni eseguite
%
% controllo valori input
if nargin ~= 5, error("Missing arguments"); end
if tol<0, error("Invalid arguments: tolerance must be non
```

```

        negative"); end
x = x0;
fx = feval(f,x);
dfx = feval(df,x);

x = x0 - m*fx/dfx;

n = 1;
while abs(x-x0) > tol*(1 + abs(x0))

    x0 = x;

    fx = feval(f,x0);
    dfx = feval(df, x0);

    if dfx==0
        error("Value of derivative function is 0, invalid
            first approximation");
    end
    n = n+1;
    x = x0 - m*fx/dfx; %calcolo effettivo
end
return
end

```

8

Il codice della *function* è contenuto nel file mialu.m:

```

function x = mialu(A,b)
%
% x = mialu(A,b)
%
% presa in input una matrice ed un vettore calcola la
% soluzione del
% corrispondente sistema lineare utilizzando il metodo di
% fattorizzazione
% LU con pivoting parziale
%
% Input:
% A = matrice dei coefficienti
% b = vettore dei termini noti
%
% Output:
% x = soluzione del sistema lineare
%
[m,n] = size(A);
if m ~= n
    error("La matrice non è quadrata");
end
if n ~= length(b)
    error("la lunghezza del vettore dei termini noti " + ...

```



```

        "non è coerente con quella della matrice");
end
p = (1:n).';
for i = 1:n
    [mi, ki] = max(abs(A(i:n,i)));
    if mi == 0
        error("la matrice è singolare");
    end
    ki = ki+i-1;
    if ki>i
        A([i,ki], :) = A([ki,i], :);
        p([i,ki]) = p([ki,i]);
    end
    A(i+1:n,i) = A(i+1:n,i)/A(i,i);
    A(i+1:n,i+1:n) = A(i+1:n,i+1:n)-A(i+1:n,i)*A(i,i+1:n);
end

x = b(p);
for i=1:n
    x(i+1:n) = x(i+1:n)-A(i+1:n,i)*x(i);
end
for i=n:-1:1
    x(i) = x(i)/A(i,i);
    x(1:i-1) = x(1:i-1)-A(1:i-1,i)*x(i);
end
return;
end

```

Un esempio di utilizzo è contenuto nel file di testo `ex_8_mialu.txt`:

9

Il codice della *function* è contenuto nel file `mialdl.m`:

```

function x = mialdl(A,b)
%
% x = mialdl(A,b)
%
% presa in input una matrice ed un vettore calcola la
% soluzione del
% corrispondente sistema lineare utilizzando il metodo di
% fattorizzazione
% LDL
%
% Input:
% A = matrice dei coefficienti
% b = vettore dei termini noti
%
% Output:
% x = soluzione del sistema lineare
%
[m,n] = size(A);
if m ~= n

```

```

        error("la matrice non è quadrata");
    end
    if n ~= length(b)
        error("la lunghezza del vettore dei termini noti " + ...
            "non è coerente con quella della matrice");
    end
    if A(1,1) <= 0
        error("la matrice non è sdp");
    end
    % la matrice non è memorizzata in forma compressa! (cit.
    libro)
    A(2:n,1) = A(2:n,1)/A(1,1);
    for i = 2:n
        v = (A(i,1:i-1).') .* diag(A(1:i-1,1:i-1));
        A(i,i) = A(i,i) - A(i,1:i-1)*v;
        if A(i,i) <= 0
            error("la matrice non è sdp");
        end
        A(i+1:n,i) = (A(i+1:n,i) - A(i+1:n,1:i-1) * v) / A(i,i);
    end
    x = b;
    for i = 2:n
        x(i:n) = x(i:n) - A(i:n,i-1) * x(i-1);
    end
    x = x ./ diag(A);
    for i = n-1:-1:1
        x(1:i) = x(1:i) - A(i+1,1:i) .* x(i+1);
    end
end
end

```

Un esempio di utilizzo è contenuto nel file di testo 9_mialdl1.txt:

% si genera una matrice quadrata casuale

A = randi([-8,8],4)

A =

0	0	2	-3
-1	0	-2	7
-1	5	5	6
-3	5	1	1

% si generano i valori di una diagonale

d = randi([5,30],4,1)

d =

21
20
10
12

% si costruisce una matrice adeguata per la fattorizzazione LDL

```

A = tril(A,-1)+triu(A',1)+diag(d)

A =

    21    -1    -1    -3
   -1    20     5     5
   -1     5    10     1
   -3     5     1    12

% Si genera la soluzione, da confrontare dopo
x = randi([-8,8],4,1)

x =

     0
    -5
     6
    -5

% si calcolano i termini noti
b = A*x

b =

    14
   -95
    30
   -79

% si usa la funzione per calcolare la soluzione
mialdl(A,b)

ans =

    0.0000
   -5.0000
    6.0000
   -5.0000

A = randi([-8,8],4)

A =

    -7     7    -4     0
    -4     4    -1    -5
     5     0     8     0
    -8     1     1     2

d = randi([5,30],4,1)

```

```

d =

    22
    15
    14
    30

A = tril(A,-1)+triu(A',1)+diag(d)

A =

    22    -4     5    -8
   -4    15     0     1
     5     0    14     1
   -8     1     1    30

x = randi([-8,8],4,1)

x =

   -8
     7
     7
     5

b = A*x

b =

  -209
   142
    63
   228

mialdl(A,b)

ans =

  -8.0000
   7.0000
   7.0000
   5.0000

```

10

La funzione è nel file `functions/miaqr.m`, mostrato di seguito insieme ad un esempio in cui viene applicato:

```

function [x,nr] = miaqr(A,b)
%
%   [x, nr] = miaqr(A,b)
%
%   Calcola la soluzione del sistema lineare
%   sovradimensionato Ax = b
%   nel senso dei minimi quadrati e restituisce la norma del
%   corrispondente vettore residuo
%
%   Input:
%   A:   matrice dei coefficienti del sistema
%   b:   vettore dei termini noti
%   Output:
%   x:   soluzione nel senso dei minimi quadrati
%   nr:  norma del vettore residuo
[m,n] = size(A);
if(n>=m), error("Il sistema non è sovradimensionato"); end
if(m~=length(b)), error("Le dimensioni della matrice e del
    vettore " + ...
        "non sono compatibili");end
for i=1:n
    alfa = norm( A(i:m,i));
    if alfa==0,error("La matrice A non ha rango massimo");
        end
    if(A(i,i)>=0), alfa = -alfa; end
    v = A(i,i) - alfa;
    A(i,i) = alfa;
    A(i+1:m,i) = A(i+1:m,i)/v;
    beta = -v/alfa;
    A(i:m,i+1:n) = A(i:m,i+1:n)-(beta*[1;A(i+1:m,i)])*...
        ([1;A(i+1:m,i)]'*A(i:m,i+1:n));
end
for i=1:n
    v = [1;A(i+1:m,i)];
    beta = 2/(v'*v);
    b(i:end) = b(i:end)-(beta*(v'*b(i:end)))*v;
end
for i=n:-1:1
    b(i) = b(i)/A(i,i);
    b(1:i-1) = b(1:i-1)-A(1:i-1,i)*b(i);
end
x = b(1:n);
nr = norm(b(n+1:m));
return ;
end

```

```
>> A = randi([-20,20],7,4)
```

```
A =
```

```

-6     6    -13    -1
13    -2     -5    -3

```

```

-20    2    5    -2
-19   -8   11   -8
-14   10  -17    0
  6   -13   18    0
 10    8   11   13

>> b = randi([-20,20],7,1)

b =

    12
     6
    -5
    13
     1
    -6
    18

>> [x,nr] = miaqr(A,b)

x =

    0.5023
    2.5325
    1.1667
   -2.1687

nr =

    22.8572

>> A\b

ans =

    0.5023
    2.5325
    1.1667
   -2.1687

>> A = randi([-20,20],7,4)

A =

    15   -11    -8   -16
     2    14    17   -10
     5   -13    -3    -4
     4   -11   -13     4
   -12  -14    17   -10

```

```

-8   -11   20   4
-1   -3   -3   9

>> b = randi([-20,20],7,1)

b =

-11
-16
-8
-7
-3
0
-17

>> [x,nr] = miaqr(A,b)

x =

-1.2544
0.2774
-0.6423
-0.2978

nr =

22.2472

>> A\b

ans =

-1.2544
0.2774
-0.6423
-0.2978

>>

```

11

Di seguito un esempio di applicazione di `mialu` per risolvere i sistemi generati da `linsis`:

```
[A1,A2,b1,b2]=linsis(5)
```

A1 =

0.0659	-0.4423	0.2073	-0.5127	0.3531
0.7016	-0.2493	-0.1158	0.1664	-0.0385
-0.1391	-0.4272	0.4168	0.2575	-0.0030
0.2598	-0.4140	-0.0020	-0.2632	-0.6674
0.0654	-0.2921	-0.6037	-0.1323	0.5153

A2 =

-0.2172	-0.0838	0.2868	-0.3463	0.3624
0.3869	0.1493	-0.0275	0.3514	-0.0281
-0.1833	-0.3713	0.4292	0.2834	-0.0016
-0.0576	-0.0121	0.0871	-0.0767	-0.6569
-0.1544	-0.0139	-0.5420	-0.0032	0.5225

b1 =

-0.3287
0.4645
0.1050
-1.0869
-0.4475

b2 =

0.0019
0.8320
0.1565
-0.7163
-0.1910

```
mialu(A1,b1)
```

ans =

1.0000
1.0000
1.0000
1.0000


```

1.0000

mialu(A2,b2)

ans =

1.0000
1.0000
1.0000
1.0000
1.0000

```

Il risultato sembra essere corretto, ma se si sottrae le soluzioni ad un vettore composto di soli 1, si può osservare l'errore nella risoluzione.
 Nel sistema $A_1x = b_1$ l'errore è nell'ordine di 10^{-15} mentre nel secondo sistema $A_2x = b_2$ l'ordine di errore è di 10^{-6} .
 L'errore molto maggiore nel secondo sistema è dovuto al mal condizionamento della matrice dei coefficienti.

```

mialu(A1,b1)-[1 1 1 1 1]'

ans =

1.0e-15 *

0
-0.1110
0
0
0.2220

```

```

mialu(A2,b2)-[1 1 1 1 1]'

ans =

1.0e-06 *

0.3523
-0.4462
-0.0989
-0.2071
-0.0116

```

```

>> cond(A1)

ans =

2.5000

>> cond(A2)

```

```

ans =

    1.0000e+10

>> cond(b1)

ans =

     1

>> cond(b2)

ans =

     1

>>

```

12

Similmente a quanto si è ottenuto per l'esercizio precedente, si può osservare come i risultati ottenuti dalla funzione `mialdl` siano accurati con un ordine di grandezza dell'errore di 10^{-15} per il primo sistema e 10^{-6} per il secondo. Anche in questo caso la differenza è dovuta alla differenza del condizionamento delle due matrici A_1 e A_2 .

```
[A1,A2,b1,b2] = linsis(5,1)
```

```

A1 =

    0.7625    0.0003    0.1094    0.0730    0.1782
    0.0003    0.7442    0.0084    0.1772    0.1085
    0.1094    0.0084    0.6419    0.0332   -0.1291
    0.0730    0.1772    0.0332    0.8375   -0.1198
    0.1782    0.1085   -0.1291   -0.1198    0.8139

```

```

A2 =

    0.5197   -0.2696    0.0716   -0.1992   -0.0102
   -0.2696    0.4441   -0.0337   -0.1254   -0.1010
    0.0716   -0.0337    0.6360   -0.0092   -0.1585
   -0.1992   -0.1254   -0.0092    0.5324   -0.3310
   -0.0102   -0.1010   -0.1585   -0.3310    0.6677

```

```

b1 =

    1.1234
    1.0385

```

```

0.6638
1.0011
0.8517

b2 =

    0.1124
   -0.0855
    0.5063
   -0.1323
    0.0670

>> x1 = mialdl(A1,b1)

x1 =

    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000

>> x2 = mialdl(A2,b2)

x2 =

    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000

>> x1 - [1 1 1 1 1]'

ans =

    1.0e-15 *

         0
   -0.4441
   -0.1110
   -0.1110
         0

>> x2 - [1 1 1 1 1]'

ans =

    1.0e-06 *

```

```

0.3138
0.3488
0.0489
0.3518
0.2435

```

```
>>
```

13

Di seguito si mostra come sono stati assegnati i valori richiesti, le soluzioni trovate con la funzione `miaqr` sono confrontate con il risultato dell'operatore `\`.

```

>> A = [ 1 3 2; 3 5 4; 5 7 6; 3 6 4; 1 4 2 ];
>> b = [ 15 28 41 33 22 ]';
>> D = diag(1:5);
>> D1 = diag(pi*[1 1 1 1 1])

```

```
D1 =
```

```

3.1416      0      0      0      0
      0  3.1416      0      0      0
      0      0  3.1416      0      0
      0      0      0  3.1416      0
      0      0      0      0  3.1416

```

```
>> [x,nr] = miaqr(A,b)
```

```
x =
```

```

3.0000
5.8000
-2.5000

```

```
nr =
```

```
1.2649
```

```
>> A\b
```

```
ans =
```

```

3.0000
5.8000
-2.5000

```

```
>> [x,nr] = miaqr(D*A,D*b)
```

```

x =

    -0.6026
     4.7017
     1.7584

nr =

     3.7352

>> (D*A)\(D*b)

ans =

    -0.6026
     4.7017
     1.7584

>> [x,nr] = miaqr(D1*A,D1*b)

x =

     3.0000
     5.8000
    -2.5000

nr =

     3.9738

>> (D1*A)\(D1*b)

ans =

     3.0000
     5.8000
    -2.5000

```

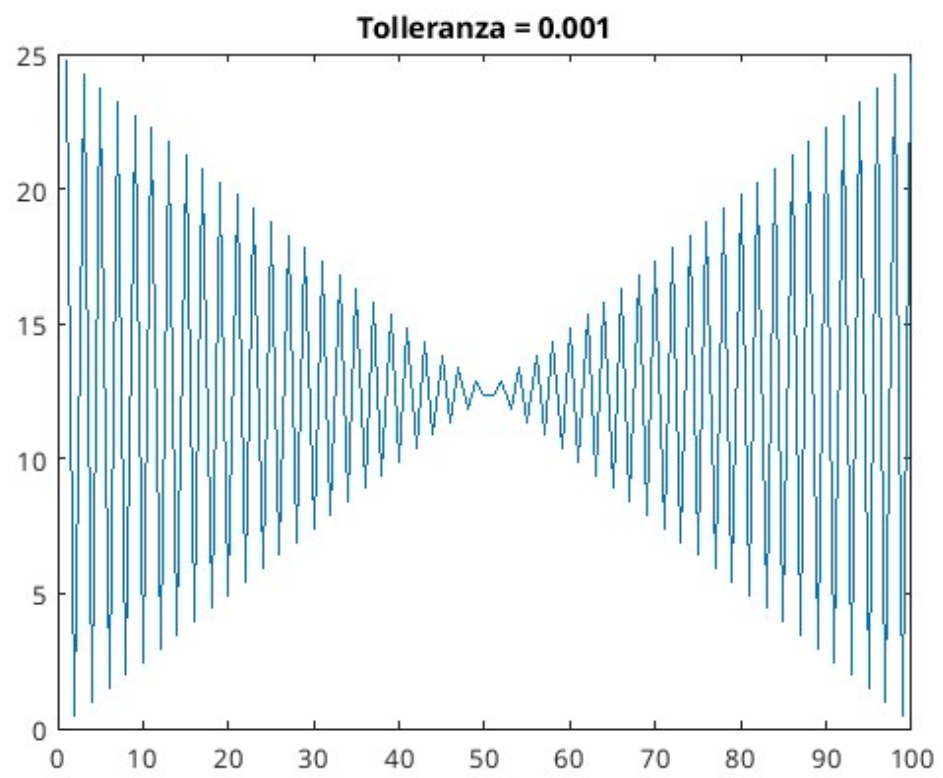
Si osserva come le soluzioni siano coerenti, ma la norma del vettore residuo aumenta, negli ultimi due sistemi è quasi il triplo che nel primo.

14

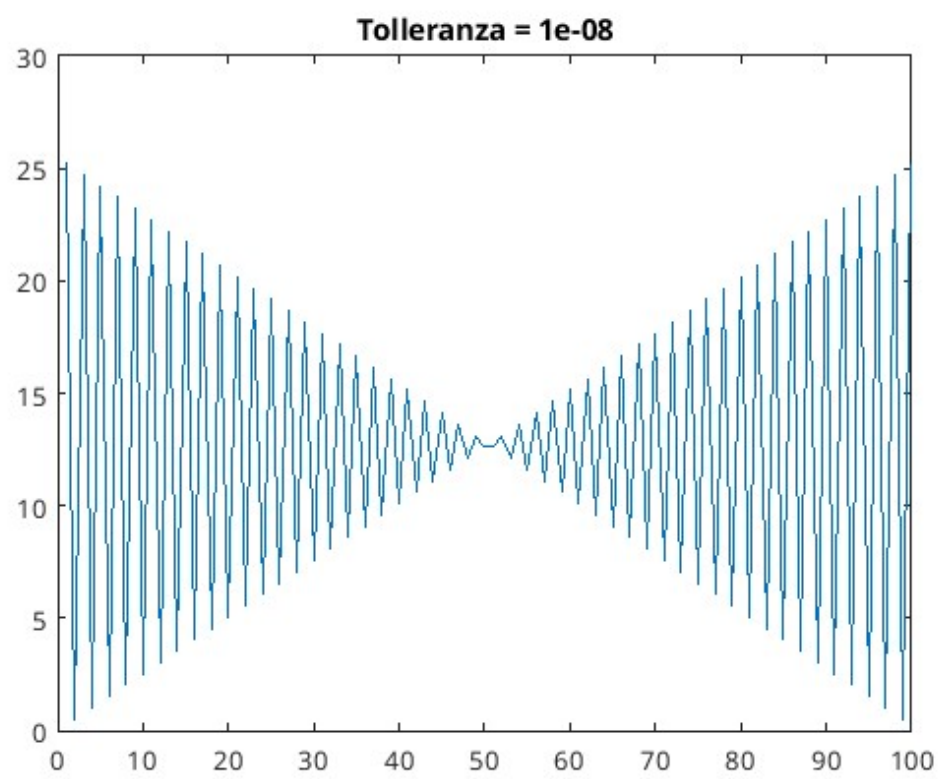
La funzione è contenuta nel file `newton.m` nella cartella 14.

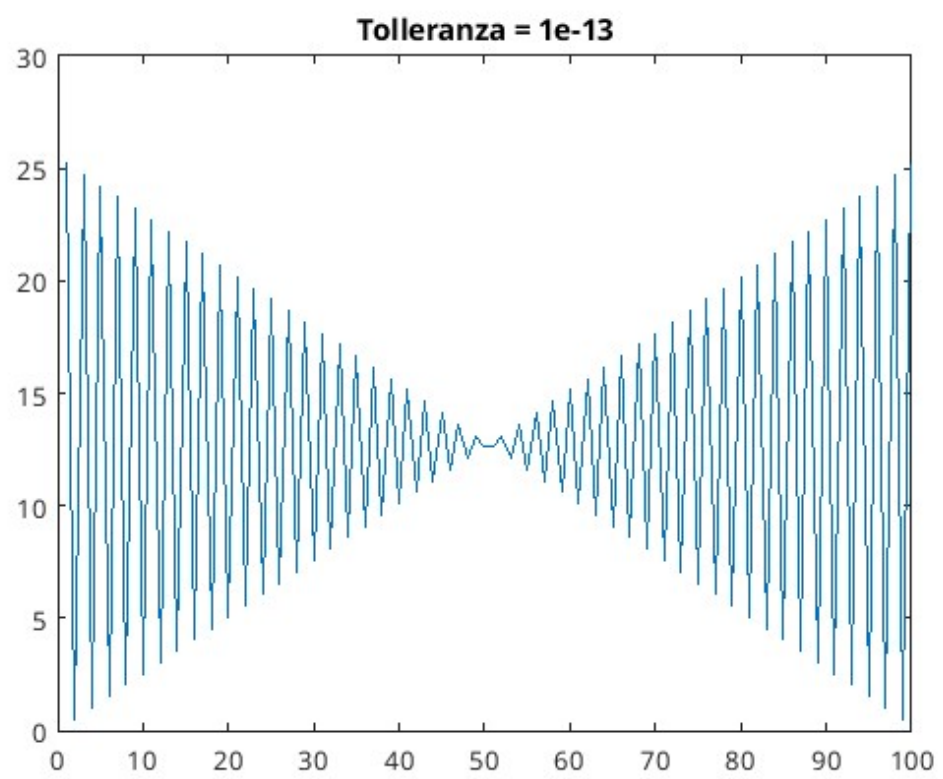
```
function [x,nit] = newton(fun,jacobian,x0,tol,maxit)
%
%   [x,nit] = newton(fun,jacobian,x0,tol,maxit)
%
%   Utilizza il metodo di Newton per risolvere sistemi di
%   equazioni
%   nonlineari
%
%   Input:
%       fun: vettore delle funzioni del sistema
%       jacobian: matrice jacobiana di fun
%       x0: approssimazione iniziale
%       tol: tolleranza aspettata
%       maxit: numero massimo di iterazioni ammesso
%
%   Output:
%       x: approssimazione della funzione
%       nit: numero delle iterazioni del metodo

if(nargin<4), tol = eps;    end
if(nargin<5), maxit = 1e3;  end
if(tol<=0),    error("La tolleranza deve essere positiva");
end
if(maxit<=0), error("Il numero di iterazioni deve essere
    positivo");end
x = x0;
nit = 0;
while(nit<maxit&&norm(x-x0)<=tol*(1+norm(x0)))
    x0 = x;
    fx0 = feval(fun,x0);
    jx0 = feval(jacobian,x0);
    x = x0 - fx0/jx0;
end
if(nit == maxit)
    disp("Il numero di iterazioni specificato non ha
        permesso " + ...
        "di raggiungere la tolleranza desiderata");
end
return;
end
```



15





16

```
function l = lagrange(x,y,xq)
% l = lagrange(x,y,xq)
%
% Implementa in modo vettoriale la forma di lagrange del
% polinomio
% interpolante di una funzione
%
% Input:
%   x:  ascisse di interpolazione
%   y:  valori della funzione sulle ascisse di
%       interpolazione
%   xq: punti in cui calcolare il polinomio
% Output:
%   l:  polinomio di lagrange calcolato

n = length(x);
if n ~= length(y)
    error("il numero di punti sulle ascisse x non è coerente
        con" + ...
        " il numero di quelli sulle ordinate");
end
if n ~= length(unique(x))
    error("ad una stessa ascissa non possono corrispondere
        più punti")
end
l = zeros(size(xq));
for k = 1:n
    Lkn = ones(size(xq));
    for j = 1:n
        if k ~= j
            Lkn = Lkn .* ((xq - x(j))/(x(k) - x(j)));
        end
    end
    l = l + y(k)*Lkn;
end
return;
end
```

17

```
function l = newton(x,y,xq)
% Implementa in modo vettoriale, la forma di Newton del
% polinomio
% interpolante una funzione
%
% Input:
%   x:  vettore contenente le ascisse di interpolazione
%   y:  valori assunti dalla funzione sulle ascisse di
%       interpolazione
```

```

%      xq: punti su cui si vuole calcolare la funzione
%      Output:
%      l:  approssimazione dei valori della funzione secondo
%           il polinomio interpolante

n = length(x);
if n ~= length(y)
    error("il numero di punti sulle ascisse x non è coerente
        con il numero" + ...
        " di quelli sulle ordinate");
end
if n ~= length(unique(x))
    error("ad una stessa ascissa non possono corrispondere
        più punti")
end
f = y; %differenze divise
for k = 1:n-1
    for r = n:-1:k+1
        f(r) = (f(r) - f(r-1)) ./ (x(r) - x(r-k));
    end
end
l = ones(size(xq)) * f(n);
for k = n-1:-1:1
    l = l .* (xq - x(k)) + f(k);
end
end

```

18

```

function yy = hermite( xi, fi, fli, xx )
%      Implementa in modo vettoriale il polinomio interpolante
%      di Hermite
%
%      Input:
%      xi:      vettore delle ascisse di interpolazione
%      fi:      valori assunti dalla funzione sulle ascisse
%               di interpolazione
%      fli:     valori assunti dalla derivata della funzione
%               sulle ascisse
%               di interpolazione
%      xx:      vettore di ascisse su cui si vuole calcolare
%               il polinomio
%      Output:
%      yy:      valori assunti dal polinomio sui punti
%               specificati

n = length(xi);
if n ~= length(fi)
    error("il numero di punti sulle ascisse xi " + ...
        "non è coerente con il numero di quelli sulle
        ordinate fi");
end

```

```

if n ~= length(fi)
    error("il numero di punti sulle ascisse xi non è
          coerente" + ...
          " con il numero di quelli sulle ordinate fi"); % ---
end
if n ~= length(unique(xi))
    error("le ascisse di interpolazione non sono tutte
          distinte");
end
x = repelem(xi,2);

% differenze divise
f = zeros(2 * n, 1);
f(1:2:end) = fi;
f(2:2:end) = fli;
% algoritmo 4.2 libro
n = length(f)/2-1;
for i = (2*n-1):-2:3
    f(i) = (f(i)-f(i-2))/(x(i)-x(i-1));
end
for j = 2:2*n-1
    for i = (2*n+2):-1:j+1
        f(i) = (f(i)-f(i-1))/(x(i)- x(i-j));
    end
end
% algoritmo di horner
n = length(f)-1;
yy = f(n+1)*ones(size(xx));
for i = n:-1:1
    yy = yy .* (xx-x(i))+f(i);
end
end

```

19

```

function x = chebyshev(n,a,b)
%
%   Genera n+1 coordinate di Chebyshev nell'intervallo [a,b
%   ]
%
%   Input:
%       n:   numero di coordinate da generare (n+1)
%       a:   estremo inferiore dell'intervallo
%       b:   estremo superiore dell'intervallo
%   Output:
%       x:   vettore contenente le coordinate
if n <= 0
    error("il grado del polinomio deve essere maggiore di
          zero");
end
if a >= b

```

```

        error("l'estremo inferiore dell' intervallo non può
            essere " + ...
            "minore o coincidente con quello maggiore");
    end
    x = cos( (2*(n:-1:0)+1)*pi ./ (2*(n+1)) );
    x = x * (b-a)/2 + (a+b)/2;
end

```

20

Il codice della *function* è contenuto nel file `lebesgue.m`:

```

function ll = lebesgue(a, b, nn, type)
%
%
if a >= b
    error("l'estremo inferiore dell' intervallo non può
        essere " + ...
        "minore o coincidente con quello maggiore");
end

n = length(nn);
ll = ones(length(n));
xq = linspace(a, b, 10001);

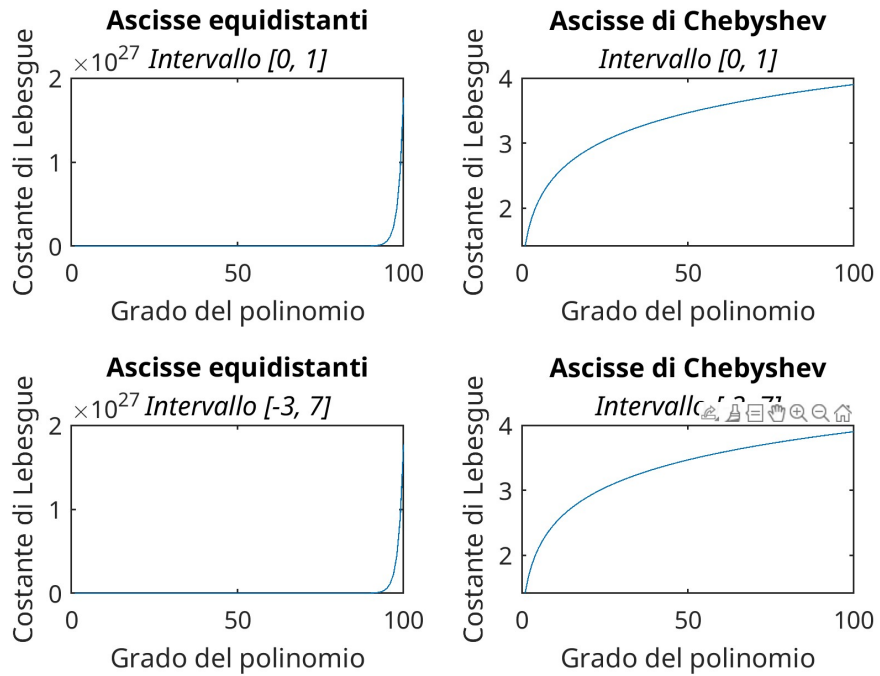
for i = 1:n
    if type == 0
        x = linspace(a, b, nn(i)+1);
    elseif type == 1
        x = chebyshev(nn(i), a, b);
    else
        error("il valore di type può essere soltanto 0 o 1")
        ;
    end

    L = zeros(size(xq));
    m = length(x);
    for k = 1:m
        Lkn = ones(size(xq));
        for j = 1:m
            if k ~= j
                Lkn = Lkn .* ((xq - x(j))/(x(k) - x(j)));
            end
        end
        L = L + abs(Lkn);
    end
    ll(i) = max(abs(L));
end
end

```

Si riportano inoltre i grafici dei risultati ottenuti per l'approssimazione della costante di Lebesgue su due intervalli distinti, si nota che il risultato è unica-

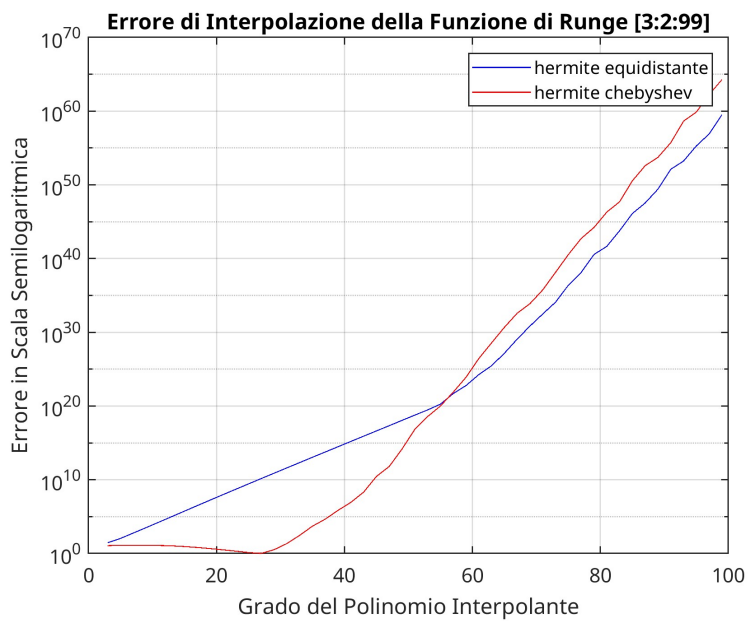
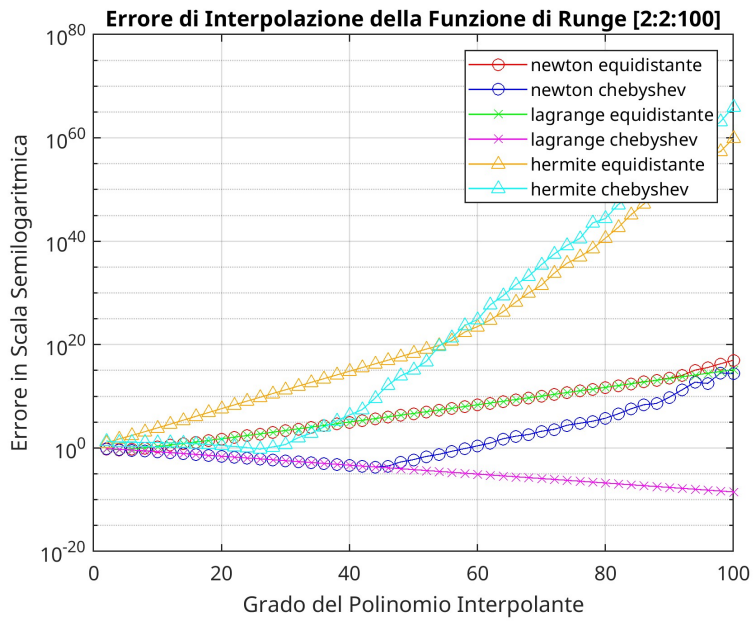
Approssimazione della costante di Lebesgue



mente dipendente dalla scelta delle ascisse che operiamo e non dagli intervalli considerati.

21

Grafici in scala semilogaritmica degli errori di interpolazione commessi dai vari algoritmi di interpolazione.



```

function yy = myspline(xi, fi, xx, type )
%
%   Se type è uguale a 0 allora calcola la spline cubica
%   interpolante
%   naturale i punti (xi(i),fi(i)), mentre se type è diverso
%   da 0 allora
%   calcola quella not-a-knot (default)
%
%   Input:
%       xi:      vettore delle ascisse di interpolazione
%       fi:      valori assunti dalla funzione nei rispettivi
%               punti xi
%       xx:      ascisse su cui deve essere calcolata la
%               spline
%       type:     valore che stabilisce il tipo di spline da
%               creare
%   Output:
%       yy:      valori assunti dalla spline nei rispettivi
%               punti xx

if nargin < 3, error("argomenti essenziali assenti"); end
if nargin == 3, type = 1; end
if size(xi) ~= size(fi), error("Le quantità di dati forniti
    per " + ...
        "l'interpolazione non corrispondono"); end
if length(xi) ~= length(unique(xi)), error("Le ascisse di "
    + ...
        "interpolazione devono essere tutte distinte tra
        loro");end

n = length(xi)-1;

h = zeros(1,n);
for i=1:n, h(i)=xi(i+1)-xi(i);end
phi = zeros(1,n);
xhi = zeros(1,n);
for i=1:n-1
    phi(i) = h(i)/(h(i)+h(i+1));
    xhi(i) = h(i+1)/(h(i)+h(i+1));
end

f = fi ; %differenze divise
for j = 1 : 2
    for i = n+1 : -1 : j +1
        f(i) = (f(i)-f(i-1))/(xi(i)-xi(i-j));
    end
end
f = f (3: n+1) ; % Calcolo le differenze divise

%definizione diagonali del sistema tridiagonale per trovare
% m0...mn
if type==0 %spline naturale

```



```

a = 2*ones(n-1,1); %size n-1
b = xhi(1:n-2); % n-2
c = phi(2:n-1); % n-2
d = 6*f;
else %spline not-a-knot
a = [1 2-phi(1) 2*ones(1,n-3) 2-xhi(n-1) 1];%size 2+n
-3+2=n+1
b = [0 xhi(i)-phi(i) xhi(2:n-1)]; % 2+n-2=n
c = [phi(1:n-2) phi(n-1)-xhi(n-1) 0]; % n-2+2 = n
d = 6*[f(1) f f(end)];
end

%risoluzione sistema tridiagonale
dim = length(d);
m = zeros(dim,1);
for i = 2:dim
w = c(i-1)/a(i-1);
a(i) = a(i)-w*b(i-1);
d(i) = d(i)-w*d(i-1);
end

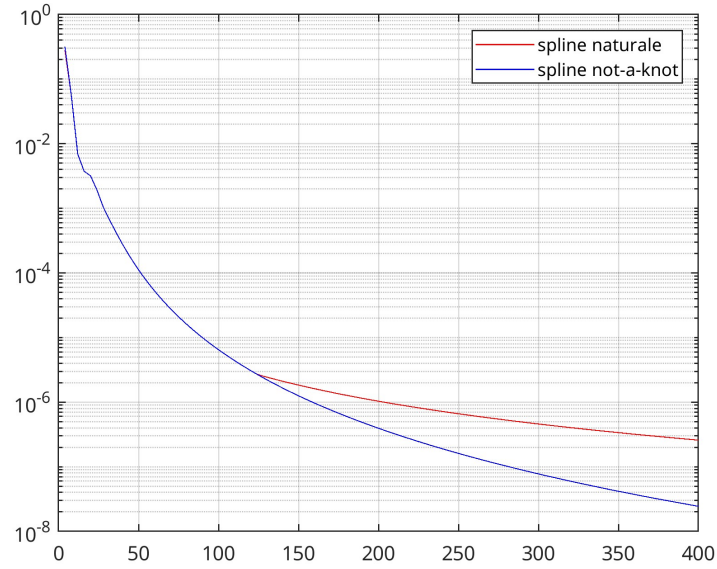
m(end) = d(end)/a(end);
for i = (dim-1):-1:1
m(i) = (d(i)-b(i)*m(i+1))/a(i);
end

if type == 0 %spline cubica
m = [0 m' 0];
else % spline not-a-knot
m(1) = m(1)-m(2)-m(3);
m(n+1) = m(n+1)-m(n)-m(n-1);
end

yy = zeros(length(xx),1) ;
for j = 1:length(xx)
for i = 2:length(xi)
if ((xx(j)>=xi(i-1) && xx(j)<=xi(i)) || xx(j)<xi(1))
r = fi(i-1)-h(i-1)^2/6*m(i-1) ;
q = (fi(i)-fi(i-1))/h(i-1)-h(i-1)/6*(m(i)-m(i-1))
) ;
yy(j) = ((xx(j)-xi(i-1))^3*m(i)+ ...
(xi(i)-xx(j))^3*m(i-1))/(6*h(i-1))+...
q*(xx(j)-xi(i-1))+...
r;
break
end
end
end
return;
end

```

23



24

Si hanno 1000 coppie di dati (x_i, y_i) che rappresentano un fenomeno fisico descritto da una potenza $y = x^n$. Si sa tuttavia che le coppie sono condizionate da un errore la cui distribuzione segue una gaussiana con media 0 e varianza "piccola". Si vogliono determinare i coefficienti a_1, \dots, a_m ignoti di un polinomio $p(x)$ di grado m che approssima i dati affetti da errore.

$$p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

$$p(x_i) = y_i, i = 1, \dots, 1000$$

Il vettore dei valori attesi è dato dal prodotto matrice-vettore $V \cdot a$:

$$V = \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & \dots & x_0^m \\ x_1^0 & x_1^1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m^0 & x_m^1 & \dots & x_m^m \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix},$$

La matrice V ha rango massimo ed è fattorizzabile QR e quindi il sistema ha

soluzione.

Nota: Durante il calcolo si usa una versione diversa dell'*algoritmo di Horner* per il calcolo di un polinomio. Il ciclo dell'algoritmo avviene in modo ascendente invece che discendente perchè la funzione `polyfit` restituisce i coefficienti del polinomio secondo la potenza decrescente.

```
xi_yi = load("data.mat").data;

m_max = 100 ;

xi = xi_yi(:,1);
yi = xi_yi(:,2);
% m<=n
er = zeros(1,m_max);

for m = 1:m_max

    px = polyfit(xi,yi,m);

    % horner algorithm with reverse loop
    y = px(1);
    for i = 2:length(px)
        y = y .* xi + px(i);
    end

    er(m) = norm(xi.^m - y);
end

% view
figure;
semilogy(1:m_max, er, '-');
xlabel('Least-square polynomial degree, m');
ylabel('Error');
grid on;
```

Questo script importa i dati (x_i, y_i) dal file `data.mat` e li salva in due diversi vettori. Viene scelto un valore (`m_max`) che viene utilizzato come massimo grado ammissibile per il polinomio di approssimazione ai minimi quadrati. All'interno di un ciclo, per ogni m viene utilizzata la funzione `polyfit` per calcolare i coefficienti di $p(x)$ di grado m e viene salvata nel vettore `er` l'errore trovato. Tutti gli errori vengono mostrati graficati nella figura sottostante, che mostra come il polinomio che meglio approssima i dati (x_i, y_i) è quello di grado $m = 5$.

