

Elaborato Calcolo Numerico

Alessio Santoro - 7029440

A.A. 2022/2023

Nota: Per gli esercizi che prevedono delle *function* Matlab, si specifica nella relativa risposta al quesito i file tra gli allegati a cui essa si riferisce.

1

Si considera lo sviluppo delle funzioni $f(x-h), f(x+h), f(x+2h), f(x+3h)$:

$$\begin{aligned}f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \\f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \\f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \\f(x+3h) &= f(x) + 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) + \frac{27h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{81h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5)\end{aligned}$$

Si sostituiscono le espressioni così trovate nella parte sinistra dell'equazione iniziale e si ottiene la seguente espressione:

$$\begin{aligned}& -\frac{1}{4} \left[f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \right] + \\& -\frac{5}{6} [f(x)] + \\& +\frac{3}{2} \left[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \right] + \\& -\frac{1}{2} \left[f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{16h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \right] + \\& +\frac{1}{12} \left[f(x) + 3hf'(x) + \frac{9h^2}{2}f''(x) + \frac{27h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{81h^4}{24}f^{(4)}(x) + O(h^5) \right]\end{aligned}$$

Si procede a moltiplicare i coefficienti di ogni espressione e poi raccogliere i termini che contengono le derivate dello stesso ordine, una volta raccolti i termini assumono i seguenti valori che, stando all'equazione iniziale dovranno poi essere

sommati:

$$f(x) \left[-\frac{1}{4} - \frac{5}{6} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right] = 0 \quad (1)$$

$$f'(x) \cdot h \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} 2 + \frac{1}{12} 3 \right] = hf'(x) \quad (2)$$

$$f''(x) \cdot \frac{h^2}{2} \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} 4 + \frac{1}{12} 9 \right] = 0 \quad (3)$$

$$f^{(3)}(x) \cdot \frac{h^3}{6} \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} 8 + \frac{1}{12} 27 \right] = 0 \quad (4)$$

$$f^{(4)}(x) \cdot \frac{h^4}{24} \left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} 16 + \frac{1}{12} 81 \right] = 0 \quad (5)$$

Dalle espressioni (1)...(5) e dalle proprietà degli "O-grande" di moltiplicazione per una costante segue l'asserto.

2

La doppia precisione dello standard IEEE 754 è una rappresentazione in base binaria, in forma normalizzata (1.f) che approssima per arrotondamento e occupa 64 bit, di cui 52 dedicati alla frazione (53 alla mantissa).

Si può dunque ottenere il valore della precisione di macchina (u) dalla seguente espressione, dove: $b = 2$ rappresenta la base, e $m = 53$ la mantissa:

$$u = \frac{1}{2} b^{1-m} = 2^{-53}$$

Invece **eps** è definito dalla stessa funzione **help** di Matlab come la distanza tra 1.0 e il maggior valore a doppia precisione successivo disponibile, ovvero 2^{-52} .

Si osserva infatti che, considerato il valore $x = 1 + u = 1 + 2^{-53} \neq 1$ e sia fl la funzione di floating, allora vale che $fl(x) = 1$, poichè $u = 2^{-53} < 2^{-52} = \mathbf{eps}$.

Vi è dunque un errore di rappresentazione del valore x (ε_x), determinato dalla seguente espressione:

$$\varepsilon_x = \frac{|x - fl(x)|}{|x|} = \frac{|1 + 2^{-53} - 1|}{|1 + 2^{-53}|} = \frac{|2^{-53}|}{|1 + 2^{-53}|} < |2^{-53}| = u$$

3

La cancellazione numerica è quel fenomeno in cui, sommando in aritmetica finita due numeri quasi opposti si verifica la perdita di cifre significative. Questo è dovuto all'espressione del numero di condizionamento della somma in aritmetica finita (k) che per due valori x e y è dato da:

$$k = \frac{|x| + |y|}{|x + y|}$$

Infatti, se $x \rightarrow -y$ allora $k \rightarrow \infty$ e la somma tra x e y risulta mal condizionata.

4

Sia $x^* \in \mathbb{R}$ il valore di cui si ricerca la radice sesta.

Per calcolarlo si definisce una funzione $f(x)$ come segue:

$$f(x) = x^6 - x^*$$

La cui derivata è:

$$f'(x) = 6x^5$$

La funzione $f(x)$ si annulla solo nella radice sesta di x^* , quindi avendo un'approssimazione iniziale x_0 si può applicare il metodo di Newton alla funzione $f(x)$ per ricercarne una radice che coinciderà con il valore cercato:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^6 - x^*}{6x_i^5} = \frac{1}{6} \left[5x_i + \frac{x^*}{x_i} \right]$$

La function che implementa il metodo presentato è contenuta nel file `radice.m`:

```
function root = radice(x)
%
%   root = radice(x)
%
%   Questa funzione calcola la radice sesta di un valore non negativo
%   attraverso il metodo iterativo di Newton utilizzando solo operazioni elementari
%
%   Input:
%       x: valore di cui si vuole calcolare la radice sesta
%   Output:
%       root; risultato del calcolo
if(x<0), error("Value x must be not negative");end
if(x==0)
    root = 0;
    return;
end

root = x;
er = 1;

while(er >= eps*(1+abs(x)))
    xi = (5*root+x/root^5)/6;
    er = abs(root - xi);
    root = xi;
end
return;
end
```

I dati sul confronto tra il risultato offerto dalla funzione e il valore $x^{1/6}$ sono contenuti nel file `4_table.txt`:

x	radice(x)	$x^{1/6}$	errore
-----	-----	-----	-----
1e-10	0.021544	0.021544	3.4694e-18
1.1288e-09	0.032268	0.032268	6.9389e-18
1.2743e-08	0.048329	0.048329	6.9389e-18
1.4384e-07	0.072385	0.072385	1.3878e-17
1.6238e-06	0.10841	0.10841	4.1633e-17
1.833e-05	0.16238	0.16238	0
0.00020691	0.2432	0.2432	2.7756e-17
0.0023357	0.36425	0.36425	5.5511e-17
0.026367	0.54556	0.54556	0
0.29764	0.81711	0.81711	1.1102e-16
3.3598	1.2238	1.2238	2.2204e-16
37.927	1.833	1.833	0
428.13	2.7453	2.7453	4.4409e-16
4832.9	4.1118	4.1118	8.8818e-16
54556	6.1585	6.1585	0
6.1585e+05	9.2239	9.2239	1.7764e-15
6.9519e+06	13.815	13.815	1.7764e-15
7.8476e+07	20.691	20.691	3.5527e-15
8.8587e+08	30.99	30.99	3.5527e-15
1e+10	46.416	46.416	7.1054e-15

5

Il seguente testo è contenuto nel file `newtonMethod.m` e rappresenta il metodo di Newton:

```
function [x,n] = newtonMethod(f,df, x0, tol)
%
%   x = newtonMethod(f,df,x0,tol, itmax)
%
%   Ricerca la radice di una funzione di cui è nota la derivata a partire
%   da un approssimazione iniziale mediante il metodo di Newton
%
%   Input:
%       f: funzione di cui si ricercano le radici
%       df: derivata della funzione f
%       x0: approssimazione iniziale della radice
%       tol: errore assoluto ammissibile
%   Output:
%       x: approssimazione della radice di f
%       n: numero di iterazioni eseguite

%controllo valori input
if nargin ~= 4, error("Missing arguments"); end
```

```

if tol<0, error("Invalid arguments: tolerance must be non negative"); end
x = x0;
fx = feval(f,x);
dfx = feval(f,x);

x = x0- fx/dfx;

n = 1;
while abs(x-x0) > tol*( 1 + abs(x0))

    x0 = x;

    fx = feval(f,x0);
    dfx = feval(df, x0);

    if dfx==0
        error("Value of derivative function is 0, invalid first approximation");
    end
    n = n+1;
    x = x0 - fx/dfx; %calcolo effettivo
end
return
end

```

Da qui in poi viene presentato il contenuto del file `secantsMethod.m` che rappresenta il metodo delle secanti:

```

function [x,i] = secantsMethod(f, x0, x1, tol)
%
%   x = secantsMethod(f,df,x0,tol, itmax)
%
%   Ricerca la radice di una funzione di cui è nota la derivata a partire
%   da un approssimazione iniziale mediante il metodo delle secanti
%
%   Input:
%       f: funzione di cui si ricercano gli 0
%       x0: prima approssimazione iniziale della radice
%       x1: seconda approssimazione iniziale della radice
%       tol: errore assoluto ammissibile
%   Output:
%       x: approssimazione della radice di f
%       i: numero di iterazioni eseguite

%controllo valori input
if nargin ~= 4, error("Missing arguments"); end
if tol<0, error("Invalid arguments: tolerance must be non negative"); end

fx0 = feval(f,x0);
fx1= feval(f,x1);

```

```

x = x1-(fx1*(x1-x0))/(fx1-fx0);

i = 1;
while abs(x-x1) > tol*( 1 + abs(x1))
    i = i+1;

    x0 = x1;
    x1 = x;
    fx0 = fx1;
    fx1 = feval(f,x1);
    if fx0 == fx1, error("Invalid initial approximations: "+ ...
        "function assume same value in different points");end
    x = x1-(fx1*(x1-x0))/(fx1-fx0);
end
return
end

```

6

Nel file `6_result.txt` è contenuta la tabella dei risultati delle funzioni precedentemente mostrate:

Tolleranza	Ris. Newton	Iterazioni Newton	Ris. secanti	Iterazioni secanti
-----	-----	-----	-----	-----
0.001	0.73909	8	0.7391	4
1e-06	0.73909	9	0.73909	6
1e-09	0.73909	10	0.73909	7
1e-12	0.73909	10	0.73909	7

Per entrambi i metodi, la parte più costosa computazionalmente è la valutazione funzionale, dato che tutte le altre operazioni che vengono svolte sono operazioni elementari.

Il metodo di Newton esegue due valutazioni in ogni iterazione.

Sia n il numero di iterazioni, il costo computazionale del metodo di Newton è dato da $2(n+1)$.

Il metodo delle secanti esegue due valutazioni iniziali e poi una per ogni iterazione, quindi il suo costo computazionale per n iterazioni è dato da $n+2$.

Tolleranza	Iterazioni Newton	Costo Newton	Iterazioni secanti	Costo secanti
10^{-3}	8	16	4	6
10^{-6}	9	18	6	8
10^{-9}	10	20	6	8
10^{-12}	10	20	7	9

7

La seguente tabella fornisce i risultati dell'utilizzo delle funzioni precedenti per calcolare la radice della funzione $f(x) = [x - \cos(x)]^5$:

tolleranza	Newton ris.	Newton iter.	Secant ris.	Secant iter.
10e-3	0.74512	18	0.73015	26
10e-6	0.73909	49	0.73908	70
10e-9	0.73909	80	0.73909	115
10e-12	0.73909	111	0.73909	159

Dopo aver sviluppato la *function* `modifiedNewtonMethod.m` si sono riscontrati i seguenti risultati:

tolleranza	risultato Newton modificato	numero di iterazioni
1e-3	0.73909	22
1e-6	0.73909	23
1e-9	0.73909	24
1e-12	0.73909	24

Come atteso, i metodi di Newton e delle secanti sono più lenti a causa del metodo di Newton modificato, a causa della natura multipla della radice.

Infatti il metodo di Newton e quello delle secanti hanno convergenza quadratica nel caso di radici a molteplicità 1, ma solo lineare nel caso di radici multiple.

La modifica che abbiamo fatto, ovvero $x_{i+1} = x_i - m \cdot \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$, nonostante richieda che la molteplicità m della radice sia nota, ripristina la convergenza quadratica del metodo di Newton.

I risultati sono contenuti nel file `table_7.txt` e si mostra di seguito il codice della *function* del metodo di Newton modificato:

```
function [x,n] = modifiedNewtonMethod(f,df, m, x0, tol)
%
%   x = newtonMethod(f,df,x0,tol, itmax)
%
%   Ricerca la radice di una funzione di cui è nota la derivata a partire
%   da un approssimazione iniziale mediante il metodo di Newton
%
%   Input:
%       f: funzione di cui si ricercano le radici
%       df: derivata della funzione f
%       m: molteplicità (nota) della radice
%       x0: approssimazione iniziale della radice
%       tol: errore assoluto ammissibile
%   Output:
%       x: approssimazione della radice di f
%       n: numero di iterazioni eseguite

%controllo valori input
if nargin ~= 5, error("Missing arguments"); end
if tol<0, error("Invalid arguments: tolerance must be non negative"); end
```

```

x = x0;
fx = feval(f,x);
dfx = feval(f,x);

x = x0- m*fx/dfx;

n = 1;
while abs(x-x0) > tol*( 1 + abs(x0))

    x0 = x;

    fx = feval(f,x0);
    dfx = feval(df, x0);

    if dfx==0
        error("Value of derivative function is 0, invalid first approximation");
    end
    n = n+1;
    x = x0 - m*fx/dfx; %calcolo effettivo
end
return
end

```

8

Il codice della *function* è contenuto nel file mialu.m:

```

function x = mialu(A,b)
%
% x = mialu(A,b)
%
% presa in input una matrice ed un vettore calcola la soluzione del
% corrispondente sistema lineare utilizzando il metodo di fattorizzazione
% LU con pivoting
%
% Input:
% A = matrice dei coefficienti
% b = vettore dei termini noti
%
% Output:
% x = soluzione del sistema lineare
%
[m,n] = size(A);
if m ~= n
    error("La matrice non è quadrata");
end
if n ~= length(b)
    error("la lunghezza del vettore dei termini noti " + ...
        "non è coerente con quella della matrice");
end

```



```

end
p = (1:n).';
for i = 1:n
    [mi, ki] = max(abs(A(i:n,i)));
    if mi == 0
        error("la matrice è singolare");
    end
    ki = ki+i-1;
    if ki>i
        A([i,ki],:) = A([ki,i],:);
        p([i,ki]) = p([ki,i]);
    end
    A(i+1:n,i) = A(i+1:n,i)/A(i,i);
    A(i+1:n,i+1:n) = A(i+1:n,i+1:n)-A(i+1:n,i)*A(i,i+1:n);
end

x = b(p);
for i=1:n
    x(i+1:n) = x(i+1:n)-A(i+1:n,i)*x(i);
end
for i=n:-1:1
    x(i) = x(i)/A(i,i);
    x(1:i-1) = x(1:i-1)-A(1:i-1,i)*x(i);
end
return;
end

```

Un esempio di utilizzo è contenuto nel file di testo `ex_8_mialu.txt`:

9

Il codice della *function* è contenuto nel file `mialdl.m`:

```

function x = mialdl(A,b)
%
% x = mialdl(A,b)
%
% presa in input una matrice ed un vettore calcola la soluzione del
% corrispondente sistema lineare utilizzando il metodo di fattorizzazione
% LDL
%
% Input:
% A = matrice dei coefficienti
% b = vettore dei termini noti
%
% Output:
% x = soluzione del sistema lineare
%
[m,n] = size(A);

```

```

if m ~= n
    error("la matrice non è quadrata");
end
if n ~= length(b)
    error("la lunghezza del vettore dei termini noti " + ...
        "non è coerente con quella della matrice");
end
if A(1,1) <= 0
    error("la matrice non è sdp");
end
% la matrice non è memorizzata in forma compressa! (cit. libro)
A(2:n,1) = A(2:n,1)/A(1,1);
for i = 2:n
    v = (A(i,1:i-1).') .* diag(A(1:i-1,1:i-1));
    A(i,i) = A(i,i) - A(i,1:i-1)*v;
    if A(i,i) <= 0
        error("la matrice non è sdp");
    end
    A(i+1:n,i) = (A(i+1:n,i) - A(i+1:n,1:i-1) * v) / A(i,i);
end
x = b;
for i = 2:n
    x(i:n) = x(i:n) - A(i:n,i-1) * x(i-1);
end
x = x ./ diag(A);
for i = n-1:-1:1
    x(1:i) = x(1:i) - A(i+1,1:i) .* x(i+1);
end
end

```

Un esempio di utilizzo è contenuto nel file di testo 9_mialdl1.txt:

```

% si genera una matrice quadrata casuale
A = randi([-8,8],4)

```

A =

0	0	2	-3
-1	0	-2	7
-1	5	5	6
-3	5	1	1

```

% si generano i valori di una diagonale
d = randi([5,30],4,1)

```

d =

21
20
10
12

```
% si costruisce una matrice adeguata per la fattorizzazione LDL
A = tril(A,-1)+triu(A',1)+diag(d)
```

```
A =
```

```

    21    -1    -1    -3
   -1    20     5     5
   -1     5    10     1
   -3     5     1    12
```

```
% Si genera la soluzione, da confrontare dopo
x = randi([-8,8],4,1)
```

```
x =
```

```

     0
    -5
     6
    -5
```

```
% si calcolano i termini noti
b = A*x
```

```
b =
```

```

    14
   -95
    30
   -79
```

```
% si usa la funzione per calcolare la soluzione
mialdl(A,b)
```

```
ans =
```

```

    0.0000
   -5.0000
    6.0000
   -5.0000
```

```
A = randi([-8,8],4)
```

```
A =
```

```

   -7     7    -4     0
   -4     4    -1    -5
     5     0     8     0
   -8     1     1     2
```

```

d = randi([5,30],4,1)

d =

    22
    15
    14
    30

A = tril(A,-1)+triu(A',1)+diag(d)

A =

    22    -4     5    -8
   -4    15     0     1
     5     0    14     1
   -8     1     1    30

x = randi([-8,8],4,1)

x =

   -8
     7
     7
     5

b = A*x

b =

  -209
   142
    63
   228

mialdl(A,b)

ans =

  -8.0000
   7.0000
   7.0000
   5.0000

```

10

La funzione è nel file `functions/miaqr.m`, mostrato di seguito insieme ad un esempio in cui viene applicato:

```
function [x,nr] = miaqr(A,b)
%
%   [x, nr] = miaqr(A,b)
%
%   Calcola la soluzione del sistema lineare sovradimensionato  $Ax = b$ 
%   nel senso dei minimi quadrati e restituisce la norma del
%   corrispondente vettore residuo
%
%   Input:
%       A: matrice dei coefficienti del sistema
%       b: vettore dei termini noti
%   Output:
%       x: soluzione nel senso dei minimi quadrati
%       nr: norma del vettore residuo
[m,n] = size(A);
if(n>=m), error("Il sistema non è sovradimensionato"); end
if(m~=length(b)), error("Le dimensioni della matrice e del vettore " + ...
    "non sono compatibili");end
for i=1:n
    alfa = norm( A(i:m,i));
    if alfa==0,error("La matrice A non ha rango massimo");end
    if(A(i,i)>=0), alfa = -alfa; end
    v = A(i,i) - alfa;
    A(i,i) = alfa;
    A(i+1:m,i) = A(i+1:m,i)/v;
    beta = -v/alfa;
    A(i:m,i+1:n) = A(i:m,i+1:n)-(beta*[1;A(i+1:m,i)])*...
        ([1;A(i+1:m,i)]'*A(i:m,i+1:n));
end
for i=1:n
    v = [1;A(i+1:m,i)];
    beta = 2/(v'*v);
    b(i:end) = b(i:end)-(beta*(v'*b(i:end)))*v;
end
for i=n:-1:1
    b(i) = b(i)/A(i,i);
    b(1:i-1) = b(1:i-1)-A(1:i-1,i)*b(i);
end
x = b(1:n);
nr = norm(b(n+1:m));
return ;
end

>> A = randi([-20,20],7,4)

A =
```

```

-6      6    -13    -1
13     -2     -5    -3
-20     2      5    -2
-19    -8     11    -8
-14     10    -17     0
 6     -13     18     0
10      8     11     13

>> b = randi([-20,20],7,1)

b =

12
 6
-5
13
 1
-6
18

>> [x,nr] = miaqr(A,b)

x =

0.5023
2.5325
1.1667
-2.1687

nr =

22.8572

>> A\b

ans =

0.5023
2.5325
1.1667
-2.1687

>> A = randi([-20,20],7,4)

A =

15    -11     -8    -16
 2     14     17    -10

```

```

      5   -13   -3   -4
      4   -11  -13   4
     -12  -14   17  -10
      -8  -11   20   4
      -1   -3   -3   9

>> b = randi([-20,20],7,1)

b =

     -11
     -16
      -8
      -7
      -3
       0
     -17

>> [x,nr] = miaqr(A,b)

x =

     -1.2544
       0.2774
     -0.6423
     -0.2978

nr =

    22.2472

>> A\b

ans =

     -1.2544
       0.2774
     -0.6423
     -0.2978

>>

```

11

12

13

Di seguito si mostra come sono stati assegnati i valori richiesti, le soluzioni trovate con la funzione `miaqr` sono confrontate con il risultato dell'operatore `\`.

```
>> A = [ 1 3 2; 3 5 4; 5 7 6; 3 6 4; 1 4 2 ];
>> b = [ 15 28 41 33 22 ]';
>> D = diag(1:5);
>> D1 = diag(pi*[1 1 1 1 1])
```

D1 =

3.1416	0	0	0	0
0	3.1416	0	0	0
0	0	3.1416	0	0
0	0	0	3.1416	0
0	0	0	0	3.1416

```
>> [x,nr] = miaqr(A,b)
```

x =

3.0000
5.8000
-2.5000

nr =

1.2649

```
>> A\b
```

ans =

3.0000
5.8000
-2.5000

```
>> [x,nr] = miaqr(D*A,D*b)
```

x =

-0.6026
4.7017
1.7584


```

nr =

    3.7352

>> (D*A)\(D*b)

ans =

   -0.6026
    4.7017
    1.7584

>> [x,nr] = miaqr(D1*A,D1*b)

x =

    3.0000
    5.8000
   -2.5000

nr =

    3.9738

>> (D1*A)\(D1*b)

ans =

    3.0000
    5.8000
   -2.5000

```

Si osserva come le soluzioni siano coerenti, ma la norma del vettore residuo aumenta, negli ultimi due sistemi è quasi il triplo che nel primo.

14