Congettura preimmagine di 231

Alessio Santoro

L'idea che si vuole dimostrare è:

$$Cons^{-1}Av(231) = Av(2431, 4231, 23514, \bar{5}3\bar{5}2614)$$

Importante (nota metodologica): $\bar{5}3\bar{5}2614$ si può scrivere così o va separato in $3\bar{5}2614, \bar{5}32614$?

Per dimostrare la congettura occorre dimostrare la doppia inclusione:

(A) $Cons^{-1}Av(231) \subseteq Av(2431, 4231, 23514, \bar{5}3\bar{5}2614)$

(B) $Av(2431, 4231, 23514, \bar{5}3\bar{5}2614) \subseteq Cons^{-1}Av(231)$

Nota: Per tutta la dimostrazione i valori che formano i pattern saranno indicati da a, b, c, d ed e (quando presente), n indicherà la lunghezza della permutazione π e si intende $1 \leq a < b < c < d < e \leq n$.

Acluni risutltati utili: Sia $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_n$ una permutazione, se durante l'esecuzione di *Cons* un elemento l'elemento π_i provoca un *pop* tutti gli elementi successivi minori di π_i effettuano un bypass.Similmente se π_i effettua un bypass tutti gli elementi succesivi minori di π_i effettuano un bypass.

(A) $Cons^{-1}Av(231) \subseteq Av(2431, 4231, 23514, \bar{5}3\bar{5}2614)$

Proof. Dobbiamo dimostrare che tutte le permutazioni la cui immagine evita il pattern 231 evitano i pattern $2431, 4231, 23514, 3\bar{5}2614, \bar{5}32614$. Ovvero si dimostrerà che ogni permutazione π tale che $231 \preceq Cons(\pi)$ contiene uno dei pattern elencati.
Si osserva che se 3 elementi nell'immagine $Cons(\pi)$ formano un pattern 231, quegli stessi elementi devono formare un pattern 231 o 321 nella preimmagine, dato che *Cons* non produce nuove inversioni. Si analizzano questi due casi separatamente.

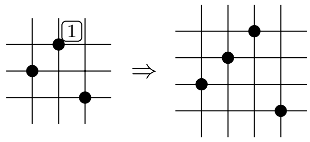
$231 \preceq \pi$:

$$\pi = \dots b \dots c \dots a \dots$$

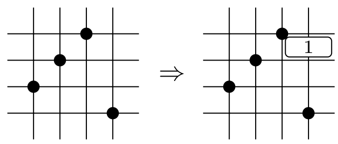
$$Cons(\pi) = \dots b \dots c \dots a \dots$$

Se b entra in coda deve uscire prima c possa accodarsi a sua volta. Un elemento $d > c$ provoca un *pop* e non è possibile che si accodi. c, a effettuano un *bypass*, e nell'output troviamo bca. Questo è il pattern 2431.

Se b effettua un *bypass* e c si accoda si deve verificare un *pop*, perchè c deve uscire prima che a bypassi. È necessario un elemento $e > c$ posizionato tra c e a.



Tuttavia occorre assicurarsi che e non si accodi dopo c, poichè la coda contiene solo elementi consecutivi, questa condizione è realizzata solo se un elemento d si trova in una posizione successiva a e.



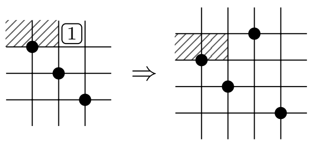
Queste condizioni sono soddisfatte dai pattern 23541 e 23514.
Infine, se è presente un valore d prima di b, il pattern 231 dato da bca resta invariato (pattern 4231): se d effettua un bypass o se se provoca un *pop*, tutti gli elementi dopo effettuano un bypass, se d entra in coda b, c può effettuare un *bypass* o provocare un *pop*, in ogni caso b viene inserito nell'output prima di c, e dopo a effettua sicuramente un *bypass*.

$321 \preceq \pi$:

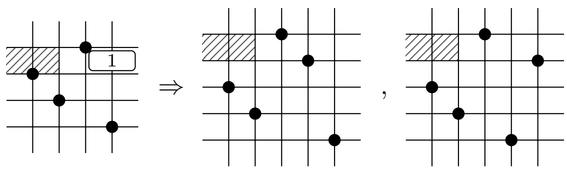
$$\pi = \ldots c \ldots b \ldots a \ldots$$

$$Cons(\pi) = \ldots b \ldots c \ldots a \ldots$$

Deve avvenire che c entri in coda. Quando questo avviene b può solo bypassare, quindi deve avvenire un *pop* tra b e a e non tra c e b.



Si ottiene così un pattern classico 3241 con alcune aree oscurate.
Come fatto precedentemente si dovrà essere sicuri che d provochi un *pop* e non si accodi, quindi si aggiungerà un nuovo elemento di valore compreso tra c e d posizionato dopo di a:



I pattern che si ottengono sono $\overline{5}3\overline{5}2614$,$\overline{5}3\overline{5}2641$.

Alcuni risultati che si sono ottenuti possono essere semplificati, dato che l'insieme

trovato non è minimo: $\overline{5}3\overline{5}2641$ e 23541 contengono entrambi il pattern 2431.
I pattern trovati, una volta semplificati, provano che:

$$\begin{aligned} Cons^{-1}Av(231) &\subseteq Av(2431, 4231, 23514, 23541, \overline{5}3\overline{5}2614) \\ &= Av(2431, 4231, 23514, \overline{5}3\overline{5}2614) \end{aligned}$$

□

(B) $Av(2431, 4231, 23514, \overline{5}3\overline{5}2614) \subseteq Cons^{-1}Av(231)$

Proof. Dobbiamo dimostrare che tutte le permutazioni che non contengono i pattern $2431, 4231, 23514, 3\overline{5}2614, \overline{5}32614$ sono contenute anche nell'insieme $Cons^{-1}Av(231)$, ovvero che l'immagine di ogni permutazione che contiene almeno uno di questi pattern contiene un pattern 231:

2431

$$\pi = \ldots b \ldots d \ldots c \ldots a \ldots$$

Se b provoca un *pop* questo non influenza gli altri 3 elementi che ci interessano, quindi questa eventualità rientra nel caso in cui b entri in coda.
Se b entra in coda un elemento l'elemento d provoca un *pop* (eventualmente altri valori possono provocare *pop* tra b e c), c e a effettuano un *byapss* e nell'output si ha $231 \preceq bda \subseteq Cons(\pi)$.
Se b effettua un *bypass* lo effettua sempre anche a.
Se poi d effettua un *bypass* si ha che $231 \preceq bda \subseteq Cons(\pi)$ (lo stesso vale se anche c effettua un *byapss*).
Se d entra in coda c può solo bypassare (caso precedente) o provocare un *pop*, e allora $231 \preceq bda \subseteq Cons(\pi)$ nell'output

4231

$$\pi = \ldots d \ldots b \ldots c \ldots a \ldots$$

Se d provoca un *pop* questo non influenza gli altri 3 elementi che ci interessano, quindi questa eventualità rientra nel caso in cui d entri in coda.
Se d effettua un *bypass* tutti gli altri elementi del pattern effettuano un *bypass* e il pattern 231 dato da bca è presente nell'output.
Se d entra in coda tutti gli altri elementi del pattern non possono provocare un *pop*: perchè c provochi un *pop* deve essere che $Back(Q) = d < c < Front(Q)$ e questo è assurdo perchè la coda contiene elementi consecutivi e c non è in coda (la stessa considerazione vale per a, b).Quindi se d entra in coda gli altri elementi del pattern effettuano in *bypass* e il pattern 231 dato da bca è presente nell'output.

23514

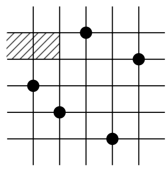
$$\pi = \ldots b \ldots c \ldots e \ldots a \ldots d \ldots$$

Se b provoca un *pop* questo non influenza gli altri 3 elementi che ci interessano, quindi questa eventualità rientra nel caso in cui b entri in coda.

Se b entra in coda c può accodarsi a sua volta o provocare un *pop*. Se c si accoda e provoca un *pop*, a effettua un *bypass* e nell'immagine è presente il pattern 231 bca. Se c provoca un *pop* b viene inserito nell'output, e provoca un *pop* ed il caso è analogo al precedente.
Se b, c effettuano un *bypass* lo fa anche a, quindi si ha bca nell'immagine.
Se solo b effettua un *bypass* c può accodarsi o provocare un *pop*; in entrambi i casi e (o un altro elemento maggiore di c tra c e e) provoca un *pop* aggiungendo c all'output, a effettua un *bypass* e si ha bca nell'output.

$\bar{5}3\bar{5}2614$

Il pattern può anche essere rappresentato dal seguente mesh-pattern:



Quindi una permutazione che contiene occorrenza di questo pattern ha la forma:

$$\pi = \ldots c \ldots b \ldots e \ldots a \ldots d \ldots$$

dove nessun valore precedente a b è compreso tra d e e.

Se c provoca un *pop* il caso è analogo a quello in cui si accodi e basta.
Se c si accoda b effettua un *bypass* e e (o eventualmente anche un altro elemento maggiore di b tra b e e) provoca un *pop*, in seguito a effettua un *bypass* e nell'immagine si trova la sequenza bca.
Se c effettua un *bypass* lo fa anche b. Se anche e effettua un *bypass* si ha un pattern 231 nella sequenza cea dopo il *bypass* di a. Se invece e provoca un *pop* gli elementi estratti sono sicuramente maggiori di c: c ha effettuato un *bypass* quando doveva valere $c < Front(Q) = c^+$, in seguito a effettua un *bypass* e si ha che l'immagine contiene cc^+a.
Se e si accoda deve esserci stato almento un elemento $d^+ : d < d^+ < e$, tra b e e (a causa delle componenti barrate del pattern). Dal momento che la coda prima di incontrare d^+ contiene solo membri strettamente minori di d, d^+ provoca un *pop* e si applicano a d^+ le stesse considerazioni di e nel caso in cui effettui un *pop*.

□