UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica

Tesi di Laurea

COMPOSIZIONE DI OPERATORI DI ORDINAMENTO CON CONTENITORI

COMPOSITION OF SORTING OPERATORS WITH CONTAINERS

ALESSIO SANTORO

Relatore: *Relatore*
Correlatore: *Correlatore*

Anno Accademico 2023-2024

"Inserire citazione"
— Inserire autore citazione

1

INTRODUZIONE

2

ALGORITMI DI ODRINAMENTO E CLASSI DI PATTERN

In questo capitolo verranno introdotti i principali algoritmi di ordinamento che utilizzano sorting devices, in particolare stack-sort, queue-sort e bubble sort, e altri concetti necessari per l'analisi della loro composizione.

Durante l'esecuzione questi algoritmi possono salvare gli elementi in un contenitore (la diversa struttura dati adottata definise i diversi algoritmi) dalla quale poi vengono prelevati per essere aggiunti all'output.

Una sola iterazione non garantisce l'ordinamento della permutazione, dunque gli algoritmi devono essere iterati piú volte, ogni volta sul risultato della iterazione precedente. In ogni caso alla fine delle i-esima iterazione i maggiori i elementi avranno raggiunto la loro posizione finale, dunque sono necessari al massimo $n - 1$ iterazioni per ordinare la permutazione.

Essendo interessati al comportamento di una sola iterazione di questi algoritmi si esaminerá un operatore, definito appositamente per ogni algoritmo, che descrive la singola iterazione.
Ad esempio, prendendo l'algoritmo bubble-sort si fará riferimento all'operatore $B(\pi)$, dove π é una permutazione di interi, tale che n iterazioni del bubble-sort possano essere rappresentate da $B^n(\pi) = B(\dots B(\pi)\dots)$.

BUBBLE SORT

L'algoritmo di ordinamento bubble-sort prevede di scorrere gli elementi da ordinare dal primo al penultimo, ed ogni volta confrontare ogni elemento con il suo successivo per scambiarli se non sono ordinati.
Il risultato di una singola iterazione di bubble-sort su una permutazione $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_n$ é calcolato dall'operatore $B(\pi)$. Per una permutazione π

con valore massimo n vale che $\pi = \pi_L n \pi_R$, allora $B(\pi) = B(\pi_L)\pi_r n$.

Algorithm 1 $B(\pi)$

```
for i = 1 to n − 1 do
    if π_i > π_{i+1} then
        Swap π_i and π_{i+1}
    end if
end for
```

STACK SORT

L'operatore $S(\pi)$ rappresenta il risultato ottenuto applicando un'iterazione di stack sort su una permutazione π.
Il primo passo consiste nell'inserire π_1 nella pila. Poi lo si confronta con l'elemento π_2. Se $\pi_1 > \pi_2$ allora il secondo viene messo nella pila sopra π_1, altrimenti π_1 viene estratto dalla pila e inserito nell'output e π_2 viene inserito nella pila.
Gli stessi passi vengono eseguiti per tutti gli altri elementi presenti nell'input, se viene trovato un elemento nell'input maggiore dell'elemento in cima alla pila, la pila viene svuotata finché questa condizione non diviene falsa, poi l'elemento viene spinto nella pila.
Finiti gli elementi nell'input, se necessario, si svuota completamente la pila nell'output.[7]
Sia $\pi = \pi_L n \pi_R$, con n valore massimo in π, vale che $S(\pi) = S(\pi_L)S(\pi_R)n$

Algorithm 2 operatore S - stack sort, singola iterazione

```
initialize an empty stack
for i = 1 to n do
    while  stack is unempty and π_i >top of the stack do
        pop from the stack to the output
    end while
    push(π_i)
end for
emtpy the stack in the output
```

QUEUE SORT

Per ogni elemento π_i della permutazione π in input se la coda é vuota o il suo ultimo elemento é minore di π_i, si accoda π_i, altrimenti si tolgono elementi dalla coda ponendoli nell'output fino a che l'elemento davanti alla coda non é maggiore di π_i, poi si aggiunge π_i all'output. Si svuota la coda nell'output[8].

Algorithm 3 operatore Q - queue sort, singola iterazione

```
initialize an empty queue
for i = 1 to n do
    if empty queue or last in queue < π_i then
        enqueue(π_i)
    else
        while first in queue < π_i do
            dequeue(π_i)
        end while
        add π_i to the output
    end if
end for
emtpy the queue in the output
```

BYPASS L'operazione che pone un elemento nell'output senza passare dal contenitore si dice **bypass**. Questa viene svolta normalmente nel queuesort, ma talvolta puó essere introdotta in altri algoritmi.

OSSERVAZIONE *Bubble sort* é un caso particolare sia di *queue sort* che di *stack sort*.
Se infatti si fissa a 1 la dimensione della pila o della coda dei rispettivi operatori il comportamento che questi assumono é quello di una cella che, scorrendo l'input, contiene sempre il massimo valore trovato, mentre gli altri vengono messi nell'output.

LEFT-TO-RIGHT MAXIMA In una sequenza i *LTR maxima* sono gli elementi che risultano essere maggiori di ogni altro elemento che li precede. Ad esempio nella sequenza 142387596 i *LTR maxima* sono 1,4,8,9.

La nozione di *LTR maxima* risulta molto importante per lo studio di alcuni degli algoritmi di ordinamento presentati. In particolare durante l'esecuzione di *queuesort* i LTR maxima sono tutti e soli gli elementi che entrano nella coda, mentre durante l'esecuzione di *bubblesort* sono gli unici che vengono scambiati; in entrambi gli algoritmi l'ordine relativo degli altri elementi non viene alterato.

CONTENITORI POP Un caso di studio interessante é quello in cui i contenitori di stack sort e queue sort vengano sostituiti dalla loro versione POP, ovvero un contenitore con politiche di estrazione e inserimento analoghe ma quando viene eseguita un estrazione il contenitore viene svuotato completamente. Si definiscono con questa variante, gli algoritmi **pop-stacksort** e **pop-queuesort**

CLASSI DI PATTERN DI PERMTUAZIONI

[2] Siano α, β due sequenze di interi, si indica con $\alpha \subseteq \beta$ che α é una sottosequenza di β, anche se non necessariamente una sottosequenza consecutiva.

Si dice che una permutazione δ é un pattern contenuto in una permutazione τ se esiste una sottosequenza di τ di ordine isomorfico rispetto a δ, e si indica con $\delta \preceq \tau$. Ad esempio 24153 contiene il pattern 312 perché $413 \subset 24153$.

PATTERN STANDARD Una **standardizzazione**[6] di una sequenza di numeri é un altra sequenza della stessa lunghezza in cui l'elemento minore della sequenza originale é stato sostituito da 1, il secondo minore con un 2, ecc.
Ad esempio, la standardizzazione di 5371 é 3241.

CLASSI DI PATTERN La relazione di sottopermutazione é una relazione di ordine parziale che viene studiata con dei sottoinsiemi chiamati **pattern di classi**. Ogni classe di pattern D puó essere caratterizzata dall'insieme minimo M che evita:

$$D = Av(M) = \{\beta : \mu \not\preceq \beta \forall \mu \in M\}$$

PATTERN BARRATI I pattern classici esprimono in quale relazione di ordine devono essere gli elementi di una sequenza. In alcuni casi puó rivelarsi necessario dover esprimere informazioni ulteriori, come l'assenza di un elemento in una data posizone. Questa informazione puó essere fornita grazie all'utilizzo dei pattern barrati.
Un pattern barrato é un pattern in cui ogni numero puó essere barrato.
La barra che viene posta sopra ad un elemento di un pattern indica che se una sequenza contiene un elemento in quella posizone allora essa non contiene il pattern.

Ad esempio $1\bar{4}23 \not\preceq 162534$, dato che $1423 \preceq 2534$, mentre $1\bar{4}23 \preceq 146235$ dato che $123 \preceq 146, 235$

ALGORITMI E PATTERN-AVOIDANCE

PATTERN 231 Una permutazione π contiene un pattern 231 se $231 \preceq \pi$, ovvero se $\exists a < b < c : \pi = \ldots b \ldots c \ldots a \ldots$.

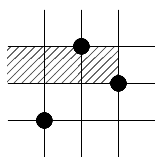
É noto [7] che una permutazione puó essere ordinata da una sola passata di stack sort se e solo se non contiene pattern 231.

Allo stesso modo, sono note simili condizioni perché una permutazione possa essere ordinata da una sola passata degli altri operatori descritti precedentemente.

Operatore	**Permutazioni ordinabili con una sola passata**
Stack sort	Av(231)
Queue sort	Av(321)
Bubble sort	Av(231,321)
Pop-stack sort	Av(231,312)
Pop-queue sort	Av(321,2413)

MESH-PATTERN, PATTERN BARRATI E PATTERN DECORATI

In questa sezione verranno brevemente introdotti i mesh-pattern[3] attraverso degli esempi; le macro per la realizzazione delle griglie sono state prodotte dalla *Reykjavik University*[9].

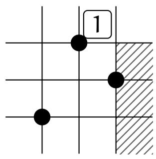


Il pattern mostrato nella griglia soprastante appare in una permutazione se si puó individuare un pattern 132 posizionato in modo tale che le zone oscurate non sono occupate da altri elementi della permutazione.

La sequenza 1243 contiene un'istanza del pattern, dato che gli elementi $1, 4, 3$ formano un pattern 132 e l'elemento 2 si trova in una zona non

oscurata.
La sequenza 3142 invece non contiene lo stesso pattern, dato che nonostante $1, 4, 2$ formano un pattern 132, l'elemento 3 si trova nella zona oscurata $(0, 2)$ (le zone oscurate si individuano indicando la posizione del loro angolo in basso a sinistra, numerandoli da 0).

Nel seguente pattern l'area bianca indicata con 1 indica che per avere un'istanza di questo pattern in una permutazione, all'interno dell'area deve essere presente almeno un altro elemento della permutazione:



Questo pattern é contenuto, ad esempio, nelle sequenze 1342, 12453 o 13524.

3

PROGRAMMI REALIZZATI

PERMUTASORT

Il primo programma che ho realizzato viene lanciato da linea di comando specificando come argomenti un intero n e un operatore di ordinamento X. Il suo scopo é quello di enumerare tutte le n-permutazioni ordinabili e non ordinabili con una sola passata di X, stampa anche i possibili risultati di X su n-permutazioni.

La classe `SelectorPermutations` é il core del programma, viene inizializzata passando un intero e un operatore al costruttore. Grazie alla funzione `itertools.permutations` vengono generate le n-permutazioni e , scorrendole tutte, vi si applica l'operatore X. Il risultato viene aggiunto alla lista `outcomes` e viene valutato: se é ordinato la permutazione da cui si é ottenuto viene aggiunta alla lista `sortable`, altrimenti a `unsortable`. La classe fornisce dei *getters* per le liste e non ha altri metodi computativi, oltre al costruttore.
Dopo essere stata instanziata la classe viene usata come riferimento per i dati che ha giá calcolato nel costruttore, e non produce ulteriori risultati. Di seguito viene mostrato il listato della classe:

```
import sys
from itertools import permutations

if __name__ == '__main__':
  from src.operators import *
  from src.utils import *
else:
  from .src.operators import *
  from .src.utils import *
```

```
class selectorPermutations:
  def __init__(self,num,op):
    if num <=0:
      print("ERROR: was expecting a positive integer but got " +str(num))
      exit()

    # initialization of lists
    self.__sortable = []
    self.__unsortable = []
    self.__outcomes = []

    # generation of permutations
    permutations_list = list(permutations(range(1,num+1)))

    for P in permutations_list:

      # applying the operator to the permutation
      op_P_ = op(P)

      # adding outcome to the list
      if op_P_ not in self.__outcomes:
        self.__outcomes.append(op_P_)

      # adding permutations to the right list
      if isIdentityPermutation(op_P_):
        self.__sortable.append(P)
      else:
        self.__unsortable.append(P)

  def getSortable(self):
    return self.__sortable

  def getUnsortable(self):
    return self.__unsortable

  def getOutcomes(self):
    return self.__outcomes
```

PATTFINDER

Questo programma ha lo scopo di selezionare tra tutte le permutazioni di una data dimensione quali contengono un dato pattern classico e quali no.

Il programma viene lanciato da linea di comando prendendo come argomenti un intero e una sequenza di interi consecutivi eventualemente non ordinati.
Il primo intero rappresenta la lunghezza delle permutazioni da scorrere e la sequenza rappresenta il pattern da ricercare.
Gli argomenti vengono passati al costruttore della classe `PatternAvoid`, l'intero n viene utilizzato per generare le n-permutazioni grazie alla funzione `permutations`. Per ogni permutazione viene controllato se contiene o no il pattern e viene inserita nella rispettiva lista: `containing` o `notcontaining`.

La classe presenta i getter per le liste prodotte e due ulteriori metodi:

`patternize` serve a *standardizzare* una sequenza, si ottiene la versione ordinata della sequenza, e si sostituisce ogni valore con la posizione che occupa una volta oridnato;

`contains` verifica che una sequenza contenga un pattern o meno, grazie alla funzione `itertools.combinations` si ottengono tutte le sottosequenze (anche non consecutive), le si standardizzano e le si confrontano con il pattern da ricercare.

```
import sys
from itertools import permutations,combinations

class PatternAvoid():
  def __init__(self,n, pattern):
    if n <= 1:
      print("ERROR: expecting a whole number greater than 1 but got: "
         + str(n))
      exit()

    self.__n = n

    # checking if the argument really is a classical pattern
    pattern_list = [int(p) for p in pattern]
    if len(pattern) != max(pattern_list):
```

```
            print("ERROR: expected a pattern but got: " + str(pattern))
            exit()
        for i in range(1, len(pattern)):
            if i not in pattern_list:
                print("ERROR: expected a pattern but got: " + str(pattern))
                print("\nA pattern of lenght n must have all the numbers from 1
                    to n, " + str(i) + " not present")
                exit()

        # generating permutations
        permutations_list = list(permutations(range(1,n+1)))

        # declaring list fields
        self.__notcontaining = []
        self.__containing = []

        for p in permutations_list:
            if not self.contains(p,pattern):
                self.__notcontaining.append(p)
            else:
                self.__containing.append(p)

    # get the standard image of the number sequence:
    def patternize(self,pi):
        output = []
        id_ = sorted(pi)
        for p in pi:
            output.append(id_.index(p)+1)
        return output

    # check if a seqence contains the given pattern
    def contains(self, seq, pattern):
        if len(seq) < len(pattern):
            return False
        subseq = combinations(seq, len(pattern))
        for s in subseq:
            if list(self.patternize(s)) == list(pattern):
                return True
        return False

    def getNotContaining(self):
        return self.__notcontaining
```

```
  def getContaining(self):
    return self.__containing
```

SCRIPT PER LA VERIFICA DEI PATTERN

Spesso ho utilizzato questo ulteriore script, che utilizza le classi presentate prima, per verificare che i pattern trovati per un dato operatore siano sufficienti a definire tutto l'insieme di permutazioni non ordinabili.

Grazie a `selectorPermutations` vengono generate tutte le permutazioni non ordinabili (l'operatore e la dimensione delle permutazioni vengono passate come argomenti allo script) ed in seguito si scorre la lista di pattern che si vogliono veririficare. Per ogni pattern `PatternAvoid` genera le permutazioni che lo contengono e queste vengono rimosse dalla lista di permutazioni non ordinabili. Se alla fine la lista rimane vuota allora viene stampato a schermo che tutte le combinazioni ordinabili contengono almeno uno dei pattern specififcati, altrimenti elenca quelle rimaste.

Lo script viene lanciato da linea di comando con i seguenti argomenti (nell'ordine): l'operatore di ordinamento, la dimensione delle permutazioni, l'elenco di pattern da verificare.

Di seguito un esempio di utilizzo ed il codice:

```
$ python verify_patterns.py SB 5 2341 2431 3241

Generating permutations:
      found 50 unsortable permutations

Verifying 3 patterns:

Verifying pattern 2341:
      found 17 matches

Verifying pattern 2431:
      found 17 matches

Verifying pattern 3241:
```

```
      found 17 matches

These 10 permutations are not sorted by SB but not contain any
   specified pattern:
(5, 2, 4, 1, 3)
(5, 3, 1, 4, 2)
(5, 2, 3, 1, 4)
(5, 3, 4, 2, 1)
(1, 5, 3, 4, 2)
(5, 1, 3, 4, 2)
(4, 5, 2, 3, 1)
(4, 2, 3, 1, 5)
(5, 4, 2, 3, 1)
(5, 3, 4, 1, 2)

$ python verify_patterns.py SB 5 2341 2431 3241 4231

Generating permutations:
      found 50 unsortable permutations

Verifying 4 patterns:

Verifying pattern 2341:
      found 17 matches

Verifying pattern 2431:
      found 17 matches

Verifying pattern 3241:
      found 17 matches

Verifying pattern 4231:
      found 17 matches

All unsortable permutations contains some of the specified patterns
```

```
import sys
from permutasort.permutasort import *
from pattFinder.pattfinder import *

# allows to find out if the specified patterns cover all the
   permutations of lenght n
```

```
# that are not sortable by the specified sorting operator

if __name__ == '__main__':

  if len(sys.argv) < 4:
    print("ERROR; requested at least 3 arguments but got: " +
        str(sys.argv[1:]))
    exit()

  op = getOperator(sys.argv[1])
  n = int(sys.argv[2])
  av = sys.argv[3:]

  print("Generating permutations: ")
  unsortable = selectorPermutations(n,op).getUnsortable()
  result = unsortable
  print("\tfound " + str(len(unsortable)) + " unsortable
      permutations\n")

  print("Verifying "+str(len(av))+" patterns:\n")
  for p in av:
    print("Verifying pattern " + p+":")
    # from the list of unsortable premutations the ones containing
        the specified patterns get removed
    pattern = [int(char) for char in p]
    contains_p = PatternAvoid(n, pattern).getContaining()
    result = list(set(result).difference(set(contains_p)))
    print("\tfound
        "+str(len(set(contains_p).intersection(set(unsortable)))) +
        " matches\n")

  n_uns = len(result)
  if(n_uns==0):
    print("All unsortable permutations contains some of the specified
        patterns\n")
  else:
    print("These "+str(n_uns)+" permutations are not sorted by " +
        sys.argv[1]+" but not contain any specified pattern:")
    print(printlist(result))
```

4

COMPOSIZIONE DI OPERATORI DI ORDINAMENTO

É molto interessante studiare la combinazione dei vari operatori e le relazioni tra classi di pattern e le loro preimmagini.

PREIMMAGINI Sia X un operatore di ordinamento, la preimmagine di un certo pattern p, secondo X, indicata con $X^{-1}(p)$ rappresenta l'insieme di tutte le permutazioni la cui immagine secondo l'operatore X contiene il pattern p.

$$X^{-1}(p) = \{\beta : p \preceq X(\beta)\}$$

$Av(21)$ é l'insieme formato dalle sole permutazioni identitá, dato che contiene tutte le permutazioni in cui nessun elemento sia disordinato rispetto ad un altro, ovvero solo le permutazioni incrementali. Si indica con $X^{-1}(Av(21))$ l'insieme di tutte le permutazioni ordinabili da X.

Ad esempio, dato che é noto che l'operatore *bubblesort* ordina solo le permutazioni che non contengono pattern 231 e 321, vale che:

$$B^{-1}(Av(21)) = Av(231, 321)$$

COMPOSIZIONE DI OPERATORI Siano due operatori di ordinamento X e Y, la loro composizione é indicata con $(XY) = (X \circ Y)$, qundi, ad esempio, la composizione di *Stacksort* e *Bubblesort* (in questo ordine) si indica con $SB(\pi) = (S \circ B)(\pi) = S(B(\pi))$.

ALGORITMI PER IL CALCOLO DI PREIMMAGINI Sono giá stati prodotti alcuni algoritmi per calcolare le preimmagini di pattern secondo gli operaratori *bubblesort*[1], *stacksort*[6] e *queuesort*[8][5].
Questo ci permette, quando si combinano due operatori di ordinamento di cui del primo siano noti le classi di pattern da evitare per l'ordinabilitá,

di cercare per quali pattern l'operatore che viene applicato per primo produce permutazioni che siano ordinabili dal secondo.

COMBINAZIONE DI *stacksort* E *bubblesort* Si considera dunque la composione $SB = S \circ B$ e ci si chiede quali permutazioni possano essere ordinate da esso.

$$(SB)^{-1} = B^{-1}S^{-1}(Av(21)) = B^{-1}(Av(231))$$

Dunque ricercando per quali permutazioni *bubblesort* evita il pattern 231 si trovano le condizioni per cui una permutazione risulta ordinabile da *SB*.
Utilizzando l'algoritmo per le preimmagini di bubblesort[1] si ottiene che:

$$(SB)^{-1}(Av(21)) = Av(3241, 2341, 4231, 2431)$$

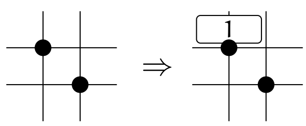
Per ottenere una preimmagine di bubblesort di un pattern classico, si applicano le seguenti regole:

si cercano tutte le coppie disordinate nell'immagine in esame: poiché bubblesort non produce nuove coppie disordinate, tutte le coppie disordinate nella preimmagine

si considera una lista di **candidati**, composta da ogni pattern minimo che contiene almeno le stesse coppie disordinate

per ogni candidato, si valuta ogni sua coppia disordinata (b, a):

se (b, a) é contenuta anche nell'immagine vuol dire che b non é un LTR maxima o che lo é ma c'é un altro LTR maxima tra b e a, quindi si decora la coppia come segue, producendo un nuovo pattern:



Applicazione pratica per il calcolo di una preimmagine

A titolo d'esempio verrá mostrato come si puó arrivare al risultato (giá noto) riguardo alla combinazione $(S \circ B)$:

$$(SB)^{-1}(Av(21)) = Av(2341, 2431, 3241, 4231)$$

Si osservi che il software `permutasort`, presentato nel capitolo 3, puó aiutare ad arrivare alle stesse conclusioni. Infatti lanciando il programma sull'operatore SB e con $n = 4$ si ottengono i seguenti risultati:

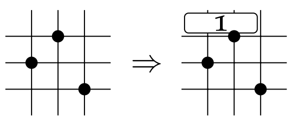
```
$ python permutasort.py 4 SB
...
The following 4 4-permutations are not sortable with the operator
SB:
(2, 3, 4, 1)
(2, 4, 3, 1)
(3, 2, 4, 1)
(4, 2, 3, 1)
...
```

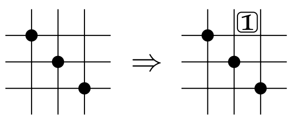
Questi risultati tuttavia sono utili come indicazione, ma non sono sufficienti per essere sicuri del risutlato: infatti non escludono la presenza di pattern classici piú lunghi né la presenza di pattern barrati.
Per quanto quindi questo strumento si sia rivelato molto utile per avere un idea di quali pattern ricercare, soprattutto durante le combinazioni piú complesse che presenteremo dopo, non puó sostituire del tutto un approccio piú formale e teorico, come l'applicazione dell'algoritmo presentato prima, che viene mostrato di seguito:

Prima di tutto si cerca con quale operatore e di quale classe di pattern si deve ricercare la preimmagine:

$$(SB)^{-1}(Av(21)) = B^{-1}(S^{-1}(Av(21))) = B^{-1}(Av(231))$$

Dato che, come noto $S^{-1}(Av(21)) = Av(231)$.
I pattern candidati ad essere preimmagini di 231 sono i pattern che contengono le coppie $(2, 1), (3, 1)$, ovvero i pattern 231,321. Si applicano le regole descritte prima:

231: 

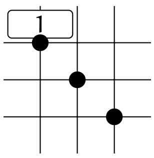
321: 

Quindi l'unica preimmagine secondo bubblesort di 231 che contiene 321 é 3241 mentre quelle che contengono 231 sono 2341, 2431, 4231, che sono appunto i risultati che ci si aspettava.

$Q \circ B$:

$$(QB)^{-1}(Av(21)) = B^{-1}Q^{-1}(Av(21)) = B^{-1}(Av(321))$$

Si osserva che le coppie non invertite in 321 sono $(3,2),(3,1),(2,1)$ e l'unico pattern minimo che le contiene tutte é appunto 321.
Per fare in modo che *bubblesort* produca un 321 bisogna dunque che sia presente un valore 4 prima di 2: sia che sia posizionato prima di 3 o tra 3 e 2, esso é l'unico elemento (tra quelli che compongono il pattern) che viene spostato e il pattern 321 presente nell'input é ancora presente nell'output.



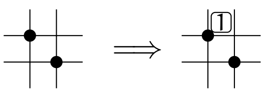
Cosí si ottengono le preimmagini 4321, 3421.

$$QB^{-1}(Av(21)) = Av(4321, 3421)$$

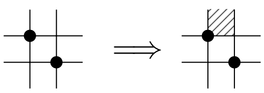
COMPOSIZIONI CHE TERMINANO CON *stacksort*

L'algoritmo per le preimmagini di *stacksort* é abbstanza simile a quello per *bubblesort*.
Anche in questo caso si osservano tutte le coppie disordinate contenute nell'immagine in esame e se ne tre una lista di pattern minimi candidati ad essere preimmagini e li si esaminano ad uno ad uno.
Per ogni coppia disordinata (b, a) presente nel candidato:

se (b, a) é presente anche nell'immagine allora deve essere presente un elemento $c > b$ tra b e a che fa uscire b dalla pila prima che a vi entri



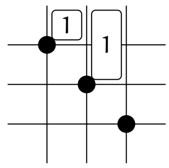
se invece (b, a) non é presente allora si puó escludere la presenza di tale elemento



$Q \circ S$

$$(QS)^{-1}(Av(21)) = S^{-1}Q^{-1}(Av(21)) = S^{-1}(Av(321))$$

Si ricerca dunque le preimmagini di 321 secondo *stacksort*.
321 é l'unico candidato, quindi sappiamo che tutte le preimmagini devono contenere il pattern 321.
L'elemento 3 deve entrare nella pila ed uscirne prima del 2, per fare ció deve esserci un elemento 3^+ maggiore di 3 tra 3 e 2. Similmente é necessario un elemento $2^+ > 2$ tra 2 e 1 per assicurare che 2 esca dalla pila prima che 1 vi entri.



Dunque le preimmagini che cerchiamo devono essere nella forma 33^+22^+1.
Se $2^+ < 3$ allora la preimmagine assume la forma del pattern 45231.
Altrimenti se $2^+ > 3$, si possono ottenere due diverse preimmagini:

$3^+ > 2^+$ genera il pattern 35241

$2^+ > 3^+$ genera il pattern 34251

$$(QS)^{-1}(Av(21)) = Av(34251, 35241, 45231)$$

$B \circ S$

$$(BS)^{-1}(Av(21)) = S^{-1}B^{-1}(Av(21)) = S^{-1}(Av(231, 321))$$

Giá dall'analisi della combinazione precedente é risultato che $S^{-1}(Av(321)) = Av(34251, 35241, 45231)$ qundi é necessario calcolare solo $S^{-1}(Av(231))$.
Quest'ultimo risultato é stato ampiamente studiato in letteratura, in quanto analogo al caso di una variante di *stacksort* che utilizza 2 pile. Il risultato che si ottiene é dunque che $S^{-1}(Av(231)) = Av(2341, 3\bar{5}241)$[6].

Seguendo l'algoritmo applicato finora si osserva che i pattern candidati per le preimmagini sono 231, 321.

Si uniscono dunque i due risultati:

$S^{-1}(Av(231)) = Av(2341, 3\bar{5}241), S^{-1}(Av(321)) = Av(34251, 35241, 45231)$

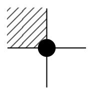
Si osserva che $2341 \preceq 34251$, quindi 34251 non é minimo.
Inoltre i pattern $35241, 3\bar{5}241$, possono essere rappresentati dal pattern minimo 3241 che rende non minimo anche 34251.
Il risultato che si ottiene é:

$$(BS)^{-1}(Av(21)) = Av(2341, 3241, 45231)$$

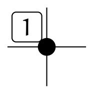
COMBINAZIONI CHE TERMINANO CON *queuesort*

Nonostante anche per *queuesort* sia stato trovato un algoritmo per le preimmagini[8], approcciare il problema "manualmente" analizzando i possibili comportamenti di *queuesort* rispetto alle diverse possibili permutazioni risulta essere piú semplice e piú comprensibile.

Se nel valutare il comportamento di *queuesort* rispetto ad una preimmagine se ci si vuole assicurare che un elemento entri nella coda allora lo si vuole "forzare" ad essere un LTR maxima, dunque si applicherá il seguente mesh-pattern all'elemento in considerazione:



Al contrario, se si ha a che fare con un elemento che risulta essere un right-to-lrft-maxima ma lo si vuole forzare a svuotare la coda, si avrá il seguente risultato:



Per forzare un elemento a effettuare un bypass é necessario che esso sia minore del primo elemento della coda, per questa condizione é piú difficile formalizzare una startegia, ma si vedranno in seguito esempi di come puó essere fatto.

$S \circ Q$

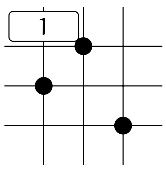
$$(SQ)^{-1}(Av(21)) = Q^{-1}S^{-1}(Av(21)) = Q^{-1}(Av(231))$$

Ancora una volta si considerano come candidati i pattern minimi che contengano almeno le coppie disordinate $(2,1), (3,1)$ ovvero $231, 321$.

Se gli elementi del pattern 231 nell'immagine formano un pattern 321

nella preimmagine allora il valore 3 deve entrare nella coda. Sia che 2 effettui un bypass sia che provochi l'estrazione di alcuni elementi della coda comunque esso viene aggiunto all'output prima che 3 venga estratto. Si rende necessario un elemento $3^+ > 3$ posto tra 2 e 1 per estarre il 3 dalla coda e inserirlo nell'input prima dell'1, tuttavia 3^+ non deve essere maggiore dell'elemento in fondo alla coda, altrimenti viene accodato. Si teorizza l'esistenza di un elemento $4 > 3^+$ posto tra 3 e 2, che rappresenta il massimo della coda quando si raggiunge 3^+.
Il pattern che si ottiene deve essere nella forma 3423^+1, ovvero 35241

se invece gli elementi del pattern 231 nell'immagine formano un pattern 231 anche nella preimmagine che lo contiene a sua volta é necessario che 2 effettui un bypass o che venga estratto dalla coda prima che 3 vi entri. Il che implica la presenza di un valore $2^+ > 2$ prima di 2 o tra 2 e 3. Similmente 3 deve essere aggiunto all'output prima di 1, qundi deve bypassare o essere estratto prima che 1 bypassi. Il che implica l'esistenza di un elemento 4 in posizione precdente a 1; in particolare i pattern minimi che rispettano queste condizoni sono quelli in cui 4 compare prima di 2 e si ha che $2^+ = 4$.



Gli unici pattern minimi che soddisfano queste condizioni sono $2431, 4231$.

Si nota inoltre che, il pattern calcolato prima $35241 \in Q^{-1}(Av(321))$ risulta adesso superfluo in quanto $4231 \preceq 35241$

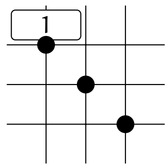
$$(SQ)^{-1}(Av(21)) = Av(2431, 4231)$$

$B \circ Q$

$$(BQ)^{-1}(Av(21)) = Q^{-1}B^{-1}(Av(21)) = Q^{-1}(Av(231, 321))$$

Ancora una volta, si osserva che $Q^{-1}(Av(231))$ é giá stato calcolato nel caso precedente, e resta dunque da unire i risultati giá ottenuti con $Q^{-1}(Av(321))$.
Gli elementi del pattern 321 nell'immagine devono essere a sua volta nello stesso odrine nell'immagine.

In particolare gli elementi 3, 2 devono effettuare un bypass o essere inseriti nella coda ed estratti prima dell'elemento successivo.



Il pattern 4321 sicuramente soddisfa queste condizioni: se 4 bypassa allora tutti gli elementi del pattern, essendo minori bypassano a loro volta, se viene inserito in coda ed estratto allora bypassano comunque, se viene inserito in coda e non estratto allora tutti gli elementi successivi evitano la coda e vengono aggiunti all'output, eventualmente dopo aver provocato l'estrazione di alcuni elementi dalla coda.
Se 3 viene aggiunto in coda ed estratto allora si ha una situazione 3421, dove 2 bypassa.

$$(SQ)^{-1}(Av(21)) = Av(2431, 3421, 4231, 4321)$$

CONTENITORI POP

Lo studio di combinazioni di operatori che utilizzano contenitori POP si rivela piú difficile, in quando si tratta di casi non approfonditi in letteratura.
Sono tuttavia noti i pattern che rendono una permutazione non ordinabile, come presentato nel capitolo 2, ovvero:

$$S_{POP}^{-1}(Av(21)) = Av(231, 312)$$

$$Q_{POP}^{-1}(Av(21)) = Av(321, 2413)$$

Grazie a questi dati, é possibile individuare un caso di facile risoluzione: ovvero quello in cui un algoritmo che usa contenitori POP é concatenato ad un operatore regolare.

$$(X_{POP} \circ Y)(\pi) = X_{POP}(Y(\pi))) \Rightarrow (X_{POP} \circ Y)^{-1}(\pi) = Y^{-1}X_{POP}^{-1}(\pi) = Y^{-1}(Av(m))$$

Sapendo l'insieme di pattern m che rendono la permutazione non ordinabile dall'operatore POP basterá cercare le loro preimmagini secondo l'operatore regolare con i metodi usati finora, come verrá mostrato nelle sezioni seguenti.

POP QUEUESORT

L'algoritmo POP queuesort richiede una diversa analisi da POP stacksort. Esistono diverse versioni di *POP queuesort* ed in particolare ne esistono due ottimali[4]: *Min* e *Cons*.

min in questa versione l'operazione di POP viene eseguita solo se il primo elemento della coda é il successivo dell'ultimo elemento aggiunto all'output; se l'elemento in input é maggiore dell'ultimo elemento della coda (o se la coda é vuota) allora viene accodato mentre negli altri casi, se l'elemento dell'input é minore della testa della coda allora bypassa altrimenti si esegue un POP.

cons questa versione si basa sull'idea di avere sempre elementi consecutivi nella coda; é la versione che verrá adottata in questa tesi; da qui in avanti ogni riferimento a *POP-queuesort* sará riferito a *Cons*

Algorithm 4 Cons - POP Queuesort

```
Q ← empty POP-queue
for i = 1 to n − 1 do
    if empty queue or π_i = Back(Q) + 1 then
        enqueue(π_i)
    else
        if Front(Q) > π_i then
            append π_i to the output
        else
            POP the queue and append the result to the output
            enqueue(π_i)
        end if
    end if
end for
POP the queue and append the result to the output
```

La dimostrazione che *Cons* (cosí come *Min*) sia un algoritmo ottimale nella classe degli algoritmi *POP-queueosrt* si ha dal fatto che esso ordina tutte e sole le sequenze dell'insieme Av(321, 2413), che sono esattamente tutte e sole le permutazioni ordinabili con una POP queue[4].

$S_{POP} \circ S$

$$(S_{POP} \circ S)^{-1}(Av(21)) = S^{-1}(Av(231, 312))$$

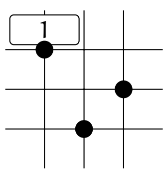
Si é giá calcolato che $S^{-1}(Av(231)) = Av(2341, 3\bar{5}241)$, quindi manca da calcolare le preimmagini di 312.
I pattern candidati che possono generare 312 sono quelli che contengono le coppie $(3, 1), (3, 2)$, ovvero $321, 312$. Perché gli elementi di un pattern 321 nella preimmagine generino un pattern 312 tramite *stacksort* é necessario che 3 entri in pila e ne esca prima che 2 vi entri, deve quindi essere presente un valore 4 posizionato tra 3 e 2 che provochi l'uscita di 3, ovvero il pattern 3421.
Se gli elementi del pattern 312 nell'immagine formano lo stesso pattern anche nella preimmagine allora anche in questo caso bisogna assicurarsi che 3 venga estratto dalla pila prima di 1, si ha quindi il pattern 3412.
Si uniscono tutti i risultati:

$$(S_{POP} \circ S)^{-1}(Av(21)) = Av(2341, 3412, 3421, 3\bar{5}241)$$

$S_{POP} \circ B$

$$(S_{POP} \circ B)^{-1}(Av(21)) = B^{-1}(Av(231, 312))$$

Anche in questo caso la preimmagine di 231 é stata calcolata: $B^{-1}(Av(231)) = (S \circ B)^{-1}(Av(21)) = Av(2341, 2431, 3241, 4231)$.
Si ricerca dunque le preimmaigini di 312 secondo bubblesort.
Gli elementi del pattern 312 nell'immagine possono solo formare un pattern 312 o 321 nella preimmagine.
Si puó osservare come gli stessi elementi di un pattern 321 non possono divenire un 312. La presenza dell'elemento maggiore del pattern all'inizio di essa evita l'ordinamento degli elementi successivi.
Perché un pattern 312 rimanga invariato é sufficiente la presenza di un elemento maggiore di tutto il pattern in posizione tale da evitare l'ordinamento di 3 con qualsiasi elemento, applicando le regole descritte prima per *bubblesort*:



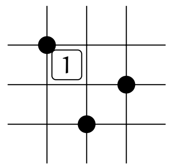
$= 4312, 3412$

$$(S_{POP} \circ B)^{-1}(Av(21)) = Av(2341, 2431, 3241, 3412, 4231, 4312)$$

$S_{POP} \circ Q$

$$(S_{POP} \circ Q)^{-1}(Av(21)) = Q^{-1}(Av(231, 312))$$
$$Q^{-1}(Av(231) = Av(4231, 2431)$$

Possibili preimmagini di $312 : 312, 321$.
Se la preimmagine contiene 312 bisogna far si che 3 effettui un bypass o che esca prima di 1, in ogni caso queste condizioni sono soddisfatte dal seguente mesh-pattern, 4312:



$$(S_{POP} \circ Q)^{-1}(Av(21)) = Av(2431, 4231, 4312)$$

$Q_{POP} \circ S$

$$(Q_{POP} \circ S)^{-1}(Av(21)) = S^{-1}(Q_{POP}^{-1}(Av(21))) = S^{-1}(Av(321, 2413))$$

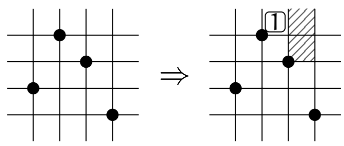
Come in molti altri casi la preimmagine di 321 é stata calcolata:

$$S^{-1}(Av(321)) = (QS)^{-1}(Av(21)) = Av(34251, 35241, 45231)$$

Si ricerca dunque le preimmagini di 2413 secondo stacksort, applicando lo stesso algoritmo dei casi precedenti.
Le coppie non ordinate di 2413 sono $(2, 1), (4, 1), (4, 3)$, che definiscono l'insieme di candidati 2413, 2431, 4213, 4231.

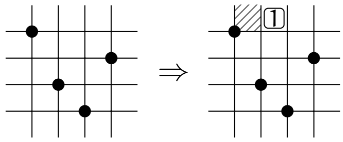
2431 I primi due elementi del pattern sono ordinati fra loro, dunque per lasciare il pattern invariato é sufficiente evitare che le coppie 41 e 43 vengano ordinate. Come giá visto questo si ottiene posizionando in mezzo ai due elementi della coppia un elemnto maggiore di entrambi. Si ottiene cosí il pattern 24513.

2431 Le coppie non ordinate di questa preimmagine sono quelle giá individute nell'immagine piú $(3, 1)$. Quindi applicando le condizioni per le preimmagini si ottiene il seguente meta pattern:



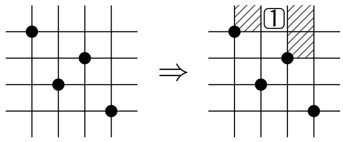
La preimmagine di 2413 che contiene 2431 é quindi 24531.

4213



La preimmagine di 2413 che contiene 4213 é 42513.

4231



La preimmagine di 4213 é 42531.

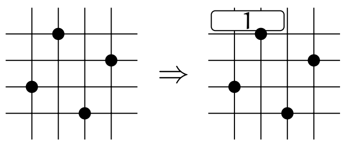
Unendo tutti i risultati si ottiene:

$(Q_{POP} \circ S)^{-1}(Av(21)) = Av(24513, 24531, 34251, 35241, 42513, 42531, 45231)$

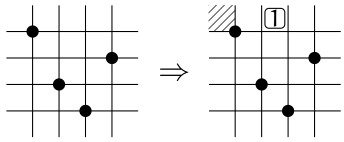
$Q_{POP} \circ B$

$$(Q_{POP} \circ B)^{-1}(Av(21)) = B^{-1}Q_{POP}^{-1}(Av(21)) = B^{-1}(Av(321, 2413))$$

Come in tutti gli altri casi POP, una delle condizioni é giá stata calcolata: $B^{-1}(Av(321)) = (Q \circ B)^{-1}(Av(21)) = Av(3421, 4321)$. Si ricerca adesso le preimmagini di 2413 (secondo bubblesort).
I candidati per le preimmagini sono: 2413, 2431, 4213, 4231, 4321.
Si osserva subito che 2431, 4231, e 4321, pur essendo nell'elenco dei candidati non possono in realtá generare un pattern 2413 con gli stessi elementi: in ognuno di questi infatti la coppia $(3, 1)$ dovrebbe essere ordinata ma nessuno dei due é un LTR maxima, dunque il loro ordine relativo non viene cambiato da bubblesort.
Si applicano le condizioni per la ricerca di preimmagini di bubblesort agli altri due candidati:

2413: 

Dunque i pattern che contengono un pattern 2413 che resta invariato dopo una passata di bubblesort sono 24513, 25413, 52413.

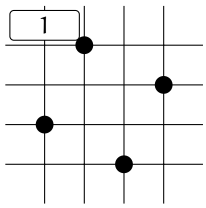
4213 

Il pattern minimo che corrisponde al mesh pattern rappresentato é 42513.
Si noti che l'area oscurata dovrebbe generare i pattern $\overline{6}42513$ e $\overline{5}42613$, tuttavia si nota che entrambi i pattern, se inclusa la parte barrat, sono contenuti in quello precedente e generano pattern 2413 dopo una passata di bubblesort: $B(642513) = B(542613) = 425136$, dove la sottosequenza 2513 rappresenta un'istanza del pattern 2413.

$Q_{POP} \circ Q$

$$(Q_{POP} \circ Q)^{-1}(Av(21)) = Q^{-1}(321, 2413)$$

La preimmagine $Q^{-1}(Av(321))$ é giá stata trovato nel caso $B \circ Q$, e vale che $Q^{-1}(Av(321)) = Av(4321)$.
Se si applica le regole per la ricerca di preimamgini di queuesort a 2413 si ottiene:



Quindi si ottiene che $(Q_{POP} \circ Q)^{-1}(Av(21)) = Av(4321, 25413, 52413)$.

IDEE PER LA RICERCA DI PREIMMAGINI SECONDO L'OPERATORE POP-STACKSORT

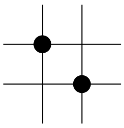
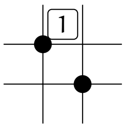
Si ricercano le condizioni che un candidato deve soddisfare per produrre una voluta immagine. Come negli altri casi, si esaminano le coppie non ordinate nel candidato, per ogni coppia disordinata (b, a) che non viene ordinata da una passata di POPstacksort si verifica una delle sequenti condizioni:

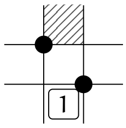
A) un elemento $c > b$ é presente tra b e a, questo provoca il POP prima che l'algoritmo arrivi ad esaminare a;

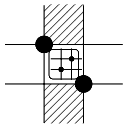
B) un elemento $a^- < a$ (e nessun elemento $c > b$) é presente tra b e a, quindi a^- viene inserito in coda ed é a a provocare il POP;

c) tra i due elementi ma non c'é nessun elemento minore di a o maggiore b ma c'é una coppia ordinata, ovvero esistono $b^-, a^+ : a < a^+ < b^- < b$ e $b \dots a^+ \dots b^- \dots a$ é una sottosequenza nel candidato.

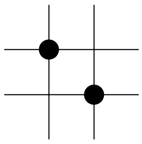
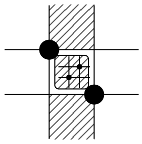
Quindi per trovare una preimmagine secondo POPstacksort occorre applicare le seguenti decorazioni, per ogni coppia disordinata che debba restare tale, al meta pattern del candidato:

 $\Rightarrow$ A) 

, B) 

, C) 

Se invece ci si vuole assicurare che una coppia disordinata venga ordinata, la decorazione da apllicare consiste semplicemente nella "negazione" di tutte quelle espresse finora:

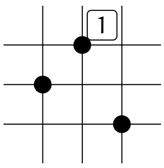
 $\Rightarrow$ 

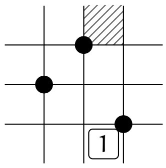
$S \circ S_{POP}$

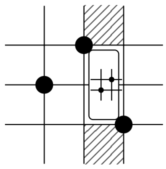
$$(S \circ S_{POP})^{-1}(Av(21)) = S_{POP}^{-1}(S^{-1}(Av(21))) = S_{POP}^{-1}(Av(231))$$

Si applicano le condizioni per le preimmagini ai due candidati: 231 e 321.

Nel caso di 231, le coppie disordinate sono $(2, 1), (3, 1)$. Si osserva che 3 giá soddisdfa la condzione A per la coppia $(2, 1)$, quindi resta da applicare le condizioni alla coppia $(3, 1)$:

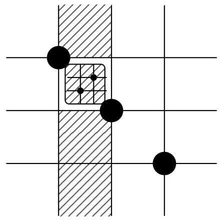


, 

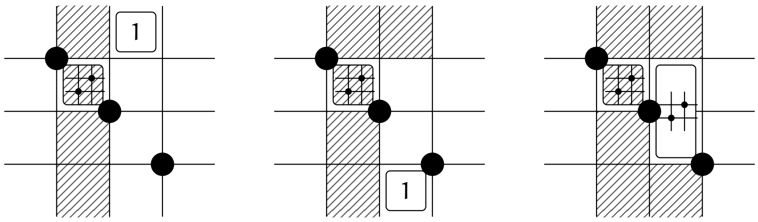
, 

Dalla condizione A si ottiene il pattern 2341, dalla B il 3412 dalla condizione C si ottengono, considerando la posizione relativa degli elemeneti nella coppia aggiuntiva rispetto all'elemento 2, i pattern 25341, 35241, 45231.

Se gli elementi del pattern 231 nell'immagine invece formano un pattern 321 nella preimmagine, allora si applica la condizione per ordinare una coppia alla coppia $(3, 2)$:



Si applicano adesso le condizioni per la coppia $(3,1)$ che ci si aspetta resti disordinata:



Si osservi come applicando le condzioni A e B per la coppia $(3,1)$ queste siano giá soddisfatte per la coppia $(2,1)$. Applicando la condizione C la coppia puó essere costruita utilizzando l'elemento 2 come membro minore all'interno della coppia, e questo soddisfa anche la condizione A per la coppia $(2,1)$. Si ottengono dunque i pattern 3241, 4312, 4231.

Si osserva che, tra i risultati ottenuti prima, alcuni risultano non necessari: $2341 \preceq 25341, 3241 \preceq 35241, 4231 \preceq 45231$. Si semplificano e si ottiene il seguente risultato:

$$(S \circ S_{POP})^{-1}(Av(21)) = Av(2341, 3241, 3412, 4231, 4312)$$

$Q \circ S_{POP}$

$$Q \circ S_{POP}(Av(21)) = S_{POP}^{-1}(Q^{-1}(Av(21))) = S_{POP}^{-1}(Av(321))$$

Si applicano anche stavolta le condizioni per la ricerca di preimmagini al pattern 321. Essendo 321 una sequenza decrementale, non ci sono altri candidati; le sue coppie disordinate sono $(3,2), (3,1), (2,1)$ ed é necessario applicare tutte le combinazioni possibili di condizioni A,B,C a queste coppie.

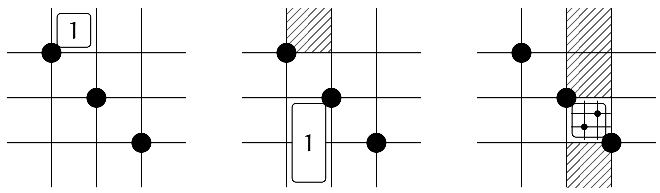
Una volta applicate le diverse condizioni alla coppia $(3,2)$ é evidente che queste soddisfano anche le condizioni per la coppia $(3,1)$:

applicando la condizione A e ponendo quindi un elemento maggiore di 3 tra 3 e 2, allora lo stesso elemento rappresenta un valore maggiore di 3 posizionato tra 3 e 1 (condzione A per la coppia $(3, 1)$)

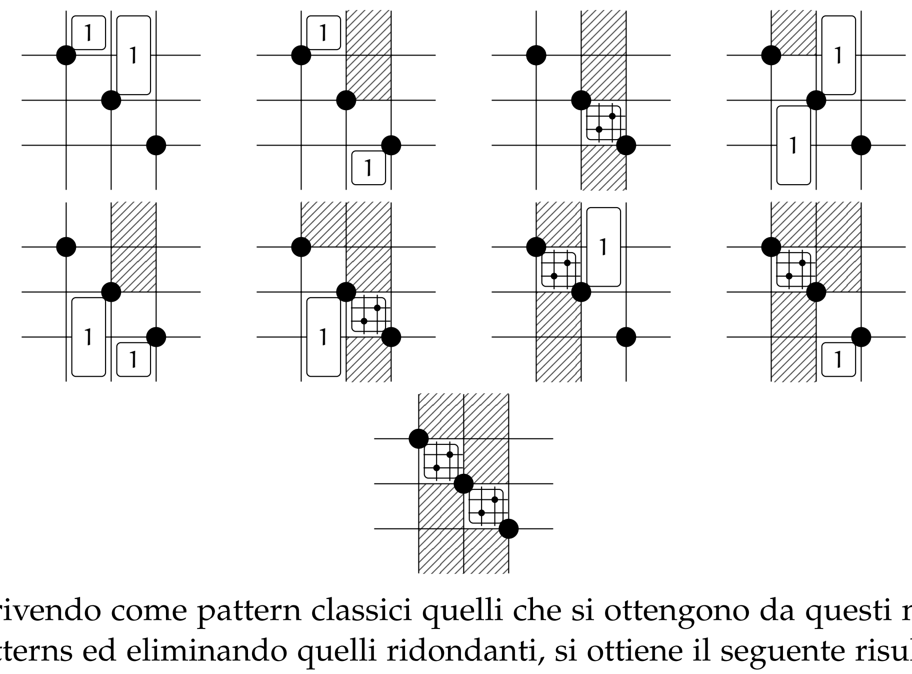
se si applica la condizione B, ponendo un valore $2^- < 2$ tra 2 e 3, allora o si ha che $2^- < 1$, che soddisfa la condizione B per la coppia $(3, 1)$, o che $1 < 2^- < 2$, e allora la coppia $(2^-, 2)$ é una coppia ordinata tra 3 e 1 (condizione C per ls coppia $(3, 1)$)

nel caso, infine, in cui si applichi la condizione C e si ponga quindi una coppia ordinata tra 3 e 2 allora la stessa coppia soddisfa la condizione C per la coppia $(3, 1)$.

In sintesi, i seguenti pattern soddisfano le condzioni da imporre alle coppie $(3, 2), (3, 1)$:



Una volta applicate le condizioni anche alla coppia $(2, 1)$ si ottengono i seguenti 9 meta-pattern, da cui si ottengono 22 pattern classici:



Scrivendo come pattern classici quelli che si ottengono da questi meta-patterns ed eliminando quelli ridondanti, si ottiene il seguente risultato:

$$Q \circ S_{POP}(Av(21)) = Av(34251, 35241, 41352, 42351, 45231, 45312, 51342, 51423, 52341, 52413, 53412)$$

$B \circ S_{POP}$

$$(B \circ S_{POP})^{-1}(Av(21)) = S_{POP}^{-1}(B^{-1}(Av(21))) = S_{POP}^{-1}(Av(231, 321))$$

Il l'insieme minimo di pattern per l'ordinabilitá di permutazione con la composzione bubblesort, POPstacksort é l'unione degli insiemi dei due risultati precedenti, stacksort e queuesort.
Si nota, tuttavia che ogni pattern contenuto nell'insieme ottenuto dalla combinazione con queuesort contiene **almeno** un pattern tra quelli ottenuti da stacksort. Nello specifico, a titolo esemplificativo:

$$3241 \preceq 34251, 35241, 41352, 42351$$

$$3412 \preceq 53412$$

$$4231 \preceq 45231, 51342, 52341, 52413$$

$$4312 \preceq 45312, 51423$$

Dunque l'insieme minimo di pattern che caratterizza le permutazioni ordinabili da $B \circ S_{POP}$ é lo stesso di $S \circ S_{POP}$.

$$(B \circ S_{POP})^{-1}(Av(21)) = Av(2341, 3241, 3412, 4231, 4312)$$

Idee per la ricerca di preimmagini secondo l'operatore POPqueuesort

$S \circ Q_{POP}$

$Q \circ Q_{POP}$

$B \circ Q_{POP}$

BIBLIOGRAFIA

[1] Michael H Albert, Mike D Atkinson, Mathilde Bouvel, Anders Claesson, and Mark Dukes. On the inverse image of pattern classes under bubble sort. *arXiv preprint arXiv:1008.5299*, 2010. (Cited on pages 19 and 20.)

[2] Mathilde Bouvel, Lapo Cioni, and Luca Ferrari. Preimages under the bubblesort operator. *arXiv preprint arXiv:2204.12936*, 2022. (Cited on page 8.)

[3] Petter Brändén and Anders Claesson. Mesh patterns and the expansion of permutation statistics as sums of permutation patterns. *arXiv preprint arXiv:1102.4226*, 2011. (Cited on page 9.)

[4] Lapo Cioni et al. Sorting with a popqueue. (Cited on page 27.)

[5] Lapo Cioni and Luca Ferrari. Characterization and enumeration of preimages under the queuesort algorithm. In *Extended Abstracts EuroComb 2021: European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications*, pages 234–240. Springer, 2021. (Cited on page 19.)

[6] Anders Claesson and Henning Ulfarsson. Sorting and preimages of pattern classes. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, (Proceedings), 2012. (Cited on pages 8, 19, and 23.)

[7] CONG HAN LIM. Brief introduction on stack sorting. (Cited on pages 6 and 9.)

[8] Hjalti Magnússon. Sorting operators and their preimages. *Computer Science*, 2013. (Cited on pages 7, 19, and 24.)

[9] HENNING Ú'LFARSSON. Ultra-quick tutorial for generalized pattern macros. *http://staff.ru.is/henningu/notes/patternmacros/patternmacros.tex*. (Cited on page 9.)