XS3310 Teoría Estadística

I Semestre 2021

Escuela de Estadística

2021-04-22

¿Qué vamos a discutir hoy?

- Mapa de recursos ¿dónde encuentro qué?
- Suficiencia: Técnicas de suficiencia
- Teorema 4.1 Técnica de suficiencia (y ejemplo)
- Teorema 4.2 Técnica de la familia exponencial (y ejemplo)
- Método de determinar estimadores
- Estimador de Rao-Blackwell
- Definición 5.1 (Completitud)
- Teorema 5.1 (Rao-Blackwell) y ejemplo

Vídeos

- Esperanza condicional
- Teorema de Rao-Blackwell
- Ejemplos de aplicación del teorema de Rao-Blackwell
- Completez
- Teorema de Lehmann-Sheffé
- Ejemplo de aplicación del teorema de Lehmann-Sheffé
- Suficiencia e información
- Suficiencia conjunta
- Suficiencia minimal
- Ejemplos de estadísticas suficientes minimales

Suficiencia para familias exponenciales

Teorema 4.2. Técnica de la familia exponencial. Si X es una variable aleatoria cuyo dominio no depende de un parámetro desconocido θ y la función de densidad/probabilidad de X dado θ pertenece a la familia exponencial, es decir que tiene la forma:

$$f_X(x|\theta) = b(x)c(\theta)e^{-a(x)d(\theta)}, \qquad a(x) \neq 1$$

entonces $U = \sum_{i=1}^{n} a(X_i)$ es un estadístico suficiente mínimo para estimar θ.

Prueba. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria tal que X_i pertenece a la familia exponencial. Entonces se cumple,

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} b(X_i)c(\theta)e^{-a(X_i)d(\theta)} = c(\theta)^n \prod_{i=1}^{n} b(X_i)e^{-d(\theta)\sum_{i=1}^{n} a(X_i)}$$

Si tomamos como

$$T = \sum_{i=1}^{n} a(X_i) \tag{1}$$

$$u(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} b(X_i) \tag{2}$$

$$v(T, \theta) = c(\theta)^n e^{-d(\theta)T} \tag{3}$$

entonces, por la técnica de factorización, se cumple que T es suficiente mínimo para θ.

Suficiencia

Ejemplo. Encuentre el estadístico suficiente mínimo para el ejemplo anterior pero utilizando la técnica de la familia exponencial.

Solución. Lo primero consiste en demostrar que la función de probabilidad de una Poisson tiene la forma de la familia exponencial. Viendo la función de probabilidad de una Poisson, $f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, esta pareciera no cumplir la forma de la familia exponencial, no obstante podemos realizar algunas operaciones algebraicas para alcanzar esa forma:

$$\begin{aligned} f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} &= e^{\ln\left(\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}\right)} = e^{\ln(\lambda^x)+\ln(e^{-\lambda})-\ln(x!)} \\ &= e^{x\ln(\lambda)-\lambda-\ln(x!)} = e^{-\lambda}e^{x\ln(\lambda)}\frac{1}{x!} \end{aligned}$$

Suficiencia

Podemos ver que esta expresión tiene la forma de la familia exponencial con

$a(x) = x \qquad c(\lambda) = e^{-\lambda}$
$b(x) = \frac{1}{x!} \quad d(\lambda) = -\ln(\lambda)$

Por lo tanto podemos concluir que $U = \sum_{j=1}^{n} X_j$ es un estadístico suficiente mínimo para λ.

Ejemplo. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\theta} e^{-\frac{x^\alpha}{\theta}} & si \quad x > 0 \\ 0 \quad si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Encuentre un estadístico suficiente mínimo para θ.

Suficiencia

Solución. Podemos apreciar de la función de densidad anterior lo siguiente:

$a(x) = x^\alpha \qquad c(\theta) = \frac{1}{\theta}$
$b(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad d(\theta) = \frac{1}{\theta}$

Por lo tanto, por la técnica de la familia exponencial, el estadístico

$$U = \sum_{j=1}^{n} X_j^\alpha$$

es suficiente mínimo para θ.

Supongamos que para este caso si quisieramos saber cuál sería un estadístico suficiente mínimo para α. De las técnicas vistas hasta el momento no es posible obtener una respuesta, no obstante veremos posteriormente una estrategia para resolver este problema.

Completitud

> **Definición 5.1.** Completitud. Sea U un estadístico de una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ con función de densidad/probabilidad $f_X(x|\theta)$ si $a \leq u \leq b$ y $\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ y sea $g(u)$ una función continua en $[a, b]$. Se dice que el estadístico U es **completo** para la distribución $f_X(x|\theta)$ si se cumple que si $E(g(U)) = 0 \quad \forall\theta \in [\alpha_1, \alpha_2]$ entonces $g(U) = 0$ con probabilidad 1.

- Con un estadístico que no es completo puede pasar que $g(U) \neq= 0$ para algún θ, pero que $E(g(U)) = 0$.
- Es decir, que existe "algo más" aparte del estadístico U que hace que la esperanza sea igual a 0.
- Un estadístico completo, no tiene ese "algo más" y concuerda si $g(U) = 0$ con $E(g(U)) = 0$.
- Un estadístico completo, puede que no aporte información relevante sobre el parametro. Solo dice que es congruente.
- Para que un estadístico completo, sea útil, debe ser suficiente.

Ejemplo: Sea $U = \sum_{j=1}^{n} X_j$ un estadístico suficiente de una muestra aleatoria de una población Bernoulli con probabilidad de éxito p. Demuestre que U es un estadístico completo si el espacio paramétrico de p es $]0,1[$.

Solución: Sabemos de antemano que el estadístico $U = \sum_{j=1}^{n} X_j$ tiene distribución Binomial(n,p). Con esto procedemos a encontrar $E(g(U))$ para cualquier función $g(\cdot)$.

$$
\begin{aligned}
E(g(U)) &= \sum_{u=0}^{n} g(u) \binom{n}{u} p^u \, (1-p)^{n-u} \\
&= (1-p)^n \sum_{u=0}^{n} g(u) \binom{n}{u} \left(\frac{p}{1-p} \right)^u
\end{aligned}
$$

Observe que como el dominio de p no incluye el 0 o 1 entonces esta expresión solo puede ser cero si y solo si

$$
\sum_{u=0}^{n} g(u) \binom{n}{u} \left(\frac{p}{1-p} \right)^u = 0
$$

Como esta expresión es un polinomio de $\left(\frac{p}{1-p}\right)$ entonces esta solo puede ser cero si sus coeficientes son cero, y esto solo va a suceder si y solo si $g(u) = 0$.

Por lo tanto concluimos que U es un estadístico completo para la familia de distribuciones Bernoulli.

En general, vamos a estar trabajando con estadísticos completos en este curso y no nos vamos a estar deteniendo en las demostraciones de que estos lo sean pues ya sale de los propósitos del curso. No obstante, esta propiedad tendrá mayor uso con los teoremas siguientes.

Estimadores Rao-Blackwell

Teorema 5.1. Teorema de Rao-Blackwell. Sea $U = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ es un estadístico suficiente minimal para estimar θ y sea $\hat{\theta}$ un estimador cualquiera de θ. Si definimos otro estimador como $\hat{\theta}^* = E(\hat{\theta}|U)$ se cumple que $ECM(\hat{\theta}^*) \leq ECM(\hat{\theta})$. Es decir, a partir de un estimador $\hat{\theta}$ se puede encontrar un estimador $\hat{\theta}^*$ óptimo.

NOTA: ¿Es el mismo señor Rao de Cramer-Rao? SI!

NOTA: se puede demostrar que si $\hat{\theta}$ es insesgado, entonces el estimador mejorado $\hat{\theta}^*$ también será insesgado.

Estimadores Rao-Blackwell

Ejemplo: Suponga que una operadora de llamadas recibe llamadas de acuerdo a un proceso Poisson con promedio de llamadas por minuto, λ. Se obtiene una muestra aleatoria $X_1, X_2, ..., X_n$ de las llamadas telefónicas que llegaron en n periodos sucesivos de un minuto. Para estimar la probabilidad de que el siguiente periodo de un minuto pase sin llamadas ($e^{-\lambda}$) se utiliza el siguiente estimador:

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} 1 & si \quad X_1 = 0 \\ 0 & en \quad otros \quad casos \end{cases}$$

Es decir, se estima la probabilidad en 1 si no se recibieron llamadas en el primer minuto y cero en el caso contrario. Con base en esto, obtenga el estimador de Rao-Blacwell.

Estimadores Rao-Blackwell

Solución: $U = \sum_{j=1}^{n} X_j$ es un estadístico suficiente minimal para λ, por lo que encontramos el estimador de Rao-Blackwell a partir de este estadístico:

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}^* = E(\hat{\lambda}|U = u) &= P\left(X_1 = 0|\sum_{j=1}^{n} X_j = u\right) \\
&= \frac{P\left(X_1 = 0, \sum_{j=1}^{n} X_j = u\right)}{P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j = u\right)} = \frac{P\left(\sum_{j=2}^{n} X_j = u\right)}{P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j = u\right)} \\
&= \frac{e^{-\lambda}\frac{((n-1)\lambda)^u e^{-(n-1)\lambda}}{u!}}{\frac{(n\lambda)^u e^{-n\lambda}}{u!}} \\
&= \left(\frac{n-1}{n}\right)^u = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^u
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{\lambda}^* = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\sum_{j=1}^{n} X_j}$ es un estimador suficiente con menor ECM que $\hat{\lambda}$.

Teorema de Lehmann-Scheffé

> **Teorema 5.2.** Teorema de Lehmann-Scheffé. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una población con función de densidad/probabilidad $f_X(x|\theta)$. Si $U = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ es un estadístico suficiente y completo para θ y además se cumple que $E(h(U))$ es insesgado para estimar θ entonces $h(U)$ es el único estimador insesgado de varianza mínima para θ.

Prueba:

Sabemos por el Teorema de Rao-Blackwell que si $\hat{\theta}$ es un estimador insesgado de θ entonces $\hat{\theta}^* = E(\hat{\theta}|U)$ es un estimador insesgado de varianza mínima para θ.

Para demostrar unicidad supongamos que tenemos otro estimador $\hat{\phi}^*$ que es insesgado y de varianza mínima para θ. Por lo tanto se debe cumplir lo siguiente:

$$E(\hat{\theta}^*) = E(\hat{\phi}^*) = \theta \Rightarrow E(\hat{\theta}^*) - E(\hat{\phi}^*) = E(\hat{\theta}^* - \hat{\phi}^*) = E(g(U)) = 0$$

Como se cumple que $f_X(x|\theta)$ es una familia completa en el estadístico suficiente U entonces se cumple que $g(U) = 0$, es decir $\hat{\theta}^* - \hat{\phi}^* = 0$, que es equivalente a decir $\hat{\theta}^* = \hat{\phi}^*$. Por lo tanto concluimos que solo existe un único estimador insesgado de varianza mínima.

Estimadores Insesgados de Varianza Mínima (EIVM)

Con los resultados anteriores, para distribuciones completas, si tenemos un estadístico U que es suficiente minimal para estimar θ entonces solo debemos encontrar una función $h(\cdot)$ que sea insesgada y por lo tanto obtendremos un **estimador insesgado de varianza mínima**, el cual es único.

Ejemplo. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria tal que $X_j \sim Bernoulli(p)$. Encuentre un EIVM para p.

Solución. Ya habiamos demostrado con anterioridad que $U = \sum_{j=1}^{n} X_j$ es un estadístico suficiente minimal y completo en una distribución Bernoulli. Para encontrar el EIVM solo debemos encontrar una función de U que sea insesgada para p.

$$E(U) = E\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = np \Rightarrow \hat{p} = \frac{U}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n}$$

es un EIVM para p.

Ejemplo. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una muestra aleatoria tal que $X_j \sim Exp(\beta)$. Demuestre que $\overline{X}$ es un EIVM para β.

Solución. Suponiendo que la exponencial es una familia completa, debemos encontrar un estadístico suficiente para β. Recordemos la función de densidad:

$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$. En este caso es evidente la forma de la familia exponencial:

$a(x) = x \quad c(\beta) = \frac{1}{\beta} \quad b(x) = 1 \quad d(\beta) = \frac{1}{\beta}$

Por lo tanto decimos que $U = \sum_{j=1}^{n} X_j$ es un estadístico suficiente minimal para β. Por lo tanto, $E(U) = E\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) = n\beta$.

Concluimos, por el Teorema de Rao-Blackwell y Lehmann-Scheffé que $\overline{X}$ es un EIVM para β.

Ejercicios:

1. Sea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra independiente e idénticamente distribuida de una $N(\mu, \sigma^2)$. Entonces:

a. Si μ es desconocido y σ^2 es conocida, entonces muestre que $\bar{Y}$ es suficiente para μ.

b. Si μ es conocido y σ^2 es desconocida, entonces muestre que $\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2$ es suficiente para σ^2.

c. Si μ y σ^2 son desconocidas, muestre que $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ y $\sum_{i=1}^{n} Y_i^2$ son conjuntamente suficientes para μ y σ^2.

2. Sea $Y_1, ..., Y_n$ una muestra independiente e idénticamente distribuida con función de densidad

$$f(y|\theta) = \begin{cases} \dfrac{3y^2}{\theta^3}, & 0 \leq y \leq \theta \\ 0, & otro\ caso. \end{cases}$$

Muestre que $Y_{(n)} = max\{X_1, ..., X_n\}$ es suficiente para θ.

Ejercicios

¿Por qué demostrar que un estimador es EIVM es importante?

Ejemplo 9.6 - 9.9 de Mendenhall

Ejercicio para hacer en clase: Práctica 9.37 - 9.68 de Mendenhall.

---

class: center, middle

¿Qué discutimos hoy?

Suficiencia, técnicas para encontrar estimadores suficientes. Propiedades de los estimadores puntuales: **completitud**. Teorema de Rao-Blackwell, Teorema de Lehmann-Scheffé, EIVM.