

MOTO ROTAZIONALE (TERZA PARTE)

Momento angolare

Consideriamo le grandezze vettoriali, definite per un punto materiale individuato da un vettore posizione $\vec{R}(t)$ e avere quantità di moto $\vec{p}(t)$:

$$\vec{L}(t) = \vec{R}(t) \times \vec{p}(t)$$

Per analogia formale con il momento di una forza, $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$,

$\vec{L}(t)$ è chiamato MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO oppure MOMENTO ANGOLARE di un punto materiale con quantità di moto $\vec{p}(t)$ nella posizione $\vec{R}(t)$. Si misura in $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ nel S.I. di unità di misura. È per costruzione un vettore perpendicolare al piano definito dai vettori $\vec{R}(t)$ e $\vec{p}(t)$.

Deriviamo $\vec{L}(t)$ rispetto al tempo:

$$[\vec{L}(t)]' = [\vec{R}(t)]' \times \vec{p}(t) + \vec{R}(t) \times [\vec{p}(t)]' = \vec{v}(t) \times \vec{p}(t) + \vec{R}(t) \times \vec{F}_r(t),$$

dove $\vec{v}(t)$ è la velocità istantanea vettoriale del punto materiale e $\vec{F}_r(t)$ è la risultante delle forze agenti sul punto materiale. Ma i vettori $\vec{v}(t)$ e $\vec{p}(t)$ sono paralleli per costruzione (risulta $\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$ per un punto materiale), per cui risulta: $[\vec{L}(t)]' = \vec{R}(t) \times \vec{F}_r(t) = \vec{\tau}_r(t)$

Dunque, vale la legge $[\vec{L}(t)]' = \vec{\tau}_r(t)$, dove $\vec{\tau}_r(t)$ è il momento risultante agente sul punto materiale.

Attenzione: nell'equazione appena scritta i due vettori $\vec{L}(t)$ e $\vec{\tau}_r(t)$ devono essere calcolati rispetto allo stesso polo.

Se consideriamo un sistema costituito da N punti materiali, il suo momento angolare totale e' dato da:

$$\vec{L}_{\text{TOT}}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i(t), \quad \text{e le sue derivate rispetto al tempo}$$

e': $[\vec{L}_{\text{TOT}}(t)]' = \sum_{i=1}^N [\vec{L}_i(t)]' = \sum_{i=1}^N [\vec{\tau}_{r,i}(t)]$

Ne abbiamo dimostrato che, per un sistema di N punti materiali, il momento risultante delle forze agenti sui ~~su~~ costituenti del sistema e' uguale al momento risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema.

Dunque, in generale, vale la seguente equazione:

$$[\vec{L}_{\text{TOT}}(t)]' = \vec{\tau}_{e,\text{TOT}}(t)$$

dove $\vec{\tau}_{e,\text{TOT}}(t)$ e' appunto il momento risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema.

Questa equazione e' nota come **SECONDA EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI:**

Le derivate rispetto al tempo del momento angolare totale di un sistema di punti materiali e' uguale al momento risultante delle sole forze esterne. Tutti i momenti devono essere calcolati rispetto allo stesso polo.

Per un corpo rigido rotante attorno a un asse z fisso, risulta (con polo sull'asse di rotazione):

$L_{i,z} = r_i m_i v_{t,i}$, dove r_i e' la distanza del punto materiale i-enimo dell'asse di rotazione, m_i e' la massa del punto materiale i-enimo e $v_{t,i}$ e' la sua velocità tangenziale. Poiché in un corpo rigido in rotazione risulta

$$v_{t,i} = r_i \omega, \text{ otteniamo:}$$

$$L_{i,z} = m_i r_i^2 \omega, \text{ e quindi}$$

$$L_{\text{TOT},z} = \sum_{i=1}^N L_{i,z} = \sum_{i=1}^N (m_i r_i^2 \omega) = \left[\sum_{i=1}^N (m_i r_i^2) \right] \omega = I_z \omega$$

Dunque, per un corpo rigido vale la relazione

$$\boxed{L_{\text{TOT},z} = I_z \omega}, \text{ con polo sull'asse di rotazione.}$$

Teoremi di König

1) Momento angolare totale di un sistema di N punti materiali.

Indichiamo con \vec{R}_i la posizione del corpo i-enimo del sistema rispetto a un'origine O fisica. Se \vec{R}_{CM} e' la posizione del centro di massa del sistema rispetto a O, e se \vec{r}_i e' la posizione del corpo i-enimo rispetto al centro di massa, risulta:

(3)

$$\vec{R}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{r}_i$$

Derivando rispetto al tempo i due membri di questa equazione, otteniamo:

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{CM} + \vec{v}'_i, \text{ dove}$$

\vec{v}'_i : velocità istantanea del corpo i -esimo rispetto all'origine O

\vec{V}_{CM} : velocità istantanea del centro di massa del sistema rispetto all'origine O

\vec{v}'_i : velocità istantanea del corpo i -esimo rispetto al centro di massa del sistema.

Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{L}_{TOT}(t) = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i(t) \times \vec{p}_i(t)) = \sum_{i=1}^N [(\vec{R}_{CM}(t) + \vec{r}'_i(t)) \times (m_i (V_{CM}(t) + \vec{v}'_i(t)))]$$

$$= \sum_{i=1}^N [\vec{R}_{CM}(t) \times (m_i \vec{V}_{CM}(t))] + \vec{R}_{CM}(t) \times \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}'_i(t)) + \\ + \sum_{i=1}^N (m_i \vec{r}'_i(t)) \times \vec{V}_{CM}(t) + \sum_{i=1}^N [\vec{r}'_i(t) \times (m_i \vec{v}'_i(t))]$$

Ma rispetto al centro di massa del sistema, praticamente per definizione, risultate:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}'_i(t)) = 0 \quad (\text{il centro di massa e' fermo rispetto al centro di massa!})$$

$$\sum_{i=1}^N (m_i \vec{r}'_i(t)) = 0 \quad (\text{il centro di massa si trova nell'origine rispetto al centro di massa}).$$

Allora otteniamo, in definitiva:

$$\vec{L}_{\text{TOT}}(t) = \sum_i \vec{R}_{\text{CM}}(t) \times \left[\sum_{i=1}^N m_i \right] \vec{v}_{\text{CM}}(t) + \sum_{i=1}^N \left[\vec{r}_i(t) \times \vec{p}_i(t) \right],$$

dove si e' posto $m_i \vec{v}_i(t) = \vec{p}_i(t)$

Posto $\sum_{i=1}^N m_i = M_{\text{TOT}}$ (massa totale del sistema), e posto

$$M_{\text{TOT}} \vec{v}_{\text{CM}}(t) = \vec{P}_{\text{TOT}}(t) \quad (\text{quantità di moto totale del sistema}),$$

otteniamo infine l'espressione matematica del primo teorema di König:

$$\boxed{\vec{L}_{\text{TOT}}(t) = \vec{R}_{\text{CM}}(t) \times \vec{P}_{\text{TOT}}(t) + \vec{L}'_{\text{TOT}}(t)},$$

dove $\vec{L}'_{\text{TOT}}(t)$ e' il momento angolare totale del sistema rispetto al centro di massa del sistema.

2) Energie cinetica totale di un sistema di N punti materiali

Dalla relazione $\vec{v}_i = \vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i$, già utilizzata nella dimostrazione del precedente teorema, ottieniamo:

$$|\vec{v}_i|^2 = (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i) = |\vec{v}_{\text{CM}}|^2 + 2(\vec{v}_{\text{CM}}, \vec{v}'_i) + |\vec{v}'_i|^2$$

Dunque: l'energia cinetica totale del sistema diventa:

$$K_{TOT} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{V}_i|^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left[|\vec{V}_{CM}|^2 + 2 (\vec{V}_{CM} \cdot \vec{V}_i) + |\vec{V}_i'|^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N m_i \right] |\vec{V}_{CM}|^2 + \vec{V}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^N (m_i \vec{V}_i') + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{V}_i'|^2$$

Come nel caso del teorema precedente, risultate

$$\sum_{i=1}^N (m_i \vec{V}_i') = 0, \text{ per cui, posto } \sum_{i=1}^N m_i = M_{TOT},$$

otteniamo:

$$K_{TOT} = \frac{1}{2} M_{TOT} |\vec{V}_{CM}|^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{V}_i'|^2$$

Posto $\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{V}_i'|^2 = K'_{TOT}$, ottieniamo infine:

$$K_{TOT} = \frac{1}{2} M_{TOT} |\vec{V}_{CM}|^2 + K'_{TOT}$$

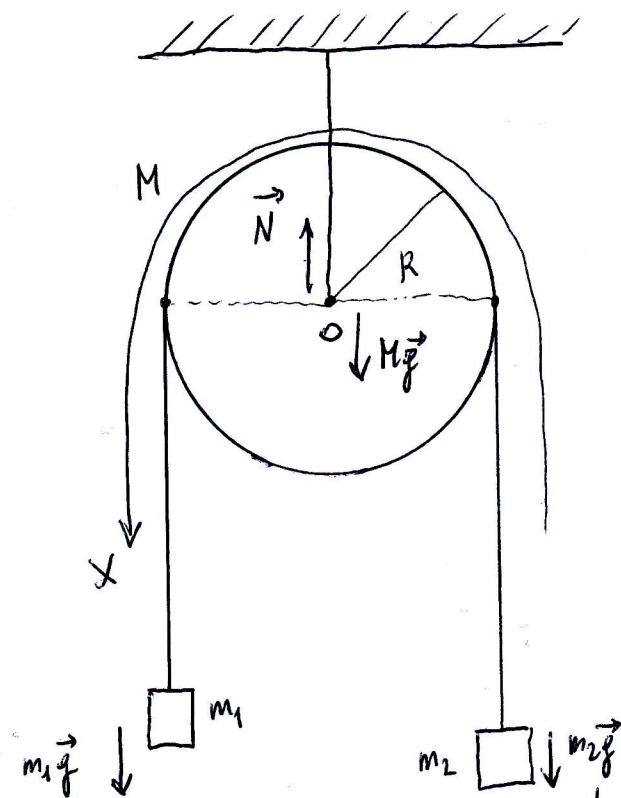
Nel caso particolare di un corpo rigido, risultate

$$K'_{TOT} = \frac{1}{2} I_{CM, z'} \omega'^2, \text{ dove } I_{CM, z'} \text{ e' il momento}$$

d'inerzia del corpo rigido rispetto a un asse opportuno passante per il centro di massa del corpo rigido, e ω' e' la velocità angolare di rotazione attorno a questo asse rispetto a un osservatore posto nel centro di massa del sistema.

Esempio 1

Mecchine di Atwood (versione 2.1)



Calcoliamo il momento angolare totale del sistema rispetto al polo O (vedi pag. 11 in fondo):

$$L_{TOT,2} = R m_1 v_x + R m_2 v_x + I_2 \omega,$$

dove abbiamo tenuto conto del vincolo $v_{1x} = v_{2x} = v_x$

dovuto alla fune inestensibile. L'altro vincolo e' il legame tra le velocita' angolare delle pulleggi e le velocita' dei due blocchi: $\omega = \frac{v_x}{R}$. Allora:

$$L_{TOT,2}(t) = R (m_1 + m_2) v_x(t) + \frac{1}{2} M R^2 \frac{v_x(t)}{R} = R \left(m_1 + m_2 + \frac{M}{2} \right) v_x(t)$$

Calcoliamo il momento totale delle sole forze esterne rispetto al polo O, tenuto conto che il momento di Mg e di \vec{N} rispetto a O e' nullo:

$$\tau_{ext,TOT,2} = R m_1 g - R m_2 g = R (m_1 - m_2) g$$

Dalle seconde equazione cardinale delle dinamica dei sistemi ottieniamo:

$$[L_{\text{TOT},z}(t)]' = \tau_{e_{1+\text{tot},z}}(t), \text{ cioè:}$$

$$\cancel{R(m_1+m_2+\frac{M}{2})\alpha_x(t)} = R(m_1-m_2)g, \text{ e in fine:}$$

$$\alpha_x = \frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2+\frac{M}{2}}, \text{ come già ottenuto con un metodo diverso.}$$

I momenti delle forze interne (tensioni delle corde) non influenzano la variazione temporale del momento angolare totale del sistema rispetto allo stesso polo.

Approfittiamo di questo esempio per tornare su un punto detto minore per scontato, e cioè il fatto che le tensioni ai due capi di un tratto di fune di massa trascurabile sono uguali. Consideriamo un tratto di fune in moto su un piano orizzontale, con due forze esterne agenti ai suoi capi, dirette come la fune:



Perché il peso del tratto di fune è trascurabile, per le prime equazione cardinale delle dinamica dei sistemi possiamo scrivere: $[P_{\text{TOT},x}(t)]' = F_{e_{1+\text{TOT},x}}(t) = T_2 - T_1$, con $|T_1| = T_1$ e $|T_2| = T_2$.

Ma poiché $M_{\text{TOT}} \approx 0$, risulta $P_{\text{TOT},x}(t) \approx 0$, e quindi $T_1 \approx T_2$. Questo giustifica le assunzioni fatte a suo tempo.

Conservazione del momento angolare totale

La seconda equazione cardinale delle dinamiche dei sistemi di punti materiali,

$$[\vec{L}_{\text{TOT}}(t)]^i = \vec{\tau}_{e,\text{TOT}}(t),$$

[implica che se risulta $\vec{\tau}_{e,\text{TOT}}(t) = 0$ allora il momento angolare totale del sistema resta costante nel tempo, cioè (detto in altri termini) si conserva.

Se soltanto una componente cartesiana (o lungo un certo asse) di $\vec{\tau}_{e,\text{TOT}}(t)$ risulta nulla, allora si conserva solo la componente corrispondente di $\vec{L}_{\text{TOT}}(t)$.

[Pertanto, in un sistema isolato si conservano le quantità di moto totale e il momento angolare totale.]

Osserviamo che, poiché risulti $\vec{\tau}_{e,\text{TOT}}(t) = 0$, la conservazione del momento angolare totale è vera anche nel caso di sistemi non rigidi.

Per un sistema rigido isolato in rotazione attorno a un asse Z , la condizione $L_{\text{TOT},Z} = \text{costante}$ implica la legge $I_z \omega = \text{costante}$, dove I_z è ovviamente

il momento d'inerzia del sistema rigido rispetto all'asse di rotazione.

Se il sistema e' isolato ma non rigido, comunque in rotazione attorno a un asse fisso z , e' un dato intuito risultare comunque $L_{TOT,z}(t) = I_z(t) \omega(t)$, per cui vale comunque la regola $I_z(t) \omega(t) = \text{costante}$.

Un esempio di fenomeno in cui si sfrutta la legge di conservazione del momento angolare totale e' quello di un pattinatore su ghiaccio in rotazione su se stesso: quando avvicina le braccia al corpo, il suo momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione diminuisce, per cui la sua velocità angolare intitensiva aumenta in base alle leggi sopra esposte.

Esempio 2

Una stella ruota intorno a un asse che passa per il suo centro con un periodo $T_i = 30$ giorni. Dopo che la stella e' esplosa in una supernova il suo nucleo centrale, inizialmente avente raggio $R_i = 10^4$ km, collapse in una stella di neutroni avente raggio $R_f = 3$ km. Si determini il periodo di rotazione delle stelle di neutroni.

la velocità angolare di rotazione iniziale delle stelle è

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad , \quad \text{e quelle finali sono} \quad \omega_f = \frac{2\pi}{T_f}.$$

Il momento d'inerzia di una sfera piena omogenea è

$I_z = \frac{2}{5} MR^2$ rispetto a un asse passante per il centro delle sfere. Durante il collasso stellare non agiscono forze esterne al sistema, per cui il sistema è isolato e il suo momento angolare totale si conserva. Dunque, trattandosi di un corpo rigido in rotazione, con I_z costante, risulta:

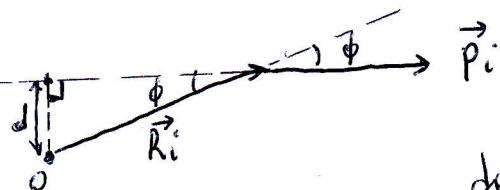
$$I_f \omega_f = I_i \omega_i \quad , \quad \text{e quindi:}$$

$$\frac{2}{5} M R_f^2 \left(\frac{2\pi}{T_f} \right) = \frac{2}{5} M R_i^2 \left(\frac{2\pi}{T_i} \right)$$

Dunque risulta:

$$T_f = \left(\frac{R_f}{R_i} \right)^2 T_i = 0,233 \text{ s}$$

Osservazione importante: per il calcolo pratico di un momento angolare valgono regole molto simili a quelle enunciate nel caso del calcolo del momento di una forza. In particolare, risultano



$$|\vec{R}_i \times \vec{p}_i| = d |\vec{p}_i|, \quad \text{dove } d \text{ si puo'}$$

definire, per analogia, il "braccio" del vettore quantità di moto \vec{p}_i rispetto al polo O (vedi schema qui a fianco).

Queste procedure sono state usate nell'Esempio 1 (pag. ⑦ e ⑧)

Esempio 3

Una piattaforma orizzontale a forma di disco ruota senza attrito attorno a un asse verticale. La piattaforma ha raggio $R = 2 \text{ m}$ e massa $M = 100 \text{ kg}$. Un ragazzo avendo massa $m = 60 \text{ kg}$ si sposta lentamente dal bordo delle piattaforme verso il centro. Se la velocità angolare del sistema, quando il ragazzo si trova sul bordo, è $\omega_i = 2 \text{ rad/s}$, si calcoli la velocità angolare quando il ragazzo si trova a una distanza $r = 0,5 \text{ m}$ dal centro.

$$-----$$

Poiché non ci sono forze esterne agenti lungo la direzione tangenziale, risulta $\tau_{e,TOT,z} = 0$, e quindi $L_{TOT,z}$ si conserva. Dunque, deve risultare:

$L_{TOT,z,f} = L_{TOT,z,i}$; essendo $L_{TOT,z} = I_z \omega$, deve quindi risultare

$$I_{z,f} \omega_f = I_{z,i} \omega_i$$

Il sistema si può schematizzare come un disco omogeneo con un punto materiale aggiuntivo a distanza $d \leq R$ dal centro; allora $I_z = \frac{1}{2}MR^2 + md^2$, e risulta:

$$I_{z,i} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2; \quad I_{z,f} = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Risulta pertanto:

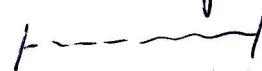
$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right) \omega_f = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2 \omega_i, \text{ da cui ottieniamo:}$$

$$\boxed{\omega_f = \frac{\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2 \omega_i}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} = 4,093 \text{ rad/s}}$$

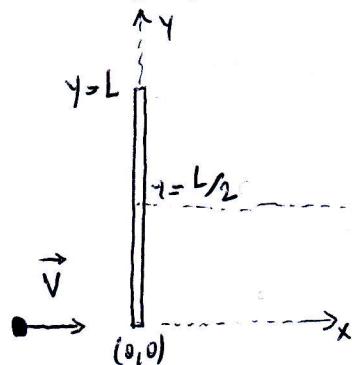
Esempio 4

Un piccolo disco avente massa $m = 2 \text{ kg}$ colpisce, con velocità $v = 3 \text{ m/s}$, un'auto avente massa $M = 1 \text{ kg}$ e lunghezza $L = 4 \text{ m}$, che giace a riposo su una lastra di ghiaccio praticamente senza attrito. Il disco colpisce l'auto in un'estremità, alla distanza $\frac{L}{2}$ dal centro. Supponendo che l'auto sia elastico e che il disco continui a muoversi nella direzione di moto iniziale, si trovi, dopo l'urto:

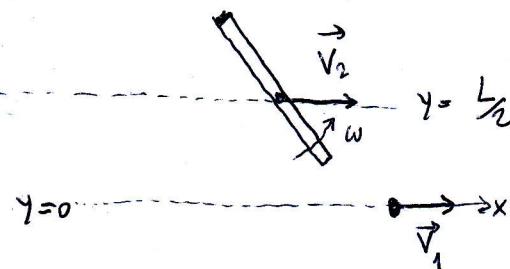
- il modulo delle velocità del disco;
- il modulo delle velocità di traslazione dell'auto;
- il modulo delle velocità angolare di rotazione dell'auto.



Prima dell'urto



Dopo l'urto



Il sistema asta + dischetto è di fatto un sistema isolato durante l'urto, in quanto nel sistema agiscono, come forze esterne, soltanto le forze peso dell'asta e del dischetto, e le reazioni vincolari delle testine di ghiaccio liscie che bilanciano esattamente i pesi dei due corpi.

Pertanto in questo urto si conservano le quantità di moto totale del sistema, il momento angolare totale del sistema rispetto a un polo scelto arbitrariamente, e l'energia cinetica totale (quest'ultima per le ipotesi del problema).

La conservazione delle quantità di moto totale comporta che il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme.

Calcoliamo la posizione e la velocità del centro di massa del sistema asta + dischetto nell'istante dell'urto (che poniamo finire a $t = 0$); poniamo che prima dell'urto l'estremo inferiore dell'asta si trovi nella posizione $(0, 0)$ e l'estremo superiore in $(0, L)$, come nello schizzo.

Posizione del centro di massa del sistema nell'istante dell'urto:

$$\begin{cases} x_{CM}(0) = 0 \\ y_{CM}(0) = \frac{M L / 2}{m + M} \end{cases}$$

Velocità del centro di massa del sistema nell'istante dell'urto:

$$\begin{cases} v_{CM,x}(0) = \frac{m v}{m + M} = \text{costante} \\ v_{CM,y}(0) = 0 = \text{costante} \end{cases}$$

Allora, e un istante t generico risulta:

$$\begin{cases} x_{cm}(t) = \frac{mv}{m+M} t \\ y_{cm}(t) = \frac{ML/2}{m+M} \end{cases}$$

Indicando con $y_d(t)$ e $y_a(t)$ rispettivamente l'ordinata del dischetto all'istante t e l'ordinata del centro dell'asta all'istante t, deve risultare

$$y_{cm}(t) = \frac{my_d(t) + My_a(t)}{m+M} = \frac{My_a(t)}{m+M} \quad \text{in quanto}$$

$y_d(t) = 0$ dopo l'urto (ipotesi del problema). Allora risulta

$$y_a(t) = \frac{m+M}{M} y_{cm}(t) = \frac{L}{2} = \text{costante.}$$

Pertanto, il centro delle sbarre, dopo l'urto, si muove di moto rettilineo uniforme lungo la retta $y = L/2$ e le sbarre percorrono moto (da verificare) attorno a un asse passante per il suo centro e perpendicolare al piano del foglio (vedi schema).

Pertanto, usando le notazioni introdotte nello schema, poniamo impone le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} P_{tot,x,f} = P_{tot,x,i} \\ L_{tot,z,f} = L_{tot,z,i} \\ K_{tot,f} = K_{tot,i} \end{cases}$$

Per le prime e le terze equazioni non ci sono eccessivi problemi.
 Per quanto riguarda la seconda equazione, scegliamo di calcolare il momento angolare totale del sistema rispetto al punto $(0,0)$; in questo modo, il momento angolare del dischetto è nullo a ogni istante, in quanto le sue velocità è sempre diretta lungo l'asse x ; il momento angolare dell'asta è nullo all'istante $t=0$, mentre per il calcolo del momento angolare delle sbarre dopo l'urto è necessario ricorrere al primo teorema di König, per cui, tenendo conto dei segni dei momenti, risultrà:

$$h_{\text{tot}, z, f} = -\frac{L}{2} M V_2 + I_z \omega, \quad \text{dove } I_z = \frac{1}{12} M L^2$$

e' il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione, che passa per il suo centro di massa.

Allora, poniamo subito le tre equazioni:

$$\begin{cases} m V_1 + M V_2 = m V \\ -\frac{L}{2} M V_2 + \frac{1}{6} M L^2 \omega = 0 \\ \frac{1}{2} m V_1^2 + \frac{1}{8} M V_2^2 + \frac{1}{24} M L^2 \omega^2 = \frac{1}{8} m V^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m V_1 + M V_2 = m V \\ -6 V_2 + L \omega = 0 \\ 12 m V_1^2 + 12 M V_2^2 + M L^2 \omega^2 = 12 m V^2 \end{cases}$$

Ricaviamo V_2 dalla prima equazione, e sostituiamo l'espressione ottenuta nella seconde equazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{m(V-V_1)}{M} \\ -\frac{6m(V-V_1)}{M} + L\omega = 0 \end{array} \right.$$

Ricaviamo ω dalla seconde equazione:

$$\omega = \frac{6m(V-V_1)}{ML}$$

Sostituiamo le espressioni ottenute per V_2 e ω nella terza equazione:

$$\frac{1}{2}M V_1^2 + \frac{1}{2}M \frac{m^2(V-V_1)^2}{M^2} + M \frac{\frac{36m^2(V-V_1)^2}{L^2}}{M^2} = \frac{1}{2}M V^2$$

che diventa

$$M V_1^2 + m (V-V_1)^2 + 3m (V-V_1)^2 = M V^2 , \text{ e quindi:}$$

$$M V_1^2 + 4m (V-V_1)^2 = M V^2 . \quad \text{Sviluppiamo i calcoli:}$$

$$M V_1^2 + 4m (V^2 - 2VV_1 + V_1^2) = M V^2$$

$$(4m+M) V_1^2 - 8m V V_1 + (4m-M) V^2 = 0$$

Calcoliamo le radici dell'equazione usando le formule ridotte:

$$V_1 = \frac{4mV \pm \sqrt{16m^2V^2 - (4m+M)(4m-M)V^2}}{4m+M}$$

$$= \frac{4mV \pm \sqrt{16m^2V^2 - (16m^2 - M^2)V^2}}{4m+M} = \frac{4mV \pm \sqrt{16m^2V^2 - 16m^2V^2 + M^2V^2}}{4m+M} =$$

$$= \frac{4mV \pm MV}{4m+M} = \frac{(4m \pm M)V}{4m+M}$$

La soluzione che ci interessa e'

$$V_1 = \frac{(4m - M)V}{4m + M},$$

in quanto l'altra radice $V_1 = V$, e corrisponde al caso banale in cui il dischetto oltrepassa l'altezza utile.

Allora otteniamo, in definitiva:

$$V_1 = \frac{(4m - M)V}{4m + M} = 2,333 \text{ m/s}$$

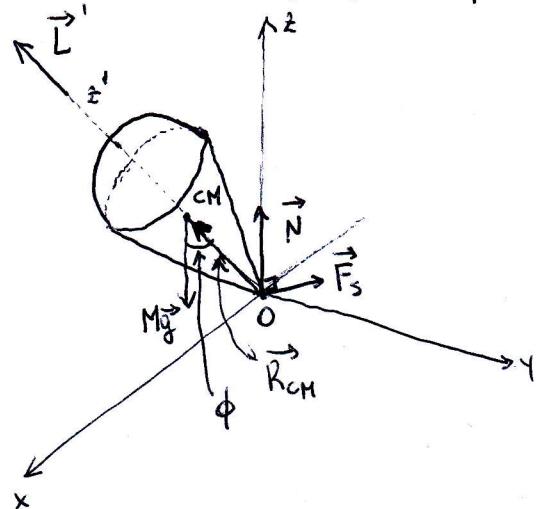
$$V_2 = \frac{m}{M} (V - V_1) = \frac{mV}{M} \left(1 - \frac{4m - M}{4m + M} \right) = \frac{mV}{M} \left(\frac{4m + M - 4m + M}{4m + M} \right) =$$

$$= \frac{mV}{M} \cdot \frac{2M}{4m + M} = \frac{2mV}{4m + M} = 1,333 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{6m}{ML} (V - V_1) = \frac{6mV}{ML} \left(1 - \frac{4m - M}{4m + M} \right) = \frac{6mV}{ML} \left(\frac{2M}{4m + M} \right) = \frac{12mV}{L(4m + M)} = 2 \text{ rad/s}$$

Moto di una trottola

Una trottola è un corpo rigido in rotazione attorno a un proprio asse di simmetria, con un punto di appoggio su una superficie orizzontale; questo punto si trova sull'asse di rotazione.



Quello che si osserva è che, mentre la trottola muove con rapidità attorno al proprio asse, l'asse stesso muove attorno all'asse verticale z su una superficie conica.

Il moto di rotazione dell'asse delle trottola attorno all'asse z è chiamato **MOTO DI PRECESSIONE**, tipicamente più lento rispetto al moto rotatorio delle trottola attorno al proprio asse.

Un'analisi superficiale potrebbe indurre a pensare che, a causa dell'inclinazione dell'asse di simmetria-rotazione, la trottola debba cadere a causa del momento delle forze peso Mg rispetto al punto di appoggio O . Ma il fatto che la trottola possiede un movimento angolare intrinseco L' e cause della rotazione attorno al proprio asse cambia di molto la situazione: il momento delle forze peso rispetto al polo O è proprio le cause del moto di precessione sopra descritto.

Rispetto al polo O possiamo scrivere la seconda equazione cardinale per la trottola:

$$[\vec{L}_{\text{TOT}}(t)]' = \vec{\tau}_{e,\text{TOT}}(t)$$

Per il primo teorema di König, il momento angolare totale delle trappole rispetto al polo O e':

$$\vec{L}_{\text{TOT}}(t) = \vec{R}_{\text{CM}}(t) \times \vec{P}_{\text{TOT}}(t) + \vec{L}'(t),$$

dove $\vec{P}_{\text{tot}}(t)$ e' la quantita' di moto totale delle trappole, $\vec{R}_{\text{CM}}(t)$ e' il vettore posizione del centro di massa delle trappole, e $\vec{L}'(t)$ e' il momento angolare intrinseco delle trappole.
Se le velocita' angolari di rotazione delle trappole attorno al proprio asse e' sufficientemente elevate, il primo termine del secondo membro risulta trascurabile rispetto a $\vec{L}'(t)$, per cui risulta $\vec{L}_{\text{TOT}}(t) \approx \vec{L}'(t)$.

Allora poniamo a scrivere:

$$[\vec{L}_{\text{TOT}}(t)]' \approx [\vec{L}'(t)]' = \vec{R}_{\text{CM}}(t) \times M\vec{g}$$

Su un piccolo intervallo di tempo Δt risulta quindi

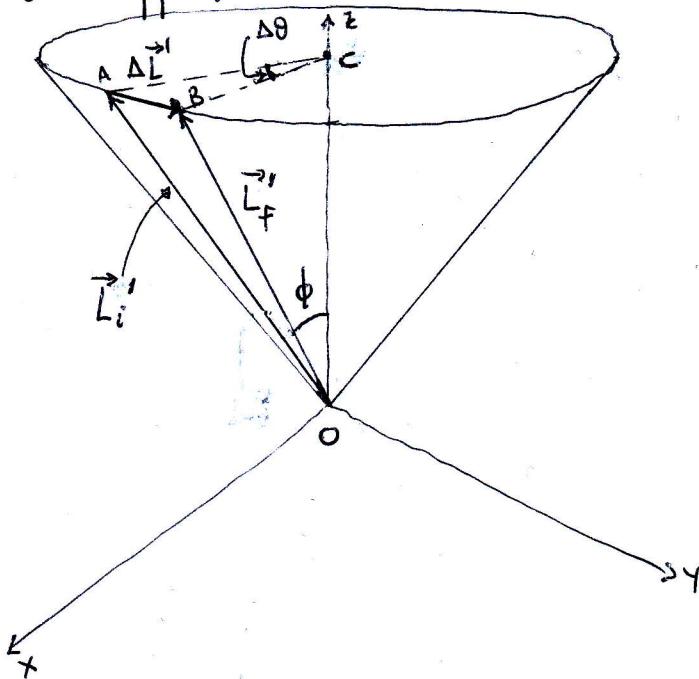
$|\Delta \vec{L}'| \approx |\vec{R}_{\text{CM}}| \cdot M\vec{g} \sin \phi \Delta t$ dove ϕ e' l'angolo tra l'asse di rotazione delle trappole e l'asse verticale.

Ma $|\vec{R}_{\text{CM}}| \sin \phi$ e' la distanza del centro di massa delle trappole dall'asse verticale; poniamo $|\vec{R}_{\text{CM}}| \sin \phi = r_{\text{CM}}$.

$$\text{Dunque: } |\Delta \vec{L}'| \approx M g r_{cm} \Delta t \quad (1)$$

Dallo schema delle figure osserviamo che il vettore $\vec{r}_{cm} \times \vec{Mg}$ e' diretto orizzontalmente, lungo la direzione tangenziale delle circonferenze centrate sull'asse Z , di raggio r_{cm} .

Pertanto, nell'intervallo di tempo Δt la variazione del vettore $\vec{L}'(t)$ e' rappresentabile nel modo seguente:



Il triangolo CAB (qui rappresentato in vista prospettica) e' isoscele.

Nello schema qui a fianco risulta: $\overline{CA} = \overline{CB} = \dots$

$$\hat{A}c = \hat{B}c = \phi$$

$$\overline{OA} = \overline{OB}$$

Poiché, nel limite $\Delta t \rightarrow 0$, la variazione $\Delta \vec{L}'$ e' diretta perpendicolarmente a \vec{L}' , l'effetto del momento $\vec{r}_{cm} \times \vec{Mg}$ e' quello di modificare la direzione del vettore \vec{L}' , non il suo modulo che, nell'approssimazione fatta, resta costante.

Se indichiamo con $\Delta\theta$ l'angolo tra le proiezioni orizzontali di \vec{L}'_i e $\vec{L}'_f = \vec{L}'_i + \Delta \vec{L}'$, poniamo scrivere:

$$|\Delta \vec{L}'| = |\vec{L}'| \sin \phi \Delta\theta \quad (\text{vedi figura sopra}) \quad (2)$$

Mettendo insieme le due relazioni (1) e (2) ottieniamo:

$$|\vec{L}'| \sin \phi \Delta \theta = Mg r_{CM} \Delta t = Mg |\vec{R}_{CM}| \sin \phi \Delta t$$

Dunque, vale la relazione approssimata

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta t} \approx \frac{Mg |\vec{R}_{CM}|}{|\vec{L}'|}$$

Perché $|\vec{L}'| = I_{z'} \omega'$, dove $I_{z'}$ è il momento d'inerzia delle trattole rispetto al proprio asse di rotazione e ω' è la velocità angolare di rotazione delle trattole attorno a questo asse, nel limite per $\Delta t \rightarrow 0$ ottieniamo una espressione approssimata della velocità angolare di precessione attorno all'asse verticale per una trattola:

$$\boxed{\omega_p \approx \frac{Mg |\vec{R}_{CM}|}{I_{z'} \omega'}}$$

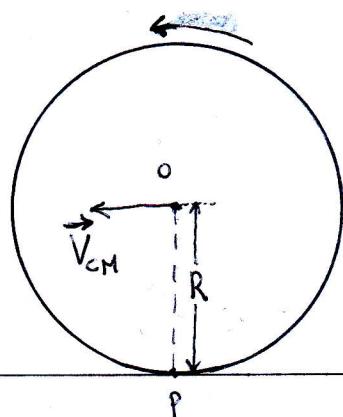
Questo risultato, come anticipato nella discussione preliminare, è valido soltanto se $\omega_p \ll \omega'$, cioè se

$$\frac{Mg |\vec{R}_{CM}|}{I_{z'} \omega'} \ll \omega', \text{ cioè per}$$

$$\boxed{\omega' \gg \sqrt{\frac{Mg |\vec{R}_{CM}|}{I_{z'}}}}$$

Moto di piano rotolamento di un corpo rigido

Consideriamo un corpo rigido a simmetria circolare (ad esempio: anello, disco, guscio cilindrico, cilindro omogeneo, sfera omogenea), e supponiamo che stia rotolando senza strisciare su una superficie piana. Un moto di questo tipo può avvenire soltanto in presenza di attrito fra il corpo e la superficie (con una eccezione notevole, che vedremo alla fine delle discussioni).



Consideriamo la situazione schematizzata qui a sinistra.

Le condizioni affinché il corpo rigido rotoli senza strisciare sul

piano e che le velocità instantaneous del punto di contatto
P tra il corpo rigido e il piano (nella sezione mostrata) siano
nullle.

Il modo più diretto per imporre queste condizioni è usare le leggi di composizione delle velocità per il punto P rispetto a due osservatori: uno fermo a terra, che sta osservando il corpo rigido che rotola senza strisciare, e l'altro che sta muovendo di moto rettilineo in direzione orizzontale con la stessa velocità del centro di massa del corpo rigido.

Quindi, se indichiamo con $\vec{V}_p(t)$ la velocità istantanea del punto P rispetto all'osservatore a terra, con $\vec{V}_{CM}(t)$ la velocità del centro di massa del corpo rigido, e con $\vec{V}_p'(t)$ la velocità istantanea del punto P rispetto all'osservatore solidale con il centro di massa del corpo rigido, la condizione che lega queste velocità è la seguente:

$$\vec{V}_p(t) = \vec{V}_{CM}(t) + \vec{V}_p'(t) \quad (\text{legge di composizione delle velocità})$$

Introducendo un asse centriano x orientato come nelle figure, e anche un asse x' (per l'osservatore solidale al centro di massa del corpo rigido) parallelo e concorde all'asse x, le componenti orizzontali dei tre vettori menzionati sono le seguenti: $V_{p,x}(t) = 0$ (condizione di pura rotolamento del corpo rigido)

$$V_{CM,x}(t) = |\vec{V}_{CM}(t)| = V_{CM}(t)$$

$$V_{p,x'}(t) = -|\vec{V}_p'(t)| = -\omega(t) R,$$

dove $\omega(t)$ è la velocità angolare istantanea di rotazione del corpo rigido attorno all'asse di rotazione passante per il suo centro di massa, e R è il raggio della sezione circolare del corpo rigido in rotolamento.

In fatti, rispetto all'osservatore solidale al centro di massa del corpo rigido il punto di contatto P del corpo rigido con le ruote si sta muovendo, nell'istante del contatto, verso destra (rispetto ai versi di moto dello schema di pag. 23) con velocità instantanee uguali alle velocità tangenziali, che dunque ha modulo $|\vec{v}_P'(t)| = R \cdot \omega(t)$ (il corpo rigido, in questo schema, sta rotando in senso antiorario, per cui risultare $\omega(t) > 0$).

Pertanto, la condizione di moto di pura rotolamento è la seguente:

$$0 = V_{CM}(t) - \omega(t) R, \quad \text{da cui ottieniamo:}$$

$$V_{CM}(t) = \omega(t) R$$

Dato che il punto di contatto P è instantaneamente fermo, le forze di attrito che agisce mentre una forte esterna sta spingendo il corpo rigido lungo la superficie non può che essere di attrito statico. Poiché le forze di attrito statico non compie lavoro (il punto a cui è applicata è instantaneamente fermo), in questo tipo di moto non c'è dissipazione di energie meccaniche, e differenze di quanto avviene in presenza di attrito dinamico. Questo spiega il vantaggio dei veicoli con ruote rispetto a veicoli striscianti.

Derivando rispetto al tempo la relazione scritta sopra ottieniamo un'altra importante relazione valida nel moto di pura rotolamento:

$$a_{CM,x}(t) = \alpha(t) R \quad | \text{ con le usuali convenzioni sui segni.}$$

Per il 2^o teorema di König l'energia cinetica di un corpo rigido che sta rotolando senza strisciare su una superficie è:

$$K(t) = \frac{1}{2} M |\vec{V}_{CM}(t)|^2 + \frac{1}{2} I_{z_1} (\omega(t))^2,$$

dove I_{z_1} è il momento d'inerzia del corpo rigido e $\omega(t)$ è la sua velocità angolare di rotazione, entrambi rispetto all'asse di rotazione passante per il centro di massa del sistema.

Ma poiché si ha $|\vec{V}_{CM}(t)| = \omega(t) R$, possiamo scrivere

$$K(t) = \frac{1}{2} M |\vec{V}_{CM}(t)|^2 + \frac{1}{2} I_{z_1} \frac{|\vec{V}_{CM}(t)|^2}{R^2}, \quad \text{e in definitiva}$$

l'energia cinetica di un corpo rigido che sta rotolando senza strisciare è espressa dalla legge seguente:

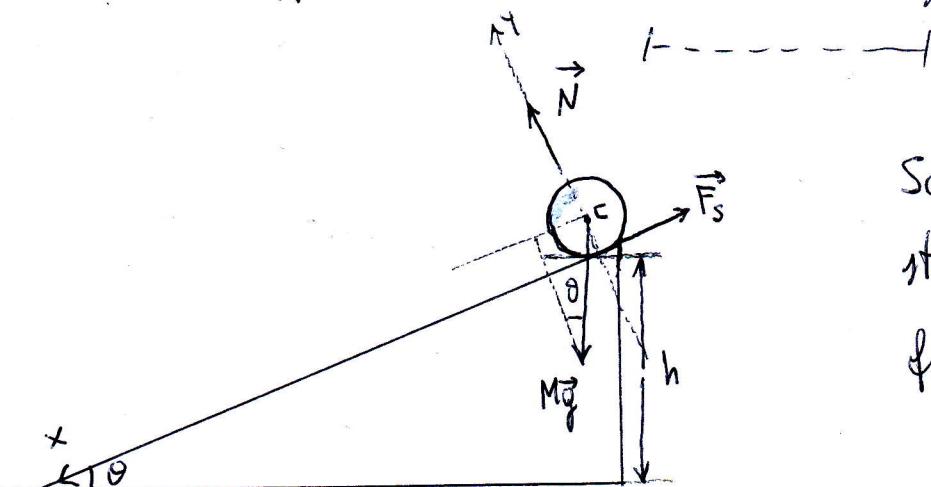
$$\boxed{K(t) = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I_{z_1}}{R^2} \right) |\vec{V}_{CM}(t)|^2}$$

Concludiamo osservando che, per un corpo che sta rotolando senza strisciare, se a un certo momento durante il suo moto si viene a trovarsi su una superficie piatta liscia orizzontale, il corpo rigido ovviamente continuerà a rotolare senza strisciare in quanto non ci sono forze esterne né momenti di forze esterne che possono modificare lo stato di moto del corpo rigido.

Esempio 5

Una sfera omogenea piena rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di un angolo θ rispetto alla direzione orizzontale. La sfera inizia a muoversi partendo da ferme da una quota h al di sopra del piano orizzontale.

- Si determini il modulo della velocità del centro di massa della sfera nell'istante in cui questa raggiunge la base del piano inclinato. Indichiamo con M la massa della sfera.
- Si determini il modulo dell'accelerazione del centro di massa della sfera durante la discesa lungo il piano inclinato.
- Si determini il modulo delle forze di attrito statico agente sul corpo rigido durante il moto, e il limite del coefficiente di attrito statico μ_s .



Schemi del sistema da studiare e diagramma delle forze agenti sulla sfera.

Rispetto agli assi cartesiani indicati nello schema, se poniamo:

$N = |\vec{N}|$ e $F_s = |\vec{F}_s|$, dove \vec{N} è la reazione vincolare del piano inclinato sulla sfera e \vec{F}_s la forza di attrito statico agente sulla sfera e applicata nel punto di contatto tra la sfera e il piano inclinato, le componenti cartesiane dei vettori sono:

$$(M\vec{g})_x = Mg \sin\theta; \quad (M\vec{g})_y = -Mg \cos\theta; \quad N_x = 0; \quad N_y = N$$

$$F_{s,x} = -F_s; \quad F_{s,y} = 0$$

a) Per quanto osservato nella descrizione del moto di piano rotolamento, le forze di attrito statico \vec{F}_s non compie lavoro; neppure la reazione vincolare \vec{N} compie lavoro, in quanto risulta perpendicolare, intente per istante, al vettore velocità intellentee del centro di massa del sistema. Quindi l'unica forza che compie lavoro sulle sfere durante il rotolamento e' la forza peso; dato che la forza peso e' una forza conservativa, durante il moto l'energia meccanica delle sfere si conserva. Possiamo comunque applicare il teorema dell'energia cinetica. Il lavoro netto delle forze peso fra l'intento iniziale e l'intento finale e':

$$W_p = Mgh$$

La variazione dell'energia cinetica TOTALE delle sfere tra gli stessi due istanti e':

$$K_{tot,f} - K_{tot,i} = \frac{1}{2} \left(M + \frac{I_{z'}}{R^2} \right) |\vec{v}_{cm,f}|^2, \quad \text{in quanto l'energia}$$

cinetica totale iniziale e' nulla per le ipotesi del problema.

R e' il raggio delle sfere. Risulta $I_{z'} = \frac{2}{5} MR^2$ per una sfera piena, per cui risulta $M + \frac{I_{z'}}{R^2} = M + \frac{2}{5}M = \frac{7}{5}M$

Allora, delle condizioni

$$K_{TOT,f} - K_{TOT,i} = W_p \quad \text{otteniamo:}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} M |\vec{V}_{CM,f}|^2 = Mg h, \quad \text{da cui ricaviamo}$$

$$|\vec{V}_{CM,f}|^2 = \frac{10}{7} gh, \quad \text{e infine}$$

$$|\vec{V}_{CM,f}| = \sqrt{\frac{10}{7} gh}$$

b) Sciviamo le due equazioni cardinale per le sfere:

$$M a_{CM,x}(t) = Mg \sin \theta - F_s \quad (\text{infatti, } \vec{a}_{CM}(t) \text{ ha solo la componente lungo la direzione del piano inclinato})$$
$$0 = N - Mg \cos \theta$$

$$I_z \alpha(t) = RF_s \quad (\text{infatti, rispetto al polo C l'unica forza agente sulla sfera che ha momento non nullo e' } \vec{F}_s; \text{ tutte le altre forze hanno momento nullo rispetto al polo C, anche le forze opposte perché si applicano al centro di massa C}).$$

Vede poi la condizione di pura rotazione:

$$\alpha(t) = \frac{a_{CM,x}(t)}{R}$$

Il sistema di equazioni da risolvere e' quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} M \alpha_{cm,x}(t) = Mg \sin \theta - F_s \\ N = Mg \cos \theta \\ \frac{2}{5} M R^2 \cdot \frac{\alpha_{cm,x}(t)}{R} = R F_s \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} M \alpha_{cm,x}(t) = Mg \sin \theta - F_s \quad (1) \\ N = Mg \cos \theta \quad (2) \\ \frac{2}{5} M \alpha_{cm,x}(t) = F_s \quad (3) \end{array} \right.$$

Dall'equazione (3) riceviamo $F_s = \frac{2}{5} M \alpha_{cm,x}(t)$; sostituendo

queste espressione nell'equazione (1) e riordiniamo i termini:

$$M \alpha_{cm,x}(t) + \frac{2}{5} M \alpha_{cm,x}(t) = Mg \sin \theta, \text{ cioè}$$

$$\frac{7}{5} M \alpha_{cm,x}(t) = Mg \sin \theta, \text{ e infine}$$

$$\boxed{\alpha_{cm,x}(t) = \frac{5}{7} g \sin \theta}, \text{ che e' costante.}$$

Dunque, il moto del centro di massa della sfera durante il rotolamento purissimo lungo il piano inclinato è rettilineo uniformemente accelerato.

c) Dalle leggi $F_s = \frac{2}{5} M \alpha_{cm,x}(t)$ ottenute nella risoluzione del punto (b) ottieniamo:

$$\boxed{F_s = \frac{2}{5} M \cdot \frac{5}{7} g \sin \theta = \frac{2}{7} M g \sin \theta}$$

Il modello delle forze di attrito statico deve soddisfare le condizioni $F_s \leq \mu_s N$, per cui ottieniamo:

$$\frac{2}{7} M g \sin \theta \leq \mu_s M g \cos \theta, \text{ e infine} \quad \boxed{\mu_s \geq \frac{2}{7} \operatorname{tg} \theta}$$

Rotazione di un vettore attorno a un asse e moto relativo

Ricordiamo la relazione tra velocità vettoriale istantanea $\vec{v}(t)$, velocità angolare $\vec{\omega}(t)$ e posizione $\vec{R}(t)$ nel moto circolare, se prendiamo l'origine del sistema di riferimento sull'asse di rotazione: $\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{R}(t)$.

Poiché $\vec{v}(t) = [\vec{R}(t)]'$, possiamo quindi dire che la derivata rispetto al tempo del vettore $\vec{R}(t)$ rotante attorno a un asse con velocità angolare $\vec{\omega}(t)$ è detta delle legge

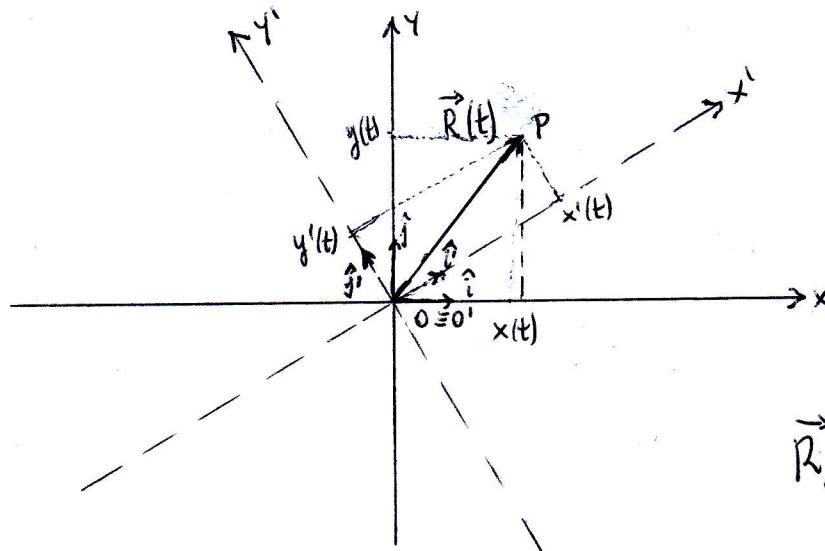
$$[\vec{R}(t)]' = \vec{\omega}(t) \times \vec{R}(t)$$

[Questa legge vale per qualunque vettore $\vec{u}(t)$ in rotazione con velocità angolare $\vec{\omega}(t)$ attorno a un asse:

$$[\vec{u}(t)]' = \vec{\omega}(t) \times \vec{u}(t) \quad (1)$$

Questa legge è di fondamentale importanza per trovare la relazione tra le quantità cinematiche di un punto materiale misurate da un osservatore O fermo e quelle misurate da un osservatore O' che sta ruotando, a un certo istante, con velocità angolare istantanea $\vec{\omega}(t)$ rispetto all'osservatore O, che supponiamo trovarsi in un sistema di riferimento inerziale.

Consideriamo, per semplicità, due sistemi di riferimento nel piano, uno relativo a un osservatore fermo e l'altro relativo a un osservatore rotante. Se non c'è moto traslatorio di un osservatore rispetto all'altro, possiamo far coincidere le origini dei sistemi di simili cartesiani riferiti ai due osservatori:



Un vettore posizione $\vec{R}(t)$, che rispetto all'osservatore O si può scrivere con:

$$\vec{R}_0(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j},$$

rispetto all'osservatore O' si scrive con:

$\vec{R}_{O'}(t) = x'(t)\hat{i}' + y'(t)\hat{j}'$, dove \hat{i}', \hat{j}' sono rispettivamente il versore dell'asse x' e il versore dell'asse y' (vedi figura). L'unico moto relativo consentito tra i due sistemi, in queste analisi, è la rotazione del sistema di simili cartesiani (x', y') rispetto al sistema di simili cartesiani (x, y) .

Quindi, in generale, mentre per l'osservatore O il punto P è determinato dalle coordinate $(x(t), y(t))$, per l'osservatore O' lo stesso punto è individuato dalle coordinate $(x'(t), y'(t))$; quello in cui i due osservatori concorderanno è ogni istante è il valore delle distanze del punto P dall'origine degli assi: $(x(t))^2 + (y(t))^2 = (x'(t))^2 + (y'(t))^2$.

Del punto di vista vettoriale possiamo quindi scrivere:

$$x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} = x'(t)\hat{i}'(t) + y'(t)\hat{j}'(t) \quad (2) \quad (\text{N.B.: questa equivalenza vale per l'osservatore } O')$$

Se l'osservatore O' e' in rotazione attorno all'asse Z (perpendicolare al piano (x,y) , con verso positivo uscente del piano del foglio), rispetto all'osservatore O i due versori \hat{i}' e \hat{j}' sono entrambi in rotazione attorno all'asse Z con velocita' angolare instantanea $\vec{\omega}(t)$. Dalle discussioni fatte in precedenza risultano che devono valere le relazioni seguenti, rispetto a O :

$$\frac{d\hat{i}'(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \hat{i}'(t) \quad \text{e} \quad \frac{d\hat{j}'(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \hat{j}'(t) \quad (3)$$

Il simbolo $\frac{d}{dt}$ indica la derivazione rispetto al tempo.

Deriviamo rispetto al tempo i due membri dell'equazione (2), tenendo conto che i versori \hat{i} e \hat{j} sono fissi e differenze di \hat{i}' e \hat{j}' :

$$\frac{d x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{d y(t)}{dt} \hat{j} = \frac{d x'(t)}{dt} \hat{i}'(t) + x'(t) \frac{d \hat{i}'(t)}{dt} + \frac{d y'(t)}{dt} \hat{j}'(t) + y'(t) \frac{d \hat{j}'(t)}{dt}$$

Uniamo le relazioni (3); ottieniamo:

$$\frac{d x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{d y(t)}{dt} \hat{j} = \frac{d x'(t)}{dt} \hat{i}'(t) + x'(t) [\vec{\omega}(t) \times \hat{i}'(t)] + \frac{d y'(t)}{dt} \hat{j}'(t) + y'(t) [\vec{\omega}(t) \times \hat{j}'(t)]$$

$$\frac{d x(t)}{dt} \hat{i} + \frac{d y(t)}{dt} \hat{j} = \frac{d x'(t)}{dt} \hat{i}'(t) + \frac{d y'(t)}{dt} \hat{j}'(t) + \vec{\omega}(t) \times [x'(t) \hat{i}'(t) + y'(t) \hat{j}'(t)] \quad (4)$$

osserviamo che:

- 1) le quantità $\vec{V}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j}$ e' la velocità vettoriale instantanea del punto P rispetto all'osservatore O (anche detta VELOCITA' ASSOLUTA del punto P);
- 2) le quantità $\vec{V}_r(t) = \frac{dx'(t)}{dt} \hat{i}'(t) + \frac{dy'(t)}{dt} \hat{j}'(t)$ e' la velocità vettoriale instantanea del punto P rispetto all'osservatore O' (anche detta VELOCITA' RELATIVA del punto P).
- 3) Se chiamiamo $x'(t) \hat{i}'(t) + y'(t) \hat{j}'(t) = \vec{R}'(t)$, vettore posizione del punto P nelle coordinate cartesiane dell'osservatore O', le quantità $\vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t)$ e' chiamata VELOCITA' DI TRASCINAMENTO.
Vede quindi, nel caso di moto relativo rotatorio, la seguente legge di composizione delle velocità:

$$\boxed{\vec{V}(t) = \vec{V}_r(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t)} \quad (5)$$

Tenuto conto che $\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \vec{\alpha}(t)$, se deriviamo rispetto al tempo i due membri della relazione (4) ottieniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \hat{j} &= \frac{d^2x'(t)}{dt^2} \hat{i}'(t) + \frac{dx'(t)}{dt} \cdot \frac{d\hat{i}'(t)}{dt} + \frac{d^2y'(t)}{dt^2} \hat{j}'(t) + \\ &+ \frac{dy'(t)}{dt} \cdot \frac{d\hat{j}'(t)}{dt} + \vec{\alpha}(t) \times \vec{R}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \left[\frac{dx'(t)}{dt} \hat{i}'(t) + x'(t) \frac{d\hat{i}'(t)}{dt} + \frac{dy'(t)}{dt} \hat{j}'(t) + \right. \\ &\quad \left. + y'(t) \frac{d\hat{j}'(t)}{dt} \right] \end{aligned}$$

Il simbolo $\frac{d^2}{dt^2}$ indica le derivate seconde rispetto al tempo.

Ottieniamo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 \vec{y}(t)}{dt^2} \hat{j} &= \frac{d^2 \vec{x}'(t)}{dt^2} \hat{i} + \frac{d \vec{x}'(t)}{dt} \cdot [\vec{\omega}(t) \times \hat{i}'(t)] + \frac{d^2 \vec{y}'(t)}{dt^2} \hat{j} + \\ &+ \frac{d \vec{y}'(t)}{dt} [\vec{\omega}(t) \times \hat{j}'(t)] + \vec{\alpha}(t) \times \vec{R}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \left[\frac{d \vec{x}'(t)}{dt} \hat{i}'(t) + \frac{d \vec{y}'(t)}{dt} \hat{j}'(t) + \right. \\ &\left. + \vec{x}'(t) (\vec{\omega}(t) \times \hat{i}'(t)) + \vec{y}'(t) (\vec{\omega}(t) \times \hat{j}'(t)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 \vec{y}(t)}{dt^2} \hat{j} &= \frac{d^2 \vec{x}'(t)}{dt^2} \hat{i}'(t) + \frac{d^2 \vec{y}'(t)}{dt^2} \hat{j}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \left[\frac{d \vec{x}'(t)}{dt} \hat{i}'(t) + \frac{d \vec{y}'(t)}{dt} \hat{j}'(t) \right] \\ &+ \vec{\alpha}(t) \times \vec{R}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \left[\frac{d \vec{x}'(t)}{dt} \hat{i}'(t) + \frac{d \vec{y}'(t)}{dt} \hat{j}'(t) \right] + \\ &+ \vec{\omega}(t) \times \left[\vec{\omega}(t) \times (\vec{x}'(t) \hat{i}'(t) + \vec{y}'(t) \hat{j}'(t)) \right] \end{aligned}$$

Per analogie con il procedimento seguito per scrivere le relazioni (5), diamo le seguenti definizioni:

1) La quantità

$$\frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 \vec{y}(t)}{dt^2} \hat{j} = \vec{\alpha}(t) \quad \text{e' detta ACCELERAZIONE ASSOLUTA del punto P rispetto all'osservatore O}$$

2) La quantità $\frac{d^2 \vec{x}'(t)}{dt^2} \hat{i}'(t) + \frac{d^2 \vec{y}'(t)}{dt^2} \hat{j}'(t)$ e' detta ACCELERAZIONE RELATIVA del punto P rispetto all'osservatore O' , $\vec{\alpha}_r(t)$.

Ottieniamo quindi, in definitiva:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_r(t) + \vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t)] + \vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t) + 2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}_r(t)$$

(6)

Se il corpo che sta accelerando ha massa m , moltiplichiamo per m i due membri di questa relazione e riarrangiemo in modo opportuno i termini ottenuti:

$$m\vec{a}_r(t) = m\vec{a}(t) - m\vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t)] - m\vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t) - 2m\vec{\omega}(t) \times \vec{v}_r(t).$$

(7)

$m\vec{a}_r(t)$, per la seconda legge della dinamica, è uguale alla risultante delle forze agenti sul punto materiale rispetto all'osservatore O' non ineriale;

$m\vec{a}(t)$, ancora per la seconda legge della dinamica, è uguale alla risultante delle forze agenti sul punto materiale rispetto all'osservatore O ineriale;

[i tre termini del secondo membro che si sommano a $m\vec{a}(t)$ sono quindi tre forze apparenti che agiscono nel punto materiale rispetto all'osservatore O' :

1) $\vec{F}_c(t) = -m\vec{\omega}(t) \times [\vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t)]$ è detta FORZA CENTRIFUGA, e agisce in direzione radiale rispetto a O' , verso l'esterno;

2) $\vec{F}_t(t) = -m\vec{\omega}(t) \times \vec{R}'(t)$ è una forza apparente TANGENZIALE, che compare se $\vec{\omega}(t)$ varia nel tempo;

3) $\vec{F}_c = -2m \vec{\omega}(t) \times \vec{v}_r(t)$ e' nota come FORZA di CORIOLIS
 (in onore del finco Gaspard Gustave de Coriolis, che per primo studiò questo effetto nel 1835), e si manifesta rispetto a un osservatore non inerziale rotante ($\vec{\omega}(t)$ infatti dipende da $\vec{\omega}(t)$) quando osserva il moto di un punto materiale che si sta muovendo con velocità $\vec{v}_r(t)$ rispetto a O' .
 \vec{F}_c agisce sul corpo nel piano perpendicolare alla direzione di $\vec{\omega}(t)$, ed e' perpendicolare anche a $\vec{v}_r(t)$.
 Il suo effetto si manifesta, ad esempio, nel moto delle correnti oceaniche e delle correnti atmosferiche rispetto a osservatori rotanti solidali con il moto di rotazione terrestre.

Le formule (5), (6), (7) restano valide esattamente nello stesso forma se consideriamo il caso piu' generale di rotazione nello spazio.

Se l'osservatore O' , oltre a ruotare attorno a un asse passante per O' , sta anche muovendosi di moto traslatorio rispetto all'osservatore O con accelerazione $\vec{a}_{O'}$, allora rispetto a O' , oltre alle forze apparenti giu' menzionate, agisce un'ulteriore forza apparente $-m\vec{a}_{O'}$, come abbiamo giu' visto nell'anelini fatto a suo tempo.