Lezione 1 - Elementi

Uno spazio vettoriale è un insieme su un campo $\mathbb{K}$.

In questo insieme possiamo trovare vettori, matrici o polinomi
elementi

e sono definite due operazioni: somma tra elementi e prodotto di lambda per un elemento.
numero scalare

Dato uno spazio vettoriale V la somma tra due vettori $v_1 + v_2 \in V$ e il prodotto tra un numero scalare e un vettore $\lambda v \in V$.

Per vettore a n elementi si intende una ennupla $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

es. $\mathbb{K} = \mathbb{R}^3$ è spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ costituito da tutti i vettori a 3 componenti reali

L'elemento neutro nel campo V è 0_V tale che: $v + 0_V = v$

es. $\mathbb{R}^3$ $\quad v = (1, 2, 3) \quad 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$

$\mathbb{C}^3$ $\quad c = (i, 1, 3) \quad 0_{\mathbb{C}^3} = (0, 0, 0)$

es. $\mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = (1, 2, 3) \quad v_2 = (.1, .2, .3)$

$v_1 + v_2 = (1.1, 2.2, 3.3)$

$2 \cdot v_1 = (2, 4, 6)$

Le matrici sono tabelle $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & & & \\ \cdot & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

questa matrice sarà nel campo $\mathbb{K}^{n \times m}$

I vettori possono essere visti come matrici $1 \times m$

I polinomi di grado uguale o inferiore a n sono presenti nel campo $\mathbb{K}^{[x]}_{\leq n}$

es. $P = 1 + 5x - 7x^2 + x^3$

può essere considerato come un vettore $v = (1, 5, -7, 1)$

in questo caso ci troviamo nel campo $\mathbb{R}^{[x]}_{\leq 3}$

Lezione 2 - Sottospazio

Un sottospazio vettoriale non è altro che un sotto insieme dello spazio vettoriale i quali elementi soddisfano determinati criteri

es. V spazio $W \subset V$ W sottospazio

Valgono le stesse proprietà dello spazio vettoriale e in un sottospazio è sempre presente l'elemento neutro

es. $\mathbb{R}^3$ $W \subset \mathbb{R}^3$ $W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \}$

$w_0 = (2, 1, -3)$ $\quad w_0 \in \mathbb{R}^3$ $\quad w_0 \in W$

$v = (1, 1, 1)$ $\quad v \in \mathbb{R}^3$ $\quad v \notin W$

$w_1 = (2, 0, -2)$ $\quad w_1 \in \mathbb{R}^3$ $\quad w_1 \in W$

$w_0 + w_1 = (4, 1, -5)$

$2 \cdot w_0 = (4, 2, -6)$ $\quad$ stesse proprietà

$0_W = (0, 0, 0)$

In ogni sottospazio vettoriale troviamo lo stesso elemento neutro dello spazio vettoriale, se così non fosse allora non può essere considerato sottospazio vettoriale.

es. $\mathbb{R}^3$ $\quad W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z + 2 = 0 \}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Nelle equazioni non ci possono essere termini noti.

es. $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad A_1 \in U$

$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ $\quad A_2 \notin U$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_1 + A_3 = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \in U$$ valgono le stesse proprietà

La stessa cosa vale per i polinomi.

Lezione 3 - Combinazione lineare e Generatori

Dati i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ un vettore $v \in V$ si dice **combinazione lineare** di $v_1, v_2, \dots, v_n$ se è possibile trovare dei numeri scalari appartenenti al campo $\mathbb{K}$ tale che moltiplicando quei numeri per $v_1, v_2, \dots, v_n$ e sommandoli si ottiene il vettore v.

$$\exists\, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

es.

$$2(1,1) - 3(0,2) = (2,-4) \qquad \mathbb{R}^2$$

$$(1,1) = v_1 \qquad (0,2) = v_2 \qquad (2,-4) = v$$

$$v_1 = (1,0) \qquad v_2 = (0,-1) \qquad v = (2,3)$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases} \qquad a_1 = 2 \qquad a_1(1,0) + a_2(0,-1) = v$$

$$a_2 = -3$$

$v_1 = (1, 0, 2) \quad v_2 = (-1, 0, 2) \qquad v = (1, 5, 3)$

questo vettore non potrà mai essere comb. lin. di v_1 e v_2
perché il secondo termine è 0:

$$a_1(1, 0, 2) + a_2(-1, 0, 2) = (1, 5, 3)$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 1 \\ 0 = 5 \qquad \text{imp.} \\ 2a_1 + 2a_2 = 3 \end{cases}$$

Dati i vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ si dice che $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono generatori per lo spazio V se $\forall v \in V$ allora v si può scrivere come comb. lin. di $v_1, v_2, \dots, v_n$

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

es. $\mathbb{R}^2 \quad v_1 = (1, 0) \quad v_2 = (1, 1) \quad v_3 = (-1, 1) \qquad v = (x, y)$
vettore generico

$$(x, y) = a_1(1, 0) + a_2(1, 1) + a_3(-1, 1)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = x \\ a_2 + a_3 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 = x + a_3 \\ a_2 = y - a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -(y - a_3) + x + a_3 \\ a_2 = y - a_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = x - y + 2a_3 \\ a_2 = y - a_3 \\ a_3 = a_3 \end{cases}$$

$v = (1,4)$ si può scrivere come comb. lin.

$$v \to \begin{cases} a_1 = -3 \\ a_2 = 4 \\ a_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 3 \\ a_3 = 1 \end{cases} \qquad \dots$$

Non tutti i vettori generano uno spazio vettoriale

$\mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = (1,0,-1) \qquad v_2 = (1,0,1)$

v_1 e v_2 generano $\mathbb{R}^3$? $\qquad (x,y,z) = v$

$$(x,y,z) = a_1(1,0,-1) + a_2(1,0,1)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = x \\ 0 = y \\ -a_1 + a_2 = z \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2a_2 &= x + z \\ 2a_1 &= x - z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}(x+z) \\ a_1 &= \frac{1}{2}(x-z) \end{aligned}$$

y deve per forza essere 0 quindi $(1,4,6)$ non è generato da

v_1 e v_2 ma $(2,0,3)$ sì

Lezione 4 - Vettori linearmente indipendenti

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$v_1, v_2, \dots, v_n$ si dicono linearmente indipendenti (l.i.) se

la comb. line. nulla $a_1 v_1 + a_2 v_2 + + a_n v_n = 0_V$ sussiste

sse $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$

es. $\mathbb{R}^2$ $v_1 = (1,2)$ $v_2(-1,1)$

$$a_1(1,2) + a_2(-1,1) = (0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} a_1 = a_2 \\ 3a_2 = 0 \quad a_2 = 0 \end{array} \quad a_1 = a_2 = 0$$

$\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,0,0)$ $v_2 = (0,1,1)$ $v_3 = (1,1,1)$ $v = (0,0,0)$

$$a_1(1,0,0) + a_2(0,1,1) + a_3(1,1,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = -a_3 \\ a_2 = -a_3 \\ a_3 = a_3 \end{cases}$$

tutto varia in base a a_3 che può essere qualsiasi numero

Lezione 5 - Basi

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$

$v_1, v_2, \dots, v_n$ si dicono base di V se:

1) $v_1, v_2, \dots, v_n$ sono l.i.

2) $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ in modo unico

generano

es.

- $\mathbb{R}^2$ $\quad v_1 = (1,1) \quad v_2 = (-1,1)$

$$a_1(1,1) + a_2(-1,1) = (0,0)$$

1

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = a_2 \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \qquad a_1 = a_2 = 0$$

2 $(x,y) = a_1(1,1) + a_2(-1,1)$

$$\begin{cases} x = a_1 - a_2 \\ y = a_1 + a_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = \dfrac{x+y}{2} \\ a_2 = \dfrac{-x+y}{2} \end{cases}$$

non c'è l'incognita libera quindi è unico

v_1 e v_2 sono base di $\mathbb{R}^2$

- $\mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = (1,0,0) \quad v_2(0,-1,0)$

(1)

$$a_1(1,0,0) + a_2(0,-1,0) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ -a_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad a_1 = a_2 = 0$$

(2)

$$(x,y,z) = a_1(1,0,0) + a_2(0,-1,0)$$

$$\begin{cases} a_1 = x \\ -a_2 = y \\ z = 0 \end{cases}$$

← ciò non è sempre verificato $(1,2,3)$ non rientra

v_1 e v_2 non sono una base di $\mathbb{R}^3$

Lezione 6 - Matrici

La matrice è una tabella $n \times m$ ordinata

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

se $n = m$ allora si parla di matrice quadrata

$a_{ij} \in \mathbb{K} \quad A \in \mathbb{K}^{n \times m}$

es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i & 2-i \\ 3 & i5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia A una matrice di ordine n $(n \times n)$

① ②

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Gli elementi della diagonale principale sono quelli dove $i = j$

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

Gli elementi della diagonale secondaria sono quelli

$a_{1n}, a_{2\,n-1}, \dots, a_{n1}$

Sia A una matrice di ordine n, A si dice matrice triangolare inferiore se prendendo come riferimento la diagonale principale gli elementi al di sopra sono 0

es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = 0 \text{ se } i < j$$

Sia A una matrice di ordine n, A si dice matrice triangolare superiore se prendendo come riferimento la diagonale principale gli elementi al di sotto sono 0

es.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = 0 \text{ se } i > j$$

Sia D una matrice di ordine n, D si dice matrice diagonale se tutti gli elementi al di fuori della diagonale principale sono 0

es.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j$$

Sia I una matrice di ordine n, I si dice matrice identità se è una matrice diagonale con tutti 1

es.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \\ a_{ij} = 1 \text{ se } i = j \end{array}$$

Sia A una matrice nel campo $\mathbb{K}^{n \times m}$, la sua trasposta ${}^T A$ è una matrice nel campo $\mathbb{K}^{m \times n}$ ottenuta cambiando le righe con le colonne.

es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3} \qquad {}^T A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

$${}^T({}^T A) = A$$

Quando una matrice quadrata coincide con la sua trasposta $A = {}^T A$ la matrice A viene chiamata matrice simmetrica

es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

la n riga corrisponde alla n colonna,

$a_{ij} = a_{ji}$

Una matrice A si dice antisimmetrica quando $a_{ij} = -a_{ji}$ e tutti gli elementi della diag. prin. sono 0

es.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & -1 & 12 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \\ \frac{1}{2} & -12 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Operazioni tra matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2 \qquad \lambda A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 6 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

La somma e differenza tra matrici puo essere fatta solo in caso abbiano la stessa dimensione

es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 12 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Lezione 7 - Prodotto tra matrici

Sia A una matrice $n \times p$ e B una matrice $p \times m$ allora è possibile eseguire il prodotto AB, perchè il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B, che avrà una dimensione $n \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{np} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & c_{ij} & \\ c_{n1} & & c_{nm} \end{pmatrix}$$

c_{ij} è una somma di p elementi

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

$$AB \neq BA \quad , \quad AI_n = I_n A \quad , \quad AA^{-1} = A^{-1} A$$

es.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 8 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 \\ -7 & 0 & 8 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Moltiplicare ogni elemento della riga rispettivamente per ogni elemento della colonna e poi sommare finita colonna si passa alla successiva

Lezione 8 - Determinante

E' possibile calcolare il determinante solamente di matrici quadrate. Esso è un numero reale.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad |A| = ad - bc$$

es.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 5$$

Se la matrice é di ordine ≥ 3 è consigliato usare il teorema di Laplace.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si fissa una riga o una colonna contenente più 0.

$$|A| = a_{i1} C_{i1} + \dots + a_{in} C_{in}$$

C è il complemento algebrico ottenuto calcolando il determinante togliendo la riga e la colonna a cui appartiene l'elemento e si cambia di segno in caso $(i+j)\%2 = 1$

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (3-2) + (1+4) = 6$$

$$|A| = -2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2(1-2) + 1(1+3) = 6$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |B| = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1-1) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\, 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1)(-3-2) + (-1)(2)(-3-2) = 15$$

Proprietà determinanti:

① Se una linea è costituita solo da 0 il det. = 0

② Se due linee parallele sono proporzionali il det. = 0

③ Se una linea è comb. lin. di due o più linee parallele il det. = 0

Lezione 9 - Matrice inversa

Sia A una matrice quadrata con det. ≠ 0. A^{-1} è la **matrice inversa** tale che $AA^{-1} = I_n$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad |A| = -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1(1-2) = 1$$

complemento algebrico

$A_{11} = -1 \qquad A_{12} = -2 \qquad A_{13} = -1$ la metto come colonna

$A_{21} = -2 \qquad A_{22} = -1 \qquad A_{23} = -1$

$A_{31} = 0 \qquad A_{32} = 1 \qquad A_{33} = 0$

$$A^a = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per la matrice inversa prendere gli elementi della matrice aggiunta e dividerli per il det.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ moltiplicando $A \cdot A^{-1} = I_n$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Lezione 10 - Rango

Il **rango** di una matrice é un numero naturale e corrisponde alla dimensione delle colonne o delle righe. In una matrice si definisce **elemento speciale** un elemento non nullo sotto il quale ci sono solo o

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$ 5 è un elemento speciale

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad r(B) = 3$$

Per calcolare il rango ci basta vedere gli elementi speciali per linea, il rango é sempre $\leq$ alla dimensione minima della matrice e si va a vedere sempre la linea della dimensione minima. (50 righe si colonne si vanno a vedere le righe)

es.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3' \to 2R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3'' \to 2R_3' - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 11 \end{pmatrix} \quad r(C) = 3$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3'' \to R_3' - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad r(D) = 2$$

Il rango di una matrice indica anche quante linee sono indipendenti

Per calcolare il rango di una matrice quadrata si può utilizzare un altro metodo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad |A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$r(A) = 3$$

Se il det. $\neq 0$ allora il rango è uguale alla dim. minima

se invece il det. $= 0$ si prende una sottomatrice di ordine n e si calcola il det. se anch'esso è 0 si cambia sottomatrice finché non si trova una con il det $\neq 0$ e si diminuiscono le sottomatrici.

es.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad |B| = 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$|M_1| = -1$ allora $r(B) = 2$

Lezione 11 - Sistemi lineare

Un sistema lineare è costituito da n equazioni in m incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Risolvere un sistema significa trovare tutte le soluzioni, che sono le ennuple che soddisfano tutte le equazioni.

es.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x + z = 0 \\ x - y = -2 \end{cases}$$

La prima cosa da fare è scrivere il sistema in forma di matrice

matrice incompleta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

matrice completa

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

in caso tutti 0 si dice omogeneo

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità di un sistema lineare viene data dal teorema di Rouché Capelli.

Un sistema lineare ammette soluzioni sse il rango della matrice incompleta è uguale a quello della matrice completa.

① $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $(x,y) = (2,1)$ è l'unica soluzione quindi si dice possibile determinato

② $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ $(x,y) = \nexists$ quindi si dice impossibile o incompatibile

③ $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$ $(x,y) = (1,1), (2,0), (0,2) \ldots$ ci sono inf. soluz. quindi si dice possibile indeterminato

ci sono incognite libere

es.

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$r(A) = 2$ C contiene A quindi $r(C) = 2$ $r(A) = r(C) = 2$

Se il numero di incognite è uguale al rango allora è di ① tipo.

Se il numero di incognite è maggiore al rango allora è di ③ tipo con n incognite libere quanto la differenza tra numero incognite e rango.

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x - y + t = 0 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases} \qquad m = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_3' \to R_3 - R_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_3'' \to R_3 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2 \quad r(C) = 2 \qquad m = 4 \quad r = 2$$

ci sono 2 incognite libere $m - r = 2$

$$\begin{cases} x - y + z - t = 1 \\ x - y + t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y - t \\ y = y \\ z = 1 + 2t \\ t = t \end{cases} \qquad \begin{matrix} (0,0,1,0) \\ (0,1,3,1) \; \dots \end{matrix}$$

ammette ∞^2 sol. ← inc libere

Made with Goodnotes

Scelgo due incognite libere e sostituisco trovando il valore delle due incognite in base a quelle libere

Lezione 12 - Sistema lineare ind.

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases} \qquad n = 2 \qquad \begin{cases} x = x \\ y = \frac{-2+x}{2} \end{cases} \qquad \left(x, \frac{-2+x}{2}\right) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 1$$

$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z + 2t = 0 \end{cases} \qquad n = 4 \qquad r(A) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3' \to 2R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + z \\ y = y \\ z = z \\ t = 0 \end{cases} \qquad (y+z, y, z, 0)$$

Made with Goodnotes

Lezione 13 - Sistema lineare parametrico

Un sistema lineare parametrico ha un parametro all'interno

$$\begin{cases} a^2x + 2y - z + t = 1 \\ x + z + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3at = a \end{cases} \qquad m = 4 \quad a \in \mathbb{R}$$

il sistema varia in base ad a

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 3a & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2-a^2 & 0 & 1 & 3a-1 & a-1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1-a^2 & 0 & 0 & 3a-3 & a-1 \end{pmatrix}$$

$a = 1 \quad r(A) = 2 \quad r(C) = 2 \quad \infty^2$

$a \neq 1 \quad r(A) = 3 \quad r(C) = 3 \quad \infty^1$

Il sistema non sarà mai impossibile e mai determinato

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = 1 \\ x + z + 2t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3z - x}{4} \\ z = z \\ t = \frac{-x-z}{2} \end{cases} \qquad a = 1$$

$$\left(x, \frac{1}{2} + \frac{3z - x}{4}, z, \frac{-x-z}{2}\right)$$

Lezione 14 - Gauss

Il metodo di Gauss è un metodo per la risoluzione dei sistemi lineari

$$\begin{cases} x+y+z-2t=-4 \\ y+2z-t=-4 \\ x-y+z=0 \\ z-t=-3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x+y+z-2t=-4 \\ y+2z-t=-4 \\ z=-1 \\ t=2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a_{11}=a_{22}=a_{33}\neq 0$$

es.

$$\begin{cases} x+y+2z=-3 \\ 2x+3y-z=10 \\ x-2y+z=-3 \end{cases} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

il primo elemento della prima riga deve essere sempre $\neq 0$, in caso si scambiano righe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 16 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 16 \\ 0 & 0 & -16 & 48 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + y + 2z = -3 \\ y - 5z = 16 \\ z = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

es. $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - \frac{y}{2} \\ y = y \\ z = -\frac{y}{2} \end{cases} \qquad \left(1 - \frac{y}{2}, y, -\frac{y}{2}\right)$$

∞^1

es. $\begin{cases} x + 2y - 2z + t = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x - y + 3z - t = 1 \end{cases}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ imp.}$$

Il metodo di Gauss Jordan

$$\begin{cases} x+y+2z=-3 \\ 2x+3y-z=10 \\ x-2y+z=-3 \end{cases} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=-3 \end{cases} \qquad (2,1,-3)$$

Con il metodo di Gauss la matrice incompleta si trasforma in una matrice triangolare superiore con diagonale 1, mentre con Gauss Jordan diventa una matrice idendità.

Lezione 15 - Vettori linearmente indipendenti

$v_1=(1,0,-1,0)$ $v_2=(0,1,0,-2)$ $v_3=(1,0,0,-1)$

$v_4=(0,0,1,-1)$

Ci sono due modi per verificare che i rispettivi vettori sono l.i.

① $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = (0,0,0,0)$ e $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ -a_1 + a_4 = 0 \\ -2a_2 - a_3 - a_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_1 &= a_3 \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= a_3 \\ a_4 &= -a_3 \end{aligned}$$

② $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ se il rango è quanto i vettori allora i vettori sono l.i. altrimenti no.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad r(A) = 3$$

1 è dip e gli altri 3 sono ind. per sapere quale

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_4 \end{matrix} \end{array}$$

questi 3 sono l.i. questi 3 sono l.i.

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{array}$$

sono dip.

Lezione 16 - Base e dimensione di uno spazio

Dato uno spazio come $\mathbb{R}^3$ per trovare una base bisogna determinare la dimensione, identifichiamo la base canonica,

$|\mathbb{R}^3| = 3 \qquad e_1 = (1,0,0) \quad e_2 = (0,1,0) \quad e_3 = (0,0,1)$

per trovare una base che non sia la canonica, trovo n vettori a n componenti l.i.

$\underbrace{n}_{=3 \text{ dimensione}}$

sotto il numero non nullo mettere 0

$v_1 = (1,-1,2) \qquad v_2 (0,2,5) \qquad v_3 (0,1,0)$

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es.

$$V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0 \}$$

dim V è il numero di componenti - il numero di equazioni dip.

$3-1=2$, ci servono 2 vettori e abbiamo 2 incognite libere.

$$\begin{cases} x = x \\ y = x - 2z \\ z = z \end{cases} \qquad \left\{ \begin{array}{cc} x & z \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Lezione 17 - Equazioni cartesiane

Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ $\quad V = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Per sapere quante equazioni si devono trovare si fa la diff. tra la dim. massima - il numero di vettori l.i., in questo caso 1 si mette in colonna con il vettore generico e si calcola il det.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ -1 & 2 & z \end{pmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & y \\ -1 & z \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = x - y - z = 0$$

verificare con i vettori dati:

$(0,1,-1) \qquad 0-1+1=0$

$(1,-1,2) \qquad 1+1-2=0$

$(5,1,2) \qquad 5-1-2 \neq 0 \quad \notin V$

$(h+1,2,-h) \qquad h+1-2+h=0 \qquad 2h=1 \qquad h=\frac{1}{2}$

$W \subset \mathbb{R}^3 \quad W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 2 eq. cart.

$(2,-2,2) \in W$

$$\begin{array}{c} ① \\ ② \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & y \\ 1 & z \end{pmatrix}$$

① $y + x = 0$

② $-z - y = 0$

Lezione 18 - Somma diretta due spazi vettoriali

Sia V e W spazi vettoriali $U = V + W$ quando $\forall u \in U$

$\exists v \in V \wedge \exists w \in W \mid u = v + w$ - somma

es. $u(10,10,10) = v(1,1,1) + w(9,9,9)$, $\overset{u}{(10,10,10)} = \overset{v}{(2,2,2)} + \overset{w}{(8,8,8)}$

Sia V e W spazi vettoriali $U = V \oplus W$ quando $\forall u \in U$

$\exists! v \in V \wedge \exists! w \in W \mid u = v + w$ - somma diretta

Nell' intersezione tra i due spazi vettoriali é quindi presente solo il vettore nullo, $\dim(V \cap W) = 0$

es.
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0\}$$
$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \qquad \mathbb{R}^3 \overset{?}{=} V \oplus W$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

se il sistema ammette incognite libere l'intersezione non è nulla, in questo caso é determinato

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad r(A) = r(C) = 3 \quad 1 \text{ sola soluz. } (0,0,0)$$

base di V e base di W

$\{(0,0,1)\}$ $\{(1,0,0)(0,1,0)\}$ $(1,3,4) = (0,0,4) + (1,3,0)$

Lezione 19 - Applicazioni lineari

$f: V \to W$ l'applicazione da V in W è lineare se

① $v_1, v_2 \in V$ $\quad f(v_1, v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

② $v \in V$ $\quad \lambda \in \mathbb{K}$ $\quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$

es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x, y, z) = (x+y, x, x-z)$

$v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $\quad v_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$f(v_1 + v_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 - z_1 - z_2)$

$f(v_1) = (x_1 + y_1, x_1, x_1 - z_1)$

$f(v_2) = (x_2 + y_2, x_2, x_2 - z_2)$

$f(v_1) + f(v_2) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2 - z_1 - z_2)$

$\lambda v = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$f(v) = (x+y, x, x-z)$ $\qquad \lambda f(v) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x, \lambda x - \lambda z)$

$f(\lambda v) = (\lambda x + \lambda y, \lambda x, \lambda x - \lambda z)$

es. $f(x, y, z) = (x, y+z+1)$

$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$

$v_1(x_1, y_1, z_1) \quad v_2(x_2, y_2, z_2)$

$v_1 + v_2 \; (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$

$f(v_1) = (x_1, y_1+z_1+1) \quad f(v_2) = (x_2, y_2+z_2+1)$

$f(v_1+v_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2+z_1+z_2+1)$

$f(v_1)+f(v_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2+z_1+z_2+2)$ non é lineare

Lezione 20 - Matrice associata

Sia $f: V \to W$ un applicazione lineare $M^{A}_{B}(f)$ base

In V scegliamo la base $A = \{v_1, \dots, v_n\}$

In W scegliamo la base $B = \{w_1, \dots, w_m\}$

Calcolare l'applicazione di vettori $v_1, \dots, v_n$ ottenendo i vettori immagine $\underbrace{f(v_1)}_{u_1}, \dots, \underbrace{f(v_n)}_{u_n}$

$u_1 = a_1 w_1 + \dots + a_m w_m$

$u_n = b_1 w_1 + \dots + b_m w_m$

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_m & & b_m \end{pmatrix}$$ matrice associata

es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y,z) = (2x+y, y-z)$

$E_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad E_2 = \{(1,0),(0,1)\}$

$f(1,0,0) = (2,0) \quad f(0,1,0) = (1,1) \quad f(0,0,1) = (0,-1)$

$(2,0) = 2(1,0) + 0(0,1), \quad (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1), \quad (0,-1) = 0(1,0) + -1(0,1)$

$$M^{E_3}_{E_2}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y,z) = (2x+y, y-z)$

$A = \{(1,-2,-2),(0,1,1),(0,0,1)\} \quad B = \{(1,1),(1,-1)\}$

$f(1,-2,-2) = (0,0), \quad f(0,1,1) = (1,0), \quad f(0,0,1) = (0,-1)$

$(0,0) = 0(1,1) + 0(1,-1), \quad (1,0) = \frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1), \quad (0,-1) = -\frac{1}{2}(1,1) + \frac{1}{2}(1,-1)$

$$M^{A}_{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Lezione 21 - Matrice associata II

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f(1,1,1) = (2,0,1) \quad f(0,1,1) = (1,0,1) \quad f(-1,0,1) = (2,1,1)$

A partire dalla matrice associata rispetto alle basi canoniche si possono estrapolare le leggi.

$$(1,1,1) \qquad 1\cdot f(e_1) + 1 f(e_2) + 1\cdot f(e_3) = (2,0,1)_{v_1}$$
$$(0,1,1) \qquad 1\cdot f(e_2) + 1 f(e_3) = (1,0,1)_{v_2}$$
$$(-1,0,1) \qquad -f(e_1) + f(e_3) = (2,1,1)_{v_3}$$

$$\begin{cases} f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = v_1 \\ \qquad\quad f(e_2) + f(e_3) = v_2 \\ -f(e_1) \qquad\quad + f(e_3) = v_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & v_2 \\ -1 & 0 & 1 & v_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & v_2 \\ 0 & 1 & 2 & v_1+v_3 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_1+v_3-v_2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1-v_2 \\ 0 & 1 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & v_1+v_3-v_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v_1-v_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2v_2-v_1-v_3 \\ 0 & 0 & 1 & v_1+v_3-v_2 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = v_1 - v_2, \quad f(e_2) = 2v_2 - v_1 - v_3, \quad f(e_3) = v_1 + v_3 - v_2$$

$$f(1,0,0) = (1,0,0) = (2,0,1) - (3,1,1) - (-2,-1,0) = (1,0,0)$$
$$f(0,1,0) = (-2,-1,0) = (1,0,1) - (3,1,1) = (-2,-1,0)$$
$$f(0,0,1) = (3,1,1) = (3,1,1)$$

$$M_{E_3}^{E_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per verificare che la matrice sia corretta ci basta moltiplicare il primo elemento di v con la prima riga e vedere se esce il primo elemento di w

$$M_{E_3}^{E_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0+3 \\ 0+0+1 \\ 0+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere la legge esplicita ci basta moltiplicare la matrice per il vettore generico.

$$M_{E_3}^{E_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-2y+3z, -y+z, z)$$

Lezione 22. Composizione applic. lineari

Siano $\underset{\text{dim. } n}{U}$ $\underset{h}{W}$ $\underset{m}{V}$ spazi vettoriali e $f: U \to W$ e $g: W \to V$ due applicazioni lineari, $\varphi: U \to V$ é chiamata la composizione di f e g tale che $f(u) = w$, $g(w) = v$, $\varphi(u) = v$. $\varphi = g \circ f$

$\varphi = g(f(u))$.

Ci sono due modi per trovare la matrice associata ad una applicazione lineare data dalla composizione di due a.l.

base $U = E$, base $W = H$, base $V = F$

$M_1 = A^E_H(f)$ $\quad M_2 = B^H_F(g)$ $\quad M_3{}^E_F = BA$

es. (1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y) = (x+y, -x, y)$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y,z) = (x-y, y+z)$

$$A^{E_2}_{E_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{E_3}_{E_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\varphi = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$M^{E_2}_{E_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $\varphi = g[f] = (x+y+x, -x+y) = (2x+y, -x+y)$

$$M^{E_2}_{E_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lezione 23 - Autovalori e autovettori

Sia V uno spazio vettoriale e $f : V \to V$ un applicazione (endomorfismo da V in se stesso), $v \in V$ e $\lambda \in V$ $\quad v$ è

Made with Goodnotes

detto autovettore e λ il suo autovalore quando
$f(v) = \lambda v$

es. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad f(x, y, z) = (x, y+z, x+y+z)$

$$M^{E_3}_{E_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si determina $H = M - \lambda I_3$ per poi calcolare il det ottenendo il polinomio caratteristico.

$$H = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad |H| = 1-\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) =$$

$$= (1-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda-1) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) = (1-\lambda)(\lambda)(\lambda-2) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 2 \qquad$ n autovalori per matrice di ordine n

Se un endomorfismo ci dà n autovalori distinti allora l'endomorfismo è semplice, cioè esiste una base di V costituita da autovettori. Per trovare gli autovettori:

$$H = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

assegno valore semplice

$$\lambda = 1 \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad (x, -x, 0) = (1, -1, 0)$$

$$\lambda = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (0, -z, z) = (0, -1, 1)$$

$$\lambda = 2 \quad \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad (0, y, y) = (0, 1, 1)$$

autovettori

$$f(1,-1,0) = 1(1,-1,0) = (1,-1,0)$$

$$f(0,-1,1) = 0(0,-1,0) = (0,0,0)$$

$$f(0,1,1) = 2(0,1,1) = (0,2,2)$$

Lezione 24 - Nucleo e Immagine

Sia $f: V \to W$ un' applicazione lineare, $I_m(f) \subseteq W$ si dice immagine di f, è un sottospazio di W contenente tutti i vettori che tramite la funzione f arrivano da V a W.

$Ker(f) \subseteq V$ si dice nucleo di f, è sottospazio di V contenente tutti i vettori che tramite la funzione f vanno a finire in 0_W.

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y, z) = (x, y+z, x+y+z)$

$$M_{E_3}^{E_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim I_m(f) = r(M) \qquad \dim I_m(f) = 2$

colonne di M(f)

$$\text{Base } I_m(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\dim Ker(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim I_m(f) \qquad \dim Ker(f) = 1$

$$\text{Base } Ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

due righe di M

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

assegno semplice

Lezione 25 - Matrici diagonalizzabili

Due matrici A e B di ordine n si dicono simili se esiste una matrice P di ordine n invertibile tale che $P^{-1}AP = B$. La matrice A e B avranno lo stesso rango e lo stesso determinante.

Una matrice A si dice diagonalizzabile se esiste una matrice P di ordine n invertibile tale che

$$P^{-1}AP = D_{\text{matrice diagonale}}$$

Nella diagonale di D ci saranno gli autovalori e le colonne della matrice P saranno gli autovettori corrispondenti ai autovalori.

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 2 & 2 & h \\ 0 & 0 & 0 & h \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & h \\ 0 & 2 & 2-\lambda & h \\ 0 & 0 & 0 & h-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|H| = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & h \\ 2 & 2-\lambda & h \\ 0 & 0 & h-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(h-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(h-\lambda)\big((1-\lambda)(2-\lambda) - 2\big) = (1-\lambda)(h-\lambda)(\lambda)(\lambda-3) = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = h \quad \lambda_3 = 0 \quad \lambda_4 = 3$

se $h = 0$ $\quad \lambda = 0$ $\quad$ molteplicità algebrica $= 2$

$\lambda = 1$

$\lambda = 3$

$$H_{\underset{h\ \ \lambda}{(0,0)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

molteplicità geometrica $= \dim H - r(H_{(0,0)}) = 4 - 2 = 2$

Dato che $m_a = m_g$ esiste la matrice invertibile P e quindi A è diagonalizzabile

se $h = 1$ $\quad \lambda = 0$

$\lambda = 1 \quad m_a = 2$

$\lambda = 3$

$$H_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_g = 4 - 3 = 1 \neq m_a$

se $h = 3$ $\quad \lambda = 0$

$\lambda = 1$

$\lambda = 3 \quad m_a = 2$

$$H_{(3,3)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_g = 4 - 3 = 1 \neq m_a$

A è diagonalizzabile $\forall h \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

Lezione 26 - Cambio base e matrici simili

Sia $f: V \to W$ un applicazione vettoriale, sia A la
$\underset{\text{base } E}{\overset{\text{dim } n}{V}}$ $\quad$ $\underset{F}{\overset{m}{W}}$

matrice associata $M^{E}_{F}(f)$, scelgo due nuove basi E_1 e F_1 e sia B la matrice associata $M^{E_1}_{F_1}(f)$. Per fare il cambio base e partendo da A arriviamo alla matrice B si dovrà trovare la matrice P e Q tale che $Q^{-1}AP = B$.

P è una matrice di ordine n mentre Q è di ordine m.

Sia $\underset{n}{V}$ uno spazio vettoriale, scelgo una base $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ e una base $E_1 = \{w_1, \dots, w_n\}$, la matrice di passaggio sarà:
sempre base di V

$$
\begin{aligned}
w_1 &= a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n \\
&\vdots \\
w_n &= a_{1n}v_1 + \dots + a_{nn}v_n
\end{aligned}
\qquad
P^{EE_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

Questa matrice di passaggio si può anche considerare come la matrice associata rispetto all'applicazione identica

$$P^{EE_1} = M^{E_1}_{E}(i_V) \qquad i_V: V \to V \qquad i(v) = v$$

inverto le basi

es. $\mathbb{R}^2$ $E=\{(-1,1)(2,0)\}$ $E_1=\{(1,1)(1,-1)\}$

$(1,1)=1(-1,1)+1(2,0)$
$(1,-1)=-1(-1,1)+0(2,0)$

$$P^{EE_1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$i_{\mathbb{R}_2}=\varphi(x,y)=(x,y)$

$f(1,1)=(1,1)$ $f(1,-1)=(1,-1)$

$(1,1)=1(-1,1)+1(2,0)$
$(1,-1)=-1(-1,1)+0(2,0)$

$$M_E^{E_1}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

P è quindi la matrice appena trovata mentre Q è la matrice di passaggio considerando le basi F e F_1

$Q^{FF_1}=M_F^{F_1}(i_V)$ $i_V:V\to V$ $i(v)=v$

inverto le basi

In caso di endomorfismo $\varphi: \underset{\substack{E\\E_1}}{V}\to \underset{\substack{E\\E_1}}{V}$ allora

$A=M_E^E(\varphi)$ $B=M_{E_1}^{E_1}(\varphi)$

$P^{-1}AP=B$ in questo caso le matrici A e B si dicono simili es. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \qquad M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A$

$E_1 := \{(1,-2,-),(0,1,1),(0,0,1)\} \qquad F_1 := \{(1,1)(1,-1)\}$

$$Q^{-1}AP = B = M^{E_1}_{F_1}(f)$$

$$P^{\mathcal{E}_3E_1} = M^{E_1}_{\mathcal{E}_3}(i_{\mathbb{R}^3})$$

$$(1,-2,-2) = 1(1,0,0) + -2(0,1,0) + -2(0,0,1)$$
$$(0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$
$$(0,0,1) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

$$P^{\mathcal{E}_3E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{\mathcal{E}_2F_1} = M^{F_1}_{\mathcal{E}_2}(i_{\mathbb{R}^2})$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det = -2 \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M^{E_1}_{F_1}(f)$$

Lezione 27 - Diagonalizzazione

Data una matrice A, si dice diagonalizzabile se $P^{-1}AP = D$

es.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|H| = (-1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = 1$$

$\lambda = -1$ $\quad \begin{cases} 3x - z = 0 \\ -x + 3z = 0 \end{cases}$ $\quad (0, 1, 0)$

$\lambda = 3$ $\quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ -4y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} -x = z \\ y = 0 \end{matrix}$ $\quad (1, 0, -1)$

$\lambda = 1$ $\quad \begin{cases} x - z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x = z \\ y = 0 \end{matrix}$ $\quad (1, 0, 1)$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\det = -2$

Lezione 28 - Compito d'esame

$f: V \to \mathbb{R}^4 \qquad V = \mathcal{L}\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}} \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}} \underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}} \right\} \qquad V \subset \mathbb{R}^4$

$f(v_1) = (1, h, 0, 0)$

$f(v_2) = (0, 0, 1, 2h-1) \qquad h \in \mathbb{R}$

$f(v_3) = (0, 0, 1, 1)$

a) determina $\dim V$ e base di V

V é generato da 3 vettori l.i. quindi $\dim V = 3$ con base $\{v_1, v_2, v_3\}$

b) per quali $h \in \mathbb{R}$ f induce un endomorfismo $f_1: V \to V$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 1 & t \end{vmatrix} = t - z \qquad t - z = 0$$

$(1, h, 0, 0) \qquad h \in \mathbb{R}$

$(0, 0, 1, 2h-1) \qquad 2h - 1 - 1 = 0 \qquad 2h = 2 \qquad h = 1$

c) per tali valori di h, determina $\ker f_1$

$f_1: V \to V$

$$M^{A}_{A}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim Im = r(M) = 2 \qquad \dim Ker = \dim V - \dim Im = 1$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} \qquad Ker(f_1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \qquad (0,1,-1)_A$$

$0v_1 + 1v_2 - 1v_3 = (0,1,0,0)$ il nucleo è generato da questo vettore, tutti i vettori proporzionali a questo definiscono il nucleo

d) determina gli autospazi e trovare se esiste una base di autovettori

$$H = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad |H| = (1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda)$$

$(1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) = 0$

$\lambda = 1 \quad ma = 2, \qquad \lambda = 0$

$$H_{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \qquad (0,1,-1)_A$$

autospazio autovettore

$0v_1 + 1v_2 - 1v_3 = (0,1,0,0) \qquad V_0 = \mathcal{L}\{(0,1,0,0)\}$

$\lambda = 1$

$$H_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad m_g = 2 = m_a$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = z \end{cases} \qquad (1,1,0)_A \ (0,0,1)_A$$

$$(1,1,1,1) \quad (0,0,1,1) \qquad V_1 = \mathcal{L}\{(1,1,1,1),(0,0,1,1)\}$$

Lezione 29 - S.V. prodotto scalare e Norma

Sia $\mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale e $v_1 = (x_1, \dots, x_n)$ $w_1 = (y_1, \dots, y_n)$ due vettori appartenenti a $\mathbb{R}^n$, il prodotto scalare standard tra v_1 e w_1 é: $v_1 w_1 = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, il modulo di v_1 é: $|v_1| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Questo è valido in caso lo spazio è $\mathbb{R}^n$.

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, il prodotto scalare è una legge che associa due vettori di V ad un numero reale.

$V \times V \to \mathbb{R} \qquad \langle v, w \rangle \to \mathbb{R}$

Ha diverse proprietà:

è commutativo: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

sia $a, b \in \mathbb{R}$: $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$

con se stesso: $\langle v,v \rangle \geq 0$ $\quad \langle v,v \rangle = 0$ sse $v=0$

$\mathbb{R}^2 \quad v=(x_1,x_2) \quad w=(y_1,y_2)$

$\langle v,w \rangle = 4x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$

$\langle v,v \rangle = 4x_1^2 - x_1x_2 + x_2x_1 + 4x_2^2 = 4x_2^2 + 4x_1^2 \geq 0$ rispetta le leggi

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e v un vettore $\in V$ la norma di v é: $\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$. In caso di prodotto scalare standard

$|v| = \|v\|$

$\mathbb{R}^2 \quad v=(x_1,x_2) \quad w=(y_1,y_2)$

$\langle v,w \rangle = 4x_1y_1 - x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2$

$\langle v,v \rangle = 4x_1^2 + 4x_2^2 \qquad \|v\| = \sqrt{4x_1^2 + 4x_2^2} = 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Se $\|v\| = 1$ il vettore é chiamato versore

es.

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad w = (1,2,3)$

$\langle v,v \rangle = 1 \qquad \|v\| = 1 \qquad \langle w,w \rangle = 14 \qquad \|w\| = \sqrt{14}$

Si puó normalizzare un vettore per renderlo un versore

$n = \frac{v}{\|v\|}$

$w_n = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

Lezione 30 - Base ortogonale e ortonormale

Sia V uno spazio vettoriale e v_1, v_2 due vettori appartenenti a V

v_1 e v_2 si dicono ortogonali $v_1 \perp v_2$ quando $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

es. $\mathbb{R}^2 \quad v_1 = (2,3) \quad v_2 = (3,-2) \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$V \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 4x_1x_2 - x_1y_2 + x_2y_1 + 4y_1y_2 = 13 \neq 0$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n $\{v_1, \dots, v_n\}$ si dice base ortogonale quando $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad i \neq j$, se tutti i vettori sono dei versori allora si dice base ortonormale

es. $\mathbb{R}^3 \quad \{\overset{v_1}{(1,0,1)}, \overset{v_2}{(0,1,0)}, \overset{v_3}{(1,0,-1)}\}$

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = 0, \quad \langle v_2, v_3 \rangle = 0$

$\|v_1\| = \sqrt{2} \qquad v_1$ non è un versore quindi è solo una base ortogonale

Per passare da una base ortogonale a una ortonormale bisogna prendere i vettori con norma $\neq 1$ e normalizzarli

$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ base ortonormale

Da una base non ortogonale è possibile passare ad una base ortonormale tramite l'ortonormalizzazione di Gram-Schimdt.

Sia V uno spazio vettoriale e una base di n vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$, la base diventerà ortonormale $\{n_1, \dots, n_n\}$

$$n_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$n_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, n_1 \rangle n_1}{\| v_2 - \langle v_2, n_1 \rangle n_1 \|}$$

$$n_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, n_1 \rangle n_1 - \langle v_3, n_2 \rangle n_2}{\| v_3 - \langle v_3, n_1 \rangle n_1 - \langle v_3, n_2 \rangle n_2 \|}$$

$\vdots$

n_n

es. $\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0), (1,0,1), (1,-1,0)\}$ $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$

$$n_1 = (1,0,0)$$

$$n_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, n_1 \rangle n_1}{\| v_2 - \langle v_2, n_1 \rangle n_1 \|} = (0,0,1)$$

$$n_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, n_1 \rangle n_1 - \langle v_3, n_2 \rangle n_2}{\| v_3 - \langle v_3, n_1 \rangle n_1 - \langle v_3, n_2 \rangle n_2 \|} = (0,-1,0)$$

$\{(1,0,0),(0,0,1),(0,-1,0)\}$ base ortonormale

Lezione 31 - Ortogonalità

Sia V un sottospazio di U, $V \subset U$. $\forall u \in U$, u si dice **ortogonale** a V, $u \perp V$, se u è ortogonale a qualsiasi vettore di V. $u \perp v \quad \forall v \in V$.

es. $\mathbb{R}^3 \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\} \quad u = (0,0,n) \quad u \perp V$?

Base di $V = \{(0,0,1)\} \quad \langle v,u \rangle = n \neq 0$ non è ortogonale

$u_1 = (a,b,0)$ in questo caso $u \perp V$

Siano V e W sottospazi di U, V è **ortogonale** a W, $V \perp W$, se $\forall v \in V \quad v \perp W$ e $\forall w \in W \quad w \perp V$.

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0\} \qquad (x,y,0)$$
$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=0, y=0\} \qquad (0,0,z)$$

$$\langle (x,y,0)(0,0,z) \rangle = 0$$

Sia W un sottospazio di U, l'ortogonale di W, $W^\perp$, è un sottospazio: $W^\perp = \{u \in U \mid u \perp W\}$, $W \oplus W^\perp = U$

es. $\mathbb{R}^4$ $W = \{(x,y,z,t) \mid x-y=0, y+t=0\}$ $(x,x,z,-x)$

Base di $W = \{(1,1,0,-1),(0,0,1,0)\}$

$(x,y,z,t) \perp \{(1,1,0,-1),(0,0,1,0)\}$

$\begin{cases} x+y-t=0 \\ z=0 \end{cases}$ $(x,y,0,x+y)$

Base di $W^\perp = \{(0,1,0,1),(1,0,0,1)\}$

Lezione 32 - Proiezione su un sottospazio

Sia V uno spazio vettoriale e U sottospazio di V, $U \subset V$, sia $v \in V$ un vettore, per proiettare v in U ottengo il vettore $u \in U$, $p_U(v)$.

es. $V = \mathbb{R}^2$ $v = (4,3)$ $e_1 = (1,0)$ $\langle v, e_1 \rangle e_1 = 4(1,0)$

$p_x(v) = 4(1,0) = (4,0)$

$\mathbb{R}^3$ $v = (1,0,-1)$ $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ dim $U = 2$

Base di U: $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ ortnorm.

$$n_1 = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$n_2 = \frac{(0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\|-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$p_U(1,0,-1) = \langle v, n_1\rangle n_1 + \langle v, n_2\rangle n_2 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

verificare se soddisfa l'eq.

Lezione 33 - Teorema Spettrale

Sia $\varphi: V \to V$ un endomorfismo, si dice autoaggiunto quando per $v_1, v_2 \in V$, $\langle \varphi(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, \varphi(v_2)\rangle$

es.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (2x+y, x) \quad v_1 = (x_1, y_1) \quad v_2(x_2, y_2)$

$f(v_1) = (2x_1 + y_1, x_1) \qquad f(v_2) = (2x_2 + y_2, x_2)$

$\langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle \stackrel{?}{=} 2x_1x_2 + y_1x_2 + x_1y_2 = x_1 2x_2 + x_1y_2 + y_1x_2$

endomorfismo autoaggiunto

Un altro modo per vedere se un endomorfismo è autoaggiunto è creare una matrice associata all'endomorfismo rispetto ad una base ortonormale, $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$.

$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ simmetrica $\Longleftrightarrow$ φ autoaggiunto.

Sia $\varphi: V \to V$ un endomorfismo con pss.

φ è autoaggiunto	$\Longleftrightarrow$	φ è semplice autospazi ortogonali	$\Longleftrightarrow$	base di autovettori ortonormale $P^{-1} = {}^{T}P$

es. $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(x,y,z) = (2x-z, -y, -x+2z)$

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(-1-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3)$$

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 3$

$$H_{(-1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 3x - z = 0 \\ -x + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = x \\ y = y \\ z = 3x \end{matrix} \quad (0,1,0)$$

$$H_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = x \\ y = 0 \\ z = x \end{matrix} \quad (1,0,1)$$

$$H_{(3)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -x - z = 0 \\ -4y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = x \\ y = 0 \\ z = -x \end{matrix} \quad (1,0,-1)$$

$$P^{-1} M P = D$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |P| = 2 \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad {}^{T}P = P^{-1}_{n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

la sottoscritta S. T. G. il 28/09/2023 affermo che dal giorno 1/10/2023 manterrò la promessa di:
non mangiare/bere + schifezze salvo eccezioni

Sandra Zoda Gabriele