ESAME 22/06/2022

① A:

- $m \log m + m^3 = \Omega(m^2 \sqrt{m})$ = VERA

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m\log m + m^3}{m^2\sqrt{m}} = \frac{\log m + m^2}{m\sqrt{m}} = \frac{m^2}{m\sqrt{m}} = \frac{m}{\sqrt{m}} = \infty$$

- $\log\log m = o(\log m)$ = VERA

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log\log m}{\log m} = \frac{\log x}{x} = 0$$

- $m^{2.001} = \omega(m^2 \log m)$ = VERA

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m^{2.001}}{m^2\log m} = \frac{m^{0.001}}{\log m} = \infty$$

- $\frac{m^4+m+1}{\sqrt{m^3+3}} = o(m^{2.5})$ = FALSA

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m^4+m+1}{m^{2.5}\sqrt{m^3+3}} = \frac{m^4}{m^4} = 1$$

- $2^m = O(m^{100})$ = FALSA
- $2^m = \Theta(2^{4m})$ = FALSA
- $2^m = o(3^m)$ = VERA

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m = 0 \text{ per } m\to\infty$$

- $2^m = o(2^m+8)$ = FALSA

B: $\cdot\, T(m) = 2T(m/4) + \sqrt{m}$ $\Rightarrow a = 2,\ b = 4,\ f(m) = \sqrt{m}$

$$\Rightarrow m^{\log_4 2} \text{ vs } \sqrt{m} \iff \sqrt{m} \text{ vs } \sqrt{m} \underset{2^\circ\text{CASO}}{\Rightarrow} T(m) = \Theta(\sqrt{m}\log m)$$

- $T(m) = 2T(m-2)+1$

$$= 2(2T(m-4)+1)+1 \qquad (4T(m-4)+2)+1$$

$$= 2(2(2T(m-8)+1)+1)+1 \qquad (8T(m-8)+8+2+1)$$

$$\vdots$$

$$= 2^i T(m-2i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j = 2^i T(m-2i) + 2^i - 1 \qquad m-2i = 1 \iff i = \frac{m-1}{2}$$

$$= 2^{\frac{m-1}{2}} + 2^{\frac{m-1}{2}} - 1 = 2\cdot 2^{\frac{m-1}{2}} - 1 = 2^{\frac{m-1}{2}+1} - 1 = \Theta(\sqrt{2^m})$$

C:

- Ordinare n interi compresi fra 1 e 200: INTEGER SORT $O(n)$
- Costruire un heap binario contenente n chiavi prese in input: heapify $O(n)$
- Cercare un elemento in un vettore ordinato: ricerca binaria $O(\log n)$
- Calcolare tutte le distanze in un grafo non orientato e non pesato da due sorgenti verso tutti i nodi: 2 BSF $O(n+m)$

ESAME 18/07/2022

(2) A:

- $n^3 + n^2 \log^2 n = o(n^2 \log^{30} n)$ = FALSA

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^3 + n^2 \log^2 n}{n^2 \log^{30} n} = \frac{n^3}{n^2 \log^{30} n} = \frac{n}{\log^{30} n} = \infty$$

- $\log^2 n = o(\log^{30} n)$ = VERA
- $n^2 = \Omega\left(\frac{n^{2.001}}{\log^{2001} n}\right)$ = FALSA

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 \log^{2001} n}{n^{2.001}} = \frac{\log^{2001} n}{n^{0.001}} = 0$$

- $\frac{n\sqrt{n} + \log n}{\sqrt{n^3+3}} = \Theta(\log n)$ = FALSA

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n\sqrt{n} + \log n}{\log n \sqrt{n^3+3}} = \frac{n\sqrt{n}}{n^{3/2} \log n} = \frac{1}{\log n} = 0$$

- $2^{2n} = \omega(2^{1.9n})$ = VERA
- $2^n = \Theta(2^n + 1.5^n)$ = VERA
- $2^n = o(2^n + n^2)$ = FALSA
- $2^n = \Theta(2^{n+8})$ = VERA

B:

- $T(n) = 2T(n/3) + n \qquad a = 2,\ b = 3 \quad f(n) = n$

$\Rightarrow n^{\log_3 2}$ vs $n \quad \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$

• $T(n) = T(n-2) + n$

$$
\begin{array}{c}
n \\ | \\ n-2 \\ | \\ n-4 \\ | \\ n-6 \\ \vdots \\ n-2i \\ \vdots \\ 1
\end{array}
$$

$n - 2i = 1 \iff i = \frac{n-1}{2}$ $\qquad$ $\frac{n-1}{2} \cdot n \approx n^2$

ho $\frac{n-1}{2}$ nodi che costano $n \Rightarrow T(n) = O(n^2)$

I primi $\frac{\frac{n}{2}-1}{2}$ nodi costano $\geq n/2 \Rightarrow T(n) = \Omega(n^2)$

$\frac{\frac{n}{2}-1}{2} \cdot \frac{n}{2} \approx \frac{n^2}{2} \approx n^2$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

C:

• Ordinare n interi compresi fra 1 e n^4: RADIX $O(n+k) = O(n)$

• Costruire un dizionario contenente n chiavi prese in input (su cui poi fare ricerche in tempo logaritmico): AVL, n insert $\Rightarrow O(n \log n)$

$\quad O(\log n)$

• Capire se in un grafo non orientato il nodo v può raggiungere i nodi w_1 e w_2: BFS, $O(n+m)$

• Calcolare le distanze da tutti i nodi verso uno specifico nodo t in un grafo orientato con pesi positivi sugli archi: DIJKSTRA

$O(m + n \log n)$

ESAME 14/09/2022

A:

- $n + n^2 \log^2 n = o(n^2 \log n)$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + n^2 \log^2 n}{n^2 \log n} = \frac{1 + n \log^2 n}{n \log n} = \log n = \infty$$

- $\log^4 n = o(\sqrt[3]{n})$ = VERA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^4 n}{\sqrt[3]{n}} = 0$$

- $n^2 = \Omega\left(\frac{n^2}{\log^{2001} n}\right)$ = VERA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \log^{2001} n}{n^2} = \log^{2001} n = \infty$$

- $\frac{n\sqrt{n + \log n}}{\sqrt{n^3+3}} = \Theta(\log n)$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{n+\log n}}{\log n \sqrt{n^3+3}} = \frac{n\sqrt{n}}{\log n \cdot n^{3/2}} = \frac{1}{\log n} = 0$$

- $2^{\sqrt{\log n}} = O(\sqrt[3]{n})$ = FALSA
- $2^n = \Theta(2^n + 1.5^n)$ = VERA
- $2^{n+8} = \omega(2^n)$ = FALSA
- $2^n = \Theta(2^n + 2^{n/2})$ = VERA

B:

- $T(n) = T(n/3) + n$ $\quad a=1,\ b=3,\ f(n)=n$

$\Rightarrow n^{\log_3 1}$ vs n $\Leftrightarrow$ 1 vs n $\Rightarrow T(n) = \Theta(n)$

$$
\begin{aligned}
\cdot\, T(n) &= 2T(n-4)+1 \\
&= 2\left(2T(n-8)+1\right)+1 \\
&= 2\left(2\left(2T(n-12)+1\right)+1\right)+1 \\
&\vdots \\
&= 2^i T(n-4i)+\sum_{j=0}^{i-1} 2^j
\end{aligned}
\qquad n-4i=1 \iff i=\frac{n-1}{4}
$$

$$
= 2^{\frac{n-1}{4}} + 2^i - 1
$$

$$
= 2^{\frac{n-1}{4}} + 2^{\frac{n-1}{4}} - 1 \iff T(n)=\Theta\left(\sqrt[4]{2^n}\right)
$$

C:

- Ordinare n studenti laureati in informatica rispetto al voto ottenuto all'esame di Algoritmi e Strutture dati: BUCKET SORT $O(n+K) \Rightarrow \Theta(n)$
- Restituire la lista dei nodi di un BST in ordine decrescente di chiave: VISITA ANTISIMMETRICA $T(n)=O(n)$
- Capire se tutti i nodi di un grafo diretto sono mutuamente raggiungibili: Visita DFS per componenti fortemente connesse $O(n+m)$
- Capire se in un grafo diretto pesato, tutti i nodi sono raggiungibili a partire da un nodo sorgente s usando solo archi di peso al più x: Visita DFS $O(n+m)$

DIJKSTRA?

ESAME 28/09/2022

A:

- $n^{1/4}\log n + \sqrt{n} = \Omega(n^{1/3})$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}\log n + \sqrt{n}}{n^{1/3}} = \frac{n^{1/4}\log n}{n^{1/3}} = \frac{\log n}{n^{1/12}} = 0$$

- $n\log^2 n = o((n+3)\log^4 n)$ = VERA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log^2 n}{(n+3)\log^4 n} = \frac{n}{n\log^2 n} = \frac{1}{\log^2 n} = 0$$

- $\dfrac{n^3+\log n}{\sqrt{n}} = \Theta(n^{2.5})$ = VERA

- $\dfrac{\sqrt{n\log\log n}}{\sqrt{n+1}} = O(\log\log n)$ = VERA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n\log\log n}}{\sqrt{n+1}\cdot\log\log n} = \frac{\sqrt{n}\cdot\sqrt{\log\log n}}{\sqrt{n}\cdot\log\log n} = \frac{1}{\sqrt{\log\log n}} = 0$$

- $2^{\sqrt{\log n}} = \omega(\sqrt[3]{n})$ = VERA

- $2^n = \Theta(2^{n-\log n})$ = FALSA

- $2^{n+2} = \omega(2^n)$ = FALSA

- $2^n = o(2^{n+2} + 2^{n/2})$ = FALSA

B:

- $T(n) = 4T(n/4) + n \implies T(n) = \Theta(n\log n)$

- $T(n) = T(n-4) + n^2$

$$\begin{array}{c} n \\ \downarrow \\ n-4 \\ | \\ n-8 \\ | \\ n-12 \\ \vdots \\ n-4i \\ \vdots \\ 1 \end{array} \implies T(n) = \Theta(n^3)$$

C

- Cercare un elemento in una lista ordinata di n elementi (si assuma la lista implementata in modo classico con record e puntatori): ricerca lineare $O(n)$
- In un grafo orientato e non pesato, trovare la distanza da ogni nodo verso due nodi specifici t_1 e t_2: BFS $O(n+m)$
- Ordinare n interi i cui valori sono compresi fra n^3 e n^3+100: RADIX $O(n)$
- Costruire un heap che contenga n specifiche chiavi: heapify $\Theta(n)$

ESAME 30/01/2023

A

- $n^{1/4}\log n + \sqrt{\log n} = \Omega(n^{1/3})$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/4}\log n + \sqrt{\log n}}{n^{1/3}} = \frac{n^{1/4}\log n}{n^{1/3}} = \frac{\log n}{n^{1/12}} = 0$$

- $\dfrac{n}{\log^2 n} = o\left(\dfrac{n+3}{\log^4 n}\right)$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log^4 n}{(n+3)\log^2 n} = \log^2 n = \infty$$

- $\dfrac{n^3+\log n}{\sqrt{n}} = \Theta(n^{2.5})$ = VERO

- $\sqrt[4]{\log n} = O(\log\log n)$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{\log n}}{\log\log n} = \frac{\sqrt[4]{x}}{\log x} = \infty$$

- $2^{\sqrt{\log n}} = o(n^3)$ = FALSA

- $2^n = \Theta(2^{n-10})$ = VERA

- $2^{n+2} = \Theta(2^{n/2})$ = FALSA

- $2^{2n} = \Theta(4^n + 2^{n/2})$ = VERA

B:

- $T(n) = 4T(n/2) + n\sqrt{n}$ $\quad a=4 \quad b=2 \quad f(n) = n\sqrt{n}$

$$n^{\log_2 4} \text{ vs } n\sqrt{n} \iff n^2 \text{ vs } n^{3/2} \implies T(n) = \Theta(n^2)$$

- $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \implies T(n) = \Theta(\phi^n)$ (fibonacci)

C:

- In un grafo diretto e pesato, calcolare la distanza da s a t a tutti gli altri nodi: DIJKSTRA $O(m + n\log n)$
- In un grafo orientato, capire se uno specifico nodo s può raggiungere ed essere raggiunto da tutti gli altri nodi: DFS con comp. $O(n+m)$
- Ordinare n numeri: MERGE SORT $O(n \log n)$
- Selezionare i 5 numeri più grandi in un vettore di n numeri: Heapify $\uparrow$ $O(n)$ e 5 estrazioni

ESAME 20/02/2023

A:

- $\sqrt{\log n} = \Theta(\log \sqrt{n})$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\log n}}{\log \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}x} = \infty$$

- $n \log n = o(n^2)$ = VERA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{n^2} = \frac{\log n}{n} = 0$$

- $\frac{\sqrt{n^3+\log n}}{\sqrt{n}} = o(n)$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+\log n}}{n\sqrt{n}} = \frac{n^{3/2}}{n^{3/2}} = 1$$

- $\sqrt[4]{\log n} = O(\log\log n)$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{\log n}}{\log\log n} = \frac{\sqrt[4]{x}}{\log x} = \infty$$

- $3^n = o(2^{2n})$ = VERA

- $2^n = \Theta(2^{n+\log n})$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot 2^{\log n}} = \frac{1}{2^{\log n}} = 0$$

- $2^{n+2} = \omega(2^{n/2})$ = VERA

- $\frac{2^n}{n^2} = \omega(2^{n/2})$ = VERA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2 \cdot 2^{n/2}} = \frac{2^{n/2}}{n^2} = \infty$$

B:

- $T(n) = 2T(n/4) + n\sqrt{n}$ $\quad a=2,\ b=4,\ f(n)=n\sqrt{n}$

$$n^{\log_4 2} \text{ vs } n\sqrt{n} \implies T(n) = \Theta(n\sqrt{n})$$

- $T(n) = 2T(n-4) + 1 \implies T(n) = \Theta(\sqrt[4]{2^n})$

C:

- In un grafo non orientato e pesato, calcolare la distanza fra tutte le coppie di nodi: n DIJKSTRA $O(n(m+n\log n))$
- In un grafo orientato, capire se uno specifico nodo s può essere raggiunto da tutti gli altri nodi: SI RIGIRA IL GRAFO E DFS DAL NODO S $O(n+m)$

· Ordinare un vettore $V[1:n]$ di n bit ($V[i] \in \{0,1\}$): INTEGER SORT $O(n)$
· aggiungere $\sqrt{n}$ elementi ad un heap binario di n elementi: $\sqrt{n}$ insert $O(\sqrt{n} \log n)$

ESAME 04/07/2023

A:

· $n^{1/5} \log n + \sqrt{\log n} = o(n^{1/4})$ = VERA

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{1/5} \log n + \sqrt{\log n}}{n^{1/4}} = \frac{\sqrt{\log n}}{n^{1/20}} = 0$$

· $\frac{n}{\log n} = \omega\left(\frac{n+3}{\log^3 n}\right)$ = VERA

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \log^3 n}{(n+3) \log n} = \log^2 n = \infty$$

· $\frac{n^3 + \log n}{\sqrt{n}} = \Theta(n^{2.5}) =$ VERA

· $\log \log n = o(\sqrt[4]{\log n})$ = VERA

· $2^{\sqrt{\log n}} = o(n^{1/3})$ = VERA

· $2^n = \Theta(2^{n+\log n})$ = FALSA

· $2^{n+2} = \Theta(2^{n/2})$ = FALSA

· $2^{2n} = \Theta(4^n + n^2)$ = VERA

B:

· $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$ $\quad a=2, b=4, f(n) = \sqrt{n} \Rightarrow n^{\log_4 2}$ vs $\sqrt{n} \Rightarrow T(n) = \Theta(\sqrt{n} \log n)$

· $T(n) = T(n-1) + \sqrt{n}$ $\quad \Rightarrow T(n) = \Theta(n\sqrt{n})$

C:

· In un grafo diretto rappresentato con matrice di adiacenza, calcolare i nodi raggiungibili da un nodo specifico: DFS $O(n^2)$
· In un grafo non orientato e pesato, individuare il nodo a distanza massima da un nodo v: DIJKSTRA $O(m + n \log n)$
· In un albero AVL di n nodi, trovare il secondo minimo: min e poi successore $O(\log n)$
· In un vettore ordinato, calcolare il numero di nodi di valore minimo: RICERCA BINARIA $O(\log n)$

ESAME 25/07/2023

• $n + n^2\log^2 n = o(n^2\log n)$ = FALSA

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\log^2 n}{n^2\log n} = \frac{1+n\log^2 n}{n\log n} = \log n = \infty$$

• $\log^4 n = o(\sqrt[3]{n})$ = VERA

• $n^2 = \Omega\left(\frac{n^2}{\log^{2001} n}\right)$ = VERA

• $\frac{n\sqrt{n+\log n}}{\sqrt{n^3+3}} = \Theta(\log n)$ = FALSA

• $2^{2n} = \omega(2^{1.9n})$ = VERA

• $2^n = \Theta(2^n + 1.5^n)$ = VERA

• $2^n = o(2^n + n^2)$ = FALSA

• $2^n = \Theta(2^{n+8})$ = VERA

B:

• $T(n) = T\left(\frac{99}{100}n\right) + n \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$

• $T(n) = T(n-1) + n^3 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^4)$

C:

• In un grafo diretto dire se esiste un nodo t che non può essere raggiunto da almeno un nodo s: DFS totale $O(n+m)$

• In un grafo non orientato e pesato, individuare il cammino più corto da s a t che non passa per uno specifico nodo w: DIJKSTRA $O(m+n\log n)$

• Costruire un albero AVL contenente n chiavi fornite in input: n insert con rotazioni $O(n\log n)$

• Fondere due heap binari, uno contenente n^2 nodi e l'altro n nodi: Unione di Heap $O(n\log n)$

ESAME 12/09/2023

A:

- $n + n\sqrt{n}\log^2 n = o(n^{1.8})$ = VERA
- $\log^3 n = o(\sqrt[4]{n})$ = VERA
- $n = \Omega\left(\frac{n}{\log\log\log n}\right)$ = VERA
- $\frac{n^{1.5}\sqrt{n+\log n}}{\sqrt{n^3+3}} = \Theta(\sqrt{n})$ = VERA
- $\left(\frac{7}{3}\right)^n = \omega(2^n)$ = VERA
- $2^n = \Theta(2^n \log\log n)$ = FALSA
- $2^{n+8} = \Theta(2^{n-8})$ = VERA
- $2^n = \omega(2^n + n^2)$ = FALSA

B:

- $T(n) = 4T(n/16) + n^2 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$
- $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1 \Rightarrow T(n) = O(\log\log n)$

METODO CAMBIAMENTO DI VARIABILE

C:

- Dato un grafo diretto G, stabilire se tutti i nodi possono raggiungere un nodo specifico t: VISITA DFS $O(n+m)$
- In un grafo non orientato, completo e pesato, calcolare l'albero dei cammini minimi con sorgente s: DIJKSTRA $O(m + n\log n)$
- Ordinare un vettore di n interi compresi fra n e n^2: RADIXSORT $O(n)$
- Fondere due alberi AVL, uno contenente n nodi e l'altro log n nodi: log n insert $O(\log^2 n)$

ESAME 27/09/2023

A

- $m + m\sqrt{m}\log^2 m = \Theta(m^{1.5})$ = FALSA
- $\log^3 m = \Theta(\log m)$ = FALSA
- $m + \sqrt{m} = \Theta(m \quad \sqrt{m})$ = VERA
- $\dfrac{m^{1.5}\sqrt{m+\log m}}{\sqrt{m^3+3}} = \Theta(\sqrt{m})$ = VERA
- $\left(\frac{5}{3}\right)^m = o(2^m)$ = VERA
- $2^m = o(2^m\sqrt{\log m})$ = VERA
- $2^m = \Theta(2^{2m})$ = FALSA
- $2^{m+2} = \Theta(2^m)$ = VERA

B:

- $T(m) = 7T(m/8) + m \quad \Rightarrow T(m) = \Theta(m)$
- $T(m) = T(m-1) + m^2 \Rightarrow T(m) = \Theta(m^3)$

C:

- heapify $O(m)$
- BFS $O(n+m)$
- RICERCA LINEARE $O(m)$
- Merge $O(\log m)$

ESAME 30/01/2024

A

- $n^{1/4}\log n+\sqrt{\log n}=\Omega(n^{1/3})$ = FALSA
- $\dfrac{n}{\log^2 n}=o\left(\dfrac{n+3}{\log^4 n}\right)$ = FALSA
- $\dfrac{n^3+\log n}{\sqrt{n}}=\Theta(n^{2.5})$ = VERA
- $\sqrt[4]{\log n}=O(\log\log n)$ = FALSA
- $2^{\sqrt{\log n}}=o(n^3)$ = VERA
- $2^n=\Theta(2^{n-10})$ = VERA
- $2^{n+2}=\Theta(2^{n/2})$ = FALSA
- $2^{2n}=\Theta(4^n+2^{n/2})$ = VERA

B

- $T(n)=T(n/8)+8 \Rightarrow T(n)=\Theta(\log n)$
- $T(n)=T(n-1)+n^3 \Rightarrow T(n)=\Theta(n^4)$

C:

- n insert $O(n\log n)$
- RADIX $O(n)$
- DFS simmetrica $O(n)$
- BFS $O(n+m)$