22 MAGGIO 2019 ✓
9 SET 2019 ✓
17 LUGLIO 2019 (PRIMALE DUALE)
31 GENNAIO 2020 (PRIMALE DUALE)
18 SETTEMBRE 2020 (B (VUOTO))
19 SETTEMBRE 2019 (ES 1. C)
ES 2 (2-3)
21 FEBBRAIO 2020 (ES. 4 - 5)
22 GENNAIO 2020 (PTO B E C)
D
22 GIUGNO 2020 (PTO C)
26 GIUGNO 2019 ✓

→ DUBBI / CONFRONTA RISULTATI

4 NOV 2020 ES. 2 (2)
8 SETT. 2020 PTO B (CONTROLLA GLI ALTRI)

19 SET ES 2 (2-3)

ESERCIZIO PRIMALE-DUALE PDF

$\min\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 5x_4$

$5x_1 - 4x_2 + 13x_3 + x_4 = 20$

$x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 8$

$x_i \geq 0$

(D) $\max\ 20y_1 + 8y_2$

$5y_1 + y_2 \leq 1$

$-4y_2 - y_2 \leq 6$

$13y_1 + 5y_2 \leq -7$

$y_1 + y_2 \leq 5$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 - 5y_1 - y_2 \\ 6 + 4y_1 + y_2 \\ -7 - 13y_1 - 5y_2 \\ 5 - y_1 - y_2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 + 5 + 2 \\ 0 \\ -7 + 13 + 10 \\ 5 + 1 + 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

PR $\min\ a_1 + a_2$

$-4x_2 + a_1 = 20$

$-x_2 + a_2 = 8$

$x_2, a_1, a_2 \geq 0$

	x_2	a_1	a_2
-28	5	0	0
20	-4	1	0
8	-1	0	1

$z_{PR} = 28 > 0$

$a_1 = 20$

$a_2 = 8$

DR $\max\ 20\pi_1 + 8\pi_2$

$-4\pi_1 - \pi_2 \leq 0$

$\pi_1 \leq 1$

$\pi_2 \leq 1$

$$\begin{pmatrix} 1 - \pi_1 \\ 1 - \pi_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y^0 = y^1 + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \theta \\ -2 + \theta \end{pmatrix}$$

$-5 + 5\theta - 2 + \theta \leq 1 \Rightarrow \theta \leq \frac{8}{6}\ \frac{4}{3}$

$4 - 4\theta + 2 - \theta \leq 6 \Rightarrow \theta \geq 0$

$-13 + 13\theta - 10 + 5\theta \leq -7 \quad \theta \leq \frac{8}{9}$

$-1 + \theta - 2 + \theta \leq 5 \quad \theta \leq 4$

$0 \quad \frac{8}{9} \quad \frac{4}{3} \quad 4$

$\max = \frac{8}{9} \qquad y^{(1)} = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -10/9 \end{pmatrix}$

4 NOV. 2020

ESERCIZIO NR. 1

$$\min \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 = 12$$
$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2$$
$$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

F.S. $\min \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3$
$$3x_1 + 2x_2 = 12$$
$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - S_1 = 2 \qquad x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$
$$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 + S_2 = 4$$

Ⓐ $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono SBA?

1: $12 = 12$, $10 \geq 2$, $4 \leq 4$, $4, 0, 2 \geq 0$ OK AMMISS.

$S_1 = 8$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ 3 VINCOLI 3 POSITIVI OK $x^{(1)}$ é SBA.

$S_2 = 8 - 4 - 4 = 0$

$3 + 9 = 12 = 12$; $13 \geq 2$, $2 + \frac{9}{8} \leq 4 \Rightarrow \frac{25}{8} \leq 4$ SI ≥ 0 TUTE SI

$S_1 = 13$ 3 vincoli, 4 variabili positive

$S_2 = 4 - 2 - \frac{9}{8} > 0$ NO SBA

Ⓑ VERIFICHIAMO SE É SOL. OTTIMA

DUALE $\max \quad 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$
$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2$$
$$2y_1 + 2y_2 + \frac{1}{4}y_3 \leq -3$$
$$-3y_2 - 2y_3 \leq 1$$
$$y_1 \in \mathbb{R}, \; y_2 \geq 0, \; y_3 \leq 0$$

1: $S_{p_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $S_{d_1} \begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ -3 - 2y_1 - 2y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} y_2 = 0 \\ 2 - 3y_1 - 2y_3 = 0 \\ 1 + 2y_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 - 3y_1 + 1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ 2y_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 1$ $\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Sostituisco nel duale: $2 \leq 2$; $2 - \frac{1}{8} \leq -3$ NO, la sol. non é ottima

2: $S_{p_2}: \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 7/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ 2 - 3y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$

$-3 - 2y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{3}{2}$

$S_{d_1} \begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ -3 - 2y_1 - 2y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ⓒ VERIFICA SE 8 É LB

Sostituisco nella f.o. (1) $2 \cdot 4 + 2 = 10 > 8$ OK

(2) $2 - \frac{27}{2} = -\frac{23}{2} < 8$!! 8 non é LB.

ESERCIZIO 2

$$\min \quad \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \alpha$$
$$4x_1 - x_2 - 6x_3 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

$\max \quad (12 - \alpha)y_1 + 2y_2$
$$3y_1 + 4y_2 \leq \beta \qquad y_1 \leq 0$$
$$2y_1 - y_2 \leq -\gamma \qquad y_2 \geq 0$$
$$-6y_3 \leq -1$$

Ⓐ $x^{(4)} = [2 \; 0 \; 1]^T$ é OTTIMO ! CALCOLA α, β, γ

Standardizzo il problema

Intanto $\alpha \le 6$ perché $3(2)+0 \le 12-\alpha \Rightarrow \alpha \le 12-\alpha \Rightarrow \alpha \le 6$

$\min \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$

$$3x_1 + 2x_2 + S_1 \le 12 - \alpha$$

$$4x_1 - x_2 - 6x_3 - S_2 \ge 2$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \ge 0$$

$$Sp \begin{pmatrix} 6-\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$Sd \begin{pmatrix} \beta - 3y_1 - 4y_2 \\ -\gamma - 2y_1 + y_2 \\ -1 + 6y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ -1 + 6y_2 \; 0 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{6} \\ (6-\alpha)\, y_1 = 0 \end{cases}$$

$\alpha < 6$

$$\begin{cases} \beta = \frac{2}{3} \\ y_2 = \frac{1}{6} \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

1

$\alpha = 6$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{\beta}{3} - \frac{2}{9} \\ y_2 = \frac{1}{6} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

2

Sostituisco nel duale per ammissibilità:

1 $\alpha < 6$; $\frac{2}{3} \le \frac{2}{3}$ ok, $-\frac{1}{6} \le -\gamma \Rightarrow \gamma \le \frac{1}{6}$ $\quad \beta = \frac{2}{3}$

2 $\alpha = 6$ $\quad \beta \le \frac{2}{3}$ $\quad \gamma \le -\frac{2}{3}\beta + \frac{11}{18}$

B QUALI VALORI DI α, β, γ RENDONO IL PROBLEMA VUOTO O ILLIMITATO?

$\min \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 - \alpha$$

$$4x_1 - x_2 - 6x_3 - x_5 = 2$$

$$x_i \ge 0$$

8 SETTEMBRE 2020

$\max\ 3x_1 + \beta x_2 + 4x_3$ $\qquad$ $\min\ -3x_1 + \beta \bar{x}_2 - 4x_3$

$2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 4$ $\qquad$ $2x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - x_4 = 4$

$3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq \alpha$ $\qquad$ $3x_1 - 2\bar{x}_2 - x_3 - x_5 = \alpha$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $x_1, \bar{x}_2, x_4, x_5 \geq 0 \quad x_3 \in \mathbb{R}$

(a) PER QUALI α/β (P) È ILL?

$\max\ 4y_1 + \alpha y_2$

$2y_1 + 3y_2 \leq -3 \longrightarrow y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$ $\qquad$ somma di positivi $\Rightarrow$ mai <0

$y_1 - 2y_2 \leq \beta$ $\qquad$ Duale vuoto $\Rightarrow$ (P) illimitato

$-3y_1 - y_2 \leq -4$

$y_1, y_2 \geq 0$

(b) $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ È MAX PER QUALI α, β?

$\max\ 3x_1 + \beta x_2 + 4x_3$

$2x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 4$

$3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq \alpha$ $\qquad$ $2x_1 - x_2 = 4$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $3x_1 + 2x_2 = \alpha$ $\qquad$ $9 - 8 \geq \alpha \Rightarrow \alpha \leq 1$

per essere ammissibile

2 CASI $\alpha = 1 \wedge \alpha < 1$

$\min\ 4y_1 + \alpha y_2$

$2y_1 + 3y_2 \geq 3$

$-y_1 + 2y_2 \leq \beta$

$-3y_1 - y_2 = 4$

$y_1 \leq 0,\ y_2 \leq 0$

$$\begin{pmatrix} -3 + 2y_1 + 3y_2 \\ \beta + y_1 - 2y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3 + 2y_1 + 3y_2 = 0 \\ \beta + y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 + 4y_2 - 2\beta + 3y_2 = 0 \\ y_1 = 2y_2 - \beta \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = \frac{3 + 2\beta}{7} \\ y_1 = \frac{6 - 3\beta}{7} \end{cases}$$

$3 + 2\beta \leq 0 \qquad \beta \leq -\frac{3}{2}$

$6 - 3\beta \leq 0 \qquad \beta \geq 2$

$\nexists\ \alpha, \beta$ per cui il pto è di massimo

(c) SBA CON x_1 e x_2 IN BASE $\qquad \alpha = 1,\ \beta = 8$

$\min\ -3x_1 + 8\bar{x}_2 - 4x_3$

$2x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - x_4 = 4$

$3x_1 - 2\bar{x}_2 - x_3 - x_5 = 1$

$x_1, \bar{x}_2, x_4, x_5 \geq 0 \quad x_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2x_1 + \bar{x}_2 = 4$

$3x_1 - 2\bar{x}_2 = 1$

$$\begin{cases} x_2 = 4 - 2x_1 \\ 3x_1 - 8 + 4x_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 - \frac{18}{7} \\ 7x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = \frac{9}{7} \end{cases}$$

$x_2 = \frac{10}{7}$

(d) SOL. OTTIMA x_1 e x_3 >0

$$\begin{pmatrix} >0 \\ >0 \\ >0 \end{pmatrix}$$

$\max\ 4y_1 + y_2$

$2y_1 + 3y_2 \leq -3$

$2y_1 - 2y_2 \leq 8$

$-3y_1 - y_2 = -4$

$-y_1 \leq 0,\ -y_2 \leq 0$

$$S_p: \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_3 - 4 \\ 3x_1 - x_3 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 - 2y_1 - 3y_2 \\ 8 - 2y_1 + 2y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3 - 2y_1 - 3y_2 = 0 \\ 8 - 2y_1 + 2y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3-2y_1-3y_2=0 \\ 8-2y_1+2y_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3-8-2y_2-3y_2=0 \Rightarrow -5y_2-11=0 \\ y_1=4+y_2 \end{cases}$$

$y_2 = -\frac{11}{5}$

$y_1 = \frac{9}{5}$

$\hookrightarrow > 0$

NON VA BENE

9 SETTEMBRE 2019

min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 \le 12$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 \ge 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0$ $\quad \bar{x_2} = -x_2,\ \bar{x_2} \ge 0$

min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 - 2\bar{x_2} + S_1 = 12$

$4x_1 + \bar{x_2} - 3x_3 - S_2 = 2$

$x_1, \bar{x_2}, x_3, S_1, S_2 \ge 0$

(A) $x^{(1)} = [4, 0, 0]^T \quad x^{(2)} = [2, 0, 2]^T$ SONO SBA?

1: $12 \le 12$ ok, $16 \ge 2$ ok

$S_1 = 0$

$S_2 = 14$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$ 2 VAR. POSITIVE, 2 VINCOLI

$x^{(1)}$ é SBA

2: $6 \le 12$ ok, $2 \ge 2$ ok, $2, 0, 2 \ge 0$ AMM. OK

$S_1 = 6$

$S_2 = 0$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ 3 VAR. POSITIVE, NO SBA

(B) Si perché non cambiando i vincoli gli slack restano gli stessi e le componenti positive saranno sempre della stessa cardinalità, per cui x^1 rimane SBA

(C) VERIFICA SE LA SBA É OTTIMA

DUALE: max $12y_1 + 2y_2$

$3y_1 + 4y_2 \le 2$

$2y_1 - y_2 \ge -3$

$-3y_2 \le 1 \Rightarrow y_2 \ge -\frac{1}{3}$

$y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0$

$S_D = \begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - 4y_2 \\ -3 - 2y_1 + y_2 \\ 1 + 3y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_P = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2 - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y_1 = \frac{2}{3} \\ y_2 = 0 \end{cases}$ ASSURDO $\underline{y_1 \le 0}$

(D) PUÓ ESISTERE UNA SOL. AMMISSIBILE DEL DUALE PARI A $\frac{16}{2}$? PERCHÉ?

$\begin{cases} 12y_1 + 2y_2 = 8 \\ 3y_1 + 4y_2 \le 2 \\ 2y_1 - y_2 \ge -3 \\ y_2 \le -\frac{1}{3} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y_2 = 4 - 6y_1 \\ 3y_1 + 16 - 24y_1 \le 2 \\ 2y_1 - 4 + 6y_1 \ge -3 \Rightarrow y_1 \ge \frac{1}{8} \end{cases} \rightarrow y_1 \le 0$ ASSURDO.

(E) SUPPONIAMO CHE IL PROBLEMA SIA:

$\min \ \gamma x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \delta$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 2$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \leq 0, \ x_3 \geq 0$

$x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ deve essere ottimo

STAND. $\min \ \gamma x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 - 2\bar{x}_2 + S_1 = 12 - \delta$

$4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - S_2 = 2$

$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$

$S_1 = 9 - \delta$

$S_2 = 2$

$S_p \begin{pmatrix} 9-\delta \\ 2 \end{pmatrix}$

DUALE: $(12-\delta) y_1 + 2y_2$

$3y_1 + 4y_2 \leq \gamma$

$2y_1 - y_2 \geq -3$

$-3y_2 \leq 1$

$y_1 \leq 0, \ y_2 \geq 0$

$S_D \begin{pmatrix} \gamma - 3y_1 + 4y_2 \\ -3 - 2y_1 + y_2 \\ 1 + 3y_2 \end{pmatrix} \bar{X}$

Per essere ammissibile $3 \leq 12 - \delta \Rightarrow \delta \leq 9$

2 CASI: $\delta = 9$ (1) $\wedge$ $\delta < 9$ (2)

(1) $\delta = 9$

$\begin{cases} \gamma - 3y_1 + 4y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = \frac{\gamma}{3} \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \frac{\gamma}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

Verifico ammissibilità duale

$\gamma \leq \gamma$

$\frac{2}{3}\gamma \geq -3 \Rightarrow \gamma \geq -\frac{9}{2}$

$0 \leq 1$

$\frac{\gamma}{3} \leq 0 \Rightarrow \gamma \leq 0$

$-\frac{9}{2} \leq \gamma \leq 0$

$\delta = 9$

(2) $\delta < 9$

$\begin{cases} \gamma - 3y_1 + 4y_2 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \gamma = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$

verifica ammissibilità

$0 \leq 0$

$0 \geq -3$

$0 \leq 1$

$0, 0$ OK

$\delta < 9$

$\gamma = 0$

17 LUGLIO 2019

$\max\ -4x_1 + 3x_2 - x_3$ $\quad\quad$ $\min\ 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 + 3x_2 \geq 10$ $\quad\quad$ $x_1 - 3\bar{x}_2 - S_1 = 10$

$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$ $\quad\quad$ $x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - S_2 = 8$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0$ $\quad\quad$ $x_1,\ \bar{x}_2 = -x_2,\ x_3 \geq 0$

(A) $x' = [10, 0, 0]^T$ $\quad x_2 = [12, 0, 2]^T$ $\quad x_3 = [13, -1, 0]^T$, $\quad x_4 = [14, -1, 2]^T$ sono SBA?

2 vincoli quindi scarto a priori x_4 perché ha 3 comp. $\neq 0$

(1): $10 \geq 10$, $10 \geq 8$, $10, 0, 0, \geq 0$ ok

$S_1 = 0$

$S_2 = 2$

$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ 2 variabili positive

x^1 é SBA

(2): $12 \geq 10$ $\quad 20 \geq 8$

$S_1 = 2$

$S_2 = 12$

$\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$ non é SBA x^2

(3): $13 \geq 10$, $14 \geq 8$ ok AMM.

$S_1 = 3$

$S_2 = 6$

$\begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ non é SBA

(B) ESISTE UNA SBA CON x_2 e x_3 IN BASE?

x_2 e x_3 in base: $\begin{pmatrix} 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x_2 = 10 \rightarrow x_2 = \frac{10}{3} \\ -x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$

ma $x_2 \leq 0$ per cui $\nexists$ SBA

(C) $\exists$ SOL. OTTIMA CON x_1 IN BASE?

Dato che ci sono 2 vincoli x_1 é obbligatoriamente >0, deve esserci un altra variabile >0

Scelgo $x_3 > 0$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{matrix} x_1 = 10 \\ x_1 + 4x_3 = 8 \end{matrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ NON VA BENE $x_3 > 0$

Scelgo $\bar{x}_2 > 0$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \bar{x}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{matrix} x_1 - 3\bar{x}_2 = 10 \\ x_1 + \bar{x}_2 = 8 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x_1 = 10 + 3\bar{x}_2 \\ 10 + 3\bar{x}_2 + \bar{x}_2 = 8 \end{matrix}$ $\quad \begin{cases} x_1 = \frac{17}{2} \\ 4\bar{x}_2 = -2 \Rightarrow \bar{x}_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ NON VA BENE

Scelgo $S_1 > 0$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ S_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{matrix} x_1 - S_1 = 10 \\ x_1 = 8 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x_1 = 8 \\ S_1 = -2 \end{matrix}$ NO

Scelgo $S_2 > 0$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $\begin{matrix} x_1 = 10 \\ x_1 - S_2 = 8 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x_1 = 10 \\ S_2 = 2 \end{matrix}$ OK

$x_1 - 3\bar{x}_2 - S_1 = 10$

$x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - S_2 = 8$

$x_1,\ \bar{x}_2 = -x_2,\ x_3 \geq 0$

1.3 PRIMALE DUALE $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

F.S.

$$\min \; 4x_1 + 3\overline{x_2} + x_3$$
$$x_1 - 3\overline{x_2} - x_4 = 10$$
$$x_1 + \overline{x_2} + 4x_3 - x_5 = 8$$
$$x_1, \overline{x_2}, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(D)

$$\max \; 10y_1 + 8y_2$$
$$y_1 + y_2 \leq 4$$
$$-3y_1 + y_2 \leq 3$$
$$4y_2 \leq 1$$
$$-y_1 \leq 0$$
$$-y_2 \leq 0$$
$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

PR

$$\min \; a_1 + a_2$$
$$-x_4 + a_1 = 10$$
$$-x_5 + a_2 = 8$$
$$x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0$$

	x_4	x_5	a_1	a_2
	0	0	1	1
10	-1	0	1	0
8	0	-1	0	1

-18	-1	-1	0	0
10	-1	0	1	0
8	0	-1	0	1

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

DPR

$$\max \; 10\pi_1 + 8\pi_2$$
(x_4) $-\pi_1 \leq 0$
(x_5) $-\pi_2 \leq 0$
(a_1) $\pi_1 \leq 1$
(a_2) $\pi_2 \leq 1$
$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ 1-\pi_1 \\ 1-\pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \vartheta \end{pmatrix}$$
$$2\vartheta \leq 4 \Rightarrow \vartheta \leq 2$$
$$-2\vartheta \leq 3 \Rightarrow \vartheta \geq -\frac{3}{2}$$
$$\vartheta \leq \frac{1}{4}$$
$$\vartheta \geq 0$$
$$\vartheta \geq 0$$

$0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{4}$ ↳ max

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Sostituisco y^1 nel duale

AMMISS. OK

$$\begin{pmatrix} 4 - \frac{1}{2} \\ 3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ 1 - 1 \\ \frac{1}{4} \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7/2 \\ 7/6 \\ 0 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix}$$

$$\min \; a_1 + a_2$$
$$a_1 = 10$$
$$4x_3 + a_2 = 8$$
$$x_3, a_1, a_2 \geq 0$$

		x_3	a_1	a_2
		0	1	1
a_1	10	0	1	0
a_2	8	4	0	1

		x_3	a_1	a_2
	-18	-4	0	0
a_1	10	0	1	0
a_2	8	4	0	1

$R_2 \to R_2/4$

$R_2 + R_0$ $\longrightarrow$

	-10	0	0	1
a_1	10	0	1	0
x_3	2	1	0	1/4

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\max \; 10\pi_1 + 8\pi_2$$
$$\pi_1 \leq 1$$
$$4\pi_2 \leq 0$$
$$\pi_2 \leq 1$$
$$\pi_1 \; \pi_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\pi_1 \\ -4\pi_2 \\ 1-\pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y^2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 + \vartheta \\ 1/4 + \vartheta \end{pmatrix}$$

Sost. nel duale

ax $10y_1 + 8y_2$

$y_1 + y_2 \le 4$ $\quad \frac{1}{4} + \vartheta + \frac{1}{4} + \vartheta \le 4$ $\quad \vartheta \le \frac{7}{4}$

$-3y_1 + y_2 \le 3$ $\quad -3\left(\frac{1}{4} + \vartheta\right) + \frac{1}{4} + \vartheta \le 3$ $\quad -\frac{3}{4} - 3\vartheta + \frac{1}{4} + \vartheta \le 3$ $\quad \vartheta \ge -\frac{7}{4}$

$4y_2 \le 1$ $\quad 4\left(\frac{1}{4} + \vartheta\right) \le 1$ $\quad 1 + 4\vartheta \le 1 \Rightarrow \vartheta \le 0$ $\quad -\frac{1}{4} \le \vartheta \le 0$

$-y_1 \le 0$ $\quad -\left(\frac{1}{4} + \vartheta\right) \le 0$ $\quad -\frac{1}{4} - \vartheta \le 0 \Rightarrow \vartheta \ge -\frac{1}{4}$ $\quad \hookrightarrow$ max

$-y_2 \le 0$ $\quad -\left(\frac{1}{4} + \vartheta\right) \le 0$ $\quad -\frac{1}{4} - \vartheta \le 0 \Rightarrow \vartheta \ge -\frac{1}{4}$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

17 SETTEMBRE 2020

$\min \ \beta x_1 + x_2 + 2x_3$

$3x_2 + x_3 \leq 1$

$\alpha x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 2$

$x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

F.S. $\min \ -\beta \bar{x}_1 + x_2 + x_3$

$3x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$-\alpha \bar{x}_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 2$

$\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Ⓐ TROVARE $\frac{\alpha}{\beta}$ t.c. -2 SIA UPPER BOUND DI F.O. CON x_1 E x_3 IN BASE NON DEGENERE

La sol. ottima è del tipo $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = 1$

$-\alpha \bar{x}_1 - x_3 = 2 \Rightarrow \bar{x}_1 = -\frac{3}{\alpha}$ $\quad -\frac{3}{\alpha} \geq 0 \Rightarrow \alpha < 0$

$-\beta \bar{x}_1 + \overset{=0}{x_2} + 2x_3 \leq -2$ $\quad +\beta \frac{3}{\alpha} + 2 \leq -2$ $\quad \frac{\beta}{\alpha} \leq -\frac{4}{3}$

Ⓑ VERIFICA α E β t.c. IL PROBLEMA SIA VUOTO

DUALE: $\max \ y_1 + 2y_2$

$-\alpha y_2 \leq -\beta$ $\quad y_2 \geq \frac{\beta}{\alpha}$ $\quad \alpha \neq 0$

$3y_1 + 3y_2 \leq 1$

$y_1 - y_2 \leq 2$

$y_1, y_2 \leq 0$

Ⓒ α, β t.c. P SIA ILL.

	$\bar{x}_1$	x_2	x_3	x_4	x_5
	$-\beta$	1	2	0	0
1	0	3	1	1	0
2	$-\alpha$	3	-1	0	1

$\beta > 0$ per il ratio test

Se $\alpha > 0$ il ratio test non si può fare perché $\frac{2}{-\alpha} < 0$

per cui il problema è illimitato

Ⓓ $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ VEDI SE $[0,0,0]^T$ È OTTIMO

$\min \ \bar{x}_1 + x_2 + 2x_3$

$3x_2 + x_3 + x_4 = 1$

$-\bar{x}_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 2$

$\bar{x}_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

$S_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(D) $\max \ y_1 + 2y_2$

$-y_2 \leq 1$

$3y_1 + 3y_2 \leq 1$

$y_1 - y_2 \leq 2$

$y_1 \leq 0$

$y_2 \leq 0$

$S_p \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{matrix}$ $\quad \bar{y} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$0 \leq 1$

$0 \leq 1$

$0 \leq 2$

$0 = 0$

$0 = 0$

ok OTTIMO DUALE ⇒ OTTIMO PRIMALE

19 SETTEMBRE 2019

$$\min \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2$$

$$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ESERCIZIO 2

$\min \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$

$3x_1 + 2x_2 \le 12 - \alpha$

$4x_1 - x_2 - 6x_3 \ge 2$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$x^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è sol. OTTIMA

Deve essere ammissibile

$6x_1 \le 12 - \alpha \Rightarrow \alpha \le 6$

$2 \ge 2$ Per $\alpha \le 6$ la sol. è ammissibile

$2, 0, 1 \ge 0$

② α, β, γ PER FORMA CANONICA DEL SIMP. PRIMALE

Per essere di forma canonica $A\bar{x} \leq b$ con $b \geq 0$

$$\min \ \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \alpha$$

$$-4x_1 + x_2 + 6x_3 \leq -2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

19 SETTEMBRE 2019

ESERCIZIO 1

$\min\ 2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2$

$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\min\ 2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2$

$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 + x_5 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

(A) $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^{3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ SONO SBA!

1: $12 = 12$; $10 \geq 2$; $4 \leq 4$ OK, $4, 0, 2 \geq 0$ $\quad x_4 = 8 \quad x_5 = 0 \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ é SBA

2: $12 = 12$; $12 \geq 2$; $\frac{3}{2} \leq 4$ OK, $0, 6, 0 \geq 0$ $\quad x_4 = 10 \quad x_5 = \frac{5}{2} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 10 \\ 5/2 \end{bmatrix}$ é SBA

3: $12 = 12$; $13 \geq 2$; $\frac{25}{8} \leq 4$; $1, 9/2, 0 \geq 0$ $\quad x_4 = 11 \quad x_5 = \frac{7}{8} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \\ 11 \\ 7/8 \end{bmatrix}$ non é SBA

(B) LE SBA SONO OTTIME?

DUALE: $\max\ 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$

$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2$

$2y_1 + 2y_2 + \frac{1}{4}y_3 \leq -3$

$-3y_2 - 2y_3 \leq 1$

$y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \geq 0 \quad y_3 \leq 0$

Sd $\begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ -3 - 2y_1 - 2y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Sp $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} y_1 = 0 \\ 2 - \cancel{3y_1} - 4y_2 - 2y_3 = 0 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 0 \\ 2y_3 = 2 - 4y_2 \\ 1 + 3y_2 + 2 - 4y_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 5 \end{cases}$ ↪ NO

NO OTTIMA

Sd $\begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ -3 - 2y_1 - 2y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ \text{?} \end{cases}$

Sp $\begin{pmatrix} 10 \\ 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

(C) $\exists$ SOL. AMMISS. DEL DUALE PARI A 8? PERCHÉ?

ESERCIZIO 2

$\min \ \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$ F.S. $\min \ \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \alpha$ $\qquad 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 - \alpha$

$4x_1 - x_2 - 6x_3 \geq 2$ $\qquad 4x_1 - x_2 - 6x_3 - x_5 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

1) $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é ottima

Affinché ammissibile $6 \leq 12 - \alpha \Rightarrow \alpha \leq 6$

DUALE: $\max \ (12-\alpha) y_1 + 2y_2$

$3y_1 + 4y_2 \leq \beta$

$2y_1 - y_2 \leq -\gamma$

$-6y_2 \leq -1$

$y_1 \leq 0 \quad y_2 \geq 0$

$$\begin{pmatrix} \beta - 3y_1 - 4y_2 \\ -\gamma - 2y_1 + y_2 \\ -1 + 6y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \beta - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ -1 + 6y_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \frac{\beta}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\beta}{3} - \frac{2}{9} \\ y_2 = 1/6 \end{cases}$$

$$3\left(\frac{\beta}{3} - \frac{2}{9}\right) + \frac{4}{6} \leq \beta \qquad \beta - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \leq \beta \qquad \beta \leq \beta \ \text{ok}$$

$-1 \leq 1$ ok

$$2\left(\frac{\beta}{3} - \frac{2}{9}\right) - \frac{1}{6} \leq -\gamma \Rightarrow \frac{2}{3}\beta - \frac{4}{9} - \frac{1}{6} \leq -\gamma$$

$$\frac{2}{3}\beta - \frac{11}{18} \leq -\gamma$$

$$\frac{\beta}{3} - \frac{2}{9} \leq 0 \Rightarrow \frac{\beta}{3} \leq \frac{2}{9} \Rightarrow \beta \leq \frac{2}{3}$$

La sol. é ottima per $\alpha \leq 6$, $\beta \leq \frac{2}{3}$, $\gamma \leq -\frac{2}{3}\beta + \frac{11}{18}$ CASO $\alpha = 6$

CASO $\alpha < 6$ $\quad y_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} \beta - 3y_1 - 4y_2 \\ -\gamma - 2y_1 + y_2 \\ -1 + 6y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \beta = \frac{2}{3} \\ y_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$2y_1 - y_2 \leq -\gamma \Rightarrow -\frac{1}{6} \leq -\gamma \Rightarrow \gamma \leq \frac{1}{6}$$

La sol. é ottima per $\alpha < 6$, $\beta = \frac{2}{3}$, $\gamma \leq \frac{1}{6}$

21 FEBBRAIO 2020

ESERCIZIO 1

$\min -6x_1 - x_2 + x_3$

$x_1 + 2x_2 - x_3 \le 12$

$\alpha x_1 + x_2 + \beta x_3 \ge \frac{3}{2}$

$x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0$

$\min -6x_1 - x_2 + x_3$

$x_1 + 2x_2 - x_3 + S_1 = 12$

$\alpha x_1 + x_2 + \beta x_3 - S_2 = \frac{3}{2}$

$x_1 \le 0, x_2 \le 0, x_3 \ge 0, S_1, S_2 \ge 0$

• $\exists\ \alpha, \beta$ t.c. IL PROBLEMA SIA VUOTO?

$\underset{\le 0}{\alpha x_1} + \underset{\le 0}{x_2} + \underset{\ge 0}{\beta x_3} \ge \frac{3}{2}$

Se prendo $\alpha \ge 0$ e $\beta \le 0$ il 2° vincolo può non essere verificato perché avremmo la somma di 3 valori neg.

ESERCIZIO 2

$\min\ 3x_1 - x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 - x_3 \le 8$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 1$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

F.S. $\min\ 3x_1 - x_2 + x_3$

$x_1 + x_2 - x_3 + S_1 = 8$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 - S_2 = 1$

$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \ge 0$

$S_1 = 8 - x_1 - x_2 + x_3$

$S_2 = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 1$

• TROVA SBA E VERIFICA SIA OTTIMA

2 VINCOLI → 2 VAR. POS. Scelgo $x_1, x_2 > 0$ $(x_3, S_1, S_2 = 0)$

$\begin{cases} 8 - x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 8 - x_1 \\ 2x_1 - 8 + x_1 - 1 = 0 \end{cases}$ $x_2 = 5$

$3x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ VERIFICO AMM. $3+5 \le 8$ ok, $6-5 \ge 1$ ok, $3, 5, 0 \ge 0$ ok

È SBA verifico ottimo

DUALE $\max\ 8y_1 + y_2$

$y_1 + 2y_2 \le 3$

$y_1 - y_2 \le -1$

$-y_1 + 3y_2 \le 1$

$y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0$

$\begin{pmatrix} 3 - y_1 - 2y_2 \\ -1 - y_1 + y_2 \\ 1 + y_1 - 3y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 3 - y_1 - 2y_2 = 0 \\ -1 - y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3 + 1 - y_2 - 2y_2 = 0 \\ y_1 = -1 + y_2 \end{cases}$ $\Rightarrow 3y_2 = 4 \Rightarrow y_2 = \frac{4}{3}$

$y_1 = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

NO

ESERCIZIO 3

$\min\ 4x_1 + 8x_2 - x_3$

$x_1 - x_2 + 3x_3 \le 6$

$3x_1 + x_2 - 4x_3 \le 10$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0$

F.S. $\min\ 4x_1 + 8x_2 + \bar{x}_3$

$x_1 - x_2 + -3\bar{x}_3 + S_1 = 6$

$3x_1 + x_2 + 4\bar{x}_3 + S_2 = 10$

$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \ge 0$

CALCOLO LB DELL' OTTIMO. A CHE DISTANZA SI TROVA IL LB DALLA SOL. OTTIMA?

Dato che $\underset{\ge 0}{4x_1} + \underset{\ge 0}{8x_2} - \underset{\le 0}{x_3}$ un LB è 0

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2
	4	8	1	0	0
6	1	-1	-3	1	0
10	3	1	4	0	1

OTTIMO $f(x^*) = 0$ distanza è pari a 0

ESERCIZIO 4

$\min \; 10x_1 - 7x_2 + 4x_3$

$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 5 + \alpha$

$2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 2$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$\max \; (5+\alpha) y_1 + 2y_2$

$y_1 + 2y_2 \le 10$

$2y_1 - y_2 \le -7$

$-3y_1 + 5y_2 \le 4$

$y_1, y_2 \le 0$

$$\begin{pmatrix} 10 - y_1 - 2y_2 \\ -7 - 2y_1 + y_2 \\ 4 + 3y_1 - 5y_2 \end{pmatrix}$$

PER $\alpha > 0$ IL PROBLEMA É ILL? PERCHÉ?

22 GENNAIO 2020

$$\min \; 2x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad\qquad \min \; 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 = 12 \qquad\qquad 3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2 \qquad\qquad 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - S_1 = 2$$

$$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4 \qquad\qquad 2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 + S_2 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

A) $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ SONO SBA?

1: $12 = 12$; $10 \geq 2$; $4 \leq 4$; $4, 0, 2 \geq 0$ OK AMM $S_1 = 8$, $S_2 = 0$ x^1 é SBA

2: $12 = 12$; $12 \geq 2$; $\frac{3}{2} \leq 4$; $0, 6, 0 \geq 0$ OK AMM. $S_1 = 10$ $S_2 = 5/2$ x^2 é SBA

3: $12 = 12$; $13 \geq 2$; $2 + \frac{9}{8} \leq 4$ OK AMM. NO SBA

B) SONO OTTIME LE SBA?

DUALE $\max \; 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$

$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2$$

$$2y_1 + 2y_2 + \frac{1}{4}y_3 \leq -3$$

$$-3y_2 - 2y_3 \leq 1$$

$$y_1 \in \mathbb{R}, \; y_2 \geq 0, \; y_3 \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ -3 - 2y_1 - 2y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$S_p \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ 2 - 4y_2 - 2y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -5 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \; 2 - 4y_2$$

$$1 - y_2 + 2 = 0 \Rightarrow y_2 = 3$$

$$6 - \frac{5}{4} \leq -3 \quad \text{NO} \quad x_1 \text{ NO SBA}$$

$$\begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ -3 - 2y_1 - 2y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ -\frac{1}{4}y_3 = 3 \Rightarrow y_3 = -12 \end{cases}$$

$$S_p \begin{pmatrix} 10 \\ 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$-3 - \frac{1}{4}y_3 = 0 \qquad + \frac{1}{4}y_3 = -3 \qquad y_3 = -12$$

$$24 \leq 1 \quad \text{NO}$$

C) VALORE DEL DUALE PARI A 8?

(D) $y^0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2$

$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 + x_5 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

(D)

max $12y_1 + 2y_2 + 4y_3$

$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2$

$2y_1 + 2y_2 + \frac{1}{4}y_3 \leq -3$

$-3y_2 - 2y_3 \leq 1$

$-y_2 \leq 0$

$y_3 \leq 0$

$y_1 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ -3 - 2y_1 - 2y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

PR

min $a_1 + a_2 + a_3$

$a_1 = 12$

$a_2 - x_4 = 2$

$a_3 + x_5 = 4$

		x_4	x_5	a_1	a_2	a_3
		0	0	1	1	1
	12	0	0	1	0	0
	2	-1	0	0	1	0
	4	0	1	0	0	1

		x_4	x_5	a_1	a_2	a_3
	-18	1	-1	0	0	0
a_1	12	0	0	1	0	0
a_2	2	-1	0	0	1	0
a_3	4	0	1	0	0	1

$\xrightarrow{R_0 + R_3}$

		x_4	x_5	a_1	a_2	a_3
	-14	1	0	0	0	1
a_1	12	0	0	1	0	0
a_2	2	-1	0	0	1	0
x_5	4	0	1	0	0	1

$x_5 = 4$

$a_1 = 12$

$a_2 = 2$

$z_{PR} = 14 > 0$

DR

max $12\pi_1 + 2\pi_2 + 4\pi_3$

$-\pi_2 \leq 0$

$\pi_3 \leq 0$

$\pi_1 \leq 1$

$\pi_2 \leq 1$

$\pi_3 \leq 1$

$\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \pi_1 \\ 1 - \pi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + \theta \\ \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calco θ

$3(-2 + \theta) + 4\theta \leq 2$

$2(-2 + \theta) + 2\theta \leq -3$ $\quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}$ ↳ MAX

$-3\theta \leq 1$

$-\theta \leq 0$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} -7/4 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2ª ITER.

$$S_D = \begin{pmatrix} 2 - 1 + \frac{21}{4} \\ 7/2 - \frac{1}{2} - 3 \\ 1 + 3/4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/4 \\ 0 \\ 7/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

(PR) min $a_1 + a_2 + a_3$

$a_1 + 2x_2 = 12$

$+ 2x_2 + a_2 - x_4 = 2$

$+ \frac{1}{4}x_2 + a_3 + x_5 = 4$

a_1, a_2, a_3, x_2, x_4

	x_2	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3
	0	0	0	1	1	1
12	2	0	0	1	0	0
2	2	-1	0	0	1	0
4	1/4	0	1	0	0	1

	x_2	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3
-18	$-\frac{17}{4}$	1	-1	0	0	0
12	2	0	0	1	0	0
2	2	-1	0	0	1	0
4	1/4	0	1	0	0	1

DA FINIRE

22/06/2020

$x_1 + 3x_3 \le 6$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 8$

$x_1 - 5x_3 \le 4$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

(A) COSTRUIRE F.O. t.c. $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ É PTO DI MINIMO

$\min \; \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$

$x^{(1)}$ é amm. perché soddisfa i vincoli.

DUALE: $\max \; 6y_1 + 8y_2 + 4y_3$

$y_1 + y_2 \le \alpha$

$y_2 \le \beta$

$3y_1 + y_2 - 5y_3 \le \gamma$

$y_1, y_2, y_3 \le 0$

$$\begin{cases} \alpha - y_1 - y_2 = 0 \\ \beta - y_2 = 0 \\ \gamma - 3y_1 - y_2 + 5y_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \alpha - \beta \\ y_2 = \beta \\ y_3 = \dfrac{3\alpha - 3\beta + \beta - \gamma}{5} \end{cases} \Rightarrow y_3 = \frac{3\alpha}{5} - \frac{2}{5}\beta - \frac{\gamma}{5}$$

$\beta \le 0 \quad = -1 \qquad y_1 = \alpha + 1 \qquad \alpha = \cdot 2 \qquad \gamma = -3$

(B) $x^{(1)}$ é SBA $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ No SBA

(C) DATA $\min \; x_1 + x_2 + x_3$ $\exists$ SOL. DUALE PARI a 1

$\nexists$ perché y_1, y_2, y_3 devono essere ≤ 0 e somma di num. negativi non può essere = a 0

22/05/2019

$$\min \; 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 8$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 6 \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$x_1 \in \mathbb{R}, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

F.S. $\min \; 2x_1 + x_2 - x_3$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$$
$$x_1 \in \mathbb{R}, \; x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

AMM: $3 \leq 8$, $7 \geq 6$, $2, 1, 1 \geq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ NO SBA

(b) PUÒ ESISTERE UN VERTICE DELLA REG. CON $x_1, x_2 > 0$?

$$\begin{pmatrix} >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 = 8 - 3x_2 \\ 16 - 6x_2 - x_2 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 8 - \frac{30}{7} \\ x_2 = \frac{10}{7} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{26}{7} \\ x_2 = \frac{10}{7} \end{cases}$$ è vertice

(c) SOL. DI BASE OTTIMA CON x_1 e x_3 IN BASE

$$\begin{pmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \end{pmatrix}$$

DUALE: $\max \; 8y_1 + 6y_2$
$$y_1 + 2y_2 = 2$$
$$3y_1 - y_2 \leq 1$$
$$-2y_1 + 4y_2 \leq -1$$
$$y_1 \leq 0, \; y_2 \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 - y_1 - 2y_2 \\ 1 - 3y_1 + y_2 \\ -1 + 2y_1 - 4y_2 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2 - y_1 - 2y_2 = 0 \\ -1 + 2y_1 - 4y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 2 - 2y_2 \\ -1 + 4 - 4y_2 - 4y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 2 - \frac{3}{4} \\ y_2 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$\overset{5/4}{\uparrow}$

$\frac{5}{4} \geq 0$ ma non è ammissibile

$\nexists$ sol. ottima

ESERCIZIO 2

$$\min \; x_1 - x_2 \qquad \min \; x_1 + \bar{x}_2$$
$$2x_1 - x_2 \leq 6 \qquad 2x_1 + \bar{x}_2 \leq 6 \qquad y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$x_1 + x_2 \geq 1 \qquad x_1 - \bar{x}_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \qquad x_1 \geq 0 \quad \bar{x}_2 \geq 0$$

(D)

F.S. $\min \; x_1 + \bar{x}_2$
$$2x_1 + \bar{x}_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 - \bar{x}_2 - x_4 = 1$$
$$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$\max \; 6y_1 + y_2$

$x_1)$ $2y_1 + y_2 \leq 1$

$x_2)$ $y_1 - y_2 \leq 1$

$x_3)$ $y_1 \leq 0$

x_4 $-y_2 \leq 0$

Sol $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $x_1=0$ $x_2=0$

$\min\ a_1+a_2$

$x_3+a_1=6$

$-x_4+a_2=1$

$x_3,x_4,a_1,a_2\geq 0$

		x_3	x_4	a_1	a_2
		0	0	1	1
	6	1	0	1	0
	1	0	-1	0	1

		x_3	x_4	a_1	a_2
	-7	-1	+1	0	0
a_1	6	1	0	1	0
a_2	1	0	-1	0	1

$R_0\to R_0+R_1$

	-1	0	0	1	0
x_3	6	1	0	1	0
a_2	1	0	-1	0	1

$\bar{x}^{(1)}\begin{pmatrix}6\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ $z=1$

(DR)

$\max\ 6\pi_1+\pi_2$

$\pi_1\leq 0$

$-\pi_2\leq 0$

$\pi_1\leq 1$

$\pi_2\leq 1$

$\pi_1,\pi_2\in\mathbb{R}$

$\begin{cases}\pi_1=0\\ 1-\pi_2=0 \Rightarrow \pi_2=1\end{cases}$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$y^{(1)}=y^0+\vartheta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\\vartheta\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\\vartheta\end{pmatrix}$

$\vartheta\leq 1$ $\quad\vartheta\leq 1$

$-\vartheta\leq 1$ $\quad\vartheta\geq -1$

$0\leq 0$

$-\vartheta\leq 0$ $\quad\vartheta\geq 0$

$0\leq\vartheta\leq 1$

↳ SCELGO 1 perché MAX

$y^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Sostituisco y' nel duale

$1\leq 1$

$-1\leq 1$

$0\leq 0$ OK AMMISS.

$-1\leq 0$

$\begin{pmatrix}1-2y_1-y_2\\1-y_1+y_2\\-y_1\\y_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$ $x_2=0$ $x_4=0$

PA. $\min\ a_1+a_2$

$2x_1+x_3+a_1=6$

$x_1+a_2=1$

$x_1,x_3,a_1,a_2\geq 0$

		x_1	x_3	a_1	a_2
		0	0	1	1
a_1	6	2	1	1	0
a_2	1	1	0	0	1

	-7	-3	-1	0	0
a_1	6	2	1	1	0
a_2	1	1	0	0	1

$\longrightarrow$ $R_1\to R_1-2R_2$ $R_0\to R_0+3R_2$

	-4	0	-1	0	3
a_1	4	0	1	1	-2
x_1	1	1	0	0	1

$\longrightarrow$ $R_0\to R_0+R_1$

	0	0	0	1	1
x_3	4	0	1	1	-2
x_1	1	1	0	0	1

$z=0$ a_1, a_2 fuori base sol. ottima

$\begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix}$

26/06/2019

$\min\ 2x_1 - 3x_2 + x_3$ $\longrightarrow$ $\min\ 2x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$

$x_1 + 2x_2 \le 6$ — $x_1 - 2\bar{x}_2 + S_1 = 6$

$x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 6$ — $x_1 + \bar{x}_2 + 3x_3 - S_2 = 6$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0$ — $x_1 \ge 0,\ \bar{x}_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x^{3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1: AMMISS. OK $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NO SBA

2: $2 \le 6,\ 8 \ge 6,\ 2 \ge 0$ ok $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ NO SBA

3: $1 \le 6,\ 7 \ge 6$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ NO SBA

DUALE: $\max\ 6y_1 + 6y_2$

$y_1 + y_2 \le 2$

$-2y_1 + y_2 \le +3$

$3y_2 \le 1$

$y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0$

b) Sol. OTTIMA x_3 in base

Per essere in base x_3 e un altro componente > 0. Scelgo $S_1 > 0$

Risolvendo $S_1 = 6$

$3x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 2$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ é ottima. Verifichiamolo con le compl.

$S_p \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} y_1 = 0 \\ 1 - 3y_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ $\longrightarrow$ Soddisfa ammiss. duale. È ottima

1.3 $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$S_d \begin{pmatrix} 2 - y_1 - y_2 \\ +3 + 2y_1 - y_2 \\ 1 - 3y_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ +3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$

PR $\min\ a_1 + a_2$

$x_4 + a_1 = 6$

$-x_5 + a_2 = 6$

$x_4, x_5, a_1, a_2 \ge 0$

	x_4	x_5	a_1	a_2
	0	0	1	1
6	1	0	1	0
6	0	-1	0	1

	x_4	x_5	a_1	a_2
-12	-1	1	0	0
6	$\boxed{1}$	0	1	0
6	0	-1	0	1

$\xrightarrow{R_0 + R_1}$

		x_4	x_5	a_1	a_2
	-6	0	1	1	0
x_4	6	1	0	1	0
a_2	6	0	-1	0	1

$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ $z = 6$ NO OTTIMA

(DR) max $6\pi_1 + \pi_2$

$\pi_1 \le 0$
$-\pi_2 \le 0$
$\pi_1 \le 1$
$\pi_2 \le 1$
$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1-\pi_2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $y^{(1)} = y^0 + \vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta \end{pmatrix}$

Sost. nel duale

$\vartheta \le 2$

$\vartheta \le +3$ $\quad 0 \le \vartheta \le \frac{1}{3}$ $\quad y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$\vartheta \le \frac{1}{3}$ $\quad \downarrow$ MAX

$\vartheta \ge 0$

Sd $\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{3} \\ 3-1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 8/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_1 = 0$, $x_2 = 0$

PR

min $a_1 + a_2$

$x_4 + a_1 = 6$

$+3x_3 - x_5 + a_2 = 6$

$x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \ge 0$

	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2
	0	0	0	1	1
6	0	1	0	1	0
6	3	0	-1	0	1

-12	-3	-1	1	0	0
6	0	1	0	1	0
6	3	0	-1	0	1

$\xrightarrow[R_2 \to R_2/3]{R_0 \to R_0 + R_2}$

	-6	0	-1	0	0	1
a_1	6	0	1	0	1	0
x_3	2	1	0	-1/3	0	1/3

$\xrightarrow{R_0 \to R_0 + R_1}$

	0	0	0	0	1	1
x_4	6	0	1	0	1	0
x_3	2	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

31 GENNAIO 2020

$\min\ 2x_1 + x_2 - 2x_3$ $\qquad$ $\min\ 2x_1 + x_2 - 2x_3$

$y_1 \quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 8$ $\qquad$ $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + S_1 = 8$ $\qquad$ $S_1 = 5$

$y_2 \quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 6$ $\qquad$ $2x_1 - x_2 + 4x_3 - S_2 = 6$ $\qquad$ $S_2 = 1$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$ $\qquad$ $x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \ge 0$

(A) $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad 3 \le 8$ ok, $\ 7 \ge 6$ ok, $\ 2,1,1 \ge 0$ ok $\qquad$ OK AMM.

No SBA perché # vincoli è diverso dalle # delle variabili positive

(B) MODIFICA P t.c. $\bar{x}$ SIA SBA

$\min\ 2x_1 + x_2 - 2x_3$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 8$ $\qquad$ F.S. $\quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + S_1 = 8$ $\qquad$ $S_1 = 0$

$x_1 + 4x_3 \ge 6$ $\qquad$ $x_1 + 4x_3 - S_2 = 6$ $\qquad$ $S_2 = 0$

$2x_1 + x_2 \le 5$ $\qquad$ $2x_1 + x_2 + S_3 = 5$ $\qquad$ $S_3 = 0$

$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0$

(C) $\exists$ un VERTICE CON x_1 e $x_2 > 0$

$\begin{pmatrix} >0 \\ >0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x_1 + 3x_2 = 8 \Rightarrow x_1 = 8 - 3x_2$ $\qquad$ $x_1 = 8 - \frac{30}{7} = \frac{26}{7} > 0$ $\quad$ Quindi è SBA

$2x_1 - x_2 = 6 \Rightarrow 16 - 6x_2 - x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = \frac{10}{7}$

(D) $\exists$ SOL. OTTIMA CON x_1 E x_3 IN BASE?

$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\max\ 8y_1 + 6y_2$

$x_1 \quad y_1 + 2y_2 \le 2$

$x_2 \quad 3y_1 - y_2 \le 1$

$x_3 \quad -2y_1 + 4y_2 \le -2$

$y_1 \le 0,\ y_2 \ge 0$

Sd $\begin{pmatrix} 2 - y_1 - 2y_2 \\ 1 - 3y_1 + y_2 \\ -2 + 2y_1 - 4y_2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{cases} 2 - y_1 - 2y_2 = 0 \\ -2 + 2y_1 - 4y_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y_1 = 2 - 2y_2 \\ -2 + 4 - 4y_2 - 4y_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y_1 = 2 - \frac{1}{2} \\ -8y_2 = -2 \end{cases}$ $\quad y_2 = \frac{1}{4}$

ASSURDO < 0 $\leftarrow$ $3/2$

(E) UPPER BOUND E LOWER BOUND

MINIMO $\Rightarrow c^T x \ge b^T y$

Dato che il duale non ammette sol. (è vuoto) il primale è illimitato per cui non ammette LB perché illimitato inferiormente

(F) ALGORITMO PRIMALE DUALE $\quad y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

F.S. $\quad \min\ 2x_1 + x_2 - 2x_3$ $\qquad$ $\max\ 8y_1 + 6y_2$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$ $\qquad$ $y_1 + 2y_2 \le 2$

$2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$ $\qquad$ $3y_1 - y_2 \le 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$ $\qquad$ $-2y_1 + 4y_2 \le -2$

$y_1 \le 0$

$-y_2 \le 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

PROVE LC

COMPITO 1

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 \le 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1 - 5x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \xrightarrow{F.S.} \begin{cases} x_2 + 3x_3 + S_1 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + S_2 = 8 \\ x_1 - 5x_3 + S_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \ge 0 \end{cases}$$

(A) $x^{(1)} = [3\ 5\ 0]^T$ $\quad x^{(2)} : [4\ 4\ 0]^T$ $\quad x^{(3)} = [7/2\ \ 9/2\ \ 0]$ SONO SBA?

1: $5 \le 5$; $8 \le 8$; $3 \le 4$; $3, 5, 0 \ge 0$ OK AMMISS.

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$ $\quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 3 vincoli 3 var. positive

$x^{(1)}$ é SBA.

2: $4 \le 5$ OK, $8 \le 8$ OK; $4 \le 4$ OK; $4, 4, 0 \ge 0$ OK É AMM.

$S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ $\quad \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ x^2 é SBA

3: $9/2 \le 5$ OK; $8 \le 8$ OK; $\frac{7}{2} \le 4$ OK, $\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 0 \ge 0$ OK AMMISS

$S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = 0$, $S_3 = \frac{1}{2}$ $\quad \begin{bmatrix} 7/2 \\ 9/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ NO SBA

(B) COSTRUIRE UNA F.O. PER CUI:
- x^1 É PTO MINIMO
- x^2 É PTO MINIMO
- x^1 E x^2 SONO PTI DI MINIMO
- x^1, x^2, x^3 SONO PTI DI MINIMO

(c) DATA LA F.O. $\min\ x_1 + x_2 + x_3$, DIRE SE POSSA ESISTERE UNA SOL. DEL DUALE PARI A 1.

(d) ESEGUIRE 2 ITERAZIONI DEL PRIMALE-DUALE PARTENDO DA $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

COMPITO 2

ESERCIZIO 1

$$\min\ 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 = 12$$
$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2$$
$$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\xrightarrow{F.S.}$

$$\min\ 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 = 12$$
$$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - S_1 = 2$$
$$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 + S_2 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

(A) $x^{(1)} = [4\ 0\ 2]^T$ | $x^{(2)} = [0\ 6\ 0]$ | $x^{(3)} = [1\ \ 9/2\ \ 0]$ SONO SBA?

$12=12;\ 10 \geq 2;\ 4 \leq 4$ ok; $4, 0, 2 \geq 0$ ok

$S_1 = 8$
$S_2 = 0$

SBA

$12=12;\ 12 \geq 2;\ \frac{3}{2} \leq 4$; $0, 6, 0 \geq 0$ ok

$S_1 = 10$
$S_2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

SBA

$12=12;\ 13 \geq 2;\ \frac{25}{8} \leq 4$; $1, 9/2, 0 \geq 0$ ok

$S_1 = 11$
$S_2 = \frac{7}{8}$

NO SBA

(B) VERIFICA SE LE SBA SONO ANCHE <u>OTTIME</u> $\begin{cases} \langle S_p, Y \rangle = 0 \\ \langle S_d, X \rangle = 0 \end{cases}$

DUALE

$$\max\ 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$$
$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2$$
$$2y_1 + 2y_2 + \frac{1}{4}y_3 \leq -3$$
$$-3y_2 - 2y_3 \leq 1$$
$$y_1 \in \mathbb{R},\ y_2 \geq 0\ \ y_3 \leq 0$$

$$S_d: \begin{pmatrix} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ -3 - 2y_1 - 2y_2 - \frac{1}{4}y_3 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 \end{pmatrix} \bar{X}$$

$x^{(1)}$: $S_{p1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \bar{Y}$ $\begin{cases} 2 - 3y_1 - 2y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $2 \leq 2$; $2 - \frac{1}{8} \leq -3$ NO NON È OTTIMO

$x^{(2)}$: $S_{p2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 5/2 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} -3 - 2y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{3}{2} \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$

OK AMM. NEL DUALE

$x^{(2)}$ è ottimo

(C) PUÒ ESISTERE UNA SOL. AMMISSIBILE DEL DUALE DI VALORE PARI A 8?

ESERCIZIO 2

$\min \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12 \cdot \alpha$

$4x_1 - x_2 - 6x_3 \geq 2$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

(A) PER QUALI α, β, γ $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ É OTTIMO?

Intanto é ammissibile $\Leftrightarrow$ $6 + 0 \leq 12 - \alpha$ $\Rightarrow \alpha \leq 6$

F.S. $\min \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$

$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 12 - \alpha$

$4x_1 - x_2 - 6x_3 - S_2 = 2$

$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$

DUALE $(12-\alpha)y_1 + 2y_2$

$3y_1 + 4y_2 \leq \beta$

$2y_1 - y_2 \leq -\gamma$

$-6y_2 \leq -1$

$y_1 \leq 0,\ y_2 \geq 0$

$S_d \begin{pmatrix} \beta - 3y_1 - 4y_2 \\ -\gamma - 2y_1 + y_2 \\ -1 + 6y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S_p = \begin{bmatrix} 6-\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \beta - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ -1 + 6y_2 = 0 \\ (6-\alpha)y_1 = 0 \end{cases}$$

$\alpha = 6$

$\alpha < 6$

$$\begin{cases} \beta = \frac{2}{3} \\ y_2 = -\frac{1}{2} \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

(B) α, β, γ CHE RENDONO IL PROBLEMA IN FORMA CANONICA PER IL SIMPLESSO PRIMALE

ⓒ α, β, γ RENDONO IL PROBLEMA IN FORMA CANONICA DUALE

ⓓ

COMPITO 4

$$\max \; -4x_1 + 3x_2 - x_3 \qquad \xrightarrow{F.S.} \qquad \min \; 4x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \leq 0, \; x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 3\bar{x}_2 - S_1 = 10 \\ x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - S_2 = 8 \\ x_1, \bar{x}_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

A) $x' = [10, 0, 0]^T$ | $x'' = [12, 0, 2]^T$ | $x''' = [13, -1, 0]^T$ $x^{IV} = [14, -1, 2]^T$ SONO SBA?

$10 \geq 10$; $10 \geq 8$, $10, 0, 0 \geq 0$ | $12 \geq 10$, $20 \geq 8$ $12, 0, 2 \geq 0$

$S_1 = 0$, $S_2 = 2$ $\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ | $S_1 = 2$, $S_2 = 12$ $\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$

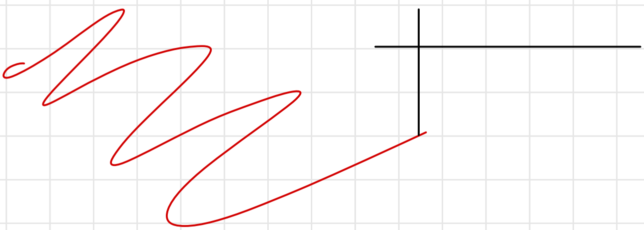
SBA | NO SBA

NO perché presentano variabili negative.

B) $\exists$ SBA CON x_2 e x_3 IN BASE?

Una SBA con x_2 e x_3 in base è del tipo: $\begin{bmatrix} 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} 3x_2 = 10 \\ x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = \frac{10}{3} \\ x_3 = \frac{7}{6} \end{cases}$ $x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 10/3 \\ 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

C) SOL. OTTIMA CON x_1 IN BASE



1.2 APPLICARE L' ALGORITMO DEL SIMPLESSO DUALE

$$\min\ 4x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3 \qquad \longrightarrow \qquad \min\ 4x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$$

$$x_1 - 3\bar{x}_2 - S_1 = 10 \qquad\qquad -x_1 + 3\bar{x}_2 + S_1 = -10$$

$$x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - S_2 = 8 \qquad\qquad -x_1 - \bar{x}_2 - 4x_3 + S_2 = -8$$

???

		x_1	$\bar{x}_2$	x_3	S_1	S_2
	0	4	3	1	0	0
S_1	-10	$\boxed{-1}$	3	0	1	0
S_2	-8	-1	-1	-4	0	1

$R_0 \to R_0 + 4R_1$

$R_2 \to R_2 - R_1$

$R_1 \to -R_1$

	-40	0	13	1	4	0
x_1	10	1	-3	0	-1	0
S_2	2	0	-4	-4	-1	1

FINE $\quad x^* = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

1.3 PRIMALE - DUALE DA $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\min\ +4x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad \xrightarrow{F.S.} \qquad \min\ 4x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3 \qquad \xrightarrow{DUALE} \qquad \max\ 10y_1 + 8y_2$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 10 \qquad\qquad x_1 - 3\bar{x}_2 - S_1 = 10 \qquad\qquad y_1 + y_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8 \qquad\qquad x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - S_2 = 8 \qquad\qquad -3y_1 + y_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0 \qquad\qquad x_1, \bar{x}_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0 \qquad\qquad 4y_2 \leq 1$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

Verifico ammissibilità nel duale: $0 \leq 4,\ 0 \leq 3,\quad 0 \leq 1 \qquad 0, 0 \geq 0$ ok

Applico $\langle S_p, Y \rangle = 0$ $\qquad S_p = \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$\langle S_d, x \rangle = 0$

$$S_d \begin{pmatrix} 4 - y_1 - y_2 \\ 3 + 3y_1 - y_2 \\ 1 - 4y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$$

PRIMALE RISTRETTO

$\min\ a_1 + a_2$

$-x_4 + a_1 = 10$

$-x_5 + a_2 = 8$

$x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0$

		a_1	a_2	x_4	x_5
		1	1	0	0
a_1	10	1	0	-1	0
a_2	8	0	1	0	-1

	-18	0	0	+1	+1
	10	1	0	-1	0
	8	0	1	0	-1

F.O. $\neq 0 \Rightarrow$ sol. no ottima

$y^1 = y^0 + \vartheta \pi$

DUALE RISTRETTO

$\max\ 10\pi_1 + 8\pi_2$

$-\pi_1 \leq 0$

$-\pi_2 \leq 0$

$\pi_1 \leq 1$

$\pi_2 \leq 1$

$\max\ (0, 1)$

$\pi^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \vartheta \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

SOSTITUISCO NEI VINCOLI DEL DUALE

$$\begin{cases} \vartheta + \vartheta \le 4 \\ -3\vartheta + \vartheta \le 3 \\ 4\vartheta \le 1 \\ \vartheta \ge 0 \end{cases} \qquad \vartheta = \frac{1}{4} \qquad y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

APPLICO COND. COMPLEMENTARITÀ

$$\begin{cases} Sd_1 = 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ Sd_2 = 3 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ Sd_3 = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} \\ Sd_4 = 1/4 \\ Sd_5 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PR. $\min a_1$

$a_1 = 10$

$4x_3 = 8$

$$\begin{array}{c|c|cc} & & a_1 & x_3 \\ \hline & & 1 & 0 \\ \hline a_1 & 10 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & a_1 & x_3 \\ \hline -10 & 0 & 0 \\ \hline 10 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{array}$$

f.o. $\neq 0$

$y^2 = y^1 + \vartheta \pi^*$

DR. $\max 10\pi_1 + 2\pi_2$

$\pi_1 \le 1$

$\pi_2 \le 0$

$$\pi^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y^2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

SOSTITUISCO NEL DUALE

$$\begin{cases} 1/4 + \vartheta + \frac{1}{4} \le 4 \\ -\frac{3}{4} - 3\vartheta + \frac{1}{4} \le 3 \\ -\frac{1}{4} - \vartheta \le 0 \end{cases} \qquad -\frac{1}{4} \le \vartheta \le \frac{7}{2}$$

$\Downarrow$

MAX

$\vartheta = \frac{7}{2}$

$$y^2 = \begin{pmatrix} 1/4 + 7/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

COMPITO 6

min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 \le 12$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 \ge 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0$

$\xrightarrow[\bar{x}_2 = -x_2 \ge 0]{F.S.}$

min $2x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$

$3x_1 - 2\bar{x}_2 + S_1 = 12$

$4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - S_2 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Ⓐ $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ SONO SBA?

1: $12 \le 12$ ok, $16 \ge 2$ ok
$12, 0, 0 \ge 0$ ok

$S_1 = 0$
$S_2 = 14$
$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}$ 2 VINCOLI 2 VAR

SBA

$6 \le 12$ $2 \ge 2$ ok
$2, 0, 2 \ge 0$ ok

$S_1 = 6$
$S_2 = 0$
$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

NO SBA

Ⓑ LA SBA RIMANE TALE SE IL PROBLEMA DIVENTA DI MAX?

Sì perché la f.o. non influenza la SBA. La regione ammissibile è determinata esclusivamente dai vincoli

Ⓒ DUALE

max $12y_1 + 2y_2$

$3y_1 + 4y_2 \le 2$

$2y_1 - y_2 \ge -3$

$-3y_2 \le 1$

$y_1 \le 0 \quad y_2 \ge 0$

$\begin{cases} 2 - 3y_1 + 4y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = \frac{3}{2} \\ y_2 = 0 \end{cases}$ sol. non ammissibile
x^1 NON è ottimo

$S_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix} \cdot \bar{y}$

Ⓓ PUÒ ESISTERE UNA S.A. DEL DUALE PARI A $\frac{16}{2}$? PERCHÉ?

Uso il teorema della dualità debole

$c^T x \ge b^T y$

$c^T x \ge \frac{16}{2} = 8$ $8 \ge 8$ SI, può esistere.

Ⓔ min $\gamma x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 \le 12 - \delta$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 \ge 2$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \ge 0$

$\xrightarrow[-x_2 = \bar{x}_2 \ge 0]{F.S.}$

min $\gamma x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$

$3x_1 - 2\bar{x}_2 + S_1 = 12 - \delta$

$4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - S_2 = 2$

$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \ge 0$

$\xrightarrow{\text{DUALE}}$

max $(12-\delta)y_1 + 2y_2$

$3y_1 + 4y_2 \le \gamma$

$-2y_1 + y_2 \le 3$

$-3y_2 \le 1$

$y_1 \le 0$

$-y_2 \le 0 \Rightarrow y_2 \ge 0$

$x^3 = [1\ 0\ 0]^T$ OTTIMO.

VERIFICO AMM. PER LIMITARE δ $3 \le 12 - \delta$ $\delta \le 9$

$S_1 = 12 - \delta - 3 = 9 - \delta$

$S_2 = 2$

$\begin{pmatrix} 9 - \delta \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \gamma - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ $0 \le \gamma \le 3$

$\wedge$

$\begin{cases} \gamma - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $-\frac{3}{2} \le \gamma \le 0$

$-\frac{3}{2} \le \gamma \le 3 \ \wedge\ \delta \le 9$

$\Rightarrow$ RIFARE

COMPITO 7 ✓ PERFETTA

ESERCIZIO 1

$$\min\ 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad \min\ 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 8 \qquad\qquad x_1 + 3x_2 - 2x_3 + S_1 = 8$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 6 \qquad\qquad 2x_1 - x_2 + 4x_3 - S_2 = 6$$

$$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \qquad\qquad x_1 \in \mathbb{R},\ x_2, x_3, S_1, S_2 \ge 0$$

(A) $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é SBA?

No perché le variabili positive devono essere 2. # VINCOLI ≠ # VAR POSITIVE per cui $\bar{x}$ non é SBA

(B)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{matrix} \qquad \begin{cases} x_1 + 6x_1 - 18 = 8 \\ x_2 = 2x_1 - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{26}{7} \\ x_2 = \frac{52-42}{7} = \frac{10}{7} \end{cases}$$

$x_1, x_2 > 0$ OK.

(C) SBA ottima con x_1 e x_3 in base

$$\begin{pmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{STAND.}} \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 8 + 2x_3 \\ 16 + 4x_3 + 4x_3 = 6 \end{cases} \qquad \{\, 8x_3 = -10 \Rightarrow x_3 = -\frac{5}{4} < 0$$

non é in base.

ESERCIZIO 2

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min\ x_1 - x_2 \qquad\qquad \min\ x_1 + \bar{x}_2$$

$$2x_1 - x_2 \le 6 \quad \longrightarrow \quad 2x_1 + \bar{x}_2 + x_3 = 6$$

$$x_1 + x_2 \ge 1 \qquad\qquad x_1 - \bar{x}_2 - x_4 = 1$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0 \qquad\qquad x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4 \ge 0$$

(D) $\max\ 6y_1 + y_2$

$$2y_1 + y_2 \le 1$$
$$y_1 - y_2 \le 1$$
$$y_1 \le 0$$
$$-y_2 \le 0$$
$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{matrix}$$

(DR) $\max\ 6\pi_1 + \pi_2$

$$\pi_1 \le 0$$
$$-\pi_2 \le 0$$
$$\pi_1 \le 1$$
$$\pi_2 \le 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 - \pi_1 \\ 0 + \pi_2 \\ 1 - \pi_1 \\ 1 - \pi_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \pi_1 = 0 \\ 0 \\ 0 \\ \pi_2 = 1 \end{pmatrix}$$

(PR) $\min\ a_1 + a_2$

$$x_3 + a_1 = 6$$
$$-x_4 + a_2 = 1$$
$$a_1, a_2, x_3, x_4 \ge 0$$

		x_3	x_4	a_1	a_2
		0	0	1	1
	6	1	0	1	0
	1	0	-1	0	1

	-7	-1	1	0	0
	6	$\boxed{1}$	0	1	0
	1	0	-1	0	1

$R_0 \mapsto R_1 + R_0 \longrightarrow$

	-1	0	1	1	0
x_3	6	$\boxed{1}$	0	1	0
a_2	1	0	-1	0	1

$x_3 = 6 \qquad z_{PR} = 1 > 0$

$a_2 = 1$

$$y^1 = y^0 + \vartheta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta \end{pmatrix}$$

SOST. NEL DUALE

$$\vartheta \le 1$$
$$-\vartheta \le 1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 1$$
$$0 \le 0$$
$$\vartheta \ge 0$$

$$y^1 = y^0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↳ verifico ammissibilità

$$0 \le 1 \qquad 0 \le 0$$
$$-1 \le 1 \qquad -1 \le 0$$

OK

Sd $\begin{pmatrix} 1-0-1 \\ 1-0+1 \\ 0-0 \\ 0+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $x_2 = 0$ $x_4 = 0$

PA $\min\ a_1 + a_2$

$2x_1 + a_1 + x_3 = 6$

$x_1 + a_2 = 1$

$x_1, a_1, a_2 \geq 0$

		x_1	x_3	a_1	a_2
		0	0	1	1
	6	2	1	1	0
	1	1	0	0	1

		x_1	x_3	a_1	a_2
	-7	-3	-1	0	0
a_1	6	2	1	1	0
a_2	1	1	0	0	1

$R_1 \to R_1 - 2R_2$
$R_0 \to R_0 + 3R_2$

		x_1	x_3	a_1	a_2
	-4	0	-1	0	3
a_1	4	0	1	1	-2
x_1	1	1	0	0	1

$R_0 \to R_0 + R_1$

		x_1	x_3	a_1	a_2
	0	0	0	1	1
x_3	4	0	1	1	-2
x_1	1	1	0	0	1

$z_{PA} = 0$ y^2 é ottima

$x^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

COMPITO 8

PROBLEMA 2

$$\max \; 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 10x_4$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 \le 2 \qquad y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 \le 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

F.S. $\min \; -3x_1 - x_2 - 8x_3 - 10x_4$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 2$$

$$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 + x_6 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

(D) $\max \; 2y_1 + 5y_2$

$$3y_1 + 4y_2 \le -3 \qquad 12 \le -3 \quad \text{NO AMM.}$$

$$y_1 + 3y_2 \le -1 \qquad \text{Cerco altro punto}$$

$$4y_1 + 3y_2 \le -8 \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$6y_2 \le -10$$

$$y_1 \le 0$$

$$y_2 \le 0$$

$$Sd = \begin{pmatrix} -3 - y_1 - 4y_2 \\ -1 - y_1 - 3y_2 \\ -8 - 4y_1 - 3y_2 \\ -10 - 6y_1 \\ -y_1 \\ -y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 + 1 + 8 \\ -1 + 1 + 6 \\ -8 + 4 + 6 \\ -10 + 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

PR $\min \; a_1 + a_2$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 5$$

$$a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

		1	1
	2	1	0
	5	0	1

	-7	0	0
a_1	2	1	0
a_2	5	0	1

DR $\max \; 2\pi_1 + 5\pi_2$

$$\pi_1 \le 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 - \pi_1 \\ 1 - \pi_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 \le 1$$

$$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = y^1 + \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \vartheta \\ -2 + \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\cancel{-3} + 3\vartheta - 8 + 4\vartheta \le \cancel{-3} \qquad \vartheta \le 8/7$$

$$\cancel{-1} + \vartheta - 6 + 3\vartheta \le \cancel{-1} \qquad \vartheta \le 3/2$$

$$-4 + 4\vartheta - 6 + 3\vartheta \le -8 \qquad \vartheta \le 2/7 \qquad -1 \le \vartheta \le \frac{2}{7} \qquad y^2 = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2}{7} \\ -2 + 2/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/7 \\ -12/7 \end{pmatrix}$$

max

$$-12 + 6\vartheta \le -10 \qquad \vartheta \le 1/3$$

ammissibile?

$$-1 + \vartheta \le 0 \qquad \vartheta \ge -1$$

$$-2 + \vartheta \le 0 \qquad \vartheta \ge -2$$

PROBLEMA 3

$\max \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3$

$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -4$

$x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

(a) $x^1 = [0\ 4\ 2\ 0\ 0]^T \quad x^2 = [2\ 0\ 0\ 6\ 0]^T$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$-8+4=-4 \qquad 2-6=-4$

$4-2=2 \qquad 2=2$

Entrambi ammissibili. 2 vincoli, 2 var >0 perché S_1 e S_2 sono $=$ a 0

Verifichiamo l'ottimalità

$\min \; -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad \max \; 4y_1 + 2y_2$

$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \qquad -y_1 + y_2 \leq -1$

$x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 2 \qquad 2y_1 + y_2 \leq -2$

$-2y_1 - y_2 \leq 2$

$y_1 \leq 0$

$-y_2 \leq 0$

Sol $\begin{pmatrix} -1 + y_1 - y_2 \\ -2 - 2y_1 - y_2 \\ 2 + 2y_1 + y_2 \\ -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -2-2y_1-y_2=0 \\ 2+2y_1+y_2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2 = -2-2y_1 \\ 0=0 \end{cases}$

Sol $\begin{pmatrix} -1 + y_1 - y_2 \\ -2 - 2y_1 - y_2 \\ 2 + 2y_1 + y_2 \\ -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -1-y_2=0 \Rightarrow y_2=-1 \\ y_1=0 \end{cases}$

no ammissibile