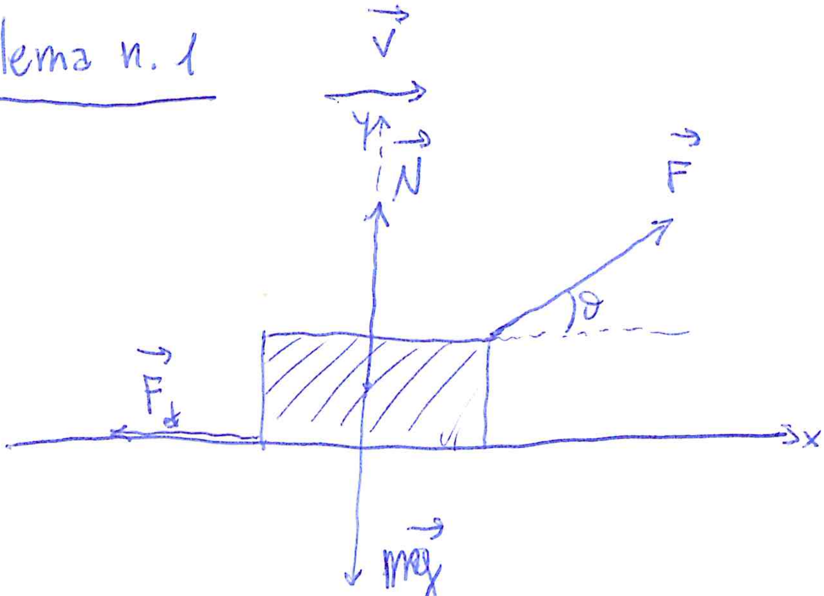
CORSO DI FISICA PER INFORMATICA A.A. 2022-2023

SECONDO APPELLO ESTIVO 17/07/2023

Problema n. 1

a)



Come suggerito dal testo dell'esercizio, usiamo lo schema qui a sinistra, e fissiamo il sistema di assi cartesiani indicato.

$\vec{N}$: reazione vincolare normale del piano

$\vec{F}_d$: forza di attrito dinamico

Poiché la cassa si muove di moto rettilineo lungo l'asse orizzontale, la componente verticale della forza risultante agente sulla cassa deve essere nulla. Allora, posto $|\vec{N}| = N$ e $|\vec{F}| = F$:

$$F_{r,y} = N_y + F_y + (m\vec{g})_y = N + F\sin\theta - mg = 0,$$ da cui

$N = mg - F\sin\theta$; affinché la cassa sia in contatto con il piano orizzontale, deve risultare $N \geq 0$, cioè

$$mg - F\sin\theta \geq 0 \Rightarrow F\sin\theta \leq mg \Rightarrow F \leq \frac{mg}{\sin\theta}.$$

Pertanto, il massimo valore che $|\vec{F}| = F$ può assumere affinché la cassa non si sollevi dal piano orizzontale è

$$\boxed{F_M = \frac{mg}{\sin\theta} = \frac{(10\ kg)\cdot(9{,}81\ m\ s^{-2})}{\sin 30°} = 196{,}2\ N}$$

b) Per la prima legge della dinamica, in questo caso deve risultare

$$\vec{F}_{ris} = 0 \Rightarrow \vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_d = 0 \quad , \quad \text{cioè:}$$

$$\begin{cases} N_x + F_x + (m\vec{g})_x + F_{d,x} = 0 \\ N_y + F_y + (m\vec{g})_y + F_{d,y} = 0 \end{cases}$$

; poniamo $|\vec{F}| = F_1$ in questo caso (vedi testo del problema).

La seconda equazione è identica a quella ottenuta nella risoluzione del punto a). Per la prima equazione, otteniamo: $N_x = 0$, $F_x = F_1 \cos\theta$, $(m\vec{g})_x = 0$, $F_{d,x} = -\mu_d N$

$$\begin{cases} F_1 \cos\theta - \mu_d N = 0 \\ N = mg - F_1 \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1 \cos\theta - \mu_d (mg - F_1 \sin\theta) = 0 \\ N = mg - F_1 \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\cos\theta + \mu_d \sin\theta) F_1 = \mu_d mg \\ N = mg - F_1 \sin\theta \end{cases}$$

Infine:

$$\boxed{F_1 = \frac{\mu_d mg}{\cos\theta + \mu_d \sin\theta} = \frac{0{,}15 \cdot (10\,kg) \cdot (9{,}81\,m\,s^{-2})}{\cos 30° + 0{,}15 \cdot \sin 30°} \simeq 15{,}64\,N}$$

c) Dato $|\vec{F}| = F_1$, con θ variabile, scriviamo l'equazione del moto della cassa lungo l'asse x:

$$m a_x = F_1 \cos\theta - \mu_d N \,, \quad \text{con } N = mg - F_1 \sin\theta \text{ (vedi sopra)}$$

$$m a_x = F_1 \cos\theta - \mu_d (mg - F_1 \sin\theta)$$

$$m a_x = (\cos\theta + \mu_d \sin\theta) F_1 - \mu_d mg$$

$$a_x = \frac{F_1}{m}(\cos\theta + \mu_d \sin\theta) - \mu_d g$$

Cerchiamo, al variare di θ, per quale valore di θ risulta massima l'accelerazione a_x. Poniamo

$$f(\theta) = \frac{F_1}{m}(\cos\theta + \mu_d \sin\theta) - \mu_d g.$$

Derivata prima rispetto a θ:

$$f'(\theta) = \frac{F_1}{m}(-\sin\theta + \mu_d \cos\theta)$$

Risulta $f'(\theta) \geq 0$ per $-\sin\theta + \mu_d \cos\theta \geq 0$, cioe' per $\sin\theta \leq \mu_d \cos\theta$; essendo $0 < \theta < 90°$, risulta $\cos\theta > 0$, per cui tale condizione equivale a $\tan\theta \leq \mu_d$, cioe' $\theta \leq \arctan(\mu_d)$; allora $f(\theta)$ e' crescente per $\theta < \arctan(\mu_d)$, e decrescente per $\theta > \arctan(\mu_d)$. Dunque, $f(\theta)$ (e quindi a_x) ha un massimo per $\theta = \theta_M = \arctan(\mu_d)$ (3)

Quindi $\boxed{\theta_M = \arctan(\mu_s) = \arctan(0,15) \simeq 0,149 \text{ rad} \simeq 8°32'}$

Problema n. 2

a) Sull'asta, durante la rotazione, agiscono la forza peso e la reazione vincolare del perno. L'unica forza che compie lavoro e' la forza peso (la reazione del perno agisce su un punto fisso), per cui, essendo la forza peso conservativa, l'energia meccanica dell'asta si conserva durante la rotazione. Dunque:

$$E_{m,f} = E_{m,i} \qquad \frac{1}{2} I_z \omega_1^2 + Mg z_{c,1} = \frac{1}{2} I_z \omega_0^2 + Mg z_{c,0}$$

ω_0 : velocita' angolare di rotazione dell'asta all'inizio

ω_1 : " " " " " " dopo la rotazione di 180°

$z_{c,0}$: quota del centro di massa dell'asta all'inizio

$z_{c,1}$: " " " " " " dopo la rotazione di 180°

I_z : momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione considerato.

Risulta : $\omega_0 = 0$ (ipotesi del problema)

$$z_{c,0} - z_{c,1} = L \qquad I_z = \frac{1}{3} M L^2$$

Allora:

$$\frac{1}{2} I_z \omega_1^2 = Mg\,(z_{c,0} - z_{c,1})$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} ML^{\cancel{2}} \omega_1^2 = \cancel{M} g \cancel{L} \Rightarrow \frac{1}{6}\omega_1^2 = g/L \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{6g}{L}$$

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{6g}{L}} = \sqrt{\frac{6\cdot(9{,}81\,ms^{-2})}{1\,m}} \simeq 7{,}67\ rad\ s^{-1}}$$

b) Durante l'urto, sul sistema agiscono le seguenti forze esterne (il sistema e' costituito dall'asta e dal punto materiale): reazione vincolare del perno, forza peso agente sull'asta, forza peso agente sul punto materiale, reazione vincolare del piano di appoggio sul punto materiale. Rispetto al perno P, i momenti di tutte queste forze sono nulli, per cui il momento angolare totale del sistema si conserva nell'urto.

Subito prima dell'urto l'unico contributo al momento angolare del sistema e' quello dell'asta in rotazione con velocita' angolare istantanea ω_1 (vedi punto a)):

$L_{TOT,z,1} = I_{z,1}\omega_1$, con $I_{z,1} = \frac{1}{3} ML^2$, poiché prima dell'urto il punto materiale e' fermo (testo del problema).

Subito dopo l'urto, il sistema rigido e' costituito dall'asta con il punto materiale attaccato alla sua estremita' inferiore. Il momento d'inerzia del nuovo sistema rigido e'

$$I_{z,2} = I_{z,1} + mL^2 = \left(\frac{1}{3}M+m\right)L^2 = \frac{1}{3}(M+3m)L^2$$

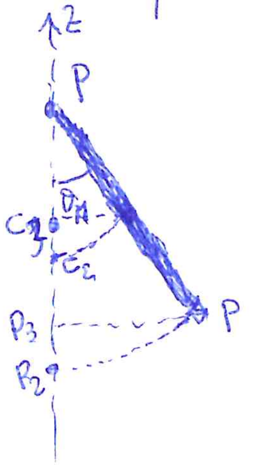
Imponiamo la conservazione del momento angolare totale nell'urto:

$$I_{z,2}\,\omega_2 = I_{z,1}\,\omega_1$$

$$\cancel{\frac{1}{3}}(M+3m)\cancel{L^2}\,\omega_2 = \cancel{\frac{1}{3}}M\cancel{L^2}\,\omega_1 \quad , \quad \text{da cui}$$

$$\boxed{\omega_2 = \frac{M\omega_1}{M+3m} = \frac{\omega_1}{1+\frac{3m}{M}} \simeq \frac{7{,}67\ \text{rad s}^{-1}}{1+\frac{3\cdot(0{,}1\,\text{kg})}{1\,\text{kg}}} \simeq 5{,}9\ \text{rad s}^{-1}}$$

c) Dopo l'urto, il sistema rigido asta + punto materiale si muove sotto l'azione della forza peso e della reazione del perno. Per gli stessi motivi esposti nel punto a), l'energia meccanica del sistema si conserva durante la rotazione. Indichiamo con $z_{c,3}$ la quota finale del centro di massa dell'asta, e con $z_{P,3}$ la quota finale del punto materiale.



Nel passaggio dalla posizione verticale alla posizione angolare $\vartheta = \vartheta_M$ (posizione in cui la velocità angolare istantanea del sistema è nulla), risulta

$$z_{c,3} - z_{c,2} = \frac{L}{2}(1-\cos\vartheta_M) \quad , \quad e$$

$$z_{P,3} - z_{P,2} = L(1-\cos\vartheta_M)$$

Imponiamo la conservazione dell'energia meccanica del sistema:

$$E_{m,3} = E_{m,2}$$

$$Mg\, z_{c,3} + mg\, z_{P,3} = \frac{1}{2} I_{z,2}\, \omega_2^2 + Mg\, z_{c,2} + mg\, z_{P,2}$$

$$g\left[M\left(z_{c,3} - z_{c,2}\right) + m\left(z_{P,3} - z_{P,2}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\left(M+3m\right) L^2 \omega_2^2$$

$$g\left[M \frac{\cancel{L}}{2} + m \cancel{L}\right]\left(1 - \cos\vartheta_M\right) = \frac{1}{6}\left(M+3m\right) L^{\cancel{2}} \omega_2^2$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} g\left(M+2m\right)\left(1-\cos\vartheta_M\right) = \frac{1}{\cancel{6}_3}\left(M+3m\right) L\, \omega_2^2$$

$$1 - \cos\vartheta_M = \frac{\left(M+3m\right) L\, \omega_2^2}{3g\left(M+2m\right)} = \frac{\cancel{\left(M+3m\right)} L}{3g\left(M+2m\right)} \frac{M^2 \omega_1^2}{\left(M+3m\right)^{\cancel{2}}} =$$

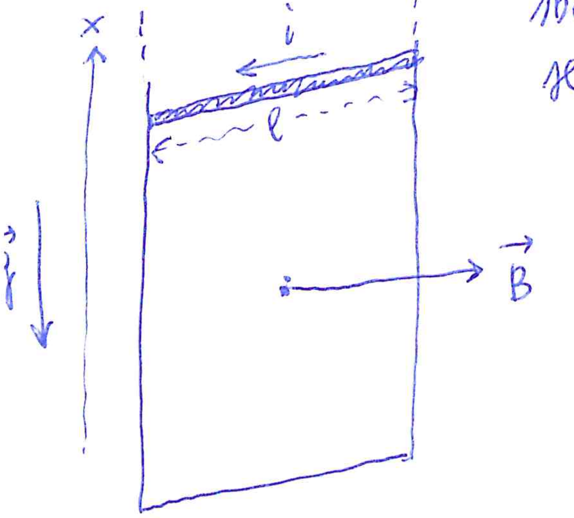
$$= \frac{M^2 \cancel{L}}{\cancel{3g}\left(M+2m\right)\left(M+3m\right)} \frac{\overset{2}{\cancel{6g}}}{\cancel{L}} = \frac{2M^2}{\left(M+2m\right)\left(M+3m\right)} = \frac{2}{\left(1+\frac{2m}{M}\right)\left(1+\frac{3m}{M}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\vartheta_M = 1 - \frac{2}{\left(1+\frac{2m}{M}\right)\left(1+\frac{3m}{M}\right)}, \quad \text{e infine}$$

$$\boxed{\vartheta_M = \arccos\left[1 - \frac{2}{\left(1+\frac{2m}{M}\right)\left(1+\frac{3m}{M}\right)}\right] \simeq 1{,}857 \text{ rad} \simeq 106°23'}$$

Problema n. 3

a) La sbarretta raggiungerà la velocità limite lungo la direzione verticale quando la forza magnetica agente nella sbarretta in seguito al passaggio di corrente elettrica indotta nella sbarretta equilibrerà esattamente la forza peso della sbarretta.



Nello schema sottostante, la corrente nella sbarretta deve fluire nel verso indicato, se la sbarretta si sta muovendo verso il basso, per la legge di Lenz (in modo che il flusso del campo magnetico indotto compensi la diminuzione del flusso concatenato con il circuito del campo magnetico esterno.

In un piccolo intervallo di tempo Δt la variazione della superficie racchiusa dal circuito è

$\Delta S = \ell v_x \Delta t$, dove v_x è la velocità istantanea della sbarretta ($v_x < 0$ se la sbarretta sta muovendosi verso il basso). Pertanto, nell'intervallo di tempo Δt, il flusso magnetico concatenato con il circuito varia della quantità

$$\Delta \Phi = |\vec{B}| \cdot \Delta S = \ell B \Delta S = \ell B v_x \Delta t,$$

e quindi, per la legge di Faraday-Neumann, la f.e.m. indotta nel circuito è $V_i = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -\ell B v_x$. La corrente indotta nel circuito è quindi $i_i = \dfrac{V_i}{R} = -\dfrac{\ell B v_x}{R}$.

A regime, la forza risultante agente sulla sbarretta e' nulla. Deve cioe' risultare (per $i = i_L$, dove i_L e' la corrente a regime, con $i_L = -\frac{\ell B v_L}{R}$):

$$i_L B\ell = mg \, , \quad \text{cioe'}$$

$$-\frac{\ell B v_L}{R} \cdot B\ell = mg \Rightarrow \boxed{v_L = -\frac{mgR}{B^2\ell^2} = -\frac{(0{,}1\,kg)\cdot(9{,}81\,m\,s^{-2})(1\,\Omega)}{(1\,T)^2(1\,m)^2} = -0{,}981\,m\,s^{-1}}$$

b) Corrente a regime nel circuito:

$$\boxed{i_L = -\frac{\ell B v_L}{R} = -\frac{\cancel{B\ell}}{\cancel{R}} \cdot \left(-\frac{mg\cancel{R}}{B^{\cancel{2}}\ell^{\cancel{2}}}\right) = \frac{mg}{B\ell} = \frac{(0{,}1\,kg)(9{,}81\,m\,s^{-2})}{(1\,T)\cdot(1\,m)} = 0{,}981\,A}$$

[Per la legge di Lenz, nella FIGURA 3 la corrente circola in senso antiorario nel circuito.

c) Potenza assorbita, a regime, dalla sbarretta:

$$\boxed{P_L = i_L^2 R = \left(\frac{mg}{B\ell}\right)^2 R = (0{,}981\,A)^2 \cdot (1\,\Omega) \cong 0{,}962\,W}$$