Francesco Mongelli 0327829 20/01/2025 CALCOLO NUMERICO

1) $f(x) = \max(0, 2x)$

a) PER SCRIVERE $p(x)$ IN FORMA CANONICA PASSO PRIMA DALLA FORMA DI LAGRANGE, CHE È:

$$p(x) = f(-1)\frac{(x-(0))(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} + f(0)\frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)} + f(1)\frac{(x-(-1))(x-0)}{(1-(-1))(1-0)} =$$

$$= 0 + 0 + 2\frac{(x+1)x}{2}$$

SVILUPPANDO I CALCOLI VIENE:

$p(x) = x^2 + x$

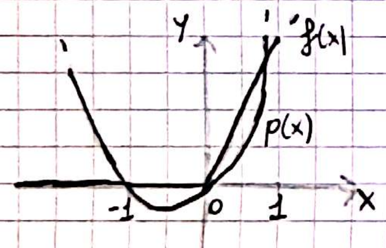
POICHÉ $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ E $p(-1) = 0 = f(-1)$, $p(0) = 0 = f(0)$ E $p(1) = 2 = f(1)$ SONO CERTO CHE $p(x)$ È IL POLINOMIO D'INTERPOLAZIONE DI $f(x)$ SUI NODI DATI.

b) ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

DA NOTARE CHE $f(x)$ NON È DERIVABILE IN $x=0$, QUINDI NON POSSO USARE IL TEOREMA DEL RESTO DELL'INTERPOLAZIONE. GRAFICAMENTE:



DIVIDENDO IL GRAFICO TRA PARTE POSITIVA (DESTRA) E PARTE NEGATIVA (SINISTRA), PER CALCOLARE E DEVO CAPIRE QUALE DIFFERENZA È MAGGIORE IN MODULO.

PER LA PARTE A SINISTRA È OVVIO CHE IL PUNTO IN $[-1, 0]$ CON ERRORE MAGGIORE È IL VERTICE DELLA PARABOLA POICHÉ $|f(x) - p(x)| = |x^2 + x|$. POICHÉ IL VERTICE È L'UNICO MINIMO ASSOLUTO DI $p(x)$ SI AVRÀ:

$p'(x) = 2x + 1$, $2x + 1 = 0 \iff x = -1/2$

$p(-1/2) = 1/4 - 1/2 = -1/4$

QUINDI L'ERRORE MASSIMO "A SINISTRA" È $1/4$.

PER LA PARTE A DESTRA L'ERRORE È $|f(x) - p(x)| = |-x^2 + x|$. PER LO STESSO RAGIONAMENTO:

$(-x^2 + x)' = -2x + 1$, $-2x + 1 = 0 \iff x = 1/2$

$\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1/4$

QUINDI A DESTRA L'ERRORE MASSIMO È $1/4$.

DEDUCO CHE $E = \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p(x)| = 1/4$.

Scansionato con CamScanner

c) RICORDANDOCI CHE IL POLINOMIO D'INTERPOLAZIONE ESISTE ED È UNICO; APPARTIENE A $\mathbb{R}_n[x]$ E SODDISFA $p(x_i)=f(x_i)$ $\forall i=0,\dots,n$. POICHÉ STIAMO CONSIDERANDO SOLO NODI NATURALI, LA FUNZIONE $f(x)$ ASSUME $f(x_i)=2x_i$ $\forall i=0,\dots,n$.

QUINDI L'UNICO POLINOMIO IN $\mathbb{R}_n[x]$ CHE SODDISFA $p(x_i)=2x_i$ $\forall i=0,\dots,n$ È $p(x)=2x$

2) IL VALORE ESTRAPOLATO R È IL POLINOMIO D'INTERPOLAZIONE DEI DATI (h_0^2, I_{n_0}), (h_1^2, I_{2n_0}) E (h_2^2, I_{4n_0}) CALCOLATO IN ZERO. CON $h_0=\frac{b-a}{n_0}$, $h_1=\frac{b-a}{2n_0}$, $h_2=\frac{b-a}{4n_0}$.

CALCOLO $p(0)$, CON LA FORMULA DI LAGRANGE:

$$p(0)=I_{n_0}\frac{(0-h_1^2)(0-h_2^2)}{(h_0^2-h_1^2)(h_0^2-h_2^2)}+I_{2n_0}\frac{(0-h_0^2)(0-h_2^2)}{(h_1^2-h_0^2)(h_1^2-h_2^2)}+I_{4n_0}\frac{(0-h_0^2)(0-h_1^2)}{(h_2^2-h_0^2)(h_2^2-h_1^2)}$$

QUINDI $p(0)=R$ È COMBINAZIONE LINEARE DI $I_{n_0}, I_{2n_0}, I_{4n_0}$, CON:

$$\alpha=\frac{h_1^2h_2^2}{h_0^4-(h_0h_2)^2-(h_0h_1)^2+(h_1h_2)^2}$$

(CALCOLO ESPLICITO A FINE ESAME (*))

$$\beta=\frac{h_0^2h_2^2}{h_1^4-(h_1h_2)^2-(h_0h_1)^2+(h_0h_2)^2}$$

$$\gamma=\frac{h_0^2h_1^2}{h_2^4-(h_0h_2)^2-(h_1h_2)^2+(h_0h_1)^2}$$

3) POICHÈ A NON È HERMITIANA, CALCOLO $Re(A)=\frac{A+A^*}{2}$

a) $$Re(A)=\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3a & 1 & ai\\ 1 & 1 & -1\\ -ai & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3a & 1 & ai\\ 1 & 1 & 1\\ -ai & -1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3a & 1 & ai\\ 1 & 1 & 0\\ -ai & 0 & 1\end{bmatrix}$$

CHE, OVVIAMENTE, È HERMITIANA. QUINDI, PER UN TEOREMA STUDIATO, $Re(A)$ È DEFINITA POSITIVA SE IL DETERMINANTE DELLE SUE SOTTOMATRICI PRINCIPALI DI TESTA È >0.

PER UN ALTRO TEOREMA STUDIATO, SE $Re(A)$ È DEFINITA POSITIVA, LO È ANCHE A.

$\det(Re(A)_1)=3a>0 \Rightarrow a>0$

$\det(Re(A)_2)=3a-1>0 \Rightarrow a>1/3$

$\det(Re(A)_3)=(ai)^2+3a-1=-a^2+3a-1>0 \Rightarrow a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4}}{-2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

QUINDI $Re(A)$ È DEF. POS. PER $\frac{1}{3}<a<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

QUINDI A È DEF. POS. PER $\frac{1}{3}<a<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

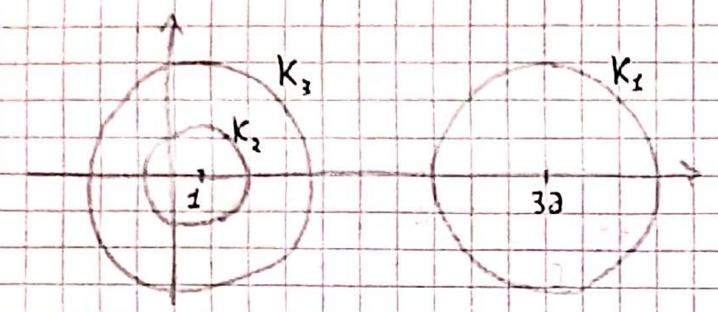
b) POICHÉ $a > 3$, A NON È DEFINITA POSITIVA.

I CERCHI DI GERSHGORIN DI A SONO:

$K_1 = H_1 = \mathcal{C}(3a, 1+a)$, $K_2 = H_2 = \mathcal{C}(1, 2)$, $K_3 = H_3 = \mathcal{C}(1, 1+a)$

POICHÉ I CERCHI PER COLONNA SONO GLI STESSI DI QUELLI PER RIGA, CONSIDERO SOLO QUESTI ULTIMI NEI PROSSIMI RAGIONAMENTI.

GRAFICO QUALITATIVO PER $a > 3$:



POICHÉ IL RAGGIO DI K_3 È SEMPRE MAGGIORE DEL RAGGIO DI K_2 PER $a > 3$ SI HA $K_2 \cup K_3 = K_3$. QUINDI $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = K_1 \cup K_3$.

PER IL 1° TEO. DI G. POSSO AFFERMARE CHE GLI AUTOVALORI DI A SI TROVANO IN $K_1 \cup K_3$.

K_1 E K_3 SI INTERSECANO SE E SOLO SE LA SOMMA DEI LORO RAGGI È MAGGIORE O UGUALE ALLA DISTANZA DEI LORO CENTRI; QUINDI SOLO SE:

$2(1+a) \geq 3a - 1 \iff 2 + 2a \geq 3a - 1 \iff a \leq 3$

QUINDI I CERCHI NON SI INTERSECANO PER $a > 3$, IL NOSTRO CASO. (RAGIONAMENTO ANALOGO PER K_2, OPPURE SI OSSERVA CHE POICHÉ K_2 È SEMPRE CONTENUTO IN K_3 PER $a > 3$, ALLORA NEANCHE LUI SI INTERSECA CON K_1). QUINDI K_1 E $K_2 \cup K_3$ SONO DISGIUNTI.

PER IL 2° TEO. DI G. POSSO AFFERMARE CHE 1 AUTOVALORE DI A SI TROVA IN K_1 E 2 AUTOVALORI SI TROVANO IN $K_2 \cup K_3 = K_3$.

CHIAMO $\mathcal{B}$ IL BORDO DELL'UNIONE DI TUTTI I CERCHI, QUINDI IL BORDO DI K_1 E DI K_3.

I PUNTI DI $\mathcal{B}$ NON SONO SUL BORDO DI TUTTI I CERCHI. INOLTRE NEL GRAFO DI A È PRESENTE IL CICLO $1 \to 2 \to 3 \to 1$ $(a > 3)$ CHE TOCCA TUTTI I NODI, QUINDI A È IRRIDUCIBILE.

PER IL 3° TEO. DI G. DEBOLE POSSO AFFERMARE CHE TUTTI I PUNTI DI $\mathcal{B}$ NON SONO AUTOVALORI DI A. QUINDI 1 AUTOVALORE DI A È IN K_1 PRIVATO DEL SUO BORDO E DUE AUTOVALORI DI A SONO IN K_3 PRIVATO DEL SUO BORDO.

c) L'AUTOVALORE DI MODULO MASSIMO SI TROVERÀ IN K_1, QUINDI $3a - (1+a) < \rho(A) < 3a + (1+a)$

$2a-1 < \rho(A) < 4a+1$. L'UNICA CONSIDERAZIONE CHE POSSO FARE È CHE SICURAMENTE $\rho(A) > 5$.

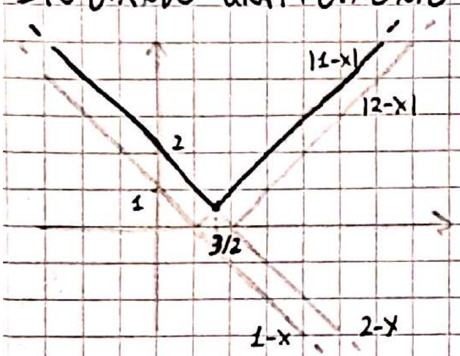
4)

a) CALCOLO $\|A-B_a\|_\infty = \left\|\begin{bmatrix} 0 & 1-a \\ 2-a & 0 \end{bmatrix}\right\|_\infty = \max(|1-a|, |2-a|)$

QUINDI $\|A-B_a\|_\infty = \begin{cases} 2-a & a \leq 3/2 \\ a-1 & a \geq 3/2 \end{cases}$

POICHÉ $|2-a| \leq |1-a| \rightarrow \begin{cases} 2-a \leq 1-a & a<1 \\ 2-a \leq a-1 & 1 \leq a < 2 \\ a-2 \leq a-1 & a \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq 1 & a<1 \\ a \geq 3/2 & 1 \leq a < 2 \\ 2 \geq 1 & a \geq 2 \end{cases} \Rightarrow a \geq 3/2$.

STUDIANDO GRAFICAMENTE:



TRACCIATA A PENNA È $\|A-B_a\|_\infty$. QUINDI IL VALORE a_{opt} PER CUI $\|A-B_{a_{opt}}\|_\infty$ È MINIMA È PROPRIO $3/2$.

IL VALORE $\|A-B_{3/2}\|_\infty$ È $\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

b) RICORDIAMO CHE $\mu_\infty(B_a) = \|B_a\|_\infty \|B_a^{-1}\|_\infty$. PER $a \neq \pm\sqrt{2}$ POSSO CALCOLARE L'INVERSA DI B_a IN QUESTO MODO:

$$B_a^{-1} = \frac{1}{\det(B_a)} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{2-a^2} \begin{bmatrix} 2 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|B_a\|_\infty = \max(1+|a|, 2+|a|) = 2+|a| = \begin{cases} 2+a & a \geq 0 \\ 2-a & a<0 \end{cases}$$

$$\|B_a^{-1}\|_\infty = \max\left(\left|\frac{2}{2-a^2}\right| + \left|\frac{a}{2-a^2}\right|, \left|\frac{a}{2-a^2}\right| + \left|\frac{1}{2-a^2}\right|\right)$$

POICHÉ $2-a^2 \geq 0$ SE $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$, SI HA

$$\|B_a^{-1}\|_\infty = \begin{cases} \max\left(\frac{a-2}{2-a^2}, \frac{a-1}{2-a^2}\right) & a<-\sqrt{2} \\ \max\left(\frac{2-a}{2-a^2}, \frac{1-a}{2-a^2}\right) & -\sqrt{2} \leq a < 0 \\ \max\left(\frac{2+a}{2-a^2}, \frac{1+a}{2-a^2}\right) & 0 \leq a < \sqrt{2} \\ \max\left(\frac{-2-a}{2-a^2}, \frac{-1-a}{2-a^2}\right) & a \geq \sqrt{2} \end{cases} = \begin{cases} \frac{a-2}{2-a^2} & a<-\sqrt{2} \\ \frac{2-a}{2-a^2} & -\sqrt{2} \leq a < 0 \\ \frac{2+a}{2-a^2} & 0 \leq a < \sqrt{2} \\ \frac{-2-a}{2-a^2} & a \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

QUINDI $\mu_\infty(B_\alpha) = \|B_\alpha\|_\infty \|B_\alpha^{-1}\|_\infty$ È

$$\mu_\infty(B_\alpha) = \begin{cases} \dfrac{(\alpha-2)(2-\alpha)}{2-\alpha^2} = \dfrac{-(2-\alpha)^2}{2-\alpha^2} & \alpha < -\sqrt{2} \\ \dfrac{(2-\alpha)^2}{2-\alpha^2} & -\sqrt{2} < \alpha < 0 \\ \dfrac{(2+\alpha)^2}{2-\alpha^2} & 0 \leq \alpha < \sqrt{2} \\ \dfrac{-(2+\alpha)^2}{2-\alpha^2} & \alpha > \sqrt{2} \end{cases}$$

c) DEVO CALCOLARE $\rho(J)$ (NON POSSO USARE LA CONDIZIONE SUFFICIENTE), DOVE J È LA MATRICE D'ITERAZIONE DEL METODO DI JACOBI ($J = I - D^{-1}B_\alpha$). POTREI FARE IL CALCOLO ESPLICITO MA UTILIZZERÒ L'OSSERVAZIONE STUDIATA DENOMINATA "SMART", CHE DICE CHE GLI AUTOVALORI DI J SONO LE RADICI DEL POLINOMIO:

$$\det(\lambda D + B_\alpha - D) = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha \\ \alpha & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \alpha^2$$

QUINDI $2\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \iff \lambda^2 = \alpha^2/2 \iff \lambda_{1,2} = \pm|\alpha|/\sqrt{2} = \pm\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$

QUINDI, OVVIAMENTE $\rho(J) = \dfrac{|\alpha|}{\sqrt{2}}$

PER LA CONVERGENZA IMPONGO $\rho(J) = \dfrac{|\alpha|}{\sqrt{2}} < 1 \iff |\alpha| < \sqrt{2}$

d) SAPPIAMO CHE $\dfrac{\|x^{(k)} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mu_\infty(B_\alpha) \cdot \varepsilon$ (CON $\varepsilon > 0$; IN QUESTO CASO $\varepsilon = 10^{-10}$).

RITORNANDO ALL'ANALISI DEL PUNTO (b) SI HA

$$\|B_\alpha\|_\infty = 2 + |\alpha|$$

E SI HA

$$\|B_\alpha^{-1}\|_\infty = \max\left(\frac{2}{|2-\alpha^2|} + \frac{|\alpha|}{|2-\alpha^2|}, \frac{1}{|2-\alpha^2|} + \frac{|\alpha|}{|2-\alpha^2|}\right) = \frac{2+|\alpha|}{|2-\alpha^2|}$$

QUINDI

$$\mu_\infty(B_\alpha) = \frac{(2+|\alpha|)^2}{|2-\alpha^2|}$$

AVREMO, PERCIÒ

$$\frac{\|x^{(k)} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{(2+|\alpha|)^2}{|2-\alpha^2|} \cdot 10^{-10}$$

CALCOLANDO:

$$\lim_{\alpha \to \sqrt{2}} \frac{(2+|\alpha|)^2}{|2-\alpha^2|} \cdot 10^{-10} = +\infty$$

MENTRE

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{(2+|\alpha|)^2}{|2-\alpha^2|} \cdot 10^{-10} = 2 \cdot 10^{-10}$$

QUINDI LA STIMA PER α MOLTO VICINO A $\sqrt{2}$ E' TUTT'ALTRO CHE BUONA, MENTRE PER α MOLTO VICINO A 0 E' UNA BUONA STIMA.

(*) CONTINUO L'ESERCIZIO 2)

PER SEMPLICITÀ DEFINISCO $h_{n_0} = \frac{b-a}{n_0}$, QUINDI $h_0 = h_{n_0}$, $h_1 = \frac{1}{2} h_{n_0}$, $h_2 = \frac{1}{4} h_{n_0}$

QUINDI AVRÒ:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{4} h_{n_0}^2 \cdot \frac{1}{16} h_{n_0}^2}{h_{n_0}^4 - \left(\frac{1}{16} h_{n_0}^4\right) - \left(\frac{1}{4} h_{n_0}^4\right) + \left(\frac{1}{64} h_{n_0}^4\right)} = \frac{1/64}{45/64} = \frac{1}{45}$$

$$\beta = \frac{h_{n_0}^2 \cdot \frac{1}{16} h_{n_0}^2}{\frac{1}{16} h_{n_0}^4 - \left(\frac{1}{64} h_{n_0}^4\right) - \left(\frac{1}{4} h_{n_0}^4\right) + \left(\frac{1}{16} h_{n_0}^4\right)} = \frac{1/16}{-9/64} = -\frac{4}{9}$$

$$\gamma = \frac{h_{n_0}^2 \cdot \frac{1}{4} h_{n_0}^2}{\frac{1}{256} h_{n_0}^4 - \left(\frac{1}{16} h_{n_0}^4\right) - \left(\frac{1}{64} h_{n_0}^4\right) + \left(\frac{1}{4} h_{n_0}^4\right)} = \frac{1/4}{45/256} = \frac{64}{45}$$