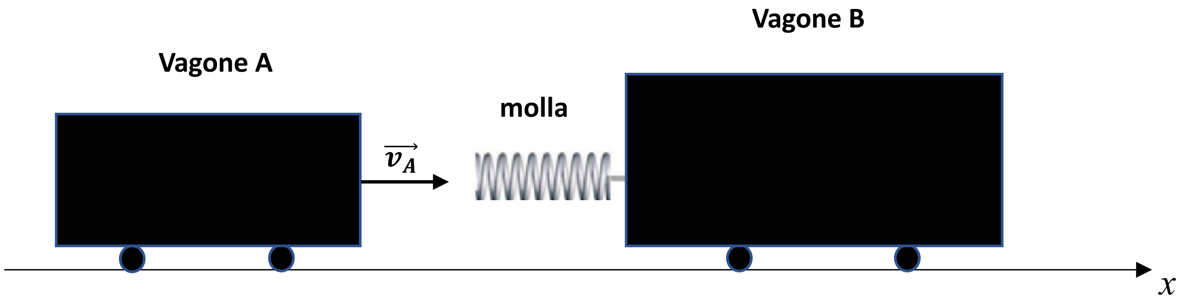
Corso di Fisica per Informatica – A.A. 2022-2023

Secondo esonero scritto del 30 maggio 2023 – soluzione

Problema n. 1



a) In assenza di forze di attrito dirette orizzontalmente, la risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nulla: infatti i vagoni si muovono di moto rettilineo sul piano orizzontale, per cui la risultante di tutte le forze esterne, che sono dirette lungo la direzione verticale, è nulla. Dunque, la velocità del centro di massa del sistema si conserva durante il moto dei vagoni e si può quindi calcolare a un istante qualsiasi, ad esempio all'istante iniziale.

Sulla base dei dati del problema possiamo quindi scrivere:

$$\boldsymbol{V_C = \left|\vec{V_C}\right| = \frac{m_A|\vec{v_A}|}{m_A + m_B} = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B} = \frac{(10^4\text{kg})(14\ \text{m s}^{-1})}{10^4\text{kg} + 2\cdot 10^4\text{kg}} \cong 4.67\ \text{m s}^{-1}}$$

b) L'unica forza di mutua interazione tra i due vagoni è la forza elastica generata dalla compressione del respingente. Nell'istante in cui il respingente raggiunge la massima compressione, i due vagoni necessariamente si stanno muovendo con la stessa velocità istantanea, pari a $\vec{V_C}$. La forza elastica è conservativa, per cui l'energia meccanica del sistema dei due vagoni si conserva durante il moto.
All'istante iniziale risulta

$$E_i = \frac{1}{2} m_A {v_A}^2$$

in quanto il vagone B è inizialmente fermo e la molla del respingente è a riposo.
Nell'istante di massima compressione del respingente, per quanto detto sopra risulta:

$$E_f = \frac{1}{2} m_A {V_c}^2 + \frac{1}{2} m_B {V_c}^2 + \frac{1}{2} k {d_M}^2$$

Dalla condizione di conservazione dell'energia meccanica del sistema, $E_f = E_i$, otteniamo:

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B){V_c}^2 + \frac{1}{2} k {d_M}^2 = \frac{1}{2} m_A {v_A}^2$$

da cui ricaviamo, usando il risultato del punto a) :

$${d_M}^2 = \frac{1}{k}\left[m_A {v_A}^2 - (m_A + m_B){V_c}^2\right] = \frac{1}{k}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}{v_A}^2$$

e infine

$$\boldsymbol{d_M = v_A \sqrt{\frac{1}{k}\frac{m_A m_B}{m_A + m_B}} = \left(14\ \mathrm{m\ s^{-1}}\right)\sqrt{\frac{1}{2 \cdot 10^5\ \mathrm{N\ m^{-1}}}\frac{(10^4\mathrm{kg})(2 \cdot 10^4\mathrm{kg})}{10^4\mathrm{kg} + 2 \cdot 10^4\mathrm{kg}}} \cong 2.56\ \mathrm{m}}$$

c) Considerando adesso come istante iniziale un istante precedente al contatto del vagone A con il respingente del vagone B, e come istante finale un istante successivo al ritorno del respingente nella posizione di riposo dopo il contatto, possiamo sfruttare il fatto che la quantità di moto totale del sistema dei due vagoni si conserva (dato che la risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nulla, come già osservato) e si conserva anche l'energia meccanica del sistema (come già visto). In questi due istanti, l'energia meccanica del sistema dei due vagoni è uguale alla somma delle energie cinetiche dei vagoni in quanto la molla è a riposo in questi due istanti. Scegliendo come asse delle coordinate x l'asse lungo cui avviene il moto, orientato positivamente secondo lo schema della figura, possiamo scrivere le seguenti due equazioni per le componenti orizzontali $v_{Af,x}$ e $v_{Bf,x}$ delle velocità finali dei due vagoni:

$$\begin{cases} m_A v_{Af,x} + m_B v_{Bf,x} = m_A v_A \\ \frac{1}{2} m_A {v_{Af,x}}^2 + \frac{1}{2} m_B {v_{Bf,x}}^2 = \frac{1}{2} m_A {v_A}^2 \end{cases}$$

essendo $v_{A,x} = v_A$

Allora, dato che nel caso in questione risulta $m_B = 2m_A$, otteniamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} v_{Af,x} + 2v_{Bf,x} = v_A \\ {v_{Af,x}}^2 + 2{v_{Bf,x}}^2 = {v_A}^2 \end{cases}$$

Le due equazioni possono essere riscritte nel modo seguente:

$$\begin{cases} 2v_{Bf,x} = v_A - v_{Af,x} \\ 2{v_{Bf,x}}^2 = {v_A}^2 - {v_{Af,x}}^2 = \left(v_A - v_{Af,x}\right)\left(v_A + v_{Af,x}\right) \end{cases}$$

Con la condizione $v_{Af,x} \neq v_A$, possiamo dividere le due equazioni membro a membro, in modo da ottenere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} v_{Bf,x} = v_A + v_{Af,x} \\ 2v_{Bf,x} = v_A - v_{Af,x} \end{cases}$$

da cui ricaviamo

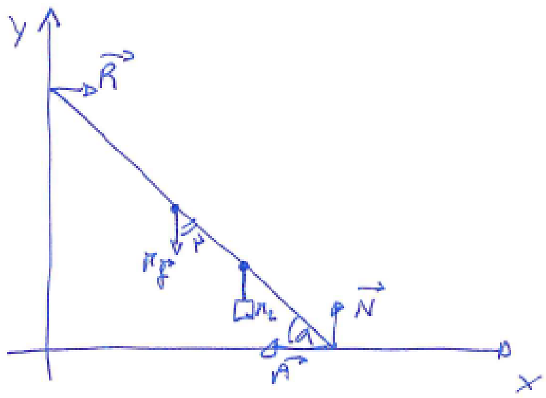
$$\begin{cases} 2\left(v_A + v_{Af,x}\right) = v_A - v_{Af,x} \\ v_{Bf,x} = v_A + v_{Af,x} \end{cases}$$

e infine otteniamo $v_{Af,x} = -\frac{1}{3} v_A$ e $v_{Bf,x} = \frac{2}{3} v_A$

In definitiva risulta, quindi: $\left|\overrightarrow{v_{Af}}\right| = \frac{1}{3} v_A \cong \mathbf{4.67\ m\ s^{-1}}$, $\left|\overrightarrow{v_{Bf}}\right| = \frac{2}{3} v_A \cong \mathbf{9.33\ m\ s^{-1}}$**, con** $\overrightarrow{v_{Af}}$ **discorde rispetto a** $\overrightarrow{v_A}$ **e** $\overrightarrow{v_{Bf}}$ **concorde rispetto a** $\overrightarrow{v_A}$.

Problema n. 2

SOLUZIONE



$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = \vec{0} \\ \vec{M}^{(e)} = \vec{0} \end{cases} \qquad \begin{cases} x: & R - A = 0 \\ y: & -Mg - M_2 g + N = 0 \\ & g\frac{l}{3}M_2 \operatorname{sen}\beta + g\frac{l}{2}M \operatorname{sen}\beta - lR\operatorname{sen}\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$$

$$\begin{cases} R - A = 0 \\ N = (M + M_2)g \\ \left(\frac{M_2}{3} + \frac{M}{2}\right)\cos\alpha = R\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} R = A \\ N = (M + M_2)g \\ R = g\left(\frac{M_2}{3} + \frac{M}{2}\right)\operatorname{cotg}\alpha \end{cases}$$

$$A = g\left(\frac{M_2}{3} + \frac{M}{2}\right)\operatorname{cotg}\alpha$$

$$N = (M + M_2)g$$

$$R = g\left(\frac{M_2}{3} + \frac{M}{2}\right)\operatorname{cotg}\alpha$$

RISPOSTE

a)

$$N = (M + M_2)\, g$$

$$R = \left(\frac{M_2}{3} + \frac{M}{2}\right) g \cot g\, \alpha$$

b)

$$A = R = \left(\frac{M_2}{3} + \frac{M}{2}\right) g \cot g\, \alpha$$

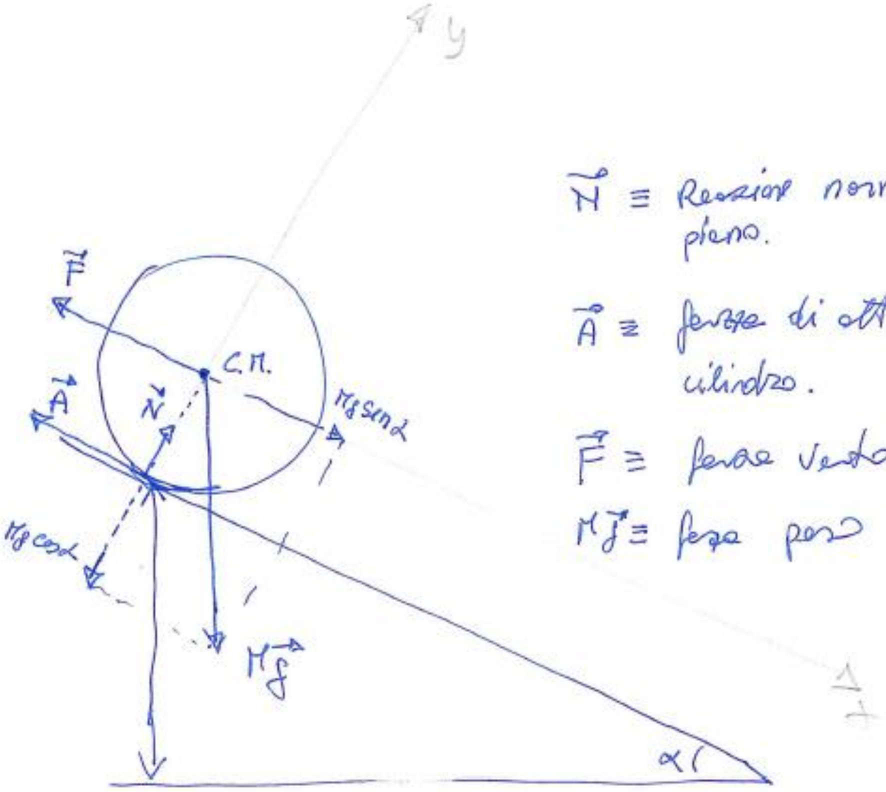
c)

$$N \cong 58{,}8\, N$$

$$R \simeq 16{,}0\, N$$

$$A \simeq 16{,}0\, N$$

Problema n. 3



$\vec{N}$ ≡ Reazione normale al piano.

$\vec{A}$ ≡ forza di attrito piano-cilindro.

$\vec{F}$ ≡ forza vento

$M\vec{g}$ ≡ forza peso

POLO ≡ C.M.

$$\begin{cases} \vec{F}^{(e)} = m\vec{a}_{CM} \\ \vec{M}^{(e)} = I\dot{\omega} \end{cases}$$

$\vec{\omega}$ ≡ Velocità angolare

I ≡ Momento di inerzia per un asse passante per C.M e perpendicolare al piano (x, y).

$$\begin{cases} M\vec{a}_{CM} = M\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{A} \\ I\dot{\omega} = \vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_{P} + \vec{\tau}_{N} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - F - A \\ F_y = Mg\cos\alpha - N \\ M_z = AR \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ma_{CM} = Mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - F - A \\ 0 = Mg\cos\alpha - N \\ I\dot{\omega} = AR \end{cases} \quad (1)$$

DALLA
CONDIZIONE DI PURO ~~R~~ROTOLAMENTO SI HA:

$$\dot{\omega} = \frac{a_{CM}}{R}$$

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Dalla 3ª equazione del sistema (1) abbiamo

$$AR = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \frac{a_C}{R} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} M a_C \quad (2)$$

Dalla 2ª equazione del sistema (1) abbiamo:

$$M a_C = Mg \operatorname{sen}\alpha - F - A$$

e sostituendo la (2) nella precedente, abbiamo:

$$M a_C = Mg \operatorname{sen}\alpha - F - \frac{1}{2} M a_C$$

da cui

$$a_C = \frac{2}{3} \left[g \operatorname{sen}\alpha - \frac{F}{M} \right]$$

$$\begin{cases} S = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \\ v_{cm} = a_{cm} t \end{cases} \Rightarrow \quad t^2 = \frac{2S}{a_c} \quad ; \quad S = \frac{h}{\sin\alpha}$$

$$v_{cm} = a_{cm} \cdot \sqrt{\frac{2S}{a_c}} \quad \Rightarrow \quad v_{cm} = \sqrt{2Sa_c}$$

Sostituendo i valori di cui sopra

$$a_{cm} = \frac{2}{3}\left[9{,}81 \cdot \frac{1}{2} - \frac{0{,}5}{2}\right] = \frac{9{,}31}{3} \simeq 3{,}1 \ \frac{m}{s^2}$$

$$S = \frac{h}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 2h = 2\,m$$

$$v_{cm} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3{,}1} = 2\sqrt{3{,}1} \simeq 3{,}5 \ \frac{m}{s}$$

RISPOSTE BREVI:

$$\begin{cases} F_x = Mg\sin\alpha - F - A \\ F_y = Mg\cos\alpha - N = 0 \end{cases}$$

$$a_{cm} = \frac{2}{3}\left[g\sin\alpha - \frac{F}{M}\right]$$

$$v_{cm} = \sqrt{2Sa_c}$$

$a_{cm} = 3{,}1 \ \frac{m}{s^2}$

$v_{cm} = 3{,}5 \ \frac{m}{s}$