Algoritmo primale duale

> L'algoritmo primale-duale è un metodo utilizzato in ottimizzazione combinatoria per risolvere problemi di programmazione lineare. Questo approccio si basa sull'interazione tra il problema primale e il suo problema duale

- **Esercizio**

$$\begin{cases} max \ -4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 > 8 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

- **Passiamo alla forma standard**

$$\begin{cases} min \ -4x_1 + 3x_2 - x_3 \\ x_1 + 3x_2 - S_1 = 10 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - S_2 = 8 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

- **Ora facciamo il duale della funzione**
    - **Matrice trasposta da fare per non sbagliarsi**

$$\begin{cases} max \ 10y_1 + 8y_2 \\ y_1 + y_2 \leq 4 \\ -3y_1 + y_2 \leq 3 \\ -y_1 + 4y_2 \leq 1 \\ -y_1, -y_2 \leq 0 \end{cases} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Ricaviamo il vettore S.d e iniziamo a calcolare il primale ristretto**
    - $S.d_1^0 = 0 + 0 \leq 4 \rightarrow 4$
    - $S.d_2^0 = -3(0) + 0 \leq 3 \rightarrow 3$

- $S.d_3^0 = 0 + 4(0) \leq 1 \rightarrow 1$
- $S.d_4^0 = 0 \leq 0 \rightarrow 0$
- $S.d_5^0 = 0 \leq 0 \rightarrow 0$

$$S.d^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ora occorre trovare un $x^{(0)}$ da moltiplicare con $S.d^{(0)}$, che dia $\emptyset$

> La $x^{(0)}$ deve essere della forma che ha i valori ≥ 0 in corrispondenza dei valori nulli di $S.d^{(0)}$, invece deve avere valori $x^{(0)} = 0$ dove $S.d^{(0)} \geq 0$, quindi il contrario

- Ora sostituisco i valori di $x^{(0)}$ alla prima F.S

$$\begin{cases} 0 + 3(0) - S_1 = 10 \\ 0 - 0 + 4(0) - S_2 = 8 \\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -S_1 = 10 \\ -S_2 = 8 \\ S_1, S_2 \geq 0 \end{cases}$$

Uscirebbe:

Non abbiamo una base canonica quindi aggiungiamo A_1 e A_2

Primale ristretta $\rightarrow \begin{cases} min\ A_1 + A_2 \\ -S_1 + A_1 = 10 \\ -S_2 + A_2 = 8 \end{cases} \rightarrow$

$$\begin{array}{c|ccccc} & b & S_1 & S_2 & A_1 & A_2 \\ \hline z & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ A_1 & 10 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ A_2 & 8 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

- **Azzero le variabili artificiali su z**

$R_0 = R_0 - R_1$

$R_0 = R_0 - R_2$

$$\begin{array}{c|ccccc} & b & S_1 & S_2 & A_1 & A_2 \\ \hline z & -18 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ A_1 & 10 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ A_2 & 8 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

- **Abbiamo che z è $\neq 0$, quindi procediamo con il *duale ristretto***

  > **Se avessimo avuto $z = 0$ → x è soluzione ottima**

  - Non è il nostro caso, quindi riprendiamo la funzione **primale ristretta** di prima

$$\begin{cases} min\ A_1 + A_2 \\ -S_1 + A_1 = 10 \\ -S_2 + A_2 = 8 \\ A_1, A_2 \geq 0 \end{cases}$$

> Dobbiamo fare il **duale** di questo **primale ristretto** sopra

$$\begin{cases} max\ 10\pi_1 + 8\pi_2 \\ -\pi_1 \leq 0 \\ -\pi_2 \leq 0 \\ \pi_1 \leq 1 \\ \pi_2 \leq 1 \end{cases}$$

- Poiché π_1 e π_2 sono entrambe **limitate superiormente** da 1 e inferiormente da 0, il valore massimo che entrambe possono raggiungere è 1, quindi soluzione: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

> Consideriamo questa formula:

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \theta^{(0)}\pi^* \to \pi^*$$

$$\downarrow$$

$$y^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \theta \to \begin{bmatrix} \theta \\ \theta \end{bmatrix}$$

> (0,0) era la nostra $y^{(0)}$, (1,1) è la nostra **soluzione del duale ristretto**, **ora dobbiamo trovare θ.**