$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$ probabilità totale, consideriamo tutte le possibili cause

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\sum_{k=h}^{\infty} r^k = \frac{r^h}{1-r} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x - 1$$

DIST BINOMIALE

prove indipendenti

$$X \sim BIN(n, p)$$

(n: num estrazioni; p: prob)

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$p(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$$

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3!} (p_1)^{n_1} (p_2)^{n_2} (p_3)^{n_3}$$ in caso di più insiemi

$$\mathbb{E}[X] = np \qquad \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad Var[X] = np(1-p)$$

DIST IPERGEOMETRICA

prove dipendenti

$$X \sim IPERGEO(n, p)$$

$$p(X = k) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} \qquad P(E_1 \cap E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1)$$

$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{n_1}{i}\binom{n_2}{n-i}}{\binom{n_1+n_2}{n}}$$

$$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$$

$$\frac{\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\binom{n_3}{k_3}}{\binom{n_1+n_2+n_3}{k_1+k_2+k_3}}$$ più estrazioni

$$\mathbb{E}[X] = np \qquad \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} \qquad Var[X] = n \cdot p(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

popolazione totale

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

conta il numero di fallimenti prima del primo successo

$X \sim GEO(p)$

$$p(X=k) = (1-p)^k p$$

$$p(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} (1-p)^i p$$

$$p(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} - 1 \qquad \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-p)^k p \qquad Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA TRASLATA

conta il numero di prove fino al primo successo, incluso il successo

$X \sim GEOTRAS(p)$

$$p(X=k) = (1-p)^{k-1} p$$

$$p(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} (1-p)^{i-1} p$$

$$p(X \geq k) = (1-p)^{k-1}$$

$$\text{disp} = \sum_{i=1} (1-p)^{2h-1-1} p$$

$$\text{pari} = \sum_{i=1} (1-p)^{2h-1} p$$

$$\text{multiplo} = \sum_{i=1} (1-p)^{xh-1} p$$

$$\mathbb{E}[X] = 1/p \qquad Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

DISTRIBUZIONE POISSON

$X \sim POISSON$

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \qquad \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad Var[X] = \lambda$$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATA

sequenza di fallimenti, successi che finiscono in un successo

$X \sim BIN\text{-}NEG(r,p)$

$b_{rk} = \binom{k+r-1}{r-1} = \binom{k+r-1}{k}$

$P(X=k) = b_{rk}\, p^r (1-p)^i$

$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} b_{ri}\, p^r (1-p)^i$

$\mathbb{E}[X] = r\left(\frac{1}{p}-1\right)$

$P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$

$Var[X] = r\,\frac{1-p}{p^2}$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA TRASLATA

numero di fallimenti che precedono r successi

$X \sim BIN\text{-}NEG\text{-}TRAS(r,p)$

$\binom{k-1}{r-1} = \binom{k-1}{k-2} = z_k$

$P(X=k) = z_k \cdot p^r (1-p)^{k-r}$

$\mathbb{E}[X] = r\left(\frac{1}{p}-1\right)$

$P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} z_i \cdot p^r (1-p)^{i-r}$

$Var[X] = r\,\frac{1-p}{p^2}$

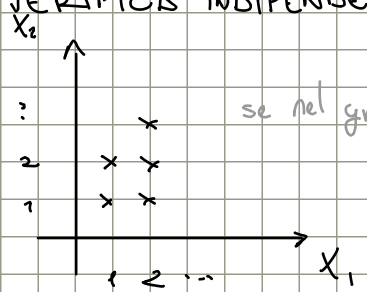
$P(X \ge k) = 1 - P(X \le k-1)$

3

CALCOLO DENSITÀ MARGINALI, VERIFICA INDIPENDENZA, $\mathbb{E}$, Var, Cov

DENSITÀ MARGINALI $\quad p_{X_i}(k) = \sum_{x \in S_x} p_{X_i}(k)$

VERIFICA INDIPENDENZA: $p_X(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2)$



se nel grafo non abbiamo un rettangolo allora non sono indipendenti

Per verificare se ben posta o trovare valore di una var c porre $\sum p_X = 1$

$\mathbb{E}$, Var, Cov:

$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_k \in S_X} x_k\, p_X(x_k) \qquad \mathbb{E}[X] = \sum_{x_k \in S_X} f(x_k)\, p_X(x_k)$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X]^2)$$

$$Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_1)$$

$$Var[aX] = a^2 Var[X]$$

$$Cov(X, X) = Var[X]$$

$$Var[X+a] = Var[X]$$

$$Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov(X_1, X_2)$$

$$Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2]$$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE $\rho(X_1, X_2) = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var[X_1] Var[X_2]}}$

RETTA DI REGRESSIONE $r_{21}: X_2 = aX_1 + b$ $r_{12}: X_1 = cX_2 + d$

$$\begin{cases} a = \dfrac{cov(X_1, X_2)}{Var[X_1]} \\ b = \mathbb{E}[X_2] - \dfrac{cov(X_1, X_2)}{Var[X_1]} \cdot \mathbb{E}[X_1] \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \dfrac{cov(X_1, X_2)}{Var[X_2]} \\ d = \mathbb{E}[X_1] - \dfrac{cov(X_1, X_2)}{Var[X_2]} \cdot \mathbb{E}[X_2] \end{cases}$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

v.a. X ha distribuzione uniforme continua su intervallo limitato (a, b) se si ha:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & a \le t \le b \\ 1 & t > b \end{cases} \qquad X \sim U(a, b)$$

$$F_X'(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < t < b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f_X(t) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx = \frac{b+a}{2} \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

v.a X ha distribuzione esponenziale $\lambda > 0$ se si ha

$$F_x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad X \sim Exp(\lambda)$$

$$F_x'(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases} \qquad f_x(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & \text{altrim} \end{cases} = \lambda e^{-\lambda t} \, 1_{[0,\infty)}(t)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda} \qquad Var[X] = 1/\lambda^2$$

FUNZIONE f AFFINE NON COSTANTE

$f(x) = ax + b \quad a \neq 0$

$$F_y(y) = \begin{cases} F_x\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_x\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases} \qquad f_y(y) = \begin{cases} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} & a > 0 \\ -f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \frac{1}{a} & a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

es 4

capire intervallo y, sistema con ⊛, trova $P(Y \leq y)$ lasciando solo X, modifico estremi, calcolo integrale

DISTRIBUZIONE NORMALE

$X \sim N(0,1)$ $\qquad \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$P(X \leq t) = \Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx$, crescente compreso tra $[0,1]$ e continua

$\mathbb{E}[X] = 0 \qquad Var[X] = 1$

$\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$

$\Phi(0) = 1/2$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$P(Y \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$\mathbb{E}[X] = \mu \qquad Var[X] = \sigma^2$

DISTRIBUZIONE GAMMA

v.a X distribuzione gamma con parametri $\alpha, \beta > 0$ $\quad X \sim GAMMA(\alpha, \beta)$

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$$ dove Γ é la funz gamma

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty r^{y-1} e^{-r} \, dr$$

$\Gamma(1) = 1$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & t > 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\beta} \qquad Var[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

IE V.A. CONTINUE

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) \, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx \right)^2$$

TEOREMA LIMITE CENTRALE

$\{X_n : n \geq 1\}$ v.a. i.i.d.

anche <

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x) \qquad \lim_{n \to \infty} P\left(\frac{\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq x \right) = \Phi(x)$$

$$\mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_n] = n\mu \qquad Var[X_1 + \ldots + X_n] = n\sigma^2$$

INTEGRALI

1) $\int x^p \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \qquad (p \in \mathbb{R}, \quad p \neq -1)$
2) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$
3) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
4) $\int e^x \, dx = e^x + c$
5) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$
6) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$
8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$
9) $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$
10) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$
11) $\int \sinh x \, dx = \cosh x + c$
12) $\int \cosh x \, dx = \sinh x + c$
13) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \mathrm{settsinh} x + c = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$
14) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$

DERIVATE

1) $D(x^p) = px^{p-1} \quad (p \in \mathbb{R})$
2) $D(a^x) = a^x \ln a$
3) $D(e^x) = e^x$
4) $D(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e$
5) $D(\ln x) = \frac{1}{x}$
6) $D(\sin x) = \cos x$
7) $D(\cos x) = -\sin x$
8) $D(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
9) $D(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
10) $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11) $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12) $D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$
13) $D(\sinh x) = \cosh x$
14) $D(\cosh x) = \sinh x$
15) $D(\mathrm{settsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
16) $D(\mathrm{settcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$