Un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ é accettabile se esiste una macchina di Turing T tale che $\forall x \in \Sigma^* [O_T(x) = q_A \iff x \in L]$

Un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ é decidibile se esiste una macchina di Turing T che termina $\forall x \in \Sigma^*$ e tale che:

La macchina T é detta decidere L. Se una macchina T decide $L \subseteq \Sigma^*$ allora

$$O_T(x) = \begin{cases} q_A & \text{se } x \in L \\ q_R & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

Teo 8.7: Se L_1 e L_2 sono due linguaggi accettabili allora $L_1 \cup L_2$ é un linguaggio accettabile. Se L_1 e L_2 sono due linguaggi accettabili allora $L_1 \cap L_2$ é un linguaggio accettabile.

dim.

L_1 e L_2 sono accettabili $\Rightarrow \exists T_1 : \forall x \in \Sigma^* [O_{T_1}(x) = q_A \iff x \in L_1]$
$\exists T_2 : \forall x \in \Sigma^* [O_{T_2}(x) = q_A \iff x \in L_2]$

Costruiamo la macchina T' che con input $x \in \Sigma^*$ opera nella seguente maniera:

1) esegui una singola istruzione di T_1 sul nastro 1: se T_1 entra in q_A allora T' accetta altrimenti esegui il passo 2).
2) esegui una singola istruzione di T_2 sul nastro 2: se T_2 entra in q_A allora T' accetta altrimenti esegui il passo 1).

dim 2.

L_1 e L_2 sono accettabili $\Rightarrow \exists T_1 : \forall x \in \Sigma^* [O_{T_1}(x) = q_A \iff x \in L_1]$
$\exists T_2 : \forall x \in \Sigma^* [O_{T_2}(x) = q_A \iff x \in L_2]$

Costruiamo la macchina T' che con input $x \in \Sigma^*$ opera nella seguente maniera:

1) simula $T_1(x)$ se T_1 entra in q_A va al passo 2).
2) simula $T_2(x)$ se T_2 entra in q_A allora T' accetta.

Teo 5.8: Se L_1 e L_2 sono due linguaggi decidibili allora $L_1 \cup L_2$ è un linguaggio decidibile. Se L_1 e L_2 sono due linguaggi decidibili allora $L_1 \cap L_2$ è un linguaggio decidibile.

dim.

L_1 e L_2 sono accettabili $\Rightarrow \exists T_1 : \forall x \in \Sigma^* [o_{T_1}(x) = q_A \Leftrightarrow x \in L_1 \wedge o_{T_1}(x) = q_R \Leftrightarrow x \notin L_1]$

$\exists T_2 : \forall x \in \Sigma^* [o_{T_2}(x) = q_A \Leftrightarrow x \in L_2 \wedge o_{T_2}(x) = q_R \Leftrightarrow x \notin L_2]$

Costruiamo la macchina T' che con input $x \in \Sigma^*$ opera nella seguente maniera:

1) simula $T_1(x)$ se T_1 entra in q_A T' accetta altrimenti va al passo 2).

2) simula $T_2(x)$ se T_2 entra in q_A allora T' accetta altrimenti T' rigetta.

dim 2.

L_1 e L_2 sono accettabili $\Rightarrow \exists T_1 : \forall x \in \Sigma^* [o_{T_1}(x) = q_A \Leftrightarrow x \in L_1 \wedge o_{T_1}(x) = q_R \Leftrightarrow x \notin L_1]$

$\exists T_2 : \forall x \in \Sigma^* [o_{T_2}(x) = q_A \Leftrightarrow x \in L_2 \wedge o_{T_2}(x) = q_R \Leftrightarrow x \notin L_2]$

Costruiamo la macchina T' che con input $x \in \Sigma^*$ opera nella seguente maniera:

1) simula $T_1(x)$ se T_1 entra in q_A va al passo 2) altrimenti T' rigetta.

2) simula $T_2(x)$ se T_2 entra in q_A allora T' accetta altrimenti T' rigetta.

Siano Σ e Σ_1 due alfabeti finiti; una funzione (parziale) $f : \Sigma^* \to \Sigma_1^*$ è una funz. calcolabile se esiste una macchina di Turing T di tipo trasduttore che, dato in input $x \in \Sigma^*$, termina con la stringa $f(x)$ scritta sul nastro di output sse $f(x)$ è definita.

Sia Σ un alfabeto finito ed $L \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio. La funzione caratteristica $\chi_L : \Sigma^* \to \{0,1\}$ di L è una funzione totale tale che:

$$\forall x \in \Sigma^* \quad \chi_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in L \\ 0 & \text{se } x \notin L \end{cases}$$

Teo 3.2: Un linguaggio L è decidibile sse la funzione χ_L è calcolabile.

dim.

$\Rightarrow$) Supponiamo che $L \subseteq \Sigma^*$ sia decidibile, allora esiste una macchina T tipo riconoscitore con stato di accettazione q_A e di rigetto q_R tale che: $o_T(x) = \begin{cases} q_A & \text{se } x \in L \\ q_R & \text{se } x \notin L \end{cases}$

A partire da T, definiamo una macchina di tipo trasduttore T' con due nastri, che, con input $x \in \Sigma^*$ opera nella seguente maniera:

1) sul primo nastro, è scritto l'input x, esegue la computazione $T(x)$;
2) se $T(x)$ termina nello stato q_A allora sul nastro di output sarà scritto 1 altrimenti 0. Successivamente termina;

Poiche L é decidibile il passo 1 termina $\forall x$. Se $T(x) = q_A$ $T'(x)$ scrive 1 altrimenti 0. Questo dimostra che χ_L é calcolabile.

$\Leftarrow$) Supponiamo che χ_L sia calcolabile, allora esiste una macchina T tipo trasduttore, che, $\forall x \in \Sigma^*$, calcola $\chi_L(x)$.
totale

A partire da T, definiamo una macchina di tipo riconoscitore T' con due nastri, che, con input $x \in \Sigma^*$ opera nella seguente maniera:

1) sul primo nastro é scritto l'input x, esegue la computazione $T(x)$, scrivendo il risultato sul secondo nastro.
2) se sul secondo nastro é scritto 1 allora la computazione $T'(x)$ termina nello stato di accettazione, altrimenti di rigetto.

Poiché χ_L é totale il passo 1 termina $\forall x$. Se $\chi_L(x) = 1$ $T'(x) = q_A$ altrimenti se $\chi_L(x) = 0$ $T'(x) = q_R$. Questo dimostra che L é decidibile. □

L_1 é decidibile, allora esiste una macchina T_1 tipo riconoscitore con stato di accettazione q_A e di rigetto q_R tale che: $O_T(x) = \begin{cases} q_A & \text{se } x \in L \\ q_R & \text{se } x \notin L \end{cases}$

Possiamo quindi creare una macchina T_b' con stati invertiti:

$$O_{T_b'}(x) = \begin{cases} q_R & \text{se } x \in L \\ q_A & \text{se } x \notin L \end{cases} \qquad L_b \text{ decidib}$$

ma L_2 é solo accettabile ma non decidibile

$\exists T_2 : \forall x \in \Sigma_2^* \, [O_{T_2}(x) = q_A \iff x \in L_1]$

Teo 3.1: Un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$ é decidibile sse L e L^c sono accettabili.

quindi L_2^c non é accettabile ma costruiamo un riconoscitore per T_2' che decide L_0:

1) scrivi K in unario sul N_2
2) Simula istruzioni di $T_2(x)$ su N_1 muovendoti a destra finché non si trova □ su N_2
3) se $T_2(x)$ accetta entro K passi allora T_0 accetta
se $T_2(x)$ non accetta " " " " " rigetta

$L = L_1 \cup L_2$ é decidib.