Unicità polinomio d'interpolazione

Teorema 1.1: Siano $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $x_0, \dots, x_n$ sono tutti distinti. Allora $\exists!\, p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ t.c. $p(x_i) = y_i \;\; \forall i = 0, \dots, n$.

dim: (1.1 1ª versione)

(1): Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ un polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$. $p(x)$ soddisfa le proprietà $p(x_i) = y_i \;\; \forall i = 0, \dots, n$ sse

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

n+1 inc $(a_0, \dots, a_n)$
n+1 eq

cioè sse il suo vettore dei coefficienti $(a_0, \dots, a_n)^T$ soddisfa il sistema lineare

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{V(x_0, \dots, x_n) = \text{matrice di Vandermonde nei nodi } x_0, \dots, x_n} \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (\$)$$

$V(x_0, \dots, x_n)$ è invertibile perché dimostriamo che:

$$\underset{(*)}{\det[V(x_0, \dots, x_n)]} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \prod_{\substack{i,j=0 \\ j<i}}^{n} (x_i - x_j) = (x_1 - x_0) \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1}) & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

e quindi $\det[V(x_0, \dots, x_n)] \neq 0$ perché per ipotesi i nodi $x_0, \dots, x_n$ sono tutti distinti. Questo permette di concludere che il sistema ($) ha un unica soluzione data da

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = [V(x_0, \dots, x_n)]^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad (\alpha)$$

e dunque $\exists!\, p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ che soddisfa la condizione blu e tale $p(x)$ è precisamente il polinomio di $\mathbb{R}_n[x]$ che ha come vettore dei coefficienti quello dato da (α). Occorre ora dimostrare $(*)$ e lo facciamo per $n=3$ (per $n=0$ è ovvia perché $V(x_0) = [1]$, mentre per $n \geq 1$ generico la dim. è la stessa che facciamo per $n=3$)

dim:

$\forall i = 1, \dots, 3$ definisco $d_i = \det[V(x_0, \dots, x_i)]$, il nostro obiettivo é calcolare d_3

$$d_3 = \begin{vmatrix} \overset{V(x_0)}{1} & \overset{V(x_0,x_1)}{x_0} & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 - x_0^2 x_3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 - x_1^2 x_3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_2^2 x_3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 - x_0 x_3 & x_0^2(x_0 - x_3) \\ 1 & x_1 & x_1^2 - x_1 x_3 & x_1^2(x_1 - x_3) \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_2 x_3 & x_2^2(x_2 - x_3) \\ 1 & x_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$C^{[4]} \to C^{[4]} - x_3 C^{[3]} \qquad C^{[3]} \to C^{[3]} - x_3 C^{[2]} \qquad C^{[2]} \to C^{[2]} - x_3 C^{[1]}$$

<u>Promemoria</u>: se in un determinante si sostituisce una riga R [colonna C] con se stessa più un multiplo scalare di un' altra riga [colonna] allora il determinante non cambia.

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_0 - x_3 & x_0(x_0 - x_3) & x_0^2(x_0 - x_3) \\ 1 & x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ 1 & x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} x_0 - x_3 & x_0(x_0 - x_3) & x_0^2(x_0 - x_3) \\ x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \end{vmatrix} =$$

Laplace applicata sull' ultima riga tenendo conto del segno $(-1)^{n+3}$ ottenuto dalla regola della scacchiera scorrendo lungo la prima colonna a partire da $(-1)^0$ (oppure sommando indice di riga e colonna dell' elemento in posizione $(n+1, 1)$ così da ottenere $(-1)^{(n+1)+1} = (-1)^{n+2} = (-1)^n$)

$$= (-1)^3 \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}}_{d_2} = (-1)^3 (x_0 - x_3) \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ x_1 - x_3 & x_1(x_1 - x_3) & x_1^2(x_1 - x_3) \\ x_2 - x_3 & x_2(x_2 - x_3) & x_2^2(x_2 - x_3) \end{vmatrix} =$$

Linearità del determinante rispetto a ogni fissata riga (o colonna).

$$= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\, d_2 =$$

$$= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\, d_1 =$$

$$= (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0) \quad \square$$

dim: (1.1 2° versione)

$\forall j = 0, \dots, n$ definiamo il polinomio

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)}$$

I polinomi $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ sono in numero di $n+1$ e hanno tutti grado n, per cui sono $n+1$ elementi di $\mathbb{R}_n[x]$. Questi polinomi sono una base di $\mathbb{R}_n[x]$.

Una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x]$ é un insieme di elementi $v_1(x), \dots, v_r(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ con le 2 proprietà seguenti:

- sono linearmente indipendenti, cioé l'unica combinazione lineare $\alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_r v_r(x)$ che coincide con il polinomio nullo é la combinazione lineare con $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0$;
- generano $\mathbb{R}_n[x]$, cioé ogni $q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ si può scrivere come combinazione lineare $\alpha_1 v_1(x) + \dots + \alpha_r v_r(x)$.

Tutte le basi di $\mathbb{R}_n[x]$ hanno lo stesso numero di elementi comune a tutte le basi di $\mathbb{R}_n[x]$ si chiama dimensione di $\mathbb{R}_n[x]$ ($\dim \mathbb{R}_n[x]$). Una base di $\mathbb{R}_n[x]$ famosa é la base canonica $1, x, x^2, \dots, x^n$ e ha $n+1$ elementi, deduciamo che $\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$.

Se si hanno $n+1$ elementi in uno spazio vettoriale di dim. $n+1$, allora questi elementi sono una base dello spazio sse sono lin. ind.

Bisogna dimostrare che i polinomi sono linearmente indipendenti perché essi sono nel numero giusto di $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$. Osserviamo che $L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ hanno la seguente proprietà: $\forall h, j = 0, \dots, n$

$$L_j(x_h) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = j \\ 0 & \text{se } h \neq j \end{cases} \quad (\$)$$

$$\frac{\cancel{(x_j - x_0)}\dots\cancel{(x_j - x_n)}}{\cancel{(x_j - x_0)}\dots\cancel{(x_j - x_n)}} = 1$$

ci sarà un $(x_h - x_i) = 0$ rendendo tutto 0

Dimostriamo che $L_0(x), \dots, L_n(x)$ sono lin. ind.

Sia $\alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \dots + \alpha_n L_n(x)$ una comb. lin. che coincide con il polinomio nullo, cioé t.c.

$\alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \dots + \alpha_n L_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Allora $\forall i = 0, \dots, n$, deve essere

$\alpha_0 L_0(x_i) + \alpha_1 L_1(x_i) + \dots + \alpha_n L_n(x_i) = 0 = \alpha_i L_i(x_i) = \alpha_i = 0 \Rightarrow L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ sono lin. ind. e dunque una base di $\mathbb{R}_n[x]$.

Definiamo il polinomio $p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$,

- $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$
- $\forall i = 0, \dots, n, \; p(x_i) = y_0 L_0(x_i) + y_1 L_1(x_i) + \dots + y_n L_n(x_i) = y_i$

Abbiamo dimostrato l'esistenza di un polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che nei nodi x_i assume i valori y_i.

Per dimostrare che $p(x)$ è l'unico polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che soddisfa la condizione $p(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, n$, supponiamo che $q(x)$ sia un altro polinomio in $\mathbb{R}_n[x]$ che soddisfa $q(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, n$ e dimostriamo che $q(x)$ coincide con $p(x)$.

Poiché $q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ e $L_0(x), \dots, L_n(x)$ sono una base di $\mathbb{R}_n[x]$, $\exists \beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ t.c. $q(x) = \beta_0 L_0(x) + \beta_1 L_1(x) + \dots + \beta_n L_n(x)$. Poiché $q(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, n$, allora $\forall i = 0, \dots, n$

$y_i = q(x_i) = \beta_0 L_0(x_i) + \beta_1 L_1(x_i) + \dots + \beta_n L_n(x_i) = \beta_i \qquad \beta_i = y_i$

$\Rightarrow q(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) = p(x)$. $\square$

Def. (1.1) Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0, \dots, x_n$ distinti. L'unico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ t.c. $p(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, n$ si chiama polinomio d'interpolazione dei dati $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ o anche polinomio d'interpolazione dei valori $y_0, \dots, y_n$ sui nodi $x_0, \dots, x_n$.

La prima dim. del Teo 1.1 ci dice che $p(x)$ si scrive in forma canonica come

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

La seconda dim. del Teo 1.1 ci dice che $p(x)$ si scrive in forma di Lagrange come

$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$ dove $\forall i = 0, \dots, n$ $(\ast)$

Errore (Resto) dell' interpolazione polinomiale

Teorema 1.2: Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione di classe $C^{n+1}[a,b]$ e sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $f(x)$ sugli $n+1$ nodi distinti $x_0,\dots,x_n\in[a,b]$. Allora, $\forall x\in[a,b]$ esiste un punto $\xi=\xi(x)\in(a,b)$ t.c.:

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \qquad (\in)$$

$C^{n+1}[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f$ è derivabile $n+1$ volte su $[a,b]$ e $f,f',\dots,f^{(n+1)}$ sono continue su $[a,b]\}$

dim:

Sia $x\in[a,b]$ fissato.

- caso 1: x coincide con uno dei nodi $x_0,\dots,x_n$. In tal caso posso scegliere un qualsiasi $\xi\in(a,b)$ e sono sicuro che $\in$ vale perche ottengo $0=0$ (il 1° membro è 0 perché $p(x_i)=f(x_i)$ $\forall i=0,\dots,n$ per def. di $p(x)$ mentre il 2° membro è 0 perche $(x_i-x_i)=0$ e si annulla).
- caso 2: x non coincide con uno dei nodi $x_0,\dots,x_n$. Definiamo $\pi(y)=(y-x_0)(y-x_1)\dots(y-x_n)$ $r(y)=f(y)-p(y)$ e

$$z:[a,b]\to\mathbb{R} \qquad z(y)=r(y)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(y)$$

$z(y)$ è una funzione di classe $C^{n+1}[a,b]$ "ereditata" da $f(y)$. $z(y)$ si annulla in almeno $n+2$ punti di $[a,b]$ perché:

- si annulla in tutti i nodi $x_0,x_1,\dots,x_n$ (esempio: $z(x_0)=r(x_0)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(x_0)\to f(x_0)-p(x_0)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(x_0)$ $\to 0=0$ per def di $p(x)$ e per def di $\pi(y)$)
- si annulla in x $\left(z(x)=r(x)-\frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(x)=0\right)$

Per il Teo di Rolle,

$z'(y)$ si annulla in almeno $n+1$ punti di (a,b)

$z''(y)$ si annulla in almeno n punti di (a,b)

$z'''(y)$ si annulla in almeno $n-1$ punti di (a,b)

$\vdots$

$z^{(n+1)}(y)$ si annulla in almeno 1 punto di (a,b): tale ξ

Questo punto ξ fa valere la formula $(\in)$

$$z(y) = r(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(y) = f(y) - p(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)}\pi(y)$$

o perché occ. sn

ha occ. nn ed è monico

$$z^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - p^{(n+1)}(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)}\pi^{(n+1)}(y) = f^{(n+1)}(y) - \frac{r(x)}{\pi(x)}(n+1)!$$

$$0 = z^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{r(x)}{\pi(x)}(n+1)! \rightarrow \frac{r(x)}{\pi(x)}(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi) \rightarrow$$

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\pi(x)$$

$p^{(n+1)}(y) = 0$ perché derivo fino a 0.

Per capire cos'è $\pi^{(n+1)}(y)$ guardiamo il caso $n=2$: $\pi(y) = (y-x_0)(y-x_1)(y-x_2) =$
$= y^3 - (x_0 + x_1 + x_2)y^2 + (x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2)y^2 - x_0x_1x_2$ quindi:

$\pi^{(2)}(y) = \frac{d^3}{dy^3}y^3$ In generale $\pi^{(n+1)}(y) = \frac{d^{n+1}}{dy^{n+1}}y^{n+1} = (n+1)!$ □

Forma di Newton del pol. d'interp.

Def (differenze divise): (1.2)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione.

- Se $y \in [a,b]$, si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a y il numero $f[y] = f(y)$.
- Se $y_1, \dots, y_k \in [a,b]$ sono $k \geq 2$ punti distinti, si definisce differenza divisa di $f(x)$ relativa a $y_1, \dots, y_k$ il numero

$$f[y_1, \dots, y_k] = \frac{f[y_1, \dots, y_{k-2}, y_k] - f[y_1, \dots, y_{k-1}]}{y_k - y_{k-1}}$$

Teorema 1.3: Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ punti distinti. Allora il pol. d'interpol. di $f(x)$ sui nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ è

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \qquad (N)$$

Chiamata anche forma di Newton di $p(x)$.

Corollario 1.1: Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione e siano $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ punti distinti. Allora $f[x_0, \dots, x_n]$ non cambia se vengono permutati i suoi $n+1$ argomenti, cioè $f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$ $\forall$ permutazione σ di $\{0, \dots, n\}$

dim: ($c_{1.1}$)

Sia σ una fissata (generica) permutazione di $\{0,\dots,n\}$. Applicando il Teorema 1.3 con i nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$, si deduce che il pol. d'interpol. $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_0, x_1, \dots, x_n$ è dato da (N). Applicando il teorema con i nodi $x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ si deduce che il pol. d'interpol. $p(x)$ di $f(x)$ sui nodi $x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ è data da (N_σ):

$$p_\sigma(x) = f[x_{\sigma(0)}] + f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}](x - x_{\sigma(0)}) + f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}](x - x_{\sigma(0)})(x - x_{\sigma(1)}) + \dots +$$
$$+ f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}](x - x_{\sigma(0)})(x - x_{\sigma(1)}) \dots (x - x_{\sigma(n-1)})$$

Oss 1: Il pol. d'interpol. $p(x)$ non dipende dall'ordinamento dei nodi e quindi $p(x) = p_\sigma(x)$.

Oss 2: Il coefficiente direttore di $p(x)$ è $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ = il numero che moltiplica x^n in $p(x)$,

Il coefficiente direttore di $p_\sigma(x)$ è $f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$ = il numero che moltiplica x^n in $p_\sigma(x)$.

Poiché $p(x) = p_\sigma(x)$ per Oss 1, deve essere $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}]$. □

Algoritmo di valutazione del polinomio d'interpolazione in un punto

- Algoritmo basato sulla forma di Newton
- Algoritmo efficiente dal punto di vista computazionale

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, siano $x_0, \dots, x_n \in [a,b]$ distinti, e sia $t \in \mathbb{R}$. Si vuole costruire un algoritmo per calcolare $p(t)$, dove $p(x)$ è il polin. d'interpol. di $f(x)$ sui nodi $x_0, \dots, x_n$.

Per semplicità, descriviamo l'algoritmo nel caso $n=3$, cosicché per la (N) è

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

L'algoritmo è composto da 2 parti.

Parte 1 (indipendente dal punto t in cui devo valutare $p(x)$).

Consiste nel calcolo delle differenze divise rosse, calcolo che viene effettuato con la tabella delle differenze divise

$$\begin{tikzcd}
f[x_0] \arrow[dr] & & & \\
f[x_1] \arrow[dr] & f[x_0, x_1] \arrow[dr] & & \\
f[x_2] \arrow[dr] & f[x_0, x_2] \arrow[dr] & f[x_0, x_1, x_2] \arrow[dr] & \\
f[x_3] & f[x_0, x_3] & f[x_0, x_1, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3]
\end{tikzcd}$$

Parte 2

Una volta calcolate le diff. divise rosse, per calcolare $p(t)$ si usa un metodo noto come algoritmo di Ruffini-Horner: si scrive $p(t)$ nella forma

$$p(t) = \underbrace{f[x_0] + (t-x_0)\underbrace{\left(f[x_0,x_1] + (t-x_1)\underbrace{\left(f[x_0,x_1,x_2] + (t-x_2)\underbrace{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}_{h_3}\right)}_{h_2}\right)}_{h_1}}_{h_0}$$

Si pone

$h_3 = f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

$h_2 = f[x_0, x_1, x_2] + (t - x_2)h_3$

$h_1 = f[x_0, x_1] + (t - x_1)h_2$

$h_0 = f[x_0] + (t - x_0)h_1 \quad = p(t)$

$h_i = f[x_0, \dots, x_i] + (t - x_i)\, h_{i+1}$

Valutiamo il costo computazionale dell'algoritmo

Parte 1: Il numero $\frac{n(n+1)}{2}$ di elementi da calcolare coincide con il numero di elementi della parte triangolare inf. (inclusa la diagonale) di una matrice $n \times n$, ossia $\frac{n^2-n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \dots + n$.

Per calcolare ognuno di questi $\frac{n(n+1)}{2}$ elementi occorrono 2 sottrazioni e 1 divisione, per un totale di:

- $n(n+1)$ sottrazioni
- $\frac{n(n+1)}{2}$ divisioni

$\Rightarrow n(n+1)A + \frac{n(n+1)}{2}D$

<u>Parte 2</u>: Per il calcolo di ciascun h_i, $i = n-1, \dots, 0$, sono richieste 1 sottrazione, 1 addizione e 1 moltiplicazione. In totale:

- n sottrazioni
- n moltiplicazioni.
- n addizioni.

$\Rightarrow 2nA + nM$

$\xi - \eta = \xi + (-\eta) \qquad \frac{\xi}{\eta} = \xi \frac{1}{\eta}$

Costo complessivo

$C(n) = (n^2 + 3n)A + nM + \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)D \approx n^2 A + \frac{n^2}{2}D$ (in totale $\frac{3}{2}n^2 + \frac{9}{2}n \approx \frac{3}{2}n^2$ operazioni)

Oss 1.2: Supponiamo di dover valutare $p(x)$ in m punti $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$. Siccome la Parte 1 (calcolo delle differenze divise con la tabella) non dipende dal punto in cui si valuta $p(x)$, per la valutazione di $p(x)$ in $t_1, \dots, t_m$ si procede così:

- la parte 1 si fa una volta sola $\Rightarrow$ il costo rimane $n(n+1)A + \frac{n(n+1)}{2} D$
- la parte 2 (Ruffini-Horner) viene ripetuta per calcolare $p(t_1), \dots, p(t_m)$ $\Rightarrow$ il costo è $m(2nA + nM)$

Il costo totale per valutare $p(x)$ in m punti è

$$C_m(n) = (n^2 + 2nm + n)A + nmM + \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)D \approx (n^2 + 2nm)A + nmM + \frac{n^2}{2} D$$

Aggiunta di un nodo d'interpolazione

La forma di Newton è molto utile quando ai dati d'interpolazione $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ ne viene aggiunto uno nuovo (x_{n+1}, y_{n+1}) con $x_{n+1} \neq x_0, \dots, x_n$. Infatti, detta $f(x)$ una qualsiasi funzione t.c. $f(x_i) = y_i$ $\forall i = 0, \dots, n$, il pol. d'interpol. dei dati vecchi $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ è in forma di Newton.

$$p(x) = \underline{f[x_0]} + \underline{f[x_0, x_1]}(x - x_0) + \underline{f[x_0, x_1, x_2]}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \underline{f[x_0, \dots, x_n]}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

e il pol. d'interpolazione dei dati nuovi $(x_0, y_0), \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ è (in forma di Newton)

$$q(x) = p(x) + f[x_0, \dots, x_{n+1}](x - x_0) \dots (x - x_n)$$

Conclusioni:

- Avendo a disposizione $p(x)$ in forma di Newton, sono noti i coefficienti $f[x_0], \dots, f[x_0, \dots, x_n]$ e quindi basta calcolare $f[x_0, \dots, x_{n+1}]$ per ottenere la forma di Newton di $q(x)$

Caso $n = 3$, $n+1 = 4$

$$\begin{array}{lllll}
f[x_0] & & & & \\
f[x_1] & f[x_0, x_1] & & & \\
f[x_2] & f[x_0, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
f[x_3] & f[x_0, x_3] & f[x_0, x_1, x_3] & f[x_0, x_1, x_2, x_3] & \\
f[x_4] & f[x_0, x_4] & f[x_0, x_1, x_4] & f[x_0, x_1, x_2, x_4] & f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]
\end{array}$$

Il calcolo di $f[x_0, \dots, x_{n+1}]$ richiede di "aggiungere una riga (la $n+1$)" alla tabella delle differenze divise usata per costruire $p(x)$ e calcolarne i relativi termini (che sono $n+2$ ma il 1° non va calcolato perché è dato). Il costo del calcolo di $f[x_0, \dots, x_{n+1}]$ è dunque:

$2(n+1)A + (n+1)D$

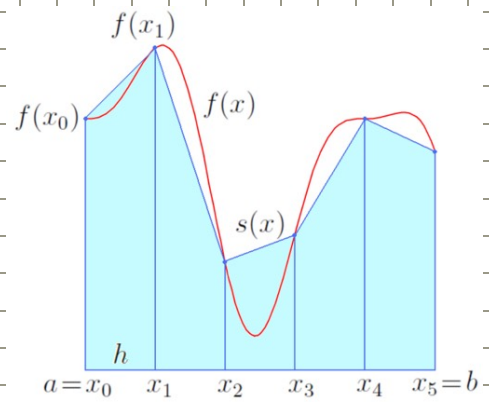
- Avendo a disposizione $p(x)$ in forma di Newton e il suo valore $p(t)$, per calcolare

$q(t) = p(t) + f[x_0, \dots, x_{n+1}](t - x_0) \dots (t - x_n)$

occorrono $(n+2)A + (n+1)M + 2(n+1)A + (n+1)D = (3n+4)A + (n+1)M + (n+1)D \approx$
$\approx 3nA + nM + nD$

Formula dei trapezi (leggere)

E' data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile e si vuole calcolare un' approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$.



$(n=5)$

Si suddivide l'intervallo $[a,b]$ in $n\geq 1$ sottointervalli della stessa ampiezza $h=\frac{b-a}{n}$ e si pone $x_j=a+jh$ con $j=0,1,\dots,n$.

Il valore che si prende come approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ è $\int_a^b s(x)dx$, dove $s:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$s(x)=f(x_j)+\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j}(x-x_j)$$

per $x\in[x_j,x_{j+1}]$ con $j=0,1,\dots,n-1$

(area sottostante alla linea rosso è l'integrale, mentre la parte blu è l'approssimazione)

Dunque il valore che prendiamo come approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ è

$$I_n=\int_a^b s(x)dx=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} s(x)dx=\sum_{j=0}^{n-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}}\left[f(x_j)+\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j}(x-x_j)\right]dx=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f(x_j)(x-x_j)+\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j}\frac{(x-x_j)^2}{2}\right]_{x_j}^{x_{j+1}}$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\left[f(x_j)(x_{j+1}-x_j)+\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{2}(x_{j+1}-x_j)\right]=\sum_{j=0}^{n-1}h\,\frac{f(x_{j+1})+f(x_j)}{2}=$$

$$=\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left[f(x_j)+f(x_{j+1})\right]=\frac{h}{2}\Big[\underbrace{f(x_0)+f(x_1)}_{j=0}+\underbrace{f(x_1)+f(x_2)}_{j=1}+\underbrace{f(x_2)+f(x_3)}_{j=2}+\dots+f(x_{n-1})+f(x_n)\Big]$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)\right]=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)\right]$$

$$I_n=h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)\right]$$

Formula dei trapezi di ordine n per approssimazione $\int_a^b f(x)dx$.

$h=\frac{b-a}{n}$ = passo di discretizzazione di I_n.

quando integro $f(x)$ diventa $(x\,f(x_j))$ al più più una costante che scelgo come $f(x_j)(x_j)$ così che quando valuto l'integrale in x_j mi si annulla

Errore o resto della formula dei trapezi

Vogliamo capire qual'è l'errore $\left|\int_a^b f(x)dx - I_n\right|$ commesso approssimando $\int_a^b f(x)dx$ con I_n.

Lemma 2.1 (generalizzazione del teorema sulla media integrale)

Siano $w, \alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni tali che

- $w(x)$ è continua e ≥ 0 su $[a,b]$
- $\alpha(x)$ e $\beta(x)w(x)$ sono continue su $[a,b]$
- $m \leq \beta(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$ dove $m = \min_{x\in[a,b]} \alpha(x)$ e $M = \max_{x\in[a,b]} \alpha(x)$

Allora $\exists y \in [a,b]$ t.c. $\int_a^b \beta(x)w(x)dx = \alpha(y)\int_a^b w(x)dx$

dim. (2.1)

Poiché per ipotesi $w(x) \geq 0$ su $[a,b]$ e $m \leq \beta(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$,

si ha $m\,w(x) \leq \beta(x)w(x) \leq M w(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ per monotonia dell'integrale, si ha $\underbrace{\int_a^b m\,w(x)dx}_{m\int_a^b w(x)dx} \leq \int_a^b \beta(x)w(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b M w(x)dx}_{M\int_a^b w(x)dx}$

Consideriamo la funzione $z : [a,b] \to \mathbb{R}$, $z(y) = \alpha(y)\int_a^b w(x)dx$

$z(y)$ è continua su $[a,b]$ come $\alpha(y)$ e inoltre

$\min_{y\in[a,b]} z(y) = m\int_a^b w(x)dx$ e $\max_{y\in[a,b]} z(y) = M\int_a^b w(x)dx$

Per il teo. dei valori intermedi, $z(y)$ assume su $[a,b]$ tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo $\Rightarrow$ $z(y)$ assume su $[a,b]$ anche il valore $\int_a^b \beta(x)w(x)dx$, cioè

$\exists y \in [a,b]$ t.c. $z(y) = \int_a^b \beta(x)w(x)dx = \alpha(y)\int_a^b w(x)dx$. $\square$

Teorema 2.1: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe $C^2[a,b]$ e sia I_n la formula dei trapezi di ordine n e passo $h = \frac{b-a}{n}$ per approssimare $\int_a^b f(x)dx$

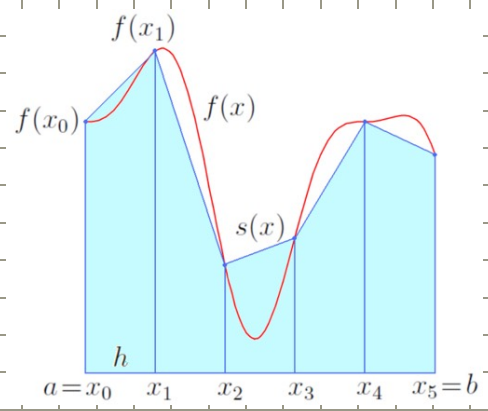
Allora $\exists y \in [a,b]$ t.c.

$$\int_a^b f(x)dx - I_n = -\frac{(b-a)f''(y)}{12}h^2$$

$$I_n = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)\right] \quad (T)$$

$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, n$

dim. (T 2.1)



$(n=5)$

Siano $x_j = a + jh$ con $j=0,1,\dots,n$ e sia $s(x)$ la funzione lineare

$$s(x) = f(x_j) + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j)$$

per $x \in [x_j, x_{j+1}]$ con $j=0,1,\dots,n-1$

Osserviamo che $s(x)$ coincide sull'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ con il polinomio (retta) di interpolazione di $f(x)$ sui nodi x_j e x_{j+1}.

Dunque

$$\int_a^b f(x)dx - I_n = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b s(x)dx = \int_a^b [f(x) - s(x)]dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [f(x) - s(x)]dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f''(\xi_j(x))}{2!}(x - x_j)(x - x_{j+1})dx =$$

(ho applicato il teo. sull'errore dell'interpolazione sull'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$: $\xi_j(x) \in (x_j, x_{j+1})$)

$$= -\sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f''(\xi_j(x)) \frac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{2!} dx =$$

Applico il lemma precedente sull'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ con $w(x) = \frac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{2}$

$\beta(x) = f''(\xi_j(x))$ e $\alpha(x) = f''(x)$,

- $w(x)$ è cont e ≥ 0 su $[x_j, x_{j+1}]$
- $\alpha(x)$ è cont su $[x_j, x_{j+1}]$ perché $f \in C^2[a,b]$
- $\beta(x)w(x)$ è cont su $[x_j, x_{j+1}]$ perché è $= -[f(x) - s(x)]$ che è cont. su $[x_j, x_{j+1}]$
- $\min_{x \in [x_j, x_{j+1}]} \alpha(x) \leq \beta(x) \leq \max_{x \in [x_j, x_{j+1}]} \alpha(x)$ $\forall x \in [x_j, x_{j+1}]$ perché $\beta(x) = \alpha(\xi_j(x))$ e $\xi_j(x) \in (x_j, x_{j+1})$ $\forall x \in [x_j, x_{j+1}]$

Conclusione: $\exists\, \mu_j \in [x_j, x_{j+1}]$ t.c. $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \beta(x)w(x)dx = \alpha(\mu_j)\int_{x_j}^{x_{j+1}} w(x)dx$

$$= -\sum_{j=0}^{n-1} f''(\mu_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{(x - x_j)(x_{j+1} - x)}{2} dx \quad (\mu_j \in [x_j, x_{j+1}])$$

cambio variabile $t = x - x_j$, $x = t + x_j$ $dx = dt$

$$= -\sum_{j=0}^{n-1} f''(y_j) \int_0^h \frac{t(h-t)}{2}\, dt = -\sum_{j=0}^{n-1} f''(y_j) \left[\frac{h}{4} t^2 - \frac{t^3}{6} \right]_0^h = -\sum_{j=0}^{n-1} f''(y_j) \frac{h^3}{12} =$$

$$= \frac{-h^3 n}{12} \underline{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f''(y_j)} = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(y)$$

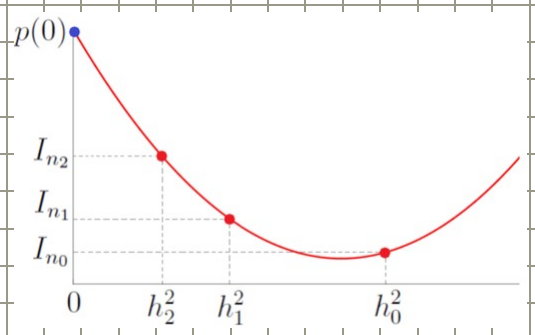
dove l'ultima uguaglianza vale perché essendo $f''(x)$ continua su $[a,b]$ per ipotesi e essendo la media aritmetica (blu) un valore compreso fra il minimo e il massimo di $f''(x)$ su $[a,b]$ per il teo. dei valori intermedi esiste sicuramente un $y \in [a,b]$ t.c. $f''(y) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f''(y_j)$. □

Estrapolazione (leggere)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile e siano $I_{n_0}, I_{n_1}, \dots, I_{n_m}$ le formule dei trapezi di ordini (distinti) $n_0, n_1, \dots, n_m$ e passi $h_0 = \frac{b-a}{n_0}$, $h_1 = \frac{b-a}{n_1}$, ..., $h_m = \frac{b-a}{n_m}$ per approssimare $\int_a^b f(x)dx$.

Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione dei dati $(h_0^2, I_{n_0}), (h_1^2, I_{n_1}), \dots, (h_m^2, I_{n_m})$

[quindi $p(x)$ è quell'unico polinomio in $\mathbb{R}_m[x]$ t.c. $p(h_i^2) = I_{n_i}$ $\forall i = 0, 1, \dots, m$



Caso $n=2$

<u>Risultato:</u> $p(0)$ è un'approssimazione di $\int_a^b f(x)dx$ molto più accurata delle singole formule dei trapezi $I_{n_0}, I_{n_1}, \dots, I_{n_m}$.

Il procedimento di valutare in 0 il polinomio d'interpolazione $p(x)$ si chiama ESTRAPOLAZIONE perché $p(x)$ viene valutato in un punto $(x=0)$ che sta fuori dal più piccolo intervallo che contiene i nodi $h_0^2, h_1^2, \dots, h_m^2$.

Il valore $p(0)$ si chiama valore estrapolato.

Richiami Algebra lineare

Calcolo determinanti

Usiamo il metodo di Laplace per calcolare $\det(A)$

Funzionamento:

- si sceglie una riga o una colonna della matrice
- si sviluppa il determinante lungo quella riga o colonna tenendo conto della regola della scacchiera per la determinazione dei segni:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Teorema di Binet: Date $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

Teorema: Data $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det(A^T) = \det(A)$

Traccia, Determinante, Raggio spettrale e autovalori

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ciascun autovalore compare in questa sequenza un numero di volte pari alla sua molteplicità algebrica come radice del polinomio caratteristico di A).

$\text{traccia}(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

(no) $\rho(A) \overset{def}{=}$ raggio spettrale di $A := \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) \geq 0$

Matrici invertibili

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice invertibile se esiste una matrice $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tale che $AB = BA = I$. In tal caso, la matrice B è univocamente (unica) determinata, si chiama matrice inversa di A e si denota con A^{-1}.

Teorema: Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è invertibile sse $\det(A) \neq 0$ sse 0 non è un autovalore di A

Teorema: Dato $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, si ha che AB è invertibile $\Leftrightarrow$ A, B sono invertibili e in tal caso $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

[Verifica: $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_{I}B = B^{-1}B = I \rightarrow B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$]

Matrici diagonalizzabili

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice diagonalizzabile se esistono una matrice invertibile $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e una matrice diagonale $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ t.c. $[\underline{x}_1 | \underline{x}_2 | \dots | \underline{x}_n]$

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$A = XDX^{-1} \quad (*)$$

Nell' $(*)$ c'è scritto che $\forall i = 1, \dots, n$, l'elemento diagonale λ_i di D è un autovalore di A con corrispondente autovettore $\underline{x}_i$ = i-esima colonna di X.

Teorema: Se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ possiede n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile.

Matrici hermitiane e simmetriche

Data $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, indichiamo con A^* la matrice trasposta coniugata di A.

$a+ib = a-ib$ (cambio segno parte immaginaria)

Teorema: Date A, B matrici moltiplicabili,

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad (AB)^* = B^* A^*$$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice hermitiana se $A^* = A$

Oss: Nel caso in cui le componenti di A sono reali (cioè $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) si ha $A^T = A^*$ e dunque A è hermitiana sse A è simmetrica

Oss: Gli elementi diagonali di una matrice hermitiana A sono uguali ai loro coniugati e dunque per via dell'uguaglianza $A^* = A$ e dunque sono reali.

Teorema: Gli autovalori di una matrice hermitiana sono reali.

dim.

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana e sia λ un autovalore di A. Dimostro che λ è reale.

Prendo $\underline{x} \neq \underline{0}$ autovettore di A corrispondente a λ:

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow \underline{x}^* A \underline{x} = \underline{x}^*(\lambda \underline{x}) = \lambda \underline{x}^* \underline{x} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \overset{\text{coniugato}}{\overline{x_i}}\, x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \frac{\underline{x}^* A \underline{x}}{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$*$ reale > 0

Dimostriamo che il numeratore $\underline{x}^* A \underline{x}$ è reale perché è uguale al suo complesso coniugato:

$$\overline{\underline{x}^* A \underline{x}} = (\underline{x}^* A \underline{x})^* = \underline{x}^* A^* (\underline{x}^*)^* = \underline{x}^* A \underline{x}. \quad \square$$

$A^* = A$ matrice hermitiana

$* \quad z = a+ib \quad \bar{z} = a-ib \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + abi - abi + b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

Matrici definite positive

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ si dice definita positiva se $Re(\underline{x}^* A \underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$.

Oss. $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$,

$$Re(\underline{x}^* A \underline{x}) = \frac{\underline{x}^* A \underline{x} + \overline{\underline{x}^* A \underline{x}}}{2} = \frac{\underline{x}^* A \underline{x} + (\underline{x}^* A \underline{x})^*}{2} = \frac{\underline{x}^* A \underline{x} + \underline{x}^* A^* \underline{x}}{2} = \underline{x}^* \left(\frac{A + A^*}{2}\right) \underline{x} = \underline{x}^* Re(A) \underline{x}$$

dove

$$Re(A) := \frac{A + A^*}{2}, \quad Im(A) = \frac{A - A^*}{2i} \qquad (A = Re(A) + i\, Im(A))$$

$z = a + ib \quad \bar{z} = a - ib \qquad \frac{z + \bar{z}}{2} = a = Re(z) \qquad \frac{z - \bar{z}}{2} = b = Im(z)$

Conseguenza oss. precedente: $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$, $\underline{x}^* Re(A) \underline{x} \in \mathbb{R}$ essendo $\underline{x}^* Re(A) \underline{x} = Re(\underline{x}^* A \underline{x})$.

Prop: Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ allora A è definita positiva sse $Re(A)$ è definita positiva.

dim.

A è definita positiva sse $Re(\underline{x}^* A \underline{x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$

sse $\underline{x}^* Re(A) \underline{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$

sse $Re(\underline{x}^* Re(A) \underline{x}) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$

sse $Re(A)$ è definita positiva. $\square$

Prop: Ogni matrice definita positiva $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è invertibile e i suoi autovalori hanno parte reale positiva.

dim:

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definita positiva. Devo dimostrare che gli autovalori di A hanno parte reale positiva perché questo mi dice che nessuno di essi è 0 e dunque A risulta automaticamente invertibile.

Sia λ generico autovalore di A. Prendiamo $\underline{x} \neq \underline{0}$ autovettore corrispondente a λ:

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x} \Rightarrow \underline{x}^* A \underline{x} = \underline{x}^* (\lambda \underline{x}) = \lambda \underline{x}^* \underline{x} = \lambda \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i = \lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\underline{x}^* A \underline{x}}{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Re(\lambda) = \frac{Re(\underline{x}^* A \underline{x})}{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} > 0. \ \square$$

Teorema 3.1: Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice hermitiana. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. A è definita positiva
2. $\underline{x}^* A \underline{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$
3. Gli autovalori di A sono reali e positivi
4. $\det(A_k) > 0 \quad \forall k = 1, \dots, n$, dove $A_1, \dots, A_k$ sono le sottomatrici principali di testa di A:

$$A_1 = [a_{11}], \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, A_n = A$$

Polinomi di Matrici

Se $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_m\lambda^m$ è un polinomio e $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è una matrice, definiamo

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m$$

Teorema 3.2: Se $p(\lambda)$ è un polinomio e $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è una matrice con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ allora gli autovalori di $p(A)$ sono $p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$

dim: (in casi particolari) (T 3.2)

Caso 1: $p(\lambda) = a_0$ è costante $\quad p(A) = a_0 I = \begin{bmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ gli autovalori di $p(A)$ sono $\underbrace{a_0, \dots, a_0}_{n \text{ volte}} = p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)$

Caso 2: $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda$ ha grado 1. Il polinomio caratteristico di $p(A)$ e di A sono legati dalla seguente relazione: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $C_{p(A)}(\lambda) = \det(\lambda I - p(A)) = \det(\lambda I - (a_0 I + a_1 A)) =$

$$= \det((\lambda - a_0)I - a_1 A) = \det\left(a_1\left(\frac{\lambda - a_0}{a_1} I - A\right)\right) = a_1^n \det\left(\frac{\lambda - a_0}{a_1} I - A\right) \qquad \det(\alpha B) = \alpha^n \det(B)$$

$$= a_1^n C_A\left(\frac{\lambda - a_0}{a_1}\right)$$

Dunque gli autovalori di $p(A)$ sono $\{\lambda \in \mathbb{C} : C_{p(A)}(\lambda) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : C_A\left(\frac{\lambda - a_0}{a_1}\right) = 0\} =$

$$= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{\lambda - a_0}{a_1} = \lambda_1, \dots, \lambda_n\right\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = a_0 + a_1\lambda_1, a_0 + a_1\lambda_2, \dots, a_0 + a_1\lambda_n\} =$$

$$= \{a_0 + a_1\lambda_1, a_0 + a_1\lambda_2, \dots, a_0 + a_1\lambda_n\} = \{p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)\}$$

Caso 3: La matrice A è diagonalizzabile. In tal caso esistono $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibile e $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ diagonale (avente sulla diagonale gli autovalori di A) tale che

$$A = XDX^{-1}$$

$$A^2 = XD\underbrace{X^{-1}X}_{I}DX^{-1} = XD^2X^{-1}$$

$$A^3 = XDX^{-1}XDX^{-1}XDX^{-1} = XD^3X^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^k = XD^kX^{-1} \quad \forall k \geq 0$$

Fissiamo un generico polinomio $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_m\lambda^m$, $p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m =$

$$= a_0 XIX^{-1} + a_1 XDX^{-1} + a_2 XD^2X^{-1} + \dots + a_m XD^mX^{-1} = X\underbrace{(a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_m D^m)}_{p(D)}X^{-1} =$$

$$p(D) = a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_m D^m = a_0 \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^2 \end{bmatrix} + \dots + a_m \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^m \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_m) \end{bmatrix}$$

$$= X\underbrace{(a_0 I + a_1 D + a_2 D^2 + \dots + a_m D^m)}_{p(D)}X^{-1} = X \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(\lambda_m) \end{bmatrix} X^{-1}$$

Conclusione: La scrittura precedente ci dice che $p(A)$ è diagonalizzabile con autovalori $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_m)$ e con corrispondenti autovettori, uguali a quelli di A, dati dalle colonne di X. $\square$

Matrici irriducibili

Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, il grafo associato ad A è il grafo così definito:

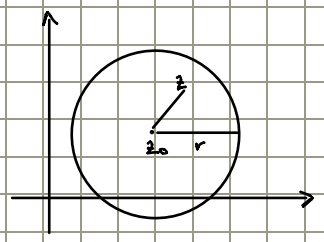
- i nodi sono $1, \dots, n$
- gli archi sono le frecce $i \to j$ tali che $a_{ij} \neq 0$

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice irriducibile se il suo grafo è fortemente connesso.

Un grafo è fortemente connesso se esiste un ciclo nel grafo che tocca tutti i nodi.

Localizzazione degli autovalori

$\mathcal{C}(z_0, r)$ = cerchio nel piano complesso di centro z_0 e raggio r = $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$



Data una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, i cerchi di Gershgorin (G.) di A sono i cerchi $K_1, \dots, K_n$ definiti come segue:

$\forall i = 1, \dots, n$

$$K_i = \mathcal{C}(a_{ii}, |a_{i1}| + \dots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}|) = \mathcal{C}\left(a_{ii}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|\right)$$

I cerchi di G. $K_1, \dots, K_n$ si chiamano anche cerchi di G. per riga di A. Questo serve a distinguerli dai cerchi di G per colonna di A che sono i cerchi $H_1, \dots, H_n$ definiti come segue:

$\forall j = 1, \dots, n$

$$H_j = \mathcal{C}\left(a_{jj}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|\right)$$

Teorema: (1° teo. di G.) (3.3)

Gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ stanno tutti nell'unione dei cerchi di G di A

dim: (T. 2.3)

Sia λ un generico autovalore di A. Mostriamo che λ sta nell'unione dei cerchi di G di A.

Prendiamo $\underline{u} \neq \underline{0}$ autovettore di A corrispondente a λ:

$$A\underline{u} = \lambda \underline{u} \iff (A\underline{u})_i = (\lambda \underline{u})_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\iff \underset{(*)}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j = \lambda u_i} \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

Seleziono un indice $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tale che u_{i_0} abbia modulo massimo rispetto a tutte le altre componenti di $\underline{u}$ $\left(|u_{i_0}| = \max_{i=1,\dots,n} |u_i| \neq 0\right)$.

L'equazione i_0-esima in $(*)$ dice che:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} u_j = \lambda u_{i_0} \iff a_{i_0 i_0} u_{i_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} u_j = \lambda u_{i_0}$$

$$\iff (\lambda - a_{i_0 i_0}) u_{i_0} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} u_j$$

Applico il modulo a sx e dx $\Rightarrow |\lambda - a_{i_0 i_0}||v_{i_0}| = \left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0 j} v_j\right| \underset{\text{diag. t-largad}}{\leq} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}||v_j| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}||v_{i_0}|$

$$= \boxed{|v_{i_0}| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|} \leftarrow K_{i_0}$$

Conclusione: $|\lambda - a_{i_0 i_0}||v_{i_0}| \leq |v_{i_0}| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$ si sta dicendo quindi che λ ha una distanza da $a_{i_0 i_0}$ (= centro di G.) $\leq$ del raggio $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0 j}|$ di K_{i_0} $\Rightarrow \lambda \in K_{i_0} \Rightarrow \lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i = K_1 \cup \ldots \cup K_n$. □

Teorema: (2° teo di G.) (3.4)

Supponiamo che l'unione di K cerchi di G. di $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sia disgiunta dagli altri $n-K$ cerchi. Allora K autovalori di A stanno nella prima unione e i rimanenti $n-K$ stanno nella seconda unione.

Teorema: (3° teo di G. (forte)) (3.5)

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sia irriducibile. Allora i punti che stanno sul bordo di quei cerchi di G. a cui appartengono ma non stanno sul bordo di tutti i cerchi non sono autovalori di A.

Teorema: (3° teo di G. (debole)) (3.6)

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sia irriducibile e sia $\mathcal{B}$ il bordo dell'unione dei cerchi di G. Allora i punti di $\mathcal{B}$ che non stanno sul bordo di tutti i cerchi non sono autovalori di A.

dim: (T. 3.6)

Sia $z \in \mathcal{B}$ punto che non sta sul bordo di tutti i cerchi.

- Siccome $z \in \mathcal{B}$, z non può stare all'interno di nessun cerchio e dunque per forza sta sul bordo di quei cerchi a cui appartiene.
- z non sta sul bordo di A per il 3° teo. di G. forte.

$\Rightarrow z$ non è un autovalore di A per il 3° teo. di G. forte. □

Osserviamo inoltre, in vista dell'applicazione del 3° teo. di G., che una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è irriducibile sse A^T è irriducibile.

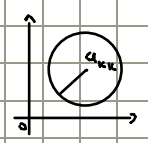
Teorema: (1° teo. di G. migliorato)

Gli autovalori di una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ stanno tutti sia nell'unione dei cerchi di G. $K_1, K_2, \ldots, K_n$ di A sia nell'unione dei cerchi di G. per colonna $H_1, \ldots, H_n$ di A (= cerchi di G. di A^T), dunque stanno nell'intersezione delle due unioni $(K_1 \cup \ldots \cup K_n) \cap (H_1 \cup \ldots \cup H_n)$.

Matrice diagonale dominante

Sia $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matrice.

- Si dice che A è a diagonale dominante (per righe) (per colonna) se
  - $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n$ (questa condizione dice che 0 non può essere interno a nessun cerchio di G. di A) $\quad |a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall j = 1, \dots, n$ (0 non può essere interno a nessun cerchio di G. per colonna di A)
  - esiste almeno un indice $K \in \{1, \dots, n\}$ per cui vale:
    $|a_{KK}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq K}}^{n} |a_{Kj}|$ (questa condizione dice che $0 \notin K_K$)
    $|a_{KK}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq K}}^{n} |a_{iK}|$ $\quad (0 \notin H_K)$



  - si dice che A è diagonale dominante in senso stretto (per righe) (per colonne) se
    $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = 1, \dots, n$
    $|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall j = 1, \dots, n$

Teorema 3.7: Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ soddisfi almeno una delle seguenti condizioni:

- A è a diag. dominante e irriducibile
- A è a diag. dominante in senso stretto
- A è a diag. dominante per colonne e irriducibile
- A è a diag. dominante in senso stretto per colonne

Allora A è invertibile.

dim: (1° caso) (T. 3.7)

Si dimostra che 0 non è un autovalore usando i teo di G. (il 3° teo. di G.). Poiché A è a diagonale 0 non può essere interno a nessun cerchio di G. di A e dunque 0 sta sul bordo di quegli eventuali cerchi di G. a cui appartiene. Inoltre, sempre per definizione di matrice a diag. dominante, esiste un cerchio di G. t.c. 0 non sta sul bordo di quel cerchio (in realtà non ci sta proprio in quel cerchio) $\Rightarrow$ siccome A è irriducibile per ipotesi, per il 3° teo di G. (forte) 0 non può essere autovalore di A. $\square$

Norme vettoriali (si usa per la distanza tra vettori)

Una funzione $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ si dice norma vettoriale se soddisfa 3 proprietà:

- $\|\underline{x}\| \geq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ e $\|\underline{x}\| = 0 \iff \underline{x} = 0$ (positività)
- $\|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ (omogeneità)
- $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$ (disug. triangolare)

Data una norma vettoriale $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, la distanza fra 2 vettori $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{C}^n$ è definita come $\|\underline{x} - \underline{y}\|$

Norme importanti in $\mathbb{C}^n$:

$\|\underline{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \quad \longrightarrow \quad \|\underline{x} - \underline{y}\|_1 = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$

$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \quad \longrightarrow \quad \|\underline{x} - \underline{y}\|_2 = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_n - y_n|^2}$

$\|\underline{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad \longrightarrow \quad \|\underline{x} - \underline{y}\|_\infty = \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|)$

Teorema (equivalenza delle norme) (3.8)

Tutte le norme vettoriali in $\mathbb{C}^n$ sono equivalenti, se prendiamo 2 norme vettoriali $\|\cdot\|', \|\cdot\|'': \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ allora si ha

$$\alpha \|\underline{x}\|'' \leq \|\underline{x}\|' \leq \beta \|\underline{x}\|'' \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$ dove $\alpha, \beta > 0$ sono costanti indip. da $\underline{x}$

Verifica con esempio che $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ sono equivalenti $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$

$1 \cdot \|\underline{x}\|_\infty \leq \|\underline{x}\|_1 \leq n \|\underline{x}\|_\infty \implies$ vale il teo. con $\alpha = 1$, $\beta = n$ nel caso in cui $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_\infty$

$\frac{1}{n} \|\underline{x}\|_1 \leq \|\underline{x}\|_\infty \leq 1 \|\underline{x}\|_1 \implies$ vale il teo. con $\alpha = \frac{1}{n}$, $\beta = 1$ nel caso in cui $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|'' = \|\cdot\|_1$ $\square$

Successioni di vettori

Una successione di vettori $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \dots$ in $\mathbb{C}^n$ si dice convergente al vettore $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ rispetto alla norma $\|\cdot\|$ se $\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| \to 0$.

Poiché tutte le norme vettoriali sono equivalenti, se una successione di vettori converge a $\underline{x}$ rispetto a una norma $\|\cdot\|$ allora converge a $\underline{x}$ rispetto a tutte le norme.

dim.

Supponiamo che $x^{(k)} \to \underline{x}$ rispetto alla norma $\|\cdot\|$ e sia $\|\cdot\|'$ un'altra norma.

Poiché $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ sono equivalenti, esistono due costanti $\alpha, \beta > 0$ t.c

$$\alpha\|\underline{y}\| \le \|\underline{y}\|' \le \beta\|\underline{y}\| \quad \forall \underline{y} \in \mathbb{C}^n$$

$$\Rightarrow \alpha\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| \le \|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\|' \le \beta\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| \quad \forall k \ge 0$$

Siccome $\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\| \to 0$ (perché $\underline{x}^{(k)} \to \underline{x}$ rispetto a $\|\cdot\|$) deduciamo dal teo. dei carabinieri che $\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\|' \to 0$ (cioè $\underline{x}^{(k)} \to \underline{x}'$ in $\|\cdot\|'$). $\square$

Una successione di vettori $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \dots$ in $\mathbb{C}^n$ si dice convergente (componente per componente) al vettore $\underline{x} \in \mathbb{C}^n$ se $\underline{x}^{(k)} \to \underline{x}$ componente per componente cioè se

$$\begin{cases} x_1^{(k)} \to x_1 \\ x_2^{(k)} \to x_2 \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \to x_n \end{cases} \iff \begin{cases} |x_1^{(k)} - x_1| \to 0 \\ |x_2^{(k)} - x_2| \to 0 \\ \vdots \\ |x_n^{(k)} - x_n| \to 0 \end{cases} \iff \max\left(|x_1^{(k)} - x_1|, |x_2^{(k)} - x_2|, \dots, |x_n^{(k)} - x_n|\right) \to 0$$

$$\iff \|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\|_\infty \to 0$$

La convergenza componente per componente altro non è che la convergenza in $\|\cdot\|_\infty$. Dunque ricordando l'equivalenza delle norme e il risultato dimostrato sopra, dire che $\underline{x}^{(k)} \to \underline{x}$ componente per componente è come dire che $\underline{x}^{(k)} \to \underline{x}$ in una qualsiasi norma.

Norme matriciali

Una funzione $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ si dice norma matriciale se soddisfa le seguenti proprietà:

(a) $\|A\| \ge 0 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\|A\| = 0$ sse $A = 0$ (positività)

(b) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (omogeneità)

(c) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ (disug. triangolare)

Data una norma matriciale $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, la distanza tra due matrici $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è $\|A - B\|$.

Norma matriciale indotta

Data una norma vettoriale $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ e una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definiamo il numero

$$\|A\| = \max_{\underline{x} \ne \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \max_{\underline{x} \ne \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{x}\|} \cdot \|A\underline{x}\| = \max_{\underline{x} \ne \underline{0}} \left\| \frac{1}{\|\underline{x}\|} A\underline{x} \right\| = \max_{\underline{x} \ne \underline{0}} \left\| A \underbrace{\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}}_{\to \underline{y}} \right\| = \max_{\|\underline{y}\| = 1} \|A\underline{y}\|$$

$$B(\alpha\underline{y}) = \alpha B\underline{y} \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall B \in \mathbb{C}^{n\times n}, \forall \underline{y} \in \mathbb{C}^n, \quad \|\underline{y}\| = \left\|\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}\right\| = \frac{1}{\|\underline{x}\|}\|\underline{x}\| = 1$$

Si può dimostrare che $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ che ad ogni $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ associa il numero $\|A\|$ sopra definito è una norma matriciale che si chiama norma matriciale indotta dalla norma vettoriale $\|\cdot\|$.

Oss: La norma matriciale indotta dalla norma vettoriale $\|\cdot\|$ viene sempre denotata con lo stesso simbolo $\|\cdot\|$

Teorema: (3.9)

Sia $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ una norma matriciale indotta dalla norma vettoriale $\|\cdot\|$ e siano $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

1. $\|I\| = 1$
2. $\|A\underline{x}\| \leq \|A\|\|\underline{x}\| \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
3. $\|A\|$ è la più piccola costante C che soddisfa $\|A\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$
4. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ (submoltiplicità)
5. $\rho(A) \leq \|A\|$

dim: (T. 3.9)

1. $\|I\| = \max\limits_{\|\underline{x}\|=1} \|I\underline{x}\| = \max\limits_{\|\underline{x}\|=1} \|\underline{x}\| = 1$

2. $\forall \underline{x} \neq \underline{0}$ fissato, $\dfrac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \max\limits_{\underline{y} \neq \underline{0}} \dfrac{\|A\underline{y}\|}{\|y\|} \overset{def}{=} \|A\| \Rightarrow \|A\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\|$

   Per verifica diretta, la disuguaglianza $\|A\underline{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\underline{x}\|$ vale anche per $\underline{x} = \underline{0}$ (in tal caso la disuguaglianza diventa $0 \leq 0$)

3. Prendiamo una qualsiasi costante C che soddisfa $\|A\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\| \ \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$. Mostriamo che $C \geq \|A\|$. Siccome $\|A\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\| \ \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ allora

$$\frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq C \quad \forall \underline{x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq C \quad \Rightarrow \|A\| \leq C$$

4. $\forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ fissato,

$$\|(AB)\underline{x}\| = \|A(B\underline{x})\| \overset{(2)}{\leq} \|A\| \cdot \|B\underline{x}\| \overset{(2)}{\leq} \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|\underline{x}\| \quad (*)$$

   Poiché $\|AB\|$ è la più piccola costante C t.c. $\|AB\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\| \ \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ (proprietà 3) e siccome la costante $\|A\|\|B\|$ è una delle tante C che soddisfano $\|AB\underline{x}\| \leq C\|\underline{x}\| \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{C}^n$ (per $(*)$) si conclude che $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

5. Sia λ un autovalore di A di modulo massimo $(|\lambda| = \rho(A))$ e sia $\underline{x} \neq \underline{0}$ un suo autovettore allora $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$

$$\|A\underline{x}\| = \|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \cdot \|\underline{x}\| = \rho(A)\|\underline{x}\| \Rightarrow \underbrace{\frac{\|A\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}}_{\leq \max_{\underline{y} \neq 0} \frac{\|A\underline{y}\|}{\|\underline{y}\|} = \|A\|} = \rho(A) \Rightarrow \|A\| \geq \rho(A). \quad \square$$

<u>Norme matriciali indotte importanti</u>

$$\|A\|_1 = \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|_1}{\|\underline{x}\|_1} = \max_{\|\underline{x}\|_1 = 1} \|A\underline{x}\|_1$$

$$\|A\|_2 = \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|_2}{\|\underline{x}\|_2} = \max_{\|\underline{x}\|_2 = 1} \|A\underline{x}\|_2$$

$$\|A\|_\infty = \max_{\underline{x} \neq \underline{0}} \frac{\|A\underline{x}\|_\infty}{\|\underline{x}\|_\infty} = \max_{\|\underline{x}\|_\infty = 1} \|A\underline{x}\|_\infty$$

Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ denotiamo con $A^{[1]}, A^{[2]}, \dots, A^{[n]}$ le colonne di A e con $A_{[1]}, A_{[2]}, \dots, A_{[n]}$ le righe di A.

Teorema: (3.10)

$\forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ valgono queste formule

- $\|A\|_1 = \max(\|A^{[1]}\|_1, \|A^{[2]}\|_1, \dots, \|A^{[n]}\|_1) = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$
- $\|A\|_\infty = \max(\|A_{[1]}\|_1, \|A_{[2]}\|_1, \dots, \|A_{[n]}\|_1) = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

Teorema: (equivalenza delle norme matriciali) (3.11)

Tutte le norme matriciali in $\mathbb{C}^{n \times n}$ sono equivalenti, nel senso che se prendiamo 2 norme materiali $\|\cdot\|', \|\cdot\|'' : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ allora si ha

$$\alpha \|A\|'' \leq \|A\|' \leq \beta \|A\|'' \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

dove $\alpha, \beta > 0$ sono due costanti indip. da A.

Successione di matrici

Una successione di matrici $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ si dice convergente alla matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ rispetto alla norma matriciale $\|\cdot\|$ quando $\|A^{(k)} - A\| \to 0$.

Poiché tutte le norme matriciali sono equivalenti, se una successione di matrici converge ad A rispetto a una norma $\|\cdot\|$ allora converge ad A rispetto a tutte le norme.

Una successione $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ in $\mathbb{C}^{n\times n}$ si dice convergente (componente per componente) alla matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se $A^{(k)} \to A$ componente per componente, cioè se

$$a_{ij}^{(k)} \to a_{ij} \quad \forall i,j = 1,\dots,n \iff |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \to 0 \quad \forall i,j = 1,\dots,n$$

$$\iff \max_{i,j=1,\dots,n} |a_{ij}^{(k)} - a_{ij}| \to 0$$

$$\iff \|A^{(k)} - A\|_\infty \to 0$$

La convergenza componente per componente altro non è che la convergenza in $\|\cdot\|_\infty$.
Dunque ricordando l'equivalenza di tutte le norme, dire che $A^{(k)} \to A$ componente per componente è la stessa che dire che $A^{(k)} \to A$ in una qualsiasi norma.

Teorema: (3.12)

Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ allora $\lim_{k\to\infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$

dim: (nel caso A diagonalizzabile) (T. 3.12)

Poiché A è diagonalizzabile, esistono una matrice invertibile X e una matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ (con sulla diagonale gli autovalori di A) t.c.

$$A = XDX^{-1}$$

$$A^2 = XD\underbrace{X^{-1}X}_{I}DX^{-1} = XD^2X^{-1}$$

$$A^3 = XD\underbrace{X^{-1}X}_{I}D\underbrace{X^{-1}X}_{I}DX^{-1} = XD^3X^{-1}$$

$$\vdots$$

$$A^k = XD^kX^{-1} \quad \forall k \geq 0 \quad (\$)$$

$\Leftarrow$) Supponiamo $\rho(A) < 1$. In base a $(\$)$,

$$\|A^k\|_\infty = \|XD^kX^{-1}\|_\infty \overset{(4)}{\leq} \|XD^k\|_\infty \|X^{-1}\|_\infty \overset{(4)}{\leq} \|X\|_\infty \|D^k\|_\infty \|X^{-1}\|_\infty$$

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \qquad \|D^k\|_\infty = \max(|\lambda_1^k|, |\lambda_2^k|, \dots, |\lambda_n^k|) = \max(|\lambda_1|^k, |\lambda_2|^k, \dots, |\lambda_n|^k) =$$

$$= (\max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|))^k = \rho(A)^k$$

$$0 \leq \|A^k\|_\infty = \|XD^kX^{-1}\|_\infty \overset{(4)}{\leq} \|XD^k\|_\infty \|X^{-1}\|_\infty \overset{(4)}{\leq} \|X\|_\infty \|D^k\|_\infty \|X^{-1}\|_\infty = \|X\|_\infty \rho(A)^k \|X^{-1}\|_\infty \to 0$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \|A^k - 0\|_\infty}}{\|A^k\|_\infty} \to 0 \Rightarrow A^k \to 0 \text{ (componente per componente)}$$

$\Rightarrow$) Supponiamo che $A^k \to 0$. Dalla (\$) otteniamo $D^k = X^{-1}A^kX$

$$0 \leq \rho(A)^k = \|D^k\|_\infty = \|X^{-1}A^kX\| \leq \|X^{-1}\|_\infty \underbrace{\|A^k\|_\infty}_{\to 0} \|X\|_\infty \to 0$$

$$\Rightarrow \rho(A)^k \to 0 \Rightarrow \rho(A) < 1. \square$$

Metodi iterativi per risolvere sistemi lineari

Metodi iterativi per risolvere sistemi lineari

E' dato un sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ (s) con $\underline{b} \in \mathbb{C}^n$ e $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertibile. Tale sistema, essendo A invertibile, ha un'unica soluzione $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$. Ci proponiamo di risolvere (s) con un metodo iterativo, cioè un metodo che a partire da un vettore iniziale $\underline{x}^{(0)}$ scelto dall'utente costruisce una successione di vettori $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \dots$ Vogliamo che questa soluzione sia facile da costruire e converga a x (componente per componente) qualunque sia il vettore iniziale scelto $\underline{x}^{(0)}$.

Per risolvere (s) consideriamo solo metodi iterativi stazionari cioè metodi della forma:

$$\begin{aligned} &\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n \text{ dato} \\ &\underline{x}^{(k+1)} = P\underline{x}^{(k)} + \underline{q} \qquad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \qquad (m)$$

dove $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è una matrice fissata detta matrice d'iterazione e $\underline{q} \in \mathbb{C}^n$ è un vettore fissato.

Oss 4.1: Se $\{x^{(k)}\}_{k=0,1,2,\dots}$ è una successione prodotta dal metodo (m) che converge a un vettore $\underline{x}^{(\infty)}$ allora $\underline{x}^{(\infty)} = \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty}(P\underline{x}^{(k)} + \underline{q}) = P\underline{x}^{(\infty)} + \underline{q}$

$$(P\underline{x}^{(k)} + \underline{q})_1 = P_{11}x_1^{(k)} + P_{12}x_2^{(k)} + \dots + P_{1n}x_n^{(k)} + q_1 \xrightarrow{\text{tende}} P_{11}x_1^{(\infty)} + P_{12}x_2^{(\infty)} + \dots + P_{1n}x_n^{(\infty)} + q_1 =$$
$$= (P\underline{x}^{(\infty)} + q)_1$$

Quindi $\underline{x}^{(\infty)}$ deve soddisfare l'eq $\underline{x}^{(\infty)} = P\underline{x}^{(\infty)} + q$.

Se la soluzione $\underline{x}$ del sistema (s) non soddisfa l'eq. $\underline{x} = P\underline{x} + \underline{q}$ allora non c'è speranza che una successione $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=0,1,2,\dots}$ prodotta dal metodo (m) converga a x.

Il metodo iterativo (m) si dice consistente con il sistema (s) se la soluzione $\underline{x}$ di (s) soddisfa l'eq. $\underline{x} = P\underline{x} + \underline{q}$.

Il metodo iterativo (m) per risolvere (s) si dice convergente se per ogni scelta del vettore iniziale $\underline{x}^{(0)}$ la successione $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=0,1,2,\dots}$ generata dal metodo a partire da $\underline{x}^{(0)}$ converge alla soluzione $\underline{x}$ di (s).

Teorema: (CNS di convergenza) (4.1)

Supponiamo che il metodo (m) sia consistente con il sistema (s). Allora esso è convergente sse $\rho(P) < 1$.

(T. 4.1)

dim: ($\Leftarrow$) Dimostriamo solo che se $\rho(P)<1$ allora il metodo (m) è convergente. Dobbiamo dimostrare che per ogni scelta di $\underline{x}^{(0)}$, la successione $\{\underline{x}^{(k)}\}_{k=0,1,2,\dots}$ generata dal metodo (m) converge a $\underline{x}$ = = soluzione di (s).

Siccome il metodo è consistente per ipotesi, vale l'equazione $\underline{x} = P\underline{x} + \underline{q}$ (*)

Inoltre, per definizione del metodo, vale che $\underline{x}^{(k+1)} = P\underline{x}^{(k)} + \underline{q}$ $\forall k = 0,1,2,\dots$ (**)

Sottraendo membro a membro la (**) e (*) otteniamo

$$\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x} = P\underline{x}^{(k)} + \underline{q} - (P\underline{x} + \underline{q}) \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

$$\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x} = P(\underline{x}^{(k)} - \underline{x}) \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

$$\underline{e}^{(k+1)} = P\underline{e}^{(k)} \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

e = equazione dell'errore

$$\underline{e}^{(k+1)} = P\underline{e}^{(k)} = P^2\underline{e}^{(k-1)} = P^3\underline{e}^{(k-2)} = \dots = P^{k+1}\underline{e}^{(0)} \quad \forall k = 0,1,2,\dots$$

$$\underline{e}^{(k)} = P^k\underline{e}^{(0)} \quad \forall k = 0,1,2,\dots \quad (\$)$$

Siccome $\rho(P)<1$ $P^k \to 0$ $\Rightarrow$ dal ($) si deduce che $\underline{e}^{(k)} \to 0\,\underline{e}^{(0)} = \underline{0}$ $\Rightarrow$ $\underline{x}^{(k)} - \underline{x} \to \underline{0}$ $\Rightarrow$ $\underline{x}^{(k)} \to \underline{x}$ □

Corollario: (cs di convergenza) (4.1)

Supponiamo che il metodo (m) sia consistente con il sistema (s). Se esiste una norma matriciale indotta $\|\cdot\|$ t.c. $\|P\|<1$ allora il metodo (m) è convergente.

dim: (C. 4.1)

Poiché $\rho(P) \le \|P\|$, la condizione $\|P\|<1$ implica che $\rho(P)<1$, dunque il metodo è convergente per il teo. precedente. □

Corollario: (cn di convergenza) (4.2)

Supponiamo che il metodo (m) sia consistente con il sistema (s).

- Se $|\text{traccia}(P)| \ge n$ allora il metodo non è convergente.
- Se $|\det(P)| \ge 1$ allora il metodo non è convergente.

Quindi le condizioni $|\text{traccia}(P)|<n$ e $|\det(P)|<1$ sono cn per la convergenza del metodo (m).

dim: (C. 4.2)

- Supponiamo che $|\text{traccia}(P)| \ge n$. Allora esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1.

Infatti, se tutti gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ di P fossero di modulo <1 allora avremmo

$|\text{traccia}(P)| = |\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| < n,$

il che è impossibile per ipotesi.

Dunque siccome esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1, anche $\rho(P) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) \geq 1$

$\Rightarrow$ il metodo non è convergente

- Supponiamo che $|\det(P)| \geq 1$. Allora esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1.

Infatti, se tutti gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ di P fossero di modulo < 1 allora avremmo

$|\det(P)| = |\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n| = |\lambda_1||\lambda_2| \dots |\lambda_n| < 1$

il che è impossibile per ipotesi.

Dunque siccome esiste almeno un autovalore di P di modulo ≥ 1, anche $\rho(P) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|) \geq 1$

$\Rightarrow$ il metodo non è convergente. $\square$

Velocità di convergenza

Consideriamo il metodo (m) per risolvere il sistema (s) e supponiamo che (m) sia convergente ($\underline{x} = P\underline{x} + \underline{q}$ e $\rho(P) < 1$). $\underline{e}^{(k)} = \underline{x}^{(k)} - \underline{x}$

Fissiamo una qualsiasi norma vettoriale $\|\cdot\|$. Per quasi tutti i vettori $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, l'errore $\underline{e}^{(k)} = \underline{x}^{(k)} - \underline{x}$ commesso al passo k dal metodo (m) soddisfa $\|\underline{e}^{(k)}\| \approx C k^m \rho(P)^k$ per ogni k abbastanza grande (in realtà nella pratica anche per k piccolo), dove $0 \leq m \leq n-1$ è un intero che dipende solo da P e C è una costante indipendente da k. ($m=0$ quando P è diagonalizzabile).

La convergenza delle successioni $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \underline{x}^{(2)}, \dots$ generate da un metodo della forma m è tanto più veloce quanto più $\rho(P)$ è piccolo.

Dati due metodi α e β della forma (m) per risolvere (s), entrambi convergenti, diremo che α converge più velocemente di β se $\rho(P_\alpha) < \rho(P_\beta)$, dove P_α e P_β sono le matrici d'iterazione associate ad α e β rispettivamente.

Criterio di arresto del residuo

Consideriamo il metodo (m) per risolvere il sistema (s) e sia $\underline{x}^{(0)}, \underline{x}^{(1)}, \dots$ una successione generata dal metodo (m). Anche quando tale successione risulta convergente, occorre arrestarla prima o poi.

Il criterio di arresto più usato è il criterio del residuo: si sceglie una norma vettoriale $\|\cdot\|$ (tipicamente $\|\cdot\|_1$ o $\|\cdot\|_2$ o $\|\cdot\|_\infty$) e si arresta la successione al primo vettore $\underline{x}^{(k)}$ t.c.

(r) $\dfrac{\|\underline{r}^{(k)}\|}{\|b\|} \le \varepsilon$ $\quad$ ($\underline{r}^{(k)} = \underline{b} - A\underline{x}^{(k)}$, $\varepsilon > 0$ è una soglia di precisione prefissata)

La condizione (r) impone che l'errore relativo $\dfrac{\|A\underline{x}^{(k)} - \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$ commesso approssimando $\underline{b}$ con $A\underline{x}^{(k)}$ sia $\le \varepsilon$.

$\dfrac{\|A\underline{x}^{(k)} - \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}$ sarebbe come $\dfrac{|\tilde{a} - a|}{|a|}$ = errore relativo con cui $\tilde{a}$ approssima a

$$\frac{\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} = \frac{\|\underline{x}^{(k)} - A^{-1}\underline{b}\|}{\|A^{-1}\underline{b}\|} = \frac{\|A^{-1}(A\underline{x}^{(k)} - \underline{b})\|}{\|A^{-1}\underline{b}\|}$$

$\|\underline{v}\| = \|-\underline{v}\| \quad \forall v \in \mathbb{C}^n$

$\|-1 \cdot v\| = |-1| \cdot \|\underline{v}\| = \|v\|$

$$\overset{\text{proprietà 2 del Teo}}{\le} \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|-\underline{r}^{(k)}\|}{\|A^{-1}\underline{b}\|} = \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\underline{r}^{(k)}\|}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\underline{b}\|}$$

$\|A\| \cdot \|A^{-1}\underline{b}\| \ge \|A \cdot A^{-1}\underline{b}\| = \|\underline{b}\|$

$$\overset{\text{proprietà 2 del Teo}}{\le} \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\underline{r}^{(k)}\|}{\|\underline{b}\|}$$

$$\le \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{} \cdot \varepsilon$$

$\mu(A)$ = numero di condizionamento di A rispetto alla norma $\|\cdot\|$

Costruzione dei metodi iterativi mediante decomposizione della matrice

$A\underline{x} = \underline{b}$ (s) $\quad$ A invertibile, $\exists!$ soluzione $\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n \text{ dato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = P\underline{x}^{(k)} + \underline{q}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \qquad (m)$$

Vediamo una procedura standard per costruire un metodo della forma (m) per risolvere il sistema (s) si considera una decomposizione di A del tipo

$A = M - (M - A)$ con $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertibile detta PRECONDIZIONATORE. Si osserva che

$$A\underline{x} = \underline{b} \iff (M - (M - A))\underline{x} = \underline{b} \iff M\underline{x} = (M - A)\underline{x} + \underline{b} \iff \underline{x} = M^{-1}(M - A)\underline{x} + M^{-1}\underline{b}$$

$$\iff \underline{x} = (I - M^{-1}A)\underline{x} + M^{-1}\underline{b} \iff \underline{x} = \underline{x} - M^{-1}A\underline{x} + M^{-1}\underline{b} \iff \underline{x} = \underline{x} + M^{-1}\underline{r}(\underline{x})$$

dove $\underline{r}(\underline{y}) = \underline{b} - A\underline{y}$ è il residuo in $\underline{y}$ di (s). Si definisce il metodo

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n \text{ dato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{M^{-1}(M - A)\underline{x}^{(k)} + M^{-1}\underline{b}}_{f_1} = \underbrace{\underline{x}^{(k)} + M^{-1}\underline{r}^{(k)}}_{f_2} \qquad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \qquad (m')$$

($\underline{r}^{(k)} = \underline{r}(\underline{x}^{(k)}) = \underline{b} - A\underline{x}^{(k)}$). Il metodo (m') è della forma (m) con matrice d'it. $P = M^{-1}(M - A) = I - M^{-1}A$ e $\underline{q} = M^{-1}\underline{b}$. In virtù di ($\alpha$) e ($\beta$), il metodo (m') è sicuramente consistente con (s).

Teorema: (4.2)

Il metodo (m') è convergente sse $\rho(I-M^{-1}A)<1$.

Oss: (4.5) Il polinomio caratteristico di $I-M^{-1}A$ è dato da $C_{I-M^{-1}A}(\lambda)=\det(\lambda I-I+M^{-1}A)=\det(M^{-1}(\lambda M-M+A))$

SMART

$\overset{\text{Binet}}{=} \det(M^{-1})\det(\lambda M+A-M)$

Dunque $C_{I-M^{-1}A}(\lambda)=0 \iff \underline{\det(\lambda M+A-M)=0}$

Gli autovalori e il raggio spettrale di $I-M^{-1}A$ = matrice d'it. di (m') si possono calcolare risolvendo l'eq rossa, senza calcolare né M^{-1} né $I-M^{-1}A$.

Oss 4.6: L'iterazione K-esima del metodo (m') viene calcolata con la formula (f_2) solitamente, $\underline{x}^{(k+1)}=\underline{x}^{(k)}+M^{-1}\underline{r}^{(k)}$, e richiede il calcolo del vettore $\underline{z}^{(k)}=M^{-1}\underline{r}^{(k)}$ detto residuo precondizionato.

Tale calcolo viene fatto risolvendo il sistema lineare $M\underline{z}^{(k)}=\underline{r}^{(k)}$ e non calcolando l'inversa M^{-1} (sconveniente dal pto di vista computazionale).

Ovviamente, il sistema lineare $M\underline{z}^{(k)}=\underline{r}^{(k)}$ dev'essere più facile/rapido rispetto al sistema originario $A\underline{x}=\underline{b}$ altrimenti non c'è nessun guadagno nel risolvere il sistema originario con (m').

Oss 4.7: Intuitivamente, quanto più il precondizionatore M "è vicino/assomiglia" alla matrice A, tanto più il metodo (m') convergerà velocemente. Infatti, se $M\approx A$ allora intuitivamente $M-A\approx 0$, $M^{-1}A\approx I$ e $M^{-1}(M-A)=I-M^{-1}A\approx 0$, per cui ci si può aspettare che $\rho(I-M^{-1}A)$ sia piccolo.

Il caso limite $M=A$ è quello in cui $I-M^{-1}A=0$ e si può verificare che il metodo (m') converge in un'unica iterazione alla soluzione esatta $\underline{x}$, ma al prezzo che tale iterazione costa come la risoluzione del sistema originario $A\underline{x}=\underline{b}$.

Nella scelta del precondizionatore M occorre quindi mediare tra 2 cose:

1. Qualità dell'approssimazione $M\approx A$ (una buona approssimazione $M\approx A$ generalmente assicura una buona velocità di convergenza)
2. Facilità/rapidità della risoluzione di un sistema lineare di matrice M (questa assicura che ogni iterazione di (m') è rapida)

Metodo di Jacobi e Gauss-Seidel

Metodo di Jacobi

Supponiamo che A non abbia elementi diagonali nulli. In tal caso, la parte diagonale di A, cioè la matrice diagonale D ottenuta ricopiando la parte diagonale di A, è invertibile e quindi possiamo definire il metodo di Jacobi, cioè il metodo (m') con $M=D$:

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n \text{ dato} \\ \underline{x}^{(k+1)} = D^{-1}(D-A)\underline{x}^{(k)} + D^{-1}\underline{b} = \underline{x}^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}, \quad k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Il metodo di Jacobi è convergente sse $\rho(J)<1$, dove $J=D^{-1}(D-A)=I-D^{-1}A$.

L'iterazione k-esima del metodo di Jacobi richiede di calcolare $\underline{z}^{(k)} = D^{-1}\underline{r}^{(k)}$ risolvendo il sistema diagonale $D\underline{z}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$, il che è facile:

$$\begin{cases} a_{11} z_1^{(k)} = r_1^{(k)} \\ a_{22} z_2^{(k)} = r_2^{(k)} \\ \ddots \\ a_{nn} z_n^{(k)} = r_n^{(k)} \end{cases} \iff \begin{cases} z_1^{(k)} = \dfrac{r_1^{(k)}}{a_{11}} \\ z_2^{(k)} = \dfrac{r_2^{(k)}}{a_{22}} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} = \dfrac{r_n^{(k)}}{a_{nn}} \end{cases} \quad (\text{totale: } nD)$$

Metodo di Gauss-Seidel

Supponiamo che A abbia elementi diagonali non nulli. In tal caso, la parte triangolare inferiore di A, cioè la matrice triangolare inferiore E ottenuta ricopiando la parte triangolare inferiore di A (inclusa la diagonale), è invertibile e quindi posso definire il metodo di Gauss-Seidel, cioè il metodo (m') con $M=E$:

$$\begin{cases} \underline{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n \\ \underline{x}^{(k+1)} = E^{-1}(E-A)\underline{x}^{(k)} + E^{-1}\underline{b} = \underline{x}^{(k)} + E^{-1}\underline{r}^{(k)}, \quad k=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Il metodo GS è convergente sse $\rho(G)<1$, dove $G=E^{-1}(E-A)=I-E^{-1}A$.

L'iterazione k-esima di GS richiede di $\underline{z}^{(k)} = E^{-1}\underline{r}^{(k)}$ risolvendo il sistema triangolare inferiore $E\underline{z}^{(k)} = \underline{r}^{(k)}$ il che è facile (la soluzione si ottiene per sostituzione in avanti):

$$\begin{cases} a_{11} z_1^{(k)} & = r_1^{(k)} \\ a_{21} z_1^{(k)} + a_{22} z_2^{(k)} & = r_2^{(k)} \\ a_{31} z_1^{(k)} + a_{32} z_2^{(k)} + a_{33} z_3^{(k)} & = r_3^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n1} z_1^{(k)} + a_{22} z_2^{(k)} + \dots + a_{nn} z_n^{(k)} & = r_n^{(k)} \end{cases} \iff \begin{cases} z_1^{(k)} = \dfrac{r_1^{(k)}}{a_{11}} \\ z_2^{(k)} = \left(r_2^{(k)} - a_{21} z_1^{(k)}\right) / a_{22} \\ z_3^{(k)} = \left(r_3^{(k)} - a_{31} z_1^{(k)} - a_{32} z_2^{(k)}\right) / a_{33} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} = \left(r_n^{(k)} - a_{n1} z_1^{(k)} - a_{n2} z_2^{(k)} - \dots - a_{nn-1} z_{n-1}^{(k)}\right) / a_{nn} \end{cases}$$

$\forall i = 1, \dots, n$, il costo del calcolo di

$$z_i^{(k)} = \frac{r_i^{(k)} - a_{i1} z_1^{(k)} - a_{i2} z_2^{(k)} - \dots - a_{ii-1} z_{i-1}^{(k)}}{a_{ii}}$$

è $1D + (i-1)M + (i-1)A$, per cui il costo del calcolo $\underline{z}^{(k)}$ è

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1D + (i-1)M + (i-1)A\right) = nD + \sum_{i=1}^{n} (i-1)M + \sum_{i=1}^{n} (i-1)A = nD + \frac{(n-1)n}{2} M + \frac{(n-1)n}{2} A$$

$$\approx nD + \frac{n^2}{2} M + \frac{n^2}{2} A$$

Confrontando i precondizionatori D ed E di J. e GS. si nota quanto segue:

- L'approssimazione $E \approx A$ è migliore dell'approssimazione $D \approx A$ perché $E - A$ ha più zeri di $D - A$. Questo spiega perché spesso nella pratica GS converge più velocemente di J (cioè $\rho(G) < \rho(J)$)
- La risoluzione di un sistema lin. di matrice E è più costosa della risoluzione di un sistema lin. di matrice D $\Rightarrow$ un'iterazione di GS è più costosa di un'it. di J.

<u>Teoremi di convergenza per i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel</u>

Teorema: (4.3)

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ soddisfi almeno una delle seguenti condizioni:

- A è a diagonale dominante e irriducibile
- A è a diagonale dominante in senso stretto
- A è a diagonale dominante per colonne e irriducibile
- A è a diagonale dominante in senso stretto per colonne

Allora i metodi di J e GS per risolvere un sistema lineare di matrice A sono convergenti.

Oss 4.4: Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ soddisfa almeno una delle condizioni del teorema allora:

1. A è invertibile per un teo. visto. (3.7)
2. Gli elementi diagonali di A sono diversi da 0. Infatti, se per assurdo esistesse un elemento diagonale di A uguale a 0 allora tutta la corrispondente riga (opp colonna) sarebbe nulla in quanto A è a diagonale dominante (opp. a diag. dominante per colonna): cioè è assurdo perché A è invertibile!

Concl. Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ soddisfa almeno una delle condizioni del teorema, allora i metodi di J e GS per risolvere un sistema lineare di matrice A sono applicabili.

dim: (GS 1° caso)

Faccio la dim. per il metodo di GS sotto l'ipotesi che A è a diagonale dominante e irriducibile. Devo dimostrare che $\rho(G) < 1$ dove G = matrice d'it. di $GS = I - E^{-1}A$. Gli autovalori di G sono le soluzioni dell'eq. $\det(\lambda E + A - E) = 0$ (*)

$$\det(\lambda E + A - E) \underset{\text{per } n=4}{=} \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & a_{34} \\ \lambda a_{41} & \lambda a_{42} & \lambda a_{43} & \lambda a_{44} \end{vmatrix}$$

Dimostreremo che nessun numero λ di modulo $|\lambda| \geq 1$ può essere soluzione di (*) perché se λ è un numero di $|\lambda| \geq 1$ allora la matrice $\lambda E + A - E$ è a diagonale dominante e irriducibile esattamente come A, dunque è invertibile e dunque $\det(\lambda E + A - E) \neq 0$

In definitiva, gli autovalori di G (= le soluzioni di (*)) sono in modulo < 1 $\Rightarrow$ $\rho(G)$ = massimo dei moduli degli autovalori di $G < 1$. Resta da dim. la frase rossa. Sia λ un generico numero di $|\lambda| \geq 1$.

- $\lambda E + A - E$ è irriducibile perché gli elementi nulli di $\lambda E + A - E$ si trovano nelle stesse posizioni in cui si trovano gli elementi nulli di A $\Rightarrow$ $\lambda E + A - E$ ed A hanno lo stesso grafo $\Rightarrow$ $\lambda E + A - E$ è irriducibile perché A è irriducibile.
- $\lambda E + A - E$ è a diagonale dominante come A. Infatti $\forall$ riga $i = 1, \dots, n$

$$|\lambda a_{ii}| = |\lambda| \cdot |a_{ii}| \overset{\text{perché } A \text{ è a diag. dominante}}{\underset{>}{\geq}} |\lambda| \left(|a_{i1}| + \dots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}| \right)$$

vale il > stretto se sulla riga i di A vale il > stretto

$$= |\lambda a_{i1}| + \dots + |\lambda a_{i\,i-1}| + |\lambda| |a_{i\,i+1}| + \dots + |\lambda| |a_{in}|$$

perché $|\lambda| \geq 1$

$$\geq |\lambda a_{i1}| + \dots + |\lambda a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}|$$

dim: (J 1° caso)

Faccio la dim. per il metodo di J sotto l'ipotesi che A è a diagonale dominante e irriducibile. Devo dimostrare che $\rho(J) < 1$ dove J = matrice d'it. di $J = I - D^{-1}A$. Gli autovalori di J sono le soluzioni dell'eq. $\det(\lambda D + A - D) = 0$ (*)

$$\det(\lambda D + A - D) \underset{\text{per } n=4}{=} \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \lambda a_{44} \end{vmatrix}$$

Dimostreremo che nessun numero λ di modulo $|\lambda| \geq 1$ può essere soluzione di (*) perché se λ è un numero di $|\lambda| \geq 1$ allora la matrice $\lambda D + A - D$ è a diagonale dominante e irriducibile esattamente come A, dunque è invertibile e dunque $\det(\lambda D + A - D) \neq 0$

In definitiva, gli autovalori di J (= le soluzioni di (*)) sono in modulo < 1 $\Rightarrow$ $\rho(J)$ = massimo dei moduli degli autovalori di $J < 1$. Resta da dim. la frase rossa. Sia λ un generico numero di $|\lambda| \geq 1$.

- $\lambda D + A - D$ è irriducibile perché gli elementi nulli di $\lambda D + A - D$ si trovano nelle stesse posizioni in cui si trovano gli elementi nulli di A $\Rightarrow$ $\lambda D + A - D$ ed A hanno lo stesso grafo $\Rightarrow$ $\lambda D + A - D$ è irriducibile perché A è irriducibile.
- $\lambda D + A - D$ è a diagonale dominante come A. Infatti $\forall$ riga $i = 1, \dots, n$

$$|\lambda a_{ii}| = |\lambda| \cdot |a_{ii}| \overset{\text{perché } A \text{ è a diag. dominante}}{\underset{>}{\geq}} |\lambda| \left(|a_{i1}| + \dots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}| \right)$$

vale il > stretto se sulla riga i di A vale il > stretto

$$= |\lambda a_{i1}| + \dots + |\lambda a_{i\,i-1}| + |\lambda| |a_{i\,i+1}| + \dots + |\lambda| |a_{in}|$$

perché $|\lambda| \geq 1$

$$\geq |a_{i1}| + \dots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}|$$

dim: (GS 2° caso)

Faccio la dim. per il metodo di GS sotto l'ipotesi che A è a diagonale dominante in senso stretto

Devo dimostrare che $\rho(G) < 1$ dove G = matrice d'it. di GS $= I - E^{-1}A$. Gli autovalori di G sono le soluzioni dell'eq. $\det(\lambda E + A - E) = 0$ (*)

$$\det(\lambda E + A - E) \underset{\text{per } n=4}{=} \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} & a_{34} \\ \lambda a_{41} & \lambda a_{42} & \lambda a_{43} & \lambda a_{44} \end{vmatrix}$$

Dimostreremo che nessun numero λ di modulo $|\lambda| \geq 1$ può essere soluzione di (*) perché se λ è un numero di $|\lambda| \geq 1$ allora la matrice $\lambda E + A - E$ è a diagonale dominante in senso stretto esattamente come A, dunque è invertibile e dunque $\det(\lambda E + A - E) \neq 0$

In definitiva, gli autovalori di G (= le soluzioni di (*)) sono in modulo < 1 $\Rightarrow$ $\rho(G)$ = massimo dei moduli degli autovalori di $G < 1$. Resta da dim. la frase rossa. Sia λ un generico numero di $|\lambda| \geq 1$.

$$|\lambda a_{ii}| = |\lambda| \cdot |a_{ii}| \overset{\text{perché A è a diag. dominante in senso stretto}}{>} |\lambda| \left(|a_{i1}| + \dots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}| \right)$$

$$= |\lambda a_{i1}| + \dots + |\lambda a_{i\,i-1}| + |\lambda||a_{i\,i+1}| + \dots + |\lambda||a_{in}|$$

$$\underset{\text{perché } |\lambda| \geq 1}{\geq} |\lambda a_{i1}| + \dots + |\lambda a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}|$$

dim: (J 2° caso)

Faccio la dim. per il metodo di J sotto l'ipotesi che A è a diagonale dominante in senso stretto

Devo dimostrare che $\rho(J) < 1$ dove J = matrice d'it. di J $= I - D^{-1}A$. Gli autovalori di J sono le soluzioni dell'eq. $\det(\lambda D + A - D) = 0$ (*)

$$\det(\lambda D + A - D) \underset{\text{per } n=4}{=} \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \lambda a_{44} \end{vmatrix}$$

Dimostreremo che nessun numero λ di modulo $|\lambda| \geq 1$ può essere soluzione di $(*)$ perché se λ è un numero di $|\lambda| \geq 1$ allora la matrice $\lambda D + A - D$ è a diagonale dominante in senso stretto esattamente come A, dunque è invertibile e dunque $\det(\lambda D + A - D) \neq 0$

In definitiva, gli autovalori di J (= le soluzioni di $(*)$) sono in modulo < 1 $\Rightarrow$ $\rho(J) =$ massimo dei moduli degli autovalori di $J < 1$. Resta da dim. la frase rossa. Sia λ un generico numero di $|\lambda| \geq 1$.

$$|\lambda a_{ii}| = |\lambda| \cdot |a_{ii}| \overset{\text{perché } A \text{ è a diag. dominante in senso stretto}}{>} |\lambda| \left(|a_{i1}| + \dots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}| \right)$$

$$= |\lambda a_{i1}| + \dots + |\lambda a_{i\,i-1}| + |\lambda||a_{i\,i+1}| + \dots + |\lambda||a_{in}|$$

$$\underset{\text{perché } |\lambda| \geq 1}{\geq} |a_{i1}| + \dots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \dots + |a_{in}|$$

Teorema: (4.4)

Supponiamo che $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sia hermitiana definita positiva. Allora il metodo di GS per risolvere un sistema lineare di matrice A è convergente.

Oss 4.10: Se $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è hermitiana definita positiva allora:

(a) A è invertibile perché gli autovalori di A sono positivi (reali in quanto A è hermitiana e con parte reale positiva in quanto A è definita positiva) e dunque 0 non è autovalore di A.

(b) Gli elementi diagonali di A sono positivi. (fatto per es. precedentemente)

Concl. Se A è HDP (herm. def. posit.) allora J e GS sono applicabili per risolvere un sistema lin. di matrice A.

dim: (T. 4.4)

Devo dim. che $\rho(G) < 1$ dove $G = I - E^{-1}A$ = matrice d'it. di GS. La dim. è divisa in 2 parti.

PARTE 1: Dimostriamo che $A - G^* A G$ è HDP.

- $A - G^* A G$ è hermitiana perché $(A - G^* A G)^* = A^* - (G^* A G)^* = A - G^* A^* G^{**} = A - G^* A G$
$\Rightarrow A - G^* A G$ è hermitiana.
- Dimostriamo che $A - G^* A G$ è definita positiva.

$$A - G^* A G = A - (I - E^{-1}A)^* A (I - E^{-1}A)$$
$$= A - (I - F^*) A (I - F)$$
$$= A - A + F^* A + A F - F^* A F$$
$$= F^* (A F^{-1} + F^{-*} A - A) F$$

- $G = I - E^{-1}A$,
- $F = E^{-1}A$; notare che F è invertibile perché è prodotto di E ed A che sono invertibili, e si ha $F^{-1} = (E^{-1}A)^{-1} = A^{-1}E$

$$= F^*(E + E^* - A)F$$

$$= F^* D F$$

(D = parte diagonale di A)

$\forall \underline{y} \neq 0$

$$\underline{y}^*(A - G^*AG)\underline{y} = \underline{y}^* F^* D F \underline{y}$$

$$= (F\underline{y})^* D (F\underline{y})$$

$\underline{v} = F\underline{y} \neq \emptyset$

perché F è invertibile quindi mando vettori non nulli in vettori non nulli

$$= \underline{v}^* D \underline{v}$$

$$= [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n] \begin{bmatrix} a_{11} v_1 \\ a_{22} v_2 \\ \vdots \\ a_{nn} v_n \end{bmatrix}$$

$$= a_{11} \overbrace{\bar{v}_1 v_1}^{|v_1|^2} + a_{22} \bar{v}_2 v_2 + \dots + a_{nn} \bar{v}_n v_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{a_{ii}}_{>0} |v_i|^2 > 0$$

$\Rightarrow A - G^*AG$ è definita positiva per un teo. già visto

Conc PARTE 1: $A - G^*AG$ è HDP

- per F come per ogni matrice invertibile vale che $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$; si pone $F^{-*} = (F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$

dim.

$$F^*(F^{-1})^* = (F^{-1}F)^* = I^* = I$$

$$(F^{-1})^* F^* = (FF^{-1})^* = I^* = I$$

- $AF^{-1} = E$; $F^{-*}A = (A^* E^{-*})^{-1} A = (AE^{-*})^{-1} A = E^*$

- Dim che $E + E^* - A = D$ = parte diagonale di A per A hermitiana. Caso 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ a_{21} & a_{22} & \bar{a}_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad E^* = \begin{bmatrix} a_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ 0 & a_{22} & \bar{a}_{32} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad E + E^* = A + D$$

E

PARTE 2: Dimostriamo che se λ è un generico autovalore di G allora $|\lambda| < 1$. Fatto questo avremo che $\rho(G) < 1$ e la tesi è dimostrata. Sia dunque λ un autovalore di G e sia $\underline{y} \neq \underline{0}$ un corrispondente autovettore: $G\underline{y} = \lambda \underline{y}$. Siccome $A - G^*AG$ è HDP,

$$0 < \underline{y}^*(A - G^*AG)\underline{y} = \underline{y}^* A \underline{y} - \underline{y}^* G^* A G \underline{y} = \underline{y}^* A \underline{y} - (G\underline{y})^* A (G\underline{y})$$

$$= \underline{y}^* A \underline{y} - (\lambda \underline{y})^* A (\lambda \underline{y})$$

$$= \underline{y}^* A \underline{y} - \bar{\lambda} \underline{y}^* A (\lambda \underline{y})$$

$$= \underline{y}^* A \underline{y} - |\lambda|^2 \underline{y}^* A \underline{y}$$

$$= \underbrace{\underline{y}^* A \underline{y}}_{>0 \text{ perché } A \text{ è HDP e } \underline{y} \neq 0} (1 - |\lambda|^2)$$

$\underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$(\lambda \underline{y})^* = \begin{bmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{bmatrix} = [\bar{\lambda} \bar{y}_1 \ \bar{\lambda} \bar{y}_2]$$

$$= [\bar{\lambda} \bar{y}_1 \ \bar{\lambda} \bar{y}_2]$$

$$= \bar{\lambda} [\bar{y}_1 \ \bar{y}_2]$$

$$= \bar{\lambda} \underline{y}^*$$

$\Rightarrow 1 - |\lambda^2| > 0 \iff |\lambda|^2 < 1 \iff |\lambda| < 1$

Dunque $|\lambda| < 1$ (che vale $\forall y$ autovalore di G) $\Rightarrow \rho(G) < 1$.