

FORZE E CAMPI MAGNETICI

Introduzione storica

XIII secolo a.C.: uso delle bussole (Cina)

800 a.C.: scoperte delle proprietà magnetiche di certi minerali (greci, magnetite).

1269: Pierre de Maricourt vide che un ago posto su un oggetto magnetico naturale sferico si dispone lungo linee che descrivono "circonferenze minime" sulla superficie della sfera e si intersecano in due punti diametralmente opposti, come i meridiani sulla superficie della Terra; questi due punti furono chiamati poli del magnete. Ogni magnete, come fu verificato, ha sempre due poli (NORD e SUD): poli uguali si respingono, poli diversi si attraggono. Un magnete, nel campo magnetico terrestre, si orienta in modo che il suo polo nord magnetico è rivolto verso il polo nord geografico delle Terre (che quindi è un polo sud magnetico), e il suo polo sud magnetico è rivolto verso il polo sud geografico delle Terre: così funziona una bussola.

1600: William Gilbert ipotizzò che i magneti fossero estratti dalla mole della Terra.

1750: John Mitchell, mediante une bilancie di torsione, verificò che due poli magnetici si attraggono o si respingono con una forza il cui modulo è inversamente proporzionale al quadrato della distanza. C'è comunque una differenza fondamentale

tra queste forze e le forze elettriche: le cariche elettriche possono esistere libere e singole (es: elettrone, protone), mentre i poli magnetici compaiono sempre in coppie; suddividendo un magnete naturale in un numero arbitrario di pezzi, otterremo un numero arbitrario di pezzetti magnetizzati, ciascuno con due poli magnetici. Tutti gli esperimenti che hanno tentato di individuare l'esistenza di "monopoli magnetici" invece hanno fallito.

1819: Hans Christian Øersted osservò che un ago magnetico, se posto vicino a un filo percorso da corrente elettrica, viene deflesso. Subito dopo, André-Marie Ampère trovò la legge delle forze magnetiche tra due fili conduttori percorsi da corrente, e propose un modello secondo il quale tutti i fenomeni magnetici sarebbero dovuti a correnti che scorrono in circuiti di dimensioni molecolari nei materiali magnetici.

1820: Michael Faraday e Joseph Henry determinarono altri collegamenti tra elettricità e magnetismo: videro che si muovendo a far circolare corrente in un circuito muovendo un magnete vicino al circuito, ma anche facendo venire le corrente in un altro circuito posto nelle vicinanze del primo circuito. Dunque, variazioni temporali del campo magnetico producono un campo elettrico.

Molti anni dopo, James Clark Maxwell dimostrò con un calcolo che un campo elettrico variabile nel tempo genera un campo magnetico.

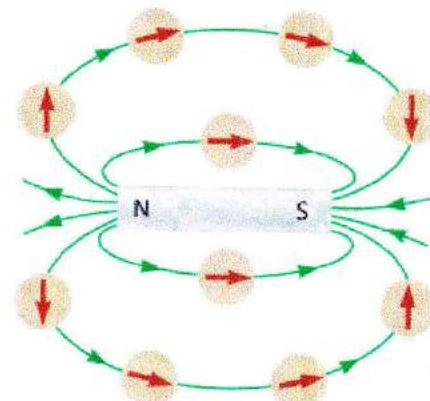
Il campo magnetico

Abbiamo visto che lo spazio attorno a una carica elettrica ferma è sede di un campo elettrico. Lo spazio attorno a una carica elettrica in moto è sede di un campo elettrico e di un CAMPO MAGNETICO. Anche lo spazio attorno a qualsiasi materiale magnetico è sede di un campo magnetico. Inoltre, il campo magnetico è un campo vettoriale come il campo elettrico.

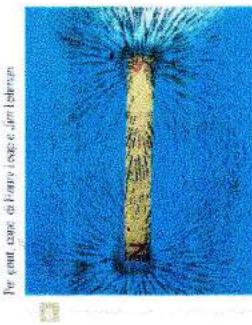
Definiamo il vettore campo magnetico. La direzione e il verso di un campo magnetico \vec{B} in un dato punto sono dati dalla direzione e dal verso del polo nord di una bussola posta in quel punto (o meglio, dalla direzione lungo cui si dispone l'ago magnetico di una bussola posta in quel punto, e dal verso di puntamento del polo nord dell'ago della bussola in quel punto).

Nello schema a fianco è mostrato come sia possibile tracciare le LINEE DI CAMPO MAGNETICO utilizzando l'orientamento dell'ago di una bussola in diversi punti dello spazio in cui c'è presente un campo magnetico; in questo caso sono mostrate alcune linee di campo magnetico per una sbarretta magnetica all'esterno delle sbarrette.

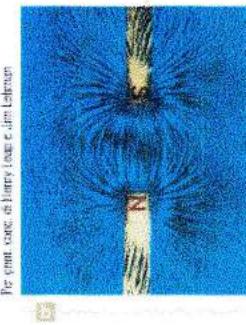
Utilizzando la metà di ferro è possibile visualizzare la configurazione del campo magnetico vicino a un magnete, ponendo la metà di ferro su un foglio di carta.



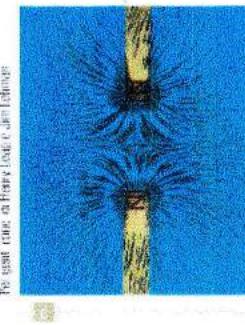
Struttura del campo magnetico intorno ad una sbarretta magnetica.



Struttura del campo magnetico fra poli opposti (NS) di due barre magnetiche.



Struttura del campo magnetico fra poli uguali (N-N) di due barre magnetiche.



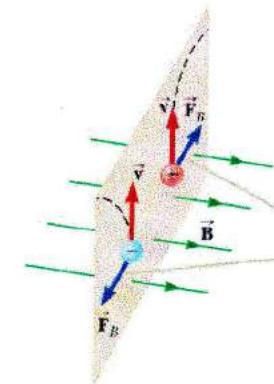
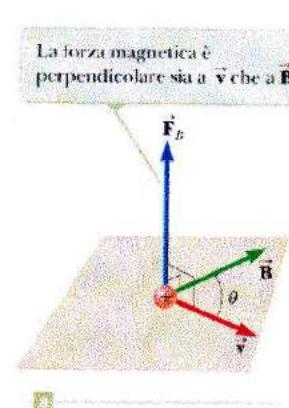
Per valutare il modulo del campo magnetico in un punto dello spazio e' necessario misurare la forza magnetica \vec{F}_B agente su una opportuna particella di prova posta in quel punto. Affinché si possa osservare una forza magnetica, si e' verificato che la particella deve avere una carica elettrica. Eseguendo accurate misure sperimentali si sono osservate le seguenti cose:

- 1) $|\vec{F}_B|$ e' proporzionale al valore assoluto della carica q delle particelle;
- 2) la forza magnetica \vec{F}_B su una carica negativa ha verso opposto rispetto a quello della forza magnetica agente su una carica positiva in moto lungo la stessa direzione e nello stesso verso della carica negativa;
- 3) $|\vec{F}_B|$ e' proporzionale al modulo del campo magnetico \vec{B} (questo e' il simbolo vettoriale del campo magnetico);
- 4) $|\vec{F}_B|$ e' proporzionale al modulo della velocita' delle particelle;
- 5) se il vettore velocita' istantanea \vec{v} delle particelle forma un angolo θ con il campo magnetico \vec{B} , risulta che $|\vec{F}_B|$ e' proporzionale a $\sin \theta$;
- 6) quando \vec{v} forma un angolo di 0° o di 180° con il campo magnetico \vec{B} , risulta $\vec{F}_B = 0$;
- 7) quando \vec{v} non e' parallelo al campo magnetico \vec{B} , \vec{F}_B e' diretta perpendicolarmente sia a \vec{v} sia a \vec{B} .

Da tutti questi risultati sperimentali si ottiene la legge che espone la forza magnetica agente su una particella con carica elettrica q e in moto con velocità instantanea \vec{v} in un punto dello spazio in cui è presente un campo magnetico \vec{B} :

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}}$$



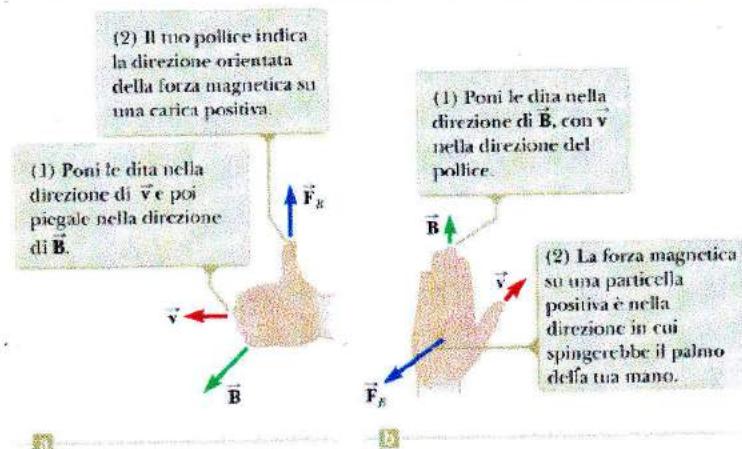
Le forze magnetiche su cariche di segno opposto che si muovono alla stessa velocità in un campo magnetico hanno versi opposti.

Questa equazione fornisce anche una definizione operativa del campo magnetico \vec{B} in un punto dello spazio, sulla base delle forze \vec{F}_B agente su una carica di prole q in moto (in quel punto) con velocità instantanea \vec{v} .

L'unità di misura del campo magnetico nel S.I. è; allora:

$$1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{C} \cdot \text{m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} = 1 \text{ T (tesla)}$$

Qui a fianco sono ricordate due possibili "regole delle mani destre" per determinare direzione e verso delle forze magnetiche \vec{F}_B se sono noti i vettori \vec{v} e \vec{B} , se $q > 0$. Se $q < 0$, le direzioni di \vec{F}_B è lo stesso ma il verso è opposto.



Dunque il modulo delle forze magnetiche agente su una partecipante carica è

$$F_B = |q| v B \sin\theta$$

, essendo θ l'angolo fra i vettori \vec{v} e \vec{B} ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$).

Confronto tra le forze elettriche \vec{F}_E e le forze magnetiche \vec{F}_B :

- 1) \vec{F}_E ha la stessa direzione di \vec{E} , mentre \vec{F}_B è perpendicolare a \vec{B} ;
- 2) \vec{F}_E non dipende dalla velocità instantanea \vec{v} delle particelle, mentre \vec{F}_B dipende da \vec{v} (ed è nulla se $\vec{v} = 0$);
- 3) \vec{F}_E compie lavoro quando agisce su una particella carica, mentre \vec{F}_B non compie lavoro su una particella carica in quanto $\vec{F}_B \cdot \vec{v} = 0$ (dunque \vec{F}_B non produce variazioni dell'energia cinetica delle particelle su cui agisce, e può solo modificare la direzione di \vec{v}).

Qui a fianco è mostrata le convenzioni grafiche utilizzate per rappresentare regioni di spazio con \vec{B} uscente dal piano del foglio (punti) e con \vec{B} entrante nel piano del foglio (croci).

Le linee del campo magnetico uscenti dal foglio sono indicate da punti che rappresentano le punte delle frecce uscenti.



Le linee del campo magnetico entranti nel foglio sono indicate da croci che rappresentano le code delle frecce entranti.

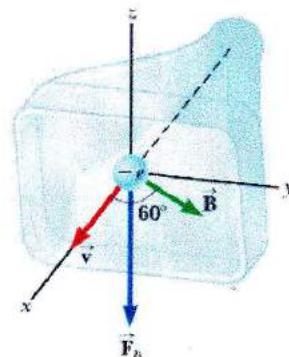


Esempio 1. Un elettrone in un tubo catodico televisivo si muove verso la parte anteriore del tubo con velocità diretta lungo l'asse x (vedi figura) con modulo $v = 8 \times 10^6 \text{ m/s}$. Il collo del tubo è circondato da un avvolgimento di filo che genera un campo magnetico avente modulo $B = 0,025 \text{ T}$, formante un angolo $\theta = 60^\circ$ con l'asse x e giacente nel piano xy . Calcolare la forza magnetica \vec{F}_B e l'accelerazione \vec{a} dell'elettrone.

La carica elettrica dell'elettrone è $q = -e$;

la forza magnetica agente sull'elettrone è quindi:

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B} = -e \vec{v} \times \vec{B}$$



I vettori \vec{v} e \vec{B} , rispetto al sistema di assi cartesiani ortogonali finito e mostrato nella figura, hanno le seguenti componenti: $\vec{v} = (v, 0, 0)$; $\vec{B} = (B \cos \theta, B \sin \theta, 0)$

Dunque, poiché \vec{F}_B è perpendicolare al piano xy (che è il piano su cui giacciono i vettori \vec{v} e \vec{B}), risultate

$$F_{B,x} = F_{B,y} = 0, \quad \text{e} \quad F_{B,z} = q(v_x B_y - v_y B_x) = q v_x B_y$$

poiché $v_y = 0$; dunque: $F_{B,z} = -e v B \sin \theta$, e quindi

$$\boxed{F_{B,z} = -e v B \sin \theta = -(1,6022 \times 10^{-19} \text{ C})(8 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}})(0,025 \text{ T}) \sin 60^\circ = -2,77505 \times 10^{-14} \text{ N}}$$

Dunque l'accelerazione dell'elettrone è

$$a_z = F_{B,z}/m = -(evB \sin \theta)/m = -(2,77505 \times 10^{-14} \text{ N})/(9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}) = \quad (7)$$

$$= -3,0464 \times 10^{16} \text{ m/s}^2$$

Moto di una particelle carica in un campo magnetico uniforme

Assumiamo di studiare il moto di una particelle carica in una regione di spazio in cui è definito un campo magnetico \vec{B} costante e uniforme, diretto perpendicolarmente al piano del foglio e con verso entrante (vedi schema a fianco).

Poiché $\vec{F}_B \perp \vec{v}$, e poiché $|\vec{F}_B|$ è costante, la traiettoria di una particelle avendo una carica elettrica q , in assenza di altre forze, e se la velocità veloce istantanea \vec{v} delle particelle giace sul piano del foglio (e quindi, se $\vec{v} \perp \vec{B}$), è una circonferenza: le forze magnetiche \vec{F}_B e' le forze centripete che mantiene le particelle cariche in orbita circolare (ripetiamo, se $\vec{v} \perp \vec{B}$).

Detto m la massa delle particelle, per la seconda legge della dinamica risulta (in assenza di altre forze):

$m\vec{a} = \vec{F}_B$; nelle figure in alto le particelle carica percorrono le traiettorie circolari in senso antiorario se $q > 0$.

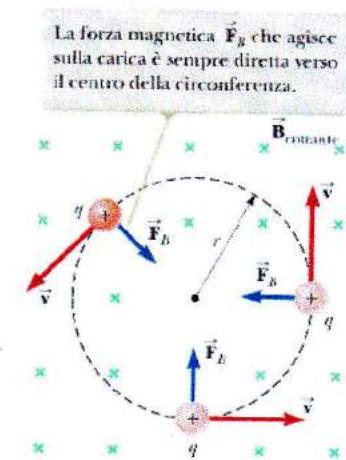
Poiché la forza centripeta è la forza magnetica, risulta:

$$m\vec{a}_c = |q|\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow m \frac{\vec{v}^2}{r} = |q| \vec{v} \times \vec{B}, \text{ e quindi il raggio}$$

delle traiettorie è

$$r = \frac{mv}{|q|B}$$

r è proporzionale alla quantità di moto delle particelle e inversamente proporzionale a q e a B . (8)



la velocità angolare delle particelle nell'orbita circolare è

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{|q|B}{m}$$

VELOCITA' ANGOLARE
DI CICLOTRONE

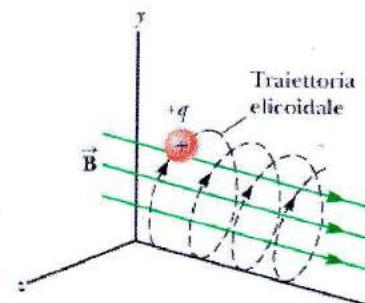
Il periodo del moto circolare è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

Dunque, per una particelle in moto in un campo magnetico uniforme ω e T non dipendono né da v né da r .

Se l'angolo tra \vec{v} e \vec{B} è diverso da 90°

(cioè se \vec{v} ha una componente lungo la direzione di \vec{B}) le traiettorie delle particelle caricate è elicoidale (vedi figura a fianco), in quanto la componente di \vec{v} parallela a \vec{B} non viene modificata dalle azioni di \vec{F}_B , mentre la proiezione del moto delle particelle sul piano perpendicolare a \vec{B} è una circonferenza: delle composizione di questi due effetti risulta le traiettorie a elica. Le equazioni scritte sopra valgono pur di sostituire a $|v|$ le quantità $v_\perp = \sqrt{v_y^2 + v_z^2}$ (componente di \vec{v} perpendicolare a \vec{B} nella figura).



Esempio 2. Un protone si muove su un'orbita circolare avente raggio $r = 14$ cm in un campo magnetico uniforme avente modulo $B = 0,35$ T perpendicolare alla velocità del protone. Trovare il modulo della velocità del protone.

Delle relazioni trovate in precedenze

$$\frac{V}{r} = \frac{|q|B}{m} \quad \text{ricaviamo:}$$

$$V = \frac{|q|Br}{m} = \frac{(1,6022 \times 10^{-19} C)(0,35 T)(0,14 m)}{(1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 4,6936 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Esempio 3. In un esperimento progettato per misurare il modulo di un campo magnetico uniforme, degli elettroni inizialmente fermi vengono accelerati applicando una differenza di tensione $\Delta V = 350 \text{ V}$. Dopo avere lasciato la regione in cui c'è presente il campo elettrico, gli elettroni entrano in una regione di spazio in cui c'è presente un campo magnetico uniforme e viaggiano lungo una traiettoria curva a causa della forza magnetica agente su di essi. Il raggio delle traiettorie è $r = 7,5 \text{ cm}$.

- Qual è il modulo B del campo magnetico?
- Qual è la velocità angolare degli elettroni?

- Per calcolare il modulo delle velocità con cui gli elettroni entrano nella regione del campo magnetico, applichiamo il teorema dell'energia cinetica tra l'istante iniziale (in cui l'elettrone è fermo) e l'istante in cui l'elettrone lascia la regione del campo elettrico:

$$K_f - K_i = W_E \Rightarrow \frac{1}{2} m |\vec{V}|^2 = e \Delta V \Rightarrow |\vec{V}| = \sqrt{\frac{2 e \Delta V}{m}},$$

dove e e' il valore assoluto della carica dell'elettrone e m e' la massa dell'elettrone. Dalle relazioni

$$\frac{v}{r} = \frac{eB}{m} \quad \text{ricaviamo quindi:}$$

$$B = \frac{mv}{er} = \frac{m}{er} \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2m\Delta V}{e}} = \\ = \frac{1}{(0,075 \text{ m})} \sqrt{\frac{2 \cdot (9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg}) \cdot (350 \text{ V})}{(1,6022 \times 10^{-19} \text{ C})}} = 0,8412 \times 10^{-3} \text{ T}$$

b) Le velocita' angolare degli elettroni e' quindi:

$$\omega = \frac{eB}{mr} = \frac{e}{mr} \sqrt{\frac{2m\Delta V}{e}} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \\ = \frac{1}{(0,075 \text{ m})} \sqrt{\frac{2 \cdot (1,6022 \times 10^{-19} \text{ C}) \cdot (350 \text{ V})}{(9,1094 \times 10^{-31} \text{ kg})}} = 1,4794 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

Applicazioni del moto di particelle cariche in un campo magnetico

In una regione di spazio in cui siano presenti sia un campo elettrico \vec{E} sia un campo magnetico \vec{B} , su una particella con carica elettrica q e in moto con velocita' vettoriale instantanea \vec{v} agisce (in assenza di altre forze) una forza risultante detta FORZA DI LORENTZ:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}$$

Vediamo alcuni casi specifici.

A) Selettore di velocità

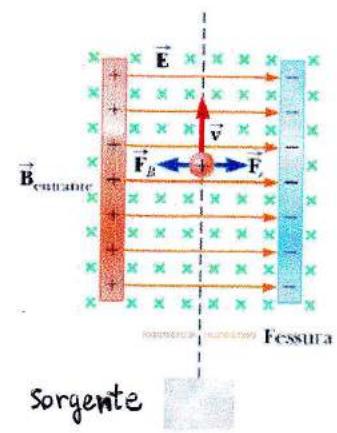
In una regione di spazio in cui sono presenti un campo elettrico \vec{E} e un campo magnetico \vec{B} perpendicolari tra loro, come nello schema delle figure a fianco, una particella carica che entra in questa regione con velocità \vec{v} diretta perpendicolarmente sia a \vec{E} sia a \vec{B} , con $|v| = \frac{E}{B}$ (essendo $E = |\vec{E}|$ e $B = |\vec{B}|$), sente una forza risultante nulla.

Infatti, lungo la direzione perpendicolare a \vec{B} e parallela a \vec{E} sul piano del foglio risulta $F_{E,x} = qE$ e $F_{B,x} = -qVB$, per cui la risultante è $F_{\text{TOT},x} = F_{E,x} + F_{B,x} = q(E - VB)$, che si annulla quando risulta $v = \frac{E}{B}$.

Quindi, solo le particelle cariche che hanno queste velocità si muovono di moto rettilineo uniforme lungo la direzione perpendicolare a \vec{E} e a \vec{B} e quindi le loro traiettorie non viene deflessa. Con queste tecniche è possibile quindi realizzare "fasci" di particelle avendo praticamente le stesse velocità.

B) Spettrometro di massa

Uno SPETTROMETRO DI MASSA è un dispositivo pensato per separare tra loro ioni aventi valori diversi del rapporto "massa - carica" (m/q).



In questo dispositivo, un fascio di ioni viene prima fatto passare attraverso un selettore di velocità, e poi entra in una regione di spazio in cui c'è presente solo un campo magnetico \vec{B}_0 e non c'è campo elettrico; \vec{B}_0 è parallelo al campo magnetico \vec{B} del selettore di velocità. Nella regione con il campo \vec{B}_0 gli ioni si muovono lungo una traiettoria semicircolare di raggio r , verso sinistra o verso destra a seconda del segno delle carica elettrica q .

Sulla base dell'analisi fatta in precedenze, risulta

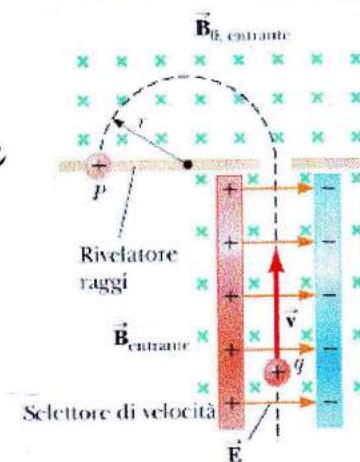
$$\frac{m}{|q|} = \frac{r B_0}{v} = \frac{r B_0 B}{E}$$

, dove B ed E sono rispettivamente il modulo del

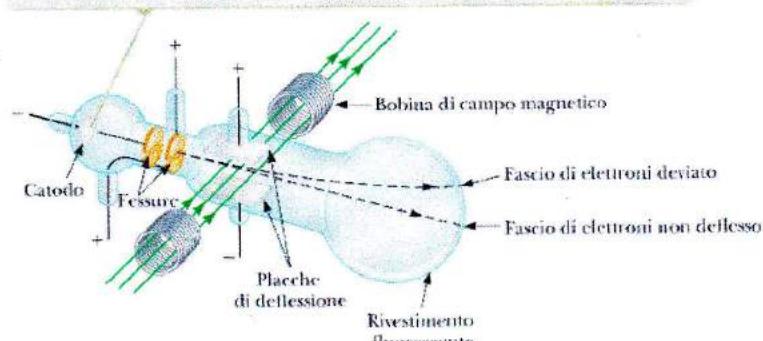
campo magnetico e il modulo del campo elettrico nel selettore di velocità. Dunque, la misura di r e le conoscenze dei valori E, B, B_0 permette di ottenere $m/|q|$.

Nel 1897 J.J. Thomson misurò il rapporto $|q|/m$ per gli elettroni usando il dispositivo schematizzato a fianco: gli elettroni sono accelerati all'ingresso del dispositivo (in cui c'è stato fatto il vuoto) e poi passano attraverso due fenditure.

Quindi attraversano una regione in cui sono presenti un campo elettrico \vec{E} e un campo magnetico \vec{B} tra loro perpendicolari, regolati in modo che il fascio di elettroni non ne deflcano. Poi risponde il campo magnetico e si misura, su uno schermo fluorescente posto all'estremità destra del dispositivo, la deflessione del fascio di elettroni. La misura di questa deflessione e le conoscenze dei



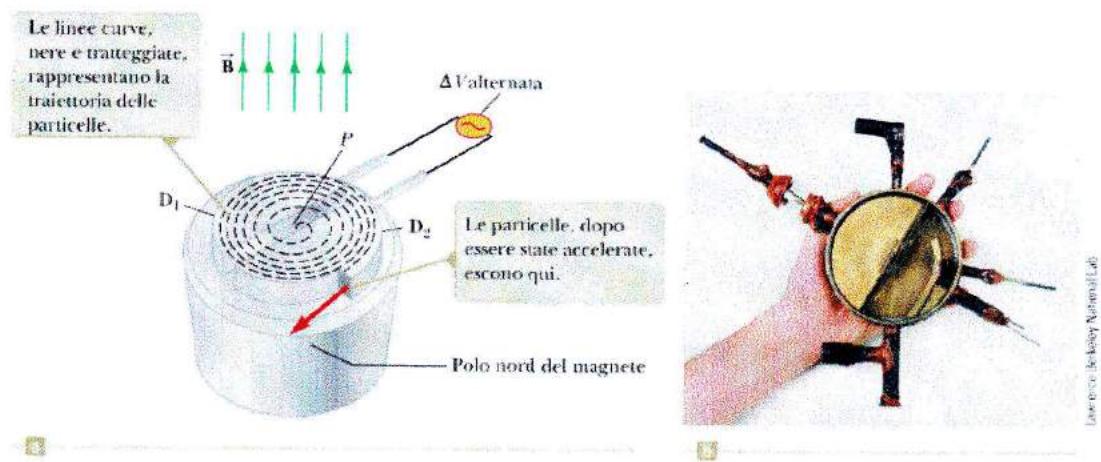
Gli elettroni sono accelerati dal catodo, passano attraverso due fenditure e sono deflessi sia da un campo elettrico (generato dalle piastre di deflessione caricate) che da un campo magnetico (diretto perpendicolarmente al campo elettrico). Il fascio di elettroni infine colpisce uno schermo fluorescente.



valori di E e B permette di calcolare il rapporto e/m. E' in questo esperimento che fu osservato per la prima volta l'elettrone (premio Nobel per la Fisica a J.J. Thomson nel 1906).

c) Ciclotrone

In questo dispositivo le particelle cariche si muovono dentro due contenitori metallici a forma di D, affacciati uno verso l'altro.



L'immagine della Bechtel National Lab

Un campo magnetico uniforme è applicato perpendicolarmente al piano su cui sono disposti i due contenitori metallici. Tra i due contenitori è applicata una differenza di potenziale opportune mente regolata con il moto circolare delle particelle: ogni volta che le particelle passa da un contenitore all'altro (il che avviene ogni semiperiodo), la particella trova un campo elettrico accelerante, per cui ogni semiperiodo le particelle guadagna una energia cinetica pari a $q\Delta V$, per cui il raggio delle traiettorie aumenta ogni mezzo giro, mentre il periodo di rotazione non varia in quanto dipende solo da q, m e B e non da v . Quando il raggio delle traiettorie è quasi uguale al raggio R dei contenitori, la particella esce dalla fenditura di uscita con una energia cinetica

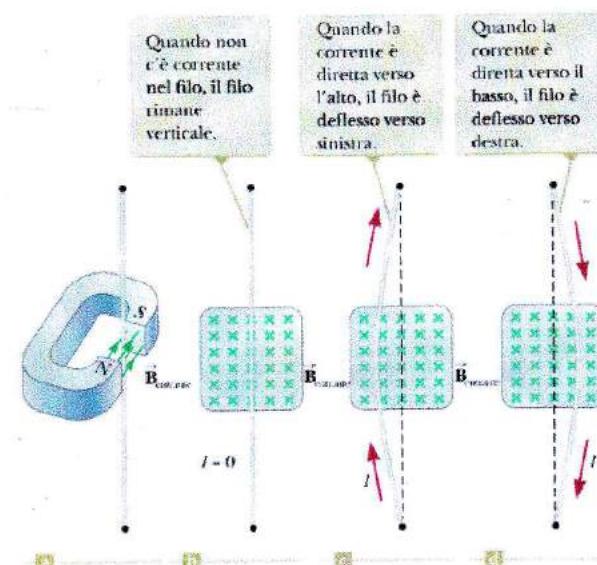
$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{qBR}{m}\right)^2 = \frac{(qBR)^2}{2m}, \text{ formula valida per } K < 20 \text{ MeV circa.}$$

Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

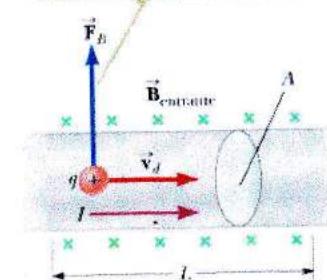
Un filo conduttore percorso da corrente elettrica è sotto posta all'azione di una forza magnetica se si trova in una regione con un campo magnetico esterno. In fatti, la forza magnetica applicata al filo è la risultante delle forze magnetiche sulle singole cariche elettriche in movimento; la forza agente sui portatori di carica viene trasmessa alla massa del filo conduttore attraverso gli inti che gli elettroni in moto hanno con gli atomi del conduttore.

Se facciamo pensare un filo percorso da corrente tra i due poli di un magnete, risulta che il filo tende a spostarsi trasversalmente quando è attraversato da corrente (il filo è diretto perpendicolarmente al campo magnetico).

Consideriamo un treno rettilineo di filo conduttore avente lunghezza L e sezione A , percorso da una corrente I e immerso in un campo magnetico esterno uniforme \vec{B} . È fatto considerare solo le velocità di deriva delle cariche nel conduttore, in quanto le componenti cartesiane delle velocità di agitazione termica delle cariche sono in media nulle. Dunque, la forza magnetica agente su una carica q in moto nel conduttore è $q \vec{v}_d \times \vec{B}$.



La forza magnetica media esercitata su una carica che si muove nel filo è $q \vec{v}_d \times \vec{B}$.



La forza magnetica sul segmento di filo di lunghezza L è $I L \times \vec{B}$.

La forza magnetica totale agente sul tratto di filo conduttore considerato si calcola dopo avere determinato il numero di portatori di carica contenuti in questo tratto di filo.

Se n e' il numero di portatori di carica per unita' di volume nel conduttore, il numero cercato e' nAL , poiché AL e' il volume del tratto di filo. Allora la forza magnetica complessiva agente su questo tratto di filo e' :

$$\vec{F}_B = (q\vec{v}_d \times \vec{B}) nAL$$

Ma sappiamo che la corrente in un conduttore e' espressa con:

$I = nqV_d A$, per cui se definiamo un vettore \vec{L} tale che $|\vec{L}| = L$ e concorde al verso della corrente nel filo, otteniamo la legge

$$\boxed{\vec{F}_B = I \vec{L} \times \vec{B}}$$

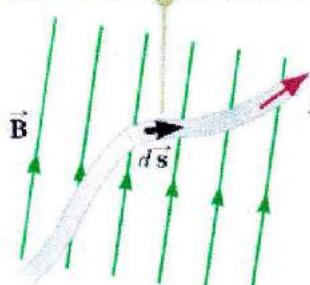
FORZA MAGNETICA ESERCITATA SU UN TRATTO DI FILO RETTILINEO IN UN CAMPO MAGNETICO ESTERNO UNIFORME

Se un filo avente sezione uniforme ma forme arbitrarie si trova in un campo magnetico esterno, conviene moltiplicare il filo in piccoli segmenti rettilinei aventi lunghezze ΔS_i , per cui la forza magnetica esercitata su uno di questi segmenti e':

$$\boxed{\Delta \vec{F}_{B,i} = I \Delta \vec{S}_i \times \vec{B}}, \text{ dove } \Delta \vec{S}_i \text{ e' il}$$

vettore tale che $|\Delta \vec{S}_i| = \Delta S_i$, con direzione e verso uguali a quelli della corrente. Questa espressione fornisce una ulteriore definizione operativa del campo magnetico \vec{B} in termini delle forze esercitate su un elemento di filo percorso da corrente quando questo elemento si trova in una regione con campo magnetico.

La forza magnetica su un qualunque segmento $d\vec{s}$ e' $I d\vec{s} \times \vec{B}$ ed e' uscente dalla pagina



Pertanto, l'espressione formale della forza magnetica totale agente su un filo fra due posizioni \vec{r}_A e \vec{r}_B lungo il filo è:

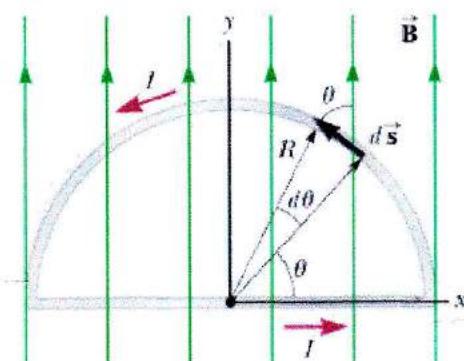
$$\vec{F}_B = I \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\vec{s} \times \vec{B}$$

Questa legge vale in generale, anche quando \vec{B} varia nello spazio.

Il calcolo va eseguito procedendo lungo il filo nel verso delle corrente.

Esempio 4

Un filo a forma di semicirconferenza di raggio R , richiuso da un tratto rettilineo lungo il diametro, è attraversato da una corrente I . Il filo giace nel piano xy e un campo magnetico uniforme è diretto lungo l'asse y positivo come nella figura. Trovare il modulo, la direzione e il verso della forza magnetica che agisce sulle perte rettilinee del circuito e delle forze magnetiche che agiscono sulle parte curve.



Indichiamo con \vec{F}_1 la forza magnetica agente sul tratto rettilineo e con \vec{F}_2 la forza magnetica agente sul tratto curvilineo. Nel tratto rettilineo si vede che $\vec{L} \times \vec{B}$ è diretto perpendicolarmente al piano del foglio, nel verso uscente, mentre i prodotti vettoriali infinitesimi $d\vec{s}_i \times \vec{B}$ nel tratto curvilineo sono diretti perpendicolarmente al piano del foglio, nel verso entrante.

Per il tratto rettilineo risulta $|\vec{F}_1| = I \cdot 2R B \Rightarrow \vec{F}_1 = 2IRB \hat{k}$

Per il tratto curvilineo risulta:

$$\Delta \vec{s}_i \times \vec{B} = -\Delta s_i B \sin \theta_i \hat{k}$$

Poiché $\Delta s_i = R \Delta \theta_i$ come si evince dalla geometria del sistema,

risulta: $\Delta \vec{s}_i \times \vec{B} = -R B \sin \theta_i \Delta \theta_i \hat{k}$

Dunque, le forze magnetiche esercitate sul tratto curvilineo è:

$$\vec{F}_2 = I \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\vec{s} \times \vec{B} = -I \sum_i R B \sin \theta_i \Delta \theta_i \hat{k} =$$

$$= -IRB \hat{k} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = -IRB \left(-\cos \theta \Big|_0^\pi \right) = -IRB \left[-\cos \pi + \cos 0 \right] \hat{k} =$$

$$= -IRB \left[-(-1) + 1 \right] \hat{k} = -2IRB \hat{k}$$

Dunque risulta: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$

[Questo è vero in generale: le forze magnetiche totale agente su un generico circuito chiuso percorso da corrente e posto in un campo magnetico uniforme è nulla.]

Momento delle forze agente su una spira in un campo magnetico uniforme

Fino a qui abbiamo studiato l'effetto di un campo magnetico su un conduttore percorso da corrente.

Vediamo adesso più in dettaglio che cosa accade a una spira percorso da corrente posta in un campo magnetico.

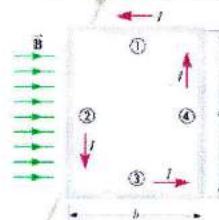
Partiamo da una spira rettangolare scorso da corrente, e applichiamo un campo magnetico uniforme \vec{B} nel piano delle spire. Basandoci sulla figura qui a fianco (a), si vede che le forze magnetiche agenti sui tratti ① e ③ delle spire sono nulle, in quanto in questi tratti la corrente scorre parallelamente al campo magnetico, per cui $\Delta \vec{s}_i \times \vec{B} = 0$ lungo questi tratti. Sui lati ② e ④, al contrario, le forze magnetiche non sono nulle poiché lungo questi tratti la corrente scorre lungo una direzione perpendicolare al campo magnetico. Risulta $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = IaB$, sulle basi delle informazioni riportate nelle figure. Del punto di vista vettoriale risulta

$\vec{F}_4 = -\vec{F}_2$, poiché i versi di scorrimento delle correnti nei due tratti ② e ④ sono opposti. Pertanto la forza magnetica risultante agente sulla spira è nulla.

Guardando le spire "di taglio" (figura (b)), osserviamo tuttavia che \vec{F}_2 e \vec{F}_4 agiscono lungo due rette parallele, per cui se le spire fosse vincolate a ruotare attorno a un asse perpendicolare ai lati ① e ③, e passante per i punti medi di questi due tratti, le spire ruoterebbe in senso orario a causa del momento risultante lungo tale asse dovuto proprio alle forze \vec{F}_2 e \vec{F}_4 . Nella configurazione delle figure (b) risulta $\tau_2^* = \frac{b}{2} F_2 + \frac{b}{2} F_4 = \frac{b}{2} (IaB) + \frac{b}{2} (IeB) = IebB$; essendo $eb = A$ (area della superficie delimitata dalle spire) poniamo quindi

vere: $|\tau_2^* = IAB|$ (\vec{B} parallelo al piano delle spire)

Non ci sono forze magnetiche che agiscono sui lati ① e ③ perché questi lati sono paralleli a \vec{B} .

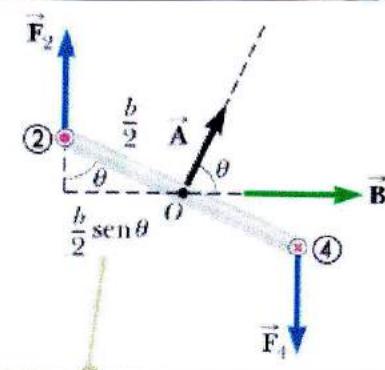


I lati ② e ④ sono perpendicolari al campo magnetico e sono sottoposti a forze.

Le forze magnetiche \vec{F}_2 e \vec{F}_4 , esercitate sui lati ② e ④, generano un momento delle forze che tende a ruotare la spira in senso orario.



Supponiamo ora che le spine sia orientate in modo che \vec{B} sia ancora perpendicolare ai tratti ② e ④, ma che formi un angolo θ con la direzione perpendicolare al piano delle spine (nella configurazione precedente era $\theta = 90^\circ$).



Quando la normale alla spira forma un angolo θ con il campo magnetico, il braccio del momento delle forze è $(b/2) \sin \theta$.

In questo caso le forze agenti sui lati ① e ③ non sono nulle, ma sono opposte tra loro e agiscono lungo le stesse rette di azione per cui non producono nemun momento. Le forze \vec{F}_2 e \vec{F}_4 invece, in generale continuano a produrre un momento rispetto all'asse considerato in precedenza. Il braccio sia di \vec{F}_2 sia di \vec{F}_4 rispetto al centro della spira è $\frac{b}{2} \sin \theta$; siccome risultano $F_2 = F_4 = IaB$, otteniamo

$$\tau_2 = \left(\frac{b}{2} \sin \theta \right) \cdot F_2 + \left(\frac{b}{2} \sin \theta \right) \cdot F_4 = \left(\frac{b}{2} \sin \theta \right) (F_2 + F_4) = IabB \sin \theta$$

Dunque: $\boxed{\tau_2 = IAB \sin \theta}$, con $A = ab$ e $B = |\vec{B}|$
(campo magnetico uniforme)

$|\tau_2|$ e' minimo quando $\theta = \pm 90^\circ$, e $\tau_2 = 0$ quando $\theta = 0$ oppure $\theta = 180^\circ$. Dunque, le spine tende a ruotare in modo che la normale al piano delle spine tenda a disporre lungo la direzione del campo magnetico \vec{B} .

Definiamo un vettore \vec{A} tale che $|\vec{A}| = A$ (area della superficie delimitata dalle spine), direzione perpendicolare al piano delle spine, e verso tale che una persona in piedi lungo questa direzione con \vec{A} diretto verso l'alto vede le corrente circolante nelle spine in senso antiorario.

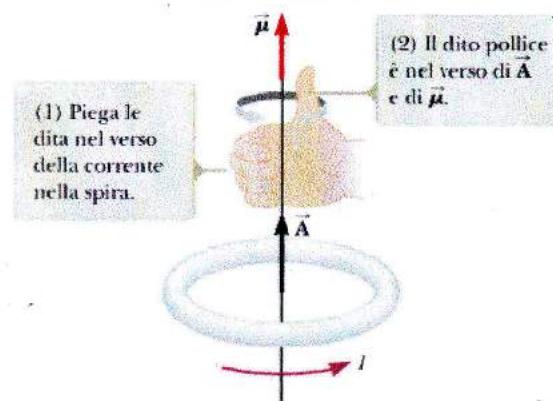
Allora possiamo scrivere:

$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}$$

Le grandezze vettoriali $\vec{\mu} = I \vec{A}$ e' denominata MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO oppure MOMENTO MAGNETICO delle spire.

Nel S.I. l'unita' di misura del momento di doppio magnetico e' $A \cdot m^2$. Possiamo quindi scrivere:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$



Questa ultima equazione ha validita' generale, qualunque sia l'orientamento di \vec{B} rispetto alle spire e qualunque sia la forma delle spire.

Se una bobina e' formata da N spire di uguale area e percorse dalla stessa corrente, il momento magnetico totale delle bobine e' $\vec{\mu} = N I \vec{A}$.

Che cosa accade se lasciamo libere le spire considerate in precedenza, da ferme? Abbiamo già visto che il suo vettore $\vec{\mu}$ ruoterà in senso antiorario per allinearsi con \vec{B} ; ma una volta raggiunta la posizione angolare $\theta = 0^\circ$ continuerà a ruotare, con il momento delle forze $\vec{\tau}$ che sterminerà la rotazione e poi riporterà $\vec{\mu}$ verso la posizione angolare $\theta = 0^\circ$, e così via. Si instaurerà cioè un'oscillazione attorno alla posizione di equilibrio stabile $\theta = 0^\circ$.

Chiaramente, l'energia associata all'oscillazione delle spine percorse da corrente nel campo magnetico e' minima del lavoro che e' stato necessario compiere dall'esterno per ruotare $\vec{\mu}$ dalle posizioni di equilibrio stabile $\theta=0^\circ$ fino alla posizione nelle quale le spine e' rilasciate da ferme. L'energia potenziale di un dipolo magnetico posto in un campo magnetico e'

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Dunque, U e' minima quando $\vec{\mu}$ e' parallelo a \vec{B} , ed e' massima quando $\vec{\mu}$ e' antiparallelo a \vec{B} (rispettivamente configurationi di equilibrio stabile e di equilibrio instabile).

Esempio 5. Una bobina rettangolare avente dimensioni $5,4 \text{ cm} \times 8,5 \text{ cm}$ e' costituita da $N = 25$ spine di filo conduttore. La bobina e' percorsa da una corrente $I = 15 \text{ mA}$. Un campo magnetico di modulo $B = 0,35 \text{ T}$ viene applicato parallelamente al piano della bobina.

- Calcolare il modulo del momento di dipolo magnetico della bobina.
- Qual e' il modulo del momento delle forze che agisce sulla bobina?

- $\mu = |\vec{\mu}| = NI A = 25 \cdot (15 \times 10^{-3} \text{ A}) \cdot (5,4 \cdot 8,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = 1,72125 \times 10^{-3} \text{ A} \cdot \text{m}^2$
- $\tau = |\vec{\tau}| = \mu B = NIAB = 0,6024 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$

Legge di Biot-Savart

Abbiamo già menzionato la scoperta di Ørsted (1819): un filo conduttore in cui scorre una corrente elettrica fa muovere l'ago di una bussola posta vicino al filo; dunque, la corrente elettrica è una sorgente di campo magnetico. Jean-Baptiste Biot e Félix Savart studiarono in dettaglio l'interazione tra un filo conduttore percorso da corrente e un magnete, per cercare di ottenere la legge che esprime il campo magnetico generato, in un punto dello spazio, da una corrente elettrica. Poiché per fare scorrere una corrente è necessario un circuito, non esistono "correnti puntiformi". Quindi, dato un filo conduttore percorso da corrente, occorre suddividere idealmente il filo in tretti di lunghezza molto piccole e determinare il campo magnetico prodotto da ciascuno di questi tretti nel punto dello spazio considerato.

Consideriamo quindi un tratto di filo conduttore percorso da corrente, $\Delta \vec{s}$ (vedi figura). Questi furono i risultati ottenuti da Biot e Savart:

- 1) $\Delta \vec{B}$ (il campo magnetico generato dall'"elemento di corrente" $\Delta \vec{s}$) è perpendicolare a $\Delta \vec{s}$ e al versore \hat{r} orientato dalla posizione di $\Delta \vec{s}$ a quelle del punto in cui vogliamo misurare il campo magnetico;
- 2) $|\Delta \vec{B}|$ è inversamente proporzionale a r^2 , dove r è la distanza tra la posizione di $\Delta \vec{s}$ e il punto in cui vogliamo misurare il campo magnetico;
- 3) $|\Delta \vec{B}|$ è proporzionale a I e a $|\Delta \vec{s}|$;
- 4) $|\Delta \vec{B}|$ è proporzionale a $\sin \theta$, essendo θ l'angolo fra $\Delta \vec{s}$ e \hat{r} .



In definitiva, vale la legge seguente:

$$\Delta \vec{B} = k_m \frac{I(\Delta \vec{s} \times \hat{r})}{r^2}$$

La costante k_m , nel S.I., vale esattamente $10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m}/\text{A} = 10^{-7} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^2}$

Come nel caso delle costante elettrica k_e , anche nel caso di k_m si e' introdotta una "costante auxiliarie", per cui e' convenzione scrivere

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad \text{con } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}$$

Pertanto rimane:

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I (\Delta \vec{s} \times \hat{r})}{r^2}$$

LEGGE DI
BIOT-SAVART

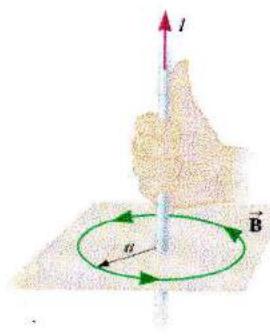
La costante μ_0 e' chiamata PERMEABILITA' MAGNETICA DEL VUOTO.

Per ottenere il campo magnetico \vec{B} generato in un punto dello spazio da un filo conduttore di lunghezza finita occorre sommare vettorialmente tutti i contributi $\Delta \vec{B}_i$ del campo magnetico in quel punto dovuti ai singoli "elementi di corrente" del filo (e quindi occorre calcolare un integrale). Un ELEMENTO DI CORRENTE e' propriamente definito come un vettore $I \Delta \vec{s}$.

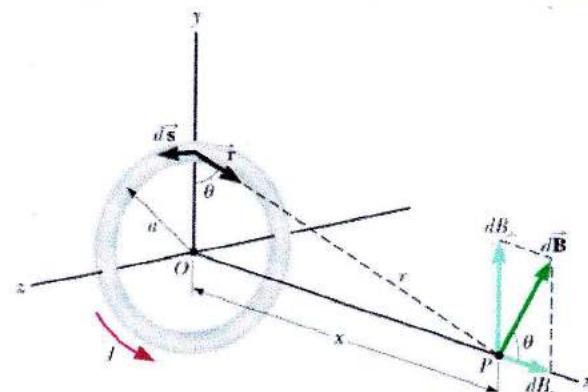
La differenza essenziale tra un campo elettrico e un campo magnetico e' che, a differenza del campo elettrico, il campo magnetico $\Delta \vec{B}_i$ non e' diretto lungo la retta congiungente la sorgente (l'elemento di corrente) con il punto dello spazio considerato. Inoltre, il campo magnetico puo' essere prodotto solo da una distribuzione di corrente, poiché non esistono "correnti puntiformi".⁽²⁴⁾

Regole della mano destra per determinare la direzione e il verso del campo magnetico generato da una corrente elettrica: immaginando di avvolgere la mano destra attorno al filo con il pollice nel verso delle corrente, le dita della mano si avvolgono secondo il verso con cui è orientato il campo magnetico \vec{B} attorno al filo. Se il filo è rettilineo e molto lungo, le linee di campo magnetico sono circonferenze concentriche centrate sul filo in un piano perpendicolare al filo. Vedremo più avanti che il modulo di \vec{B} alle distanze r del filo è

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (*)$$



Esempio 6. Si consideri una spira circolare di raggio a , posta nel piano yz e percorsa da una corrente istantanea I (vedi figura).



- a) Calcolare il campo magnetico \vec{B} in un punto P posto sull'asse delle spire (coincidente con l'asse x) in una posizione di ascisse $x > 0$ (e quindi a distanza x del centro delle spire).
- b) Quale è l'andamento del campo magnetico lungo l'asse delle spire per $x \gg a$?

(*) Il calcolo è svolto nell'appendice a pag. 40.

e) Suddividiamo le spire circolare in piccolissimi elementi di corrente $I \Delta \vec{s}_i$. Nelle figure alle pagine precedente e' rappresentato il contributo $\Delta \vec{B}$ al campo magnetico in P di un singolo elemento di corrente. Se consideriamo il contributo al campo magnetico in P dell'elemento di corrente diametralmente opposto lungo le spire, e' immediato verificare che il componente parallelo all'asse x cancella esattamente l'analogo componente del contributo dovuto al primo elemento di corrente, per cui al netto di tutto per ogni coppia di elementi di corrente si ha che il contributo lungo le spire ciascuna e' solo il trebamente opposti lungo le spire cio' che resta e' solo il componente del campo magnetico lungo l'asse x. Dunque e' sufficiente calcolare solo B_x lungo l'asse per ottenere il campo magnetico generato dalle spire lungo questo asse.

Per l'elemento $I \Delta \vec{s}_i$ risulta (tenuto conto che $\Delta \vec{s}_i \perp \hat{r}_i$):

$$|\Delta \vec{B}_i| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|\Delta \vec{s}_i \times \hat{r}_i|}{r_i^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta s_i}{(\alpha^2 + x^2)} \quad (\text{vedi figure!})$$

La componente x del contributo di $I \Delta \vec{s}_i$ al campo magnetico nel punto P e' quindi:

$$(\Delta B_x)_i = |\Delta \vec{B}_i| \cos \theta, \quad \text{con } \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} \quad (\text{vedi figure!})$$

$$(\Delta B_x)_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x \Delta s_i}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}}, \quad \text{e in fine:}$$

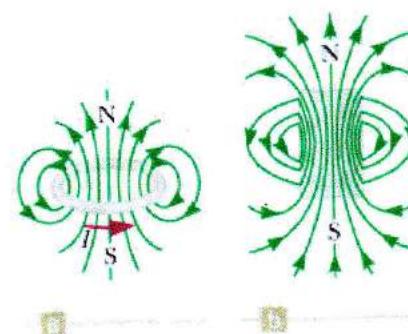
$$B_x = \frac{\mu_0 I x}{4\pi(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} \oint ds = \frac{\mu_0 I x}{4\pi(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} (2\pi\alpha) = \frac{\mu_0 I \alpha^2}{2(\alpha^2 + x^2)^{3/2}}$$

In particolare, nel centro delle spire risulta:

$$B_x(x=0) = \frac{\mu_0 I}{2a}$$

b) Per $x \gg a$ risulta

$$B_x \approx \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3}$$



Utilizzando il vettore momento magnetico delle spire, cioè

$\vec{\mu} = IA\hat{A}$, con $|\vec{\mu}| = IA = I(\pi a^2) = \pi I a^2$, poniamo

scrivere:

$$B_x = \frac{\mu_0 |\vec{\mu}|}{2\pi (a^2 + x^2)^{3/2}}$$

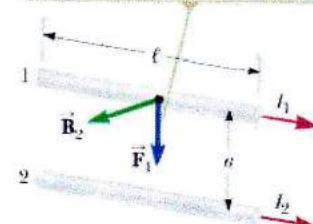
con $B_x \approx \frac{\mu_0 |\vec{\mu}|}{2\pi x^3}$ se $x \gg a$.

Forze magnetiche tra due conduttori paralleli

Poiché un filo conduttore percorso da una corrente genera un campo magnetico, due conduttori percorsi da corrente interagiscono tra loro mediante una mutua interazione magnetica.

Consideriamo due fili conduttori paralleli di lunghezze infinite, a distanza a l'uno dall'altro, nei quali scorrono le correnti I_1 e I_2 (vedi figura). Supponiamo che il raggio dei fili sia molto minore di a . Calcoliamo la forza magnetica agente su un tratto di lunghezza l del filo 1 posto nel campo magnetico generato dal filo 2. Teniamo conto, per quanto visto in precedenze, che il campo magnetico \vec{B}_2 è diretto perpendicolarmente al filo 1 (vedi figura), ed è uniforme in tutto il tratto di filo.

Il campo \vec{B}_2 generato dalla corrente nel filo 2 esercita una forza magnetica di modulo $F_1 = I_1 l B_2$ sul filo 1.



Dunque risulta: $\vec{F}_1 = I_1 \vec{l} \times \vec{B}_2$, e quindi $F_1 = |\vec{F}_1| = I_1 l B_2$.

Essendo poi $B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}$ (vedi pag. 25), poniamo subito:

$$F_1 = I_1 l B_2 = I_1 l \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l$$

Pertanto, le forze per unità di lunghezza esercitate sul filo 1 è:

$$\frac{F_1}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Effettuando un ragionamento esattamente simmetrico per calcolare le forze esercitate sul conduttore 2 immerso nel campo magnetico generato dal conduttore 1 per corso di corrente, otteniamo una forza avente uguale modulo ma verso opposto (come era logico che fosse, per la terza legge della dinamica). Dunque, il modulo delle forze magnetiche per unità di lunghezza che si esercita tra i due fili paralleli infiniti per corso di corrente è

$$\boxed{\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}}$$

Questa legge resta valida anche nel caso in cui uno dei due fili abbia lunghezza finita.

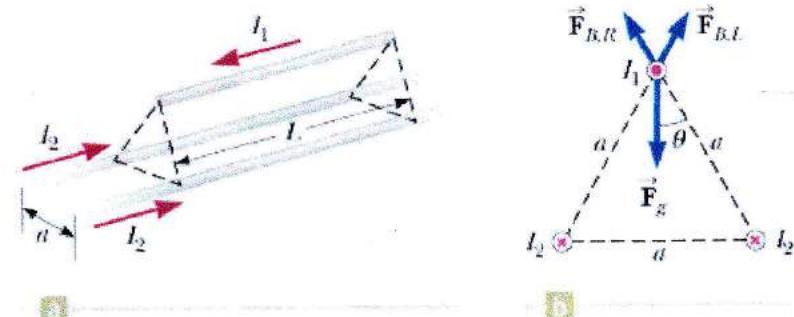
Dalle figure e pag. 27 vediamo che se I_1 e I_2 scorrono nello stesso verso i due fili si attraggono; se I_1 e I_2 scorrono in versi opposti i due fili si respingono.

Se due fili conduttori paralleli molto lunghi, percorsi dello stesso corrente e posti a 1 m di distanza l'uno dall'altro si attraggono o si respingono con una forza per unità di lunghezza pari a $2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ in ciascun (28)

file, il valore della corrente che circola in ciascun filo e' 1 A (definizione operativa dell' unita' di misura ampere).

Quindi, se in un conduttore scorre una corrente di 1 A, la quantita' di carica che attraversa una qualunque sezione del conduttore in 1 s e' 1 C.

Esempio 7. Due fili infini tangentemente lunghi e paralleli giacciono al nolo e una mutua distanza $a = 1 \text{ cm}$.



Un terzo filo, di lunghezza $L = 10 \text{ m}$ e massa $m = 400 \text{ g}$, e' percorso da una corrente $I_1 = 100 \text{ A}$ ed e' sospeso sopra i primi due fili, in una posizione orizzontale e mette strade tra di loro.

I fili infinitamente lunghi sono percorsi da correnti uguali I_2 (vedi figura), con verso opposto rispetto al verso di I_1 .

Quale corrente deve percorrere i fili infinitamente lunghi affinche' il filo sospeso si trovi, in sezione (figura (b) qui sopra), nel vertice superiore di un triangolo equilatero e in equilibrio sotto l'azione di tutte le forze agenti su di esso?

Dalle figure (b) si vede che le due forze magnetiche agenti sul filo sospeso si sommano lungo la direzione verticale, per cui il modulo delle loro somme si ottiene sommando le componenti verticali di queste due forze (cioe' l'una verticale, con verso \hat{k}):

$$\vec{F}_B = 2 \left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} L \right) \cos\theta \hat{k}, \quad \text{con } \theta = 30^\circ \quad (\text{e quindi } \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

All'equilibrio, la forza magnetica sul filo sospeso deve bilanciare le forze peso del filo: $\vec{F}_p = -mg\hat{k}$:

$$\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi r} \cos\theta - mg = 0$$

Dunque ottieniamo il valore di I_2 richiesto:

$$I_2 = \frac{\pi e mg}{\mu_0 I_1 L \cos\theta} = \frac{\pi (0,01 \text{ m}) (0,4 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2)}{(4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}})(100 \text{ A})(10 \text{ m}) \cos 30^\circ} = 113,2761 \text{ A}$$

Verificare per esercizio se l'equilibrio del filo è stabile o instabile.

Teorema di Ampère

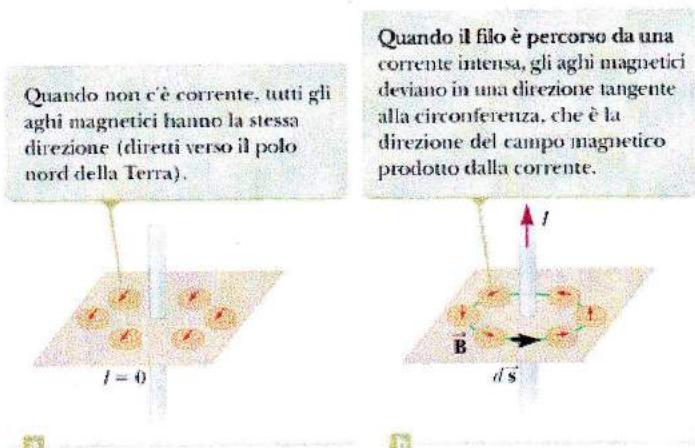
La figura qui a fianco schematizza e riassume il risultato dell'esperimento di Oersted, già menzionato: un filo conduttore percorsa

da corrente produce un campo magnetico. Le linee di campo di \vec{B} sono circonferenze concentriche, e per simmetria il modulo di \vec{B} è costante su una circonferenza centrale sul filo e giacente in un piano perpendicolare al filo. Risulta poi $|\vec{B}| \propto I/r$, dove I è la corrente che circola nel filo e r è la distanza dal filo.

Suddividiamo una circonferenza attorno al filo in tantissimi tratti

$\Delta\vec{s}_i$; lungo queste linee, \vec{B} e $\Delta\vec{s}_i$ sono paralleli fra loro in tutti i punti delle circonferenze (\vec{B} è diretto tangenzialmente alle circonferenze), e risulta $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Dunque, vale la relazione:

$$\vec{B} \cdot \Delta\vec{s}_i = |\vec{B}| |\Delta\vec{s}_i| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} |\Delta\vec{s}_i|$$



© Richard Megna Fundamental Photographs

Pertanto, se consideriamo le somme di tutti questi termini lungo un giro completo delle circonference, otteniamo:

$$\sum_i \vec{B} \cdot \Delta \vec{s}_i = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = |\vec{B}| \oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot (2\pi r) = \mu_0 I$$

Questo risultato, ottenuto lungo un percorso circolare attorno al filo, vale in generale per qualsiasi percorso chiuso attorno a una corrente stazionaria che attraversa l'area delimitata dal percorso chiuso (anche detta CORRENTE CONCATENATA con il percorso chiuso). Vale cioè il TEOREMA DI AMPÈRE:

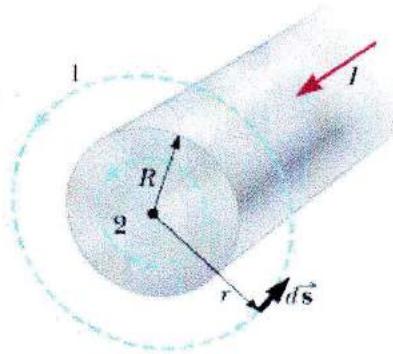
L'integrale di linee $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s}$ lungo un qualsiasi percorso chiuso è uguale a $\mu_0 I$, dove I è la corrente stazionaria totale concatenata con il percorso chiuso considerato (cioè, che attraversa una qualunque superficie delimitata dal percorso chiuso):

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I}$$

Il teorema di Ampère è utile per calcolare il campo magnetico quando il sistema di correnti presenta un elevato grado di simmetria, come nei casi notevoli che andremo a esaminare.

Esempio 8. Un lungo filo rettilineo di raggio R e' percorso da una corrente I distribuita uniformemente su tutta la sezione del filo.

Calcolare il campo magnetico a una distanza r dall'asse del filo per $r \geq R$ e per $0 < r < R$.



a) $r \geq R$; applichiamo il teorema di Ampere al cammino di integrazione 1 nella figura, cioè una circonferenza di raggio r ; lungo questa circonferenza $|\vec{B}|$ è costante per simmetria, e \vec{B} è tangente alle circonferenze anche per simmetria. La corrente concatenata con il circuito 1 è I , per cui risulta:

$$\oint_1 \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I, \text{ da cui ottieniamo:}$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (r \geq R)$$

b) $0 < r < R$; se la corrente I è distribuita uniformemente su tutta la sezione del filo, ciò significa che la densità di corrente è costante su tutta la sezione: $J = \frac{I}{\pi R^2} = \text{costante}$.

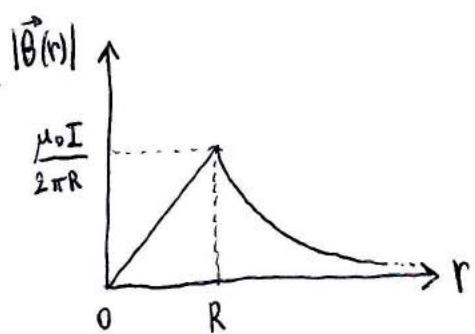
Dunque, se $0 < r < R$, la corrente che scorre in un cilindro concentrico al conduttore, di raggio r , è:

$I(r) = J(\pi r^2) = I \left(\frac{r}{R}\right)^2$. Applicando il teorema di Ampère al circuito 2, che concatena la corrente $I(r)$, ottieniamo:

$$\oint_2 \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I(r) = \mu_0 I \left(\frac{r}{R}\right)^2, \text{ da cui risulta:}$$

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}, \text{ cioè } \boxed{B(r) = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right)r \quad (0 < r < R)}$$

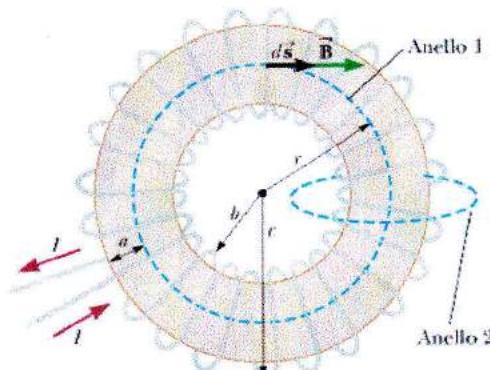
per $r \geq R$ l'espressione di $|\vec{B}|$ e' identica a quella del modulo del campo magnetico generato da un filo conduttore di lunghezza infinita e infinitamente sottile.



Esempio 9

Un dispositivo chiamato TOROIDE e' spesso usato per produrre un campo magnetico quasi uniforme in una certa area chiusa. Il dispositivo e' costituito da un filo conduttore avvolto esternamente su un anello (un toro) fatto di materiale isolante.

Per una bobina toroidale avente N spire fittamente addossate l'una all'altra, calcolare il campo magnetico nelle regioni occupate dal toro e distanze r del centro.



Consideriamo il circuito circolare 1 nella figura, di raggio r . Sulla base del verso di scorIMENTO delle corrente (vedi figura) e poiché le spire sono molto fitte, il sistema e' altamente simmetrico e il campo magnetico \vec{B} , nei punti lungo il circuito 1, e' tangente al circuito ed e' costante in modulo, per cui risulta

$$\vec{B}_i \cdot \Delta \vec{s}_i = |\vec{B}| \Delta s_i.$$

Ma in queste configurazione il filo conduttore attraverso N volte l'area delimitata dal percorso chiuso 1, per cui la corrente concatenata completamente da questo percorso chiuso è NI .

Dunque, applicando il teorema di Ampère al percorso 1 ottieniamo: $\oint_1 \vec{B} \cdot d\vec{s} = |\vec{B}| \oint ds = |\vec{B}| (2\pi r) = \mu_0 NI$, e quindi:

$$|\vec{B}(r)| = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Dunque, $|\vec{B}|$ non è costante all'interno del toroide; se però $r \gg a$,

dove a è il raggio delle sezioni del toro perpendicolare alla direzione di \vec{B} , il modulo di \vec{B} viene molto poco all'interno del toroide.

Campo magnetico di un solenoide

Le linee del campo magnetico ricordano quelle di una sbarretta magnetica. Si può dunque affermare che anche un solenoide ha un polo nord e un polo sud.

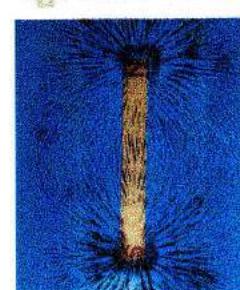
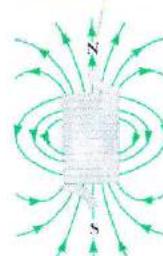


foto: Enrico Zucca

Un SOLENOIDE è un filo lungo avvolto a forme di elice, con avvolgimenti molto fitti: in questo modo, quando circola corrente nel filo, nel volume racchiuso dal solenoide si genera un campo magnetico quasi uniforme, tranne che alle estremità del solenoide; ogni avvolgimento è di fatto una spira circolare, e il campo magnetico complessivo è la somma dei campi magnetici generati dalle spire singole. Come si vede nelle figure a fianco, le linee di campo magnetico all'esterno del solenoide hanno una configurazione molto simile a quelle delle linee di campo di una sbarretta magnetizzata: dunque, anche un solenoide ha un polo nord e un polo sud. Quando le lunghezze di un solenoide è molto maggiore del raggio del solenoide, si può schematizzare il sistema come un "solenoido ideale", con campo magnetico uniforme all'interno e trascurabile all'esterno.

Per calcolare il modulo di \vec{B} all'interno del solenoide, applichiamo il teorema di Ampère all'"anello 2" mostrato nella figura qui a fianco, nell'ipotesi di solenoide ideale. Risulta $\vec{B} \neq 0$ sul lato 1 del circuito, di lunghezza l ; se il solenoide ha lunghezza infinita, \vec{B} è trascurabile lungo il lato 3; infine, lungo i lati 2 e 4 il campo magnetico \vec{B} è perpendicolare ai lati all'interno del solenoide (oltre che trascurabile all'esterno); per cui, il contributo dei lati 2, 3, 4 all'integrale di linee del teorema di Ampère è nullo. Perché, infine, \vec{B} risulta parallelo ai tratti $\Delta\vec{s}$: lungo il lato 1, otteniamo:

$$\oint_{\text{anello 2}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = Bl, \quad \text{dove } B \text{ è il modulo di } \vec{B}, \text{ uniforme,}$$

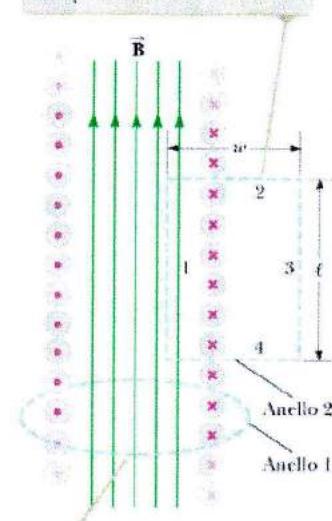
lungo il lato 1. La corrente che complementivamente è concatenata dell'anello 2 è NI , dove N è il numero di spire del solenoide in un tratto di lunghezza l . Dunque, per il teorema di Ampère otteniamo:

$$Bl = \mu_0 NI, \quad \text{cioè} \quad B = |\vec{B}| = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right) I \quad \text{all'interno del solenoide. Indicando con } n = \frac{N}{l} \quad \text{il numero di spire per unità di lunghezza del solenoide, otteniamo quindi}$$

$$B = |\vec{B}| = \mu_0 n I \quad \text{all'interno del solenoide}$$

Questo risultato vale, di fatto, in punti vicini alla regione centrale del solenoide; alle estremità del solenoide il campo magnetico ha intensità minore di questa.

Il teorema di Ampère applicato al cammino tratteggiato rettangolare può essere usato per calcolare il modulo del campo interno.



Il teorema di Ampère, applicato al cammino circolare il cui piano è perpendicolare alla pagina, può essere usato per dimostrare che c'è un debole campo fuori dal solenoide.

Magnetismo nelle materie

Lo studio fatto fino a questo punto fornisce delle forti indicazioni sulle cause delle proprietà magnetiche dei materiali; infatti qualsiasi circolazione di corrente genera un campo magnetico, e quindi anche circuiti di dimensioni atomiche generano un dipolo magnetico.

Momento magnetico degli atomi

Nel modello classico dell'atomo, gli elettroni si muovono lungo orbite circolari attorno al nucleo ($M_{\text{nucleo}} \gg m_e$); in questo modello l'elettrone che orbita è una corrente (essendo una carica in moto), e il momento magnetico elettronico è associato a questo moto orbitale. Questo modello produce risultati in accordo con quelli ottenuti con la meccanica quantistica.

Se T è il periodo orbitale dell'elettrone, la corrente I di un elettrone è $I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$ (il verso della corrente è opposto rispetto al verso di rotazione dell'elettrone).

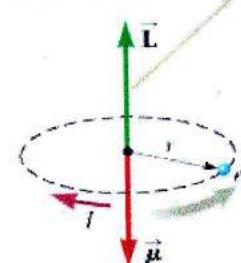
Il momento magnetico associato a questo anello di corrente è: $|\vec{\mu}| = IA = \frac{ev}{2\pi r} (\pi r^2) = \frac{1}{2} evr$

Poiché $L = |\vec{L}| = m_e vr$ è il modulo del momento angolare orbitale dell'elettrone, vale la seguente relazione:

$$|\vec{\mu}| = \left(\frac{e}{2m_e}\right) |\vec{L}|$$

Poiché la carica dell'elettrone è negativa, \vec{L} e $\vec{\mu}$ hanno versi opposti fra loro.

L'elettrone ha momento angolare \vec{L} in un verso e momento magnetico $\vec{\mu}$ nel verso opposto.



Nella maggior parte dei materiali, i momenti magnetici dovuti ai singoli elettroni tendono a compensarsi, per cui in media l'effetto magnetico dovuto al moto orbitale degli elettroni è molto piccolo o addirittura nullo.

Oltre al momento angolare orbitale, un elettrone ha anche un MOMENTO ANGOLARE INTRINSECO, detto SPIN, che fornisce un contributo al momento magnetico. È una proprietà quantistica che non investigheremo in questa sede.

Quello che accade in generale è che atomi con un numero dispari di elettroni hanno un momento magnetico di spin non nullo; in atomi con un numero pari di elettroni, l'accoppiamento tra elettroni con spin opposti a due a due produce un momento magnetico complessivo nullo.

• Ferromagnetismo

Alcuni elementi presentano un "comportamento magnetico" molto accentuato, detto FERROMAGNETISMO. Ad esempio: ferro, cobalto, nichel, gadolinio, disporio. In queste sostanze sono presenti momenti magnetici atomici permanenti che tendono ad allinearsi tra loro sotto l'azione di un campo magnetico anche debole: quando i momenti magnetici si sono allineati, le sostanze restano magnetizzate anche rimuovendo il campo magnetico esterno. Questo avviene a causa del forte accoppiamento tra i momenti magnetici vicini; e si può comprendere completamente solo tramite la finice quantistica.

Secondo il MODELLO DI Weiss, i materiali ferromagnetici sono suddivisi in regioni microscopiche (DOMINI) entro le quali i momenti magnetici atomici sono tutti allineati. I domini hanno volumi compresi tra 10^{-12} m^3 e 10^{-8} m^3 , entro i quali si trovano tra 10^{17} e 10^{21} atomi. I domini sono separati tra loro da superfici dette PARETI. Se un materiale ferromagnetico non è magnetizzato, i momenti magnetici dei diversi domini sono orientati in modo casuale, per cui il momento magnetico risultante è mediamente nullo. Applicando un campo magnetico esterno \vec{B} al materiale, le dimensioni dei domini con momenti magnetici allineati al campo esterno aumentano, e il corpo si magnetizza, tanto più quanto più intenso è il campo esterno.

Il fatto notevole è che, quando il campo esterno viene rimosso, il materiale conserva una gran parte della magnetizzazione precedentemente acquisita se il materiale è MAGNETICAMENTE DURÒ (come il cobalto e il nichel), mentre la perde se è MAGNETICAMENTE DOLCE (come il ferro).

Infine, al di sopra di una temperatura critica, detta TEMPERATURA DI CURIE, un materiale ferromagnetico duro perde la sua magnetizzazione residua a causa delle agitazioni termiche.

• Paramagnetismo

Nelle sostanze paramagnetiche gli atomi hanno momenti magnetici permanenti che interagiscono molto debolmente fra loro, in assenza di campo esterno, sono orientati a caso. Quando la sostanza paramagnetica viene posta in un campo magnetico esterno, i momenti magnetici atomici tendono ad allinearsi nella direzione del campo.

Ma, a causa dell'effetto concomitante dell'agitazione termica, l'ellittamento non è totale.

• Diamagnetismo

In una sostanza diamagnetica l'applicazione di un campo esterno produce, nella sostanza, un debole momento magnetico verso opposto a quello del campo applicato. Dunque, una sostanza diamagnetica viene respinta da un magnete. Il diamagnetismo è presente in TUTTI i materiali, ma si tratta di un effetto di piccole entità che si manifesta solo se il materiale non è ferromagnetico né paramagnetico.

Questo effetto deriva dal comportamento delle orbite elettroniche atomiche quando viene "creato" un campo magnetico esterno: il diverso effetto che l'accensione del campo magnetico produce su elettroni che orbitano in sensi opposti genera un debole momento magnetico atomico indotto.

Concludiamo osservando che diversi tipi di materiali superconduttori hanno un comportamento diamagnetico perfetto, per cui il campo magnetico all'interno del superconduttore è nullo (EFFETTO MEISSNER). Dunque, se si avvicina un magnete permanente a un superconduttore quest'ultimo viene respinto.

Appendice

Si consideri un filo sottile e rettilineo percorso da una corrente costante I che scorre lungo l'asse x . Si determini il vettore campo magnetico prodotto da questa corrente nel punto P .

Consideriamo un elemento $\Delta \vec{s}_i$ del filo a distanza r_i dal punto P in cui vogliamo determinare il campo magnetico. Il vettore $\Delta \vec{s}_i \times \hat{r}_i$ è diretto perpendicolarmente al piano del foglio, nel verso uscente. Tutti i contributi $\Delta \vec{s}_i \times \hat{r}_i$ sono paralleli e concordi nel punto P . Risulta:

$$\Delta \vec{s}_i \times \hat{r}_i = |\Delta \vec{s}_i \times \hat{r}_i| \hat{k} = [\Delta x_i \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_i)] \hat{k} = [\Delta x_i \cos \theta_i] \hat{k}$$

Dunque risulta (per la legge di Biot-Savart):

$$\Delta \vec{B}_i = |\Delta \vec{B}_i| \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta x_i \cos \theta_i}{r_i^2} \hat{k}$$

Risulta $r_i = \frac{a}{\cos \theta_i}$, e $x_i = a \tan \theta_i$, per cui

$$\Delta x_i = \frac{a}{\cos^2 \theta_i} \Delta \theta_i, \text{ per cui:}$$

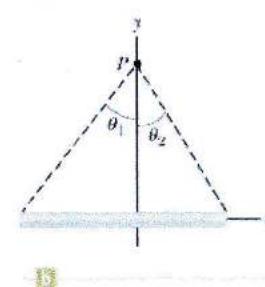
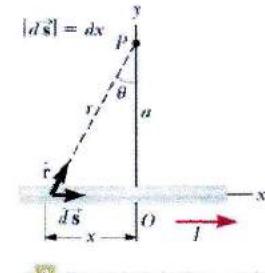
$$\Delta \vec{B}_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{\cos^2 \theta_i} \Delta \theta_i \frac{\cos \theta_i}{a^2} \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos \theta_i \Delta \theta_i \hat{k}$$

Dunque: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta \hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[\sin \theta \right]_{-\theta_1}^{\theta_2} \hat{k} =$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} [\sin \theta_2 + \sin |\theta_1|] \hat{k}$$

Filo infinito: $\theta_2 = \frac{\pi}{2}, \theta_1 = -\frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{k}$

1



2

$$\theta_1 < 0, \theta_2 > 0$$