Numero di matricola: 0327308

Esame 20/01/2025

Es 1: $f(x) = \max(0, 2x)$

(a) Calcoliamo $p(x)$ in forma di Newton, calcolando le differenze divise (chiamo $p(x)$ il pol. d'interpol. di $f(x)$ sui nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$)

$f[x_0] = f(x_0) = 0$

$f[x_1] = f(x_1) = 0$

$f[x_2] = 2$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{0-0}{0+1} = 0$$

$$f[x_0, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{2-0}{1+1} = 1$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

Dunque la forma di Newton $q(x)$ é data da

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$= 0 + 0 + 1(x - (-1))(x - 0)$$

Sviluppando i calcoli trovo la forma canonica di $p(x)$

$$p(x) = 1(x - (-1))(x - 0) = (x+1)x = x^2 + x$$

(b)

$$E = \max_{x \in [-1,1]} |f(x) - p(x)| \qquad p(x) = x^2 + x$$

Se $x \leq 0$ $\quad f(x) = 0 \qquad |f(x) - p(x)| = |0 - (x^2 + x)| = x^2 + x \quad = e_1(x)$

Se $x > 0$ $\quad f(x) = 2x \qquad |f(x) - p(x)| = |2x - (x^2 + x)| = -x^2 + x \quad = e_2(x)$

Deriviamo ora l'errore e_1 per trovare i punti critici

$e_1'(x) = 2x+1 \qquad 2x+1=0 \qquad x = -\frac{1}{2}$

Facciamo la stessa cosa con e_2

$e_2'(x) = -2x+1 \qquad -2x+1=0 \qquad x=\frac{1}{2}$

Troviamo ora l'errore massimo per $e_1(x)$ e $e_2(x)$

$e_1 = \max\left(e_1(0), e_1\left(-\frac{1}{2}\right), e_1(-1)\right) = \max\left(|0|, \left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right|, |0|\right) = \frac{1}{4}$

$e_2 = \max\left(e_2\left(\frac{1}{2}\right), e_2(1)\right) = \max\left(\left|-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right|, |0|\right) = \frac{1}{4}$

$E = \max\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

(c)

Determiniare la forma di Newton di $q(x)$, calcolare le differenze divise:

$f[x_0] = f(x_0) = 0$

$f[x_1] = f(x_1) = 2$

$f[x_2] = f(x_2) = 4$

$\vdots$

$f[x_n] = f(x_n) = 2n$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

$$f[x_0, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

$\vdots$

$$f[x_0, x_n] = \frac{f[x_n]-f[x_0]}{x_n - x_0} = \frac{2x_n - 0}{x_n - 0} = 2$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{2-1} = 0$$

$$f[x_0, x_1, x_3] = \frac{f[x_0, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{2-2}{3-1} = 0$$

$\vdots$

$$f[x_0, x_1, x_n] = \frac{f[x_0, x_n] - f[x_0, x_1]}{x_n - x_1} = \frac{2-2}{x_n - 1} = 0$$

Ogni differenza divisa che si calcolera' da qui avrà valore 0: $\frac{0-0}{x} = 0$

Dunque la forma di Newton $q(x)$ è data da

$q_0(x) = f[x_0]$ $\quad n = 0$

$q_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0)$ $\quad n \geq 1$

$q_0(x) = 0$ $\quad n = 0$

$q_n(x) = 0 + 2(x - 0)$ $\quad n \geq 1$

Sviluppiamo i calcoli a partire dalla forma di Newton per portare il polinomio in forma canonica

$q_0(x) = 0$ $\quad n = 0$

$q_n(x) = 2(x - 0) = 2x$ $\quad n \geq 1$

Es 2:

Calcoliamo $p(x)$ (dove $p(x)$ é il pol. d' interpol) dei dati (h_0^2, I_{n_0}), (h_1^2, I_{2n_0}) e (h_2^2, I_{4n_0}) h_0, h_1, h_2 sono i passi di discretizzazione delle formule dei trapezi I_{n_0}, I_{2n_0}, I_{4n_0}

$$h_0 = \frac{(b-a)}{n_0} \qquad h_1 = \frac{(b-a)}{2n_0} \qquad h_2 = \frac{(b-a)}{4n_0}$$

Utilizziamo la forma di Lagrange per calcolare $p(0)$:

$$p(0) = I_{n_0} \frac{(0-h_1^2)(0-h_2^2)}{(h_0^2-h_1^2)(h_0^2-h_2^2)} + I_{2n_0} \frac{(0-h_0^2)(0-h_2^2)}{(h_1^2-h_0^2)(h_1^2-h_2^2)} + I_{4n_0} \frac{(0-h_0^2)(0-h_1^2)}{(h_2^2-h_0^2)(h_2^2-h_1^2)} =$$

$$= I_{n_0} \frac{h_1^2 h_2^2}{(h_0^2-h_1^2)(h_0^2-h_2^2)} + I_{2n_0} \frac{h_0^2 h_2^2}{(h_1^2-h_0^2)(h_1^2-h_2^2)} + I_{4n_0} \frac{h_0^2 h_1^2}{(h_2^2-h_0^2)(h_2^2-h_1^2)}$$

Poniamo $w = \frac{(b-a)}{n_0}$ allora $h_0 = w$ $h_1 = \frac{w}{2}$ $h_2 = \frac{w}{4}$ quindi

$$p(0) = I_{n_0} \frac{\frac{w^2}{4} \cdot \frac{w^2}{16}}{\frac{3w^2}{4} \cdot \frac{15w^2}{16}} + I_{2n_0} \frac{w^2 \cdot \frac{w^2}{16}}{-\frac{3w^2}{4} \cdot \frac{3w^2}{16}} + I_{4n_0} \frac{w^2 \cdot \frac{w^2}{4}}{\frac{-15w^2}{16} \cdot -\frac{3w^2}{16}}$$

$$= I_{n_0} \frac{1}{45} + I_{2n_0}\left(-\frac{4}{3}\right) + I_{4n_0} \frac{64}{45}$$

Il polinomio $p(x)$ esiste ed é unico, abbiamo che $p(0) = R$, ma

$$R = \alpha I_{n_0} + \beta I_{2n_0} + \gamma I_{4n_0}$$

quindi $\alpha = \frac{1}{45}$, $\beta = -\frac{4}{3}$, $\gamma = \frac{64}{45}$

Es 3:

(a) La matrice A non é hermitiana, calcoliamo $Re(A)$

$$Re(A) = \frac{A + A^*}{2}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 3a & 1 & ai \\ 1 & 1 & 1 \\ -ai & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Re(A) = \begin{bmatrix} 3a & 1 & ai \\ 1 & 1 & 0 \\ -ai & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

Siccome $Re(A)$ é hermitiana in base ad alcuni valori di a calcolo i determinanti e vedo per quali valori di a sono > 0

$\det(B_1) = 3a \qquad 3a > 0 \qquad a > 0$

$\det(B_2) = 3a - 1 \qquad 3a - 1 > 0 \qquad a > \frac{1}{3}$

$\det(B_3) = 1(3a-1) + a_i(0 + ai) = 3a - 1 + (ai)^2 = 3a - 1 - a^2 > 0$

$a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{-2} = a_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{-2} \approx 0{,}381966\ldots, \quad a_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{-2} \approx 2{,}6180$

$3a - 1 - a^2 > 0$ sse $\frac{-3+\sqrt{5}}{-2} < a < \frac{-3-\sqrt{5}}{-2}$

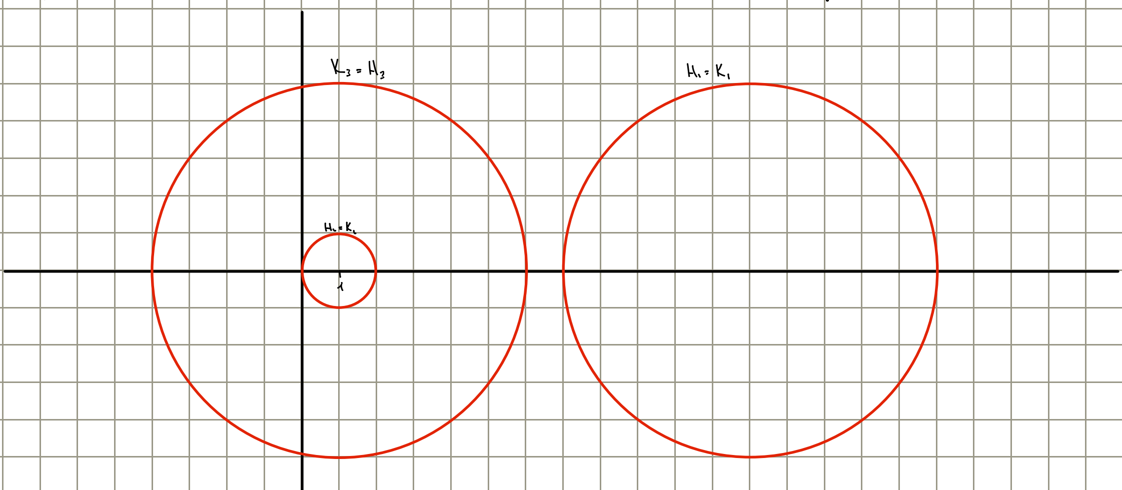
La matrice A é definita positiva $\forall a \in \mathbb{R} : \frac{-3+\sqrt{5}}{-2} < a < \frac{-3-\sqrt{5}}{-2}$

(b) Per ocalizzare gli autovalori di A usiamo i teoremi di Gershgorin considerando i cerchi per riga K_1, K_2, K_3, che i cerchi per colonna H_1, H_2, H_3.

$K_1 = \mathcal{C}(3a, a+1) \qquad K_2 = \mathcal{C}(1, 1) \qquad K_3 = \mathcal{C}(1, 1+a)$

$H_1 = \mathcal{C}(3a, a+1) \qquad H_2 = \mathcal{C}(1, 1) \qquad H_3 = \mathcal{C}(1, 1+a)$

$a > 3$



Poiché i cerchi per riga sono uguali ai cerchi per colonna andremo a considerare solo i cerchi per riga.

Per il 1° teo. di G gli autovalori si trovano in: $K_1 \cup K_2 \cup K_3$

Per il 2° teo. di G gli autovalori si trovano in:
due autovalori in $K_2 \cup K_3$ e un autovalore in K_1

Per applicare il 3° teo. di G verifichiamo che la matrice sia irriducibile:

$$1 \to 2 \to 3 \to 1$$

Abbiamo un ciclo che tocca tutti i nodi quindi A è irriducibile:
Nessun punto del bordo di $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ è autovalore di A perché nessuno di questi punti sta nel bordo di tutti i singoli cerchi K_1, K_2, K_3.

Conclusione: Abbiamo un autovalore in K_1 privato del bordo $(2\alpha-1, 4\alpha+1)$ e due autovalori in $K_2 \cup K_3$ privati dal bordo di K_3 $(-\alpha, 1+\alpha)$

(c) Sulla base delle informazioni ottenute al punto (b), sia λ_1 l'autovalore in K_1,
$\rho(A) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$, poiché $\alpha > 3$ otteniamo che $\rho(A) = |\lambda_1|$ cioè:

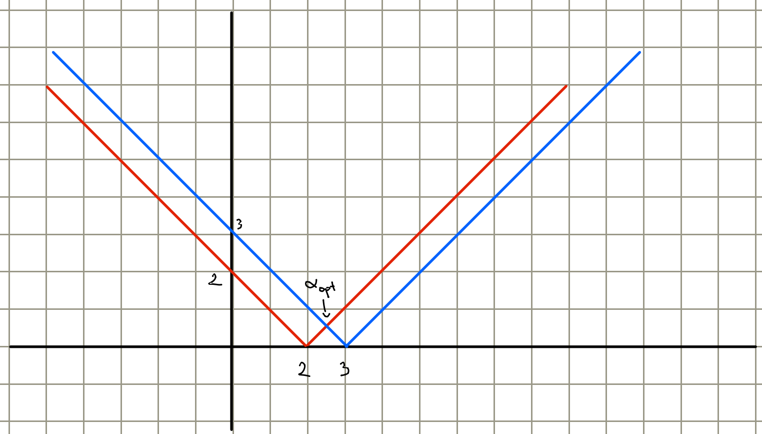
$$2\alpha - 1 < \rho(A) < 4\alpha + 1$$

Es 4:

(a) $\|A\|_\infty = \max\left(\|A_{[1]}\|_1, \|A_{[2]}\|_1, \dots, \|A_{[n]}\|_1\right) = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

$$A - B_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 2-\alpha \\ 3-\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$\|A-B\|_\infty = \max\left(|0| + |2-\alpha|, |3-\alpha| + |0|\right)$



$|2-\alpha|$ = rosso

$|3-\alpha|$ = blu

$\alpha_{opt} = \frac{5}{2}$

$$B_{\frac{5}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} \qquad A - B_{\frac{5}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

La distanza fra B e A in $\|\cdot\|_\infty = \|A-B\|_\infty = \max\left(|0| + |-\frac{1}{2}|, |\frac{1}{2}| + |0|\right) = \frac{1}{2}$

(b)

$\mu_\infty(B_\alpha) = \|B_\alpha\|_\infty \|B_\alpha^{-1}\|_\infty$

$$B_\alpha^{-1} = \frac{1}{\det(B_\alpha)} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{2-\alpha^2} \begin{bmatrix} 2 & -\alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2-\alpha^2} & \frac{-\alpha}{2-\alpha^2} \\ \frac{-\alpha}{2-\alpha^2} & \frac{1}{2-\alpha^2} \end{bmatrix}$$

$\|B_\alpha\|_\infty = \max\left(|1| + |\alpha|, |\alpha| + |2|\right) = 2 + |\alpha|$

$\|B_\alpha^{-1}\|_\infty = \max\left(\left|\frac{2}{2-\alpha^2}\right| + \left|\frac{-\alpha}{2-\alpha^2}\right|, \left|\frac{-\alpha}{2-\alpha^2}\right| + \left|\frac{1}{2-\alpha^2}\right|\right) = \frac{2+|\alpha|}{|2-\alpha^2|}$

$\mu_\infty(B_\alpha) = \|B_\alpha\|_\infty \|B_\alpha^{-1}\|_\infty = (2+|\alpha|)\frac{2+|\alpha|}{|2-\alpha^2|} = \frac{(2+|\alpha|)^2}{|2-\alpha^2|}$

(c) Calcolo $\rho(J)$, J = matrice d' iterazione di Jacobi, per l'osservazione smart:

gli autovalori di J sono le soluzioni dell' eq: $\det(\lambda D + B_\alpha - D) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda & \alpha \\ \alpha & 2\lambda \end{vmatrix} = 2\lambda^2 - \alpha^2 \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\rho(J) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|) = \max\left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{2}}, \sqrt{\frac{\alpha^2}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2}}$$

Il metodo converge per $\rho(J) < 1$ quindi

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{2}} < 1 \qquad \frac{\alpha^2}{2} < 1 \qquad \alpha^2 < 2 \qquad -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$$

Il metodo converge $\forall \alpha \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} < \alpha < \sqrt{2}$

(d)

Sappiamo dal punto (b) che $\mu_\infty(B_\alpha) = \frac{(2+|\alpha|)^2}{|2-\alpha^2|}$

Inoltre $$\frac{\|x - x^{(k)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mu_\infty(B_\alpha) \cdot \varepsilon$$

perció $$\frac{\|x - x^{(k)}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{(2+|\alpha|)^2}{|2-\alpha^2|} \cdot 10^{-10}$$

Calcolando:

$$\lim_{\alpha \to \sqrt{2}} \frac{(2+|\alpha|)^2}{|2-\alpha^2|} \cdot 10^{-10} = \infty$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{(2+|\alpha|)^2}{|2-\alpha^2|} \cdot 10^{-10} = 2 \cdot 10^{-10}$$