Problema n. 1

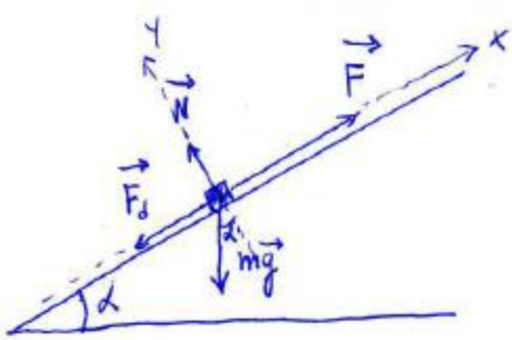
a) Gli sciatori arrivano in cima al pendio con una frequenza $n = 10\ \text{min}^{-1} = \frac{10}{60}\ s^{-1} = \frac{1}{6}\ s^{-1}$, per cui l'intervallo di tempo tra gli arrivi di due sciatori consecutivi alla sommità del pendio è $\Delta t = \frac{1}{n} = 6\ s$.

Poiché gli sciatori si muovono alla velocità costante $v = 2\ m\ s^{-1}$, la distanza tra due ganci vicini dello skilift è $\boxed{d = v \cdot \Delta t = (2\ m\ s^{-1}) \cdot (6\ s) = 12\ m}$

Il numero di sciatori contemporaneamente presenti lungo il pendio in alta stagione è quindi

$$\boxed{N = \text{int}\left(\frac{L}{d}\right) = \text{int}\left(\frac{1000\ m}{12\ m}\right) = \text{int}(83{,}33) = 83}$$

b)



Questo è il diagramma delle forze agenti su uno sciatore mentre risale il pendio attaccato allo skilift.

$\vec{N}$: reazione vincolare normale del piano inclinato
F_d: forza di attrito dinamico agente sullo sciatore
$\vec{F}$: forza esercitata dalla corda sullo sciatore.

Poiché lo sciatore si muove con velocità costante, deve risultare $m\vec{g} + \vec{F}_d + \vec{N} + \vec{F} = 0$.

Posto $g = |\vec{g}|$, $F_d = |\vec{F}_d|$, $N = |\vec{N}|$ e $F = |\vec{F}|$, se introduciamo un sistema di assi cartesiani ortogonali (x, y) come nello schema a pag. 1, deve risultare:

$$\begin{cases} N - mg\cos\alpha = 0 \\ F - F_d - mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \\ F_d = \mu_d N = \mu_d\, mg\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} N = mg\cos\alpha \\ F_d = \mu_d\, mg\cos\alpha \\ F = F_d + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = (\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_d\cos\alpha)mg \end{cases}$$

Pertanto, il modulo della forza complessiva esercitata dalla corda quando N sciatori si trovano attaccati allo skilift lungo il pendio è:

$$F_{TOT} = NF = N(\mathrm{sen}\,\alpha + \mu_d\cos\alpha)mg$$

Poiché $\mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+(\mathrm{tg}\,\alpha)^2}}$ e $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{tg}\,\alpha)^2}}$, possiamo anche scrivere:

$$\boxed{F_{TOT} = \frac{N(\mathrm{tg}\,\alpha + \mu_d)}{\sqrt{1+(\mathrm{tg}\,\alpha)^2}}mg = \frac{83\cdot(0,3+0,1)}{\sqrt{1+(0,3)^2}}(70\,\mathrm{kg})\left(9,81\,\frac{m}{s^2}\right) = 2,1837\times 10^4\,N}$$

c) Il dislivello complessivo del pendio e'

$$h = L \, sen\alpha = \frac{L \, tg\alpha}{\sqrt{1+(tg\alpha)^2}} \, ,$$

per cui il lavoro svolto dalle forze peso su uno sciatore lungo tutto il pendio e'

$$\boxed{W_p = mg(0-h) = -mgh = -\frac{mgL\,tg\alpha}{\sqrt{1+(tg\alpha)^2}} = -\frac{(70\ kg)\cdot\left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)\cdot(1000\ m)\cdot 0{,}3}{\sqrt{1+(0{,}3)^2}} = -1{,}9732\times 10^5\ J}$$

Il lavoro svolto dalle forze di attrito dinamico su uno sciatore lungo tutto il pendio e':

$$\boxed{W_d = -\mu_d mg\cos\alpha\cdot L = -\frac{\mu_d mgL}{\sqrt{1+(tg\alpha)^2}} = -\frac{0{,}1\cdot(70\,kg)\cdot\left(9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)(10^3 m)}{\sqrt{1+(0{,}3)^2}} = -0{,}6577\times 10^5\ J}$$

d) La potenza che deve poter fornire il motore dello skilift e' quindi

$$\boxed{P = F_{TOT}\cdot V = \frac{N(tg\alpha+\mu_d)mgV}{\sqrt{1+(tg\alpha)^2}} = (2{,}1837\times 10^4\ N)\cdot(2\ m/s) = 4{,}3674\times 10^4\ W = 43{,}674\ kW}$$

Problema n. 2

a) La risultante delle forze esterne agenti sul sistema e' nulla, in quanto la forza peso di ciascuno dei due blocchetti e' esattamente bilanciata dalla rispettiva reazione vincolare normale del piano orizzontale, e non ci sono altre forze esterne agenti. Dunque, la velocita' del centro di massa del sistema dei due blocchetti resta costante nel tempo.

Risulta $\vec{V}_{CM} = \dfrac{m_1 \vec{V}}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1 V}{m_1 + m_2}\,\hat{i}$, e quindi

$$\boxed{|\vec{V}_{CM}| = V_{CM} = \frac{m_1 V}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}5\ \text{kg})\cdot(3\ \text{m s}^{-1})}{0{,}5\ \text{kg} + 1\ \text{kg}} = 1\ \text{m s}^{-1}}$$

La massa ridotta del sistema dei due blocchetti e'

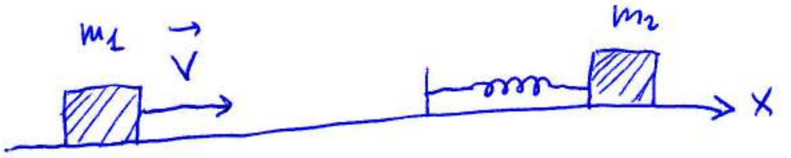
$$\boxed{\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0{,}5\ \text{kg})\cdot(1\ \text{kg})}{0{,}5\ \text{kg} + 1\ \text{kg}} = \frac{1}{3}\ \text{kg} = 0{,}333\ \text{kg}}$$

b) L'urto tra i due blocchetti e' elastico, in quanto la forza agente tra i due blocchetti durante l'urto e' conservativa, per cui l'energia totale finale (che e' puramente cinetica) e' uguale all'energia totale iniziale (puramente cinetica).

Dunque risulta $K_{TOT,f} = K_{TOT,i}$

D'altronde, anche la quantita' di moto totale del sistema e' costante nel tempo, poiché il sistema dei due blocchetti equivale a un sistema isolato (vedi le considerazioni fatte al punto a)). Dunque, scelto un asse cartesiano x come nello schema qua sotto, deve risultare:

$$P_{tot,f,x} = P_{tot,i,x} \Rightarrow m_1 V_{1x,f} + m_2 V_{2x,f} = m_1 V$$



Dunque, occorre risolvere il sistema di equazioni seguente:

$$\begin{cases} m_1 V_{1x,f} + m_2 V_{2x,f} = m_1 V \\ \frac{1}{2} m_1 V_{1x,f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2x,f}^2 = \frac{1}{2} m_1 V^2 \end{cases}$$

La soluzione accettabile di questo sistema è:

$$\boxed{\begin{cases} V_{1x,f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) V = \left(\frac{0{,}5\ kg - 1\ kg}{0{,}5\ kg + 1\ kg}\right) \cdot (3\ m\ s^{-1}) = -1\ m\ s^{-1} \\ V_{2x,f} = \left(\frac{2 m_1}{m_1 + m_2}\right) V = \left[\frac{2 \cdot (0{,}5\ kg)}{0{,}5\ kg + 1\ kg}\right] (3\ m\ s^{-1}) = 2\ m\ s^{-1} \end{cases}}$$

c) Nell'istante in cui la molla si trova nello stato di massima compressione, i due blocchetti hanno la stessa velocità istantanea, che per quanto osservato nella risposta alla domanda a) è uguale alla velocità del centro di massa del sistema. Per la conservazione dell'energia meccanica totale, possiamo quindi scrivere l'equazione seguente:

$$E_{m,f} = E_{m,i} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}(m_1+m_2)V_{CM}^2 + \cancel{\frac{1}{2}}K D_{max}^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_1 v^2, \text{ cioè:}$$

$$D_{max}^2 = \frac{1}{K}\left[m_1 v^2 - (m_1+m_2)V_{CM}^2\right] = \frac{1}{K}\left[m_1 v^2 - \cancel{(m_1+m_2)}\frac{m_1^2 v^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\right] =$$

$$= \frac{m_1 v^2}{K}\left[1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right] = \frac{m_1 v^2}{K}\left(\frac{\cancel{m_1}+m_2-\cancel{m_1}}{m_1+m_2}\right) = \frac{m_1 v^2}{K}\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

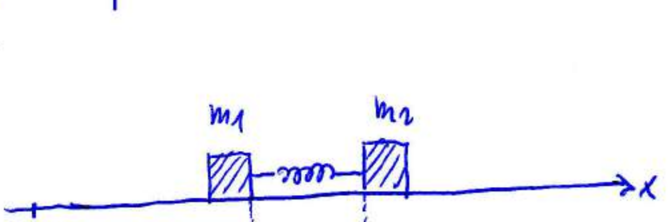
Dunque:

$$D_{max}^2 = \frac{1}{K}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}v^2 = \frac{\mu}{K}v^2, \quad \text{e infine}$$

$$\boxed{D_{max} = v\sqrt{\frac{\mu}{K}} = (3\,m\,s^{-1})\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\,kg}{20\,N\,m^{-1}}} = 0,3873\ m = 38,73\ cm}$$

Per calcolare l'intervallo di tempo in cui il blocchetto di massa m_1 resta in contatto con la molla, si può procedere così: scriviamo anzitutto le equazioni del moto dei due blocchetti mentre la molla è in compressione, indicando con l la lunghezza di riposo della molla:

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = K\left[(x_2-x_1)-l\right] \\ m_2 a_{2x} = -K\left[(x_2-x_1)-l\right] \end{cases}$$



Dividiamo i due membri della prima equazione per m_1, e i due membri della seconda equazione per m_2:

$$\begin{cases} a_{1x} = \dfrac{k}{m_1}\left[(x_2-x_1)-\ell\right] \\ \\ a_{2x} = -\dfrac{k}{m_2}\left[(x_2-x_1)-\ell\right] \end{cases}$$

Sottraiamo la prima equazione dalla seconda membro a membro:

$$a_{2x} - a_{1x} = -k\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left[(x_2-x_1)-\ell\right] = -\frac{k}{\mu}\left[(x_2-x_1)-\ell\right]$$

Posto $x_2(t)-x_1(t) = z(t)$, risulta $a_{2x}(t)-a_{1x}(t) =$

$= [x_2(t)]'' - [x_1(t)]'' = [x_2(t) - x_1(t)]'' = [z(t)]''$, per cui

l'equazione diventa:

$$[z(t)]'' = -\frac{k}{\mu} z(t) + \frac{k\ell}{\mu} \quad , \quad \text{e quindi}$$

$$[z(t)]'' + \frac{k}{\mu} z(t) = \frac{k\ell}{\mu}$$

$z(t) = x_2(t) - x_1(t)$ e' la distanza tra i due blocchetti durante la compressione della molla, e la soluzione dell'equazione differenziale ottenuta e'

$$z(t) = \ell + A\cos(\omega t + \varphi_0) \, , \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \, , \text{ e } A \text{ e } \varphi_0$$

sono due costanti da determinare sulla base delle condizioni iniziali del moto.

Il parametro rilevante e' la pulsazione ω: la legge secondo la quale $z(t)$ varia nel tempo e' quella di un moto oscillatorio, con periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{K}}$.

L'intervallo di tempo durante il quale il blocchetto di massa m_1 resta in contatto con la molla coincide con l'intervallo di tempo, in un periodo di oscillazione, durante il quale la molla e' compressa, cioe' e' uguale a meta' del periodo di oscillazione:

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{2} T = \pi \sqrt{\frac{\mu}{K}} = \pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\,kg}{20\,N\,m^{-1}}} = 0,4056\ s}$$

d) Risulta

$$\Delta K_{TOT} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_{CM}^2 - \frac{1}{2}m_1 v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{(m_1+m_2)}\frac{m_1^2 v^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}} - \frac{1}{2}m_1 v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m_1 v^2\left[\frac{m_1}{m_1+m_2} - 1\right] = \frac{1}{2}m_1 v^2\left[\frac{\cancel{m_1}-\cancel{m_1}-m_2}{m_1+m_2}\right] = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2 v^2}{m_1+m_2}$$

Dunque risulta:

$$\boxed{\Delta K_{TOT} = -\frac{1}{2}\mu v^2 = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\,kg\right)\cdot\left(3\,m\,s^{-1}\right)^2 = -1,5\ J}$$

In questo stato, l'energia potenziale elastica dovuta alla compressione della molla e': $U_{el} = \frac{1}{2}K D_{max}^2 = \frac{1}{2}\cancel{K}\frac{\mu}{\cancel{K}}v^2 = \frac{1}{2}\mu v^2$

Dunque, risulta $V_{el} = -\Delta K_{TOT}$

Pertanto, nella condizione di massima compressione della molla l'energia cinetica "persa" si e' convertita in energia potenziale elastica, come del resto era logico dedurre dato che l'unica forza che compie lavoro durante la compressione della molla e' la forza elastica, che e' conservativa.

Problema n. 3

a) La resistenza R si calcola dai dati del problema usando la 2ª legge di Ohm:

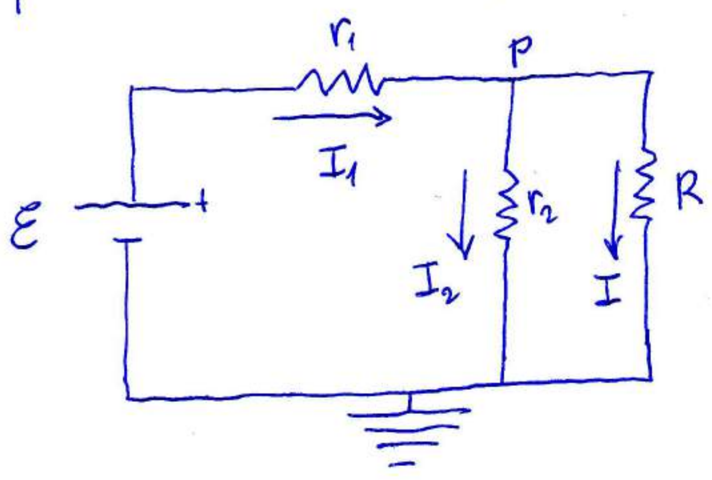
$$\boxed{R = \rho \frac{L}{A} = (5 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot m) \cdot \frac{100\ m}{(2{,}5 \times 10^{-7}\ m^2)} = 200\ \Omega}$$

La resistenza equivalente della rete resistiva considerata si ottiene considerando il collegamento in serie di r_1 con il parallelo di r_2 e R:

$$R_{eq} = r_1 + \frac{1}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{R}} = r_1 + \frac{r_2 R}{r_2 + R} =$$

$$= 1000\ \Omega + \frac{(10\ \Omega)\cdot(200\ \Omega)}{10\ \Omega + 200\ \Omega} = 1009{,}5238\ \Omega$$

b) Per rispondere alla seconda domanda del problema si può utilizzare la prima legge di Kirchhoff:



$$I_1 = I_2 + I$$

Indicando con V_P il potenziale del nodo P del circuito, valgono le seguenti tre equazioni:

$$V_P = \mathcal{E} - r_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\mathcal{E} - V_P}{r_1}$$

$$V_P - r_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{V_P}{r_2}$$

$$V_P - R I = 0 \Rightarrow I = \frac{V_P}{R}$$

Dunque, vale l'equazione

$$\frac{\mathcal{E} - V_P}{r_1} = \frac{V_P}{r_2} + \frac{V_P}{R}$$

Raccogliamo allo stesso membro i termini contenenti V_P:

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R}\right) V_P = \frac{\mathcal{E}}{r_1},$$ da cui otteniamo

$$V_P = \frac{\mathcal{E}}{r_1}\left(\frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R}}\right) = \frac{\mathcal{E}}{1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{R}}$$

Dunque, la differenza di potenziale ai capi di r_1 e'

$$\Delta V_{r_1} = \mathcal{E} - V_p = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}}\right)\mathcal{E} = \left(\frac{\cancel{1}+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}-\cancel{1}}{1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}}\right)\mathcal{E}$$, e quindi

$$\boxed{\Delta V_{r_1} = \left(\frac{\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}}{1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}}\right)\mathcal{E} = \left(\frac{\frac{\cancel{1000\,\Omega}^{100}}{\cancel{10\,\Omega}}+\frac{\cancel{1000\,\Omega}^{5}}{\cancel{200\,\Omega}}}{1+\frac{\cancel{1000\,\Omega}^{100}}{\cancel{10\,\Omega}}+\frac{\cancel{1000\,\Omega}^{5}}{\cancel{200\,\Omega}}}\right)(110\ V) = 108{,}9623\ V}$$

La differenza di potenziale ai capi di r_2 e di R e' ovviamente la stessa dato che r_2 e R sono in parallelo:

$$\boxed{\Delta V_{r_2} = \Delta V_R = V_p = \frac{\mathcal{E}}{1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}} = \frac{110\ V}{1+\frac{\cancel{1000\,\Omega}^{100}}{\cancel{10\,\Omega}}+\frac{\cancel{1000\,\Omega}^{5}}{\cancel{200\,\Omega}}} = 1{,}0377\ V}$$

Per la prima legge di Ohm, la corrente che scorre attraverso r_1 e' quindi

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Delta V_{r_1}}{r_1} = \left(\frac{\frac{1}{r_2}+\frac{1}{R}}{1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}}\right)\mathcal{E} = \\ &= \left(\frac{\frac{1}{10\,\Omega}+\frac{1}{200\,\Omega}}{1+\frac{\cancel{1000\,\Omega}^{100}}{\cancel{10\,\Omega}}+\frac{\cancel{1000\,\Omega}^{5}}{\cancel{200\,\Omega}}}\right)(110\ V) = 0{,}1090\ A \end{aligned}}$$

La corrente che scorre attraverso r_2 è:

$$\boxed{I_2 = \frac{\Delta V_{r_2}}{r_2} = \frac{\mathcal{E}}{r_2\left(1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}\right)} = \frac{\mathcal{E}}{r_1+r_2+\frac{r_1 r_2}{R}} = \frac{110\ V}{1000\,\Omega + 10\,\Omega + \frac{(1000\,\Omega)\cdot(10\,\Omega)}{200\,\Omega}} = 0{,}1038\ A}$$

La corrente che scorre attraverso R è:

$$\boxed{I = \frac{\Delta V_R}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R\left(1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}\right)} = \frac{\mathcal{E}}{r_1+R+\frac{r_1 R}{r_2}} = \frac{110\ V}{1000\,\Omega + 200\,\Omega + \frac{(1000\,\Omega)\cdot(200\,\Omega)}{10\,\Omega}} \simeq 0{,}5189\times10^{-2}\,A = 5{,}189\ mA}$$

c) La potenza assorbita dal resistore r_1 è

$$\boxed{P_1 = r_1 I_1^2 = r_1\left(\frac{\frac{1}{r_2}+\frac{1}{R}}{1+\frac{r_1}{r_2}+\frac{r_1}{R}}\right)^2\mathcal{E}^2 = (1000\,\Omega)(0{,}1090\,A)^2 = 11{,}881\ W}$$

La potenza assorbita dal resistore r_2 è:

$$\boxed{P_2 = r_2 I_2^2 = \frac{r_2\ \mathcal{E}^2}{\left(r_1+r_2+\frac{r_1 r_2}{R}\right)^2} = (10\,\Omega)(0{,}1038\,A)^2 = 0{,}1077\ W}$$

La potenza assorbita dal resistore R è:

$$\boxed{P_R = R I^2 = \frac{R\ \mathcal{E}^2}{\left(r_1+R+\frac{r_1 R}{r_2}\right)^2} = (200\,\Omega)(0{,}5189\times10^{-2}A)^2 = 0{,}5385\times10^{-2}\,W = 5{,}385\ mW}$$

La potenza fornita dalla sorgente di f.e.m. è

$$P_{el} = I_1 \mathcal{E} = (0,1090\ A) \cdot (110\ V) = 11,99\ W$$

Risulta poi:

$$P_1 + P_2 + P_R = 11,881\ W + 0,1077\ W + 0,5385 \times 10^{-2}\ W = \simeq 11,99\ W$$ arrotondato alla seconda cifra

decimale. Dunque, la potenza elettrica fornita dalla sorgente di f.e.m. viene interamente assorbita dai resistori del circuito.

d) A regime, nel ramo con il condensatore non passa corrente, per cui la differenza di potenziale tra le armature del condensatore a regime è:

$\Delta V_c = \Delta V_{r_1}$, e quindi, se il condensatore è inizialmente scarico, la carica accumulata nel condensatore quando le correnti che scorrono nel circuito sono a regime è:

$$\boxed{Q = C\,\Delta V_c = C\,\Delta V_{r_1} = C\mathcal{E}\left(\frac{\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{R}}{1 + \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{R}}\right) = (10^{-6}\ F)(108,9623\ V) = 1,090 \times 10^{-4}\ C = 109\ \mu C}$$