PROVA SCRITTA DI ESAME DEL CORSO DI FISICA PER INFORMATICA

A.A. 2022-2023 PRIMO APPELLO INVERNALE 30/01/2024

Problema n. 1

a)

Nelle condizioni del problema, la cassa si trova in equilibrio sotto l'azione della forza peso $m\vec{g}$, della reazione normale $\vec{N}$ del piano inclinato e della forza di attrito statico $\vec{F_s}$.

Fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali come in figura, la condizione di equilibrio $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_s} = 0$ corrisponde alle due equazioni scalari

$$\begin{cases} (m\vec{g})_x + N_x + F_{s,x} = 0 \\ (m\vec{g})_y + N_y + F_{s,y} = 0 \end{cases}$$

Risulta $(m\vec{g})_x = mg\sin\vartheta$, $N_x = 0$, $F_{s,x} = -|\vec{F_s}|$

$(m\vec{g})_y = -mg\cos\vartheta$, $N_y = |\vec{N}|$, $F_{s,y} = 0$

Allora:

$$\begin{cases} mg\sin\vartheta - |\vec{F_s}| = 0 \\ -mg\cos\vartheta + |\vec{N}| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{F_s}| = mg\sin\vartheta \\ |\vec{N}| = mg\cos\vartheta \end{cases}$$

Per la forza di attrito statico risulta

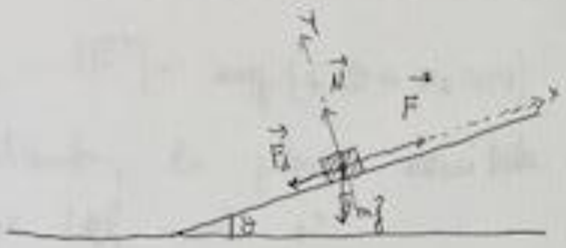
$|\vec{F_s}| \le \mu_s |\vec{N}|$, cioè $\cancel{mg}\sin\vartheta \le \mu_s \cancel{mg}\cos\vartheta$, e cioè

$\mu_s \ge \tan\vartheta$

Dunque, il valore minimo che deve avere il coefficiente di attrito statico tra la cassa e il piano inclinato è:

$$\boxed{\mu_{s,min} = \tan\vartheta = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,57735}$$

b)



Qui a sinistra è tracciato il diagramma vettoriale delle forze agenti adesso sulla cassa.

L'equazione del moto della cassa (2ª legge della dinamica) è:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_d + \vec{F}$$

Usiamo il sistema di coordinate cartesiane ortogonali rappresentato nella figura, tenuto conto che $a_y = 0$:

$$\begin{cases} (m\vec{g})_y + N_y + F_{d,y} + F_y = 0 \\ (m\vec{g})_x + N_x + F_{d,x} + F_x = m a_x \end{cases}, \quad \text{con } a_x = |\vec{a}| = a = 1\,m\,s^{-2}$$

$(m\vec{g})_y = -mg\cos\vartheta$; $N_y = |\vec{N}|$; $F_{d,y} = 0$; $F_y = 0$

$(m\vec{g})_x = -mg\sin\vartheta$; $N_x = 0$; $F_{d,x} = -\mu_d|\vec{N}|$; $F_x = |\vec{F}|$

$$\begin{cases} -mg\cos\vartheta + |\vec{N}| = 0 \\ -mg\sin\vartheta - \mu_d|\vec{N}| + |\vec{F}| = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{N}| = mg\cos\vartheta \\ |\vec{F}| = ma + mg(\sin\vartheta + \mu_d\cos\vartheta) \end{cases}$$

Dunque: $\boxed{|\vec{F}| = m\left[a + g(\sin\vartheta + \mu_d\cos\vartheta)\right] = }$

$$\boxed{= (15\,kg)\cdot\left[1\,m\,s^{-2} + (9,81\,m\,s^{-2})\cdot\left(\sin 30° + \frac{9}{10}\mu_{s,min}\cdot\cos 30°\right)\right] \simeq 154,7925\ N}$$

c) Per far muovere la cassa in salita con velocità costante è sufficiente ripetere il calcolo svolto al punto precedente, ponendo $a = 0$. Dunque, la forza da applicare nel verso ascendente lungo il piano inclinato è adesso (in modulo):

$$|\vec{F}^*| = mg\,(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)$$

Pertanto, la potenza esercitata dalla forza applicata in questa fase del moto è

$$\boxed{\begin{aligned} P &= |\vec{F}^*| \cdot v = mgv\,(\sin\theta + \mu_s \cos\theta) = \\ &= (15\,\text{kg}) \cdot (9{,}81\,\text{m s}^{-2}) \cdot (2\,\text{m s}^{-1}) \left(\sin 30° + \frac{9}{10}\mu_{s,min} \cos 30°\right) = 279{,}585\ \text{W} \end{aligned}}$$

Problema n. 2

a)

Consideriamo il sistema di coordinate schematizzato qui a fianco, con i vettori delle forze agenti sulla palla e il vettore rappresentante la velocità del centro di massa della palla.

Il verso positivo dell'asse x, coincidente con il verso di $\vec{V}_{cm}$, è stato scelto verso sinistra in modo da poter considerare l'accelerazione angolare della palla positiva quando la velocità angolare aumenta in senso antiorario, secondo la convenzione usuale. Lungo l'asse orizzontale agisce solo la forza di attrito dinamico tra la palla e il piano orizzontale. Risulta

$$F_{d,x} = -\mu_d |\vec{N}| = -\mu_d M g .$$

Pertanto, applicando la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi alla palla, otteniamo:

$$M a_x = -\mu_d M g , \quad \text{da cui} \quad a_x = -\mu_d g$$

Dunque, a partire dall'istante in cui la palla incontra il terreno scabro, la velocità istantanea del centro di massa della palla varia secondo la legge seguente:

$$\boxed{V_{cm,x}(t) = V_0 + a_x t = V_0 - \mu_d g t}$$

b) Scegliendo come polo per il calcolo dei momenti il centro di massa della palla, osserviamo che l'unica forza che ha momento non nullo è la forza di attrito dinamico. Dunque, la seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi applicata alla palla dà:

$$I_z \alpha = R\,|F_{d,x}| \quad \text{, tenuto conto del segno del momento di } \vec{F}_d$$

Poiché $I_z = \frac{2}{5}MR^2$ e $|F_{d,x}| = \mu_d M g$, otteniamo:

$$\frac{2}{5}\cancel{M}R^{\cancel{2}}\alpha = \mu_d \cancel{M} g \cancel{R} \quad \text{, cioè} \quad \alpha = \frac{5\mu_d g}{2R}$$

Pertanto, a partire dall'istante $t=0$ (palla non rotante), la velocità angolare istantanea di rotazione della palla attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro di massa e perpendicolare alla direzione di $\vec{V}_{CM}$ varia nel tempo secondo la legge seguente:

$$\boxed{\omega(t) = \omega(0) + \alpha t = \frac{5\mu_d g t}{2R}}$$

La palla inizierà a rotolare senza strisciare sul terreno scabro orizzontale a partire dall'istante t^* in cui diventa verificata la relazione di rotolamento puro:

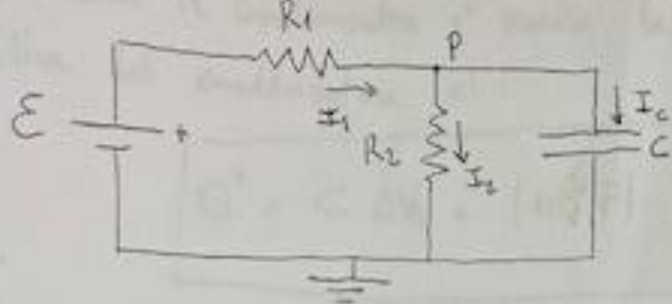
$$R\,\omega(t^*) = V_{CM}(t^*) \quad \text{, cioè} \quad \cancel{R}\cdot\frac{5\mu_d g t^*}{2\cancel{R}} = V_0 - \mu_d g t^*$$

$\left(1+\frac{5}{2}\right)\mu_s g t^* = V_0 \Rightarrow \frac{7}{2}\mu_s g t^* = V_0$, e infine

$$t^* = \frac{2V_0}{7\mu_s g} = \frac{2\cdot(2\,ms^{-1})}{7\cdot 0{,}1\cdot(9{,}81\,ms^{-2})} \simeq 0{,}582\,s$$

c) A partire dall'istante t^* la palla continua a rotolare senza strisciare, con $V_{CM}(t) = V_{CM}(t^*)$ e $\omega(t) = \omega(t^*)$ per $t \geq t^*$. Infatti, in assenza di forze orizzontali che spingono la palla, la forza di attrito statico non agisce, per cui (trascurando l'attrito dell'aria) il centro di massa della palla continua a muoversi (per $t \geq t^*$) di moto rettilineo uniforme sul piano orizzontale e la palla continua a ruotare con velocità angolare costante attorno a un asse orizzontale passante per il suo centro di massa e perpendicolare alla direzione di $\vec{V}_{CM}$.

Problema n. 3



$\mathcal{E} = 12\,V$

$R_1 = 10\,\Omega \quad R_2 = 100\,\Omega$

$C = 1\,\mu F = 10^{-6}\,F$

a) A regime, il ramo con il condensatore si comporta come un ramo aperto in cui non passa corrente. Pertanto, a regime, la corrente passa nella sola maglia contenente il generatore di tensione e le due resistenze R_1, R_2 in serie; applicando la seconda legge di Kirchhoff a tale maglia, otteniamo:

$\mathcal{E} - (R_1+R_2)I^* = 0$, da cui ricaviamo:

$$\boxed{I^* = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2} = \frac{12V}{(10+100)\Omega} = \frac{12V}{110\Omega} \simeq 0{,}109\ A = 109\ mA}$$

A regime, quindi, la differenza di potenziale ai capi della resistenza R_2 è:

$$\boxed{\Delta V_2 = R_2 I^* = \frac{R_2\mathcal{E}}{R_1+R_2} = \frac{(100\,\Omega)\cdot(12V)}{110\,\Omega} \simeq 10{,}909\ V}$$

b) Dopo che è stata raggiunta la condizione di regime, dato che inizialmente il condensatore è scarico la carica accumulata nell'armatura positiva del condensatore è:

$$\boxed{Q^* = C\,\Delta V_2 = (10^{-6}\,F)\cdot\frac{(100\,\Omega)\cdot(12\,V)}{110\,\Omega} \simeq 1{,}09\cdot 10^{-5}\,C = 10{,}909\,\mu C}$$

c) Usando la prima legge di Ohm nei rami con le resistenze, otteniamo (vedi figura per i segni delle correnti), introducendo il potenziale incognito V_P nel nodo P del circuito:

$$\mathcal{E} - V_P = R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{\mathcal{E} - V_P(t)}{R_1}$$

$$V_P = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{V_P(t)}{R_2}$$

Nel ramo con il condensatore la corrente istantanea è uguale alla derivata rispetto al tempo della carica accumulata nell'armatura positiva del condensatore:

$$I_c = Q_c'(t) = C\,V_c'(t) = C\,V_P'(t)$$

Imponiamo la prima legge di Kirchhoff nel nodo P:

$$I_1 = I_2 + I_c,$$ da cui

$$\frac{\mathcal{E} - V_P(t)}{R_1} = \frac{V_P(t)}{R_2} + C\,V_P'(t),$$ da cui otteniamo:

$$C V_p'(t) + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_p(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1},$$ e in fine

$$\boxed{V_p'(t) + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_p(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1 C}}$$

d) (facoltativo). A regime, cioè quando $V_p'(t) = 0$, il potenziale nel nodo P tende quindi al valore

$$V_p(t \to +\infty) = \frac{\mathcal{E}/R_1\cancel{C}}{\frac{1}{\cancel{C}}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} = \frac{\mathcal{E}}{\cancel{R_1}} \frac{\cancel{R_1} R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_1 + R_2},$$

che conferma il valore ottenuto per ΔV_2 in precedenza.

Il tempo di carica del condensatore è uguale all'inverso del coefficiente di $V_p(t)$ nell'equazione ottenuta, cioè

$$\boxed{\tau = \frac{C}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{C R_1 R_2}{R_1 + R_2} = C \cdot (R_1 /\!/ R_2) = 0{,}909 \cdot 10^{-5}\,s = 9{,}09\ \mu s}$$