## 1 Esercizi

**Esercizio 1.1.** Esercizio d'implementazione dell'algoritmo di valutazione del polinomio d'interpolazione in più punti (Esercizio 1.11 sulle dispense).

**Esercizio 1.2.** Esercizio d'implementazione della formula dei trapezi (Esercizio 2.2 sulle dispense).

**Esercizio 1.3.** Esercizio d'implementazione del metodo di estrapolazione (Esercizio 2.4 sulle dispense).

**Esercizio 1.4.** Esercizio d'implementazione del metodo di Jacobi (Esercizio 4.2 sulle dispense).

## 2 Problemi

**Problema 2.1.** Si consideri la funzione $\sqrt{x}$.

(a) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione di $\sqrt{x}$ sui nodi

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{64}, \quad x_2 = \frac{4}{64}, \quad x_3 = \frac{9}{64}, \quad x_4 = \frac{16}{64}, \quad x_5 = \frac{25}{64}, \quad x_6 = \frac{36}{64}, \quad x_7 = \frac{49}{64}, \quad x_8 = 1.$$

Calcolare il vettore (colonna)

$$\begin{bmatrix} p(\zeta_1) - \sqrt{\zeta_1} & p(\zeta_2) - \sqrt{\zeta_2} & \cdots & p(\zeta_{21}) - \sqrt{\zeta_{21}} \end{bmatrix}^T$$

dove $\zeta_i = \frac{i-1}{20}$ per $i = 1, \ldots, 21$, e osservare in che modo varia la differenza $p(\zeta_i) - \sqrt{\zeta_i}$ al variare di $i$ da 1 a 21.

(b) Tracciare il grafico di $\sqrt{x}$ e di $p(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$, ponendo i due grafici su un'unica figura e inserendo una legenda che ci dica qual è la funzione $\sqrt{x}$ e qual è il polinomio $p(x)$.

**Problema 2.2.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x.$$

Per ogni intero $n \geq 1$ indichiamo con $I_n$ la formula dei trapezi di ordine $n$ per approssimare

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1.7182818284590...$$

(a) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un $n = n(\varepsilon)$ tale che $|I - I_n| \leq \varepsilon$.

(b) Costruire una tabella che riporti vicino ad ogni $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$:
- il numero $n(\varepsilon)$;
- il valore $I_n$ per $n = n(\varepsilon)$;
- il valore esatto $I$ (in modo da confrontarlo con $I_n$);
- l'errore $|I - I_n|$ (che deve essere $\leq \varepsilon$).

(c) Calcolare le approssimazioni di $I$ ottenute con le formule dei trapezi $I_2$, $I_4$, $I_8$, $I_{16}$ e confrontarle con il valore esatto $I$.

(d) Sia $p(x)$ il polinomio d'interpolazione dei valori $I_2$, $I_4$, $I_8$, $I_{16}$ sui nodi $h_2^2$, $h_4^2$, $h_8^2$, $h_{16}^2$, dove $h_2 = \frac{1}{2}$, $h_4 = \frac{1}{4}$, $h_8 = \frac{1}{8}$, $h_{16} = \frac{1}{16}$ sono i passi di discretizzazione relativi alle formule dei trapezi $I_2$, $I_4$, $I_8$, $I_{16}$ rispettivamente. Calcolare $p(0)$ e confrontare $I_2$, $I_4$, $I_8$, $I_{16}$, $p(0)$ con il valore esatto $I$. Che cosa si nota?

**Problema 2.3.** Consideriamo la funzione $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ e indichiamo con $I_n$ la formula dei trapezi di ordine $n$ per approssimare $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

(a) Calcolare $I$ prima manualmente e poi con la funzione simbolica `int` di Matlab.

(b) Calcolare $I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}$.
(c) Calcolare $p(0)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione dei dati $(h_0^2, I_5)$, $(h_1^2, I_{10})$, $(h_2^2, I_{20})$, $(h_3^2, I_{40})$ e $h_0, h_1, h_2, h_3$ sono i passi di discretizzazione delle formule dei trapezi $I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}$.
(d) Riportare in una tabella:
- i valori $I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}, p(0)$;
- gli errori $|I_5 - I|, |I_{10} - I|, |I_{20} - I|, |I_{40} - I|, |p(0) - I|$.

(e) Posto $\varepsilon = |p(0) - I|$, determinare un $n$ in modo tale che la formula dei trapezi $I_n$ fornisca un'approssimazione di $I$ con errore $|I_n - I| \le \varepsilon$. Calcolare successivamente $I_n$ e verificare che effettivamente $|I_n - I| \le \varepsilon$.

**Problema 2.4.** Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcoli la soluzione $\mathbf{x}$ del sistema dato con Matlab.
(b) La matrice $A$ è a diagonale dominante in senso stretto per cui il metodo di Jacobi è convergente ossia partendo da un qualsiasi vettore d'innesco $\mathbf{x}^{(0)}$ la successione prodotta dal metodo di Jacobi converge (componente per componente) alla soluzione $\mathbf{x}$ del sistema dato. Calcolare le prime 10 iterazioni $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(10)}$ del metodo di Jacobi partendo dal vettore nullo $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ e confrontarle con la soluzione esatta $\mathbf{x}$ ponendo iterazioni e soluzione esatta in un'unica matrice $S$ di dimensioni $3 \times 12$ le cui colonne sono nell'ordine $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(10)}, \mathbf{x}$.
(c) Consideriamo il metodo di Jacobi per risolvere il sistema dato. Conveniamo d'innescare il metodo di Jacobi con il vettore nullo $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$. Costruire una tabella che riporti vicino ad ogni $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$:
- il numero d'iterazioni $K_\varepsilon$ necessarie al metodo di Jacobi per convergere entro la precisione $\varepsilon$;
- la soluzione approssimata $\mathbf{x}_\varepsilon$ calcolata dal metodo di Jacobi;
- la soluzione esatta $\mathbf{x}$ (in modo da confrontarla con la soluzione approssimata $\mathbf{x}_\varepsilon$);
- la norma $\infty$ dell'errore $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon\|_\infty$.