

Esercizi svolti di programmazione lineare

a cura di A. Agnetis

1

Un lanificio produce filato di tipo standard e di tipo speciale utilizzando 3 diverse macchine, le cui produzioni *orarie* sono le seguenti:

macchina A: 3 matasse standard e 1 speciale

macchina B: 2 matasse standard e 2 speciali

macchina C: 2 matasse standard e 1 speciale

Il mercato richiede almeno 60 matasse standard e 40 di tipo speciale al giorno. I costi orari delle due macchine sono: 90 euro per la A, 80 euro per B, 60 euro per C.

Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera di costo minimo. (Non occorre imporre il vincolo che le ore giornaliere non superino 24)

Soluzione.

Durante un'ora di funzionamento, ciascuna macchina, se attiva, ha una produzione fissa di matasse, indicata prima. Dunque, il problema non riguarda decidere *cosa* produrre, bensì *per quanto tempo* tenere in funzione le tre macchine. Dunque, le variabili di decisione sono x_A, x_B, x_C , pari alle ore di funzionamento delle tre macchine. Considerando che ogni ora di macchina A costa 90 euro, e produce 3 matasse standard e una speciale, avremo dunque che il contributo alla funzione obiettivo sarà $90x_A$, mentre il contributo al soddisfacimento della domanda dei due tipi di matasse sarà rispettivamente $3x_A$ e x_A . Ripetendo il discorso anche per le altre due macchine, otteniamo la formulazione

$$\begin{aligned} \min & 90x_A + 80x_B + 60x_C \\ & 3x_A + 2x_B + 2x_C \geq 60 \\ & x_A + 2x_B + x_C \geq 40 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

2

La Svivon produce batterie elettriche di tre tipi (Alef, Beth e Ghimel). Per due di esse (Beth e Ghimel) utilizza del rame. Per coprire la produzione del prossimo mese, può acquistare il rame al prezzo di 5 euro/kg. Il fornitore però non può fornire più di 4000 kg di rame. Nella seguente tabella sono indicate: la quantità di rame richiesta per produrre una scatola di ciascuna batteria, i costi di manodopera (per scatola prodotta) e prezzi di vendita al pubblico (per scatola):

	Rame (kg per scatola)	costi di manodopera	prezzo di vendita
ALEF	-	12	25
BETH	1	6	20
GHIMEL	2	4	30

I tre tipi di batteria devono essere prodotti in quantità tali che il numero di scatole di batterie Alef sia almeno doppio del numero di scatole di Beth e non superiore al numero di scatole di Ghimel.

1) Formulare come PL il problema di pianificare la produzione della Svivon in modo ottimo.

2) Dimostrare che la soluzione consistente nel produrre 2000 unità di Alef e altrettante di Ghimel (e nessuna scatola di Beth) è ottima (possibilmente utilizzando le condizioni di ortogonalità).

Soluzione.

1. Le variabili di decisione sono la quantità di scatole dei tre tipi di batterie, che indicheremo con x_A, x_B, x_G . La funzione obiettivo da massimizzare è il profitto totale, meno i costi totali. Il profitto è dato evidentemente da

$$25x_A + 20x_B + 30x_G$$

a questo vanno sottratti i contributi del costo del rame e della manodopera, pari rispettivamente a

$$5(x_B + 2x_G)$$

e

$$12x_A + 6x_B + 4x_G$$

e dunque, riordinando i termini, la funzione obiettivo risulta

$$13x_A + 9x_B + 16x_G$$

I vincoli sono tre. Il primo esprime il vincolo sulla disponibilità di rame:

$$x_B + 2x_G \leq 4000$$

il secondo e il terzo riguardano invece i vincoli sulla produzione di batterie Alef:

$$x_A \geq 2x_B$$

$$x_A \leq x_G$$

l'aggiunta dei vincoli di non negatività completa la formulazione. 2. Per rispondere alla seconda domanda, possiamo seguire due vie: usare le condizioni di KKT, ovvero la complementarità, oppure utilizzare il criterio di ottimalità del metodo del simplesso. Vediamo come si risolveva in ambedue i modi. Iniziamo con la complementarità. Riscriviamo il problema come:

$$\begin{aligned} \max \quad & 13x_A + 9x_B + 16x_G \\ & x_B + 2x_G \leq 4000 \\ & -x_A + 2x_B \leq 0 \\ & x_A - x_G \leq 0 \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

il problema duale è:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4000u_1 \\ & -u_2 + u_3 \geq 13 \\ & u_1 + 2u_2 \geq 9 \\ & 2u_1 - u_3 \geq 16 \\ & u_i \geq 0 \end{aligned}$$

Si tratta di dimostrare che la soluzione $(2000, 0, 2000)$ è ottima per il problema primale. Dalla complementarità, il fatto che $x_A > 0$ e $x_G > 0$ nella soluzione proposta, risulta che deve essere

$$\begin{aligned} -u_2 + u_3 &= 13 \\ 2u_1 - u_3 &= 16 \\ u_i &\geq 0 \end{aligned}$$

un'altra condizione può essere ricavata dalla dualità forte. Osserviamo a questo proposito che il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale è dunque

$$13 \cdot 2000 + 9 \cdot 0 + 16 \cdot 2000 = 58000$$

e dunque dev'essere

$$4000u_1 = 58000$$

da cui $u_1 = 14.5$. Dalle altre due si ricava $u_3 = 13$ e $u_2 = 0$. Osservando che la soluzione $(14.5, 0, 13)$ è ammissibile per il problema duale, risulta dimostrato che $(2000, 0, 2000)$ è ottima per il problema primale.

Una strada alternativa era quella di fare uso del criterio di ottimalità. Si tratta allora di capire quale base corrisponde alla soluzione $(2000, 0, 2000)$. A tale scopo, riscriviamo il problema in forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & -13x_A - 9x_B - 16x_G \\ & x_B + 2x_G + s_1 = 4000 \\ & -x_A + 2x_B + s_2 = 0 \\ & x_A - x_G + s_3 = 0 \\ & x_j, s_i \geq 0 \end{aligned}$$

in cui si noti l'aggiunta delle tre variabili di slack s_1, s_2, s_3 . Inserendo la soluzione proposta nelle tre equazioni, si ha che $s_1 = s_3 = 0$ mentre $s_2 = 2000$. Dunque, la base corrispondente alla soluzione $(2000, 0, 2000)$ è necessariamente quella costituita dalle variabili x_A, x_G, s_2 , ossia

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_B^T = (-13 \quad -16 \quad 0) \quad c_F^T = (-9 \quad 0 \quad 0)$$

mentre

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

di conseguenza si ha

$$\begin{aligned} \bar{c}_F^T &= c_F^T - c_B^T B^{-1} F = (-9 \quad 0 \quad 0) - (-13 \quad -16 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{11}{2} \quad \frac{29}{2} \quad 13 \right) \end{aligned}$$

e dunque, essendo tutti i costi ridotti non negativi, la soluzione proposta è ottima.

3

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}\min z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_j &\geq 0\end{aligned}$$

Senza determinarla esplicitamente, si vuole sapere se il valore della soluzione ottima è almeno pari a 1.

Soluzione.

Il problema può risolversi semplicemente per ispezione. Scriviamo il duale:

$$\begin{aligned}\max u_1 + 2u_2 \\ 2u_1 + u_2 &\leq 2 \\ u_1 + 2u_2 &\leq 3 \\ u_1 &\leq 4 \\ u_2 &\leq 1\end{aligned}$$

Osserviamo che la soluzione $(1, 0)$ è ammissibile per il duale, e il valore della funzione obiettivo duale è pari a 1. Per la dualità debole, risulta dimostrato che la soluzione ottima del primale è senz'altro non inferiore a 1.

Si noti che comunque $(1, 0)$ *non* è la soluzione ottima del duale. Infatti, in tale punto solo il primo dei vincoli duali è attivo. Ciò implica che, se tale soluzione fosse ottima, si dovrebbero annullare, nella corrispondente soluzione ottima del primale, tutte e tre le variabili x_2, x_3 e x_4 . Rimarrebbe solo x_1 , che dovrebbe essere pari a $1/2$ (dal primo vincolo) e a 2 (dal secondo), impossibile.

4

Il piano di produzione per il prossimo anno di un'azienda prevede una produzione di d_t unit di prodotto nel mese t , $t = 1, \dots, 12$. Ciascun operaio è in grado di produrre k unit di prodotto in un mese. Lo stipendio mensile di ciascun operaio è pari a s . Assumere e licenziare personale ha dei costi, e precisamente: assumere un operaio costa p , mentre licenziarne uno costa q . Supponendo che inizialmente vi siano g_0 operai, determinare il numero di operai che devono essere presenti durante ciascun mese in modo da riuscire

sempre a produrre la domanda richiesta e da minimizzare i costi complessivi di stipendio + assunzione + licenziamento.

Soluzione.

Le variabili di decisione sono il numero di operai disponibili in ciascun mese, indichiamoli con g_t , $t = 1, \dots, 12$.

Per esprimere la funzione obiettivo abbiamo però anche bisogno di altre variabili, che rappresentano il numero di unità di personale assunte e licenziate nel mese t . Precisamente, A_t e L_t indicano rispettivamente il numero di persone che sono assunte e licenziate all'inizio del mese t . A questo punto, la funzione obiettivo è semplicemente

$$\min \sum_{t=1}^{12} (sg_t + pA_t + qL_t)$$

Veniamo ora ai vincoli. Se nel mese t abbiamo a disposizione g_t unità di personale, sarà possibile produrre kg_t . Per soddisfare la domanda, dovrà dunque valere, per ogni t :

$$kg_t \geq d_t$$

Ora, l'unica cosa che manca è stabilire un legame tra le variabili g_t e le A_t , L_t . In particolare, occorre specificare che il numero di unità di personale presenti al mese t è dato da quelle presenti al mese precedente, più gli assunti, meno i licenziati. Dunque, per ogni t :

$$g_{t+1} = g_t + A_t - L_t$$

In definitiva, la formulazione completa è

$$\begin{aligned} \min \sum_{t=1}^{12} (sg_t + pA_t + qL_t) \\ kg_t &\geq d_t \quad t = 1, \dots, 12 \\ g_{t+1} &= g_t + A_t - L_t \quad t = 1, \dots, 12 \\ g_t &\geq 0 \quad t = 1, \dots, 12 \end{aligned}$$

5

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 10 \end{aligned}$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

a) Scrivere il problema duale

b) Utilizzando le condizioni di ottimalità, e senza usare il metodo del simplesso, trovare la soluzione ottima del duale sapendo che quella del primale è $(27/5, 32/5)$.

Soluzione.

Riscriviamo il problema riordinandolo in modo da rendere più agevole il calcolo del duale.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$-x_1 - 2x_2 \leq -10$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0$$

Il duale è quindi

$$\min 30u_1 - 10u_2 + u_3 + u_4$$

$$2u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \geq 2$$

$$3u_1 - 2u_2 - u_3 + u_4 = 3$$

$$u_i \geq 0$$

Inserendo la soluzione $(27/5, 32/5)$ nel primale, osserviamo che il primo e il quarto vincolo sono attivi, mentre il secondo e il terzo no. Di conseguenza, $u_2 = 0$ e $u_3 = 0$. Inoltre, poiché $x_1 = 27/5 > 0$, il primo vincolo del duale deve essere soddisfatto all'uguaglianza, e in definitiva rimane il sistema di due equazioni in due incognite:

$$2u_1 - u_4 = 2$$

$$3u_1 + u_4 = 3$$

che dà $u_1 = 1$, $u_4 = 0$. Siccome questi valori sono non negativi, la soluzione trovata è ammissibile per il problema duale e quindi è ottima. A scopo di verifica, si può vedere che i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi nei due punti $(27/5, 32/5)$ e, rispettivamente, $(1, 0, 0, 0)$, valgono entrambe 30.

6

Un allevatore vuole dare al proprio bestiame una certa quantità giornaliera b (in grammi) di vitamine. Per fare questo, esamina n diversi mangimi, e per ciascuno di essi rileva i grammi a_i di vitamine presenti in un etto di mangime, e il costo c_i di un etto di mangime. Il problema è quello di fornire la quantità di vitamine b richiesta, minimizzando i costi. Detto k l'indice per cui si ha il minimo dei rapporti c_i/a_i , ovvero

$$\frac{c_k}{a_k} = \min_j \left\{ \frac{c_j}{a_j} \right\}$$

(Supponiamo per semplicità che tale minimo sia raggiunto per un solo mangime k .) Utilizzando gli strumenti della teoria della dualità, dimostrare che la decisione più conveniente consiste nell'acquistare b/a_k etti del solo mangime k .

Soluzione.

Per risolvere il problema, basta scrivere la formulazione e il problema duale. Indicando con x_j la quantità di etti di mangime j da comprare, il problema è:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Essendoci un solo vincolo, il problema duale avrà una sola variabile, indichiamola con u :

$$\begin{aligned} \max \quad & bu \\ & a_1u \leq c_1 \\ & a_2u \leq c_2 \\ & \dots \\ & a_nu \leq c_n \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

Essendo ovviamente $b > 0$, il duale consiste dunque nel massimizzare il valore di u . È evidente allora che il valore che limita u è il più piccolo dei rapporti c_j/a_j , cioè

$$u^* = \frac{c_k}{a_k}$$

Il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale sarà dunque

$$bu^* = b \frac{c_k}{a_k}$$

Ora, solo il k -esimo vincolo del duale è attivo in u^* . Il fatto che gli altri non siano attivi, per la complementarità implica che $x_j^* = 0$ per ogni $j \neq k$, e quindi la funzione obiettivo del primale all'ottimo vale

$$c_k x_k^*$$

Per la dualità forte, questo deve uguagliare $b \frac{c_k}{a_k}$, da cui

$$x_k^* = \frac{b}{a_k}$$

che è quanto si voleva dimostrare.

7

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Trovare la soluzione ottima del problema, sapendo che la soluzione ottima del problema duale è $(-3/8, 11/8, 1/4)$.
2. Determinare in quale range può variare il termine noto della seconda riga (attualmente al valore 4) senza che vari la base ottima.

Soluzione.

Il problema duale è

$$\begin{aligned} \max 2u_1 + 4u_2 + 5u_3 \\ 3u_1 &\leq 2 \\ u_1 + u_2 &\leq 1 \\ 2u_2 + u_3 &\leq 3 \\ 4u_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

(1)

Inserendo la soluzione $(-3/8, 11/8, 1/4)$, osserviamo che solo il primo dei vincoli duali non è attivo. Di conseguenza, deve essere $x_1 = 0$. Dalla prima equazione del primale si

ricava allora $x_2 = 2$, e successivamente dalle altre $x_3 = 1$ e $x_4 = 1$. Poiché tutti i valori trovati sono non negativi, la soluzione trovata per il primale è dunque ottima.

Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che la base ottima è $[A_2, A_3, A_4]$, ossia

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

A fronte di una variazione Δb del vettore dei termini noti, la base rimane ammissibile (e quindi ottima, dal momento che non variano i costi ridotti) fintanto che

$$B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

ossia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 + \Delta b_2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \frac{1}{2}\Delta b_2 \\ 1 - \frac{1}{8}\Delta b_2 \end{pmatrix} \geq 0$$

e dunque in definitiva si ottiene il range $-2 \leq \Delta b_2 \leq 8$.

8

Una fonderia utilizza quattro tipi di materiale grezzo, per ottenere un prodotto finale. Ciascun materiale ha un diverso contenuto di alluminio, silicio e carbonio. La tabella che segue riporta la composizione di ciascun materiale (espresso in percentuale sul peso totale), insieme al costo unitario.

	% alluminio	% silicio	%carbonio	costo al kg
materiale 1	3	4	6	680
materiale 2	5	4	5	750
materiale 3	1	2.5	4	450
materiale 4	4	5	7	870

Il prodotto finale deve avere un contenuto percentuale di alluminio di almeno il 3% e non superiore all'8%; un contenuto di silicio tra il 4% e il 5%; di carbonio non superiore al 5%. Formulare come PL il problema di pianificare la produzione di questa fonderia minimizzando i costi.

Soluzione.

Il problema può essere formulato introducendo le variabili x_i , $i = 1, \dots, 4$, pari alla quantità (in kg) di materiale i che deve essere impiegata per ottenere un kg di prodotto finale. Una formulazione del problema è quindi:

$$\begin{aligned} \min & 680x_1 + 750x_2 + 450x_3 + 870x_4 \\ & 0,03x_1 + 0,05x_2 + 0,01x_3 + 0,04x_4 \geq 0,03 \end{aligned} \quad (2)$$

$$0,03x_1 + 0,05x_2 + 0,01x_3 + 0,04x_4 \leq 0,08 \quad (3)$$

$$0,04x_1 + 0,04x_2 + 0,025x_3 + 0,05x_4 \geq 0,04 \quad (4)$$

$$0,04x_1 + 0,04x_2 + 0,025x_3 + 0,05x_4 \leq 0,05 \quad (5)$$

$$0,06x_1 + 0,05x_2 + 0,04x_3 + 0,07x_4 \leq 0,05 \quad (6)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad (7)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, 4 \quad (8)$$

I primi due vincoli (2) e (3) sono relativi alla concentrazione di alluminio, i vincoli (4) e (5) riguardano la concentrazione di silicio, ed il vincolo 6 quella del carbonio. Il vincolo (7) impone che la somma delle variabili sia pari ad 1 (kg). I vincoli (8), infine, sono vincoli di non negatività.

9

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \min z &= 7x_1 + 10x_2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Scrivere il duale e trovarne la soluzione ottima sapendo che quella del primale è $x^* = (23/5, 1/5, 0)$.

Soluzione.

Il problema duale è:

$$\begin{aligned} \max w &= -10u_1 + 5u_2 + 4u_3 \\ -2u_1 + u_2 + u_3 &\leq 7 \\ 4u_1 + 2u_2 - 3u_3 &\leq 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -u_1 - u_2 + 3u_3 &\leq 0 \\ u_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Dalle condizioni di complementarità seguono le seguenti considerazioni:

- poiché in corrispondenza della soluzione ottima il primo vincolo del primale non è attivo si deve avere $u_1^* = 0$;
- poiché x_1^* e x_2^* sono diverse da zero, nella soluzione ottima del duale il primo e il secondo vincolo duale devono essere soddisfatti all'uguaglianza.

Si ottiene quindi il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} u_1^* &= 0 \\ u_2^* + u_3^* &= 7 \\ 2u_2^* - 3u_3^* &= 10 \end{aligned}$$

da cui $u^* = (0, 31/5, 4/5)$. Poiché tutte queste componenti sono non negative tale soluzione è ammissibile per il duale e quindi ottima.

10

La Làmed è una società che produce snack per aperitivi. La disponibilità di materie prime, alla fine di gennaio, è la seguente: 550 kg di arachidi, 150 kg di pistacchi, 90 kg di mandorle e 70 kg di nocciole. Ogni scatola contiene 500 grammi di prodotto. La Làmed produce quattro tipi di snack, descritti di seguito:

prodotto	composizione	profitto (lire/scatola)
Mem	solo arachidi	260
Num	non più del 50% di arachidi almeno il 10% di mandorle almeno il 15% di pistacchi	400
Pe	solo pistacchi	510
Qof	almeno il 30% di pistacchi almeno il 20% di mandorle almeno il 30% di nocciole	520

Supponendo che tutto quanto prodotto viene venduto, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto della Làmed.

Soluzione.

Il problema può essere formulato introducendo le seguenti variabili:

- x_{AM} = quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Mem;
- x_{AN} = quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{MN} = quantità di mandorle (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{NN} = quantità di nocciole (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Num;
- x_{PN} = quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Num;
- x_{PP} = quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Pe;
- x_{AQ} = quantità di arachidi (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{MQ} = quantità di mandorle (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{NQ} = quantità di nocciole (in kg) utilizzate per produrre snack di tipo Qof;
- x_{PQ} = quantità di pistacchi (in kg) utilizzati per produrre snack di tipo Qof;
- y_M = numero di scatole di snack di tipo Mem prodotte;
- y_N = numero di scatole di snack di tipo Num prodotte;
- y_P = numero di scatole di snack di tipo Pe prodotte;
- y_Q = numero di scatole di snack di tipo Qof prodotte.

Stiamo supponendo per semplicità che le variabili y_i non siano vincolate a essere intere. Una formulazione del problema è quindi:

$$\max 260y_M + 400y_N + 510y_P + 520y_Q$$

$$x_{AM} = 0,5y_M \tag{9}$$

$$x_{AN} + x_{MN} + x_{PN} + x_{NN} = 0,5y_N \tag{10}$$

$$x_{PP} = 0,5y_P \tag{11}$$

$$x_{AQ} + x_{MQ} + x_{NQ} + x_{PQ} = 0,5y_Q \tag{12}$$

$$x_{AN} \leq 0,25y_N \tag{13}$$

$$x_{MN} \geq 0,05y_N \tag{14}$$

$$x_{PN} \geq 0,075y_N \tag{15}$$

$$x_{MQ} \geq 0,1y_Q \tag{16}$$

$$x_{NQ} \geq 0,15y_Q \quad (17)$$

$$x_{PQ} \geq 0,15y_Q \quad (18)$$

$$x_{AM} + x_{AN} + x_{AQ} \leq 550 \quad (19)$$

$$x_{PP} + x_{PN} + x_{PQ} \leq 150 \quad (20)$$

$$x_{MN} + x_{MQ} \leq 90 \quad (21)$$

$$x_{NN} + x_{NQ} \leq 70 \quad (22)$$

$$x, y \geq 0 \quad (23)$$

I vincoli (9)–(12) legano tra di loro le variabili x ed y relative ai quattro diversi prodotti. Si ricordi che una scatola pesa mezzo chilo, dunque se y_i è il numero di scatole di snack i , $0.5y_i$ indica il numero di chili prodotti di quello snack. I vincoli (13)–(15) e (16)–(18) rappresentano i vincoli sulle composizioni degli snack Num e Qof rispettivamente. Infine, i vincoli (19)–(22) impongono che la produzione non utilizzi più delle quantità massime di materie prime disponibili.

11

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare.

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 0.5x_4 &= 2 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Verificare che la base ottima è $[A_1 A_2]$. Qual è la soluzione ottima x^* ?

Soluzione.

Calcoliamo i coefficienti di costo ridotto delle variabili fuori base x_3 e x_4 e verifichiamo che siano positivi.

$$\begin{aligned} \bar{c}_F^T &= [\bar{c}_3 \quad \bar{c}_4] = \bar{c}_F^T - \bar{c}_B^T B^{-1} F = [4 \quad 1] - [2 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} = \\ &= [4 \quad 1] - [2 \quad 3] (1/5) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} = [17/5 \quad 3/5] \end{aligned}$$

La base considerata è quindi ottima. La soluzione ottima è:

$$x^* = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

12

Studiando il comportamento resistivo di un nuovo materiale superconduttore, uno scienziato sottopone un campione del materiale a un valore di tensione x , e misura la corrente y da cui viene attraversato. In cinque esperimenti, egli ha ottenuto i seguenti valori.

tensione (V)	corrente (A)
1	0.23
2	0.45
3	0.79
4	1.25
5	1.85

Secondo la sua teoria, la dipendenza tra tensione (x) e corrente (y) può essere espressa nella forma $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Il problema è quello di determinare i parametri tali da minimizzare la somma degli scarti in valore assoluto dei punti che rappresentano i risultati degli esperimenti rispetto ai corrispondenti punti sulla curva $f(x)$. Formulare il problema come PL.

Soluzione.

Si indichino con x_i e y_i , $i = 1, \dots, 5$, i valori di tensione e di corrente riportati in tabella. Il problema può essere formulato introducendo le variabili ausiliarie s_1, \dots, s_5 , nel seguente modo:

$$\min s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$$

$$|y_i - ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d| \leq s_i \quad i = 1, \dots, 5$$

i vincoli possono essere linearizzati ottenendo la seguente formulazione di PL:

$$\min s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$$

$$y_i - ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d \leq s_i \quad i = 1, \dots, 5$$

$$y_i - ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d \geq -s_i \quad i = 1, \dots, 5$$

13

Avete deciso di organizzare una cena a casa vostra. Poiché però siete troppo impegnati a studiare per l'esame di Ricerca Operativa, avete pensato bene di far cucinare i vostri amici, che d'altra parte sono ben lieti di aiutarvi. Dopo aver lungamente meditato sulle capacità culinarie dei vostri amici, siete giunti a stilare la seguente tabella, dove la cifra indica il vostro giudizio sulla corrispondente pietanza preparata dal vostro amico/a.

amico/a	Antipasti	Primi	Secondi	Contorni	Dolci
Andrea	7	6	5	7	8
Barbara	6	8	7	6	5
Ciccio	6	5	4	4	8
Doriana	7	8	6	6	6
Everardo	5	6	7	5	0
Florinda	7	8	8	8	6
Gimmi	7	7	5	5	6

Il problema è quello di decidere *se* e cosa far preparare a ognuno, considerando che la vostra cena consisterà di una pietanza di ciascun tipo (ossia un antipasto, un primo, un secondo etc.) e che per discrezione non intendete chiedere a nessuno di preparare più di una pietanza.

- 1) Formulare in termini di programmazione lineare a numeri interi il problema di massimizzare la qualità della vostra cena
- 2) Cosa si può dire sulla possibilità di risolvere il problema facendo uso della programmazione lineare?

Soluzione.

Indicando i sette amici con A, \dots, G e le cinque pietanze con $1, \dots, 5$, le variabili di decisione sono del tipo $x_{ij} = 1$ se i preparerà la pietanza j , e $x_{ij} = 0$ altrimenti, con $i = A, B, \dots, G$ e $j = 1, \dots, 5$. La formulazione è quindi

$$\begin{aligned}
 \max & 7x_{A1} + 6x_{A2} + 5x_{A3} + 7x_{A4} + 8x_{A5} + \\
 & 6x_{B1} + 8x_{B2} + 7x_{B3} + 6x_{B4} + 5x_{B5} + \\
 & 6x_{C1} + 5x_{C2} + 4x_{C3} + 4x_{C4} + 8x_{C5} + \\
 & 7x_{D1} + 8x_{D2} + 6x_{D3} + 6x_{D4} + 6x_{D5} + \\
 & 5x_{E1} + 6x_{E2} + 7x_{E3} + 5x_{E4} + \\
 & 7x_{F1} + 8x_{F2} + 8x_{F3} + 8x_{F4} + 6x_{F5} + \\
 & 7x_{G1} + 7x_{G2} + 5x_{G3} + 5x_{G4} + 6x_{G5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^5 x_{ij} &= 1 & i = A, \dots, G \\ \sum_{i=A}^G x_{ij} &= 1 & j = 1, \dots, 5 \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}\end{aligned}$$

È facile vedere che la matrice dei coefficienti del problema coincide con la matrice di incidenza di un grafo bipartito (avente 7 nodi da una parte, l'insieme degli invitati, e 5 dall'altra, l'insieme delle pietanze) completo, ossia in cui ogni nodo è collegato con tutti gli altri nell'altro insieme. Siccome tale matrice è totalmente unimodulare, si ha che possiamo risolvere il problema trascurando il vincolo di interezza e affrontandolo come un qualsiasi problema di programmazione lineare.

14

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}\min z &= x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_i &\geq 0\end{aligned}$$

1. Dimostrare che, nella soluzione ottima, $x_3 = 0$.
2. Calcolare la soluzione ottima del problema duale.

Soluzione.

Se nella soluzione ottima $x_3 = 0$, necessariamente deve essere $x_4 = 5/4$, $x_2 = 1$, e, dal primo vincolo, $x_1 = 2/3$. Questa è una soluzione ammissibile per il problema primale in quanto tutte le variabili sono non negative. Ora, per dimostrare che è ottima, possiamo al solito seguire due strade: calcolare i costi ridotti oppure usare le condizioni di KKT. Seguiamo quest'ultima strada, visto che dobbiamo anche calcolare l'ottimo del duale. Il problema duale è:

$$\begin{aligned}\max 2u_1 + u_2 + 5u_3 \\ 3u_1 &\leq 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_1 + u_2 &\leq 2 \\
-u_1 - 2u_2 + u_3 &\leq -1 \\
4u_3 &\leq 2 \\
u_i &\geq 0
\end{aligned}$$

Dalla soluzione del primale, che vogliamo dimostrare essere ottima, $(2/3, 1, 0, 5/4)$, discende che il primo, il secondo e il quarto vincolo del duale devono essere attivi. Dal primo si ricava $u_1 = 1/3$, dal secondo $u_2 = 5/3$ e dal quarto $u_3 = 1/2$. Inserendo questi valori nel terzo vincolo, si ha

$$-\frac{1}{3} - \frac{10}{3} + \frac{1}{2} \leq -1$$

che è soddisfatto, e dunque le soluzioni $(2/3, 1, 0, 5/4)$ e $(1/3, 5/3, 1/2)$ sono ottime per i rispettivi problemi. Come verifica possiamo calcolare i valori delle due funzioni obiettivo, entrambi pari a $29/6$.

15

Un'officina meccanica produce pezzi di ricambio per trattori. I vari ricambi possono essere raggruppati in 5 tipi, ognuno dei quali richiede un certo tempo di lavorazione su vari macchinari. Il tempo (in ore) richiesto da ciascun pezzo su ciascuna macchina, il profitto (in migliaia di lire) derivante dalla produzione di ciascun pezzo e il tempo-macchina disponibile nel prossimo mese sono indicati in tabella.

	1	2	3	4	5	ore disponibili
fresatura	2	1.5	1	1	2	200
taglio	1	2	2.5	2	1	80
ispezione	2	1	2	1.5	1.5	100
profitto un.	100	60	90	80	60	

Un vostro collega sostiene che la cosa più conveniente è produrre solo pezzi dei primi due tipi, e di non usare tutte le 200 ore di fresatura disponibili (mentre le ore di taglio e ispezione vanno usate completamente). Sapreste dire se ha ragione o meno?

Soluzione.

Si tratta di un classico problema di allocazione di risorse. Indichiamo con x_1, \dots, x_5 le variabili di decisione, che rappresentano il numero di unità dei cinque tipi che devono essere prodotte. La formulazione è quindi, in forma standard

$$\max 100x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 80x_4 + 60x_5$$

$$\begin{aligned}
2x_1 + 1.5x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 + s_1 &= 200 \\
1x_1 + 2x_2 + 2.5x_3 + 2x_4 + 1x_5 + s_2 &= 80 \\
2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1.5x_4 + 1.5x_5 + s_3 &= 100 \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}$$

dove si noti l'aggiunta delle variabili di slack. Dalle informazioni date, abbiamo che la base ottima proposta è costituita dalle variabili x_1 , x_2 e s_1 , dunque si tratta di

$$B = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

mentre

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c_B^T = (-100 \quad -60 \quad 0) \quad c_F^T = (-90 \quad -80 \quad -60 \quad 0 \quad 0)$$

inserendo i valori numerici nell'espressione dei costi ridotti si ha

$$\begin{aligned}
\bar{c}_F^T &= c_F^T - c_B^T B^{-1} F = \\
&(-90 \quad -80 \quad -60 \quad 0 \quad 0) - (-330/3 \quad -250/3 \quad -230/3 \quad -20/3 \quad -140/3)
\end{aligned}$$

e dunque, poiché $\bar{c}_F^T \geq 0$, dovete concludere che il vostro collega ha ragione.

16

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 \\
3x_1 + x_2 &\geq 2 \\
x_2 + 2x_3 &= 4 \\
x_3 + 4x_4 &\leq 5 \\
x_i &\geq 0
\end{aligned}$$

Dimostrare che la soluzione ottima del problema è $(2/3, 0, 2, 3/4)$.

Svolgimento

La soluzione data è ottima se e solo se esiste una soluzione duale u^* tale che:

$$x_i^*(c - A^T u^*)_i = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Dunque, non dobbiamo far altro che scrivere il problema duale e verificare che in corrispondenza delle componenti non nulle di x^* , il sistema di equazioni formate dai vincoli attivi nel problema duale sia soddisfatto. Il duale è

$$\begin{aligned} \max w &= 2u_1 + 4u_2 + 5u_3 \\ 3u_1 &\leq 2 \\ u_1 + u_2 &\leq 4 \\ 2u_2 + u_3 &\leq 2 \\ 4u_3 &\leq -1 \\ u_1 &\geq 0 \\ u_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

Dunque, il sistema è composto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} 3u_1 &= 2 \\ 2u_2 + u_3 &= 2 \\ 4u_3 &= -1 \\ u_1 &\geq 0 \\ u_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} u_1 &= 2/3 \\ u_2 &= 7/8 \\ u_3 &= -1/4 \end{aligned}$$

la soluzione soddisfa i vincoli sulle variabili duali, quindi possiamo concludere che x^* è ottima. Per verifica, andiamo a calcolare il valore delle funzioni obiettivo. Queste risultano pari a $2(2/3) + 4(0) + 2(2) - (3/4) = 55/12$ e $2(2/3) + 4(9/8) + 5(-1/4) = 55/12$ rispettivamente, come volevasi dimostrare.

17

La Kilim vende elettrodomestici, e deve inviare frigoriferi in quattro località diverse. Nella località j devono essere spediti d_j frigoriferi, $j = 1, \dots, 4$. Per soddisfare questa domanda, la Kilim può attingere da tre depositi dislocati sul territorio nazionale, A, B e C. Nei tre depositi sono presenti s_A , s_B e s_C frigoriferi rispettivamente. Spedire un frigorifero dal deposito i alla località j ha un costo pari a c_{ij} . Non è tecnicamente possibile spedire frigoriferi dal deposito B alla località 3. La tabella riporta i dati del problema.

	1	2	3	4	s_i
A	21	25	31	34	100
B	23	19	$+\infty$	32	60
C	36	27	25	19	50
d_j	40	50	50	70	

1. Formulare come programmazione lineare il problema di decidere come spedire i frigoriferi in modo da minimizzare i costi.
2. Cosa si può dire relativamente all'interrezza della soluzione ottima?

Soluzione.

Il problema è un classico problema di trasporti. Indichiamo con x_{ij} il numero di frigoriferi da inviare dal deposito i alla località j . I vincoli di disponibilit  dei frigoriferi per ogni sorgente sono espressi da:

$$\begin{aligned}
 x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4} &\leq 100 \\
 x_{B1} + x_{B2} + x_{B4} &\leq 60 \\
 x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4} &\leq 50
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Analogamente, formuliamo i vincoli di domanda per ogni localit :

$$\begin{aligned}
 x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\geq 40 \\
 x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\geq 50 \\
 x_{A3} + x_{C3} &\geq 50 \\
 x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\geq 70
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

A questi vanno aggiunti i vincoli di non negatività delle variabili, cioè

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{per } i = A, B, C \quad j = 1, 2, 3, 4$$

La funzione obiettivo da minimizzare è allora la seguente:

$$\begin{aligned} f(x) = & 21x_{A1} + 25x_{A2} + 31x_{A3} + 34x_{A4} + 23x_{B1} + 19x_{B2} + 32x_{B3} + \\ & + 36x_{C1} + 27x_{C2} + 25x_{C3} + 19x_{C4} \end{aligned}$$

Essendo la matrice dei coefficienti totalmente unimodulare, le soluzioni risultano avere valori interi.

18

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min z = & 2x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \\ & 3x_1 + x_2 - x_5 = 2 \\ & x_2 + 4x_3 = 4 \\ & x_3 + 4x_4 + x_6 = 5 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

si consideri l'insieme di colonne (A_2, A_4, A_5) , indicare se individua o meno una base, e in tal caso se si tratta di una base ammissibile e/o ottima.

Soluzione.

Perché (A_2, A_4, A_5) sia una base, occorre semplicemente che essa sia non singolare. Si vede a occhio che i tre vettori non sono linearmente dipendenti, tuttavia, per accertarcene calcoliamo la matrice inversa, che ci tornerà utile in seguito. Calcoliamo l'inversa con il metodo di Gauss. Consideriamo la matrice (B, I) dove $B = (A_2 \ A_4 \ A_5)$ e I è la matrice identità 3×3 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riscriviamo la matrice con la prima riga per ultima, e sottraiamo la prima riga alla terza. Otteniamo così

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poi dividiamo la seconda riga per 4 e moltiplichiamo la terza riga per -1. Otteniamo così

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque, la matrice inversa B^{-1} è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Perché sia una base ammissibile, occorre che risulti $B^{-1}b \geq 0$. Facendo i calcoli, troviamo che

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (2 \ 4 \ 5)^T = (4 \ 5/4 \ 2) \geq 0$$

Dunque, l'insieme $B = (A_2 \ A_4 \ A_5)$ è una base ammissibile. Per verificare se è anche ottima, occorre che i costi ridotti delle colonne non in base siano non negativi, ovvero, che

$$c_F^T - c_B^T B^{-1} F \geq 0$$

ossia che

$$(2 \ 6 \ 0)^T - (1 \ -1 \ 0)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$$

facendo gli opportuni calcoli, otteniamo il vettore $(0 \ -4 \ 3/4)$ che ha una componente negativa, per cui la base $B = (A_2 \ A_4 \ A_5)$ non è ottima.

19

Un agricoltore possiede 100 ettari di terreno che intende usare per coltivare grano, mais, canna da zucchero, erba da pascolo. Dei 100 ettari disponibili, 10 sono adatti per qualunque coltivazione, 50 sono adatti per qualunque coltivazione tranne che la canna da zucchero mentre i rimanenti 40 ettari possono essere adibiti solo a erba da pascolo. Inoltre, l'agricoltore può allevare delle mucche che richiedono, ciascuna, mezzo ettaro di terreno adibito a pascolo e che vengono vendute dopo un anno. L'agricoltore e i suoi familiari non intendono lavorare, nell'arco del prossimo anno, più di 2000 ore complessive.

	Grano	Mais	Canna	Erba
costo per ettaro (semi, fertiliz.)(mila lire)	6	3	8	5
prezzo vendita prodotto per ettaro (mila lire)	45	35	100	—
ore di lavoro per ettaro (in un anno)	12	14	20	5

Inoltre, allevare una mucca per poi rivenderla dà un profitto netto di 200 mila lire, e ogni mucca richiede in un anno 100 ore di lavoro. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare il profitto dell'agricoltore.

Soluzione.

Poiché l'agricoltore vuole massimizzare il profitto, appare evidente che tutto il terreno che può essere adibito a pascolo sarà sfruttato per l'allevamento delle mucche, essendo il profitto che se ne ottiene maggiore della spesa relativa. Modelliamo il problema con le variabili decisionali x_j che rappresentano, per ogni tipo di coltivazione j , la quantità di terreno da adibire ad essa.

I vincoli sono di due tipi: vincoli sulla disponibilità e le caratteristiche del terreno, e vincoli sul numero di ore di lavoro. Per i primi, abbiamo che

$$\begin{aligned} x_C &\leq 10 \\ x_G &\leq 60 \\ x_M &\leq 60 \\ x_E &\geq 40 \end{aligned}$$

Il primo vincolo esprime il fatto che la canna da zucchero può essere coltivata solo in 10 ettari di terreno al massimo, il secondo e il terzo che il grano e il mais possono essere coltivati dappertutto tranne che nella parte che può essere adibita solo a pascolo, e l'ultimo che la quantità di terreno per il pascolo è sicuramente almeno pari a 40 ettari. A questi vincoli va aggiunto il vincolo di disponibilità totale del terreno, e cioè

$$x_G + x_M + x_C + x_E \leq 100$$

Abbiamo bisogno invece di un unico vincolo sul lavoro, che non deve superare le 2000 ore complessive.

$$12x_G + 14x_M + 20x_C + 200x_E \leq 2000$$

Ovviamente tutte le variabili devono essere vincolate ad essere positive. Infine, la funzione obiettivo da massimizzare è data dalla differenza tra profitti e costi, e cioè

$$f(x) = 45x_G + 35x_M + 100x_C + 400x_E - 6x_G - 3x_M - 8x_C - 5x_E$$