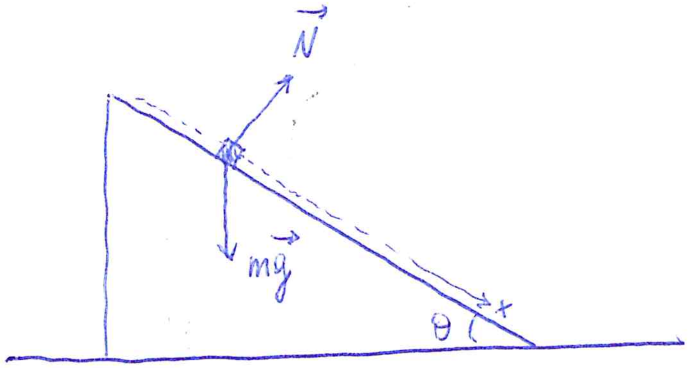
Anno Accademico 2022/2023

Prova scritta di Fisica per Informatica

Secondo Appello Invernale 19/02/2024

Problema n. 1

a) 

Le forze agenti inizialmente sul punto materiale sono:
forza peso $m\vec{g}$
reazione vincolare normale $\vec{N}$

In assenza di attrito (il piano inclinato è liscio per ipotesi) il moto lungo l'asse x (vedi figura) è regolato dalla seconda legge della dinamica; essendo $(m\vec{g})_x = mg\sin\theta$, $N_x = 0$, risulta $ma_x = mg\sin\theta$, da cui

$$\boxed{a_x = g\sin\theta = (9{,}81\ m\,s^{-2})\,\text{sen}\,30° = 4{,}905\ m\,s^{-2}}$$

Il moto del punto materiale, quindi, è rettilineo e uniformemente accelerato.

La velocità istantanea in funzione del tempo è perciò, se $v_x(0) = 0$:

$$\boxed{v_x(t) = v_{x_0} + a_x t = a_x t}$$

, e la legge oraria del moto è

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = x_0 + \frac{1}{2} a_x t^2}$$

, dove x_0 è la coordinata della posizione iniziale.

(b) Ipotesi: $v_x(t) = kt^2$, con $k = 2\ m\ s^{-3}$

L'accelerazione istantanea del punto materiale è quindi

$$\boxed{a_x(t) = v_x'(t) = 2kt}$$

La forza risultante agente sul punto materiale è quindi

$$F_{TOT,x}(t) = m a_x(t) = (m\vec{g})_x + F_x(t) =$$

$$= mg \sin\theta + F_x(t),$$ da cui:

$$\boxed{F_x(t) = m\left[a_x(t) - g\sin\theta\right] = m\left[2kt - g\sin\theta\right]}$$

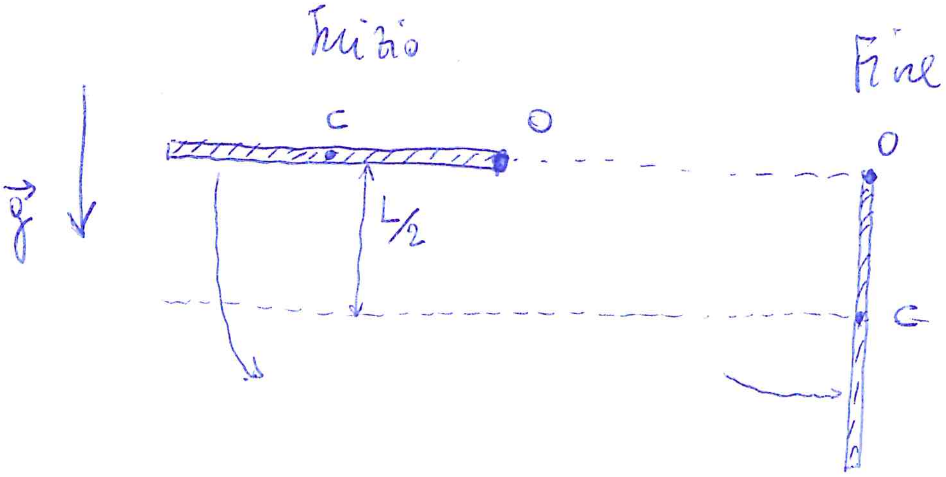
Osserviamo che, per $0 \leq t < \frac{g\sin\theta}{2k}$, $F_x(t)$ tende a frenare il punto materiale, mentre per $t > \frac{g\sin\theta}{2k}$ $F_x(t)$ aumenta il modulo della velocità del punto materiale.

(c) Con $v_x(t) = kt^2$, la distanza percorsa dal punto materiale tra l'istante $t_i = 0$ e l'istante $t_f = 10\ s$ è

$$\boxed{\begin{aligned} D &= \int_0^{t_f} v_x(t)\,dt = \int_0^{t_f} (kt^2)\,dt = k\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{t_f} = \frac{1}{3}kt_f^3 = \\ &= \frac{1}{3}\cdot(2\ m\ s^{-3})\cdot(10\ s)^3 = 666,667\ m \end{aligned}}$$

Problema n. 2

(e)



Nella rotazione, l'energia meccanica dell'asta si conserva in quanto la forza peso e' conservativa e la reazione del perno in O non compie lavoro essendo applicata a un punto che resta fisso durante la rotazione dell'asta.

Nella rotazione di 90° il centro di massa dell'asta si abbassa di un tratto di lunghezza $L/2$; il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione considerato e' $I_z = \frac{1}{3} ML^2$. Pertanto possiamo scrivere:

$$E_f = E_i \Rightarrow \frac{1}{2} I_z \omega_1^2 - Mg\frac{L}{2} = 0 \text{ , da cui}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} I_z \omega_1^2 = \cancel{\frac{1}{2}} MgL \Rightarrow \frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\omega_1^2 = \cancel{M}g\cancel{L} \text{ , e infine}$$

$$\omega_1^2 = \frac{3g}{L} \Rightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{\frac{3\cdot(9,81\ \mathrm{m\,s^{-2}})}{5\ \mathrm{m}}} \simeq 2,426\ \mathrm{rad\,s^{-1}}}$$

(b) Nell'urto tra l'asta rigida e il punto materiale, la quantità di moto totale del sistema non si conserva (almeno a priori) in quanto durante l'urto possono agire forze impulsive esterne esercitate dal perno.

Tuttavia, durante l'urto, il momento risultante delle forze esterne calcolato rispetto al perno (considerato come polo per il calcolo dei momenti) e' nullo. Dunque, si conserva (nell'urto) il momento angolare totale del sistema asta + pallina, calcolato anch'esso rispetto al perno:

$$(L_{z,tot})_f = (L_{z,tot})_i$$

Poiché la pallina, dopo l'urto, resta attaccata rigidamente all'estremità libera dell'asta, il momento d'inerzia del sistema rigido dopo l'urto è:

$$I_{z,f} = I_{z,i} + mL^2 = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 = \left(\frac{M}{3}+m\right)L^2.$$

Pertanto possiamo scrivere:

$$I_{z,f} \cdot \omega_2 = I_{z,i}\,\omega_1 \Rightarrow \left(\frac{M}{3}+m\right)\cancel{L^2}\,\omega_2 = \frac{M}{3}\cancel{L^2}\,\omega_1$$

$$\omega_2 = \frac{M/3}{\frac{M}{3}+m}\,\omega_1 \Rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{M}{M+3m}\,\omega_1 = \frac{\omega_1}{1+\frac{3m}{M}} \simeq 1{,}866 \text{ rad s}}$$

(c) Dopo l'urto, nel moto che segue, l'energia meccanica si conserva. Subito dopo l'urto, il centro di massa dell'asta si trova alla quota $-L/2$ rispetto alla quota del perno, e la pallina si trova alla quota $-L$; nell'istante in cui l'asta raggiunge la posizione angolare (rispetto alla verticale) ϑ, il centro di massa si trova alla quota $-\frac{L}{2}\cos\vartheta$ al di sotto della quota del perno, e la pallina si trova alla quota $-L\cos\vartheta$ al di sotto della quota del perno.

Se in tale istante la velocità angolare dell'asta (con la pallina attaccata) è nulla, allora vale l'equazione seguente:

$$E_f = E_i \Rightarrow -\frac{1}{2}MgL\cos\vartheta - mgL\cos\vartheta = \frac{1}{2}I_z\omega_2^2 - \frac{1}{2}MgL - mgL,$$

da cui: $$\frac{1}{2}I_z\omega_2^2 = gL\left[\frac{M}{2}(1-\cos\vartheta) + m(1-\cos\vartheta)\right]$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}ML^2 + mL^2\right)\omega_2^2 = gL\left(\frac{M}{2}+m\right)(1-\cos\vartheta)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{M}{3}+m\right)L^{\cancel{2}}\omega_2^2 = g\cancel{L}\left(\frac{M}{2}+m\right)(1-\cos\vartheta)$$

$$1-\cos\vartheta = \frac{\left(\frac{M}{3}+m\right)\omega_2^2 L}{2g\left(\frac{M}{2}+m\right)},$$ da cui

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{\left(\frac{M}{3}+m\right)\omega_2^2 L}{2g\left(\frac{M}{2}+m\right)},$$ e infine

$$\boxed{\vartheta = \arccos\left[1 - \frac{\left(\frac{M}{3}+m\right)\omega_2^2 L}{2g\left(\frac{M}{2}+m\right)}\right] \simeq \arccos(0{,}359) \simeq 1{,}203\ \text{rad} \simeq 69^\circ}$$

Problema n. 3

(a) Tra le due cariche elettriche agisce la forza elettrostatica, secondo la legge di Coulomb:

$$\boxed{F_0 = k_e \frac{|Q_1||Q_2|}{x_2^2} \simeq \left(8{,}98755 \cdot 10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}\right) \cdot \frac{(2{,}5\times10^{-5}\,C)(5{,}0\times10^{-6}\,C)}{(3{,}2\,m)^2} \simeq 0{,}1097\ N}$$

Le due cariche elettriche hanno segni opposti, per cui la forza di mutua interazione elettrostatica e' attrattiva.

(b)

Nella regione $0<x<x_2$ i campi elettrici generati dalle due cariche sono non nulli e hanno lo stesso verso (quello positivo lungo l'asse x) per cui in tale regione il campo elettrico totale non può annullarsi.
Consideriamo quindi le due regioni $x<0$ e $x>x_2$

- $x<0$. In un punto $x_A<0$ il campo generato da Q_1 ha segno negativo, quello generato da Q_2 ha segno positivo.

Quindi, la condizione di annullamento del campo elettrico totale in $x = x_A < 0$ diventa:

$$-\cancel{k_e}\frac{Q_1}{x_A^2} + \cancel{k_e}\frac{|Q_2|}{(x_2 - x_A)^2} = 0$$

$$\frac{|Q_2|}{(x_2 - x_A)^2} = \frac{Q_1}{x_A^2} \Rightarrow \frac{(x_2 - x_A)^2}{x_A^2} = \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

$$\left|\frac{x_2 - x_A}{x_A}\right| = \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}} \qquad \frac{|x_2 - x_A|}{|x_A|} = \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}}$$

Poiché $x_2 > x_A$ e $x_A < 0$, risulta $|x_2 - x_A| = x_2 - x_A$ e $|x_A| = -x_A$, per cui

$$-\frac{x_2 - x_A}{x_A} = \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}} \Rightarrow -x_2 + x_A = x_A\sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}}$$

Essendo $|Q_2| < Q_1$, risulta $\sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}} < 1$; scriviamo quindi:

$$\left(1 - \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}}\right)x_A = x_2 \Rightarrow x_A = \frac{x_2}{1 - \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}}} > 0$$

Ma questa soluzione non è accettabile, poiché il calcolo è stato svolto per $x_A < 0$. Dunque, nella regione $x_A < 0$ non ci sono punti lungo l'asse x in cui il campo elettrico si annulla.

• $x > x_2$ In un punto $x_B > x_2$ il campo generato da Q_1 ha segno positivo, quello generato da Q_2 ha segno negativo. Quindi, la condizione di annullamento del campo elettrico totale in $x = x_B > x_2$ diventa

$$\cancel{k_e} \frac{Q_1}{x_B^2} - \cancel{k_e} \frac{|Q_2|}{(x_B - x_2)^2} = 0$$

$$\frac{Q_1}{x_B^2} = \frac{|Q_2|}{(x_B - x_2)^2} \Rightarrow \frac{(x_B - x_2)^2}{x_B^2} = \frac{|Q_2|}{Q_1} \Rightarrow \frac{|x_B - x_2|}{|x_B|} = \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}}$$

Poiché $x_B > x_2 > 0$, risulta $|x_B - x_2| = x_B - x_2$, $|x_B| = x_B$.

Allora: $$\frac{x_B - x_2}{x_B} = \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}} \Rightarrow 1 - \frac{x_2}{x_B} = \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}}$$

$$\frac{x_2}{x_B} = 1 - \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}}$$ e infine $$x_B = \frac{x_2}{1 - \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}}} > x_2 \quad \text{(accettabile)}$$

Pertanto, l'unico punto lungo l'asse x in cui il campo elettrico totale si annulla è il punto di coordinata

$$\boxed{x_B = \frac{x_2}{1 - \sqrt{\frac{|Q_2|}{Q_1}}} \simeq 5{,}789 \text{ m}}$$

(c) Essendo la forza elettrostatica tra le due cariche l'unica forza agente, l'energia meccanica totale si conserva.
Ricordando l'espressione dell'energia potenziale elettrostatica tra due cariche puntiformi, e sapendo che inizialmente il corpo con carica Q_2 e' fermo, otteniamo l'uguaglianza seguente:

$$E_f = E_i \implies \frac{1}{2} m_2 V_2^2 - k_e \frac{Q_1 |Q_2|}{x_2/2} = -k_e \frac{Q_1 |Q_2|}{x_2} \text{, cioe'}$$

$$\frac{1}{2} m_2 V_2^2 = k_e Q_1 |Q_2| \left[\frac{2}{x_2} - \frac{1}{x_2} \right]$$

$$\frac{1}{2} m_2 V_2^2 = \frac{k_e Q_1 |Q_2|}{x_2} \implies V_2^2 = \frac{2 k_e Q_1 |Q_2|}{m_2 x_2}$$

$$\boxed{V_2 = \sqrt{\frac{2 k_e Q_1 |Q_2|}{m_2 x_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (8{,}98755 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}) \cdot (2{,}5 \cdot 10^{-5} C)(5{,}0 \cdot 10^{-6} C)}{(10 \, kg) \cdot (3{,}2 \, m)}} \simeq 0{,}265 \, ms}$$

Questo e' il modulo della velocita' istantanea del corpo di massa m_2 e carica elettrica Q_2 nell'istante in cui si viene a trovare nel punto lungo l'asse x di ascissa $x_2/2$.