

ProblemSet

Sandu Mihai Alexandru, Domenico Sabatini, Giacomo Pace, Adriano Porzia

November 2023

Es 1

1 Scambi Sufficienti

Considera una disposizione iniziale arbitraria delle birre. Il nostro obiettivo è riorganizzarli in modo che tutte le ragazze abbiano Pale Ale (tipo A) e tutti i ragazzi abbiano Bock (tipo B). Dimostreremo che $O(n^2)$ scambi sono sempre sufficienti per raggiungere questo obiettivo.

1. Conteggio delle inversioni:

- Definisci un'inversione come una coppia di birre i e j tali che $i < j$ ma la tazza in posizione i ha un tipo diverso dalla birra in posizione j .
- Il numero di inversioni nella disposizione iniziale rappresenta il numero di coppie di birre errate.

2. Osservazione:

- Scambiare due birre adiacenti riduce il numero di inversioni di 1. In altre parole, ogni scambio avvicina il sistema all'ordine corretto.

3. Strategia:

- Esegui gli scambi per ridurre il numero di inversioni fino a quando non rimangono più inversioni.
- Poiché ogni scambio riduce il numero di inversioni di 1, $O(n^2)$ scambi sono sufficienti.

4. Terminazione:

- Una volta esaurite le inversioni, i boccali vengono disposti correttamente con tutte le ragazze che bevono Pale Ale e tutti i ragazzi che bevono Bock.

Quindi, $O(n^2)$ scambi sono sempre sufficienti.

2 Scambi Necessari

Consideriamo lo scenario peggiore in cui si hanno $\frac{n}{2}$ ragazzi con Pale Ale (tipo A) seguite da $\frac{n}{2}$ ragazze con Bock (tipo B). L'obiettivo è riorganizzare i boccali in modo che tutte le ragazze e i ragazzi abbiano rispettivamente le birre A e B.

1. Configurazione Iniziale:

- $F F F \dots F M M \dots M$
- (Ragazze seguite da Ragazzi)

2. Osservazioni:

- Qualsiasi scambio tra i boccali può spostare solo uno dei due di una posizione.
- Induzione maschi e femmine e perché scegliere $n/2$.
- Data la configurazione iniziale ci basterà ordinare solamente un sesso in quanto l'altro sarà di conseguenza ordinato.

3. Distanza:

- Per spostare un boccale, sia B che A, dalla posizione più a destra a quella più a sinistra, sono necessari $\frac{n}{2}$ scambi.

4. Scambi Totali:

- Per riorganizzare tutti i boccali per le ragazze e i ragazzi, sono necessari almeno $\frac{n}{2}$ scambi per ogni ragazza e ogni ragazzo.
- Scambi totali: $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}$.

Quindi, $\Omega(n^2)$ scambi sono necessari nel caso peggiore.

Combinando entrambe le prove, possiamo concludere che $O(n^2)$ scambi sono sufficienti e necessari per riordinare le pinte nello scenario dato.

3 Algoritmo

```
function GUINNESSORT( $P, B$ )  
   $i \leftarrow 0$   
   $numScambi \leftarrow 0$   
   $persone \leftarrow \text{LEN}(P)$   
  while  $i < persone$  do  
    if ( $P[i] = \text{'M'}$  and  $B[i] = \text{'B'}$ ) or ( $P[i] = \text{'F'}$  and  $B[i] = \text{'A'}$ ) then  
       $i \leftarrow i + 1$   
    else  
       $j \leftarrow i$   
      if  $P[i] = \text{'M'}$  then  
        while  $B[j] \neq \text{'B'}$  do  
           $j \leftarrow j + 1$   
          SCAMBIA( $B[j], B[j - 1]$ )  
           $numScambi \leftarrow numScambi + 1$   
      else  
        while  $B[j] \neq \text{'A'}$  do  
           $j \leftarrow j + 1$   
          SCAMBIA( $B[j], B[j - 1]$ )  
           $numScambi \leftarrow numScambi + 1$   
  return  $B, numScambi$ 
```