PROGRAMMAZIONE LINEARE

Un problema di PL si può scrivere come: $\min_{x \in P} z(x) = c^T x$

dove $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un POLIEDRO definito come un insieme di soluzioni di un sistema di equazioni e disequazioni lineari. P corrisponde alla regione ammissibile del problema di PL

Se $\exists\, x^* \in P$ t.c. $\forall x \in P$ $c^T x^* \leq c^T x$ allora il problema ammette soluzione ottima. $z(x^*) = z^* = c^T x^*$

Se $P = \emptyset$ allora il problema è INAMMISSIBILE e non ammette soluzione ottima

Se $\forall x \in P$ $\exists\, \hat{x}$ t.c. $c^T \hat{x} < c^T x$ allora il problema è ILLIMITATO INFERIORMENTE.

Un problema di PL è in forma STANDARD $\Leftrightarrow$:
- F.O. di min
- VARIABILI positive o nulle (sostituendo quelle libere o negative)
- VINCOLI sono equazioni: $+S_i$ (SLACK) se $\leq$; $-S_i$ (SURPLUS) se $\geq$
- i TERMINI NOTI sono ≥ 0

Un problema di PL in F.S. ammette soluzione ottima $\Leftrightarrow$ ha almeno una SBA ottima

PROBLEMA DUALE

Dato un problema di PL in forma standard $\min z(x) = c^T x$
s.v. $Ax = b$, $x \geq 0$

ogni soluzione ammissibile $\bar{x}$ di (P) è tale che $c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$ dove $\bar{y}$ è una qualsiasi soluzione ammissibile del D di PL: $\max w(y) = b^T y$
s.v. $A^T y \leq c$

Considerando una qualsiasi $\bar{y}$ di D abbiamo che $c^T \geq \bar{y}^T A$

Per una qualsiasi soluzione ammissibile $\bar{x}$ di P $A\bar{x} = b$ e $\bar{x} \geq 0$ si ottiene $c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T A \bar{x} = \bar{y}^T b$

Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile del P-D e $\bar{y}$ una soluzione ammissibile del problema duale. Se $c^T \bar{x} = b^T y$ allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per i rispettivi problemi

DUALITÀ FORTE

Una sol. ammissibile per il primale è ottima $\Leftrightarrow$ $\exists\, \bar{y}$ per il duale t.c. $c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ allora segue che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime del duale e del primale

COPPIA PRIMALE-DUALE

i problemi primale e duale ammettono, soluzioni ottime finite x^* e y^* t.c. $c^T x^* = b^T y^*$

il primale è illimitato inferiormente e il duale è inammissibile

il duale è illimitato superiormente e il primale è inammissibi

Due vettori $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime per il problema primale e per il duale $\Leftrightarrow$ soddisfano:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} A\bar{x}=b \\ \bar{x}\geq 0 \end{array}\right\} \text{AMMISSIBILITÀ PRIMALE} \\ A^T\bar{y}\leq c \quad \text{AMMISSIBILITÀ DUALE} \\ c^T\bar{x}=b^T\bar{y} \quad \text{CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ} \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un problema di PL in forma standard sia ammissibile è che sia nullo il valore ottimo della funzione obiettivo del problema artificiale associato a P.

DEF.

Si chiama soluzione di base AMMISSIBILE (SBA) un vettore che

1. è ammissibile
2. deve avere tante componenti positive quanti sono i vincoli problema e tutte le altre componenti nulle

La soluzione è detta DEGENERE se 1) è ammissibile

2) deve avere numero di componenti positive al più uguale al # di vincoli e avrà comp. nulla

PL FORMA STANDARD

- F.O. di min
- VARIABILI positive o nulle (sostituendo quelle libere o negative)
- VINCOLI sono equazioni $\begin{cases} +S_x \text{ (SLACK) se } \leq \\ -S_x \text{ (SURPLUS) se } \geq \end{cases}$
- i TERMINI NOTI sono ≥ 0

SIMPLESSO

Fai il tableau.

Cerchi il pivot con Bland $\min_{i : \bar{a}_{ij} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} \right\}$

La sol. è ottima quando sopra non ci sono più termini negativi.

TABELLA PRIMALE - DUALE

	PRIMALE - DUALE		
	MIN	MAX	
VINCOLI	$\geq, \leq$	$\geq, \leq$	VARIABILI
VARIABILI	$\geq, \leq$	$\leq, \geq$	VINCOLI

	PRIMALE - DUALE		
	MAX	- MIN	
VINCOLI	$\geq, \leq$	$\leq, \geq$	VARIABILI
VARIABILI	$\geq, \leq$	$\geq, \leq$	VINCOLI

PROGRAMMAZIONE LINEARE

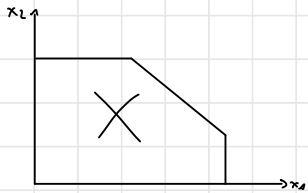
min / max $f(x)$ FUNZIONE OBIETTIVO

VINCOLI $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$

DECISIONE

CAMPO AMMISSIBILE

$\bar{x} \in X$ t.c. $f(\bar{x}) \underset{min}{\leq} f(x)$, $f(\bar{x}) \underset{max}{\geq} f(x)$ $\forall x \in X$



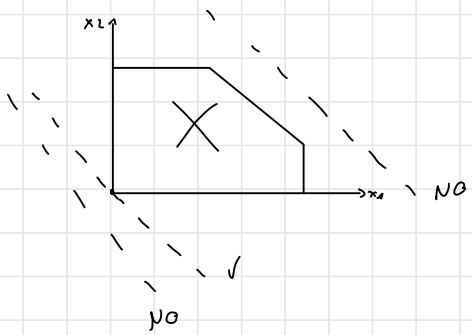
$f(x) = c^T x$ = $2x_1 + x_2$ $\Rightarrow x_2 = f(x) - 2x_1 \Rightarrow x_2 = \underbrace{-2x_1}_{mx} + \underbrace{f(x_1,x_2)}_{q}$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

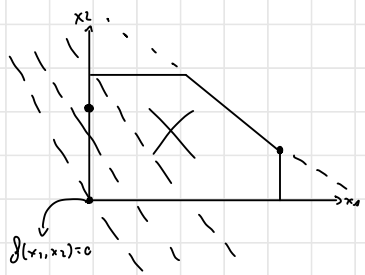
$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ $c = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

FASCIO DI RETTE // PERCHÉ Q VARIA

Dal fascio di rette se voglio minimizzare devo cercare quella col più piccolo valore di q, che tocca la X altrimenti il problema NON è ammissibile



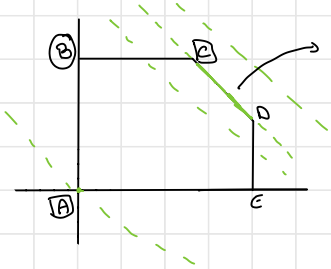
Consideriamo $f(x) = 2x_1 - x_2 \Rightarrow x_2 = 2x_1 - f(x_1, x_2) \Rightarrow x_2 = mx + q$



$\min f(x_1, x_2) = -q$

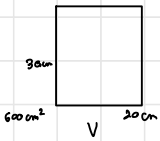
Nel punto sopra $f(x_1, x_2) = -\oplus < 0$ quindi è < di 0 e diventa la scelta ottima

In una PL che ammette soluzione, almeno uno dei punti sta sui vertici di X (KLEE MINTY)



- STEP 0 (INIZIALIZZAZIONE) ⟶ Scegli un vertice della regione ammissibile
- STEP 1 (CRITERIO D'ARRESTO) ⟶ il vertice corrente è ottimo?
  - YES ↓ STOP
  - NO ↓ STEP 2 (CAMBIARE IL VERTICE CORRENTE CON UNO NON VISITATO)

PROBLEMA DELLO ZAINO:



$w_1, w_2, \dots, w_n$

$o_1, o_2, \dots, o_n$

$s_1, s_2, \dots, s_n$

$V < \sum_{i=1}^{n} s_i$

Ogni oggetto ha un importanza (peso) pari a w_i

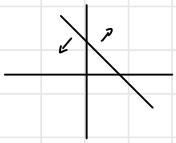
Ad esempio uno sporadino (o_1) di $s = 1\,cm^2$ ha un importanza (w) di 10

Per $n = 70$ ho 2^{70} combinazioni

Come faccio a scegliere il prossimo vertice per evitare certamente quelli inutili.

Partendo da B non ha senso scegliere come prossimi nodi D o E

LINEARE $\min \underline{f(x)} = c^T x$



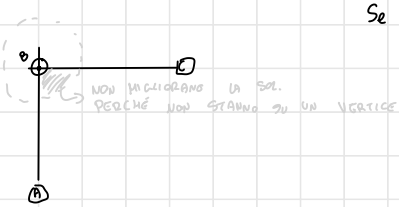
2 semipiani. Convesso.

Problema di ottimizzazione convesso.

Nel convesso i minimi locali sono anche minimi globali.

Se B è un minimo locale posso scartare D ed E.

Se dimostro che B è un minimo locale ho anche la soluzione al problema perché c'è convessità



Se B non ha vertici adiacenti migliorativi mi fermo

Come si calcola il vertice iniziale?

PROBLEMA $\min c^T x$

$Ax \le b$, $x \ge 0$

$c = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\min \; 2x_1 - x_2$

$x_1 + x_2 \le 2$

$2x_1 - x_2 \le 4$

VINCOLI: $x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$

$\xrightarrow{\text{FORMA STANDARD}}$ $\min c^T x$, $Ax = b$, $x \ge 0$

Per risolvere $x_1 + x_2 \le 2$, $2x_1 - x_2 \le 4$ si prende il "resto"

$x_1 + x_2 + S_1 = 2$

$2x_1 - x_2 + S_2 = 4$

$x_1, x_2, S_1, S_2 \ge 0$

VARIABILI SLACK servono per bilanciare le disuguaglianze

Quindi la forma standard diventa

Se abbiamo $\ge$ metto $-S_1$

Quando c'è l'uguale S_1 non c'è.

Quando abbiamo una variabile libera $x_2 \overset{?}{=} x_2^+ - x_2^-$ $x_2^+ \ge 0$, $x_2^- \ge 0$

$\min \; 2x_1 + x_2^+ - x_2^-$

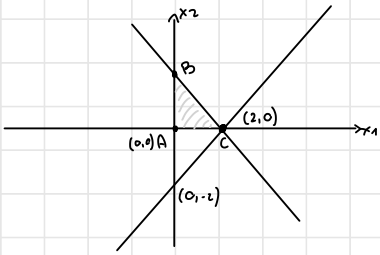
$x_1 - x_2^+ + x_2^- \le 2$

$2x_1 + x_2^+ - x_2^- \le 4$

VINCOLI: $x_1 \ge 0$ $x_2^+ \ge 0$ $x_2^- \ge 0$

$x_2 \ge x_1 - 2$

$x_2 \le -2x_1 + 4$



$\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \equiv A$ SBA

$\bar{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ NON È SBA

DEF.

Si chiama soluzione di base AMMISSIBILE (SBA) un vettore che

① è ammissibile

② deve avere tante componenti positive quanti sono i vincoli problema e tutte le altre componenti nulle

La soluzione è detta DEGENERE se 1) //

2) deve avere numero di componenti positive al più uguale al # di vincoli e avrà comp. nulla

4/12/2023

F.S PL
- CANONICA PER IL METODO DEL SIMPLESSO $\longrightarrow$ HO LA SOL INIZIALE (VERTICE)
- NON È CANONICA PER IL METODO DEL SIMPLESSO $\longrightarrow$ NON HO LA SOL INIZIALE

$\min \; 4x_1 - x_2$

$x_1 + 2x_2 \le 3$

$-x_1 + 4x_2 \le 4$

$x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$

$\min \; c^T x$

$Ax = b$

$x \ge 0$

$\begin{cases} x = x^+ + x^- \\ x^+ \ge 0 \\ x^- \ge 0 \end{cases}$

$\min \; 4x_1 - x_2$

$x_1 + 2x_2 + S_1 = 3$

$-x_1 + 4x + S_2 = 4$

$x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$

FS

SLACK

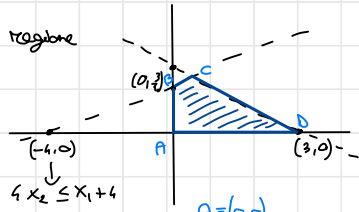
SURPLUS

SBA $\quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ NO AMMIS $\quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Vettore ammissibile

SBA $\longrightarrow$ Vertice della regione ammissibile

$2x_2 \le -x_1 + 3$

$x_2 \le -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}$



$4x_2 \le x_1 + 4$

$A \equiv (0,0)$

$B \equiv (0,1)$

$D \equiv (3,0)$

$C \equiv \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right)$

Deve soddisfare tutte le equazioni la soluzione

Ricorda che SA $\rightarrow$ SBA ✗

SBA $\longrightarrow$ SA ✓

Tante variabili positive quanti i vincoli di uguaglianza

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

$\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ è ammissibile

Vediamo se è di base 2 vincoli $\rightarrow$ 2 var positive

Chiamiamo $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_N \\ x_B \end{bmatrix}$ $\quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad x_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$

$Ax \longrightarrow Bx_B + Nx_N$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}}_{x_B}$$

$$\begin{matrix} x_1 + 2x_2 + s_1 \\ -x_1 + 4x_2 + s_2 \end{matrix} = \begin{matrix} x_1 + 2x_2 + s_1 \\ -x_1 + 4x_2 + s_2 \end{matrix}$$

Supponiamo di avere una SBA $\hat{x}$

$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \end{bmatrix}$

$x_B = B^{-1} b$

$B^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}^{b} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/6 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_B \\ \\ x_N \end{matrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} B^{-1} = B \\ I^{-1} = I \end{matrix} \qquad x_B = Ib = b$$

$A \rightarrow (s_1, s_2) \rightarrow (s_1, s_2)$?

$B \rightarrow (?, x_2)$

$C \rightarrow (x_1, x_2)$

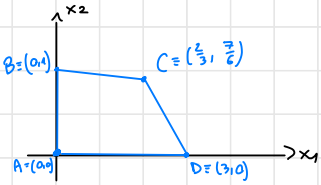
$D \rightarrow (x_1, ?)$? $\hookrightarrow (s_1, s_2)$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$$x_B = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow x_1 = 0 \\ \rightarrow s_1 \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad x_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

5/12/2023



$$\min\ 4x_1 - x_2 \qquad x_1 + 2x_2 \le 3 \qquad -x_1 + 4x_2 \le 4 \qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$\underbrace{\begin{aligned} &\min\ 4x_1 - x_2 \\ &x_1 + 2x_2 + s_1 = 3 \\ &-x_1 + 4x_2 + s_2 = 4 \\ &x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0 \end{aligned}}_{\text{FORMA STANDARD}} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

TABLEU DEL SIMPLESSO

1 2

$-f(\bar{x})$	c^T
b	A

3 4

A → MATRICE DEI COEFFICENTI

		x_1	x_2	s_1	s_2
	0	4	-1	0	0
s_1	3	1	2	1	0
s_2	4	-1	4	0	1

→ PIVOT

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (da min)}$$

x_2 ha un coeff negativo (-1) per cui favorito ad entrare in base

x_1 ha coeff pari a 4 quindi non favorito ad entrare

Tra D e B quindi è favorito B → VERTICE MIGLIORATIVO x_2 sarà la nuova variabile base all'iterazione 1 → VARIABILE ENTRANTE IN BASE

Se non ho valori negativi mi fermo

Se ho più valori negativi devo conoscere il valore con cui x_1 o x_2 entrano in base, ma ciò mi costa

Generalmente si prende quella più negativa

Se ho uno zero sono già in un parametro ottimo

Se è un problema di massimo si guarda il valore più alto

$\min f(x) = -\max -f(x)$

$\max f(x) = \min -f(x)$

Vediamo i valori di x_2

$(s_1 = 0) \quad 0x_1 + 2x_2 + s_1 = 3 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}$

$(s_2 = 0) \quad -0x_1 + 4x_2 + s_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1$

Il RATIO TEST è calcolabile solo quando c'è almeno una frazione non negativa. Prendo il più piccolo

$\min\left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{4}\right\}$

	x_1	x_2	s_1	s_2
1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
$s_1 = 3$	1	0	1	$-\frac{1}{2}$
$x_2 = 1$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$

OK PIVOT

$$\hat{x} = x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1 se è in base
0 altrimenti

Questo è detto METODO DEL SIMPLESSO

Quando il RATIO TEST non è calcolabile il problema è limitato inferiormente

$\min \quad 4x_1 - x_2$

$x_1 - 2x_2 = 3$

$-x_1 - 4x_2 = 4$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

NON CI SONO LE BASI CANONICHE
NO FORMA STANDARD

$\min \quad 4x_1 - x_2$

$x_1 - 2x_2 \leq 3$

$-x_1 - 4x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

$x_1 - 2x_2 + s_1 = 3$

$-x_1 - 4x_2 - s_2 + a = 4$

QUELLO CHE CI MANCA PER SODDISFARE L'EQ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

NO FORMA STANDARD.

NO BASE CANONICA

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & s_1 & a \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

così ho la base canonica

Ho preso "a" per farla entrare in base e ora devo farla uscire fuori

$\min \quad a$

$x_1 - 2x_2 + s_1 = 3$

$-x_1 - 4x_2 - s_2 + a = 4$

$x_1, x_2, s_1, s_2, a \geq 0$

$a = 0$ → OK

$a > 0$

Se non trovo alcun $a = 0$ il problema è vuoto

12/12/2023

PROBLEMA FORMA GENERALE

$$\min \; -3x_1 + 4x_2$$
$$-x_1 + 7x_2 \geq 1$$
$$2x_1 - x_2 \geq 2$$
$$x_1 \leq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$\longrightarrow$

$$X = \begin{cases} \min \; 3\bar{x}_1 + 4x_2 \\ \bar{x}_1 + 7x_2 - s_1 = 1 \quad + a_1 \\ -2\bar{x}_1 - x_2 - s_2 = 2 \quad + a_2 \\ \bar{x}_1 = -x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ s_1 \geq 0, \quad s_2 \geq 0, \quad a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} b$$
$$x_B = I^{-1} b = Ib = \underline{b}$$

$$\min \; c^T x \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

VARIABILI ARTIFICIALI

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} & & & & a_1 & a_2 \\ \hline 1 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\min \; a_1 + a_2$$
$$a_1, a_2 \in X$$

		$\bar{x}_1$	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
R_1		0	0	0	0	1	1
R_2	$a_1 = 1$	1	7	-1	0	1	0
R_3	$a_2 = 2$	-2	-1	0	-1	0	1

$R_1 - (R_2 + R_3)$

	$\bar{x}_1$	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
-3	1	-6	1	1	0	0
1	1	7	-1	0	1	0
2	-2	-1	0	-1	0	1

$c_B^T = 0$

B

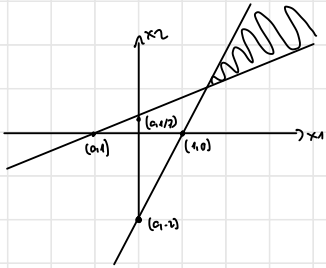
$$x_{SBA}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\min \left\{ \frac{1}{7}, \frac{2}{7} \right\} = \frac{1}{7}$$

		$\bar{x}_1$	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
	$-\frac{15}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{6}{7}$	0
$x_2 =$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0
$a_2 =$	$\frac{15}{7}$	$-\frac{13}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	-1	$\frac{1}{7}$	1

$$x_{SBA}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{7} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix} \qquad f\left(x_{SBA}^{(1)}\right) = \frac{15}{7} > 0$$

Il problema di partenza è un problema vuota



$7x_2 \geq x_1 + 1$

$x_2 \geq \frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{7}$

$x_2 \leq 2x_1 - 2$

$\min\ c'x$

$Ax = b$

$x \geq 0$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} -1 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
	0	0	0	0	1	1
$a_1 =$	-1	7	-1	0	1	0
$a_2 = 2$	2	-1	0	-1	0	1

$$x^{(0)}_{SBA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$R_1 - (R_2 + R_3)$

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
-3	-1	-6	1	1	0	0
$a_1 =$	-1	7	-1	0	1	0
$a_2 = 2$	2	-1	0	-1	0	1

POSSO ANCORA RATIO TEST PERCHÉ < 0

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
$-\frac{15}{7}$	$-\frac{15}{7}$	0	1/7	1	6/7	0
$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0
$\frac{15}{7}$	$\frac{13}{2}$	0	$-\frac{1}{7}$	-1	$\frac{1}{7}$	1

$$x^{(1)}_{SBA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15/7 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to \frac{R_3}{\frac{13}{7}}$

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2
0	0	0	0	0	1	1
$x_2 = \frac{5}{13}$	0	1	$-\frac{2}{13}$	$-\frac{1}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$
$x_1 = \frac{15}{13}$	1	0	$-\frac{1}{13}$	$-\frac{7}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{7}{13}$

14/12/2023

DUALITÀ

P_1

$\min\ c^T x$

$Ax = b \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$x \geq 0$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$

$x \in \mathbb{R}^m \quad b \in \mathbb{R}^m, \ A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

P_2

$\max\ c^T x$

$Ax = b \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

$x \leq 0$

D_1

$\max\ b^T \cdot y$

$A^T y \quad c$

$y \leq 0$

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

$y \in \mathbb{R}^m$

D_2

$\min\ b^T \cdot y$

$A^T y \quad c$

$y \in \mathbb{R}^m$

P_1

$\min\ x_1 + 2x_2$

$(y_1)\ 2x_1 - x_2 \leq 8$

$(y_2)\ x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{4}$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$b \in \mathbb{R}^2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 1/4 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

P_2

$\max\ x_1 - x_2 + x_3$

$(y_1)\ x_1 + x_2 - x_3 = 4$

$(y_2)\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$

$x_1 \leq 0, \ x_2 \leq 0, \ x_3 \leq 0$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

D_1

$\max\ 8y_1 + \frac{1}{4} y_2$

$x_1\ \ 2y_1 + y_2 \leq 1$

$x_2\ \ -y_1 + 3y_2 \leq 2$

$y_1 \leq 0$

$y_2 \leq 0$

$y \in \mathbb{R}^2$

$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

D_2

$\min\ 4y_1 + 5y_2$

$x_1\ \ y_1 + 2y_2 \leq 1$

$x_2\ \ y_1 - y_2 \leq -1$

$x_3\ \ -y_1 + 4y_2 \leq 1$

$y_1 \in \mathbb{R}$

y_2

$y \in \mathbb{R}^2$

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

I vincoli primari incidono sulle variabili duali: il segno segue la tabella:

min $\leq$	$\longrightarrow$	$\leq$	} ANTICANONICO
min $\geq$	$\longrightarrow$	$\geq$	} CANONICI
max $\leq$	$\longrightarrow$	$\geq$	} CANONICI
max $\geq$	$\longrightarrow$	$\leq$	} ANTICANONICO

$P \longleftrightarrow D$

$D \longleftrightarrow P$

PFC

$\min\ c^T x$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

PFS

$\min\ c^T x$

$Ax + I s = b$

$x, s \geq 0$

FORMA CANONICA

$\uparrow$

PFC

$\min c^T x$, $Ax \geq b$, $x \geq 0$

$\max c^T x$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$

(P) — (D)

① TEOREMA DUALITÀ DEBOLE

Data (P) - (D), $\forall \bar{x} \in X$ (regione ammissibile (P)) $\left(\text{ESEMPIO} \ \min c^T x, \ Ax \geq b, \ x \geq 0 \right)$ e $\forall\ \bar{y} \in Y \equiv \left(\text{ESEMPIO} \ \max b^T y, \ A^T y \leq c, \ y \geq 0 \right)$

↳ regione ammissibile D

$(\min^{(P)})\ c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y}$

$(\max^{(P)})\ c^T \bar{x} \leq b^T \bar{y}$

② TEOREMA DELLA DUALITÀ FORTE

Data (P)-(D), data x^* sol. ottima (P) $\wedge$ y^* sol. ottima di (D) $\quad c^T x^* = b^T y^*$

21/12/2023

P_1

$$\min \quad 3x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 4$$

$$-2x_1 + x_2 \le 1$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

1° STEP: SCRIVERE LA FORMA STANDARD

DOMANDA ORALE

Perché sia il problema del simplesso che quello duale lo standardizziamo? Perché in entrambi cerchiamo una base canonica.

P_2 (P)

$$\min \quad 3x_1 - 2x_2$$

$$x_1 + x_2 + \underset{x_3}{S_1} = 4$$

$$-2x_1 + x_2 + \underset{x_4}{S_2} = 1$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad S_1 \ge 0, \quad S_2 \ge 0$$

S.P. → SLACK

$$\begin{cases} \bar{x} \cdot \bar{S_d} = 0 \\ \bar{y} \cdot \bar{S_p} = 0 \end{cases} \checkmark$$

$$\min \quad c^T \bar{x}$$
$$A\bar{x} = b$$
$$\bar{x} \ge 0$$

$$S_{P_1} = \begin{bmatrix} 4 - \bar{x_1} - \bar{x_2} \\ 1 + 2\bar{x_1} - \bar{x_2} \end{bmatrix}$$

$$S_{P_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↳ L'S_p di un problema in forma standard è pari a 0.

(D)

$$\max \quad 4y_1 + y_2$$

x_1) $y_1 - 2y_2 \ge 3$

x_2) $y_1 + y_2 \le -2$

x_3) $y_1 \le 0$

x_4) $y_2 \le 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{S_d} = \begin{bmatrix} 3 - \bar{y_1} + 2\bar{y_2} \\ -2 - \bar{y_1} + \bar{y_2} \\ 0 - \bar{y_1} \\ 0 - \bar{y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ge 0 \\ 0 \\ \ge 0 \end{bmatrix}$$

→ il prodotto tra $\bar{x}$ e $\bar{S_d}$ deve essere = a 0. Dove ho componenti in $\bar{S_d}$ metto 0

x_1 e x_3 spariscono perché non ci sono in $\bar{x}$.

$$\min \quad -2x_2$$
$$x_2 = 4$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_2 \ge 0, \quad x_4 \ge 0$$

PRIMALE RISTRETTO

↳ $\min \quad a_1 + a_2$

$$x_2 + a_1 = 4$$
$$x_2 + x_4 = 1$$
$$x_2, x_4, a_1, a_2 \ge 0$$

0 → STOP $(\bar{x}, \bar{y})$ sono ottime per (P) − (D)

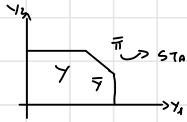
> 0 − $\bar{y}$ non è ottima perché $\bar{x}$ non è ammissibile nella forma definita

↓ CAMBIARE $\bar{y}$

$\bar{y} = \bar{y} + \theta + \pi$ → VETTORE

↳ SCALARE

$\bar{\pi}$ è la soluzione ottima di (D.R.)
↳ duale ristretto.



$\bar{\pi}$ ↳ STA FUORI PERCHÉ NON È AMMISS

8/01/2024

ESERCIZI PREPARAZIONE ESAME

$$\min \quad 5x_1 - x_2 + x_3$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 \geq \frac{1}{2}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è SBA?

$\bar{x}$ è AMMISSIBILE perché soddisfa i vincoli.

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + S_1 = 3$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 - S_1 = \frac{1}{2}$$
$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ 3 comp. positive 2 vincoli

$3 \overset{?}{\leq} 2$

NON è SBA

CNS affinché $\bar{x}$ sia ottimo è che ammetta un vettore complementare ammissibile.

$\hookrightarrow (\bar{y}^T \cdot S_p = 0, \ \bar{x}^T \cdot \bar{S_d} = 0)$

$$\bar{x}^T \cdot \bar{S_d} = 0$$
$$\bar{x}_i \cdot \bar{S_{d_i}} = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots m\} \quad x \in \mathbb{R}^m$$

$\hookrightarrow$ VARIABILI

(D) $\max \quad 3y_1 + \frac{1}{2} y_2$

x_1) $y_1 - y_2 \leq 5$

x_2) $2y_1 - y_2 \leq -1$

x_3) $-y_1 + y_2 \leq 1$

$y_1 \leq 0$

$y_2 \geq 0$

$$\begin{cases} -y_1^* + y_2^* = 1 \\ y_1^* \bar{S_{p_1}} + \bar{y_2}^* S_{p_2} = 0 \end{cases}$$

(3ª CONDIZ)

$4y_1^* + \frac{1}{2} y_2^* = 0$

$$\begin{cases} y_1^* = -\frac{1}{9} \\ y_2^* = \frac{8}{9} \end{cases}$$

CNS ottimalità

$\bar{x}, \bar{y}$ ottime per (P) - (D)

a) $\bar{x}$ ammissibile

b) $\bar{y}$ ammissibile

c) $\bar{x}^T \bar{S_d} = 0$

d) $\bar{y}^T \bar{S_p} = 0$

RISOLVIAMO CON SIMPLESSO $\longrightarrow$ $\min\ a_2$

$x_1 + 2x_2 - x_3 + s_1 = 3$

$-x_1 - x_2 + x_3 - s_2 + a_2 = \frac{1}{2}$

TUTTE ≥ 0

		x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	a_2
	$-\frac{1}{2}$	1	1	-1	0	1	0
s_1	3	1	2	-1	1	0	0
a_2	$\frac{1}{2}$	-1	-1	1	0	-1	1

	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	
	0	0	0	0	0	0	a_2
s_1	$\frac{7}{2}$	0	1	0	1	-1	1
x_3	$\frac{1}{2}$	-1	-1	1	0	-1	1

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

9/01/2024

$\max\ \alpha x_1 - x_2$

$y_1)\ -x_1 - 3x_2 \geq -1$

$y_2)\ -x_1 + 7x_2 \geq 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\max\ -y_1 + 2y_2$

$-y_1 - y_2 \leq -\alpha$

$-3y_1 + y_2 \leq 1$

$y_1, y_2 \geq 0$

$$\bar{s}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to s_1 \\ \to s_2 \end{matrix}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} \qquad \bar{s}_d = \begin{pmatrix} -\alpha + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \\ 1 + 3\bar{y}_1 - 7\bar{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 3\bar{y}_1 - 7\bar{y}_2 = 0 \\ \bar{y} \cdot \bar{s}_p = 0 \\ \bar{y}_2 = 0 \end{cases} \qquad (\bar{x}_2 \cdot \bar{s}_{d_2} = 0)$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

VETTORE DUALE COMPLEMENTARE

$-\frac{1}{3} \leq 0$ quindi viola $y_1 \geq 0$

$\nexists$ valori di α

Supponiamo che la sol. fosse stata $\hat{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq -\alpha \qquad \alpha \leq \frac{1}{3}$

$\max\ 2x_1 + x_2$

$y_1)\ -x_1 - 3x_2 \geq \alpha$

$y_2)\ -x_1 + 7x_2 \geq 2$

$\max\ 2y_1 + y_2$

$-y_1 - y_2 \leq 2$

$-3y_1 + y_2 \leq 1$

$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$

$\alpha \leq -1$ per sol. ammissibile $\quad 0 \cdot -3\left(\frac{1}{3}\right) \geq \alpha \Rightarrow \alpha \leq -1$

$-x_1 - 3x_2 - s_1 = \alpha \Rightarrow s_1 = -1 - \alpha$

$s_2 = \frac{1}{3}$

$$\bar{s}_p = \begin{pmatrix} -1 - \alpha \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad -1 - \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq -1$$

$$\bar{s}_d = \begin{pmatrix} 2 + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 \\ 1 + 3\bar{y}_1 + \bar{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 3\bar{y}_1 - 7\bar{y}_2 = 0 \\ \bar{y} \cdot \bar{s}_p = 0 \\ (-1 - \alpha)\,\bar{y}_1 = 0 \\ 1/3 \cdot \bar{y}_2 = 0 \Rightarrow \bar{y}_2 = 0 \end{cases} \qquad (\bar{x}_1 \cdot \bar{s}_{d_1} = 0)$$

$\alpha = -1$: $\bar{y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -\frac{1}{3} \geq 0$ NO

$\alpha < -1$: $\to$ MAI $\quad 1 = 0$

3° CASO

$$\min\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad \max\ \tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2$$

$$-x_1 + \alpha x_2 \geq \tfrac{1}{2} \qquad\qquad -y_1 - y_2 \leq 2$$

$$-x_1 + 7x_2 \geq 2 \qquad\qquad \alpha y_1 + y_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad\qquad y_1, y_2 \geq 0$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$S_1 = \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} \qquad S_p = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \bar{S_d} = \begin{pmatrix} 2 + \bar{y_1} + \bar{y_2} \\ 1 - \alpha\bar{y_1} + \bar{y_2} \end{pmatrix}$$

$$-x_1 + x_2 - S_2 = 2$$

$$S_2 = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} 1 - \alpha\bar{y_1} - 7\bar{y_2} = 0 \\ \bar{y} \cdot \bar{S_p} = 0 \\ \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2}\right)\bar{y_1} = 0 \\ \frac{1}{3}\bar{y_2} = 0 \Rightarrow \bar{y_2} = 0 \end{cases}$$

2 CASI: • $\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

$1 - \frac{3}{2}y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{2}{3}$ $\qquad \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\frac{\alpha}{3} - \frac{1}{2} \neq 0 \rightarrow \alpha > \frac{3}{2}$

$-\frac{2}{3} - 0 \leq 2 \cup \frac{2}{3} \geq 0 \cup \frac{2}{3}\alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

$0 \geq 0$ OK

AMMISSIBILITÀ: $\alpha \geq \frac{3}{2}$

Risolviamo col simplesso

FS

$$\min\ 2x_1 + x_2$$

$$-x_1 + \alpha x_2 - S_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$-x_1 + 7x_2 - S_2 = 2$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ \alpha/3 - 1/2 \\ 11/3 \end{pmatrix}$$

TANTE COMP. POS QUANTE I VINCOLI

QUINDI $\rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$

$$\min\ c^T x \qquad\qquad \max\ (c + \alpha)^T \cdot y$$

$$Ax \leq c + \alpha \qquad\qquad A^T y \leq c$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad y \leq 0$$

Hip: Per $\alpha = 0$ ammette sol. ottima $(\exists x^*)$

$\exists\ \alpha > 0$ per cui il problema diventa illimitato?

P	D
$\exists x^*$	$\exists y^*$
ill	vuoto
vuoto	ill / vuoto

$$c^T x \qquad\qquad c^T x$$

$$Ax \leq c \qquad \text{ammette } x^* \qquad Ax \leq 0 < c + \alpha$$

$$x \geq 0 \qquad \text{aggiungo } \alpha \qquad x \geq 0$$

ammette sol. anche se non più ottima

$\rightarrow$ NON è mai vuoto $\Rightarrow$ D non può essere illimitata

ESERCIZIO

$\min f(x) \quad ax_1 + bx_2 + cx_3$

$x_2 + 3x_3 \leq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$

$x_1 - 5x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ trova f.o. da minimizzare

(D)

$\max \; 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$

$y_2 + y_3 \leq b$

$y_1 + y_2 \leq \beta$

$3y_1 - y_2 - 5y_3 \leq \gamma$

$y_1 \leq c, \; y_2 \leq c, \; y_3 \leq c$

$\bar{S_p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{S_d} = \begin{pmatrix} \alpha - \bar{y_2} - \bar{y_3} \\ \beta - \bar{y_1} - \bar{y_2} \\ \gamma - 3\bar{y_1} - \bar{y_2} + 5\bar{y_3} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha - \bar{y_2} - \bar{y_3} = 0 & \Rightarrow \alpha = y_2 \\ \beta - \bar{y_1} - \bar{y_2} = 0 & \Rightarrow y_1 = \beta - \alpha \\ \bar{y_3} = 0 \end{cases}$$

$\bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y_1} \\ \bar{y_2} \\ \bar{y_3} \end{pmatrix} \begin{matrix} \beta - \alpha \leq 0 \\ \alpha \leq 0 \\ = 0 \end{matrix}$

$3\beta - 3\alpha + \alpha \leq \gamma$

$3\beta - 2\alpha \leq \gamma$

$\alpha \leq 0$

$\beta - \alpha \leq 0$

$$\left.\begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = -1 \end{matrix}\right\} -\alpha - \beta - \gamma$$

11/01/2024

(P)

$$\min \quad \alpha x_1 + x_2 - 3x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 4$$
$$x_2 - x_3 \ge \beta$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$\exists\, \alpha, b$ t.c. (P) é illimitato ?

F.S. $\min \alpha x_1 + x_2 - 3x_3$

$$2x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 4 \quad \Rightarrow -x_2 + x_3 + S_2 = -\beta = \beta'$$
$$x_2 + x_3 - S_2 = \beta$$
$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \ge 0$$

Caso A) $\beta \le 0$, $\beta' \ge 0$

0	α	1	-3	0	0
4	1	1	1	1	0
β'	0	-1	1	0	+1

$\beta' > 4$ così prendo 0 come pivot

12	$3+\alpha$	4	0	3	0
4	1	1	1	1	0
$\beta'-4$	-1	-2	0	-1	1

$3+\alpha < 0 \Rightarrow \alpha < -3$

per $\alpha < -3$

-4α	0	$1-\alpha$	$-(3+\alpha)$	$-\alpha$	0
4	1	1	1	1	0
β'_1	0	-1	1	0	1

→ tutti valori >0 STOP.

Considero ora il caso $-4 < \beta \le 0$

0	α	1	-3	0	0
4	1	1	1	1	0
β'	0	-1	1	0	+1

$3\beta'$	α	-2	0	0	3
$4-\beta$	1	2	0	1	-1
β'	0	-1	1	0	+1

$1+\alpha < 0 \Rightarrow \alpha < -1$

$4+2\beta'$	$1+\alpha$	0	0	1	2
$\frac{4-\beta}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2+\beta}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$(4+2\beta')-(1+\alpha)(4-\beta)$	0	$-2(1+\alpha)$	0	$-\alpha$	$3+\alpha$
$4-\beta'$	1	2	0	1	-1
β'	0	-1	1	0	1

→ può essere negativo $\alpha < -3$

Risolviamo col duale

$$\max \; 4y_1 + \beta y_2$$
$$y_1 \le \alpha$$
$$y_1 + y_2 \le 1$$
$$y_1 - y_2 \le -3$$
$$y_1 \le 0 \qquad y_2 \ge 0$$

$$\max \; -4\bar{y}_1 + \beta y_2$$
$$-\bar{y}_1 + S_1 = \alpha$$
$$-\bar{y}_1 + y_2 + S_2 = 1$$
$$\bar{y}_1 + y_2 - S_3 + a_3 = 3$$
$$\bar{y}_1, y_2, S_1, S_2, a_3 \ge 0$$

$$\min \; a_3$$
$$\bar{y}_1 - S_1 = \alpha$$
$$-\bar{y}_1 + y_2 + S_2 = 1$$
$$\bar{y}_1 + y_2 - S_3 + a_3 = 3$$

$\alpha \ge 0$

		$\bar{y}_1$	y_2	S_1	S_2	S_3	a_3
	-3	-1	-1	0	0	1	0
	0	0	0	0	0	0	1
S_1	α	-1	0	1	0	0	0
S_2	1	-1	1	0	1	0	0
a_3	3	1	1	0	0	-1	1

0	0	0	0	0	0	1
$\alpha+3$	0	1	1	0	-1	1
4	0	2	2	1	-1	1
3	1	1	1	0	-1	1

Duale vuoto $\Rightarrow$ primale illimitato.

CASO $\alpha < 0$ $\quad \alpha' = -\alpha$

min $a_3 + a_1$

$\bar{y}_1 - s_1 + a_1 = \alpha'$

$-\bar{y}_1 + y_2 + s_2 = 1$

$\bar{y}_1 + y_2 - s_3 + a_3 = 3$

	$\bar{y}_1$	y_2	s_1	s_2	s_3	a_1	a_3
$-3-\alpha'$	-2	-1	1	0	1	0	0
α'	1	0	-1	0	0	1	0
1	-1	1	0	1	0	0	0
3	1	1	0	0	-1	0	1

	$-\alpha'$	-1	0	1	1	1	0	0
s_1	α'	1	0	-1	0	0	1	0
s_2	1	-1	1	0	1	0	0	0
y_2	2	2	0	0	-1	-1	0	1

$\alpha' \geq 1$

	$-\alpha'+1$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
a_1	$\alpha'-2$	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
y_2	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y_1	1	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

vuoto perché non ho tolto la var. artificiale

quindi il (P) è illimitato

(P)

$$\min \quad x_1 + x_2$$
$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\min \quad x_1 + x_2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

(D)

$$\max \quad y_1 + 4y_2$$
$$x_1) \quad y_1 - y_2 \le 1$$
$$x_2) \quad -y_1 + 2y_2 \le 1$$
$$x_3) \quad y_1 \le 0$$
$$x_4) \quad y_2 \le 0$$
$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

scelta a caso

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad s_d^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to x_1 = 0 \\ \to x_2 = 0 \\ \to x_3 \ge 0 \\ \to x_4 \ge 0 \end{matrix}$$

(PR) $\min \quad a_1 + a_2$

$$x_3 + a_1 = 1$$
$$x_4 + a_2 = 4$$
$$a_1, a_2, x_3, x_4 \ge 0$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scelgo un altro y. $y^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\min \quad a_1$

$$-x_2 + a_1 = 1$$
$$2x_2 + x_4 = 4$$
$$x_2, a_1, x_4 \ge 0$$
$$a_1 \ge 0$$

		x_2	x_4	a_1
	-1	1	0	0
a_1	1	-1	0	1
x_4	4	2	1	0

TABLEAU OTTIMO

f.o. POSITIVA.

DUALE RISTRETTO $\quad \max \quad \pi_1 + 4\pi_2$

$$x_2) \quad -\pi_1 + 2\pi_2 \le 0$$
$$a_1) \quad \pi_1 \le 1 \quad \Rightarrow \pi_1 = 1$$
$$x_4 \quad \pi_2 \le 0 \quad \Rightarrow \pi_2 = 0$$
$$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + \theta \pi^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$y^{(1)}(\theta) = \begin{pmatrix} -1+\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

sostituisco nel duale (i vincoli)

$$-1 + \theta \le 1 \Rightarrow \theta \le 2$$
$$1 - \theta \le 1 \Rightarrow \theta \ge 0$$
$$-1 + \theta \le 0 \to \theta \le 1$$
$$0 \le 0$$

$$0 \le \theta \le 1$$

prendo il val + grande

$$y^{(1)}(\overset{=1}{\theta}) = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

OTTIMA

$$\min \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}\right\} X$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Può esistere un LB (LOWER BOUND) di valore pari a 8?

$$8 \leq c^T x^*$$

$$c^T \bar{x} \geq b^T \bar{y} \quad \forall x \in X, \forall \bar{y} \in Y$$ (quando il problema è di min)

$$\max \quad 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$$

$$y = \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + \frac{1}{4}y_3 \leq -3 \\ -3y_2 - 2y_3 \leq 1 \\ y_1 \in \mathbb{R}, y_2 \geq 0, y_3 \leq 0 \end{cases} \longrightarrow$$

$$12y_1 + 2y_2 + 4y_3 = 8$$

SENZA ALGORITMI:

trovo il controesempio di $c^T\bar{x} \geq b^T\bar{y}$

$x^{(1)}$ $\quad 2 \cdot 4 + 2 = 10 > 8$ $\quad$ 8 VINCE

$x^{(2)}$ $\quad 2 - 3 \cdot \frac{9}{2} = -\frac{23}{2} < 8$ $\quad$ QUINDI 8 NON È UN L.B.

15/01/2024

$$\min \ \gamma x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 12 - \delta$$
$$4x_1 - x_2 - 3x_3 \ge 2$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \le 0, \ x_3 \ge 0$$

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\min \ \gamma x_1 + 3\overline{x_2} + x_3$$
$$3x_1 - 2\overline{x_2} \le 12 - \delta$$
$$4x_1 + \overline{x_2} - 3x_3 \ge 2$$
$$x_1 \ge 0, \ x_2 \le 0, \ x_3 \ge 0$$
$$\hookrightarrow \overline{x_2} \ge 0$$

1° COND. AMM: $\delta \le 9$ il pto è ammissibile

Ora trovo la compl. duale

$$\max \ (\delta - 12) y_1 + y_2$$
$$-3y_1 + 4y_2 \le \gamma$$
$$2y_1 + y_2 \le 3$$
$$-3y_2 \le 1$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

$$Sp^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 - \delta + 12 = 9 - \delta \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - \delta \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3y_1 + 4y_2 = \gamma \\ (9 - \delta) y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$\delta = 9$

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{\gamma}{3} \\ y_2 = 0 \\ \delta = 9 \end{cases} \qquad y = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{3} \\ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Da $y_1 \ge 0$ $\quad -\frac{\gamma}{3} \ge 0 \Rightarrow \gamma \le 0$

SOST. NEL 2° VINCOLO $\quad -\frac{2}{3}\gamma \le 3 \Rightarrow \gamma \ge -\frac{9}{2}$

$\delta = 9 \ \wedge \ -\frac{9}{2} \le \gamma \le 0$

$\delta < 9 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \gamma = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \qquad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \delta < 9 \\ \gamma = 0 \end{matrix} \quad \text{OK}$$

$\gamma = 0 \ \wedge \ \delta < 9$

$$\max \quad -4x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 10$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0$$

PORTA SEMPRE IN MIN

$$\min \quad 4x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$$
$$x_1 - 3\bar{x}_2 - x_4 = 10$$
$$x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - x_5 = 8$$
$$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(D)

$$\max \quad 10y_1 + 8y_2$$
$$y_1 + y_2 \leq 4$$
$$-3y_1 + y_2 \leq 3$$
$$4y_2 \leq 1$$
$$-y_1 \leq 0$$
$$-y_2 \leq 0$$
$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ↓ SCELTO IN MODO ARBITRARIO

$$S^{(0)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to x_1^{(0)} = 0 \\ \to x_2^{(0)} = 0 \\ \to x_3^{(0)} = 0 \\ \\ \\ \end{array}$$

(PA)

$$\min \quad a_1 + a_2$$
$$-x_4 + a_1 = 10$$
$$-x_5 + a_2 = 8$$
$$x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0$$

		x_4	x_5	a_1	a_2
	-18	1	1	0	0
$a_1 =$	10	-1	0	1	0
$a_2 =$	8	0	-1	0	1

$-18 \neq 0$ y NON è ottima

(DR)

$$\max \quad 10\pi_1 + 8\pi_2$$
$$x_4) \quad -\pi_1 \leq 0$$
$$x_5) \quad -\pi_2 \leq 0$$
$$a_1) \quad \pi_1 \leq 1 \to \pi_1^*$$
$$a_2) \quad \pi_2 \leq 1 \to \pi_2^*$$
$$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$$

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta \\ \vartheta \end{pmatrix}$$

↳ SOSTITUISCO NEL DUALE

$$2\vartheta \leq 4$$
$$-2\vartheta \leq 3$$
$$4\vartheta \leq 1$$
$$-\vartheta \leq 0$$
$$-\vartheta \leq 0$$

$\Rightarrow 0 \leq \vartheta \leq \frac{1}{4}$

↳ MASSIMIZZO

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

18/01/2024

min $2x_1 + x_2 - 2x_3$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 8$

$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 6$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{26}{7} \\ x_2 = \frac{10}{7} \end{cases}$$

VERTICE → SBA

$x_1, x_2 > 0$?

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_B = B^{-1} b \geq 0$ $\qquad B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$

$x_1 \in \mathbb{R}$ $\qquad x_1 = x_1^+ - x_1^-$

$x_1^+ \geq 0$

$x_1^- \geq 0$

- può entrare SBA OTTIMA x_1 E x_3 IN BASE

$x_1, x_3 > 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{11}{7} \\ x_3 = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

NO SBA.

$\Rightarrow$ sol. OTTIMA CON $x_1, x_2 > 0$

max $-3y_1 + 6y_2$

$-y_1 + 2y_2 \leq 2$

$-3y_1 - y_2 \leq 1$

$2y_1 + 4y_3 \leq -2$

$y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 = 2 \\ -3y_1 - y_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = -\frac{4}{7} \end{cases}$$

NON VA BENE

CALCOLA UP E LB (DOMANDA CHIESTA)

Qualunque sol. ammissibile è un UB perché è un problema di minimo

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ è amm. UB : $2x_1 + x_2 - 2x_3 = -4$

DUALE VUOTO LB N.C.

13/02/2021

min → UP
max → LB

max $x_1 + \beta x_2 + 2x_3$

$x_1 + x_3 \geq -1$

$x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 \geq -2$

$x_1 \leq 0 \quad x_2, x_3 \geq 0$

$\frac{\alpha}{\beta}$? $\quad LB = 3$

x_1, x_2 in base

$-\bar{x}_1 + \cancel{x_3} - \cancel{s_1} = -1$

$-\bar{x}_1 + \alpha x_2 - \cancel{2x_3} - \cancel{s_2} = -2$

$$\begin{cases} x_1 + \beta x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 \geq -1 \\ x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ \alpha x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + \beta x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 \geq -1 \\ x_1 + \alpha x_2 - 2x_3 \geq -2 \\ x_1 \leq 0 \\ x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1 = -1 \\ \alpha x_2 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow -1 - \frac{\beta}{\alpha} = 3$

$\frac{\beta}{\alpha} = -4$

$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{4}$

Le variabili in base devono essere tante quanti i vincoli.

$c^T x^* \geq LB$ MIN

$c^T x^* \leq LB$ MAX

Definire la sol. . . . . .

β/α

$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

max $-\bar{x}_1 + \beta x_2 + 2x_3$

$\bar{x}_1 - x_3 \leq 1$

$\bar{x}_1 - \alpha x_2 + 2x_3 \leq 2$

$\bar{x}_1 \geq 0, \quad x_2, x_3 \geq 0$

min $y_1 + 2y_2$

$y_1 + y_2 \geq -1$

$-\alpha y_2 \geq \beta$

$-y_1 + 2y_2 \geq 2$

$y_1, y_2 \geq 0$

$\left(-y_1 + 2y_2 = 2 \right)$

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ -y_1 + 2y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-\alpha \geq \beta$

$-1 \geq \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$

$\alpha > 0 \quad -1 \geq \frac{\beta}{\alpha}$

$\alpha < 0 \quad -1 \leq \frac{\beta}{\alpha}$