# Prova di esame dei corsi di Fondamenti di Informatica e Informatica Teorica

04 luglio 2024

**Nota Bene: Non saranno corretti compiti scritti con una grafia poco leggibile.**

**Problema 1.** Siano $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ un linguaggio accettabile e $L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ un linguaggio decidibile. Dimostrare se il linguaggio

$$L = L_1 \cup L_2$$

è accettabile o decidibile.

**Problema 2.** Dimostrare che NP $\subseteq$ EXPTIME.

**Problema 3.** Sia $k \in \mathbb{N}$ una costante. Si consideri il seguente problema decisionale: dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, decidere se i nodi di $G$ possono essere colorati con 3 colori in modo tale che

a) due nodi adiacenti siano colorati di colori differenti, e

b) il numero di nodi colorati colorati con il colore 1 sia $k$, e

c) il numero di nodi colorati con il colore 3 sia $k$.

Dopo aver formalizzato il suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si risponda alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

a) Il problema è in **P**?

b) Il problema è in **NP**?

c) Il problema è in co**NP**?

**Problema 1.** Siano $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ un linguaggio accettabile e $L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ un linguaggio decidibile. Dimostrare se il linguaggio

$$L = L_1 \cup L_2$$

è accettabile o decidibile.

SIA $L_1$ UN LINGUAGGIO ACCETTABILE ALLORA ESISTE UNA MACCHINA DI TURING $T_1$ CHE $\forall x \in \Sigma^*$ $O_{T_1}(x) = q_A$ SE $x \in L$ E $O_{T_1}(x) \neq q_A$ SE $x \notin L$.

SIA $L_2$ UN LINGUAGGIO DECIDIBILE ALLORA ESISTE UNA MACCHINA DI TURING $T_2$ CHE $\forall x \in \Sigma^*$ $O_{T_2}(x) = q_A$ SE $x \in L$ E $O_{T_2}(x) = q_R$ SE $x \notin L$.

DA QUESTE DUE MACCHINE DERIVIAMO UNA MACCHINA DI TURING DETERMINISTICA $T_3$ AD 1 NASTRO DOVE VI È SCRITTO L'INPUT X CON ALLA FINE UN SIMBOLO BLANK, LA MACCHINA INIZIA POSIZIONANDO LA TESTINA SUL CARATTERE PIÙ A SINISTRA E LEGGENDO UN CARATTERE DOPO L'ALTRO FINO AD INCONTRARE IL BLANK, $T_3$ SIMULA LA MACCHINA $T_2$ SU INPUT $x$, SE $T_2$ ACCETTA ALLORA $T_3$ ACCETTA, SE $T_2$ RIGETTA ALLORA $T_3$ ESEGUE $T_1$ SU INPUT $x$, SE $T_1$ ACCETTA ALLORA $T_3$ ACCETTA SE $T_2$ RIGETTA ALLORA $T_3$ RIGETTA, PER VIA DELLA NON DECIDIBILITÀ DI $L_1$ SE QUESTA NON DOVESSE TERMINARE NON POSSIAMO CONCLUDERE NULLA, ABBIAMO QUINDI CHE $L$ É UN LINGUAGGIO ACCETTABILE.

$$O_{T_3}(x) = \begin{cases} q_A & \text{SE } O_{T_1}(x) = q_A \vee O_{T_2}(x) = q_A \\ q_R & \text{SE } O_{T_1}(x) = q_R \wedge O_{T_2}(x) = q_R \\ \neq q_A & \text{SE } O_{T_1}(x) \neq q_A \end{cases}$$

**Problema 2.** Dimostrare che NP $\subseteq$ EXPTIME.

**Problema 3.** Sia $k \in \mathbb{N}$ una costante. Si consideri il seguente problema decisionale: dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, decidere se i nodi di $G$ possono essere colorati con 3 colori in modo tale che

a) due nodi adiacenti siano colorati di colori differenti, e

b) il numero di nodi colorati colorati con il colore 1 sia $k$, e

c) il numero di nodi colorati con il colore 3 sia $k$.

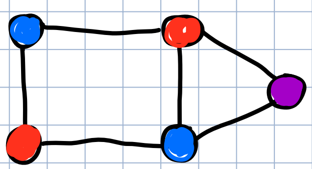
Dopo aver formalizzato il suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si risponda alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

a) *Il problema è in* **P**?

b) *Il problema è in* **NP**?

c) *Il problema è in* co**NP**?

$K = 2$



$I = \langle G = (V, E, K) \rangle$ : G É UN GRAFO NON ORIENTATO e $K \in \mathbb{N}$

$S(G,K) = \{ c : V \to \{1,2,3\} \}$

$\pi(G, K, S(G,K)) = \exists\, c \in S(G,K) : \forall (u,v) \in E\, [c(u) \neq c(v)] \wedge$

$\left( \sum_{v \in V} x_v : c(v) = 1 \right) = K \wedge \left( \sum_{v \in V} x_v : c(v) = 1 \right) = K$