Geom.

Una equazione di primo grado in un incognita.

$ax = b \qquad a, b \in \mathbb{R}$ a = coeff. x = incognita b = termine noto

risolvere l'eq: trovare la $x \in \mathbb{R}$: viene verificata $ax = b$.

1) $a \neq 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$ $\exists!$ soluzione.

2) $a = 0, b \neq 0 \Rightarrow$ eq. incompatibile / impossibile $\nexists$ soluzione.

3) $a = 0, b = 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ infinite soluzioni.

Un' insieme di eq. lineari in più incognite

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$ 2 eq. in 2 incognite $(2,1)$

risolvere l'eq: trovare una coppia (x, y) : vengono soddisfatte le eq.

In generale avremmo un sistema lineare di m eq. in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

soluzione del sistema è una n-upla che soddisfa tutte le eq.

$(x_1, \dots, x_n)$

I coefficienti delle incognite formano una matrice:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & \dots & a_{1n}x_n & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1}x_1 & \dots & a_{mn}x_n & b_m \end{pmatrix}$$

m righe

n colonne

una matrice a scala genera una matrice a scala

$$\begin{pmatrix} p_1 & x & x & \dots \\ 0 & p_2 & x & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

r-esima riga $p_r \neq 0$

p = pivot

Dato sistema a scala con r pivots, questo ha soluzione sse

$b_{r+1} = b_{r+2} = \dots = b_n = 0$ se sotto l'ultimo pivot i termini noti sono 0

Se la condizione è verificata, avremmo soluzioni che dipendono da $n-r$ parametri, cioè le incognite che non sono nelle colonne dei pivots.

La soluzione è unica quando $n = r$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3 eq in 5 inc.

$$\left(\frac{-11-4t-s}{2}, s, \frac{2-t}{3}, t, 2\right)$$

$r = 3$ $n-r = 5-3 = 2$ parametri liberi ∞^2 sol.

Un sistema lineare si dice omogeneo se $b_1 = \ldots = b_m = 0$.

Sono sempre compatibili. Sistema omogeneo a scala ha ∞^{n-r} soluzioni, se $n=r$ ha una soluzione (nulla).

Nel caso non omogeneo: se $n > m \geq r$ ci sono due possibilità, o non ci sono soluzioni, o ce ne sono ∞. (parametro libero)

Due sistemi lineari si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Operazioni elementari per trasformare un sistema ad un altro:

1) scambio due eq.

2) moltiplicare un' eq. per un numero $k \neq 0$

3) aggiungere alla i-esima eq. ($i \neq j$) la j-esima moltiplicata per $k \neq 0$

Con il metodo di eliminazione di Gauss si parte da un sistema qualunque, applico più volte le operazioni elementari fino ad ottenere un sistema a scala.

Fissato un qualsiasi campo $\mathbb{K}$ un vettore ha la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ o } (x_1, \ldots, x_n)$$

è possibile fare la somma con vettori:

$$(x_1, \dots, x_n) + (w_1, \dots, w_n) = (x_1 + w_1, \dots, x_n + w_n)$$

prodotto con vettori:

$$c \cdot (x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n)$$

le colonne di una matrice sono vettori e la soluzione è possibile scriverla in forma vettoriale

$$(0, 2t, t, 3) = x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proprietà della somma e prodotto vettori numerici

1) commutativa della somma

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad x + y = y + x$$

2) associativa della somma

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad (x+y)+z = x+(y+z)$$

3) esistenza dell'elemento neutro

$$\exists 0 \in \mathbb{R}^n . \ \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x$$

4) esistenza dell' opposto

$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \exists (-x) : \quad x + (-x) = 0$

5) associativa del prodotto

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\alpha \beta) x = \alpha (\beta x)$

6) distributiva del prodotto per scalare

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

7) distributiva del prodotto per vettori

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

8) elemento neutro del prodotto

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad 1 \cdot x = x$

La stessa cosa vale per le matrici e funzioni continue

Uno spazio vettoriale V è l'insieme provvisto di un operazione di somma e di prodotto per scalari

$V + V \to V \quad (v, w) \longmapsto v + w, \quad \mathbb{R} \times V \to V \quad (\alpha, v) \to \alpha v$

verificano le 8 proprietà.

C è l'insieme delle funzioni continue $\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$

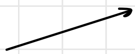
allora C è un esempio di spazio vettoriale.

L'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo è uno spazio vettoriale.

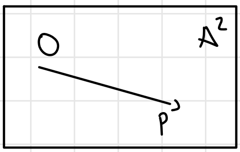
Lo spazio vettoriale non deve essere vuoto, sicuramente contiene lo 0.

Le soluzioni del sistema non omogeneo non è uno spazio vettoriale.

Geometria

vettore  piano A^2

punto $o \in A^2$ detto origine, punto $p \in A$,



$\vec{op}$ vettore applicato in o,

c'è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e i vettori applicati in o

$$p \in A^2 \longleftrightarrow \vec{op} \in V_0^2$$ (spazio vettoriale dei vettori applicati in o)

$A^3 \longleftrightarrow V_0^3$, spazio

$A \longleftrightarrow V_0$, retta

Combinazione lineare

Dati i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ dati $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ definiscono la combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$:

$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

dati b_1 e b_2 quanti vettori si possono ottenere?

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = b_1 \\ \lambda_1 = b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = b_2 \\ \lambda_2 = \frac{b_1 + b_2}{2} \end{matrix}$$

unica soluzione

corrispondenza biunivoca tra $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ e $b_1, b_2 \in \mathbb{K}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

L'insieme di comb. lin. si chiama:

$\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ al variare di $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

V si dice "finitamente generato" se

$\exists\, v_1, \dots, v_n \in V$ tale che $V = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$

es. $V = \mathbb{R}^n$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^n = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$

è finitamente generato

Se consideriamo $V = V_0^2$ $v_1 = \overrightarrow{OP}$ $v_2 = \overrightarrow{OQ}$

$\mathrm{Span}\{v_1, v_2\} = V_0^2$, bastano due vettori per generare lo spazio perché si può generare qualsiasi vettore sommando multipli di $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$

$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$ $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ è ridondante.

Per capire se sono ridondanti o no si introduce l'indipendenza lineare. Dato spazio vettoriale V, dati $v_1, \dots, v_n$ sono l.i. se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ sse $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

$v_1, \dots, v_n$ sono l.i. se v_i non può essere scritto come comb. lin. dei rimanenti.

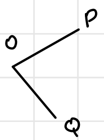
In $\mathbb{R}^n$ $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $e_i \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ $e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ base canonica

Dato uno spazio vettoriale V una base è un insieme di vettori $(v_1, \dots, v_n)$ di V se:

1) $V = \mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

2) $v_1, \dots, v_n$ sono l.i.

$V = V_O^2$



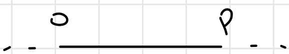
$v_1 = \overrightarrow{OP}$

$v_2 = \overrightarrow{OQ}$

$\{v_1, v_2\}$ base

O, P, Q non allineati

$V = V_O^1$



$v_1 = \overrightarrow{OP}$ $\{v_1\}$ base

$V = V_O^3$

$v_1 = \overrightarrow{OP}$ $v_3 = \overrightarrow{OR}$

$v_2 = \overrightarrow{OQ}$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base

O, P, Q, R non complanari

Dato V spazio vettoriale base fissata $\{v_1, \dots, v_n\}$ dato $v \in V$ $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sono detti coordinate di v rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$ in quanto la scrittura è unica.

In caso di V_O^2 si chiamano coordinate cartesiane.

In caso $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica le coordinate del vettore $(x_1, \dots, x_n)$ sono $(x_1, \dots, x_n)$.

$V = M(2,2)$ base $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Le basi sono infinite.

$V = \{0\}$ allora la base è vuota.

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ $\{1, x, \dots, x^n\}$ è una base di V

In $\mathbb{R}^2$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ è una base!

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = y \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 2y - 5x \\ \lambda_2 = -y + 3x \end{cases}$$

soluzione unica

$y = x = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}$$

verificata

coordinate di $(1,1)$ rispetto a questa base

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}$$

C'è un metodo più veloce per capire se è una base oppure no. Algoritmo per trovare vettori l.i. che formano una base in uno spazio vettoriale a partire da un sistema di generatori.

$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è un sistema di generatori di V.

Lemma di Steinitz (31)

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato con una base $\{w_1, \dots, w_m\}$, considero i vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ e suppongo siano l.i. allora $n \leq m$.

Dim per assurdo: Supponiamo $m < n$ considero:

$v_1 = a_{11} w_1 + \dots + a_{m1} w_m$

$\vdots$

$v_n = a_{1n} w_1 + \dots + a_{mn} w_m$

si impone che siano l.i.

$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0$ sse $x_1 = \dots = x_n = 0$

si sostituiscono v_s con il sistema di generatori

Made with Goodnotes

$$x_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m) + \dots + x_n(a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m) = 0$$

raccolgo w

$$w_1(x_1a_{11} + \dots + x_na_{1n}) + \dots + w_m(x_1a_{m1} + \dots + x_na_{mn}) = 0$$

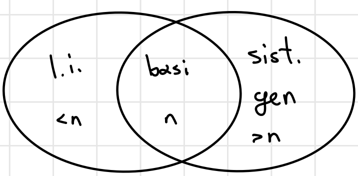
$$\begin{cases} x_1a_{11} + \dots + x_na_{1n} = 0 \\ \vdots \\ x_1a_{m1} + \dots + x_na_{mn} = 0 \end{cases}$$

sist. lineare di m eq. in n incognite omogeneo

Se $n > m$, i pivot non possono essere n, quindi ci sono soluzioni non nulle, assurdo.

Teorema sul numero degli elementi delle basi

Due basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di elementi, $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ $n = m = \dim(V)$



$\{v_1, \dots, v_n\}$ $m \leq n$

$\{w_1, \dots, w_m\}$ $n \leq m$

$n = m$

In $\mathbb{R}^2$ una base è data da $\{v_1, v_2\}$ l.i. poiché $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

Se ho uno spazio vettoriale di $\dim(V) = n$ e ho

$\{v_1, \dots, v_n\}$ l.i. automaticamente questa è una base di V

Se abbiamo un sistema di generatori $\{w_1, \dots, w_n\}$ automaticamente questa è una base e sono l.i.

Eliminazione di Gauss-Jordan: avere dei pivot $=1$ con sopra e sotto solo 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A^1, \dots, A^n$ sono l.i. se ho n pivot altrimente $A^i, \dots, A^i$ sono l.i. dove i è la colonna contenente i pivot (infatti sono vettori di una base canonica)

Anche A^i della matrice di partenza saranno l.i., le altre sono comb. li.

Dato uno spazio vettoriale V, $W \subseteq V$ si dice sottospazio vettoriale di V se:

- W non vuoto $\neq \emptyset$
- $v_1 \in W$, $v_2 \in W$, $v_1 + v_2 \in W$
- $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in W$, $\lambda v \in W$

$\dim(W) \leq \dim(V)$

In $V = V_0^2$ $W \subseteq V$ le possibitità sono:

- $W = \{0\}$ $\dim(W) = 0$
- $W = \mathrm{Span}\{v\}$ $\dim(W) = 1$

- $W = V_0^2$ $\quad \dim(W) = 2$

In $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad \dim(V) = 3$ $\quad$ base $\{1, x, x^2\}$

$W = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$

W non vuoto, $p, q \in W$ $\quad (p+q)(1) = 0 = p(1) + q(1)$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda p \in W$ $\quad \lambda p(1) = \lambda 0 = 0$

$p(x) = (x-1)(ax+b)$ $\quad p \in \text{Span}\{(x-1)x, x-1\}$ $\quad \dim(W) = 2$

Data una matrice $m \times n$, il rango $\rho(A)$ è il numero di pivots

$\rho_r := \dim(\text{span}\{A_1, \dots, A_m\})$, rango per righe, $0 \leq \rho_r(A) \leq n$

$\rho_c := \dim(\text{span}\{A^1, \dots, A^n\})$, rango per colonne, $0 \leq \rho_c(A) \leq m$

$\rho(A) = \rho_c(A) = \rho_r(A)$

Dim: Parto da A e ottengo A' con diverse op. elementari

$\text{Span}\{A_1, \dots, A_m\} = \text{Span}\{A'_1, \dots, A'_m\}$

$\rho_r(A) = \rho_r(A')$ $\quad A'$ è una matrice a scala ridotta.

$\rho_r(A') \leq \rho(A)$, per vedere che $\rho_r(A') = \rho(A')$ bisogna far vedere che le righe di A' sono l.i.

$r = \rho(A')$ $\quad x_1 A'_1 + \dots + x_r A'_r = 0$ quindi $x_1 = \dots = x_r = 0$

allora $\rho_r(A') = \rho(A)$.

per vedere se $\rho_c(A) = \rho(A)$ in genere

$$\text{Span}\{A^1, \dots, A^n\} \neq \text{Span}\{A'^1, \dots, A'^n\}$$

ma $x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = 0$ sse $x_1 A'^1 + \dots + x_1 A'^n = 0$

perché A e A' sono equivalenti. Le stesse soluzioni vengono sulle colonne di A e A', le dim sono quindi uguali: $\rho_c(A) = \rho_c(A')$

$A \xrightarrow{\text{GAUSS}} A'$, osserviamo che le colonne di pivots sono l.i. $A'^1, \dots, A'^n$ sono una base e tutte le colonne sono comb.

allora $\rho_c(A') = \rho(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \rho(A) \text{ é max } 4$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(A) = 3$$

Base di span data dalla 1ª, 2ª, 4ª colonna

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ è base delle colonne di A

Base di span data dalla 1^a, 2^a, 3^a riga

$\{(1,1,1,1,3),(2,1,3,-1,2),(-1,0,2,1,0)\}$ è base delle righe

Teorema di Rouché-Capelli:

Se ho un sistema lineare di matrice dei coefficienti di A e termine noto B, allora il sistema è compatibile sse $\rho(A) = \rho(A|B)$

Nel caso non compatibile $\rho(A|B) = \rho(A)+1$ rimane un pivot nei termini noti

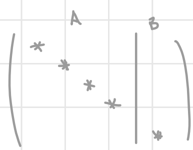
Dim: Sistema compatibile sse $\exists\, x_1, \dots, x_n$ tali che $x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = B$ cioè $B \in \text{Span}\{A^1, \dots, A^n\}$, cioè $\text{Span}\{A^1, \dots, A^n\} = \text{span}\{A^1, \dots, A^n, B\}$

quindi anche la dimensione è uguale

$$\rho(A) = \rho(A|B)$$

se incompatibile la differenza è di 1

$$\rho(A|B) = \rho(A)+1$$



$\rho(A|B) = \rho(A)+1$

es.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \overbrace{1 & 1}^{\leftarrow \text{var lib}} \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 2$

$\dim(Z(A)) = 4 - 2 = 2$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ -\frac{1}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Ci troviamo nel campo $\mathbb{Z}$ quindi x_3 e x_4 possono assumero solo 0 e 1, di conseguenza abbiamo solo 4 soluzioni, non $\infty^{n-\rho(A)}$ ma $2^{n-\rho(A)}$

I II caso

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Base di $Z(A)$ $\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

es. Spazio vettoriale su polinomi

$V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ $\quad W \subseteq V \quad W = \{ p \in V \mid p(x) + 2x\,p'(x) = 0 \}$

W è sottospazio?

$p(x)=0 \qquad 0+2x\,0'=0 \qquad 0\in W$

$p+2xp'=0, \quad q+2xq'=0 \qquad (p+q)+2(p'+q')x=0$

$p+2xp'=0 \qquad\qquad \lambda p+\lambda 2x\,p'=0 \quad \lambda=0$ ✓

Base di $V=\{1, x, x^2\}$ $\qquad p(x)=a+bx+cx^2$

$a+bx+cx^2+2x(b+2cx)=0 \Rightarrow a+3bx+5cx^2=0 \Rightarrow a,b,c=0$

$W=\{0\}$ $\quad \dim W=0$

es. $\quad Z=\{p\in V \mid p(2)=0\} \qquad Z\subseteq V$

$p(x)=a+bx+cx^2$

$p(2)=a+2b+4c=0 \qquad$ 2 var. lib. (1 eq.)

I) $b=1$

$c=0$

$a=-2$

$-2+x$

II) $b=0$

$c=1$

$a=-4$

$-4+x^2$

$\{(-2+x), (-4+x^2)\}$ base di Z

Made with Goodnotes

es.

$$\text{Span}\{x-1,\ x^2-1,\ x^2-2x-1\} = T$$

trasformo i vettori usando $\{1, x, x^2\}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow x-1 \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow x^2-1 \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow x^2-2x-1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho(T) = 2 = \dim(T)$$

Base di $T = \{x-1,\ x^2-1\}$ trovare $(x-1)^2$ come comb. lin.:

$$a(x-1) + b(x^2-1) = x^2-2x-1$$

$$a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -a-b = -1 \\ a = -2 \\ b = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= -2 \\ b &= -1 \end{aligned} \quad \text{coordinate 3° polinomio}$$

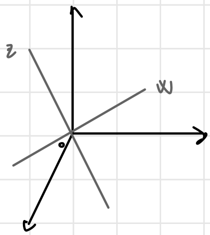
Made with Goodnotes

Somma e Intersezione di sottospazi vettoriali

V spazio vettoriale $\qquad W \subseteq V$, $Z \subseteq V$ sottospazi vett.

$W \cap Z \subseteq V$ è un sottospazio di V, mentre $W \cup Z$ non lo è

$V = V_0^3$



$W \cup Z$ non è un sottospazio

$W + Z = \{ w + z \in V \mid w \in W, z \in Z \}$ sottospazio vettoriale di V

$W + Z$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene sia W che Z

$W \cap Z$ è il più grande sottospazio contenuto sia in W che in Z.

casi particolari:

se $W \subseteq Z$ $\quad W + Z = Z \quad W \cup Z$ è sottospazio $= Z$

$W \cap Z = W$

Dim: $v \in W + Z$, $v' \in W + Z$, $v = w + z$, $v' = w' + z'$,

$w, w' \in W$, $z, z' \in Z$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1) $v + v' \in W + Z$?

$(w + z) + (w' + z') = (w + w') + (z + z') \in W + Z$

2) $\lambda v \in W+Z$?

$\lambda(w+z) = \lambda w + \lambda z \in W+Z$

3) $0 \in W+Z$

$0_W + 0_Z = 0_{W+Z} \in W+Z$.

W e Z sono in somma diretta se $W \cap Z = \{0\}$ e $\dim(W+Z) = \dim(V)$. Un vettore di $W \oplus Z$ si scrive in modo unico $w+z$.

Dim: $w_1, w_2 \in W$, $z_1, z_2 \in Z$

$w_1 + z_1 = w_2 + z_2$ allora $w_1 - w_2 = z_1 - z_2 \in W \cap Z = \{0\}$

Formula di Grassmann

V spazio vettoriale

$W \subseteq V$, $Z \subseteq V$, $Z \cap W \subseteq V$, $Z + W \subseteq V$, sottosp. vettoriali $\Rightarrow$

$\dim(Z \cap W) + \dim(Z + W) = \dim(Z) + \dim(W)$

Dim: Base di $Z \cap W$ $\{v_1, \dots, v_r\}$ $\dim(Z \cap W) = r$

estendo la base a una base di Z aggiungendo vettori

$\{v_1, \dots, v_r, z_1, \dots, z_s\}$ $\dim(Z) = r+s$

estendo la base a una base di W aggiungendo vettori

$\{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_t\}$ $\dim(W) = r+t$

Devo dimostrare che $\dim(W+Z) = (r+t)+(r+s)-r =$
$r+s+t$ e che la base di $Z+W$ è data da

$\{v_1, \dots, v_r, z_1, \dots, z_s, w_1, \dots, w_T\}$

$v \in Z+W$, $v = z+w$, $z \in Z$, $w \in W$

$$z = \sum_{i=1}^{r} x_i v_i + \sum_{i=1}^{s} y_i z_i$$

$$w = \sum_{i=1}^{r} x_i v_i + \sum_{i=1}^{t} b_i w_i$$

dato che $v = z+w$

$$v = \sum_{i=1}^{r} (x_i + x_i') v_1 + \sum_{i=1}^{s} y_i z_i + \sum_{i=1}^{t} b_i w_i$$

vedere l'indipendenza lineare

$$\underbrace{(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) + (\beta_1 z_1, \dots, \beta_s z_s)}_{v' \in Z} + \underbrace{(\gamma_1 w_1, \dots, \gamma_T w_T)}_{v'' \in W} = 0$$

$v' + v'' = 0$, $v' = -v'' \in Z \cap W$

quindi $v' = \alpha_1' v_1 + \dots + \alpha_r' v_r = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_s z_s$

quindi $(\alpha_1 - \alpha_1') v_1 + \dots + (\alpha_r - \alpha_r') v_r + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_s z_s = 0$

ma $\{v_1, \dots, v_r, z_1, \dots, z_s\}$ sono una base quindi i coeff. sono 0

$\alpha_i = \alpha_i'$, $\beta_1 = \dots = \beta_s = 0$

$v' + v'' = 0$ quindi $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_t w_t = 0$

formano una base di W, quindi sono nulli

$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$, $\gamma_1 = \dots = \gamma_t = 0$

es: $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$Z \subseteq V$ $\quad Z = \{p \in V \mid p(1) = 0\}$

$W \subseteq V$ $\quad W = \{p \in V \mid p(2) = 0\}$

$Z: \ p(x) = a + bx + cx^2 \quad p(1) = a + b + c = 0 \quad \dim(Z) = 2$

$W: \ p(x) = a + bx + cx^2 \quad p(2) = a + 2b + 4c = 0 \quad \dim(W) = 2$

$Z \cap W \quad \begin{matrix} p(1) = 0 \\ p(2) = 0 \end{matrix} \quad \begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\dim(Z \cap W) = 3 - \rho(A) = 1$

$\dim(Z + W) = 2 + 2 - 1 = 3$

$\dim(Z+W)=\dim(V)$ quindi ogni polinomio $r(x)\in V$ si può scrivere come somma di due polinomi

$$r(x)=p(x)+q(x)$$

Basi: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+3c=0 \end{cases}$ $\qquad \begin{aligned} a&=2c &&=2 \\ b&=-3c &&=-3 \\ c&=c &&=1 \end{aligned}$

$p(x)=2-3x+x^2=(x-1)(x-2)$

Base di $W\cap Z$ $\{x^2-3x+2\}$

Basi: $a+b+c=0$ $\qquad \begin{aligned} a&=-b-c &&=-1 &&=-1 \\ b&=b &&=1 &&=0 \\ c&=c &&=0 &&=1 \end{aligned}$

Base di Z: $\{x-1,\ x^2-1\}$

base estesa

Base di Z con un vettore l.i. di $Z\cap W$: $\{x^2-3x+2,\ x-1\}$

Basi: $a+2b+4c=0$ $\qquad \begin{aligned} a&=-2b-4c &&=-2 &&=-4 \\ b&=b &&=1 &&=0 \\ c&=c &&=0 &&=1 \end{aligned}$

Base di W: $\{x-2,\ x^2-4\}$

Base estesa di W $\{x^2-3x+2,\ x-2\}$

Base di $Z+W$: $\{x^2-3x+2,\ x-1,\ x-2\}$

Considero $1\in V$ $\quad 1=p(x)+q(x)$ $\quad p(x)\in Z$ $\quad q(x)\in W$

$1 = a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c(x-2)$

sistema lineare, ma se pongo $a=0$

$b(x-1)+c(x-2)=1 \quad b=1 \quad c=-1 \quad p(x)=x-1 \quad q(x)=-x+2$

ma la scrittura non è unica perché $Z \cap W \neq \{0\}$

I sottospazi vettoriali si possono esprimere o in forma parametrica (Span{...}) o in forma cartesiana (sistema lineare omogeneo). Intersezione e somma si calcolano in vari modi a seconda di come sono espressi i sottospazi vettoriali.

Prodotto di matrici

$A_{m \times n}, \; B_{n,k} \quad A \cdot B_{m \cdot k}$

$AB_{ij} = A_{i1}B_{1j} + \dots + A_{in}B_{nj}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

- proprietà associativa: $A_{m \times n}, B_{n \times K}, C_{K \times h}$

$(AB)C = A(BC)$

- non è commutativo per matrice qualunque

$AB \neq BA$, $AI_n = I_n A$, $AA^{-1} = A^{-1}A$

- distributiva (a sinistra)

$(A+B)C = AC + BC$

- prodotto con scalare

$cAB = AcB = c(AB) \quad c \in \mathbb{K}$

Attraverso questi prodotti si possono scrivere i sistemi lineari

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$AX = B$$

$\rho(AB) \leq \rho(B)$ e $\rho(AB) \leq \rho(A)$ perche le righe e le colonne di AB sono rispettivamente comb. lin. di B e di A

Data una matrice quadrata $n \times n$ si dice invertibile se esiste un'altra matrice quadrata B $n \times n$: $AB = I = BA$

B si chiama l'inversa di A.

Per $n \geq 2$ se $\rho(A) < n$ allora non esiste B tale che $AB = I$

perché $\rho(AB) \leq \rho(A) < n$ e $\rho(I_n) = n$.

Una matrice quadrata $A_{n \times n}$ è invertibile sse $\rho(A) = n$

Proprietà

Sia A una matrice $n \times n$:

A invertibile se esiste B tale che $AB = BA = I$, $B = A^{-1}$ (se $\exists$)

$A^{-1} A = A \cdot A^{-1} = I$

$(A^{-1})^{-1} = A$

A, B matrici $n \times n$ allora AB invertibile sse A e B lo sono

$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

A è invertibile sse $\rho(A) = n$

$\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$ se $\rho(A) < n$ o $\rho(B) < n$ allora $\rho(AB) < n$

In caso $\rho(A) = n = \rho(B)$ esistono A^{-1} e B^{-1}

$$B^{-1} A^{-1} \cdot AB = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

$$AB \cdot B^{-1} A^{-1} = A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

Applicazione dell'inversa, se abbiamo un sistema lineare quadrato

$AX = B$, se A è invertibile la soluzione è unica (n pivots)

La soluzione la otteniamo moltiplicando per l'inversa

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B \to IX = A^{-1}B \to X = A^{-1}B$$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ \quad y + 2z = 2 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases} \qquad X = A^{-1}B \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A matrice $m \times n$ A^T si dice trasposta ottenuta scambiando le righe con le colonne $(n \times m)$

$A^T_{ij} = A_{ji}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Proprietà

$A^{TT} = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda (A)^T$, $\rho(A) = \rho(A^T)$,

$AB^T = B^T A^T$, se A^{-1} $\exists$ allora $A^{T^{-1}}$ $\exists$, $A^{T^{-1}} = A^{-1^T}$,

$\rho(A) = \rho(A^T) = n$,

$AA^{-1} = I \to (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I$, $A^{-1^T} \cdot A^T = I$ vale anche il contrario

Basi e Matrici di cambiamento di base

V spazio vettoriale, scegliamo una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ V e un' altra $\{v_1', \dots, v_n'\}$ di V. $\forall v \in V$ $\quad v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ $\quad x_i \in \mathbb{R}$ sono le coordinate rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\} = E$ ma $v = \sum_{j=1}^{n} x_j' v_j'$ $\cdot E'$.

Scrivo i vettori di E' rispetto a E

$$v_1' = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} v_i$$
$$\vdots$$
$$v_n' = \sum_{i=1}^{n} a_{in} v_i$$

ottengo una matrice quadrata $n \times n$ dove le colonne sono le coordinate dei vettori della base E' rispetto ad E si indica come $A = M_E^{E'}$ anche scritto $M_{E' \to E}$ o $M_{E \leftarrow E'}$.

es. $\quad E = \{(0,1), (1,0)\}$ $\quad E' = \{(1,1), (1,-1)\}$

$(1,1) = 1(0,1) + 1(1,0)$

$(1,-1) = -1(0,1) + 1(1,0)$

$$M_E^{E'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$v = 2(1,1) + 3(1,-1) = (5,-1)$ $\quad \begin{cases} x_1' = 2 \\ x_2' = 3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$v = -1(0,1) + 5(1,0) = (5,-1)$

Le matrici di cambiamento sono invertibili e vale: $M_{E'}^{E} = (M_{E}^{E'})^{-1}$

$M_{E'}^{E} \cdot M_{E}^{E'} = I$

Determinanti

A matrice $n \times n$ $\det(A) \in \mathbb{R}$

$n=1$ $A = (a)$ $\det(A) = a$

$n=2$ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\det(A) = ad - bc$ $\det(A) = 0$ sse $\rho(A) < 2$

$n \geq 2$ riduco la matrice a scala, se A è a scala quadrata

$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$, non si deve moltiplicare una linea per uno scalare e scambiando le linee si cambia il segno

$\det(A) = (-1)^s \cdot \det(A)$ s = scambi

Teorema Laplace

$A_{n \times n}$ elimino la i-esima riga e J-esima colonna ottenendo una matrice $(n-1)(n-1)$, faccio il determinante di quest' ultima e moltiplico per $(-1)^{i+j}$ ottenendo il complemento C_{ij}

$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + \dots + a_{in} C_{in}$

Proprietà

$\det(I_n) = 1$

$A_{n \times n}$ scambio la i-esima e j-esima riga ottengo B

$\det(B) = -\det(A)$

$\det(A) \neq 0$ sse $\rho(A) = n$ sse A è invertibile

Se A ha una riga prop o comb. lin allora $\det(A) = 0$

Se moltiplico la i-esima riga di A per $c \in \mathbb{R}$ ottengo la matrice C

$\det(C) = c \det(A)$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_n \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_i' \\ a_n \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_i + a_i' \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$\det(\bar{A}) = \det(A) + \det(A')$$

Si può utilizzare il determinante per trovare l'inversa di una matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ & & \\ C_{1n} & & C_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{trasposta della matrice } C$$

Teorema Binet

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Dim: 2 casi

caso $\det(A)=0 \Rightarrow \rho(A)<n$

$$\rho(AB)\leq \rho(A)<n \Rightarrow \det(AB)=0$$

caso $\det(A)\neq 0$, trasformiamo A in I

$A \rightsquigarrow I$ tale che $E_m \dots E_1 A = I$

quando una matrice è elementare vale il teorema di Binet (a sinistra) (solo scambi righe e aggiunte di un multiplo da una riga ad un altra)

$\det(E_m \dots E_1 A) = \det(E_m)\dots \det(A) = \det(I) = 1$

- $E_m \dots E_1 = A^{-1} \Rightarrow \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- $E_m \dots E_1 AB = B \Rightarrow \det(B) = \det(A)^{-1}\det(AB)$

$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$.

Formula di Cramer

sistema quadrato di soluzione unica $\underset{n\times n}{A}\ \underset{n\cdot 1}{X} = \underset{n\cdot 1}{B}$

sistema lineare n eq. in n inc.

supponiamo $\rho(A)=n \to$ sol. unica $\to \det(A)\neq 0$ allora $X=A^{-1}B$

Teorema del rango

Il rango $r = \rho(A)$ è la massima dimensione di una sottomatrice quadrata di A con $\det \neq 0$. Sottomatrice $r \times r$.

Metodo dell' orlato

Se ho una sottomatrice B di A quadrata $r \times r$ $\det(B) \neq 0$ e tutte le matrici ottenute da B aggiungendo una riga e una colonna hanno $\det = 0$, allora $\rho(A) = r$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(A) = ?$ $\quad \rho(A) \leq 3$

$1 \neq 0 \quad \rho(A) \geq 1$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\det = 3 \neq 0$ $\quad \rho(A) \geq 2$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\det = 0$ $\qquad \rho(A) = 2$ ✓

Applicazioni lineari

V, W spazi vett. $\quad f: V \to W$ si dice app. lineare se:

1) $\forall v_1, v_2 \in W$ $\qquad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$ $\qquad f(\lambda v) = \lambda f(v)$

se $f: V \to W$ è lineare allora $f(0_V) = 0_W$

Dim: $f(0_v) = f(0_v + 0_v) = f(0_v) + f(0_v)$

aggiungo $-f(0_v)$ $\quad 0_w = f(0_v)$.

Il nucleo di $f: V \to W$ è

$$Ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0_w \} \subseteq V$$

Dim: 1) considero $v_1 \in Ker(f)$, $v_2 \in Ker(f)$

$f(v_1) = 0_w \quad f(v_2) = 0_w$

$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0_w + 0_w = 0_w$ quindi

$v_1 + v_2 \in Ker(f)$

2) $v \in Ker(f) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$f(v) = 0 \quad f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda 0 = 0$

$\lambda v \in Ker(f)$.

L'immagine di $f: V \to W$ è

$$Im(f) = \{ f(v) \mid v \in V \} \subseteq W$$

Dim: scelgo $w_1 \in Im(f) \quad w_2 \in Im(f)$

esiste $v_1, v_2 \in V$ tale che $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$

1) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = w_1 + w_2$

$w_1 + w_2 \in Im(f)$

2) $w \in Im(f)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

esiste $v \in V$ tale che $f(v) = w$

$\lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v)$

$\lambda w \in Im(f)$.

Teorema

$f: V \to W$ app. lin.

f é iniettiva sse $Ker(f) = \{0_v\} \to \rho(A) = n$

f é suriettiva sse $Im(f) = W \to \rho(A) = m$

f puó essere biettiva se $\rho(A) = m = n$, A é una matrice $n \times n$ con $\det(A) \neq 0$

Se f é biettiva: $V \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} W$

$f(v) = A \cdot v$, $f^{-1}(v) = A^{-1} v$

$f^{-1}(f(v)) = v$, $f(f^{-1}(w)) = w$

Dim (iniettiva):

$v \in Ker(f)$ $f(v) = 0_w$ $f(0_v) = 0_w$ allora $v = 0$,

$v_1, v_2 \in V$ supponiamo $f(v_1) = f(v_2)$ $f(v_1) - f(v_2) = 0$

$v_1, v_2 \in Ker(f)$ allora $v_1 - v_2 = 0$ $v_1 = v_2$

f iniettiva

omomorfismo = applicazione lineare

isomorfismo = applicazione lineare biettiva

se $f: V \to W$ isomorfismo allora $f^{-1}: W \to V$ é lineare

Dim: $w_1, w_2 \in W$

$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$, basta applicare f

- $f(f^{-1}(w_1 + w_2)) = w_1 + w_2$

$f(f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)) = f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2)) = w_1 + w_2$ ✓

- $f^{-1}(\lambda w) = \lambda f^{-1}(w)$

$f(f^{-1}(\lambda w)) = f(\lambda f^{-1}(w)) = \lambda f(f^{-1}(w)) = \lambda w$ ✓

f^{-1} é lineare e anche biettiva $\Rightarrow$ ISOMORFISMO.

$f: V \to W$ $g: W \to Z$ app. lin. $g \circ f$ allora é lineare

Proprietá:

1) linearitá: $(g \circ f)(v_1 + v_2) = g(f(v_1 + v_2)) = g(f(v_1) + f(v_1)) =$
$= g(f(v_1)) + g(f(v_2)) = (g \circ f(v_1)) + (g \circ f(v_2))$

2) omogeneitá: $(g \circ f)(\lambda v) = g(f(\lambda v)) = g(\lambda f(v)) = \lambda g(f(v))$
$= \lambda (g \circ f(v))$

Teorema

$f: V \to W$ app. lin., E base di V, F base di W

$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \rho(M_{EF}(f))$

Teorema della dimensione

$f: V \to W$ app. lin.

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$

Dim: $f: V \to W$ app. lin. $\mathrm{Ker}(f) \subseteq V$ con base $\{v_1, \dots, v_n\}$

Estendo la base del Ker ad una base di V

$\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_d\}$

$$f(v_1) = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(v_{n+1}) \neq 0 \in \mathrm{Im}(f) \\ \vdots \\ f(v_d) \neq 0 \in \mathrm{Im}(f) \end{array} \right.$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = 0$$

vediamo se $\{f(v_{n+1}), \dots, f(v_d)\}$ sono una base di $\mathrm{Im}(f)$

i) SISTEMA GENERATORI

$f(v) = f(x_1 v_1 + \dots + x_d v_d) = x_1 f(v_1) + \dots + x_d f(v_d) =$

$= x_{n+1} f(v_{n+1}) + \dots + x_d f(v_d)$

questo perché i primi K sono nulli, appartengono al Ker

2) L.I.

$f(v_{n+1}), \dots, f(v_d)$ sono l.i., considero una comb. lin.

$y_{n+1} f(v_{n+1}) + \dots + y_d f(v_d) = 0$ sse $y_{n+1}, \dots, y_d = 0$

$f(y_{n+1} v_{n+1} + \dots + y_d v_d) = 0$ $\quad y_{n+1} v_{n+1} + \dots + y_d v_d \in \operatorname{Ker}(f)$

$y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ sono la base di $\operatorname{Ker}(f)$ con opportuni coeff.

$y_1 v_1 + \dots + y_n v_n - y_{n+1} v_{n+1} - \dots - y_d v_d = 0$

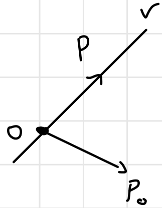
essendo questa una comb. lin. dei vettori della base di V, sono tra loro l.i., quindi $\dim(\operatorname{Im}(f)) = d - n$.

Le matrici simmetriche sono tali che $A = A^T$

V spazio vettoriale, i sottospazi vettoriali sono sottoinsiemi di V $W \subseteq V$ chiusi rispetto a "$+, \cdot$"

Un sottospazio affine $A \subseteq V$ è un insieme ottenuto traslando un sottospazio vettoriale

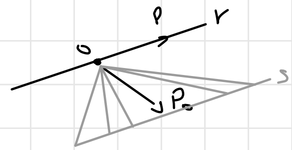
$$\{v_0 + v \mid v_0 \text{ fissato in } V, v \in W\}$$



es. $V = V_0^2$ $\quad W \subseteq V$ $\quad W = \{\vec{OP} \mid P \in r\}$

$v = \vec{OP}$ $\quad v_0 = \vec{OP_0}$ $\quad v \in W$

variando v, si ottiene una retta parallela a quella passante per O, una non passante per O.



$A = \{ \overrightarrow{OQ} \mid Q \in s \}$ $\quad s \parallel r \quad O \notin s$

$\dim(A) = \dim(W)$

se $\dim(A) = 1$ allora A sono tutte le rette $A \longleftrightarrow$ rette

se $\dim(A) = 0$ allora A è $\{\overrightarrow{OO}\}$ $\quad A \longleftrightarrow$ punto

se $\dim(A) = 2$, allora $A = V_0^2$ $\quad A \longleftrightarrow$ piano

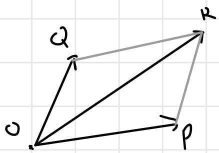
es. $V = \mathbb{R}^n \quad AX = 0 \quad A_{m \times n} \quad X_{n \cdot 1} \quad W = \{ X \mid AX = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^n$

se invece $Y = \{ X \mid AX = B_{m \cdot 1} \}$

se $Y \neq \emptyset$ il sistema è compatibile ed è un sottospazio affine

Forma cartesiana (equazione cartesiana) di un sottospazio affine di tipo $\{ v \in V \mid f(v) = w_0 \}$. In $V = V_0^2$ abbiamo l'eq cartesiana di una retta. (in coordinate cartesiane) scelgo una base e scrivo un vett. come comb. lin. della base

$\{ \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \}$ di V_0^2



$\overrightarrow{OR} = x\,\overrightarrow{OP} + y\,\overrightarrow{OQ}$

x, y coordinate cartesiane

$f: V_0^2 \to \mathbb{R}$ app. lin. tale che $f(\overrightarrow{OP}) = a$ e $f(\overrightarrow{OQ}) = b$ è unica.

$Y = \{ v \in V_0^2 \mid f(v) = c \}$ $c \in \mathbb{R}$ $v = x\,\overrightarrow{OP} + y\,\overrightarrow{OQ}$

$f(v) = x \cdot f(\overrightarrow{OP}) + y \cdot f(\overrightarrow{OQ}) = xa + yb$

$c = xa + yb$

se $a = b = 0$: $f = 0$, $c = 0$ $Y = V_0^2$, $c \neq 0$ $Y = \emptyset$

se $a \neq 0$ o $b \neq 0$: f suriettiva

$\rho(f) = 1 = \dim(\mathbb{R}) = \dim(\mathrm{Im}(f))$ ottengo una retta

$\dim(Y) = 2 - 1 = 1 = \dim(\mathrm{Ker}(f))$ Y è una retta (passa per O se $c = 0$)

Due rette sono parallele se

$$\begin{array}{l} r \\ r' \end{array} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

r e r' sono parallele se (a, b) e (a', b') sono proporzionali

$\rho\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ cioè $\det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 0$

se $\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$ le rette coincidono $r = r'$

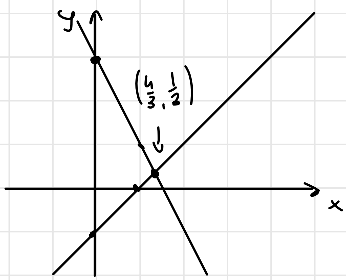
se $\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$ le rette sono parallele distinte $r \neq r'$

Se non sono parallele

$\rho\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 2$ ottengo $r \cap r' = \{R\}$ rette incidenti:

es. $\begin{cases} r & 2x + y = 3 \\ r' & x - y = 1 \end{cases}$ $x = \frac{4}{3}$ $y = \frac{1}{3}$ punto incontro

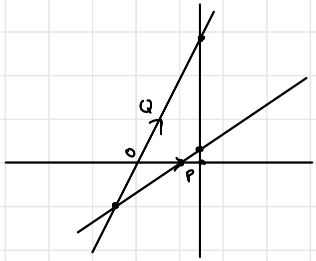
$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3$ rette incidenti



$y = -2x + 3$ r

$y = x - 1$ r'

con i vettori $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$



Equazione parametrica di un sottospazio affine Y

$Y = \{v_0 + w \mid w \in W\}$ scelgo base di W $\{w_1, \dots, w_n\}$

$w = x_1 w_1 + \dots + x_n w_n$ $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$V_0 + W = (x_1 w_1 + \dots + x_n w_n) + V_0$

V_0 e base fissata, varia solo $x_1, \dots, x_n$

In $V = V_0^2$ $\quad V_0 = x_0 \overrightarrow{OP} + y_0 \overrightarrow{OQ}$

scelgo $W = \{t w_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$

$W = \mu \overrightarrow{OP} + \gamma \overrightarrow{OQ} \neq 0 \qquad V = x \overrightarrow{OP} + y \overrightarrow{OQ}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \mu t \\ y = y_0 + \gamma t \end{cases}$$

equazione parametrica di una retta passante per (x_0, y_0) parallela a w_1

$\mu \neq 0$ o $\gamma \neq 0$

Per passare da parametrica a cartesiana elimino il parametro t

es: retta passante per $(1,2)$ e parallela a $(-1,1)$

$$r \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

eq. cartesiana

$t = 1 - x$

$r: y = 3 - x$

Per passare da cartesiana a parametrica

scelgo 1 delle incognite come parametro t e ricavo le altre

$r: \quad 2x + y = 3$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$$

eq parametrica passa per $(0,3)$ e parallela a $(1,-2)$

$ax + by = c$ retta parallela a $(-b, a)$

vettore direttore (μ, γ)

Retta per due punti: p_1, p_2 punti nel piano, $p_1 \neq p_2$, nel piano

$p_1(x_1, y_1) \quad p_2(x_2, y_2)$

eq. par.

$$r: \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases}$$

eq. cart.

$$r: \quad y = y_1 + \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)(y_2 - y_1)$$

Una retta di V^3 è un sottospazio di V di dimensione 1

Un piano di V^3 è un sottospazio di V di dimensione 2

Sia π un piano di A^3, se π è descritto dall' eq cartesi.

$ax + by + cz + d = 0$, allora π è descritto anche dall' eq.

$\lambda ax + \lambda by + \lambda cz + \lambda d = 0, \ \lambda \neq 0.$

se π é descritto da $ax+by+cz+d=0$ e anche da $a'x+b'y+c'z+d'=0$ allora λ esiste

Passare da cartesiane a parametriche

$$3x+y+z-1=0$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{t_1}{3} - \frac{t_2}{3} \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$$

Passare da parametriche a cartesiane

$$\begin{cases} x = 3t_1 + t_2 + 2 \\ y = t_1 + 2t_2 + 2 \\ z = -2t_1 - 3t_2 + 4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x-2 \\ 1 & 2 & y-2 \\ -2 & -3 & z-4 \end{array}\right) \xrightarrow{P_{12}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y-2 \\ 3 & 1 & x-2 \\ -2 & -3 & z-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{e_{21}(-3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y-2 \\ 0 & -5 & x-3y+4 \\ -2 & -3 & z-4 \end{array}\right) \xrightarrow{e_{31}(2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y-2 \\ 0 & -5 & x-3y+4 \\ 0 & 1 & z+2y-8 \end{array}\right) \xrightarrow{e_{32}(\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & y-2 \\ 0 & -5 & x-3y+4 \\ 0 & 0 & \frac{x}{5}+\frac{7y}{5}+z-\frac{36}{5} \end{array}\right)$$

$$z + \frac{7}{5}y + \frac{x}{5} - \frac{36}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad x + 7y + 5z - 36 = 0$$

Equazione parametrica della retta sullo spazio

$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

Due piani π_1 e π_2 si dicono **paralleli** se:

$$\pi_1 \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \pi_2$$

allora $\exists\, \lambda \neq 0$ tale che

$a' = \lambda a \quad b' = \lambda b \quad c' = \lambda c$, i piani coincidono se $d' = \lambda d$

Se due piani non sono paralleli allora sono incidenti.

Siano r e π una retta e un piano di A^3 si dicono paralleli se:

$$\pi : ax + by + cz + d = 0 \qquad r : \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

π e r sono paralleli sse $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$

Due rette nello spazio possono essere:

parallele distinte //

coincidenti /

incidenti su un punto +

sghembe X

Equazione parametrica di rette r

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \text{ è il vettore direttore e } t \text{ il parametro}$$

r e r' sono parallele se $(l, m, n) = K(l', m', n')$

r e r' coincidono se $(x_0' - x_0, y_0' - y_0, z_0' - z_0)$ prop. (l, m, n)

Se metto a sistema r e r' e vengono ∞ soluzioni, allora le rette sono coincidenti.

$$\begin{cases} lt - l't' = x_0' - x_0 \\ mt - m't' = y_0' - y_0 \\ nt - n't' = z_0' - z_0 \end{cases}$$

Se (l, m, n) e (l', m', n') non sono prop. allora possono essere incidenti o sghembe. Se l'eq ha soluzione, r e r' sono incidenti; Se l'eq non ha soluzioni r e r' sono sghembe

$$\rho\begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \\ n & n' \end{pmatrix} = 2 \qquad \rho\begin{pmatrix} l & l' & x_0' - x_0 \\ m & m' & y_0' - y_0 \\ n & n' & z_0' - z_0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \nearrow 2 \text{ incident.} \\ \searrow 3 \text{ sghembe} \end{array}$$

Fascio di piani per una retta nello spazio

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$ eq. cart. retta $(\pi \cap \pi)$

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$ eq. fascio di piani

piano contenente r per $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

viceversa, se π piano che contiene la retta, allora π si descrive con l'eq. di sopra per opportuni λ e μ.

Per trovare l'eq del piano passante per P e contenente r

Per $r \subset \pi$ $P \in \pi$ $P = (x_0, y_0, z_0)$

$$\lambda(ax_0 + by_0 + cz_0 + d) + \mu(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0 + d') = 0$$

trovo λ e μ

Altro caso, ho 2 rette

$$r \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \overbrace{a_1 \quad b_1 \quad c_1}^{\bar{A}} & d_1 \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 & d_2 \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 & d_3 \\ a_4 \quad b_4 \quad c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

$$r' \begin{cases} a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0 \\ a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 = 0 \end{cases}$$

se $r = r'$ allora 3^a e 4^a sono comb. lin. della 1^a e 2^a

$\rho(A) = 2$

se $r \parallel r'$ dist. esiste un piano che le contiene entrambe, questo piano π sta nel fascio di piani del primo e del secondo.

$$\lambda 1^a + \mu 2^a = \lambda' 3^a + \mu' 4^a \qquad \rho(A) = 3 \quad \rho(A) = 2$$

se $r \times r'$ esiste π che la contiene $r \subset \pi$ $r' \subset \pi$

$$\rho(A) = 3 \quad \rho(\bar{A}) = 3$$ esiste una soluzione $(r \cap r')$

se $r \not\times r'$ $\nexists \pi : r \subset \pi, r' \subset \pi$ quindi

$$\rho(A) = 4 \quad e \quad \rho(\bar{A}) = 3$$

Prodotto scalare

$v \in \mathbb{R}^n \qquad w \in \mathbb{R}^n \qquad v = (v_1, \dots, v_n) \qquad w = (w_1, \dots, w_n)$

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

Proprietà

- simmetrico $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
- lineare $\langle \alpha v + \beta v', w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle + \beta \langle v', w \rangle$
- positività $\langle v, v \rangle \geq 0$

La **norma** di $v \in \mathbb{R}^n$ è $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Dim: $\|\alpha v - \lambda w\|^2 \geq 0 \quad (\alpha v - \lambda w)(\alpha v - \lambda w) \geq 0 \Rightarrow$

$\alpha^2 \|v\|^2 - 2\alpha\lambda (v w) + \lambda^2 \|w\|^2 \geq 0$

scelgo $\alpha = \|w\|^2$, $\lambda = v \cdot w$

$\|w\|^4 \|v\|^2 - 2\|w\|^2 (v w)^2 + (v w)^2 \|w\|^2 \geq 0 \Rightarrow \|w\|^4 \|v\|^2 \geq \|w\|^2 (v w)^2$

$w = 0$ ovvio, $w \neq 0$ $\|w\|^2 \|v\|^2 \geq (v w)^2 \Rightarrow \|w\| \|v\| \geq (v w)$.

Definisco l' angolo α tra v e w in modo che

$\langle v, w \rangle = \cos\alpha \, \|v\| \cdot \|w\|$

v e w sono ortogonali quando $\langle v, w \rangle = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

In $\mathbb{R}^2$ perpendicolarità tra due rette nel piano

$$r \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} \qquad r' \begin{cases} x = x_0' + m't' \\ y = y_0' + n't' \end{cases}$$

$r \perp r'$ quando $mm' + nn' = 0$

$ax + by + c = 0$ $\quad (-b, a)$ ortogonale a (a, b)

Angolo tra r e r' è dato dall'angolo formato dalle due direzioni

$$\alpha = \arccos\left(\frac{(m,n)(m',n')}{\|(m,n)\| \cdot \|m',n'\|}\right)$$

Distanza punto - punto

$$\|\overrightarrow{P_0 P_1}\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

Ortogonalità nei vettori in $\mathbb{R}^3$

$v = (v_1, v_2, v_3)$ $\quad w = (w_1, w_2, w_3)$ $\qquad v \perp w$ se $\langle v, w \rangle = 0$

due rette sono ortogonali se

$$r \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \qquad r' \begin{cases} x = x_0' + l't' \\ y = y_0' + m't' \\ z = z_0' + n't' \end{cases}$$

$r \perp r'$ se

$ll' + mm' + nn' = 0$

Una retta è ortogonale ad un piano π quando tutti i vettori di giacitura del piano sono ortogonali a i dei vettori direttori di r $(x, y, z) \perp (a, b, c)$

Distanza punto - retta A^2

$P(x_0, y_0)$ $\quad r = ax + by + c = 0$ $\quad d(P, r) = d(P, Q)$ $\quad Q = r \cap s$

$r \perp s$

$$s \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \qquad a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c = 0$$

$$t = \frac{-ax_0 - by_0 - c}{a^2 + b^2}$$

$$Q \begin{cases} x = x_0 + at_0 \\ y = y_0 + bt_0 \end{cases} \qquad d(P, Q) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distanza retta - retta in A_2

Se non // è 0 altrimenti

$d(r, r') = d(P, r)$ $\quad P \in r'$

Distanza punto - piano

$P(x_0, y_0, z_0) \quad \pi : ax + by + cz + d = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distanza piano - piano

π e π' paralleli $d(\pi, \pi') = d(p, \pi)$ $p \in \pi'$ se incidenti $= 0$

Distanza retta - retta in A^3

rette sghembe o parallele piano π contenente r e parallelo a s $\quad r \subset \pi \quad \pi \parallel s$

$d(r, s) = d(\pi, P) \quad P \in s$

Distanza retta - punto in A^3

Trovo piano $\perp$ retta passante per P, (a, b, c) vett dir. di r = $ax + by + cz + d = 0$, per trovare d metto (x_0, y_0, z_0), sistema retta - piano, trovi punto Q e $d(P, Q)$

Prodotto vettore

in $\mathbb{R}^3$ $\quad v \times w = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} =$

$= (v_2 w_3 - v_3 w_2 , -v_1 w_3 + v_3 w_1 , v_1 w_2 - v_2 w_1)$

Proprietà

- linearità: $(cv + c'v') \times w = c(v \times w) + c'(v' \times w)$
- antisimmetrico: $v \times w \neq w \times v$, $v \times w = -w \times v$
- $v \times v = 0$
- prodotto misto:

$$\langle u, v \times w \rangle = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

$\langle v, v \times w \rangle = 0$, $\langle w, v \times w \rangle = 0$ $v \times w = 0$ sse sono prop.
altrimenti $v \times w$ è ortogonale sia a v che a w.

es. trovare vettore $\perp$ a $(2,3,0)$ e $(1,0,1)$

$$(2,3,0) \times (1,0,1) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (3, -2, -3)$$

es. trovare piano per $(1,1,1)$ parallelo ai vettori $(2,3,0)$ e $(1,0,1)$

eq. cart. avrà come coeff. $v \wedge w$

$$3(x-x_0)-2(y-y_0)-3(z-z_0)+d=0$$

$$3x-2y-3z+2=0$$

$$\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin\alpha = \text{Area parallelogramma}$$

$$\langle v,w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$$

$$\frac{1}{2}\|v\|\|w\| \sin\alpha = \frac{1}{2}\|v \times w\| = \text{Area triangolo}$$

$$\langle u, v \wedge w\rangle = \text{Volume parallelepipedo}$$

$$\frac{1}{6}\langle u, v \wedge w\rangle = \text{Volume tetraedro}$$

Disuguaglianza triangolare

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Dim: $(v+w)(v+w) =$

$$\|w\|^2 + 2vw + \|v\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$$

$$\Rightarrow \|v+w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2 \Rightarrow \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Piani Ortogonali

Quando i vettori a loro ortogonali, sono ortogonali

$\pi: ax+by+cz+d=0 \quad \pi': a'x+b'y+c'z+d'=0 \quad \pi \perp \pi'$ se

$aa'+bb'+cc'=0$

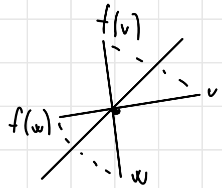
$$\cos(\alpha) = \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

Autovalori e Autovettori

V spazio vettoriale $f: V \to V$ app. lin. $v \in V: f(v) = \lambda v$

v si dice autovettore relativo all' autovalore λ

es. $V = V_0^2 \quad f: V \to V$, f sia la riflessione attraverso una retta passante per l'origine



se il vettore è parallelo a r

allora $f(v) = 1 \cdot v \quad \lambda = 1$ autovalore e v autovettore, se il vettore è ortogonale alla retta allora $f(v) = -1 \cdot v$, $\lambda = -1$

scelgo $v_1 \parallel r \neq 0$ e $v_2 \perp r \neq 0$ allora $E\{v_1, v_2\}$ è una base di V_0^2 di autovettori $f(v_1) = 1 \cdot v_1 + 0 v_2$, $f(v_2) = 0 v_1 - 1 v_2$

$$M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

v è un autovettore relativo all'autovalore 0 sse $f(v) = 0$

ovvero $v \in Ker(f)$ tranne 0.

$f: V \to V$ $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalori di f

$V_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$ è un sottospazio di V

detto autospazio relativo a λ

Dim: 1) $v_1 \in V_\lambda$, $v_2 \in V_\lambda$ allora

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

$v_1 + v_2$ è un autovettore $v_1 + v_2 \in V_\lambda$

2) $\alpha \in \mathbb{R}$ $v_1 \in V_\lambda$

$$f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = \alpha \lambda v_1 = \lambda(\alpha v_1)$$

Come si trovano gli autovalori?

$V_\lambda = Ker(f) - \lambda I$ $f - \lambda I : V \to V$ app. lin. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$v \longmapsto f(v) - \lambda v \qquad f(v) - \lambda v = 0$ sse $f(v) \in Ker(f - \lambda I)$

$v \in V_\lambda$, λ è un autovalore sse $Ker(f - \lambda I) \neq \{0\}$

consideriamo una base di $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V

$A = M_{EE}(f) \qquad M_{EE}(f - \lambda I) = M_{EE}(f) - \lambda I_n$

$M_{EE}(f - \lambda I) = A - \lambda I \qquad Ker(f - \lambda I) \neq 0$ sse $Im(f - \lambda I) \subsetneq V$

$\dim(Ker) + \dim(Im) = \dim(V) = n$ quindi $\rho(A - \lambda I_n) < n$

ovvero $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda I_n) = 0$$

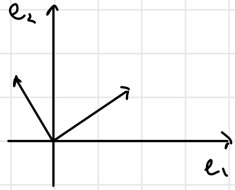
è un polinomio di grado $n = \dim(V)$ detto polinomio caratteristico di f (rispetto alla base E) ovvero di A.

$\lambda^n (-1)^n + \dots + \dots = 0$

Teorema

Al più esistono n autovalori distinti di un endomorfismo $f : V \to V$ dove $\dim(V) = n$

es. $V = V_0^2$ $\quad f: V \to V$ ruota 90°



Base $E = \{e_1, e_2\}$ di V

$f(e_1) = e_2$; $f(e_2) = -e_1$

$A = M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$\det = \lambda^2 + 1 \qquad \lambda^2 + 1 = 0$ non ha radici reali: non ci sono autovalori

$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0 \qquad \lambda = \pm 2$

caso $\lambda = 2 \quad V_2 = \mathrm{Ker}(B - 2I)$

$B - 2I = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \rho = 1 \qquad -x - y = 0 \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ base V_2

$B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ autovettore

caso $\lambda = -2 \quad V_{-2} = \mathrm{Ker}(B + 2I)$

$B + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho = 1 \qquad 3x - y = 0 \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ base di V_{-2}

$B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ autovettore

Base di $F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = M_{FF}(f)$

$D = M_F^E \cdot M_{EE}(f) \cdot M_E^F$

Diagonalizzazione

V spazio vettoriale $\quad f: V \to V$ endomorfismo

E base di V $\quad A = M_{EE}(f)$ $\quad$ se $\dim(V) = n$ allora A $n \times n$

polinomio caratteristico di A

$\det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$ ha grado n, cambio base da E a F

$B = M_{FF}(f) = M_{EF}(I) \cdot M_{EE}(f) \cdot M_{FE}(I) =$

$D = P^{-1} A P$ $\quad P$ invertibile

Il polinomio caratteristico non dipende dalla base quindi si si dice polinomio caratteristico dell'endomorfismo f.

Proprietà di $p_A(\lambda)$:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})}_{\text{Traccia di } A} \lambda^{n-1} + \dots + \underbrace{\det(A)}_{\text{termine noto}}$$

$p_f(\lambda)$ ha come radici reali gli autovalori di f, λ_0 è un autovalore relativo a λ_0

$$\{v \in V \mid f(v) = \lambda_0 v\}$$

molteplicità algebrica

$m_a(\lambda_0)$ è la molteplicità di λ_0 come radice di $p_f(\lambda)$

$$p_f(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_a(\lambda_0)} \cdot q(\lambda) \text{ con } q(\lambda) \neq 0$$

molteplicità geometrica

$m_g(\lambda_0)$ è la $\dim(V_{\lambda_0})$

Teorema

$$m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0) \quad \forall \lambda_0 \text{ di } f$$

Dim: Se $K = m_g(\lambda_0) \Rightarrow \dim(V_{\lambda_0}) = K$

Scelgo una base di $V_{\lambda_0} = \{v_1, \dots, v_K\}$ aggiungo vettori fino ad arrivare a n vettori

$E = \{v_1, \dots, v_K, v_{K+1}, \dots, v_n\}$ base di V

$$M_{EE}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \lambda_0 & \\ & & 0 & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$f(v_1) = \lambda_0 v_1 + \dots + 0 v_n$

$\vdots$

$f(v_K) = 0 v_1 + \dots + \lambda_0 v_K + \dots + 0 v_n$

$$\det(M_{EE}(f)-\lambda I)=(\lambda-\lambda_0)^k \det(X-\lambda I)$$

$$(\lambda-\lambda_0)^k \; p_x(\lambda) \qquad m_a(\lambda_0)\geq K = m_g(\lambda_0)$$

Teorema

$f: V \to V$ ammette una base di autovettori sse:

1) $p_f(\lambda)$ ha tutte radici reali

2) $m_a(\lambda_i)=m_g(\lambda_i) \quad \forall \lambda_i$

Lemma

Autovalori di autospazi diversi sono l.i., ovvero gli autospazi sono in somma diretta se $w_1+\dots+w_m=0$ $w_1 \in V_{\lambda_1}, \; w_m \in V_{\lambda_m}$ allora $w_1=\dots=w_m=0$

Dim: per induzione sul numero di vettori non nulli. $v_1=0$, passiamo da i vettori a i+1 vettori di (i+1) autospazi diversi

$v_1+\dots+v_{i+1}=0 \qquad f(v_1+\dots+v_{i+1})=0$

allora $f(v_1)+\dots+f(v_{i+1})=0$ allora $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{i+1}v_{i+1}=0$

moltiplico per la prima (λ_{i+1}) e sottraggo

$(\lambda_1-\lambda_{i+1})v_1+\dots\dots(\lambda_i-\lambda_{i+1})v_i=0$

Per ipotesi ciascuno di essi è 0 $v_1 = \dots = v_i = 0$ visto che $\lambda_j - \lambda_{i+1} \neq 0$ sono tutti distinti:

Quindi se valgono 1) e 2), per ciascun autospazio trovo una base, poi consideriamo l'unione di tutte queste basi.

Osservazione

Se λ_0 è un autovalore $m_a(\lambda_0) = 1$ allora $m_g(\lambda_0) = 1 = m_a(\lambda_0)$

Se il polinomio $p_f(\lambda)$ ha tutte radici semplici (con $m_a = 1$), allora f è diagonalizzabile, cioè ammette una base di autovett.

Prodotti scalari su spazi vettoriali metrici (euclidei)

V è uno spazio vettoriale $V \times V \to \mathbb{R}$ $(v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle$

con le seguenti proprietà:

- lineare in ambo le variabili

$$v \cdot w + v' w = (v + v') w \qquad cv \cdot w = c(v \cdot w)$$

- simmetrico $vw = wv$

- positività $vv \geq 0$ $vv = 0$ sse $v = 0$

NORMA $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$

In generale V spazio vett. metrico

$W \subseteq V$ sottospazio definisco [complemento ortogonale]

$W^\perp := \{ z \in V \mid \langle z, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W \}$

$W^\perp \cap W = \{0\}$, se $v \in W$ e $v \in W^\perp$ allora $\langle v, v \rangle = 0$

quindi $v = 0$.

Basi ortogonali, ortonormali

Base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di V si dice ortogonale se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$

$i \neq j$, si dice ortonormale se è ortogonale e $\|v_i\| = 1 \quad \forall i$

Algoritmo di Gram-Schmidt

Base qualunque $\rightsquigarrow$ base ortonormale

base di n vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$,

la base diventerà ortonormale $\{n_1, \dots, n_n\}$

$$n_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$n_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, n_1 \rangle n_1}{\|v_2 - \langle v_2, n_1 \rangle n_1\|}$$

$$n_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, n_1 \rangle n_1 - \langle v_3, n_2 \rangle n_2}{\|v_3 - \langle v_3, n_1 \rangle n_1 - \langle v_3, n_2 \rangle n_2\|}$$

$\vdots$

n_n

Proiezioni ortogonali

$W \subseteq V$ sottospazio vettoriale metrico

$p_W(v) \in W$ è la proiezione ortogonale di v, la differenza $v - p_W(v) \in W^\perp$.

Base ortonormale di W $\{e_1, \dots, e_m\}$

$p_W(v) = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle v, e_m \rangle e_m$

i prodotti scalari sono le coordinate rispetto alla base ortonor.

$W \oplus W^\perp = V$, $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$, $W^{\perp^\perp} = W$

$p_{W^\perp}(v) = v - p_W(v)$

V spazio vettoriale metrico, $W \subseteq V$ sottospazio

$W^\perp$ complemento ortogonale, $v \in V$ $\quad v = v_1 + v_2$

$v_1 \in W$, $v_2 \in W$, $v_1 = p_W(v)$ $\quad v_2 = p_{W^\perp}(v)$

Proprietà:

$\|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

Dim: $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v_1 + v_2, v_1 + v_2 \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_2 \rangle +$

$+ 2 \langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$

Osservazione:

$v \in V$, $w \in V$

- $<v+w, v+w> = <v,v> + 2<v,w> + <w,w>$

$= \|v\|^2 + 2<v,w> + \|w\|^2$

$$<v,w> = \frac{\|v+w\|^2 - \|w\|^2 - \|v\|^2}{2}$$

- $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 - 2<v,w> + \|w\|^2$

sommando le due

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

$$4<v,w> = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2.$$

V, W due spazi vettoriali metrici $f: V \to W$ app. lin.
esiste una funzione che va nella direzione opposta (aggiunta) $f^*: W \to V$ con la seguente proprietà
$\forall v \in V$, $\forall w \in W$

$$<f(v), w> = <v, f^*(w)>$$

Scelgo una base di V e di W o.n.
$\{e_1, \dots, e_n\} \in V$ e $\{e'_1, \dots, e'_m\} \in W$

$M_{EE'}(f) = A \qquad M_{EE'}(f^*) = A^T$

Nel caso $V = W$ $\quad f: V \to W = V$ se ho $f^* = f$, f^* si dice autoaggiunta, in questo caso la matrice $M_{EE}(f)$ è simmetrica.

Teorema Spettrale

Spettro è l'insieme dei autovalori.

Spazi vettoriali metrici, operatori autoaggiunti (simmetrici)

V spazio vettoriale metrico, $f: V \to V$ app. lineare autoagg.

$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle$, se scelgo E = base o.N. di V

$M_{EE}(f)$ è simmetrica.

Il teorema spettrale dice che un operatore simmetrico è diagonalizzabile tramite una base di autovettori ortonor.

- gli autovalori devono essere reali
- $f: V \to V$ autoaggiunta

Dim: Per induzione dimostriamo che è vero per $\dim(V) = n$ sapendo che è vero per $n-1$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore perché per ipotesi f è simmetrico

Sia $v \neq 0$ il relativo autovettore, consideriamo

$W = \text{Span}\{v\}$ $\dim(W) = 1$

$W^{\perp} = \{ w \in V \mid \langle w, v \rangle = 0 \}$ $\dim(W^{\perp}) = n-1$ (grassman)

$\langle f(w), v \rangle = \langle w, f(v) \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

ma $\langle v, w \rangle = 0$ quindi $\lambda \langle v, w \rangle = 0$

$f(w) \in W^{\perp}$

per ipotesi induttiva é diagonalizzabile tramite una base o.n. di autovettori.

Le matrici simmetriche sono diagonalizzabili, se A $n \times n$ simmetrica $P^{-1} A P = D$

D matrice diagonale, P matrice invertibile con colonne che sono una base o.n. di $\mathbb{R}^n$ vale sse $P^{-1} = P^{T}$

si chiamano matrici ortogonali

$P^{T} \cdot P = I$ sse P ha colonne o.n. sse le righe sono o.n.

Decomposizione spettrale

$f: V \to V$ operatore simmetrico

$\dim(V) = n$, gli autovalori distinti sono $\lambda_1, \dots, \lambda_m$

$m \leq n$, ogni autovalore ha il suo autospazio $\lambda_i \to V_{\lambda_i}$

gli autospazi sono ortogonali fra loro

$v \in V_{\lambda_i} \quad w \in V_{\lambda_j} \quad i \neq j$

$\langle f(v), w \rangle = \langle v, f(x) \rangle \qquad \lambda_i \langle v, w \rangle = \lambda_j \langle v, w \rangle$

allora $\langle v, w \rangle = 0$ perché $\lambda_i \neq \lambda_j$

$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m \qquad v \in V \quad v = v_1 + \dots + v_m$

$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j \qquad f(v) = f(v_1) + \dots + f(v_m) =$

$= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = \lambda_1 p_{v_1}(v) + \dots + \lambda_m p_{v_m}(v)$

infatti: $p_{v_1}(v) = v_1$

$v - v_1 = v_2 + \dots + v_m \in V_1^\perp$

$\vdots$

$p_{v_m}(v) = v_m \qquad f = \lambda_1 p_{v_1} + \dots + \lambda_m p_{v_m}$

es. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\lambda = 5 \qquad V_5 = \operatorname{Ker}(A - 5I)$

$\lambda = 2 \qquad V_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I)$

$$H_5 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Ker} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = V_5$$

base O.N. $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$ x y z

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Ker} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

base O.N. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)\right\}$

proiezione ortogonale su V_5 data da

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

proiezione ortogonale su V_2 data da

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}}, & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}}, & -\frac{1}{\sqrt{6}}, & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = C$$

$$A = 5B + 2C \qquad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$