1

COMPITO RO

Dati i seguenti vincoli di un problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} y_1 \quad & x_2 + 3x_3 \le 5 \\ y_2 \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ y_3 \quad & x_1 - 5x_3 \le 4 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

rispondere alla seguenti domande senza utilizzare algoritmi per la risoluzione diretta del problema o il metodo grafico:

a) Quali di questi vettori $x^{(1)} = \begin{bmatrix}3\\5\\0\end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix}4\\4\\0\end{bmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{bmatrix}7/2\\9/2\\0\end{bmatrix}$, sono soluzioni di base ammissibili?

b) Costruire (dando opportune spiegazioni sul metodo) un'opportuna funzione obiettivo per cui

b1) il punto $x^{(1)}$ è il suo punto di minimo; $\longrightarrow$ senza probl. min.

b2) il punto $x^{(2)}$ è il suo punto di minimo;

b3) i punti $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ sono entrambi punto di minimo;

b4) i punti $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ sono tutti punto di minimo.

c) Data la funzione obiettivo min $x_1 + x_2 + x_3$, dire (motivando la risposta) se possa esistere una soluzione del problema duale di valore pari a 1.

d) Data la funzione obiettivo del punto c), eseguire due iterazioni dell'algoritmo Primale-Duale partendo da una soluzione duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

COMPITO 1

$x_2 + 3x_3 \leq 5$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$

$x_1 - 5x_3 \leq 4$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

a) $x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^3 \begin{bmatrix} 7/2 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono SBA?

- Verifico ammissibilità
- Verifico posso essere in base (avrò comp. in base (>0) e comp. non in base (=0)).

• Verifico ammissibilità:

1)	2)	3)
$3 \leq 5$ ok	$4 \leq 5$ ok	$7/2 \leq 5$ ok
$8 \leq 8$ ok	$8 \leq 8$ ok	$8 \leq 8$ ok ✓
$3 \leq 4$ ok	$4 \leq 4$ ok	$7/2 \leq 4$ ok
$3, 5, 0 \geq 0$ ok	$4, 4, 0 \geq 0$ ok	$7/2,\ 9/2,\ 0 \geq 0$ ok
✓	✓	✓
AMMISSIBILE	AMMISSIBILE	AMMISSIBILE

• Verifico posso essere in base:

vincoli 3 $\rightarrow$ devono esserci 3 var. in base

↓

Sono del tipo $\begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$, ma nel nostro caso $x_3 = 0$ in x^1, x^2 e x^3

$\Rightarrow$ Nessun vettore è SBA.

~~STANDARDIZZO il problema:~~

~~$x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$~~

~~$x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 8$~~

~~$x_1 - 5x_3 + x_6 = 4$~~

~~$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$~~

b) Costruire una f.o. per cui:

b1) x^1 sia pt.o di minimo

b2) x^2 sia " " "

b3) x^1 e x^2 siano entrambi p.ti di minimo

b4) x^1, x^2 e x^3 sono tutti e 3 p.ti di minimo.

COMPITO ①

b) • avrà la forma di un PL $\Rightarrow$ $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$
• Almeno 3 var.
• Sarà probl. di minimo poiché chiede tutti pti di min. $\Rightarrow$ $\min \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$

b1) x^1 è pt. di minimo $x^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\downarrow$

• ammiss. ✓
• ottimo $\longrightarrow$ duale

duale:

$$\max \ 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$$
$$y_1 + y_2 + y_3 \le \alpha$$
$$y_1 + y_2 + 0 \le \beta$$
$$3y_1 + y_2 - 5y_3 \le \gamma$$
$$y_1, y_2, y_3 \le 0$$

$Sd_1 = \alpha - y_2 - y_3$

$Sd_2 = \beta - y_1 - y_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_3 = 0 \\ \alpha - y_2 = 0 \\ \beta - y_1 - y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_2 = \alpha \\ y_1 = \beta - \alpha \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \beta - \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \le \alpha \ ✓$$
$$\beta - \alpha + 0 \le \beta \ ✓$$
$$3\beta - 3\alpha + \alpha \le \gamma$$

$\Rightarrow$ $\alpha = -1$, $\beta = -1$

$\gamma \ge -1 \rightarrow \gamma = -1$

basta una qualsiasi terna che faccia risultare ammissibile la sol. del duale e quindi l'ottimalità di x^1.

$$\boxed{\min \ -x_1 - x_2 - x_3}$$

(d)

$$\min\ x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_2 + 3x_3 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_1 - 5x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$\min\ x_1 + x_2 + x_3$$
$y_1)\quad x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$
$y_2)\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 8$
$y_3)\quad x_1 - 5x_3 + x_6 = 4$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\max\ 5y_1 + 8y_2 + 4y_3$$
$$y_2 + y_3 \leq 1$$
$$y_1 + y_2 \leq 1$$
$$3y + y_2 - 5y_3 \leq 1$$
$$y_1 \leq 0$$
$$y_2 \leq 0$$
$$y_3 \leq 0$$

* Ammissibilità y^0:

$y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è amm. $\left(y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ No} \right)$

$$\begin{cases} Sd_1 = 1 \\ Sd_2 = 1 \\ Sd_3 = 1 \\ Sd_4 = 0 \\ Sd_5 = 0 \\ Sd_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$$

* PR:

$$\min\ 0$$
$$x_4 = 5$$
$$x_5 = 8$$
$$x_6 = 4$$

$$\Rightarrow \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ è sol. ottima.}$$

Confermo con il ~~duale~~ Primale:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
		1	1	1	0	0	0
x_4:	5	0	1	3	1	0	0
x_5:	8	1	1	1	0	1	0
x_6:	4	1	0	-5	0	0	1

$\Rightarrow$ Tableau ottimo $\Rightarrow$ $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

2

COMPITO RO

1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
\min 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\
3x_1 + 2x_2 = 12 \\
4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2 \\
2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Rispondere alla seguenti domande senza risolvere tramite l'utilizzo di algoritmi.

a) Quali di questi vettori $x^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ sono soluzioni di base ammissibili? Perchè?

b) Verificate se la/le soluzioni di base del punto a) sono anche ottime. → secondo me c'è qualcosa che non torna

c) Può esistere una soluzione ammissibile del duale di valore pari a 8? Perchè? Sì.

↳ usare dualità debole

2. Dato il problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned}
\min \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3 \\
3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \alpha \\
4x_1 - x_2 - 6x_3 \geq 2 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned}
\max (12-\alpha)y_1 + 2y_2 \\
3y_1 + 4y_2 \leq \beta \\
2y_1 - y_2 \leq -\gamma \\
-6y_2 \leq -1 \\
y_1 \leq 0 \quad y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

dove α, β, γ sono reali.

1. Quali valori di α, β, γ rendono il vettore $x^{(4)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ è soluzione ottima del problema.

2. Quali valori di α, β, γ rendono *il problema in forma canonica* per il metodo del simplesso primale?

3. Quali valori di α, β, γ rendono il problema in forma canonica duale?

4. Definire un'istanza del problema sulla base dei valori del punto precedente e risolvere con il metodo del Simplesso duale.

b) Verificare se i vettori SBA sono anche OTTIMI:

$\hookrightarrow$ T. dualità: $\begin{cases} \langle S_p, Y \rangle = 0 \checkmark \\ \langle S_d, X \rangle = 0 \end{cases}$

* DUALE DELLO STANDARDIZZATO:

$$\max \; 12y_1 + 2y_2 + 4y_3$$
$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 2$$
$$2y_1 + 2y_2 + \tfrac{1}{4}y_3 \le -3$$
$$-3y_2 - 2y_3 \le 1$$
$$-y_2 \le 0$$
$$y_3 \le 4$$
$$y_1, y_2, y_3, \cancel{y_4} \in \mathbb{R}$$

Ora devo verificare solo $\langle S_d, x \rangle = 0$:

$$X^1 = \begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ >0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$$

X^1:

$$\begin{cases} 2 - 3y_1 - 4y_2 - 2y_3 = 0 \\ 1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2/3 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = -1/2 \end{cases}$$

Ammissibile?

$2 + 0 - 1 \le 2 \checkmark$

$4/3 + 0 - 1/8 \le -3$

$\frac{32-1}{24} \le -3 \quad \times$

$\Rightarrow$ NON è OTTIMA

X^2:

$$\begin{cases} 3 + 2y_1 + 2y_2 + \tfrac{1}{4}y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 4 \end{cases}$$

Ammissibile?

$-6 + 0 + 8 \le 2 \checkmark$

$-4 + 0 + 1 \le -3 \checkmark$

$6 - 8 \le 1 \checkmark$

$y_2 = 0 \checkmark$

$y_3 = 4 \checkmark$

$\Rightarrow$ X^2 è OTTIMA

COMPITO ②

1) min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$y_1)$ $3x_1 + 2x_2 = 12$

$y_2)$ $4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2$

$y_3)$ $2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

a) $x^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono SBA?

- Verifico ammissibilità:

①	②	③
$12 = 12$	$12 = 12$	$12 = 12$
$6 \geq 2$	$3/2 \leq 4$	$13 \geq 2$
$4 \leq 4$	$12 \geq 12$	$2 + 9/8 \leq 4$
$4, 0, 2 \geq 0$	$0, 6, 0 \geq 0$	$1, 9/2, 0 \geq 0$
OK	OK	OK

$\Rightarrow x^1, x^2, x^3$ sono AMMISSIBILI

- Verifico sia in Base:

*Standardizzo:

min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 2$

$2x_1 + \frac{1}{4}x_2 - 2x_3 + x_5 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Vincoli = 3

$\Rightarrow$ devono esserci 3 var. in base, ovvero:

$\begin{bmatrix} \neq 0 \\ \neq 0 \\ \neq 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Trovo x_4 e x_5:

$\boxed{x^1}$

$12 = 12$

$16 - 6 - x_4 = 2$

$8 - 4 + x_5 = 4$

$x_4 = 8$

$x_5 = 0$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$ SBA

$\boxed{x^2}$

$12 = 12$

$12 - x_4 = 2$

$3/2 - x_5 = 4$

$x_4 = 10$

$x_5 = 5/2$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 10 \\ 5/2 \end{bmatrix}$ SBA

$\boxed{x^3}$

$4 + 9 - x_4 = 2$

$2 + 9/8 + x_5 = 4$

$x_4 = 11$

$x_5 = \frac{25}{8}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \\ 11 \\ 25/8 \end{bmatrix}$ NOT SBA

COMPITO 2

c) Uso il T. della Dualità debole, ovvero date 2 soluzioni:

$\forall \bar{x} : \bar{x} \in S$
$\forall \bar{y} : \bar{y} \in T$ vale: $c^T \bar{x} \geq \underbrace{b^T \bar{y}}_{8}$

$\Rightarrow$ nel mio caso dovrà verificarsi che

$c^T \bar{x} \geq 8$

$x' = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c^T \bar{x} = 9 > 8$ X

$\Rightarrow$ Non esiste sol. del duale t.c. il valore è 8.

COMPITO 2

2)

$\min \ \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \alpha$

$4x_1 - x_2 - 6x_3 \geq 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$x^4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

* Ammissibile?

$6 \leq 12 - \alpha$

$8 - 6 \geq 2$

$\boxed{\alpha \leq 6}$

$\downarrow$

STANDARD

$\min \ \beta x_1 - \gamma x_2 - x_3$

$y_1)\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 - \alpha$

$y_2)\ 4x_1 - x_2 - 6x_3 - x_5 = 2$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

$\xrightarrow{\text{DUALE}}$

$\max \ (12-\alpha) y_1 + 2y_2$

$3y_1 + 4y_2 \leq \beta$

$2y_1 - y_2 \leq -\gamma$

$\cancel{0} - 6y_2 \leq -1$

$y_1 \leq 0$

$-y_2 \leq 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$\langle Sd, x \rangle = 0$

affinché $x^4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sia sol. ottima

deve essere del tipo $\begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Sd_1 = \beta - 3y_1 - 4y_2 \Rightarrow \beta - 3y_1 - 4y_2 = 0 \rightarrow \beta - 3y_1 - \frac{2}{3} = 0$

$Sd_3 = -1 + 6y_2 \Rightarrow -1 + 6y_2 = 0 \quad y_2 = 1/6$

$-3y_1 = \frac{2}{3} - \beta$

$\begin{cases} y_1 = 3\beta - 2 \\ y_2 = 1/6 \end{cases}$

$9\beta - 6 + \frac{2}{3} \leq \beta \longrightarrow 8\beta - \frac{18+2}{3} \leq 0 \longrightarrow \boxed{\beta \leq \frac{2}{3}}$

$6\beta - 4 - 1/6 \leq -\gamma$

$\boxed{\gamma \leq -6\beta + \frac{23}{6}}$

$\boxed{\alpha \leq 6}$

$-1 \leq -1$ ✓

$3\beta - 2 \leq 0 \longrightarrow \beta \leq \frac{2}{3}$

$-1/6 \leq 0$ ✓

$-4 + \frac{23}{6}$

una combinazione di α, β, γ che rende x^4 ottimo è:

$\alpha = 6, \ \beta = 2/3, \ \gamma = -\frac{1}{6}$

2) Quali α, β, γ rendono il problema in forma canonica per il simplesso primale?

Non ~~posso~~ $\exists$ α, β, γ poiché ci sono sempre un vincolo con il segno sbagliato (≥ 0).

3) Nella forma canonica duale:

$c^T \geq 0$; se min
$x_i \geq 0$

$c^T \leq 0$ se max
$x_i \geq 0$

$\Rightarrow$ $\beta \geq 0$, $-\gamma \geq 0 \rightarrow \gamma \leq 0$

$\Rightarrow$ impossibile trasf. in forma canonica poiché $c_{x_3} < 0$.

4) dato che non è possibile trovare valori al punto 3, non è possibile identificare un'istanza risolubile del problema.

4

COMPITO RO

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\max -4x_1 + 3x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 10$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0$$

1.1 Rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente

a) Quali di questi vettori $x_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_4 = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono soluzioni di base ammissibili?

b) Può esistere una soluzione di base ammissibile con x_2 e x_3 in base?

c) Può esistere una soluzione ottima del problema con x_1 in base?

1.2 Applicare l'algoritmo del Simplesso Duale per risolvere il problema.

1.3 Applicare l'algoritmo Primale-Duale partendo dalla soluzione duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$-\frac{4}{4}$

$-\frac{1}{2} \leq 3$

$-\frac{8}{4}$

$6 + \frac{1}{2}$

COMPITO 4

1) $\max \ -4x_1 + 3x_2 - x_3$

$x_1 + 3x_2 \geq 10$

$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \leq 0, \ x_3 \geq 0$

a) $x^1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $x^3 = \begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^4 = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono SBA?

Verifico Ammissibilità:

x^1	x^2	x^3	x^4
$10 \geq 10$ ✓	$12 \geq 10$ ✓	$10 \geq 10$ ✓	$11 \geq 10$ ✓
$10 \geq 8$ ✓	$18 \geq 8$ ✓	$15 \geq 8$ ✓	$23 \geq 8$ ✓
$10, 0, 0 \geq 0$ ✓	$12, 2 \geq 0$ ✓	$13, 0 \geq 0$ ✓	$14, 2 \geq 0$ ✓
	$0 \leq 0$ ✓	$-1 \leq 0$ ✓	$-1 \leq 0$ ✓
ok	ok	ok	ok

$\Rightarrow$ le sol. sono tutte ammissibili.

* STANDARDIZZO:

$\max \ -4x_1 + 3\bar{x}_2 - x_3$

$x_1 + 3\bar{x}_2 - x_4 = 10$

$x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - x_5 = 8$

$x_1, \ \bar{x}_2 = -x_2 \geq 0, \ x_3, x_4, x_5 \geq 0$

\# vincoli = 2
$\Rightarrow$ devono esserci 2 var in Base.

trovo x_4 e x_5:

x^1	x^2	x^3	x^4
$x_4 = 0$	$x_4 = 2$	$x_4 = 3$	$x_4 = 7$
$x_5 = 2$	$x_5 = 12$	$x_5 = 4$	$x_5 = 13$
$\begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 13 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 14 \\ -1 \\ 2 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix}$
SBA	NON SBA	NON SBA	NON SBA

Solo x^1 è SBA.

b)

$\exists$ SBA con x_2 e x_3 in base?

Una SBA con x_2 e x_3 in base sarà del tipo

$$\begin{bmatrix} 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -3\bar{x}_2 = 10 \longrightarrow x_2 = \frac{10}{3}$$

$$\bar{x}_2 + 4\bar{x}_3 = 8 \longrightarrow \cancel{x}\,\frac{10}{3} + 4x_3 = 8$$

$$x_2 = \frac{10}{3} \qquad \Rightarrow \quad x' = \begin{bmatrix} 0 \\ 10/3 \\ 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{7}{6}$$

c) Una SBA con x_1 in base sarà del tipo?:

$$\begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \end{bmatrix}$$

dunque:

$$\begin{cases} x_1 - 3\bar{x}_2 = 10 \\ x_1 + \bar{x}_2 = 8 \end{cases}$$

Si esiste

$$\begin{cases} 8 - \bar{x}^2 - 3x_2 = 10 \\ x_1 = 8 - \bar{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{x}_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1 = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 15/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è SBA

COMPITO 4

2) Riscrivo standardizzato (con minimo):

$$\min \quad 4x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$$

$$-x_1 + 3\bar{x}_2 + x_4 = -10$$

$$-x_1 - \bar{x}_2 - 4x_3 + x_5 = -8$$

$$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(molt. -1 a dx e sx)

		x_1	$\bar{x}_2$	x_3	x_4	x_5
		4	3	1	0	0
$x_4 =$	-10	$\boxed{-1}$	3	0	1	0
$x_5 =$	-8	-1	-1	-4	0	1

I + 4 II

II · (−1)

III + II

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	-40	0	15	1	4	0
$x_1 =$	10	1	-3	0	-1	0
$x_5 =$	2	0	-4	-4	-1	1

fine. (var. in base non neg.)

$$x^* = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

COMPITO 4

3) Applico Primale-Duale partendo da $y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

*Primale:

$$\min \; +4x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 10$$
$$x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 8$$
$$x_1 \geq 0, \; \bar{x}_2 = -x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

*Standard:

$$\min \; +4x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$$
$$y_1) \; x_1 - 3\bar{x}_2 - x_4 = 10$$
$$y_2) \; x_1 + \bar{x}_2 + 4x_3 - x_5 = 8$$
$$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$\longrightarrow$

*Duale:

$$\max \; 10y_1 + 8y_2$$
$$y_1 + y_2 \leq +4$$
$$-3y_1 + y_2 \leq +3$$
$$4y_2 \leq +1$$
$$-y_1 \leq 0$$
$$-y_2 \leq 0$$
$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

*Verifico Ammissibilità y^0:

$0 + 0 \leq -4$ ✓
$0 + 0 \leq -3$ ✓
$0 \leq -1$ ✓
$0 \leq 0$ ✓
$0 \leq 0$ ✓
$0, 0 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Sol. Ammissibile

* Applico cond. di Complementarietà:

$$\begin{cases} \langle S_p, Y \rangle = 0 \\ \langle S_d, X \rangle = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ già verificata poiché duale da standardizzato

$$\left.\begin{cases} Sd_1 = +4 - y_1 - y_2 \\ Sd_2 = +3 + 3y_1 - y_2 \\ Sd_3 = +1 - 4y_2 \\ Sd_4 = y_1 \\ Sd_5 = y_2 \end{cases}\right|_{y^0 = [0,0]} = \begin{cases} Sd_1 = 4 \\ Sd_2 = 3 \\ Sd_3 = 1 \\ Sd_4 = 0 \\ Sd_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 > 0 \\ x_5 > 0 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$$

*PRIMALE RISTRETTO:

$\min \; a_1 + a_2$

$\pi_1)\; \cancel{\ldots} - x_4 + a_1 = 10$

$\pi_2)\; - x_5 + a_2 = 8$

$x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0$

	a_1	a_2	x_4	x_5
	1	1	0	0
$a_1 = 10$	1	0	-1	0
$a_2 = 8$	0	1	0	-1

ristabilisco la forma idonea: I − II

	a_1	a_2	x_4	x_5
-10	0	1	1	0
10	1	0	-1	0
8	0	1	0	-1

I − III ⇒

	a_1	a_2	x_4	x_5
-18	0	0	1	1
10	1	0	-1	0
8	0	1	0	-1

STOP

dato che f.o. $\neq 0$ ⇒ la sol. trovata non è ottima

⇒ devo migliorarla: $y^1 = y^0 + \theta \pi^*$

⇒ *DUALE RISTRETTO:

$\max \; 10\pi_1 + 8\pi_2$

$-\pi_1 \leq 0$

$-\pi_2 \leq 0$

$\pi_1 \leq 1$

$\pi_2 \leq 1$

$\pi_1, \pi_2 \geq 0$

$\Rightarrow \pi^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}$

↳ sost. nei vincoli del duale

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta + \theta \leq 4 \\ -3\theta + \theta \leq 3 \\ 4\theta \leq 1 \\ \theta \geq 0 \\ \theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{1}{4} \Rightarrow y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}}$$

⇒ * Applico cond. complementarità:

$$\begin{cases} Sd_1 = 4 - 1/4 - 1/4 \\ Sd_2 = 3 + 3/4 - 1/4 \\ Sd_3 = 1 - 4 \cdot 1/4 \\ Sd_4 = 1/4 \\ Sd_5 = 1/4 \end{cases} \quad \begin{cases} Sd_1 = 7/2 \\ Sd_2 = 7/2 \\ Sd_3 = 0 \\ Sd_4 = 1/4 \\ Sd_5 = 1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

COMPITO (4)

* primale Ristretto:

min a_1

$\pi_1)\ a_1 = 10$

$\pi_2)\ x_3 = 2$

$x_3, a_1 \geq 0$

$$\begin{array}{cc|cc} & & a_1 & x_3 \\ & & 1 & 0 \\ \hline a_1 & 10 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{I} - \text{II} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cc|cc} & & a_1 & x_3 \\ & -10 & 0 & 0 \\ \hline a_1 & 10 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

STOP

la f.o. $\neq 0$ $\rightarrow$ non è sol. ottima

cerco $y^2 = y^1 + \theta \pi^*$

* Duale Ristretto:

$$\max\ 10\pi_1 + 2\pi_2$$

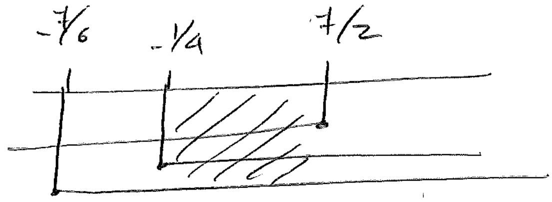
$$\pi_1 \leq 1$$

$$\pi_2 \leq 0$$

$$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \pi^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow y^2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\theta = \begin{pmatrix} 1/4 + \theta \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1/4 + \theta + 1/4 \leq 4 \\ -3/4 - 3\theta + 1/4 \leq 3 \\ 4/4 \leq 1 \ \checkmark \\ -1/4 - \theta \leq 0 \\ -1/4 \leq 0 \ \checkmark \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta \leq 7/2 \\ \theta \geq -7/6 \\ \\ \theta \geq -1/4 \end{cases}$$



$$-1/4 \leq \theta \leq 7/2$$

Prendo θ max: $\theta = 7/2$

$$\Rightarrow y^2 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} + 7/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 + 7/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Si va avanti...

(6)

COMPITO RO

Dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 4x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Rispondere alla seguenti domande senza risolvere tramite l'utilizzo di algoritmi.

a) Quali di questi vettori $x^{(1)} = \begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}$, $x^{(2)} = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$ sono soluzioni di base ammissibili? Perchè?

b) La/le soluzioni di base ammissibili del punto a) rimangono ancora tali se il problema di programmazione lineare da minimo cambia in massimo senza modificare funzione obiettivo e vincoli? Perchè?

c) Verificate se la/le soluzioni di base del punto a) sono anche ottime.

d) Può esistere una soluzione ammissibile del duale di valore pari a 16/2? Perchè?

e) Supponete che il problema di programmazione lineare sia della seguente forma

$$\begin{aligned} \min\ & \gamma x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 - \delta \\ & 4x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

dove γ, δ sono reali.

Calcolate per quali valori di γ e δ il vettore $x^{(3)} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ è soluzione ottima del problema.

COMPITO 6

$\min\ 2x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 \geq 2$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \geq 0$

$\longrightarrow$

$\min\ 2x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$

$y_1)\ 3x_1 - 2\bar{x}_2 + x_4 = 12$

$y_2)\ 4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - x_5 = 2$

$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

a) $x^1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono SBA?

Verifico Ammissibilità:

x^1

$12 \leq 12$ ✓

$16 \geq 2$ ✓

$4, 0, 0 \geq 0$ ✓

x^2:

$6 \leq 12$ ✓

$8 - 6 \geq 2$ ✓

$2, 0, 2 \geq 0$ ✓

entrambe ammissibili

Trovo x_4 e x_5:

x^1

$x_4 = 0$

$x_5 = 14$

x^2:

$x_4 = 6$

$x_5 = 0$

x^1 è SBA.

x^2 NON è SBA poiché ha ~~entrambe~~ 3 comp. in base al problema standard.

b) $\max\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \longrightarrow \min\ -2x_1 - 3\bar{x}_2 - x_3$

$3x_1 - 2\bar{x}_2 + x_4 = 12$

$4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - x_5 = 2$

$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Sì, perché la funz. obiettivo non influenza le SBA. La Regione Ammissibile è det esclusivamente dai vincoli.

c) $\max \; 12y_1 + 2y_2$

$3y_1 + 4y_2 \leq 2$

$-2y_1 + y_2 \leq 3$

$-3y_2 \leq 1$

$y_1 \leq 0$

$-y_2 \leq 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$Sd_1 = 0 \longrightarrow$ $\begin{cases} 2 - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases}$

$Sd_5 = 0 \longrightarrow$

$\begin{cases} y_1 = 3/2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$

Verifico ammissibilità:

$2 \leq 2$ ✓

$-3 \leq 3$ ✓ $\longrightarrow$ x^1 è SBA ma <u>non</u> è ottima.

$0 \leq 1$ ✓

$3/2 \leq 0$ ✗

$0 \leq 0$ ✓

d) $c^T x \geq b^T y$ (Per Dualità Debole)

$c^T x \geq \frac{16}{2} = 8$

$x^1 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow c^T x = 8 \geq 8$ Yes!

Sì

COMPITO 6

e) $\min \ \gamma x_1 - 3x_2 + x_3$

$3x_1 + 2x_2 \le 12 - \delta$

$4x_1 - x_2 - 3x_3 \ge 2$

$x_1 \ge 0, \ x_2 \le 0, \ x_3 \ge 0$

$x^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ deve essere SBA ottima

$\downarrow$ standardizzo

$\min \ \gamma x_1 + 3\bar{x}_2 + x_3$

$y_1)\ 3x_1 - 2\bar{x}_2 + x_4 = 12 - \delta$

$y_2)\ 4x_1 + \bar{x}_2 - 3x_3 - x_5 = 2$

$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

* Ammissibilità:

$3 \le 12 - \delta$

$-9 \le \delta$

$\boxed{\delta \le 9}$

$\downarrow$

$\max \ (12-\delta) y_1 + 2y_2$

$3y_1 + 4y_2 \le \gamma$

$-2y_1 + y_2 \le 3$

$-3y_2 \le 1$

$y_1 \le 0$

$-y_2 \le 0$

Affinché x^1 sia ottima deve essere del tipo:

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \end{bmatrix}$

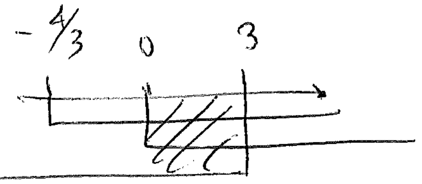
I) $\begin{cases} Sd_1 = \gamma - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ Sd_4 = -y_1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \frac{\gamma}{4} \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\gamma \le \gamma$ ✓

$\frac{\gamma}{4} \le 3 \to \gamma \le 3$

$-\frac{3\gamma}{4} \le 1 \to \gamma \ge -\frac{4}{3}$

$-\frac{\gamma}{4} \le 0 \to \gamma \ge 0$



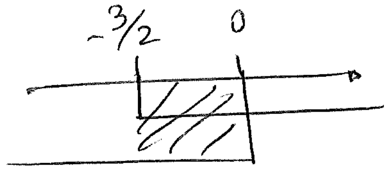
$\boxed{0 \le \gamma \le 3}$

II)

$$\begin{cases} Sd_1 = \gamma - 3y_1 - 4y_2 = 0 \\ Sd_2 = y_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = \dfrac{\gamma}{3} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{2}{3}\gamma \leq 3 \longrightarrow \gamma \geq -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\gamma}{3} \leq 0 \qquad \gamma \leq 0$$



$$\boxed{-3/2 \leq \gamma \leq 0}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{-\frac{3}{2} \leq \gamma \leq 3} \qquad e \qquad \boxed{\delta \leq 9}$$

RICERCA OPERATIVA - II PARTE

ESERCIZIO 1. Dato il seguente problema di programmazione lineare rispondere alla seguenti domande senza risolvere direttamente motivando le risposte:

$$\min 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq 8$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 6$$
$$x_1 \in R, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

a) $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ può essere una soluzione di base ammissibile?

b) Può esistere un vertice della regione ammissibile del problema con x_1 e x_2 strettamente positivi?

c) Può esistere una soluzione di base ottima *del problema con* x_1 e x_3 *in base?*

d) Potreste applicare l'algoritmo del Simplesso Duale per risolvere il problema? Se no, quali condizioni lo renderebbero applicabile?

ESERCIZIO 2. Risolvere il seguente problema di programmazione lineare con l'algoritmo Primale-Duale partendo dal punto iniziale duale $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\min x_1 - x_2$$
$$2x_1 - x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

COMPITO (7)

1) min $2x_1 + x_2 - x_3$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 8$

$2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 6$

$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$

a) $x' = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è SBA ?

∘ Ammissibile ? $\longrightarrow$ $3 \le 8$ ✓ $7 \ge 6$ ✓ $2 \in \mathbb{R},\ 1, 1 \ge 0$ ✓ Yes.

NO A PRIORI (già 3 comp. in base)

vincoli = 2 = # var. che devono essere in base

~~* standardizzo~~

~~$x_1 = x_1^+ - x_1^-$~~

~~min $2x_1^+ - 2x_1^- + x_2 - x_3$~~

~~$x_1^+ - x_1^- + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$~~

~~$2x_1^+ - 2x_1^- - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$~~

~~$x_1^+, x_1^-, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$~~

~~trovo x_4 e x_5 : $x_4 = 5$, $x_5 = 1$ $\to \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ non è SBA~~

~~$\Rightarrow x^1$ NON è SBA~~

b) ∃ vertice (SBA) con x_1 e $x_2 > 0$ (ovvero in base)?

sono del tipo $x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Per il T. degli scarti complementari $sd_2 = 0$, $sd_3 = 0$

* Standard:

$x_1 = x_1^+ - x_1^-$

min $2x_1^+ - 2x_1^- + x_2 - x_3$

$y_1)$ $x_1^+ - x_1^- + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$

$y_2)$ $2x_1^+ - 2x_1^- - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$ $\xrightarrow{\text{duale}}$

$x_1^+, x_3, x_5, x_4 \ge 0,\ x_1^- \le 0$

$x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

~~* duale:~~

max $8y_1 + 6y_2$

$y_1 + 2y_2 \le 2$

$-y_1 - 2y_2 \le 2$

$3y_1 - y_2 \le 1$

$-2y_1 + 4y_2 \le -1$

$y_1 \le 0$

$-y_2 \le 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

* sono + complicati !!

Sost. gli 0 e vedo se $\exists$ x_2 e x_3:

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ -x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} -18 + 12x_3 - 2x_3 = 8 \\ x_2 = -6 + 4x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_3 = 26 \\ x_2 = -6 + 4x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = -6 + \frac{52}{5} \\ x_3 = \frac{\cancel{26}^{13}}{\cancel{10}_5} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{22}{5} \\ x_3 = \frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 22/5 \\ 13/5 \end{bmatrix} \checkmark$$

$\Rightarrow \exists$ SBA con x_2 e x_3 in base.

c) $\exists$ SBA OTTIMA con x_1 e x_3 in base?

- Verifico se $\exists$ SBA con x_1 e x_3 in base:

sono del tipo:

$$\begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \end{bmatrix}$$ che nello standardizzato diventerà: $$\begin{array}{c} x_1^+ \\ x_1^- \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Prendo x_1^+ perché per dominio è l'unico che può essere ≥ 0)

$$\begin{cases} x_1^+ - 2x_3 = 8 \\ 2x_1^+ + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^+ = 8 + 2x_3 \\ 16 + 4x_3 = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^+ = 3 \\ x_3 = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -5/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ NON è AMMISSIBILE PER IL DOMINIO ($x_3 \geq 0$).

COMPITO ⑦

d) ~~Lo~~ Per essere nella forma canonica del duale il problema dovrebbe avere $x_i \geq 0$ e $c_i \geq 0$ $\forall i$.

Nel nostro caso, $c_3 \leq 0$ e $x_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Non si può applicare l'alg. del Simplesso Duale.

COMPITO 7

2) Risolvere con alg. Primale - Duale partendo da $y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\min\ x_1 - x_2 \qquad\qquad \min\ x_1 + \bar{x}_2$$
$$2x_1 - x_2 \le 6 \quad \xrightarrow{\text{STANDARD}} \quad y_1)\ 2x_1 + \bar{x}_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 \ge 1 \qquad\qquad y_2)\ x_1 - \bar{x}_2 - x_4 = 1$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0 \qquad\qquad x_1, \bar{x}_2 \ge 0$$

* duale:

$$\max\ 6y_1 + y_2$$
$$2y_1 + y_2 \le 1$$
$$y_1 - y_2 \le 1$$
$$y_1 \le 0$$
$$-y_2 \le 0$$
$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

* Verifico ammissibilità $y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$0 \le 1$ ✓
$0 \le 1$ ✓
$0 \le 0$ ✓
$0 \le$ ✓
$0,0 \in \mathbb{R}$ ✓

y^0 ammissibile.

* Applico cond. Complementarietà:

$\langle s_p, y \rangle = 0 \longrightarrow$ verificato

$\langle s_d, x \rangle = 0$

$$\left.\begin{cases} s_{d_1} = 1 - 2y_1 - y_2 \\ s_{d_2} = 1 - y_1 + y_2 \\ s_{d_3} = -y_1 \\ s_{d_4} = +y_2 \end{cases}\right|_{y^0} \Rightarrow \begin{cases} s_{d_1} = 1 \\ s_{d_2} = 1 \\ s_{d_3} = 0 \\ s_{d_4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \\ x_4 > 0 \end{bmatrix}$$

* Primale Ristretto:

$$\min\ a_1$$
$$\pi_1\ x_3 = 6$$
$$\pi_2\ a_1 - x_4 = 1$$
$$x_3, x_4, a_1 \ge 0$$

		a_1	x_3	x_4
		1	0	0
a_1:	6	0	1	0
x_3:	1	1	0	-1

$\mathrm{I} - \mathrm{II} \Rightarrow$

		a_1	x_3	x_4
	-1	0	0	1
a_1:	6	0	1	0
x_3:	1	1	0	-1

STOP

$f.o \ne 0 \longrightarrow$ sol non è ottima

cerco $y^{(2)} = y^{(1)} + \theta \bar{\pi}^*$

* DUALE RISTRETTO:

$\max\ 6\pi_1 + 1\pi_2$

$\pi_2 \leq 1$

$\pi_1 \leq 0$ $\qquad \pi_1 = 0$ $\qquad \pi^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$-\pi_2 \leq 0$ $\qquad \pi_2 = 1$

$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$

$$y^2 = y^1 + \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta \leq 1 \\ -\theta \leq 1 \\ 0 \leq 0 \\ \theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \theta = 1 \qquad \Rightarrow y^2 = y^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* Verifico Ammissibilità:

$1 \leq 1$ ✓

$-1 \leq 1$ ✓ $\qquad y^2$ è ammissibile

$0 \leq 0$ ✓

$-1 \leq 0$ ✓

$$\begin{cases} Sd_1 = 1 - 0 - 1 \\ Sd_2 = 1 - 0 + 1 \\ Sd_3 = 0 - 0 \\ Sd_4 = 0 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} Sd_1 = 0 \\ Sd_2 = 2 \\ Sd_3 = 0 \\ Sd_4 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 > 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 > 0 \\ x_4 = 0 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* Primale Ristretto:

$\min\ 0$

$2x_1 + x_3 = 6$

$x_1 = 1$

	0	0	0
x_1:	6	2	1
x_3:	1	1	0

fine

$\Rightarrow y^2$ è sol. ottima.

$$\Rightarrow x^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(8)

APPELLO DI RICERCA OPERATIVA DEL 8 FEBBRAIO 2016 (II PARTE)

Problema 1

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

min $18x_1 + 15x_2 + 11x_3$
$6x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 10$
$2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 22$
$6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 46$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Boh!

con l'algoritmo del simplesso duale. Determinare, a ogni iterazione, la corrispondente soluzione duale complementare.
Successivamente scriverne il duale e risolvere quest'ultimo con il metodo del simplesso. Verificare che la sequenza di soluzioni di base corrisponda alla sequenza di soluzioni duali complementari ricavate precedentemente.

Problema 2

Risolvere il seguente problema di programmazione lineare

max $3x_1 + x_2 + 8x_3 + 10x_4$
$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 2$
$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 5$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

con il *metodo* **primale-duale** partendo dalla soluzione duale $y = (0,3)$.

Problema 3

Dato il seguente problema di programmazione lineare

max $x_1 + 2x_2 - 2x_3$
$x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -4$
$x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 2$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

verificare se i punti $x^{(1)} = [0\ 4\ 2\ 0\ 0]^T$, $x^{(2)} = [2\ 0\ 0\ 6\ 0]^T$ sono soluzioni di base ammissibili (non degeneri) per il problema. In caso affermativo verificarne anche l'ottimalità. Per le soluzioni di basi ammissibili per cui eventualmente non fosse stata trovate l'ottimalità, verificare le condizioni di illimitatezza per il problema.

COMPITO 8

8/02/2016

② $\max\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 10x_4$ $\qquad y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 2$

$4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$\downarrow$

standardizzo e trasf. in min:

$\min\ -3x_1 - x_2 - 8x_3 - 10x_4$

$y_1)\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 2$

$y_2)\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6x_4 + x_6 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

* duale:

$\max\ 2y_1 + 5y_2$

$3y_1 + 4y_2 \leq -3$

$y_1 + 3y_2 \leq -1$

$4y_1 + 3y_2 \leq -8$

$6y_2 \leq -10$

$y_1 \leq 0$

$y_2 \leq 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

* Ammissibilità y^0:

$12 \leq -3$ ✗

$\Rightarrow$ Non è sol. Ammissibile.

Ne trovo un'altra:

$y^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ T. Scarti Compl.: $\begin{cases} Sd_1 = -3 + 3 + 8 = 8 \\ Sd_2 = -1 + 1 + 6 = 6 \\ Sd_3 = -8 + 4 + 6 = 2 \\ Sd_4 = 2 \\ Sd_5 = 1 \\ Sd_6 = 2 \end{cases}$ $\Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ESAME 22/02/19 COMPITO DI RICERCA OPERATIVA

ESERCIZIO 1

DATO IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

Il prof ha detto che è min

$$\max \; 3x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

VERIFICARE, SENZA RISOLVERE IL PROBLEMA CON ALGORITMI PRIMALI O DUALI, SE

a) LE VARIABILI x_1 E x_3 POSSONO STARE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMO

b) LE VARIABILI x_1 E x_2 POSSONO NON ESSERE IN BASE CONTEMPORANEAMENTE ALL'OTTIMO

ESERCIZIO 2

RISOLVERE IL PROBLEMA DELL'ESERCIZIO 1 APPLICANDO L'ALGORITMO PRIMALE-DUALE (2 ITERAZIONI) ASSUMENDO LA $x_3 \geq 0$. SCEGLIERE LA SOLUZIONE DUALE INIZIALE IN MODO ARBITRARIO.

ESERCIZIO 3

DATO IL SEGUENTE TABLEAU, QUALI VALORI DEI PARAMETRI $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varphi$ PERMETTONO DI AFFERMARE

	α	β	γ	0	φ	0
3	-1	1	2	1	0	0
5	-1	4	1	0	1	0
δ	0	1	2	0	0	1

Rivedere

a) [redacted] CHE IL TABLEAU SIA OTTIMO

b) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO SIA ILLIMITATO

c) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO SIA VUOTO

d) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO AMMETTA OTTIMI MULTIPLI FINITI.

e) CHE IL PROBLEMA DI PL ASSOCIATO AMMETTA OTTIMI MULTIPLI AL FINITO E ALL'INFINITO

22/02/19
COMPITO (12)

---

(1) min $3x_1 - 2x_2 + x_3$

$$5x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3 \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ $\bar{x}_2 = -x_2$, $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, $x_3^+ \geq 0$, $x_3^- \leq 0$

* Standard:

min $3x_1 + 2\bar{x}_2 + x_3^+ - x_3^-$

y_1 $5x_1 - x_2 - x_3^+ + x_3^- + x_4 = 10$

y_2 $-x_1 - x_2 + 2x_3^+ - 2x_3^- - x_5 = 2$

$x_1, \bar{x}_2, x_3^+, x_4, x_5 \geq 0 \quad x_3^- \geq 0$

a) Una SBA ottima con x_1 e x_3 sono del tipo

$$\begin{array}{c} x_1 \\ \bar{x}_2 \\ x_3^+ \\ x_3^- \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 - x_3^+ = 10 \\ -x_1 + 2x_3^+ = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x_3^+ - 10 - x_3^+ = 10 \\ x_1 = 2x_3^+ - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3^+ = \frac{20}{9} \\ x_1 = \frac{40}{9} - 2 = \frac{22}{9} \end{cases}$$

* Duale:

max $10y_1 + 2y_2$

$x_1)$ $5y_1 - y_2 \leq 3$

$x_2)$ $-y_1 - y_2 \leq 2$

$x_3^+)$ $-y_1 + 2y_2 \leq 1$

$x_3^-)$ $+y_1 - 2y_2 \leq -1$

$x_4)$ $y_1 \leq 0$

$x_5)$ $-y_2 \leq 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} Sd_1 = 3 + y_2 - 5y_1 = 0 \\ Sd_{3^+} = 1 + y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 10y_2 + 5 - 3 \\ y_1 = 2y_2 - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9y_2 = 2 \\ y_1 = -\frac{4}{9} - 1 = -\frac{13}{9} \end{cases} \rightarrow y_2 = -\frac{2}{9}$$

$y_2 \geq 0$ X $\rightarrow$ $\nexists$ sbA ottima con x_1 e x_3 in base!

b) se x_1 e x_2 sono fuori dalla base entrambe all'ottimo,

x^* sarà del tipo:

$\cancel{I: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$ o $II: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}$ o $\cancel{III: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

devo verificare se $\exists$ almeno una SBA ottima $\forall$ tipo.

$IV: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \end{bmatrix}$ o $\cancel{V: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ >0 \end{bmatrix}}$ o $VI: \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$

II)

$$\begin{cases} -x_3^+ + x_4 = 8 \\ 2x_3^+ = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = 7 \\ x_3^+ = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Sd_{3^+} = 1 + y_1 - 2y_2 = 0 \\ Sd_4 = y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 1/2 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ è SBA OTTIMA.

(2)

$$\min \quad 3x_1 + 2\bar{x}_2 + x_3$$

$y_1)$ $5x_1 - \bar{x}_2 - x_3 + x_4 = 10$

$y_2)$ $-x_1 - \bar{x}_2 + 2x_3 - x_5 = 2$

$x_1, \bar{x}_2, x_3 \geq 0$

* Duale:

$$\max \quad 10y_1 + 2y_2$$

$5y_1 - y_2 \leq 3$

$-y_1 - y_2 \leq +2$

$-y_1 + 2y_2 \leq 1$

$y_1 \leq 0$

$-y_2 \leq 0 \rightarrow y_2 \geq 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

* trovo y^0:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y^0$

$+0 \leq 3$ ✓

$+0 \leq 2$ ✓

$0 \leq 1$ ✓

$0 \leq 0$ ✓

$0 \geq 0$ ✓

ok

* Cond. Compl.

$$\begin{cases} Sd_1 = 3 - 5y_1 + y_2 = 3 \\ Sd_2 = 2 + y_1 + y_2 = 2 \\ Sd_3 = 1 \\ Sd_4 = 0 \\ Sd_5 = 0 \end{cases} \longrightarrow x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}$$

* PR:

$\min \ a_1$

$\pi_1)$ $x_4 = 10$ $\quad x_4 = 10$

$\pi_2)$ $a_1 - x_5 = 2$ $\quad a_1 = 2$

		a_1	x_4	x_5
		1	0	0
$x_4 =$	10	0	1	0
$a_1 =$	2	1	0	-1

$\longrightarrow$

		a_1	x_4	x_5
	-2	0	0	1
$x_4 =$	10	0	1	0
$x_3 =$	-2	-1	0	1

$\Rightarrow$ la f.o $\neq 0$ $\longrightarrow$ sol. y^0 non è ottima,

ne cerco una migliore del tipo: $y^{(1)} = y^{(0)} + \theta \pi^*$

* DR:

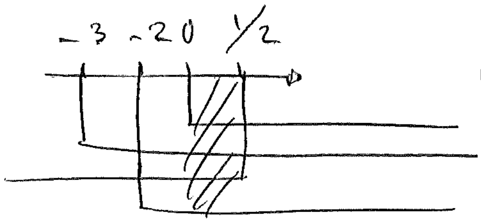
$$\max \quad 10\pi_1 + 2\pi_2$$

$$\pi_1 \gtrless 0$$
$$\pi_2 \le 1 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_1 = 0 \qquad\qquad \Rightarrow \quad \pi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$-\pi_2 \le 0 \qquad\qquad \begin{cases} \pi_2 \ge 0 \\ \pi_2 \le 1 \end{cases} \rightarrow \pi_2 = 1$$

$$\Rightarrow y^{(1)} = y^0 + \theta\pi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

Sosh. nel duale:

$$-\theta \le 3 \qquad\qquad \theta \ge -3$$
$$-\theta \le 2 \qquad\qquad \theta \ge -2$$
$$2\theta \le 1 \quad \rightarrow \quad \theta \le 1/2$$
$$\theta \ge 0 \qquad\qquad \theta \ge 0$$



$$0 \le \theta \le 1/2$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = 1/2}$$

$$\Rightarrow y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Sd_1 = 7/2 \\ Sd_2 = 3/2 \\ Sd_3 = 2 \\ Sd_4 = 0 \\ Sd_5 = 1/2 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* PR:

$$\min \quad 0$$

$$x_4 = 10 \qquad\qquad \Rightarrow \quad x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

③

a)

	α	β	γ	0	φ	0
3	1	1	2	1	0	0
5	-2	4	1	0	1	0
δ	0	1	2	0	0	1

$\varphi = 0$

$\delta \geq 0$

$\alpha, \beta, \gamma \geq 0$

b) $\varphi = 0$ $\alpha \leq 0$

$\delta \geq 0$ $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ illimitato

c) $\delta < 0$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $\varphi = 0$

d)

Ricerca operativa Esame 30/01/19. (13)

1) min $2x_1 + x_2 + x_3$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 2$$

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \geq 0$$

Domande

1) È possibile che $[x_1, x_2]$ sono in base all'ottimo?

2) È possibile che $[x_1, x_2]$ sono entrambe fuori base all'ottimo?

3) Si può applicare il simplesso duale?

---

2) max $2x_1 + x_2 - x_3$

$$-3x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 2$$

$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \leq 0 \quad x_3 \geq 0$$

Domande

a) $x^T = [1\ 0\ 1]$ è un vertice della regione ammissibile?

b) Applicare il primale - duale al problema precedente partendo dalla sol duale $y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

COMPITO (13)
ESAME 30/1/19

1) $\min \; 2x_1 + x_2 + x_3$

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 2$$
$$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \leq 0, \; x_3 \geq 0$$

a) ∄ è possibile che x_1 e x_2 siano in base all'ottimo?

standard:

$$\min \; 2x_1 - \bar{x}_2 + x_3$$
$$y_1) \; 3x_1 - 5\bar{x}_2 + x_3 - x_4 = 2$$
$$y_2) \; 2x_1 - 4\bar{x}_2 - 2x_3 + x_5 = 4$$
$$x_1, \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Una SBA con x_1 e x_2 sarebbe del tipo:

$$\begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{trovo } x_1 \text{ e } x_2:$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 5\bar{x}_2 = 2 \\ 2x_1 - 4\bar{x}_2 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 6 + 6\bar{x}_2 - 5\bar{x}_2 = 2 \\ x_1 = 2 + 2\bar{x}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{x}_2 = -4 \\ x_1 = -6 \end{cases}$$

⇒ ∄ SBA con x_1 e x_2 in base.
(e dunque SBA ottima).

b) ∃ SBA con x_1 e x_2 fuori base?

⇒ sono del tipo:

$$\underset{\text{I}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}} \circ \underset{\text{II}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ 0 \\ >0 \end{bmatrix}} \circ \underset{\text{III}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \end{bmatrix}}$$

I) $$\begin{cases} x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2 + x_3 \\ x_3 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = -4 \end{cases}$$ NON Ammissibile per Dominio

$\text{II})\quad \begin{cases} x_3 \cancel{\;} = 2 \\ -2x_3 + x_5 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_5 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ è SBA

* Duale:

$$\max \; 2y_1 + 4y_2$$

$$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 &\leq 2 \\ -5y_1 - 4y_2 &\leq -1 \\ y_1 - 2y_2 &\leq 1 \\ -y_1 &\leq 0 \\ +y_2 &\leq 0 \\ y_1, y_2 &\in \mathbb{R} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} Sd_1 = 2 - 3y_1 - 2y_2 \\ Sd_2 = -1 + 5y_1 + 4y_2 \\ Sd_3 = 1 - y_1 + 2y_2 \\ Sd_4 = y_1 \\ Sd_5 = -y_2 \end{cases}$$

Per il T. degli scarti complementari:

$\langle Sd, x \rangle = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} Sd_3 = 0 \\ Sd_5 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 - y_1 + 2y_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

* verifico ammissibilità:

$3 \leq 2$ ✗

$-5 \leq -1$ ✓

$1 \leq 1$ ✓ $\longrightarrow$ Non è ammissibile $\Rightarrow$ Non è ottima.

$-1 \leq 0$ ✓

$0 \leq 0$ ✓

$\text{III})\quad \begin{cases} -x_4 = 2 \\ x_5 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2 \\ x_5 = 4 \end{cases}$ Non ammissibile.

$\Rightarrow \nexists$ sol. in base ottima con x_1 e x_2 ~~...~~ fuori dalla base.

COMPITO 13

c) $C_z^T \geq 0$ ma $c^T \geq 0$ ✓

$x_i \geq 0 \quad \forall i$ ma $x_2 \leq 0 \rightarrow$ ✗ NOT

$\Rightarrow$ Non si può applicare simplesso Duale.

2) $\max \ 2x_1 + x_2 - x_3$

$-3x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 2$

$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 4$

$x_1 \geq 0, \ x_2 \leq 0, \ x_3 \geq 0$

a) $x^T = [1,0,1]$ è vertice? (Vertice = SBA)

*Ammissibile?

$-3 + 0 - 1 \geq 2$ ✗ $\rightarrow$ NON AMMISSIBILE

$2 + 0 - 2 \leq 4$ ✓

$\Rightarrow$ NO

b) $y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

*Standardizzo:

$\min \ -2x_1 + \bar{x}_2 + x_3$

$y_1) \ -3x_1 - 5\bar{x}_2 - x_3 - x_4 = 2$

$y_2) \ 2x_1 - 4\bar{x}_2 - 2x_3 + x_5 = 4$

$x_1 \geq 0, \ \bar{x}_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

*Duale:

$\max \ +2y_1 + 4y_2$

$-3y_1 + 2y_2 \leq -2$

$-5y_1 - 4y_2 \leq 1$

$-y_1 - 2y_2 \leq 1$

$-y_1 \leq 0$

$+y_2 \leq 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

*Verifico se y^0 è ammissibile:

$-3 \leq -2$

$-5 \leq +1$

$-1 \leq 1$

$-1 \leq 0$

$0 \leq 0$

Ammissibile

* Verifico cond. complementarietà:

$\langle Sd, x \rangle = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} Sd_1 = -2 + 3y_1 - 2y_2 \\ Sd_2 = 1 + 5y_1 + 4y_2 \\ Sd_3 = 1 + 1y_1 + 2y_2 \\ Sd_4 = 0 + 1y_1 + 0 \\ Sd_5 = 0 + 0 + 1 \end{array}\right|_{y^0} = \left\{\begin{array}{l} Sd_1 = 1 \\ Sd_2 = 6 \\ Sd_3 = 2 \\ Sd_4 = 1 \\ Sd_5 = 0 \end{array}\right. \rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \geq 0 \end{bmatrix}$$

* PR:

$\min a_1$

$\pi_1)\quad a_1 = 2$

$\pi_2)\quad x_5 = 4 \qquad a_1 = 2$

$a_1, x_5 \geq 0 \qquad x_5 = 4$

	a_1	x_5
	1	0
	1	0
	0	1

	a_1	x_5
-2	0	0
$a_1 = 2$	1	0
$x_5 = 4$	0	1

$f_0 \neq 0$ non è ottima

$y^1 = y^0 + \theta \pi^*$

* DR:

$\max 2\pi_1 + 4\pi_2$

$\pi_1 \geq 1$

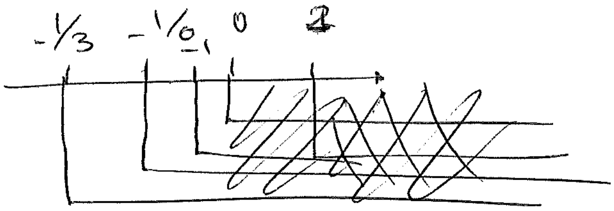
$\pi_2 \geq 0$

$\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \pi_1 = 1, \ \pi_2 = 0 \rightarrow \pi^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y^1 = y^0 + \theta\pi^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$y^1 = \begin{pmatrix} 1+\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left|\begin{array}{l} -3-3\theta \leq -2 \\ -5-5\theta \leq 1 \\ -1-\theta \leq 1 \\ -1-\theta \leq 0 \\ 0 \leq 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \theta \geq -1/3 \\ \theta \geq -6/5 \\ \theta \geq 2 \\ \theta \geq -1 \end{array}\right.$$



$\boxed{\theta \geq 2}$

RANGE APERTO

$\Rightarrow$ il duale è illimitato

$\Rightarrow$ il Primale è vuoto

09/19 RICERCA OPERATIVA

14

ESERCIZIO 1

DATO IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\min \; 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

SENZA RISOLVERE IL PROBLEMA E UTILIZZARE METODI GRAFICI, RISPONDERE, MOTIVANDO, PERCHÉ:

a) IL VETTORE $x = (1,1,1)$ NON PUÒ ESSERE UN VERTICE DELLA REGIONE AMMISSIBILE

b) LA PRIMA E LA SECONDA COMPONENTE, OVVERO x_1 E x_2, NON POSSONO ESSERE IN BASE ALL'OTTIMO CONTEMPORANEAMENTE

ESERCIZIO 2

SENZA RISOLVERE DIRETTAMENTE IL PROBLEMA E UTILIZZARE METODI GRAFICI, DIRE PERCHÉ IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE MATEMATICA È ILLIMITATO:

$$\min \; x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$$

ESERCIZIO 3

QUANTE SOLUZIONI DI BASE AMMETTE IL SEGUENTE PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE

$$\min \; 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$
$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 \geq 1$$
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0$$

RISPONDERE SENZA RISOLVERE IL PROBLEMA E MOTIVARE LA RISPOSTA.

COMPITO 14

① min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$\longrightarrow$ min $2x_1 - 3x_2 + x_3$

$$2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

a) $x^T = (1,1,1)$ può essere SBA?
verifico vincoli e dominio:

$2 + 1 + 1 \geq 4$ ✓

$2 - 1 + 2 \leq 10$ ✓

$1,1,1 \geq 0$ ✓

Anche se è SA, non può essere SBA perché ho 3 comp. in base ma dovrebbero essere 2.

b) Verifico se $\exists$ SBA ottima con x_1 e x_2 in base:

$$\begin{bmatrix} >0 \\ >0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x_1 = 14 \\ x_2 = -10 + 2x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 7/2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists$ SBA con x_1 e x_2 in base

$\Rightarrow \nexists$ SBA " " " " all'ottimo.

②

$$\min \; x_1 - 3x_2 + x_3$$

$y_1)\quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 8$

$y_2)\quad x_1 - x_2 + x_3 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_3 \leq 0$

$\longrightarrow$

$$\min \; x_1 - 3x_2 + x_3$$

$x_1 + x_2 - \bar{x}_3 + x_4 = 8$

$x_1 - x_2 - \bar{x}_3 - x_5 = 1$

$x_1, x_2, \bar{x}_3, x_4, x_5 \geq 0$

*Duale:

$$\max \; 8y_1 + y_2$$

$y_1 + y_2 \leq 1$

$y_1 - y_2 \leq -3$

$y_1 + y_3 \leq 1$

$y_1 \leq 0$

$-y_2 \leq 0$

$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

Cerco una sol. ammissibile:

$y^\circ = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$-3 \leq 1$ ✓

$-3 \leq -3$ ✓

$-3 \leq 1$ ✓

$-3 \leq 0$ ✓

$0 \leq 0$ ✓

$\Rightarrow$ il problema Duale è LIMITATO e dunque anche il Primale è LIMITATO.

③

$$\min \; 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$
$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 \ge 1$$
$$x_1 \ge 0,\; x_2 \ge 0,\; x_3 \ge 0$$

$\longrightarrow$

$$\min \; 2x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_5 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

Uso la formula:

$$\binom{n}{m} = \binom{\#\,var}{\#\,vincoli} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2}} = 10$$

31/01/2019

$\min \; 2x_1 + x_2 + 2x_3$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 8$

$2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 6$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

a) $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Può essere una SBA?

- Ammissibilità:

$2+3-2 \le 8$ ✓

$4-1+4 \ge 6$ ✓ $\rightarrow$ Sol. Ammissibile.

$2,1,1 \ge 0$ ✓

- Standardizzo:

$\min \; 2x_1 + x_2 + 2x_3$

$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$

$2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$

\# var. in base = \# vincoli Principale

$\Downarrow$

$\bar{x}$ NON è SBA.

b) Modificare il Problema affinché $\bar{x}$ sia SBA.

$x_4 = 8 - \cancel{2} - 3 + \cancel{2} = 5$

$x_5 = -6 + 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -6 + 4 - 1 + 4 = 1$

$\Rightarrow$ Aggiungo i vincoli:

$x_1 - x_2 - x_3 = 0$

$3x_1 - x_2 - x_3 = 4$

c) $\exists$ SBA con x_1 e x_2 in base?

Cerco una sol del tipo $\begin{bmatrix} >0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 8 - 3x_2 \\ 16 - 6x_2 - x_2 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{56 - 30}{7} \\ x_2 = \dfrac{10}{7} \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{26}{7} \\ x_2 = \dfrac{10}{7} \end{cases}$

verifico dominio: $26/7 \geq 0$ ✓, $10/7 \geq 0$ ✓ $\Rightarrow \exists$ SBA con x_1 e x_2 in base.

d) $\exists$ SBA ottima con x_1 e x_3 in base?

$\Rightarrow$ Sono del tipo $\begin{bmatrix} >0 \\ 0 \\ >0 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 8 + 2x_3 \\ 16 + 8x_3 = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 8 + 2x_3 = 3 \\ x_3 = -5/2 \end{cases}$

$x_3 \leq 0 \rightarrow \nexists$ SBA con x_1 e x_3 in base

$\Rightarrow \nexists$ SBA ottima con x_1 e x_3 in base.

e)

f) Applicare Simplesso Duale:

- verifico sia nella forma canonica:

$c^T \geq 0$ ✓

$x \geq 0$ ✓

- Standardizzo:

$$\min \ 2x + x_2 + 2x_3$$

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -8$$

$$-2x + x_2 - 4x_3 + x_5 = -6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	2	1	2	0	0
$x_4 = +8$	+1	$\boxed{+3}$	-2	+1	0
$x_3 = -6$	-2	1	$\boxed{-4}$	0	1

$\min \left\{ \left| \left(\frac{c_i}{a_i} \right) \right| \right\} = \left\{ \left| \frac{2}{1} \right|, \left| \frac{1}{-3} \right|, \left| \frac{2}{2} \right|, \cancel{\left| \frac{0}{1} \right|} \right.$

$\left| \frac{2}{-2} \right|, \left| \frac{1}{1} \right|, \left| \frac{2}{4} \right|$

$III / 4$

$II + 2III$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_3
-3	1	$\frac{5}{4}$	0,	0	$+1/2$
$x_4 = 11$	0	$5/2$	0	1	$-1/2$
$x_3 = \frac{3}{2}$	$1/2$	$-1/4$	1	0	$-1/4$

STOP.

31/01/2020

f) Risolvere con Primale-Duale:

$$\min \; 2x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 8$$
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \ge 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$y^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

* standardizzo:

$$\min \; 2x_1 + x_2 + 2x_3$$
$$y_1)\quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 8$$
$$y_2)\quad 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_5 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

* Duale:

$$\max \; 8y_1 + 6y_2$$
$$y_1 + 2y_2 \le 2$$
$$3y_1 - y_2 \le 1$$
$$-2y_1 + 4y_2 \le 2$$
$$y_1 \le 0$$
$$-y_2 \le 0$$
$$y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

* verifico y^0 sia ammissibile:

$0 \le 2$ ✓
$0 \le 1$ ✓
$0 \le 2$ ✓ ⇒ Ammissibile
$0 \le 0$ ✓
$0 \le 0$ ✓

* Applico cond. Complementarità:

$$\langle S_p, Y \rangle = 0$$
$$\langle S_d, X \rangle = 0$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{l} Sd_1 = 2 - y_1 - 2y_2 \\ Sd_2 = 1 - 3y_1 + y_2 \\ Sd_3 = 2 + 2y_1 - 4y_2 \\ Sd_4 = -y_1 \\ Sd_5 = y_2 \end{array}\right. \Bigg|_{y^0} = \left\{\begin{array}{l} Sd_1 = 2 \\ Sd_2 = 1 \\ Sd_3 = 2 \\ Sd_4 = 0 \\ Sd_5 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ge 0 \\ \ge 0 \end{bmatrix} = X$$

* PRIMALE RISTRETTO:

$$\min \; a_1$$
$$\pi_1)\quad x_4 = 8$$
$$\pi_2)\quad -x_5 + a_1 = 6$$
$$x_4, x_5, a_1 \ge 0$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r|rrr} & a_1 & x_4 & x_5 \\ & 1 & 0 & 0 \\ \hline x_4 = 8 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 = 6 & 1 & 0 & -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r|rrr} & a_1 & x_4 & x_5 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \\ \hline x_4 = 8 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 = 6 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

$\Rightarrow y^0$ non è ottima (f.o. $\neq 0$)

*Duale Ristretto:

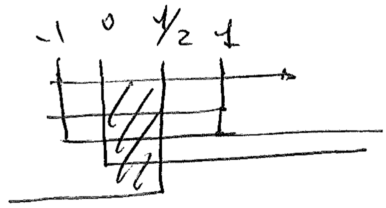
$$\max\ 8\pi_1 + 6\pi_2$$

$$\begin{aligned} x_4)\quad & \pi_1 \le 0 \\ & -\pi_2 \le 0 \\ a_1)\quad & \pi_2 \le 1 \\ \hline & \pi_1, \pi_2 \gtrless 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \pi_1 &= 0 \\ \pi_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \pi^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y^1 = y^0 + \theta\pi^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \theta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

*Trovo θ con l'ammissibilità:

$$\begin{cases} 2\theta \le 2 \\ -\theta \le 1 \\ 4\theta \le 2 \\ 0 \le 0 \\ -\theta \le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \theta \le 1 \\ \theta \ge -1 \\ \theta \le 1/2 \\ \theta \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$0 \le \theta \le 1/2$$

$$y^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

*Applico Cond. Compl.:

$$\begin{cases} Sd_1 = 1 \\ Sd_2 = 3/2 \\ Sd_3 = 0 \\ Sd_4 = 0 \\ Sd_5 = 1/2 \end{cases} \longrightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ >0 \\ >0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*PR:

$$\begin{aligned} \min\ & 0 \\ & -2x_3 + x_4 = 8 \\ & 4x_3 = 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = 11 \\ x_3 = 3/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$