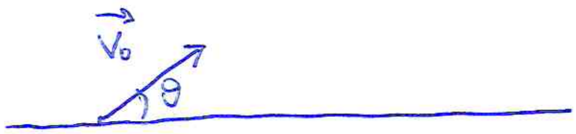
CORSO DI FISICA PER INFORMATICA A.A. 2022-2023

PRIMO ESONERO SCRITTO 18/04/2023

Problema n. 1

a)



Fissato il modulo $v_0 = |\vec{v}_0|$ della velocità di lancio del sasso, la gittata del sasso è

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta)$$

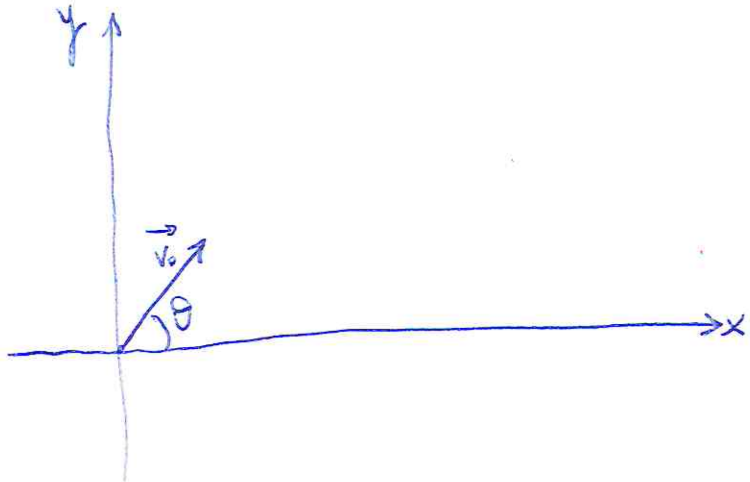
, da cui si vede che D risulta massima quando $\sin(2\theta) = 1 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$ rad

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45^\circ}$$

Il valore corrispondente della gittata è quindi

$$\boxed{D = \frac{v_0^2}{g} = \frac{(5 \text{ m s}^{-1})^2}{9{,}81 \text{ m s}^{-2}} = 2{,}55 \text{ m}}$$

b)



La componente della velocita' istantanea del sasso lungo l'asse verticale y varia nel tempo secondo la legge

$$V_y(t) = V_{y0} - g t \quad , \quad \text{con} \quad V_{y0} = V_0 \cos\theta = V_0 \cos\frac{\pi}{4} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

Pertanto, il sasso raggiunge la quota massima all'istante τ_1 tale che $V_y(\tau_1) = 0$, cioe' tale che

$$V_{y0} - g\tau_1 = 0, \quad \text{da cui} \quad g\tau_1 = V_{y0}, \quad \text{e infine}$$

$$\boxed{\tau_1 = \frac{V_{y0}}{g} = \frac{V_0}{\sqrt{2}\, g} = \frac{5 \text{ m s}^{-1}}{\sqrt{2} \cdot (9{,}81 \text{ m s}^{-2})} = 0{,}36 \text{ s}}$$

La quota massima raggiunta dal sasso e' quindi la quota raggiunta all'istante τ_1:

$$y(t) = y_0 + V_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \ , \quad \text{da cui, essendo } y_0 = 0:$$

$$h_M = y(\tau_1) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cdot \tau_1 - \frac{1}{2} g \tau_1^2 = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V_0}{\sqrt{2} g} - \frac{1}{2} \cdot \cancel{g} \cdot \frac{V_0^2}{2 g^{\cancel{2}}} \ , \quad \text{da cui:}$$

$$\boxed{h_M = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{V_0^2}{4g} = \frac{V_0^2}{4g} = \frac{(5\ m\ s^{-1})^2}{4\cdot(9{,}81\ m\ s^{-2})} = 0{,}64\ m}$$

c) Il tempo che il sasso impiega per arrivare a terra partendo dalla quota massima della ~~sua~~ traiettoria e' uguale, come noto, al tempo che il sasso aveva impiegato per arrivare al culmine della sua traiettoria partendo da terra, cioe' e' uguale al valore τ_1 calcolato nel punto b).

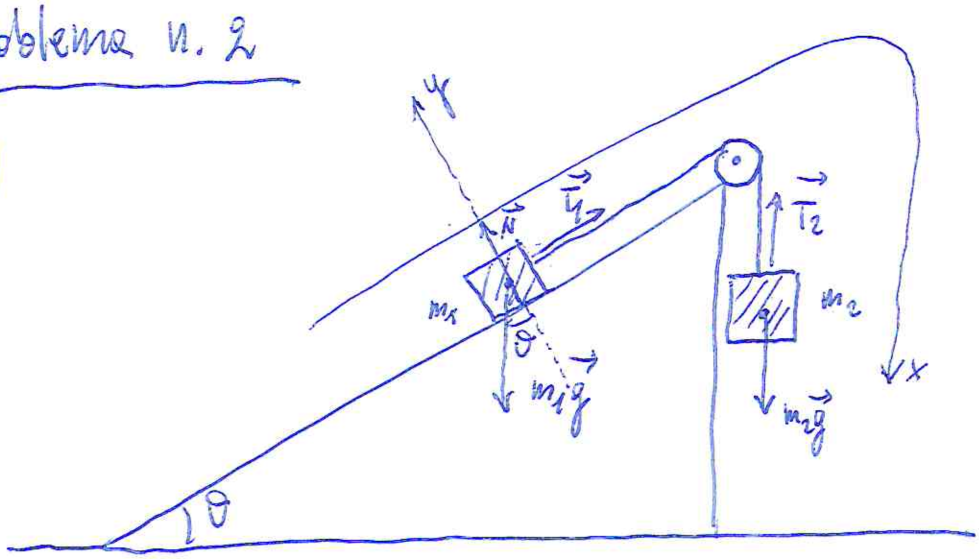
In questo intervallo di tempo, chi ha lanciato il sasso, partendo dalla posizione da cui il sasso e' stato lanciato, deve percorrere con velocita' costante di modulo V_2 un tratto orizzontale di lunghezza uguale alla gittata D calcolata nel punto a) per arrivare a raccogliere il sasso nell'istante in cui questo tocca terra. Deve quindi risultare

$V_2 \tau_1 = D$, da cui ricaviamo

$$\boxed{V_2 = \frac{D}{\tau_1} = \frac{V_0^{\cancel{2}}}{\cancel{g}}\cdot\frac{\sqrt{2\cancel{g}}}{\cancel{V_0}} = \sqrt{2}\,V_0 = \sqrt{2}\cdot(5\ m\ s^{-1}) \simeq 7{,}07\ m\ s^{-1}}$$

Problema n. 2

a)



Qua sopra è schematizzato il diagramma delle forze agenti su ciascuno dei due blocchi.

Se entrambi i blocchi si muovono con velocità costante, con la fune in tensione, per la prima legge della dinamica la risultante delle forze agenti su ciascun blocco deve essere nulla. Deve cioè risultare

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T_1} = 0 \\ m_2\vec{g} + \vec{T_2} = 0 \end{cases}$$

Essendo la fune di massa trascurabile, risulta inoltre

$$|\vec{T_1}| = |\vec{T_2}| = T$$

Fissiamo un asse x e un asse y come nello schema riportato sopra. Poiché il blocco sul piano inclinato si muove di moto rettilineo, risulta $|\vec{N}| = m_1 g \cos\theta$; risulta poi:

$$\begin{cases} m_1 g \sin\theta - T = 0 \\ m_2 g - T = 0 \end{cases}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} T = m_1 g \sin\theta \\ T = m_2 g \end{cases}$$

Per confronto diretto delle due equazioni, otteniamo:

$m_2 \cancel{g} = m_1 \cancel{g} \sin\theta$, e infine $\boxed{m_2 = m_1 \sin\theta = (1\ kg)\cdot \sin(30°) = 0,5\ kg}$

b) Usando lo stesso schema della pagina precedente possiamo scrivere la seconda legge della dinamica per le componenti dei vettori lungo l'asse x (che si "incurva" attorno alla carrucola); sostituiamo m_3 a m_2; e ovviamente risulta $|\vec{T}_3| = |\vec{T}_1| = T$

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = T - m_1 g \sin\theta \\ m_3 a_{3x} = m_3 g - T \end{cases}$$

, con la condizione $a_{1x} = a_{3x} = a_x$ dovuta al fatto che la fune e' inestensibile. Allora:

$$\begin{cases} m_1 a_x = T - m_1 g \sin\theta \\ m_3 a_x = m_3 g - T \end{cases}$$

Sommiamo le due equazioni membro a membro:

$(m_1 + m_3) a_x = (m_3 - m_1 \sin\theta) g$, da cui otteniamo

$$a_x = \frac{(m_3 - m_1 \sin\theta) g}{m_1 + m_3} = \frac{(2m_2 - m_1 \sin\theta) g}{m_1 + 2m_2} = \frac{(2m_1 \sin\theta - m_1 \sin\theta) g}{m_1 + 2m_1 \sin\theta}$$

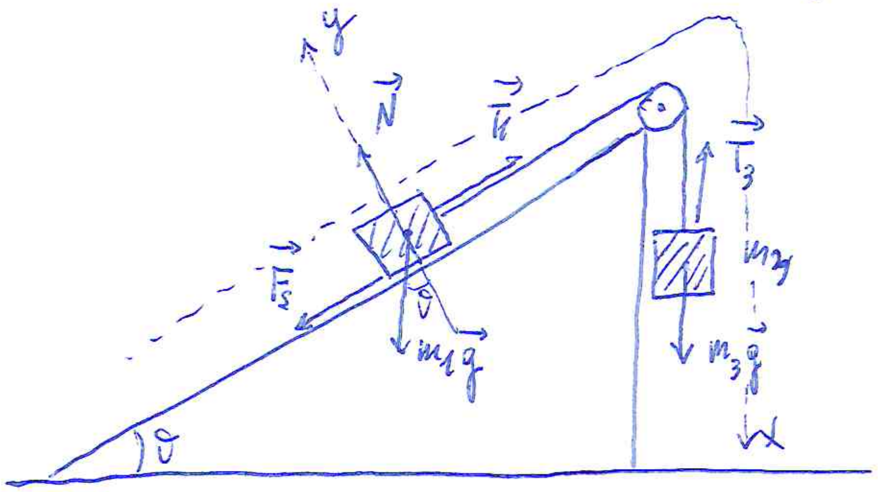
Allora:

$$\boxed{a_x = \frac{\cancel{m_1} g \sin\theta}{\cancel{m_1}(1+2\sin\theta)} = \frac{1}{2} g \cdot \frac{1}{1+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{1}{4} g \simeq 2{,}45 \ m\,s^{-2}}$$

Dalla prima equazione del sistema otteniamo poi:

$$\boxed{T = m_1 (g \sin\theta + a_x) = m_1\left(\frac{g}{2} + \frac{g}{4}\right) = \frac{3}{4} m_1 g = \frac{3}{4} \cdot (1\,kg) \cdot (9{,}81\,m s^{-2}) = \simeq 7{,}36\ N}$$

c) Adesso la situazione è la seguente:



Sul blocco di massa m_1 adesso agisce anche una forza di attrito statico $\vec{F_s}$. Le condizioni che valgono adesso sono

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{F_s} + \vec{N} + \vec{T_1} = 0 \\ m_3\vec{g} + \vec{T_3} = 0 \end{cases}, \quad \text{con } |\vec{T_1}| = |\vec{T_3}| = T$$

Utilizziamo un sistema di assi simile a quello usato per il punto b); le condizioni che valgono per le componenti cartesiane dei vettori sono:

$$\begin{cases} T_{1,x} + F_{S,x} + (m_1\vec{g})_x = 0 \\ (m_1\vec{g})_y + N_y = 0 \\ (m_3\vec{g})_x + T_{3x} = 0 \end{cases} \qquad |\vec{T_1}| = |\vec{T_3}| = 0$$

Si osserva dallo schema che risulta

$$T_{1,x} = T \qquad T_{1,y} = 0 \qquad N_x = 0 \quad N_y = |\vec{N}| = N$$

$$(m_1\vec{g})_x = -m_1 g \sin\theta \qquad (m_1\vec{g})_y = -m_1 g \cos\theta$$

$$F_{S,x} = -|\vec{F_S}| = -F_S \qquad F_{S,y} = 0$$

$$(m_3\vec{g})_x = m_3 g \qquad T_{3,x} = -T$$

Allora:

$$\begin{cases} T - F_S - m_1 g \sin\theta = 0 \\ -m_1 g \cos\theta + N = 0 \\ m_3 g - T = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = m_3 g \\ N = m_1 g \cos\theta \\ F_S = T - m_1 g \sin\theta = (m_3 - m_1 \sin\theta) g \end{cases}$$

Affinché il blocco 1 si trovi in quiete, il modulo della forza di attrito statico deve soddisfare la seguente disuguaglianza:

$F_s \leq \mu_s N$, dove μ_s e' il coefficiente di attrito statico tra il blocco 1 e il panno ruvido steso sul piano inclinato. Allora:

$$(m_3 - m_1 \sin\theta)\cancel{g} \leq \mu_s m_1 \cancel{g} \cos\theta$$

Con $m_3 = 2m_2 = m_1$, e $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad $= 30°$, otteniamo:

$$\left(m_1 - \frac{1}{2}m_1\right) \leq \mu_s m_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (2m_1 - m_1) \leq \sqrt{3}\, m_1 \mu_s$$

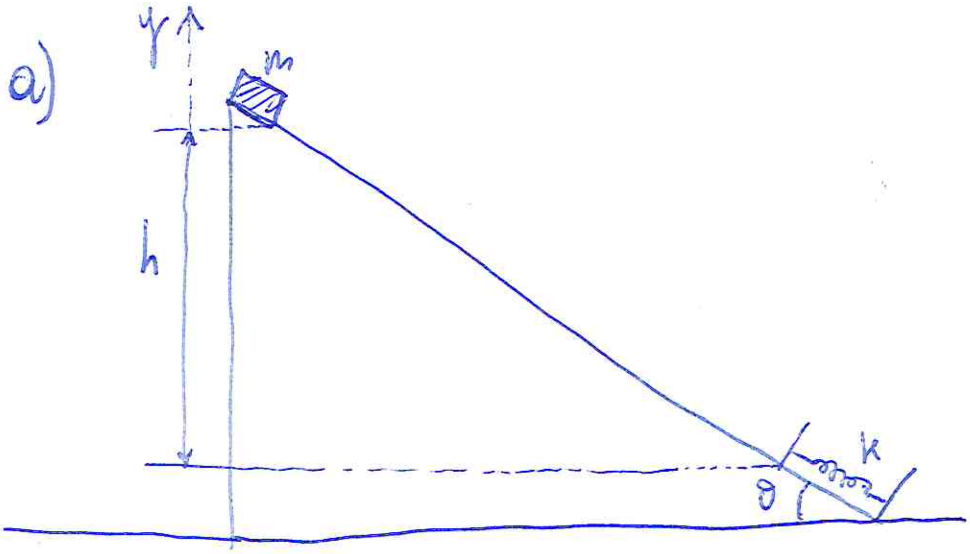
$$\cancel{m_1} \leq \mu_s \sqrt{3}\, \cancel{m_1} \Rightarrow \mu_s \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Pertanto, il minimo valore possibile per il coefficiente di attrito statico e'

$$\boxed{\mu_{s,min} = \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0,58}$$

Problema n. 3

a)

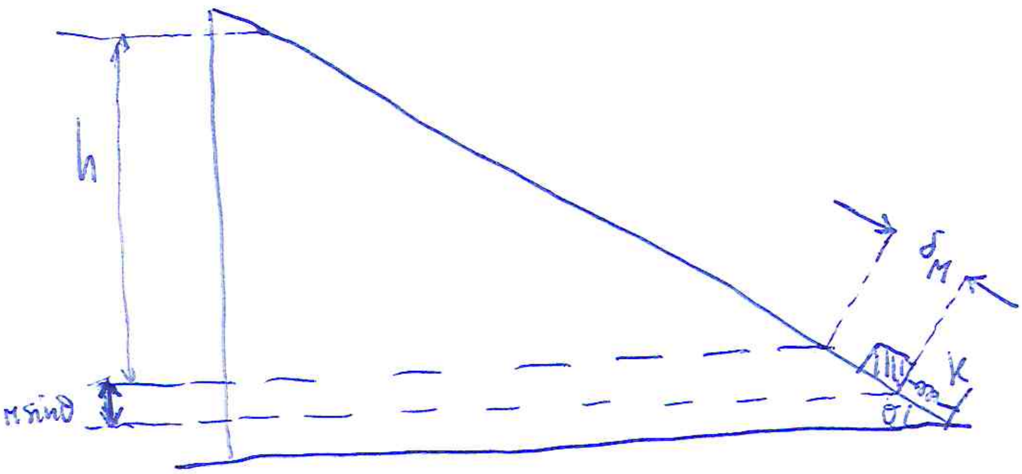


In assenza di forze di attrito tra il blocco e la superficie del piano inclinato, l'unica forza che compie lavoro durante il primo tratto della discesa del blocco e' la forza peso. Dato che questa ultima forza e' conservativa, l'energia meccanica del blocco si conserva durante la discesa del blocco.

Quindi, scegliendo come quota $y=0$ la quota iniziale dell'estremo libero della molla (con molla a riposo), possiamo scrivere:

$$E_{m,f} = E_{m,i} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_1^2 = \cancel{m} g h,$$ da cui ricaviamo

$v_1^2 = 2gh$ e infine $$\boxed{v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot (9{,}81\ m\,s^{-2}) \cdot (10\ m)} \simeq 14{,}01\ m\,s^{-1}}$$



Quando la molla ha raggiunto la compressione massima δ_M, il blocco si trova a una quota pari a $h_M \sin\theta$ al di sotto della posizione ~~del~~ primo contatto con la molla.

Rispetto alla posizione di partenza, il blocco si trova a una quota più bassa di un tratto di lunghezza uguale a

$$h + \delta_M \sin\theta .$$

Nella posizione iniziale e nella posizione finale il corpo è istantaneamente fermo. Risulta, tra la posizione iniziale e quella finale:

$$W_p = mg(h + \delta_M \sin\theta) \qquad W_{el} = -\frac{1}{2} k \delta_M^2$$

W_p: lavoro della forza peso $\qquad$ W_{el}: lavoro della forza elastica

Per il teorema dell'energia cinetica, deve quindi risultare:

$$K_f - K_i = W_p + W_{el} ,$$ cioè

$$0 = mgh + mg(\sin\theta)\,\delta_M - \frac{1}{2} k \delta_M^2$$

Moltiplichiamo per $\frac{2}{K}$ i due membri dell'equazione:

$$0 = \frac{2mgh}{K} + \frac{2mg\sin\theta}{K}\delta_M - \delta_M^2$$

Riordiniamo i termini:

$$\delta_M^2 - \frac{2mg\sin\theta}{K}\delta_M - \frac{2mgh}{K} = 0$$

Risolviamo l'equazione usando la formula ridotta:

$$\delta_M = \frac{mg\sin\theta}{K} \pm \sqrt{\left(\frac{mg\sin\theta}{K}\right)^2 + \frac{2mgh}{K}}$$

E' accettabile solo la soluzione con il segno positivo davanti alla radice quadrata:

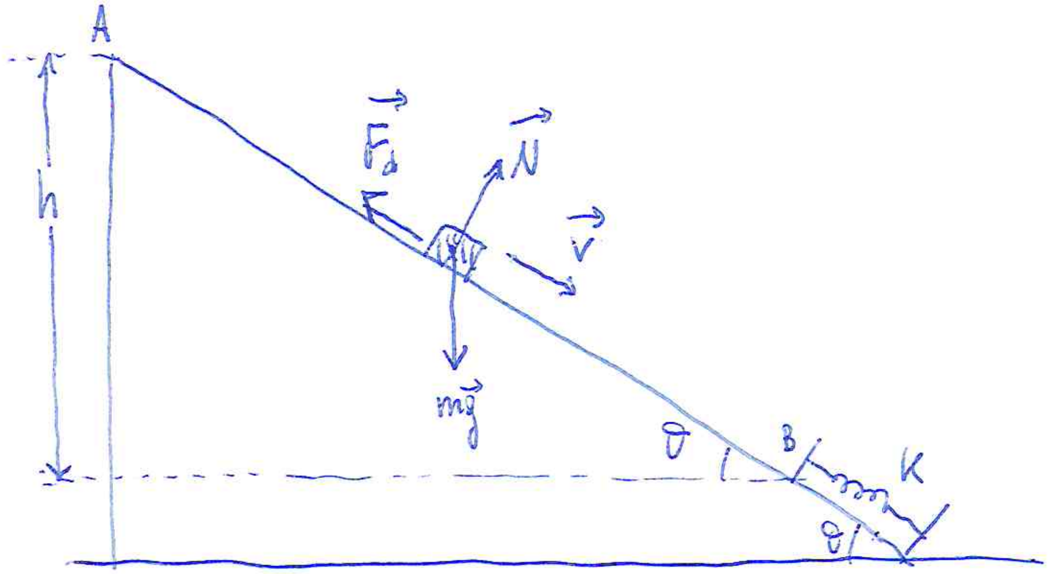
$$\boxed{\begin{aligned}
\delta_M &= \frac{mg\sin\theta}{K} + \sqrt{\left(\frac{mg\sin\theta}{K}\right)^2 + \frac{2mgh}{K}} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{mg\sin\theta}{K}\right)^2\left[1 + \frac{2\cancel{mg}h}{\cancel{K}}\cdot\frac{K^{\cancel{2}}}{m^{\cancel{2}}g^{\cancel{2}}\sin^2\theta}\right]} + \frac{mg\sin\theta}{K} = \\
&= \frac{mg\sin\theta}{K}\left[\sqrt{1 + \frac{2hK}{mg\sin^2\theta}} + 1\right] = \\
&= \frac{(2\,kg)\cdot(9{,}81\,m\,s^{-2})\cdot\frac{1}{2}}{100\,N\,m^{-1}}\left[\sqrt{1 + \frac{2\cdot(10\,m)\cdot(100\,N\,m^{-1})}{(2\,kg)\,(9{,}81\,m\,s^{-2})\cdot\frac{1}{4}}} + 1\right] \simeq 2{,}08\,m
\end{aligned}}$$

b) Il blocco, dopo essere stato spinto in salita lungo il piano inclinato, arriverà a una quota massima

$$\boxed{h_2 = h = 10 \text{ m}}$$ al di sopra dell'estremità libera della molla a riposo.

Questo si spiega con il fatto che, per tutto il moto del blocco, agiscono compiendo lavoro solo forze conservative: la forza peso del blocco e la forza elastica della molla. Dopo che la molla è tornata nella posizione di riposo, sul blocco agisce solo la forza peso: quando il blocco raggiunge la quota massima h_2, la sua energia meccanica è $E_f = mgh_2$, che deve essere uguale all'energia meccanica iniziale

$E_i = mgh$, e quindi deve risultare $h_2 = h$.

c) 

Oltre alla forza peso e alla forza elastica, adesso sul blocco agisce anche la forza di attrito dinamico (vedi schema alla pagina precedente).

Dallo studio del moto lungo il piano inclinato, sappiamo già che risulta $N = |\vec{N}| = mg\cos\theta$

Lavoro della forza peso tra il punto di partenza e il punto in cui la molla raggiunge la massima compressione $D = \delta_M/4$:

$$W_p = mg\,(h + D\sin\theta)$$

Lavoro della forza elastica fino all'istante in cui la molla raggiunge la massima compressione:

$$W_{el} = -\frac{1}{2}KD^2$$

Lavoro della forza di attrito dinamico fino all'istante in cui la molla raggiunge la massima compressione:

$$W_d = -\mu_d N \cdot \left(\frac{h}{\sin\theta} + D\right)$$

Infatti la quantità $\frac{h}{\sin\theta} + D$ rappresenta la lunghezza complessiva del percorso del blocco lungo il piano inclinato.

Per il teorema dell'energia cinetica deve risultare:

$$K_f - K_i = W_p + W_{el} + W_d$$

Chiaramente, come nel calcolo già svolto nel punto a), risulta $K_f = K_i = 0$, per cui vale l'equazione

$$0 = mg(h + D\sin\theta) - \frac{1}{2}kD^2 - \mu_d\, mg\cos\theta\left(\frac{h}{\sin\theta} + D\right)$$

Allora:

$$\mu_d\, mg\cos\theta\left(\frac{h}{\sin\theta} + D\right) = mg(h + D\sin\theta) - \frac{1}{2}kD^2$$

$$\mu_d\, mg\,\mathrm{cotan}\,\theta\,(h + D\sin\theta) = mg(h + D\sin\theta) - \frac{1}{2}kD^2,$$ e infine

$$\mu_d = \frac{mg(h + D\sin\theta) - \frac{1}{2}kD^2}{mg\,\mathrm{cotan}\,\theta\,(h + D\sin\theta)}$$, cioè

$$\mu_d = \tan\theta - \frac{kD^2\tan\theta}{2mg(h + D\sin\theta)} = (\tan\theta)\left[1 - \frac{kD^2}{2mg(h + D\sin\theta)}\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mu_d &= (\tan\theta)\left[1 - \frac{kD^2}{2mg(h + D\sin\theta)}\right] = \\ &= (\tan\theta)\left[1 - \frac{k\cdot\left(\frac{\delta_M}{4}\right)^2}{2mg\left(h + \frac{\delta_M}{4}\sin\theta\right)}\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{(100\,N\,m^{-1})\left(\frac{2{,}08\,m}{4}\right)^2}{2\cdot(2\,kg)(9{,}81\,m\,s^{-2})\left(10\,m + \frac{2{,}08\,m}{4}\frac{1}{2}\right)}\right] \simeq 0{,}54\end{aligned}}$$