

Prova di esame dei corsi di Fondamenti di Informatica e Informatica Teorica

6 febbraio 2019

Nota Bene: Non saranno corretti compiti scritti con una grafia poco leggibile.

Problema 1. Siano Sia $L \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio e $\chi_L : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$ la funzione tale che

$$\chi_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in L, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che L è decidibile se e soltanto se χ_L è calcolabile.

Problema 2. Sia $k \in \mathbb{N}$ un valore fissato. Dopo aver ricordato la definizione di colorazione di un grafo, si consideri il seguente problema: dato un grafo (non orientato) $G = (V, E)$ decidere se esiste una 3-colorazione per G che assegna il colore 1 ad esattamente k nodi di G .

Dopo aver formalizzato il suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si risponda alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

- a) Il problema è in **P**?
- b) Il problema è in **NP**?
- c) Il problema è in **coNP**?

Problema 3. Siano $L_1 \subseteq \Sigma^*$ e $L_2 \subseteq \Sigma$. Si dimostri che se $L_1 \in \mathbf{NP}$ e $L_2 \in \mathbf{NP}$ allora $L_1 \cup L_2 \in \mathbf{NP}$.

SUPPONIAMO DI AVERE L DECIDIBILE, ALLORA ESISTE UNA M.T. RICONOSCIATORE T TALE CHE:

$$O_T(x) = \begin{cases} q_A & \text{SE } x \in L \\ q_R & \text{SE } x \notin L \end{cases}$$

LA NOSTRA M.T. T HA 1 SOLO NASTRO, PARTENDO DA T DERIVIAMO UNA M.T. T' A 2 NASTRI TRASDUTTORE, CHE CON INPUT $x \in \Sigma^*$ OPERA IN QUESTA MANIERA:

- 1) SUL PRIMO NASTRO (DOVE È SCRITTO x) ESEGUE LA COMPUTAZIONE $T(x)$
- 2) SE $T(x)$ TERMINA IN q_A ALLORA SCRIVE SUL SECONDO NASTRO IL VALORE 1, ALTRIMENTI SCRIVE 0, DOPODICHÉ TERMINA.

VISTO CHE IL LINGUAGGIO L È DECIDIBILE ALLORA LA COMPUT. SUL NASTRO 1 È DEFINITA PER OGNI x E QUINDI TERMINA SEMPRE. SE $x \in L$ AL PASSO 2 LA MACCHINA SCRIVE 1 SUL NASTRO DI OUTPUT, ALTRIMENTI SE $x \notin L$ ALLORA LA MACCHINA SCRIVE 0. QUESTO DIMOSTRA CHE X_L È CALCOLABILE

⇐

SUPPONIAMO ORA CHE X_L SIA CALCOLABILE. (TOTALE)
SAPPIAMO CHE X_L È DEFINITA $\forall x \in \Sigma^*$, PER QUESTO
 \exists UNA MACCHINA T TRASDUTTORE CHE $\forall x \in \Sigma^*$ CALCOLA $X_L(x)$.

A PARTIRE DA T DERIVIAMO UNA MACCHINA T' RICONOSCIATORE A 2 NASTRI CHE CON INPUT x OPERA NELLA MANIERA SEGUENTE:

1) SUL PRIMO NASTRO (DOVE C'È SCRITTO x) ESEGUE LA COMPUTAZIONE $T(x)$ SCRIVENDO IL RISULTATO SUL SECONDO NASTRO.

2) SE SUL SECONDO NASTRO È STATO SCRITTO 1 ALLORA LA COMPUTAZIONE $T'(x)$ TERMINA NELLO STATO DI ACCETTAZIONE ALTREMENTE TERMINA NELLO STATO DI RIGETTO.

OSSERVIAMO CHE, POICHÉ x_L È TOTALE, IL PASSO 1) TERMINERÀ PER OGNI INPUT x .

SE $x_L = 1$, ALLORA IL PASSO 1) TERMINERÀ SCRIVENDO 1 SUL SECONDO NASTRO, E QUINDI AL PASSO 2) $T'(x)$ TERMINERÀ NELLO STATO DI ACCETTAZIONE, E VICEVERSA PER $x_L = 0$. QUESTO DIMOSTRA CHE L È DECIDIBILE.