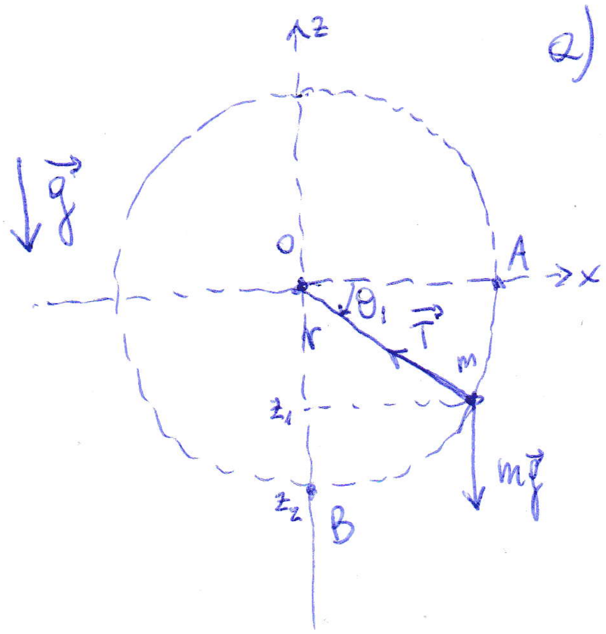
FISICA PER INFORMATICA

PROVA SCRITTA DEL 7/9/2023

PRIMO APPELLO AUTUNNALE

Problema n. 1



a) Consideriamo lo schema della figura qui a lato.
Le forze che agiscono sulla palla sono la forza peso $m\vec{g}$ e la tensione $\vec{T}$ della cordicella.
La forza $\vec{T}$ non compie lavoro, in quanto a ogni istante la palla si muove lungo la direzione perpendicolare a quella della forza $\vec{T}$. Pertanto l'unica forza che compie lavoro è la forza peso $m\vec{g}$: dato che la forza peso è conservativa, e inoltre è l'unica forza che compie lavoro, l'energia meccanica della palla si conserva durante il moto.

Fissiamo come quota $z=0$ per il calcolo dell'energia potenziale gravitazionale la quota del centro O della traiettoria circolare della palla. Nella posizione A risulta $K_A = \frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2$ e $U_A = mgz_A = 0$; deve risultare, per la conservazione dell'energia meccanica:

$$K_A + U_A = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 + mgz_1 = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - mgr\sin\theta_1$$

Dall' uguaglianza $\frac{1}{2} m |\vec{v}_0|^2 = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - mgr \sin\theta_1$ otteniamo:

$|\vec{v}_0|^2 = v_0^2 = |\vec{v}_1|^2 - 2gr\sin\theta_1$, da cui

$$\boxed{\begin{aligned}|\vec{v}_0| = v_0 &= \sqrt{|\vec{v}_1|^2 - 2gr\sin\theta_1} = \sqrt{(6{,}0\ m s^{-1})^2 - 2\cdot(9{,}81\ m s^{-2})\cdot(0{,}80\ m)\cdot \sin 30°} = \\ &= \sqrt{36\ m^2 s^{-2} - 7{,}848\ m^2 s^{-2}} \simeq 5{,}306\ m s^{-1}\end{aligned}}$$

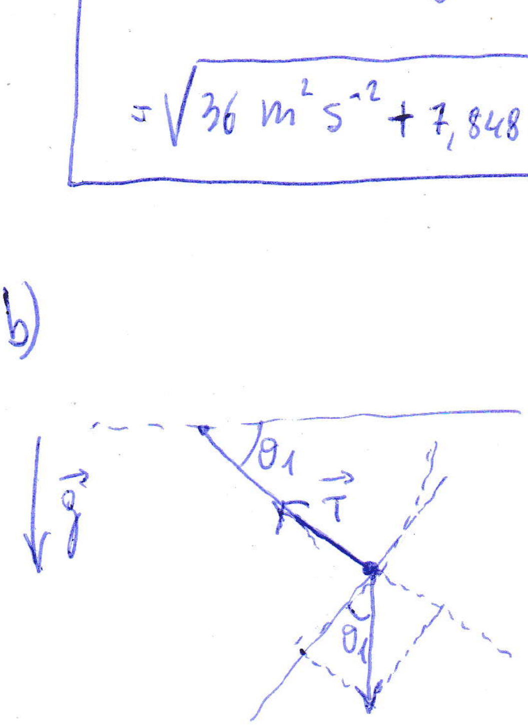
Nella posizione B risulta $K_B = \frac{1}{2} m |\vec{v}_2|^2$, $U_B = mg z_B =$
$= -mgr$; per la conservazione dell' energia meccanica risulta:

$$\frac{1}{2} m |\vec{v}_2|^2 - mgr = \frac{1}{2} m |\vec{v}_1|^2 - mgr\sin\theta_1 \quad , \text{ e quindi:}$$

$$|\vec{v}_2|^2 = |\vec{v}_1|^2 + 2gr(1-\sin\theta_1) \text{ , e quindi}$$

$$\boxed{\begin{aligned}|\vec{v}_2| &= \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + 2gr(1-\sin\theta_1)} = \sqrt{(6{,}0\ m s^{-1})^2 + 2\cdot(9{,}81\ m s^{-2})\cdot(0{,}80 m)(1-\sin 30°)} = \\ &= \sqrt{36\ m^2 s^{-2} + 7{,}848\ m^2 s^{-2}} \simeq 6{,}622\ m s^{-1}\end{aligned}}$$

b)



La componente radiale della accelerazione della palla e' uguale all' accelerazione centripeta:

$$\boxed{a_r = \frac{v_1^2}{r} = \frac{(6{,}0\ m s^{-1})^2}{0{,}8\ m} \simeq 45\ m s^{-2}}$$

La componente tangenziale dell'accelerazione della palla si ottiene dalla seconda legge della dinamica:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$ considerando le componenti tangenziali dei vettori: $m a_t = mg\cos\theta_1$, da cui

$$\boxed{a_t = g\cos\theta_1 = (9{,}81\ m\ s^{-2})\cdot\cos 30^\circ \simeq 8{,}496\ m\ s^{-2}}$$

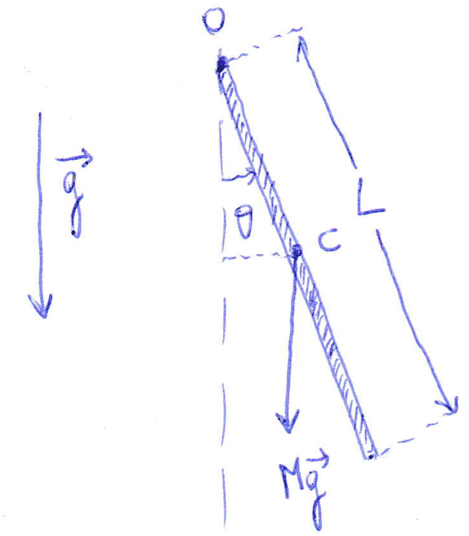
c) Consideriamo la seconda legge della dinamica:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$; questa equazione, per le componenti radiali dei vettori, diventa:

$$m a_r = -mg\sin\theta_1 + T$$ (attenzione ai segni, vedere figura!)

$$\boxed{\begin{aligned} T &= m(a_r + g\sin\theta_1) = m\left(\frac{v_1^2}{r} + g\sin\theta_1\right) = \\ &= (1{,}0\ kg)\cdot\left(45\ m\ s^{-2} + (9{,}81\ m\ s^{-2})\cdot\sin 30^\circ\right) = 49{,}905\ N \end{aligned}}$$

Problema n. 2



a) La seconda equazione cardinale rispetto al polo O è:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_0 = \vec{\tau}_0$$

Considerando le componenti dei vettori perpendicolari al piano del foglio, questa equazione diventa scalare: $\vec{L}_0 = I_0 \vec{\omega}$, per cui

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{L}{2}\sin\theta \cdot Mg$$ (attenzione al segno)

$I_0 = \frac{1}{3}ML^2$ (momento d'inerzia rispetto a un asse passante per O e perpendicolare all'asta).

Allora: $$\frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\cancel{L}}{2}\sin\theta \cdot \cancel{M}g$$, da cui

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2L}\sin\theta = 0}$$

Poiché $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha$ (accelerazione angolare dell'asta), otteniamo

$$\boxed{\alpha = -\frac{3g}{2L}\sin\theta}$$

b) Nel limite di piccole oscillazioni ($\sin\theta \approx \theta$, con θ espresso in radianti) l'equazione ottenuta al punto a) diventa:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2L}\theta = 0}$$

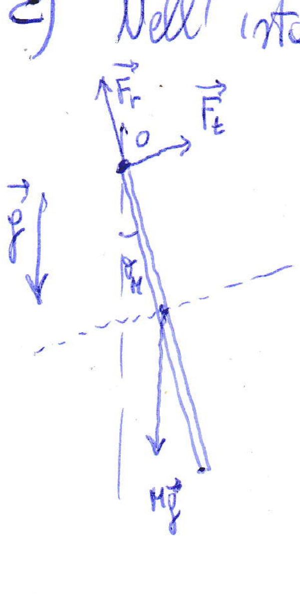
La soluzione per $\theta(t)$ di questa equazione è nella forma $\theta(t) = \theta^* \sin(\omega t + \varphi_0)$, con $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$

(si verifica subito per sostituzione di $\theta(t)$ nell'equazione).

Pertanto il periodo delle piccole oscillazioni dell'asta è

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (1 m)}{3 \cdot (9{,}81\ m\ s^{-2})}} \simeq 1{,}638\ s}$$

c) Nell'istante in cui $\theta = \theta_M$, la velocità angolare istantanea di rotazione dell'asta è nulla, per cui è nulla l'accelerazione centripeta del centro di massa dell'asta. Scomponendo la reazione $\vec{F}$ dell'asse di rotazione nella somma di un vettore componente radiale $\vec{F}_r$ e di un vettore componente tangenziale $\vec{F}_t$ (vedi figura), la prima equazione cardinale per l'asta diventa la seguente:



$$M\vec{a}_{CM} = M\vec{g} + \vec{F}_r + \vec{F}_t ,$$ dove $\vec{a}_{CM}$ è l'accelerazione del centro di massa dell'asta.

Questa equazione, per le componenti radiali dei vettori diventa:

$$M\, a_{CM,r} = -Mg\cos\vartheta_M + F_r$$

Essendo $a_{CM,r} = 0$ (vedi sopra), otteniamo

$$\boxed{F_r = Mg\cos\vartheta_M = (1\,\mathrm{kg})\cdot(9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}})\cdot\cos 20^\circ \simeq 9{,}218\ \mathrm{N}}$$

La stessa equazione, per le componenti tangenziali dei vettori diventa:

$$M a_{CM,t} = -Mg\sin\vartheta_M + F_t ,$$ da cui otteniamo:

$$F_t = M\left(a_{CM,t} + g\sin\vartheta_M\right)$$

Ora, risulta $a_{CM,t} = \frac{L}{2}\cdot\alpha(\vartheta = \vartheta_M) = \frac{\cancel{L}}{2}\cdot\left(-\frac{3g}{2\cancel{L}}\sin\vartheta_M\right) = -\frac{3}{4}g\sin\vartheta_M$

In definitiva, otteniamo:

$$\boxed{\begin{aligned} F_t &= M\left(-\frac{3}{4}g\sin\vartheta_M + g\sin\vartheta_M\right) = \frac{1}{4}Mg\sin\vartheta_M = \\ &= \frac{1}{4}\cdot(1\,\mathrm{kg})\cdot(9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}})\cdot\sin 20^\circ \simeq 0{,}839\ \mathrm{N}\end{aligned}}$$

Problema n. 3

a) La potenza assorbita da una resistenza R ai cui estremi è applicata una differenza di potenziale $\mathcal{E}_0$ è data dalla legge

$$P = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R},$$ da cui ricaviamo

$$\boxed{R = \frac{\mathcal{E}_0^2}{P} = \frac{(35\ V)^2}{(1{,}5 \cdot 10^3 W)} \simeq 0{,}817\ \Omega}$$

Conoscendo la sezione ℓ^2 del filo conduttore (l'area della sezione quadrata di lato ℓ) e la resistività del materiale conduttore, dalla seconda legge di Ohm possiamo ricavare la lunghezza totale L del filo:

$$R = \rho \frac{L}{\ell^2} \Rightarrow \boxed{L = \frac{R\ell^2}{\rho} = \frac{\mathcal{E}_0^2 \ell^2}{P\rho} = \frac{(35\ V)^2 \cdot (2{,}0 \cdot 10^{-3}\ m)^2}{(1{,}5 \cdot 10^3 W) \cdot (1{,}68 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m)} \simeq 194{,}44\ m}$$

Poiché la lunghezza di una spira è $L_1 = 2\pi r$, si ottiene facilmente il numero di spire dell'avvolgimento:

$$\boxed{N = \frac{L}{L_1} = \frac{\mathcal{E}_0^2 \ell^2}{2\pi r P\rho} = \frac{(35\ V)^2 \cdot (2{,}0 \cdot 10^{-3} m)^2}{2\pi \cdot (1\ m) \cdot (1{,}5 \cdot 10^3 W) \cdot (1{,}68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m)} \simeq 31}$$

b) La corrente continua che circola nell'avvolgimento e'

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_0^2/P} = \frac{P}{\mathcal{E}_0} \simeq 42,86 \text{ A}$$

Una spira circolare percorsa da una corrente I genera, al centro, un campo magnetico di modulo

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2r}$$, dove r e' il raggio della spira.

In questo caso, il campo magnetico al centro dell'avvolgimento e' dato dalla somma dei campi magnetici di N spire identiche, percorse dalla stessa corrente nello stesso senso, per cui il modulo del campo magnetico in quel punto

e'
$$\boxed{B = \frac{N\mu_0 I}{2r} = \frac{N\mu_0 P}{2r\mathcal{E}_0} = \frac{31\cdot(4\pi\cdot 10^{-7}\,H\,m^{-1})\cdot(1,5\cdot 10^3 W)}{2\cdot(1\,m)\cdot(35\,V)} = 0,835 \text{ mT}}$$

c) Il flusso del campo magnetico variabile attraverso la superficie delimitata dalla spira piccola e', nell'approssimazione suggerita dal testo del problema:

$$\Phi(\vec{B}) = \pi r_1^2 B(t) = \pi r_1^2 B \sin(2\pi f t)$$

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la f.e.m. indotta nella spira piccola e' quindi

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{E}_1(t) &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r_1^2 B \cdot \left[2\pi f \cdot \cos(2\pi f t)\right] = \\ &= -2\pi^2 r_1^2 B f \cos(2\pi f t)\end{aligned}}$$

Pertanto, l'ampiezza di oscillazione della f.e.m. indotta e':

$$\boxed{\begin{aligned}E_1 = \left|\mathcal{E}_1(t)\right|_{max} = 2\pi^2 r_1^2 B f = 2\pi^2 \cdot (10^{-2}\,m)^2 \cdot (0{,}835 \cdot 10^{-3}\,T) \cdot (10^3\,Hz) \simeq \\ \simeq 1{,}648\ mV\end{aligned}}$$