CORREZIONE COMPITO

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\min \; -a x_1 + b x_2$$

$$-x_1 + 3x_2 \le 2$$

$$x_1 - 2x_2 \le 2$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

1) Trovare il range di valori di a e b per cui il problema ammette soluzione ottima con x_1 e x_2 in base

x_1 e x_2 in base $\Rightarrow$ $x_1, x_2 > 0$

Sfruttando il teorema della complementarietà e la dualità troviamo le condizioni per cui x_1 e x_2 sono in base ottima

Problema Duale D: $\max \; 2y_1 + 2y_2 + 4y_3$

$$-y_1 + y_2 + y_3 \le -a$$

$$3y_1 - 2y_2 + 2y_3 \le b$$

$$y_1, y_2, y_3 \le 0$$

$x_1 > 0 \Rightarrow$ slack duale 1 $= 0$

$x_2 > 0 \Rightarrow$ sd2 $= 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 = -a \\ 3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} +y_1 = a + y_2 + y_3 \\ 3a + 3y_2 + 3y_3 - 2y_2 + 2y_3 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = -2a + b - 4y_3 \le 0 \\ y_2 = -3a + b - 5y_3 \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2a + b}{4} \le y_3 \le 0 \\ \dfrac{-3a + b}{5} \le y_3 \le 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2a \ge b \\ 3a \ge b \end{cases}$$

2) Fissare un valore per a e b ~~per cui~~ nel range trovato precedentemente e trovare la soluzione ottima del problema duale corrispondente

Ipotizziamo $a > 0$, $b > 0$ $\quad b \leq 2a$ soddisfatto per $a = 1$, $b = 1$ $\Rightarrow$ il problema diventa

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 + x_2 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & -x_1 + x_2 \\ & -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 2 \\ & x_1 \dots x_5 \geq 0 \end{array}$$

Possiamo risolvere con il simplesso primale e leggere la soluzione duale dal Tableau essendo $\bar{c} = c_N - c_B B^{-1} N$ con $c_N = 0 \Rightarrow \bar{c}_B = -y$

Tableau ~ qui leggeremo la soluzione duale

	0	-1	1	0	0	0
x_3	2	-1	3	1	0	0
x_4	2	1	-2	0	1	0
x_5	4	1	2	0	0	1

$\Rightarrow$

	2	0	-1	0	1	0
x_3	4	0	1	1	1	0
x_1	2	1	-2	0	1	0
x_5	2	0	4	0	-1	1

	5/2	0	0	0	3/4	1/4
x_3	7/2	0	0	1	5/4	-1/4
x_1	3	1	0	0	1/2	1/2
x_2	1/2	0	1	0	-1/4	1/4

Tableau Ottimo $z^* = -\frac{5}{2}$

$x_1^* = 3$

$x_2^* = 1/2$

Duale ottimo $w^* = -\frac{5}{2}$

$y_1^* = 0$

$y_2^* = -3/4$

$y_3^* = -1/4$

3) Verificare se possano esistere valori di a e b per cui il problema duale è illimitato

Scriviamo il Duale in forma standard

$$D: \quad \begin{aligned} \min \quad & 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 - y_2 + y_3 + s_1 = -a \\ & -3y_1 + 2y_2 - 2y_3 + s_2 = b \\ & y_1, y_2, y_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau

0	2	2	4	0	0
$-a$	1	-1	1	1	0
b	-3	2	-2	0	1

se $a \leq 0$ $b \geq 0$ => Tableau canonico non illimitato anche nel caso di a e $b \leq 0$ avremmo una condizione di non illimitatezza perché $c \geq 0$. con possibilità di ottimo finito o problema vuoto (da verificare eventualmente con il metodo delle variabili artificiali)

4

4) Verificare se possono esistere valori di a e b per cui il problema primale è illimitato

Possiamo fare la verifica dal Tableau del problema primale

0	$-a$	b	0	0	0
2	-1	3	1	0	0
2	1	-2	0	1	0
4	1	2	0	0	1

Il problema è illimitato se esiste una colonna con valori ≤ 0 e almeno un valore < 0

Questa condizione non è verificata per nessuna combinazione di a e b per cui il problema non è illimitato