Prova di esame dei corsi di Fondamenti di Informatica e Informatica Teorica

20 giugno 2024

Nota Bene: Non saranno corretti compiti scritti con una grafia poco leggibile.

Problema 1. Siano $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ e $L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ due linguaggi decidibili. Dimostrare se il linguaggio

$$L = \{x : x \text{ ha un numero pari di caratteri } \wedge x \in L_1\} \cup \{x : x \text{ ha un numero dispari di caratteri } \wedge x \in L_2\}$$

è decidibile.

Problema 2. Dimostrare che PSPACE $\subseteq$ EXPTIME.

Problema 3. Si consideri il seguente problema decisionale: dato un grafo completo e pesato $G = (V, E, w)$, con $w : E \to \mathbb{N}$, una coppia di nodi $s, t \in V$ e un intero k, decidere se in G esiste un percorso da s a t tale che la somma dei pesi degli archi che lo compongono sia almeno k.

Dopo aver formalizzato il suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si risponda alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

a) Il problema è in **P**?

b) Il problema è in **NP**?

c) Il problema è in co**NP**?

ESERCIZIO 1

SE IL LING. L_1 É DECIDIBILE SIGNIFICA CHE ESISTE UNA MACCHINA T_1 CHE PRENDENDO IN INPUT UNA PAROLA X LA COMPUTAZIONE DI T_1 SU INPUT X É COSÍ DEFINITA:

$$O_{T_1}(x) = \begin{cases} q_F = q_A & \text{SE } x \in L_1 \\ q_F = q_R & \text{SE } x \notin L_1 \end{cases}$$

CON q_F STATO FINALE.

SE IL LING. L_2 É DECIDIBILE SIGNIFICA CHE ESISTE UNA MACCHINA T_2 CHE PRENDENDO IN INPUT UNA PAROLA X LA COMPUTAZIONE DI T_2 SU INPUT X É COSÍ DEFINITA:

$$O_{T_2}(x) = \begin{cases} q_F = q_A & \text{SE } x \in L_2 \\ q_F = q_R & \text{SE } x \notin L_2 \end{cases}$$

CON q_F STATO FINALE.

COSTRUIAMO POI UNA MACCHINA T_{PAR} CHE PRESA UNA STRINGA Y IN INPUT É COSÍ DEFINITA:

$$O_{T_{PAR}}(x) = \begin{cases} q_F = q_A & \text{SE IL NUMERO DI CARATTERI DI } Y \text{ É PARI} \\ q_F = q_R & \text{SE IL NUMERO DI CARATTERI DI } Y \text{ É DISPARI} \end{cases}$$

CON q_F STATO FINALE, LA MACCHINA T_{PAR} É COMPOSTA DA 1 NASTRO DOVE VI É SCRITTO L'INPUT X, LA TESTINA É POSIZIONATA SUL CARATTERE PIÚ A SINISTRA, T_{PAR} COMINCIA A LEGGERE IL PRIMO CARATTERE ED ENTRA NELLO STATO q_P, SPOSTA LA TESTINA

DI UNA POSIZIONE A DX E SE LEGGE UN ALTRO CARATTERE ENTRA IN Q_D, QUINDI:

- SE T_{PAR} SI TROVA NELLO STATO q_P E LEGGE UN ALTRO CARATTERE ENTRA NELLO STATO q_D.

- SE T_{PAR} SI TROVA NELLO STATO q_D E LEGGE UN ALTRO CARATTERE ENTRA NELLO STATO q_P.

SE T_{PAR} DOVESSE LEGGERE IL CARATTERE BLANK, SE LO STATO ATTUALE È q_P ALLORA TERMINA IN q_A, ALTRIMENTI SE LO STATO ATTUALE È q_D TERMINA IN q_R.

DERIVIAMO POI UNA MACCHINA T_3 AD 1 NASTRO DOVE VI È SCRITTO L' INPUT x, LE FASI DELLA MACCHINA SONO:

1) T_3 SIMULA T_{PAR} SU INPUT x, SE $O_{T_{PAR}}(x) = q_A$ ESEGUE LA FASE 2, ALTRIMENTI SE $O_{T_{PAR}}(x) = q_R$ ESEGUE LA FASE 3.

2) T_3 SIMULA T_1 SU INPUT x, SE T_1 ACCETTA T_3 ACCETTA, SE T_1 RIGETTA T_3 RIGETTA.

3) T_3 SIMULA T_2 SU INPUT x, SE T_2 ACCETTA T_3 ACCETTA, SE T_2 RIGETTA T_3 RIGETTA.

2)

Teorema

$PSPACE \subseteq EXPTIME$

dim

Dopo aver definito le classi PSPACE e EXPTIME dimostrare che PSPACE ⊆ EXPTIME.

Definizione:

$$PSPACE = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DSPACE[n^k]$$

$$EXPTIME = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} DTIME[2^{f(n,k)}]$$

Dimostrazione: È una diretta conseguenza del seguente teorema: $\forall f, totale\ e\ calcolabile$

$$DSPACE[f(n)] \subseteq DTIME[2^{O(f(n))}]$$

A sua volta questo teorema è una diretta conseguenza del teorema

$$\dots \leq \mathrm{dtime}(T,x) \leq \mathrm{dspace}(T,x)|Q|(|\Sigma| + 1)^{\mathrm{dspace}(T,x)}$$

Sia $L \subseteq \{0,1\}^*$ tale che $L \in DSPACE[f(n)]$, allora $\exists T$, k che decide L e $dspace(T,x) \leq |x|^k$.

$$\begin{aligned} dtime(T,x) &\leq dspace(T,x)|Q|(|\Sigma| + 1)^{dspace(T,x)} \\ &\leq dspace(T,x)|Q|3^{dspace(T,x)} \\ &\leq 2^{\log(dspace(T,x))}|Q|2^{\log(3)dspace(T,x)} \\ &\leq |Q|2^{\log(dspace(T,x))+\log(3)dspace(T,x)} \\ &\leq |Q|2^{(1+\log(3))dspace(T,x)} \end{aligned}$$

In conclusione, $dtime(T,x) \in O(2^{O(f(|x|))}) \Rightarrow L \in DTIME[2^{O(f(|x|))}]$

In questo modo abbiamo dimostrato che $PSPACE \subseteq EXPTIME$.

Problema 3. Si consideri il seguente problema decisionale: dato un grafo completo e pesato $G = (V, E, w)$, con $w : E \to \mathbb{N}$, una coppia di nodi $s, t \in V$ e un intero k, decidere se in G esiste un percorso da s a t tale che la somma dei pesi degli archi che lo compongono sia almeno k.

Dopo aver formalizzato il suddetto problema mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si risponda alle seguenti domande (nell'ordine che si ritiene opportuno), motivando in tutti i casi la propria risposta.

a) Il problema è in **P**?

b) Il problema è in **NP**?

c) Il problema è in co**NP**?

$$I = \{ \langle G = (V, E), s, t, k \rangle : G \text{ É UN GRAFO COMPLETO E PESATO } \land s \in V \land t \in V \land k \in \mathbb{N} \}$$ INSIEME DELLE ISTANZE

$$S(G, s, t, k) = \{ \langle u_1 \dots u_n \rangle : i = 1 \dots n,\ u_i \in V \}$$ SOLUZ. POSSIBILI

$$\pi(G, s, t, k, S(G, s, t, k)) = \exists \langle u_1 \dots u_n \rangle \in S(G, s, t, k) : s = u_1 \land t = u_m \land \forall i = 1 \dots n-1\ [(u_i, u_{i+1}) \in E] \land \forall i, j = 1 \dots m,\ i \neq j\ [u_i \neq u_j] \land n \geq k$$

POSSIAMO VEDERE COME QUESTO PROBLEMA SIA UN PROBLEMA DI LONGEST PATH, CHE POSSIAMO INTERPRETARE COME UN CASO PARTICOLARE DI HAMILTONIAN PATH CON $k = |V|$.

POSSIAMO DIMOSTRARE CHE HP É COMPLETO RIDUCENDO HC A HP, QUINDI HC $\leq$ HP.

TRASFORMIAMO UN'ISTANZA $\langle G = (V, E) \rangle$ DI HC IN UN'ISTANZA $\langle G' = (V', E'), s, t \rangle$ DI HP, CON s e t DUE NODI $\notin V$.

COLLEGHIAMO POI UN NODO $u \in V$ AL NODO s, COLLEGHIAMO POI t A TUTTI I NODI $\in V$ CHE SONO ADIACENTI AD u, OSSIA $(u, x) \in E$.

SE G CONTIENE UN CICLO HAMILTONIANO $\langle U_1 \dots U_m \rangle$

- SCEGLIAMO $U_1 = U$ OVVERO IL NODO A CUI È COLLEGATO S.

- POICHÉ $(U_i, U_{i+1}) \in E \quad \forall i = 1 \dots m$

- ALLORA $\langle S, U_1 \dots U_m, t \rangle$ È UN PERCORSO HAMILTONIANO IN G'.

COSTRUIRE IL PERCORSO $\langle G' = (V', E'), s, t \rangle$ RICHIEDE TEMPO POLINOMIALE IN $|\langle G = (V, E) \rangle|$.

QUINDI HP È NP-COMPLETO.