Prova di esame dei corsi di Fondamenti di Informatica e Informatica Teorica

22 febbraio 2024

Nota Bene: Non saranno corretti compiti scritti con una grafia poco leggibile.

Problema 1. Sia $f : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^+$ una funzione e sia $L_f = \{(x,y) : x \in \Sigma_1^* \wedge y = f(x)\}$ il linguaggio associato a f. Dimostrare che se L_f è decidibile allora f è calcolabile.

Problema 2. Dimostrare che $NP \subseteq EXPTIME$.

Problema 3. Dopo aver formalizzato il problema 3SAT mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si descrivano una codifica ragionevole e una non ragionevole per le istanze di 3SAT, motivando le affermazioni di ragionevolezza/irragionevolezza.

Problema 1. Sia $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^+$ una funzione e sia $L_f = \{(x,y) : x \in \Sigma_1^* \wedge y = f(x)\}$ il linguaggio associato a f. Dimostrare che se L_f è decidibile allora f è calcolabile.

SUPPONIAMO CHE L_F SIA DECIDIBILE, ALLORA ESISTE UNA MACCHINA DI TURING T DI TIPO RICONOSCITORE CHE $\forall x \in \Sigma_1^*$ E $\forall y \in \Sigma_2^+$:

$$O_T(x,y) = \begin{cases} q_A & \text{SE } x \in L \wedge y = f(x) \\ q_R & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

A PARTIRE DA T COSTRUIAMO UNA MACCHINA TRASDUTTRICE CHIAMATA T' A 4 NASTRI CHE CON INPUT $x \in \Sigma^*$ OPERA NELLA MANIERA SEGUENTE:

1) SCRIVE $i=0$ SUL PRIMO NASTRO

2) ENUMERA TUTTE LE STRINGHE y LA CUI LUNGHEZZA È PARI AL VALORE SCRITTO SUL PRIMO NASTRO ED OPERA COME SEGUE:

   a) SIA y LA PRIMA STRINGA DI LUNGHEZZA i NON ANCORA ENUMERATA, SCRIVE y SUL SECONDO NASTRO

   b) ESEGUE LA COMPUTAZIONE $T(x,y)$ SUL TERZO NASTRO

   c) SE $O_T(x,y) = q_A$ ALLORA SCRIVE y SUL NASTRO DI OUTPUT E TERMINA, ALTRIMENTI TORNA AL PASSO 2, INCREMENTANDO LA i SUL PRIMO NASTRO SE LA y ERA L'ULTIMA STRINGA DI LUNGHEZZA i.

SICCOME L_F È DECIDIBILE ALLORA IL PASSO b TERMINA SEMPRE, SE X APPARTIENE AL DOMINIO DI f ALLORA ESISTE $\bar{y} \in \Sigma_1$ T.C. $\bar{y} = f(x)$, QUINDI $(x, \bar{y}) \in L_F$.

ALLORA PRIMA O POI (IN TEMPO FINITO) LA STRINGA $\bar{y}$ VERRÀ SCRITTA SUL SECONDO NASTRO E LA COMPUTAZ. $T(x, \bar{y})$ TERMINERÀ IN q_A E QUINDI AL PASSO C $T'(x)$ SCRIVERÀ $\bar{y}$ SUL NASTRO DI OUTPUT E TERMINERÀ, QUINDI f È CALCOLABILE.

ATTENZIONE: SE X NON APPARTIENE AL DOMINIO DI f ALLORA NESSUNA STRINGA Y GENERATA AL PASSO b CONSENTE A T DI TERMINARE NELLO STATO DI ACCETTAZIONE, QUINDI COMPORTANDO A T' DI NON TERMINARE, NON CONSENTENDOCI DI AFFERMARE CHE f SIA TOTALE.

Problema 2. Dimostrare che $NP \subseteq EXPTIME$.

PER OGNI FUNZIONE f TIME-CONSTRUCTIBLE $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

DIMOSTRIAMO INNANZITUTTO CHE $NTIME[f(n)] \subseteq DTIME[2^{O(f(n))}]$

SIA $L \in NTIME(f(n))$ ALLORA ESISTE UNA MACCHINA DI TURING NON DETERMINISTICA NT CHE ACCETTA L E UNA COSTANTE h T.C. $\forall x \in L$, $NTIME(NT, x) \leq h f(|x|)$.

INOLTRE VISTO CHE f È TIME-CONSTRUCTIBLE ALLORA ESISTE UNA M.T. TRASDUTTRICE T_f CHE DATO UN INTERO n IN UNARIO CALCOLA $f(n)$ IN UNARIO IN TEMPO $O(f(n))$.

POSSIAMO SIMULARE NT CON UNA MACCHINA DETERMINISTICA T, INDICHIAMO POI

CON K IL GRADO DI NON DETERMINISMO DI NT.

T SIMULA IN SUCCESSIONE TUTTE LE COMPUTAZIONI DI NT DI LUNGHEZZA $hf(|x|)$, OVVERO:

1) SIMULA $T_f(|x|)$ SCRIVENDO SUL 2' NASTRO LA LUNGHEZZA DELL'INPUT $(|x|)$ IN UNARIO, DOPO CALCOLA $f(|x|)$ SCRIVENDOLO SUL 3' NASTRO, CONCATENANDOLO h VOLTE, OTTENENDO $hf(|x|)$.

2) SIMULA TUTTE LE COMPUTAZIONI DI $NT(x)$ DI LUNGHEZZA $hf(x)$ UTILIZZANDO PER CIASCUNA COMPUTAZIONE LA TESTINA SUL 3' NASTRO COME CONTATORE.

POICHÉ $x \in L$, $NTIME(NT, x) \leq hf(|x|)$ ALLORA IN $hf(|x|)$ PASSI $NT(x)$ TERMINA NELLO STATO DI ACCETTAZIONE OPPURE $x \notin L$ QUINDI T ENTRA NELLO STATO DI RIGETTO, DI CONSEGUENZA T DECIDE L.

AVENDO K COME GRADO DI NON DETERMINISMO DI NT POSSIAMO DIRE CHE CI SONO $K^{hf(|x|)}$ COMPUTAZIONI DI LUNGHEZZA $hf(|x|)$, E CIASCUNA VIENE SIMULATA DA T IN $O(f(|x|))$ PASSI.

ABBIAMO QUINDI CHE IL PASSO NUMERO 1 PROVA CHE

$$dtime(T, x) \in O(f(|x|)K^{hf(|x|)}) \subseteq O(2^{O(f(|x|))}).$$

SAPPIAMO PER UN TEOREMA CHE ESISTERÀ UNA MACCHINA DETERMINISTICA AD 1 NASTRO T_1 T.C.:

$$dtime(T_1, x) \leq dtime(T, x)^c \subseteq O(2^{O(f(|x|))})$$

PROVANDO CHE $L \in DTIME[2^{O(f(|x|))}]$, PER CONSEGUENZA DIRETTA DI QUESTA DIMOSTRAZIONE POSSIAMO AFFERMARE CHE $NP \subseteq EXPTIME$.

Problema 3. Dopo aver formalizzato il problema 3SAT mediante la tripla $\langle I, S, \pi \rangle$, si descrivano una codifica ragionevole e una non ragionevole per le istanze di 3SAT, motivando le affermazioni di ragionevolezza/irragionevolezza.

$I_{3SAT} = \{ \langle X, f \rangle :$ X É UN INSIEME DI VARIABILI BOOLEANE $\wedge$ f É UN PREDICATO SU X IN 3CNF $\}$

$S_{3SAT}(X, f) = \{ a : X \rightarrow \{\text{VERO}, \text{FALSO}\} \}$ (É L'INSIEME DELLE ASSEGNAZIONI DI VERITÀ ALLE VARIABILI IN X)

$\pi_{3SAT}(X, f, S_{3SAT}(X, f)) = \exists\, a \in S_{3SAT}(X, f) : f(a(x)) = \text{VERO}$

ANALIZZIAMO INNANZITUTTO LA STRUTTURA DI f:

- f É UNA CONGIUNZIONE DI CLAUSOLE $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \ldots$
- OGNI CLAUSOLA C_J É UNA DISGIUNZIONE DI 3 LETTERALI
- UN LETTERALE É UNA VARIABILE O UNA VARIABILE NEGATA

POSSIAMO DESCRIVERE 2 CODIFICHE PER f:

1) CODIFICA DELLA STRUTTURA DI f
2) CODIFICA DEL "SIGNIFICATO" DI f

1) RAPPRESENTIAMO OGNI LETTERALE CON |X| BIT, PER OGNI LETTERALE x_i, METTIAMO IL BIT i-ESIMO POSTO AD 1 E TUTTI GLI ALTRI A 0, METTENDO POI DAVANTI A QUESTI BIT 0 SE IL LETTERALE É "NORMALE", 1 SE IL LETTERALE É NEGATO. ESEMPIO:

$x_1 = 0\,100$, $\neg x_2 = 1\,010$

RAPPRESENTIAMO OGNI "OR" DENTRO LE CLAUSOLE CON IL NUMERO "2", RAPPRESENTIAMO GLI "AND" TRA LE CLAUSOLE CON IL NUMERO "3".

PREMETTIAMO TANTI NUMERI "4" IN BASE A QUANTI ELEMENTI CI SONO IN X, OSSIA $|X|$"4".

Esempio:

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $f = C_1 \wedge C_2$ e $C_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$ e

$C_2 = x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3$

444 0100 2 0010 2 0001 3 0100 2 1010 2 1001

2) LA SECONDA CODIFICA CONSISTE NEL CODIFICARE IN FORMA ESPLICITA f TRAMITE LA SUA TAVOLA DI VERITÀ, NOTANDO POI CHE POSSIAMO FARLO POICHÉ $\{\text{VERO}, \text{FALSO}\}^{|X|}$ È UN INSIEME FINITO. CONSIDERIAMO LA TAVOLA DI VERITÀ:

x_1	x_2	x_3	f
V	V	V	V
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	V	V
V	V	F	F
F	V	F	V
V	F	F	V
F	F	F	F

CODIFICHIAMO LE RIGHE DELLA TAVOLA RAPPRESENTANDO "VERO" CON "1" E "FALSO" CON "0", SEPARANDO LE RIGHE CON "2".

1111 2 0111 2 1011 2 0011 2 1100 2 0101

2 1001 2 0000

SAPPIAMO CHE UNA CODIFICA χ È IRRAGIONEVOLE SE ESISTE UNA CODIFICA χ' T.C. LE PAROLE IN CUI χ CODIFICA LE ISTANZE DI Γ PIÚ CHE LUNGHE IN TERMINI POLINOMIALI DI QUELLE CODIFICATE DA χ'.

QUESTO SIGNIFICA CHE C'È UNA FUNZIONE F T.C.

$$|\chi(x)| \geq F(|\chi'(x)|)$$

ABBIAMO CHE LA CODIFICA 2 È UNA CODIFICA IRRAGIONEVOLE DI 3SAT

Codifiche ragionevoli

- Informalmente, una codifica χ per un problema Γ è **irragionevole** se **esiste un'altra codifica** χ' tale che le parole in cui χ codifica le istanze di Γ sono "più che polinomialmente" più lunghe delle parole parole in cui χ' codifica le istanze di Γ
- E, quindi, **una codifica χ per un problema Γ è ragionevole se**,
  - **<u>comunque</u> si scelga un'altra codifica χ' per Γ**,
  - esistono tre interi k, h_1 e h_2 tali che, **per ogni istanza x di Γ**,
  - $|\chi(x)| \leq h_1 |\chi'(x)|^k + h_2$
- Questo significa che
  - se χ è una codifica ragionevole per Γ,
  - comunque scegliamo un'altra codifica χ' per Γ,
  - può succedere che le parole risultanti dalla codifica χ' siano più corte delle parole risultanti dalla codifica χ
  - ma esiste un polinomio p tale che, qualunque sia l'istanza x di Γ, $|\chi(x)|$ non è più grande di $p(|\chi'(x)|)$