Sintesi

Un qualsiasi problema di PL può essere messo nella seguente forma, detta forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1 x + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i \qquad (i = 1, \dots, n) \\ & x_i \in R_i \qquad (i = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

dove

- la funzione obiettivo é di minimo e senza costanti additive o moltiplicative (si moltiplicano per -1 le funzioni di massimizzazione; le costanti additive possono essere trascurate; le costanti moltiplicative possono essere eliminate cambiando il verso di ottimizzazione);
- tutte le variabili sono positive o nulle (si effettuano sostituzioni di variabili per le variabili libere o negative);
- tutti i vincoli sono delle equazioni (si aggiunge una variabile positiva di slack per i vincoli $\leq$ e si sottrae una variabile positiva di surplus per i vincoli $\geq$);
- i termini noti b_i sono tutti positivi o nulli (si moltiplicano per -1 i vincoli con termine noto negativo).

Un metodo per risolvere un sistema di equazioni lineari si ottiene ricorrendo al concetto di base di una matrice. Una base di A é una sottomatrice quadrata di A di rango massimo o, in altri termini, una matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ottenuta scegliendo n colonne linearmente indipendenti della matrice A.

$$A = [B|F] \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(B) \neq 0 \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} \qquad x_B \in \mathbb{R}^n \quad x_F \in \mathbb{R}^{m-n}$$

B è la base.

F è l'insieme delle colonne restanti.

x_B variabili in base.

x_F variabili non in base.

$$Ax = b \Rightarrow [B|F] \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = Bx_b + Fx_F = b \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dato un sistema di equazioni $Ax=b$, le soluzioni ottenute scegliendo una base B della matrice e ponendo $x_B = B^{-1}b$ e x_F si dicono soluzioni di base.

Dato un sistema di equazioni $Ax=b$, e una base B di A, la soluzione di base corrispondente si dice ammissibile se viene soddisfatta la condizione di non negatività $x_B = B^{-1}b \geq 0$.

Il vertice di un poliedro è una S.B.A.

Il metodo del simplesso è un metodo iterativo che permette di trovare l'insieme delle S.B.A

I passi del metodo del simplesso:

0) inizializzazione

Sia dato un problema di PL in forma standard e una base ammissibile di partenza B

1) test ottimalità

Se tutti i costi ridotti delle variabili fuori base sono positivi o nulli, allora la soluzione di base B è ottima, l'algoritmo termina con:

$$x_{B_i} = \bar{b}_i$$

$$x_{F_i} = 0$$

$$z = \bar{z}_B$$

2) test di illimitatezza

se esiste una qualsiasi variabile fuori base x_h:

$\bar{c}_h < 0 \wedge \bar{a}_{ih} \leq 0 \quad \forall i = 1 \ldots m$ allora il problema è illimitato.

3) scelta della variabile entrante per il cambio base

Si scelga come variabile entrante una variabile x_h con costo ridotto strettamente negativo $x_h : \bar{c}_h < 0$

4) si scelga una variabile uscente per il cambio base

Si scelga una variabile uscente x_{B_t} con $t = \arg\min_{i=1 \ldots n} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$

5) cambio base e iterazione

Aggiornare la base B corrente eliminando la colonna x_{B_t} e sostituendola con x_h. Tornare al passo 1.

Se non abbiamo una base iniziale bisogna utilizzare il metodo delle due fasi.

Nella fase I si introduce il problema artificiale:

$$\min\ w = y_1 + \dots + y_m$$
$$\text{s.t. } Ax + Iy = b$$
$$x, y \geq 0$$

Per passare alla forma canonica bisogna trasformare gli 1 sulla prima riga in 0. Successivamente si può proseguire con il metodo del simplesso normale. Al termine se $w=0$ e tutte le variabili artificiali nulle. Il problema è ammissibile. Se $w>0$ il problema originario non è ammissibile. Nel caso $w=0$:

- Se le variabili y sono tutte fuori base al termine del simplesso, allora la base ottima finale della fase I corrisponde direttamente le variabili x in una base ammissibile. Si procede alla seconda fase.
- Se qualche variabile y è in base con valore diverso da 0 il problema non ammette soluzioni in quanto la regione ammissibile è l'insieme vuoto (A_u in base con valore $b=3$)
- Se qualche variabile y è in base con valore uguale a 0, si procede all'iterazione sostituendo una y con una x fuori base purché abbia coeff. $\neq 0$ nell'eq. associata alla variabile artificiale in base. (A_u in base con valore $b=0$)

Fase II: se la fase I termina con $w^*>0$ la fase II non ha luogo. Altrimenti si eliminano le colonne delle variabili artificiali, si sostituisce la funzione obiettivo con quella originale e devono essere azzerati i coeff. della funzione obiettivo relativi alle variabili in base e continuare con il simplesso normale

primale-duale

Dato un problema di PL $z^* = \min\{c^T x : x \in P\}$ con $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\}$, $P \neq \emptyset$ e z^* limitato valgono le seguenti condizioni necessarie e sufficienti:

$$w \leq c^T x,\ \forall x \in P \iff \exists u \in \mathbb{R}^m : \begin{cases} u^T A \leq c^T \\ w \leq u^T b \end{cases}$$

PL_1	PL_2
$z^* = \min\ c^T x$	$w^* = \max\ u^T b$
s.t. $Ax = b$	s.t. $u^T A \leq c^T$
$x \geq 0$	$u \in \mathbb{R}^m$

PL_1 è detto problema primale, PL_2 è detto problema duale.

Vediamo come si trasforma da primale a duale:

	Min	Max	
Vincoli	$\geq \ \leq \ =$	$\geq \ \leq \ \mathbb{R}$	Variabili
Variabili	$\geq \ \leq \ \overset{=}{\mathbb{R}}$	$\leq \ \geq \ =$	Vincoli

	Max	Min	
Vincoli	$\geq \ \leq \ =$	$\leq \ \geq \ \mathbb{R}$	Variabili
Variabili	$\geq \ \leq \ \overset{=}{\mathbb{R}}$	$\geq \ \leq \ =$	Vincoli

$$\min_{x} \quad 12x_1 + 2x_2 + x_3$$

vin →
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\boxed{\geq} 10 \\ x_1 + x_3 &\boxed{=} 1 \\ x_2 + x_3 &\boxed{\leq} 7 \end{aligned}$$

var → $x_1 \boxed{\geq} 0, \ x_2 \boxed{\leq} 0, \ x_3 \boxed{=} 0$

$\longrightarrow$

$$\max_{u} \quad 10u_1 + u_2 + 7u_3$$

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &\boxed{\leq} 12 \\ 2u_1 + u_3 &\boxed{\geq} 2 \\ -u_1 + u_2 + u_3 &\boxed{=} 1 \end{aligned}$$

$u_1 \boxed{\geq} 0, \ u_2 \boxed{=} 0, \ u_3 \boxed{\leq} 0$

Sia data una coppia di problemi primale-duale. Allora:

- se PL è illimitato, DL è inammissibile
- se DL è illimitato, PL è inammissibile

Dualità forte: Sia dato il problema primale $z^* = \min\{c^T x : x \in P\}$ con $P = \{x : Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ e z^* limitato. Allora

$$z^* = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} = w^* = \max\{u^T b : u^T A \leq c^T, u \text{ libere}\}$$ (forma standard)

Dualità debole: Siano P e D i poliedri delle regioni ammissibili dei problemi primale e duale $P = \{x \geq 0 : Ax \geq b\}$ e $D = \{u \geq 0 : u^T A \leq c^T\}$ entrambi $\neq \emptyset$. Allora $\forall x, u$ con $x \in P$ e $u \in D$ vale che: $\quad u^T b \leq c^T x$.

Siano date una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per PL e una soluzione $\bar{u}$ ammissibile per DL.

Se $c^T \bar{x} = \bar{u}^T b$, allora $\bar{x}$ è una soluzione ottima per PL e $\bar{u}$ lo è per DL.

Complementarietà

Per verificare se la soluzione posta a un problema P è ottima, verifichiamo se è ammissibile, trasformiamo poi P nel duale D e applichiamo le condizioni di complementarietà primale-duale:

$u_i (v_i) = 0 \rightarrow u_i (n) \rightarrow u_i = 0 \qquad v_i$ = vincolo i di P

$x_i (w_i) = 0 \rightarrow x_i (n) \rightarrow x_i = 0 \qquad w_i$ = vincolo i di D una volta trovate le condizioni fare il sistema di eq. e trovare vettore u, verificare l'ammissibilità duale.

Algoritmo primale-duale

Dato un problema di PL, si costruisce il corrispondente duale D del quale è disponibile una soluzione ammissibile $y^{(0)}$. Da $y^{(0)}$ si costruisce il primale ristretto partendo dal primale in forma standard, si verifica la complementarità con $y^{(0)}$ e si scrive il primale ristretto. Se $y^{(0)}$ non è presente si aggiunge un vincolo $\sum x_i \leq b_y$

Aggiungendo in caso le variabili artificiali nel primale ristretto troviamo una soluzione ottima ϕ.

Se si trova una soluzione ϕ ci si ferma altrimenti procediamo con il duale ristretto calcolando $y^{(1)} = y^0 + \Theta(\pi)$. Il duale ristretto è il duale del primale ristretto

Avendo posto $\Theta(\pi)$ le nuove variabili saranno π.

Calcolata la soluzione π del duale ristretto la moltiplichiamo per Θ e ci calcoliamo $y^{(1)} = y^{(0)} + \Theta(\pi)$.

Per trovare Θ ci basterà sostituire $y^{(1)}$ nel primo duale.

Se il vettore $y^{(1)}$ è ammissibile allora è ottimo.

PLI

Un problema in PLI è nella forma:

$$\begin{aligned} \min / \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in \mathbb{Z}^n_+ \end{aligned}$$

Per questi problemi si utilizza il metodo di Branch Bound:

1) Rilassa il problema levando i vincoli di interezza
2) Risolvi tramite il metodo del simplesso
3) Se la soluzione trovata è un intero con vettore di interi, la sol. è ottima STOP.
4) BRANCH: Sia x_k la variabile non intera trovata con il simplesso, divido il problema P_0 in due sottoproblemi P_1 e P_2. Gli saranno aggiunti rispettivamente i vincoli $x_k \leq [x_k]$ e $x_k \geq [x_k]+1$, dove $[x_k]$ è il valore intero di x_k

5) BOUND: trova la soluzione ottima (simp.) per P_1 e P_2, il valore ottimo sarà $\overset{UB_1}{Z_1}$ e $\overset{UB_2}{Z_2}$ mentre il lowerbound sarà $\overset{LB}{Z_L}$ (ottenuta arrotondando x_3).

6) a. se la sol. è inammissibile termina il branch.

b. se la sol. non è un intero:

1) se val. funz. obb. > Z_L vai allo step 2.

2) se val. funz. obb. < Z_L termina brench.

c. se la sol. è un intero:

1) se val. funz. obb. = Upperbound, trovata la soluzione ottima STOP

2) se val. funz. obb. ≠ Upperbound.

2.1) UB > LB vai allo step 2.

2.2) UB < LB termina branch.