Universitatea
Politehnica
Timișoara

Piața Victoriei nr. 2
RO 300006 - Timișoara
Tel: +40 256 403000
Fax: +40 256 403021
rector@upt.ro
www.upt.ro

CURS

ELECTROTEHNICĂ

AC_CTI/B

Ș.l. dr. ing. Ildiko TATAI

ildiko.tatai@upt.ro

2022

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

În acest capitol vom analiza circuitele electrice alimentate de la surse care generează tensiuni şi curenţi cu variaţie sinusoidală în timp, de aceeaşi frecvenţă. Considerând circuitele liniare, tensiunile şi curenţii din circuit vor fi tot cu variaţie sinusoidală în timp şi de aceeaşi frecvenţă cu cea a surselor.

3.1 Mărimi caracteristice

O tensiune cu *variaţie sinusoidală* în timp are expresia

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha) \tag{1}$$

unde $u(t)$ reprezintă valoarea momentană sau instantanee (valoarea tensiunii la un moment oarecare);

U_m este amplitudinea (valoarea maximă a tensiunii);

$\omega t+\alpha$ este faza;

α reprezintă faza iniţială;

ω[rad/s] este pulsaţia, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$;

f[Hz] este frecvenţa;

T[s] este perioada.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

Variaţia în timp a tensiunii sinusoidale este reprezentă în fig.3.1

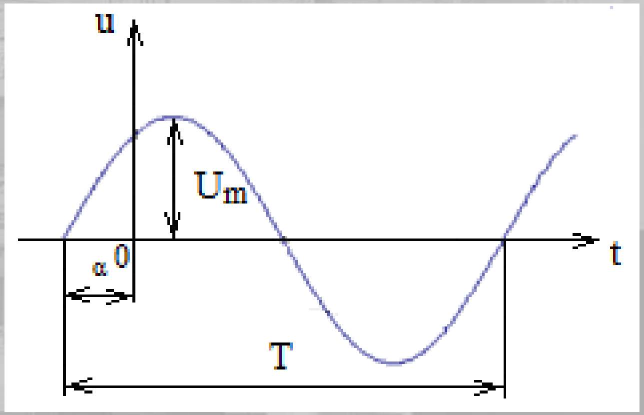


Fig.3.1 Variaţia în timp a tensiunii sinusoidale

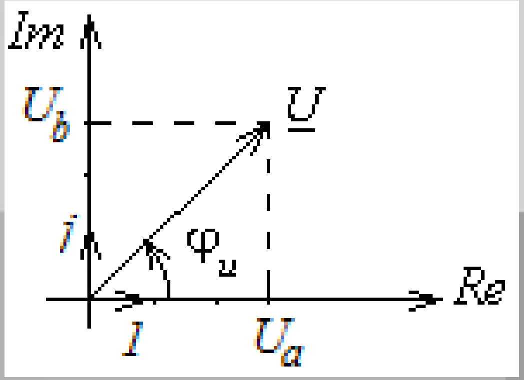


Fig.3.2 Reprezentarea fazorială a tensiunii

Valoarea efectivă a tensiunii este

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

Defazajul dintre o tensiune $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$ şi un curent $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha)$ se notează cu φ şi reprezintă φ = faza(u) – faza (i) = ωt - (ωt + α) = - α, deci expresia curentului va fi $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$, ceea ce înseamnă că curentul este *defazat* faţă de tensiune cu un unghi φ.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.2 Reprezentarea în complex simplificat a funcţiilor sinusoidale în timp

1) În reprezentarea în complex simplificat, unei *mărimi sinusoidale*

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

i se asociază o *mărime complexă*

$$\underline{U} = Ue^{j\varphi} \tag{4}$$

care are modulul egal cu *valoarea efectivă U* şi argumentul egal cu *faza iniţială φ* a mărimii sinusoidale.

$e^{j\varphi}$ se exprimă prin *formula lui Euler* astfel, $e^{j\varphi} = cos\varphi + jsin\varphi$, iar expresia mărimii complexe (4) devine

$$\underline{U} = U(cos\varphi + jsin\varphi) = U_a + jU_b, \tag{5}$$

o mărime cu care se operează foarte uşor în rezolvarea ecuaţiilor circuitelor electrice, acestea devenind ecuaţii algebrice.

2) Pentru trecerea inversă de la mărimea complexă (mărime fictivă), la valoarea momentană trebuie determinată *valoarea efectivă* ca modul al mărimii complexe

$$U = |\underline{U}| = \sqrt{\left(Re\{\underline{U}\}\right)^2 + \left(Im\{\underline{U}\}\right)^2}, \tag{6}$$

respectiv *faza iniţială* ca argument al mărimii complexe

$$\varphi = Arg\{\underline{U}\} = arctg\frac{Im\{\underline{U}\}}{Re\{\underline{U}\}}. \tag{7}$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

Exemple:

1. Cunoscând valoarea momentană a tensiunii $u(t) = 6\,sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ V, să se determine tensiunea complexă corespunzătoare.

Rezolvare:

În reprezentarea în complex simplificat, unei mărimi sinusoidale $u(t) = \sqrt{2}U\,sin(\omega t + \varphi)$ i se asociază o mărime complexă $\underline{U} = Ue^{j\varphi}$, care are modulul egal cu valoarea efectivă și argumentul egal cu faza inițială a mărimii sinusoidale. $e^{j\varphi}$ se exprimă prin formula lui Euler astfel $e^{j\varphi} = cos\,\varphi + j\,sin\,\varphi$.

$$\underline{U} = \frac{6}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(cos\frac{\pi}{4} + j\,sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3(1 + j)\,V.$$

Reprezentarea fazorială a acestei mărimi este prezentată în figură.

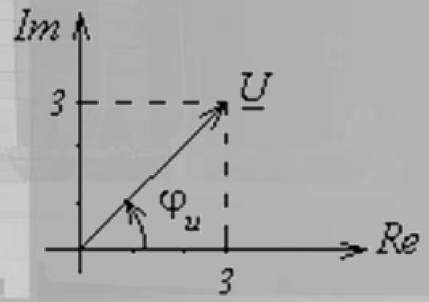


Fig.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

2. Să se determine valoarea momentană a curentului $\underline{I} = 5 + 10j \ A$.

Rezolvare:

Pentru trecerea inversă de la mărimea complexă la valoarea momentană trebuie determinată valoarea efectivă ca modul al mărimii complexe $I = \left|\underline{I}\right| = \sqrt{\left(Re\left\{\underline{I}\right\}\right)^2 + \left(Im\left\{\underline{I}\right\}\right)^2}$, respectiv faza inițială ca argument al mărimii complexe $\varphi = Arg\left\{\underline{I}\right\} = arctg\dfrac{Im\left\{\underline{I}\right\}}{Re\left\{\underline{I}\right\}}$.

$$I = \left|\underline{I}\right| = \sqrt{\left(Re\left\{\underline{I}\right\}\right)^2 + \left(Im\left\{\underline{I}\right\}\right)^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\varphi = Arg\{\,\underline{I}\,\} = arctg\frac{Im\{\,\underline{I}\,\}}{Re\{\,\underline{I}\,\}} = arctg\frac{10}{5} = arctg2 = 1{,}11\ rad = 63{,}43^{\circ}$$

Valoarea momentană a curentului este $i(t) = 5\sqrt{5}\sqrt{2}\sin(\omega t + 63{,}43)$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.3 Elemente ideale de circuit

3.3.1. Rezistorul ideal

Un rezistor ideal este caracterizat doar prin *rezistență electrică*, având unitatea de măsură [Ω] – Ohm. Aplicând o tensiune sinusoidală la bornele unui rezistor R (figura 3.3a), de tipul:

$$u = U_m \sin(\omega t) \qquad (8)$$

prin rezistor va circula un curent electric a cărui intensitate este obţinută din relaţia lui Ohm:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t) = I_m \sin(\omega t) \qquad (9)$$

Comparând expresiile tensiunii şi intensităţii curentului electric prin rezistor, se observă faptul că intensitatea curentului este în fază cu tensiunea la bornele acestuia. Deci, cele două mărimi cu variaţie sinusoidală trec în aceleaşi momente prin 0, prin valoarea maximă, respectiv prin valoarea minimă (figura 3.3b).

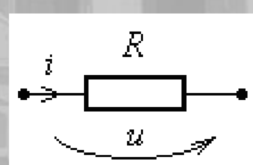


Fig.3.3a. Rezistor ideal

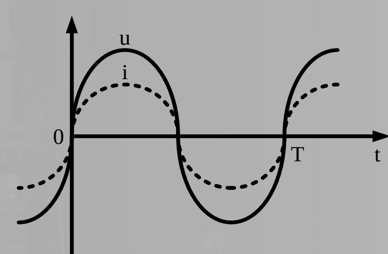


Fig.3.3b. Reprezentarea în timp a tensiunii şi curentului pentru rezistorul ideal

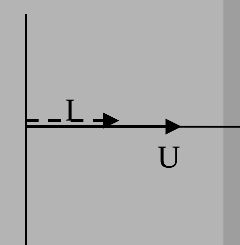


Fig.3.3c. Diagrama fazorială

Acelaşi lucru poate fi observat şi din diagrama fazorială a tensiunii şi curentului (figura 3.3c), diferenţa de fază între cele două mărimi fiind zero.

Tensiunea la bornele rezistorului în valori efective se exprimă astfel

$$U_R = RI. \qquad (10)$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.3.2. Bobina ideală

O bobină ideală este caracterizată doar prin *inductivitate* (figura 3.4a), rezistenţa electrică a înfăşurării fiind considerată neglijabilă. O bobină reală este caracterizată atât prin inductivitatea sa L (care este parametrul principal) cât şi prin rezistenţa spirelor. Unitatea de măsură a inductivităţii este [H] – Henry.

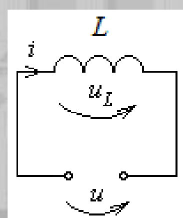


Fig. 3.4a. Bobina ideală

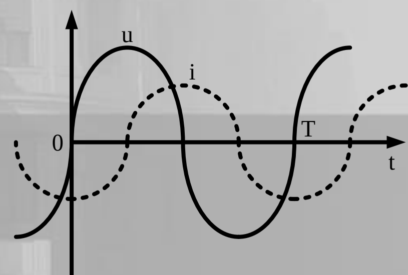


Fig. 3.4b. Reprezentarea în timp a tensiunii şi curentului pentru bobina ideală

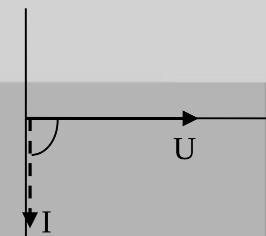


Fig. 3.4c. Diagrama fazorială

Aplicând o tensiune sinusoidală la bornele unei bobine

$$u_L = u = U_m \sin(\omega t), \qquad (11)$$

tensiunea la bornele bobinei ideale (fără rezistență) fiind

$$u_L = L\frac{di}{dt}. \qquad (12)$$

și presupunând că și curentul are tot o variație sinusoidală ca și tensiunea, dar cu un oarecare defazaj φ faţă de aceasta: $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$, atunci

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \varphi)\,. \qquad (13)$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

Înlocuind pe (11) și (13) în (12) rezultă: $U_m \sin(\omega t) = L\,\omega I_m \cos(\omega t + \varphi)$ și apoi $U_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = L\,\omega I_m \cos(\omega t + \varphi)$. Prin identificarea termenilor rezultă mărimea

$$\frac{U_m}{I_m} = \omega L = X_L. \quad (14)$$

numită *reactanță inductivă* cu unitatea de măsură [Ω] și $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, iar expresia intensității curentului electric prin bobină devine:

$$i = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (15)$$

Comparând expresiile tensiunii și intensității curentului electric prin bobină, se observă faptul că intensitatea curentului electric este defazată cu π /2 în urma tensiunii.

În reprezentarea grafică (figura 3.4b), acest lucru se observă astfel: față de momentul inițial (t=0) al reprezentării, când tensiunea trece prin 0 în sens crescător, curentul trece prin zero, tot în sens crescător, cu o întârziere de un sfert de perioadă (T = 2π, deci T/4 = π /2).

Același lucru se observă și din diagrama fazorială (figura 3.4c), curentul fiind defazat cu π/2 în urma (în sens negativ) tensiunii.

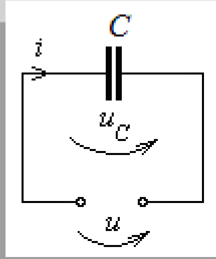
Tensiunea la bornele bobinei în valori efective se exprimă astfel

$$U_L = \omega L I = X_L I. \quad (16)$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.3.3. Condensatorul ideal

Un condensator ideal este caracterizat prin *capacitate electrică* (figura 3.5a), unitatea de măsură a acesteia fiind [F] – Farad. Alimentând condensatorul în regim permanent sinusoidal, acesta se încarcă pe cele două armături cu sarcini electrice egale şi de semne opuse, şi se descarcă periodic, determinând un curent electric prin circuitul exterior lui datorat deplasării sarcinilor electrice pentru încărcarea şi descărcarea armăturilor.



Aplicând la bornele condensatorului o tensiune sinusoidală

$$u_C = u = U_m \sin(\omega t), \qquad (17)$$

curentul pentru încărcarea condensatorului (cu sensul din figura 5a) va avea expresia:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C \cdot u_C) = C\frac{du_C}{dt}. \qquad (18)$$

Se observă că la descărcarea condensatorului sarcina scade, deci şi tensiunea pe condensator scade şi atunci derivata tensiunii în raport cu timpul este negativă. Semnul curentului în acest caz devine negativ, fiind deci orientat invers faţă de sensul de pe figură (sens care corespunde încărcării condensatorului).

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

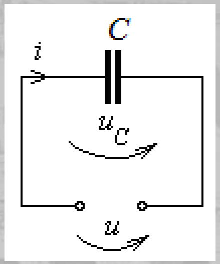


Fig.3.5a. Condensatorul ideal

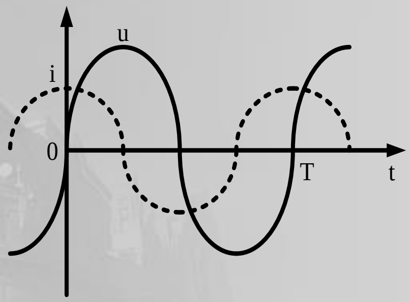


Fig.3.5b. Reprezentarea în timp a tensiunii şi curentului pentru condensatorul ideal

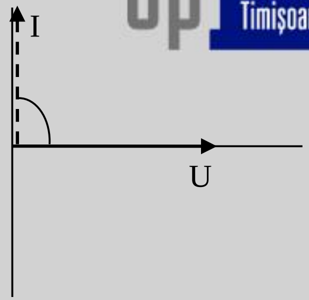


Fig.3.5c. Diagrama fazorială

Introducând expresia tensiunii (17) în expresia curentului (18) rezultă

$$i = C\frac{du_C}{dt} = C\omega U_m \cos(\omega t) \qquad (19)$$

Cum în regim sinusoidal curentul are în general expresia $i = I_m\ \sin(\omega t + \varphi)$, rezultă $C\omega U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_m\ \sin(\omega t + \varphi)$ de unde, prin identificarea termenilor rezultă

$$\frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C} = X_C. \qquad (20)$$

numită *reactanţă capacitivă* cu unitatea de măsură [Ω] şi $\varphi = +\frac{\pi}{2}$

Astfel, curentul pentru încărcarea condensatorului în regim sinusoidal va avea expresia:

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (21)$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

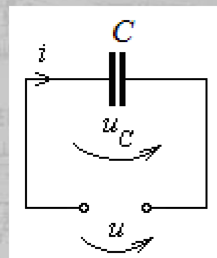


Fig.3.5a. Condensatorul ideal

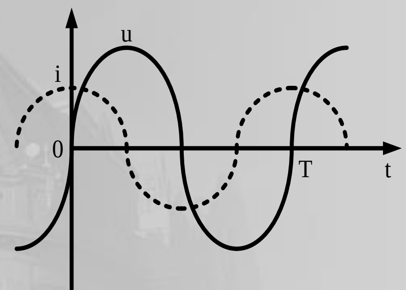


Fig.3.5b. Reprezentarea în timp a tensiunii şi curentului pentru condensatorul ideal

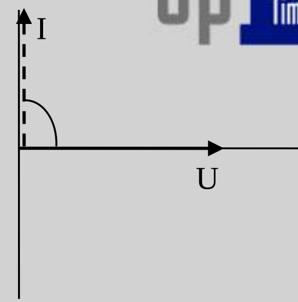


Fig.3.5c. Diagrama fazorială

Se observă faptul că intensitatea curentului electric pentru încărcarea condensatorului este defazată cu π/2 înaintea (în faţa) tensiunii pe condensator.

În reprezentarea grafică (figura 3.5b), acest lucru se observă astfel: faţă de momentul iniţial (t = 0) al reprezentării, când tensiunea pe condensator trece prin zero în sens crescător, curentul trece prin zero, tot în sens crescător, mai devreme cu un sfert de perioadă (T = 2π, deci T/4 = π/2).

Deci, la momentul t = 0, curentul trece prin maxim. Acelaşi lucru se observă şi din diagrama fazorială (figura 3.5c), curentul fiind defazat cu π/2 în faţa (în sens pozitiv) tensiunii pe condensator.

Tensiunea la bornele condensatorului în valori efective se exprimă astfel

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = X_C I. \qquad (22)$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.4. Circuit ideal RLC serie

Se consideră circuitul din figura 3.6 în care rezistenţa, bobina şi condensatorul sunt elemente ideale de circuit, conectate în serie.

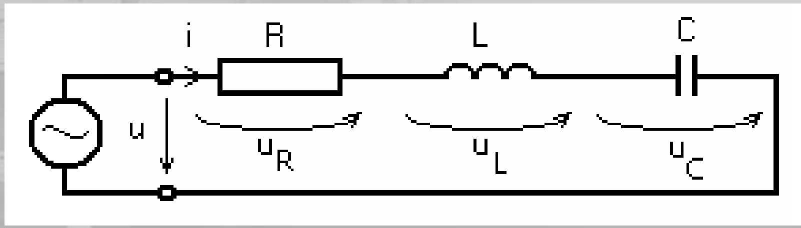


Fig.3.6. Circuitul ideal RLC serie

Dacă tensiunea aplicată la borne este sinusoidală, dar considerăm de data aceasta că tensiunea are şi o anumită fază initial α

$$u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha) \qquad (23)$$

curentul care se stabileşte prin circuit este tot sinusoidal

$$i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \alpha - \varphi). \qquad (24)$$

Aplicând teorema a II-a a lui Kirchhoff pe circuit se obţine ecuaţia

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt, \qquad (25)$$

care este ecuaţia diferenţială a circuitului.

Circuitul se rezolvă folosind avantajos reprezentarea în complex.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i dt, \quad (25)$$

Derivatei curentului $\frac{di}{dt}$ îi corespunde

$$\omega I e^{j\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \omega I e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\alpha} = j\omega I e^{j\alpha} = j\omega \underline{I}\ \cdot. \quad (26)$$

Integralei curentului $\int i dt$ îi corespunde

$$\frac{1}{\omega} I e^{j\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\omega} I e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\alpha} = \frac{1}{j\omega} I e^{j\alpha} = \frac{1}{j\omega}\underline{I}\ \cdot. \quad (27)$$

Astfel, ecuaţia diferenţială (25) devine o ecuaţie algebrică (28) care se rezolvă foarte uşor

$$\underline{U} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = \underline{Z} \cdot \underline{I}, \quad (28)$$

în care $\underline{Z}$ este impedanţa complexă corespunzătoare întregului circuit serie RLC, care are unitatea de măsură [Ω]

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L - X_C) = R + jX. \quad (29)$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

Din relaţia (28) rezultă ***valoarea efectivă*** a curentului

$$I = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{Z}|} = \frac{U}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}}. \qquad (30)$$

unde $\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2} = \sqrt{R^2+X^2} = Z$ este impedanţa circuitului, iar $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ este reactanţa circuitului (ambele se măsoară în [Ω]).

Defazajul φ dintre tensiunea la bornele circuitului şi curentul prin acesta se determină cu expresia:

$$\varphi = arctg\frac{X}{R} = arctg\frac{X_L - X_C}{R}. \qquad (31)$$

Circuitul RLC serie poate avea:

- ***caracter inductiv*** dacă $X_L > X_C$, curentul fiind defazat în urma tensiunii ($\varphi > 0$);
- ***caracter capacitiv*** dacă $X_L < X_C$, curentul fiind defazat înaintea tensiunii ($\varphi < 0$);
- ***caracter rezistiv*** (la *rezonanță)* dacă $X_L = X_C$, curentul este în fază cu tensiunea ($\varphi = 0$).

Pentru o mai bună înţelegere se utilizează reprezentarea fazorială a mărimilor sinusoidale, care este o reprezentare grafo-analitică.

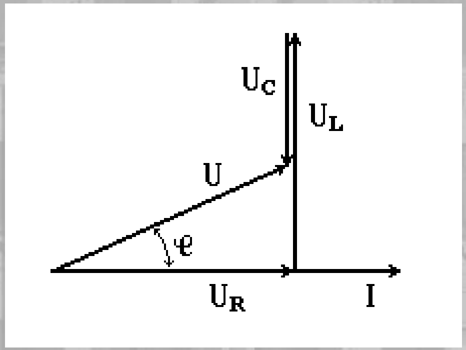
Fazorii nu sunt vectori fizici, mărimi vectoriale propriu-zise ci doar reprezentări geometrice orientate, asociate prin convenţie mărimilor sinusoidale, prezentate în *diagrame fazoriale*.

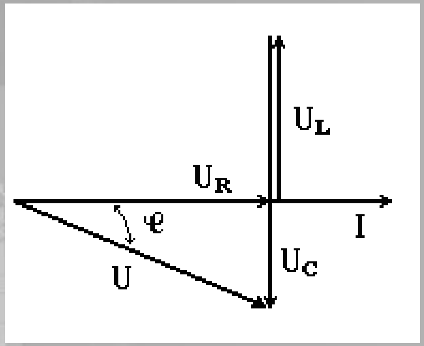
La circuitul RLC serie, construcţia diagramei fazoriale trebuie începută cu fazorul curent, deoarece curentul este acelaşi în circuit. Faţă de el, plasăm căderile de tensiune cu fazele lor, cu defazajele respective faţă de fazorul curent.

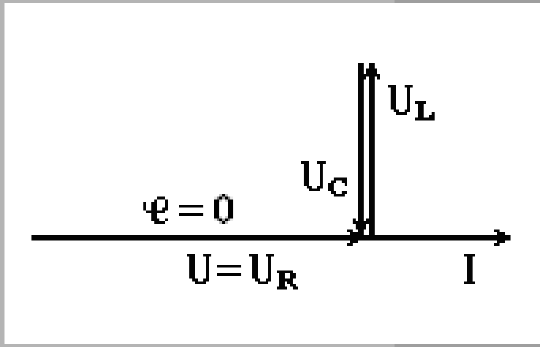
Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

Universitatea Politehnica Timişoara

În figura 3.7a este reprezentată calitativ diagrama fazorială pentru cazul unui circuit cu caracter inductiv $U_L > U_C$, relaţie echivalentă cu $X_L > X_C$ $(U_L = X_L I; U_C = X_C I)$, curentul prin circuitul serie fiind acelaşi prin toate elementele circuitului. Similar este reprezentată diagrama fazorială pentru cazul circuitului cu caracter capacitiv $U_C > U_L$, (fig.3.7b), respectiv la rezonanţă $U_L = U_C$ (fig.3.7c).







a). Cu caracter inductiv b). Cu caracter capacitiv c). Cu caracter rezistiv

Fig.3.7 Diagrame fazoriale ale circuitelor

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.5. Impedanţe echivalente

a) Conexiunea serie

Două sau mai multe impedanţe complexe sunt conectate în serie dacă sunt parcurse de acelaşi curent (fig.3.8).

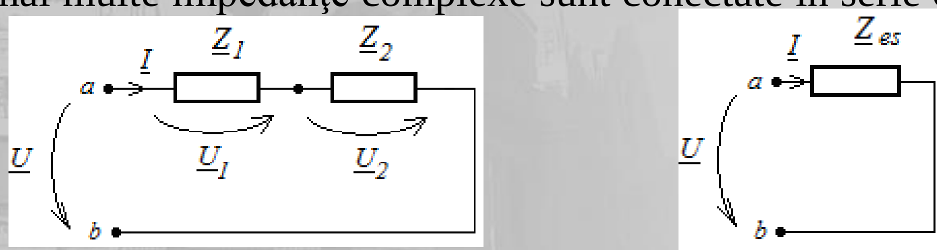


Fig.3.8 Impedanţe conectate în serie

Scriem teorema a II-a a lui Kirchhoff

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2, \tag{32}$$

exprimăm tensiunile la bornele impedanţelor în funcţie de curentul prin acestea

$$\underline{U} = \underline{I}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = \underline{I} \cdot \underline{Z}_{es}, \tag{33}$$

de unde rezultă că impedanţa echivalentă serie este suma impedanţelor

$$\underline{Z}_{es} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2. \tag{34}$$

În general, $\underline{Z}_{es} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \cdots + \underline{Z}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k,$ (35)

sau în altă exprimare $\underline{Z}_{es} = R_e + jX_e,$ (36)

unde $R_e = \sum_{k=1}^{n} R_k$ este rezistența echivalentă a grupării serie, iar $X_e = \sum_{k=1}^{n} X_k$ este reactanța echivalentă a grupării.

b) Conexiunea paralel

Două sau mai multe impedanţe complexe sunt conectate în paralel dacă au aceeaşi tensiune la borne (fig.3.9).

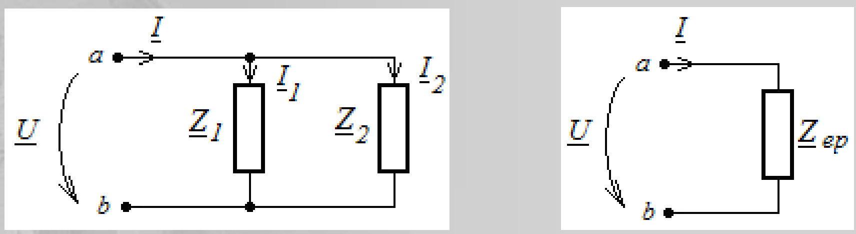


Fig.3.9 Impedanţe conectate în paralel

Scriem teorema I a lui Kirchhoff

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2, \qquad (37)$$

exprimăm curenţii în funcţie de tensiunile la bornele acestora

$$\frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{ep}} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \underline{U} \cdot \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right), \qquad (38)$$

de unde rezultă impedanţa echivalentă paralel

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ep}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}. \qquad (39)$$

În cazul general, impedanţa echivalentă paralel are expresia

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ep}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\underline{Z}_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_k}, \qquad (40)$$

sau exprimată în admitanţe $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G - jB$

$$\underline{Y}_{ep} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \cdots + \underline{Y}_k = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k, \qquad (41)$$

sau exprimată

$$\underline{Y}_{ep} = G_e - jB_e \qquad (42)$$

unde $G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k$ reprezintă conductanţa echivalentă a grupării paralel, iar $B_e = \sum_{k=1}^{n} B_k$ susceptanţa echivalentă a grupării paralel.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

c) Conexiunea mixtă

În fig.3.10 este prezentată o conexiune mixtă de elemente de circuit.

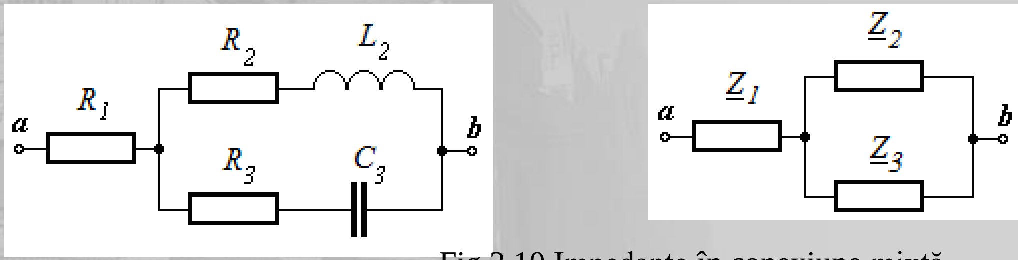


Fig.3.10 Impedanţe în conexiune mixtă

Se observă conexiunea serie dintre R_2 şi L_2 , impedanţa complexă serie este

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2, \tag{43}$$

şi conexiunea serie dintre R_3 şi C_3 cu impedanţa complexă serie

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}. \tag{44}$$

Cele două impedanţe sunt conectate în paralel, rezultând impedanţa complexă paralel

$$\frac{1}{\underline{Z}_{23}} = \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\ ;\ \underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \tag{45}$$

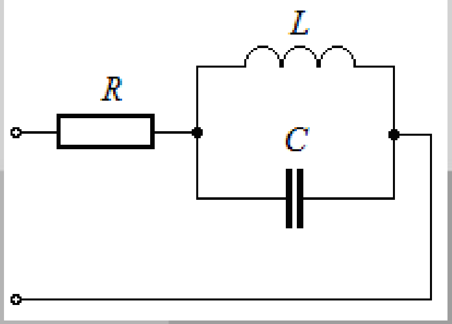
Rezistorul R_1 ($\underline{Z}_1$) este conectat în serie cu gruparea paralel $\underline{Z}_{23}$, astfel impedanţă echivalentă complexă faţă de bornele a şi b are forma finală următoare

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \tag{46}$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

Exemple:

1. Să se calculeze impedanţa complexă a circuitului cu schema din figura. Se cunosc R = 1Ω, L = 2H, C = 1F. Circuitul este alimentat de la o sursă de tensiune sinusoidală, cu frecvenţa f = 1/(2π) Hz. Ce caracter are circuitul şi care sunt parametrii faţă de bornele circuitului ?



Rezolvare:

Se observă conexiunea paralel între L şi C şi conexiunea serie între grupul LC şi rezistorul R.

Se calculează impedanţele complexe:

$$\underline{Z}_R = R = 1\Omega$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2 = 2j\Omega$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} 1} = -j\Omega$$

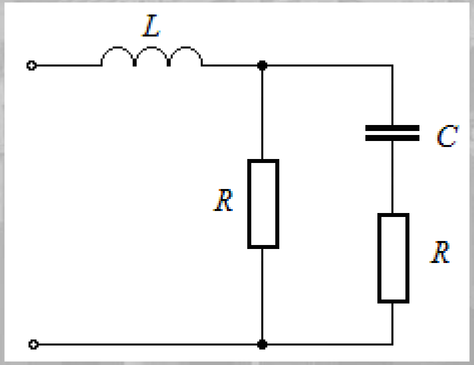
Impedanţa complexă echivalentă rezultă

$$\underline{Z}_{ech} = \underline{Z}_R + \frac{\underline{Z}_L \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = 1 + \frac{2j \cdot (-j)}{2j + (-j)} = 1 - 2j\Omega$$

Partea imaginară fiind negativă (ca la un condensator), circuitul are caracter capacitiv. Faţă de borne circuitul se comportă ca un rezistor cu rezistenţa $R_{ech} = Re\{\underline{Z}_{ech}\} = 1\ \Omega$ înseriat cu un condensator având reactanţa $X_{ech} = \left|Im\{\underline{Z}_{ech}\}\right| = 2\ \Omega$, respectiv capacitatea $C_{ech} = \frac{1}{\omega X_{ech}} = 0,5\ F$.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

2. Să se determine impedanța complexă a circuitului cu schema din figura. Se cunosc: ω = 100 rad/s, R = 10Ω, L = 0,1H, C = 1mF. Ce caracter are circuitul şi care sunt parametrii faţă de bornele circuitului ?



Rezolvare:

Se calculează impedanţele complexe:

$$\underline{Z}_R = R = 10\Omega$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j100\cdot 0{,}1 = 10j\Omega$$

$$\underline{Z}_{CR} = \frac{1}{j\omega C} + R = -j\frac{1}{100\cdot 1\cdot 10^{-3}} + 10 = 10 - 10j\Omega$$

Impedanţa complexă echivalentă rezultă

$$\underline{Z}_{ech} = \underline{Z}_L + \frac{\underline{Z}_R\cdot\underline{Z}_{CR}}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{CR}} = 10j + \frac{10\cdot(10-10j)}{10+10-10j} = 6+8j\Omega$$

Partea imaginară este pozitivă (ca la o bobină), circuitul are caracter inductiv. Faţă de borne circuitul se comportă ca un rezistor cu rezistenţa $R_{ech} = Re\{\underline{Z}_{ech}\} = 6\ \Omega$

înseriat cu o bobină având reactanţa $X_{ech} = |Im\{\underline{Z}_{ech}\}| = 8\ \Omega$, respectiv inductivitatea

$$L_{ech} = \frac{X_{ech}}{\omega} = 0{,}08\ H$$

3.6. Rezolvarea circuitelor electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

Rezolvarea circuitelor electrice liniare monofazate în regim sinusoidal se realizează folosind reprezentarea în complex simplificat.

Etapele rezolvării circuitelor electrice, dacă se cunosc paarametrii elementelor de circuit, sunt:

- Se determină imaginile în complex ale mărimilor ($\underline{U}$,$\underline{Z}$);
- Se scriu ecuaţiile corespunzător cu una din metodele de calcul, în mărimi complexe;
- Se rezolvă sistemul de ecuaţii obţinându-se imaginile complexe ale mărimilor necunoscute;
- Se determină, prin trecerea inversă, valorile instantanee ale mărimilor necunoscute.

Obs.: Metodele de rezolvare sunt cele învăţate: teoremele lui Kirchhoff, potenţiale la noduri, superpoziţie, Thevenin, Norton, doar că se lucrează cu mărimi complexe.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

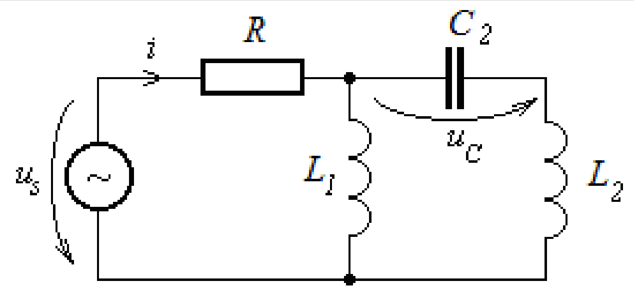
Exemple:

1. Se consideră circuitul de curent alternativ cu schema din figură, în care

$u_S(t) = 10\sqrt{2}\sin 100t$ V, R = 10 Ω, $L_1 = L_2 = 300$ mH, $C_2 = 500$ μF. Să se calculeze:

a) Impedanța complexă echivalentă a circuitului văzută de la bornele sursei şi parametrii circuitului;

b) Valoarea momentană a curentului *i* debitat de sursă.



Rezolvare:

a) Calculul impedanțelor complexe:

$$\underline{Z}_R = R = 10\Omega$$

$$\underline{Z}_{L1} = j\omega L_1 = j100\cdot 300\cdot 10^{-3} = 30j\Omega;$$

$$\underline{Z}_{C2L2} = \frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_2 = \frac{1}{j100\cdot 500\cdot 10^{-6}} + j100\cdot 300\cdot 10^{-3} = 10j\Omega.$$

Impedanța complexă echivalentă a circuitului văzută de la bornele sursei:

$$\underline{Z}_{ech} = \underline{Z}_R + \frac{\underline{Z}_{L1}\cdot\underline{Z}_{CL2}}{\underline{Z}_{L1}+\underline{Z}_{CL2}} = 10 + \frac{30j\cdot 10j}{30j+10j} = 10 + \frac{30}{4}j\Omega.$$

Circuitul are caracter inductiv (partea imaginară este pozitivă). Parametrii circuitului sunt: rezistența

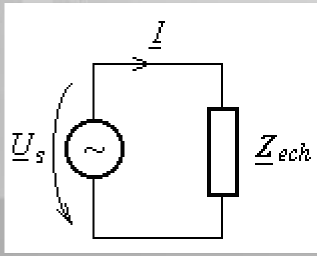
$R_{ech} = Re\{\underline{Z}_{ech}\} = 10\ \Omega$ şi inductivitatea $L_{ech} = \frac{X_{ech}}{\omega} = \frac{\frac{30}{4}}{100} = 75\,mH$ $\left(X_{ech} = \left|Im\{\underline{Z}_{ech}\}\right| = \frac{30}{4}\ \Omega\right)$.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

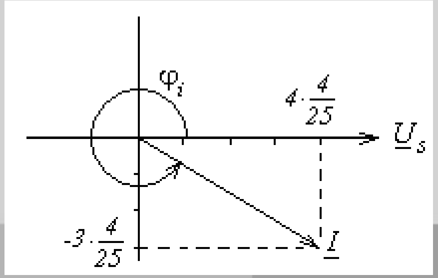
b) Lucrăm cu mărimi complexe, deci vom folosi $\underline{U}_s = 10\,e^{j0} = 10\ V.$

Cunoscând (de la punctul a)) impedanța echivalentă a circuitului văzută de la bornele sursei (fig.a), putem determina curentul debitat de sursă

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{Z}_{ech}} = \frac{40}{40+30j} = \frac{4}{25}(4-3j)\ \ A$$



a)



b)

Fig.

Pentru determinarea valorii momentane a curentului avem nevoie de valoarea efectivă şi de faza iniţială

$$I = \left|\underline{I}\right| = \frac{4}{25}\sqrt{4^2+3^2} = \frac{4\sqrt{25}}{25} = 0{,}8\ \ A$$

$$\varphi_i = Arg\{\,\underline{I}\,\} = arctg\frac{Im\{\,\underline{I}\,\}}{Re\{\,\underline{I}\,\}} = arctg\frac{-3}{4} = 2\pi - arctg\frac{3}{4} = 5{,}64\ \ rad.$$

Pentru a obţine unghiul corect folosim diagrama fazorială din fig.b.

În final, valoarea momentană a curentului debitat de sursă este:

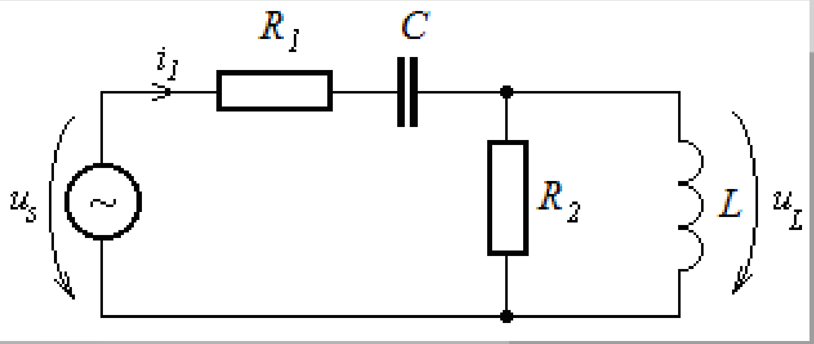
$$i(t) = I\sqrt{2}\,sin\left(\omega t + \varphi_i\right) = 0{,}8\sqrt{2}\,sin\left(100t + 5{,}64\right)\ A$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

2. Se consideră circuitul de curent alternativ cu schema din figura, în care $u_S(t) = 100\sqrt{2}\sin(1000t + \pi/2)$ V, R_1 = 50 Ω, R_2 = 100 Ω, L = 0,1 H, C = 20 μF. Să se calculeze:

a) Impedanţa complexă echivalentă a circuitului văzută de la bornele sursei şi parametrii circuitului;

b) Valoarea momentană a curentului *i* debitat de sursă.



Rezolvare:

a) Calculul impedanţelor complexe:

$$\underline{Z}_{R1C} = R + \frac{1}{j\omega C} = 50 + \frac{1}{j1000 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = 50 - 50j\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{R2} = R_2 = 100\Omega$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j1000 \cdot 0{,}1 = 100j\Omega$$

Impedanţa complexă echivalentă a circuitului văzută de la bornele sursei:

$$\underline{Z}_{ech} = \underline{Z}_{R1C} + \frac{\underline{Z}_{R2} \cdot \underline{Z}_L}{\underline{Z}_{R2} + \underline{Z}_L} = 50 - 50j + \frac{100 \cdot 100j}{100 + 100j} = 100\Omega$$

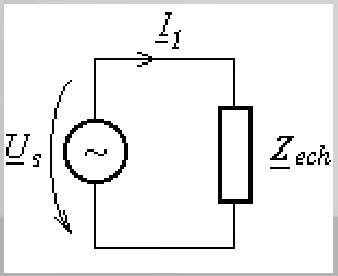
Circuitul este echivalent cu un rezistor de 100 Ω.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

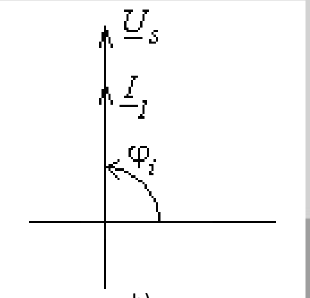
b) Tensiunea complexă $\underline{U}_s = 100\, e^{j\frac{\pi}{2}} = 100\, j\ V.$

Cunoscând impedanţa echivalentă a circuitului văzută de la bornele sursei (fig.a), determinăm curentul debitat de sursă

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_s}{\underline{Z}_{ech}} = \frac{100\, j}{100} = j\ \ A$$



a)



b)

Fig.

Determinăm valoarea efectivă şi faza iniţială a curentului

$$I_1 = \left|\underline{I}_1\right| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1A$$

$$\varphi_i = Arg\{\, \underline{I}_1 \,\} = arctg\, \frac{Im\{\, \underline{I}_1 \,\}}{Re\{\, \underline{I}_1 \,\}} = arctg\, \frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}\quad rad.$$

Faza iniţială este aceiaşi cu a tensiunii de alimentare, adică cele două mărimi sunt în fază (fig.b).

În final, valoarea momentană a curentului debitat de sursă este:

$$i_1(t) = I_1\sqrt{2}\, sin\left(\omega t + \varphi_i\right) = \sqrt{2}\, sin\left(1000\, t + \frac{\pi}{2}\right)\ A.$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.7. Puteri electrice în regim sinusoidal

Evaluarea unui sistem, circuit, de mică putere (domeniul electronicii, de ordinul 10^{-12}W) sau de mare putere (domeniul electrotehnicii, de ordinul 10^{6}W), se face din punctul de vedere al evaluării puterii transferate.

Se consideră un circuit electric (fig.3.11) alimentat pe la borne cu o tensiune sinusoidală $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$ prin care se stabileşte un curent sinusoidal $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$; s-a adoptat regula de la cosumatori. În comparaţie cu regimul de curent continuu, în regim sinusoidal se definesc mai multe tipuri de puteri, şi anume:

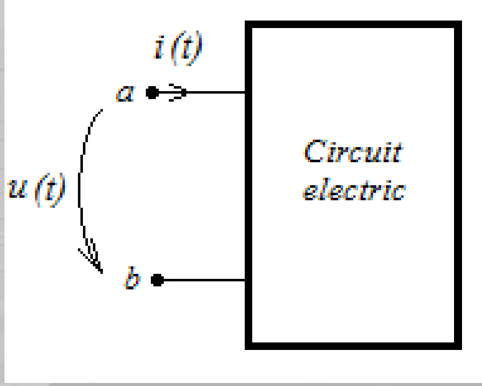


Fig.3.11 Puterea electromagnetică

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

a) *Puterea electromagnetică momentană (instantanee), p(t)*, puterea primită pe la borne de circuit, este produsul dintre tensiunea sinusoidală $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t)$ cu care este alimentat circuitul şi curentul sinusoidal $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$ care se stabileşte,

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \left(U\sqrt{2}\sin(\omega t)\right) \cdot \left(I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)\right) = UIcos\varphi - UIcos(2\omega t - \varphi) \qquad (47)$$

În curent alternativ, spre deosebire de curentul continuu, are loc un balans, o oscilaţie a puterii momentane între generator şi consumator. Intervalele de timp respective şi valorile puterii depind de caracterul consumatorului (rezistiv, inductiv, capacitiv), deci de parametri acestuia sau de defazajul φ dintre tensiunea *u* şi curentul *i*.

b) *Puterea activă P*, se defineşte ca valoarea medie pe o perioadă a puterii momentane

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = UIcos\varphi, \qquad (48)$$

unde φ este defazajul dintre *u* şi *i*. Unitatea de măsură a puterii active este [W] – Watt. Puterea activă nu depinde de timp, depinde de valorile efective ale tensiunii şi curentului şi de defazajul dintre aceste două mărimi.

cosφ se numeşte *factor de putere* al circuitului. Atunci când $\varphi = 0$, ($cos\varphi = 1$), *U* şi *I* sunt în fază, iar *P* este maxim, rezultă $P = UI$. Cum $Zcos\varphi = R$, deci $Z = R$ şi $U = IZ$ puterea activă devine

$$P = RI^2, \qquad (49)$$

ceea ce înseamnă că este o putere pozitivă şi este consumată de resistor.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

c) Puterea reactivă Q, se defineşte prin relaţia

$$Q = UIsin\varphi. \qquad (50)$$

Unitatea de măsură a puterii reactive este [VAR] – VoltAmperReactiv. Cum $Zsin\varphi = X$, deci $Z = X$ şi $U = IZ$ puterea reactivă devine

$$Q = XI^2 = (X_L - X_C)I^2, \qquad (51)$$

ceea ce înseamnă că puterea reactivă poate fi pozitivă sau negativă.

Pentru o bobină, puterea reactivă este pozitivă, bobina consumă (primeşte) putere reactivă

$$Q_L = X_L I^2 > 0, \qquad (52)$$

iar pentru un condensator, puterea reactivă este negativă, condensatorul produce (cedează) putere reactivă

$$Q_C = -X_C I^2 < 0. \qquad (53)$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

d) Puterea aparentă S, se defineşte ca produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi curentului şi reprezintă valoarea maximă a puterii active

$$S = UI = ZI^2. \qquad (54)$$

Unitatea de măsură a puterii aparente este [VA] – VoltAmper.

Între puterea aparentă S, puterea activă P şi puterea reactivă Q se poate scrie relaţia de legătură

$$S^2 = P^2 + Q^2. \qquad (55)$$

e) Puterea aparentă complexă $\underline{S}$ este o mărime de calcul, folosită pentru a calcula puterile activă, reactivă şi aparentă şi se defineşte ca produsul dintre tensiunea complexă şi curentul complex conjugat

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*. \qquad (56)$$

Exprimând tensiunea complexă $\underline{U} = U$ şi curentul complex $\underline{I}^* = Ie^{j\varphi}$, relaţia (56) devine

$$\underline{S} = U \cdot Ie^{j\varphi} = UI(cos\varphi + jsin\varphi) = P + jQ, \qquad (57)$$

deci, partea reală a lui $\underline{S}$ reprezintă puterea activă $P = Re\{\underline{S}\} = UIcos\varphi$, iar partea imaginară a lui $\underline{S}$ puterea reactivă $Q = Im\{\underline{S}\} = UIsin\varphi$.

f) Factorul de putere, *k*, se defineşte ca raportul dintre puterea activă şi puterea activă maximă (puterea aparentă)

$$k = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}} = \frac{UIcos\varphi}{UI} = cos\varphi. \qquad (58)$$

Pentru ca o instalaţie cu putere aparentă dată să fie folosită eficient este necesar ca factorul de putere să fie egal cu 1, adică curentul I absorbit să fie mai mic, deci pierderile RI^2 mai mici ($I = \frac{P}{Ucos\varphi}$).

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.8. Teoremele conservării puterilor

a) *Teorema conservării puterilor aparente complexe*

Puterile aparente complexe ale surselor trebuie să se regăsească în impedanţele laturilor.

$$\sum_{surse} \underline{S} = \sum_{R,L,C} \left(\underline{S}_R + \underline{S}_L + \underline{S}_C \right). \qquad (59)$$

b) *Teorema conservării puterilor active*

Puterea activă debitată de surse trebuie să se regăsească în puterea activă consumată de rezistoare.

$$\sum_{surse} P_S = \sum_R P_R. \qquad (60)$$

c) *Teorema conservării puterilor reactive*

Puterea reactivă debitată a surselor trebuie să se regăsească în puterea reactivă a reactanţelor din circuit.

$$\sum_{surse} Q_S = \sum_L Q_L + \sum_C Q_C. \qquad (61)$$

SURSE	ELEMENTE DE CIRCUIT (R, L, C)
$\underline{S}_S = \underline{U}_S \cdot \underline{I}_S^* =$	$\underline{S}_{R,L,C} = \underline{U}_Z \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}_{RLC} \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z}_{RLC} \cdot I^2$
$P_S = U_S I_S cos\varphi$	$P_R = RI^2$
$Q_S = U_S I_S sin\varphi$	$Q_{L,C} = X_L I^2 - X_C I^2$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

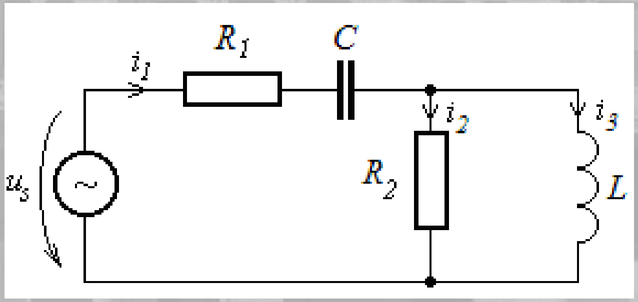
Universitatea Politehnica Timişoara

Exemple:

1. Se consideră circuitul de curent alternativ cu schema din figură, în care se cunosc:

$u_s(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ V, R_1 = 50 Ω, R_2 = 100 Ω, X_L = 100 Ω, X_C = 50 Ω.

Să se verifice bilanţul puterilor active şi reactive.



Rezolvare:

Se calculează mai întâi imaginea complexă a curenţilor din laturile circuitului şi a tensiunii de alimentare:

$$\underline{I}_1 = j\ A;\quad \underline{I}_2 = \frac{1}{2}(-1+j)\ A;\quad \underline{I}_3 = \frac{1}{2}(1+j)\ A;\quad \underline{U}_s = 100j\ V.$$

Se observă că în acest caz curentul i_1, are aceiaşi fază iniţială de *π/2 rad* ca şi tensiunea u_s. Prin urmare, puterea reactivă debitată de sursă este nulă. Aceasta înseamnă că puterea reactivă consumată de bobină este acoperită de puterea reactivă debitată de condensator, lucru care va rezulta şi din calcule.

a) Bilanţul puterilor active:

- Puterea activă debitată de sursă:

$$P_s = U_s I_1 \cos\varphi = 100\cdot 1\cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = 100\ W$$

- Puterea disipată în rezistenţe:

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 50\cdot 1 + 100\cdot\frac{1}{2} = 100\ W$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

Rezultă $P_S = P_R$.

b) Bilanţul puterilor reactive:

- Puterea reactivă debitată de sursă:

$$Q_s = U_s I_1 \sin\varphi = 100 \cdot 1 \cdot \sin 0 = 0 .$$

- Puterea reactivă consumată de elementele reactive:

$$Q_{LC} = X_L I_3^2 - X_C I_1^2 = 100 \cdot \frac{1}{2} - 50 \cdot 1 = 0 .$$

Şi bilanţul puterilor reactive este aşadar satisfăcut $Q_S = Q_{LC}$.

În loc de a verifica separat bilanţul puterilor active, respectiv reactive, putem verifica direct bilanţul puterilor aparente complexe:

$$\underline{S}_s = \underline{U}_s \underline{I}_1^* = 100j \cdot (-j) = 100 ,$$

$$\underline{S}_R = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 50 \cdot 1 + 100 \cdot \frac{1}{2} = 100 ,$$

$$\underline{S}_L = jX_L I_3^2 = j100 \cdot \frac{1}{2} = 50j ,$$

$$\underline{S}_C = -jX_C I_1^2 = -j50 \cdot 1 = -50j ,$$

de unde

$$\underline{S}_R + \underline{S}_L + \underline{S}_C = 100 + 50j - 50j = 100 = \underline{S}_s .$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

2. Se consideră circuitul de curent alternativ cu schema din figură, în care se cunosc: $u_{S2}(t) = 10\sqrt{2}\sin\omega t$ V, $u_{S3}(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ V, $R_1 = R_4 = 5\,\Omega$, $X_{L2} = X_{L3} = X_{C5} = 10\Omega$. Să se verifice:

a) Bilanţul puterilor active,

b) Bilanţul puterilor reactive.

Rezolvare:

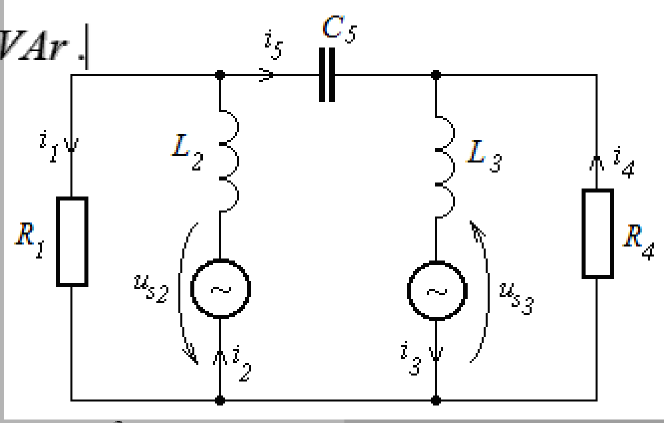
Se calculează mai întâi curenţii din laturile circuitului:

$$\underline{I}_1 = -1,2j\ A;\quad \underline{I}_2 = 0,6 - j\ A;\quad \underline{I}_3 = 1 - 0,2j\ A;\quad \underline{I}_4 = 0,4\ A;\quad \underline{I}_5 = 0,6 + 0,2j\ A.$$

Din puterea aparentă complexă:

$$\underline{S}_s = \underline{U}_{S2}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{S3}\underline{I}_3^* = 10\cdot(0,6 + j) + 10j\cdot(1 - 0,2j) = 8 + 20j\ ,$$

rezultă puterea activă și reactivă furnizată de sursă: $P_S = 8W$, $Q_S = 20VAr$.



a) Bilanţul puterilor active

- Puterea disipată în rezistenţe:

$$P_R = R_1 I_1^2 + R_4 I_4^2 = 5\cdot 1,2^2 + 5\cdot 0,4^2 = 8\ W\ .$$

Rezultă $P_S = P_R$.

b) Bilanţul puterilor reactive

- Puterea reactivă consumată de elementele reactive:

$$Q_{LC} = X_{L2}I_2^2 + X_{L3}I_3^2 - X_{C5}I_5^2 = 10\cdot 1,166^2 + 10\cdot 1,02^2 - 10\cdot 0,632^2 = 20VAr\ .$$

Și bilanţul puterilor reactive este satisfăcut $Q_S = Q_{LC}$.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.9. Teorema transferului maxim de putere activă

Se consideră o reţea activă şi o latură pasivă de impedanţă complexă $\underline{Z} = R + jX$, fig.3.12. Se pune întrebarea în ce condiţii reţeaua activă transferă în latura pasivă o putere activă maximă.

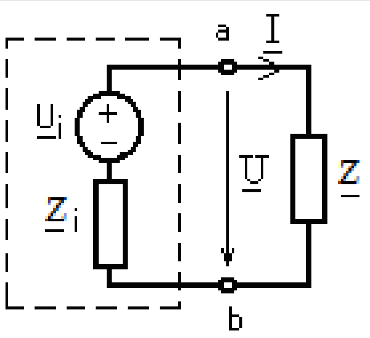


Fig. 3.12

Prin impedanţa complexă $\underline{Z}$ trece curentul

$$\underline{I} = \frac{\underline{U_i}}{\underline{Z}+\underline{Z_i}} = \frac{\underline{U_i}}{(R+R_i)+j(X+X_i)}, \qquad (62)$$

cu valoarea efectivă $I = \frac{U_i}{Z_e} = \frac{U_i}{\sqrt{(R+R_i)^2+(X+X_i)^2}}$,

iar puterea activă cedată de reţea este

$$P = RI^2 = U_i^{\,2}\frac{R}{(R+R_i)^2+(X+X_i)^2}, \qquad (63)$$

dependentă de R şi de X. Pentru ca P să fie maximă, trebuie să se anuleze derivatele funcţiei în raport cu R şi X, obţinându-se condiţia:

$$\underline{Z} = \underline{Z_i}^{*}, \qquad (64)$$

unde $\underline{Z_i}^{*} = R_i - jX_i$.

Deci, puterea transmisă pe la borne unui receptor (pasiv) este maximă, dacă impenanţa receptorului este egală cu conjugata complexă a impedanţei interne a generatorului echivalent la bornele căruia este conectat receptorul, astfel

$$P_{max} = \frac{U_i^{\,2}}{4R_i}. \qquad (65)$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

3.10. Rezonanţa în circuitele electrice monofazate

Rezonanţa apare la circuitele electrice care conţin bobine şi condensatoare şi funcţionează în regim sinusoidal. Pentru ca un astfel de circuit să fie în regim de rezonanţă, trebuie ca puterea reactivă primită pe la borne să fie nulă, $Q = 0$.

Cum $Q = X_e I^2 = B_e U^2$, condiţia de rezonanţă se poate exprima şi prin relaţiile: $X_e = 0$, respectiv $B_e = 0$, adică reactanţa echivalentă şi susceptanţa echivalentă faţă de bornele circuitului sunt nule.

3.10.1 Rezonanţa de tensiune

Rezonanţa de tensiune apare la circuitul RLC - serie, atunci când $X_e = 0$, adică $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$, ceea ce înseamnă o pulsaţie $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, sau o frecvenţă $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ numită *frecvenţă de rezonanţă*.

Rezonanţa de tensiune înseamnă compensarea reciprocă a tensiunilor la bornele bobinei şi condensatorului, $U_L = U_C$ şi deci $U = U_R$, adică impedanţa circuitului este minimă, $\underline{Z}_e = R$, iar curentul din circuit este maxim $\underline{I}_0 = \frac{U}{R}$. Diagrama fazorială în acest caz este cea din fig.3.13.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

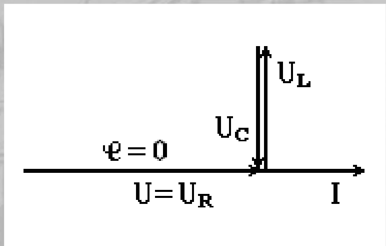


Fig. 3.13

Un circuit RLC – serie, la rezonanţă poate fi utilizat pentru amplificarea tensiunilor mici, cu frecvenţe egale cu frecvenţa de rezonanţă.

Raportul dintre tensiunea la bornele bobinei sau condensatorului şi tensiunea de alimentare se numeşte *factorul de calitate al circuitului*:

$$Q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (66)$$

Mărimea inversă se numeşte *factor de amortizare*:

$$a = \frac{1}{Q} = R\sqrt{\frac{C}{L}}. \qquad (67)$$

Reprezentarea *valorii relative a curentului* $\frac{I}{I_0}$, în funcţie de valoarea relativă a pulsaţiei $\frac{\omega}{\omega_0}$ se numeşte *curbă de rezonanţă*. Curba de rezonanţă este influenţată de factorul de calitate Q al circuitului. În fig.3.14 sunt reprezentate curbele de rezonanţă pentru diferite valori ale factorului de calitate.

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

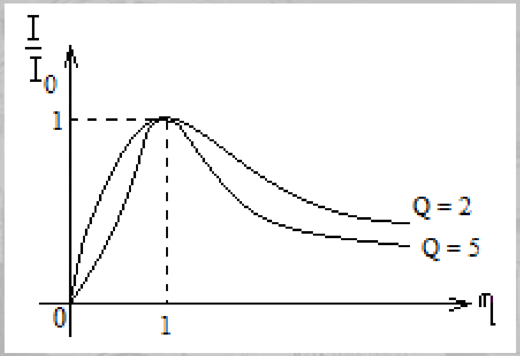


Fig.3.14 Curbe de rezonanță

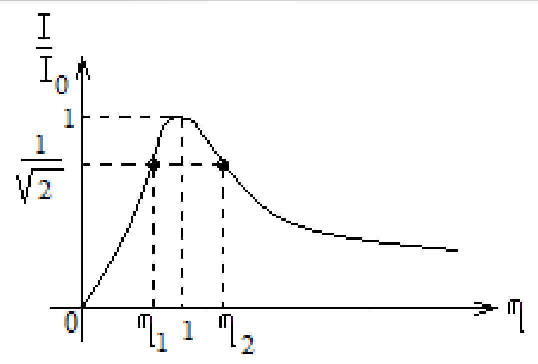


Fig.3.15 Banda de trecere

$$\frac{I}{I_0}=\frac{U}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot\frac{R}{U}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)^2}} \qquad (68)$$

unde s-a notat cu $\eta=\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{f}{f_0}$.

Proprietatea circuitului de a realiza curenţi care variază pronunţat cu frecvenţa tensiunii aplicate se numeşte *selectivitate*, în legătură cu care se defineşte şi *banda de trecere* ca intervalul de frecvenţe în care $\frac{I}{I_0}\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$. Limitele acestui interval se determină din relaţia

$$\frac{I}{I_0}=\frac{1}{\sqrt{1+Q_0^2\left(\eta-\frac{1}{\eta}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (69)$$

Cap.3 Circuite electrice liniare monofazate în regim sinusoidal

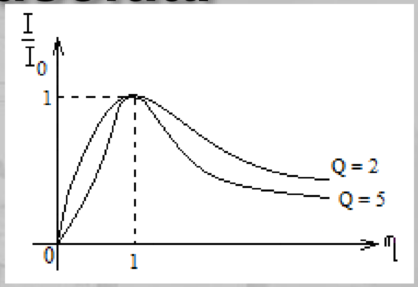


Fig.3.14 Curbe de rezonanţă

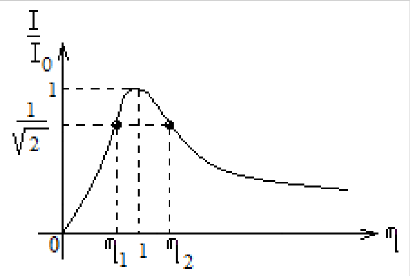


Fig.3.15 Banda de trecere

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_0^2\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (69)$$

Rezultă de aici ecuaţia

$$\eta - \frac{1}{\eta} = \pm\frac{1}{Q} = \pm a \qquad (70)$$

cu soluţiile reale şi pozitive

$$\eta_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1},\ \eta_2 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1} \qquad (71)$$

Banda de trecere a circuitului este

$$b = f_2 - f_1 = (\eta_2 - \eta_1)\cdot f_0 = a \cdot f_0 = \frac{f_0}{Q} \qquad (72)$$

Din relaţia (72) rezultă că, cu cât banda de trecere este mai îngustă cu atât circuitul este mai selectiv, factorul de calitate mai mare şi frecvenţa de rezonanţă mai mica.

3.10.2 Rezonanţa de curent

Rezonanţa de curent apare la circuitul RLC – paralel (vezi Bibliografie).