Universitatea
Politehnica
Timișoara

Piața Victoriei nr. 2
RO 300006 - Timișoara
Tel: +40 256 403000
Fax: +40 256 403021
rector@upt.ro
www.upt.ro

CURS

ELECTROTEHNICĂ

AC_CTI/B

Ș.l. dr. ing. Ildiko TATAI

ildiko.tatai@upt.ro

2022

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

În cazul în care circuitele eletrice liniare conţin doar surse cu variaţie sinusoidală în timp, aflate în regim permanent, ecuaţiile care se scriu sunt ecuaţii algebrice scrise în complex care se rezolvă uşor. Dacă însă curenţii şi tensiunile au variaţii în timp nesinusoidale, rezolvarea ecuaţiilor este mai dificilă. Exemple din practică:

- în circuit acţionează mai multe surse sinusoidale, dar de frecvenţe diferite, circuitul fiind în regim permanent;
- în circuit acţionează cel puţin o sursă cu variaţie nesinusoidală în timp, dar periodică, circuitul fiind în regim permanent;
- circuitul conţine surse de curent continuu şi cel puţin o bobină sau un condensator şi se află în regim tranzitoriu.

Regimurile de funcţionare ale circuitelor electrice în care curenţii şi tensiunile au variaţie periodică nesinusoidală în timp se numesc *regimuri deformante*. Mărimile periodice nesinusoidale au largă aplicaţie în telecomunicaţii şi automatizări unde semnalele folosite sunt nesinusoidale.

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

4.1 Mărimi periodice nesinusoidale

Matematicianul J.B.Fourier a demonstrat că o funcţie periodică de timp *f(t)*, având perioada *T*, se poate scrie sub forma unei serii de sinusuri şi cosinusuri având frecvenţe şi amplitudini date

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\omega t + b_n \cos n\omega t) \quad (1)$$

unde $c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ este *componenta continuă* (valoarea medie pe o perioadă);

iar $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt$, n = 1, 2, ...

și $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt$, n = 1, 2, ..., sunt *armonicile de ordinul n.*

Fundamentala corespunde lui $n = 1$ și pulsația $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

Prin unele transformări trigonometrice funcţia Fourier devine:

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (2)$$

unde $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ reprezintă *amplitudinea*

$\varphi_n = arctg \frac{b_n}{a_n}$ reprezintă *faza inițială a armonicii de ordinul n.*

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

Determinarea amplitudinilor şi a fazelor iniţiale ale armonicilor din seria Fourier se numeşte *analiză armonică* sau *spectrală*.

Între valoarea efectivă a semnalului nesinusoidal şi valorile efective ale armonicilor acestora din seria Fourier se poate scrie o relaţie de legătură. Astfel, considerând o *tensiune periodică nesinusoidală*, cu descompunerea în serie Fourier următoare:

$$u(t) = U_0 + U_{1m}\sin(\omega t + \varphi_1) + U_{2m}\sin(2\omega t + \varphi_2) + \cdots + U_{nm}\sin(n\omega t + \varphi_n)$$
$$= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \qquad (3)$$

unde U_0 este componenta continuă;

$U_{1m}, U_{2m}, \dots, U_{nm}$ este amplitudinea armonicii de ordinul n ;

U_n este valoarea efectivă a armonicii de ordinul *n*.

Valoarea efectivă a tensiunii nesinusoidale este:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}, \qquad (4)$$

iar *valorile efective ale armonicilor sinusoidale* sunt: $U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}}, U_2 = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}}, \dots, U_n = \frac{U_{nm}}{\sqrt{2}}$.

Între acestea, se demonstrează că, există următoarea relaţie de legătură:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2 + \cdots +}, \qquad (5)$$

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

În practică, pentru a avea o imagine completă asupra conţinutului de armonici al unui semnal periodic, se foloseşte mărimea numită *factorul de distorsiuni armonice*, notat k_d:

$$k_d = \frac{\sqrt{U_2^2+U_3^2+\cdots+U_n^2+\cdots+}}{\sqrt{U_1^2+U_2^2+\cdots+U_n^2+\cdots+}}, \qquad (6)$$

Cu cât ponderea armonicilor de ordin mai mare decât 1 este mai mică, în raport cu armonica fundamentală, cu atât factorul de distorsiuni este mai mic ($0 < k_d < 1$).
De exemplu, pentru o tensiune pur sinusoidală, în seria Fourier $U_{1m} \neq 0$, rezultă $U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}}$, deci $k_d = 1$.

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

4.2 Puteri în regim periodic nesinusoidal

Dacă la bornele unui circuit se aplică o tensiune periodică nesinusoidală de forma

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \varphi_{un}) \quad (7)$$

prin circuit se stabileşte un curent tot nesinusoidal

$$i(t) = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t + \varphi_{in}) \quad (8)$$

Ca şi în regim sinusoidal, se definesc mai multe tipuri de puteri, şi anume:

a) *Puterea activă P*

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \cdot i(t)\, dt = U_0 \cdot I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot I_n \cdot cos\varphi_{(u,i)}, \quad (9)$$

unde $\varphi_{(u,i)} = \varphi_{un} - \varphi_{in}$ este defazajul între armonica de ordinul *n* a tensiunii şi curentului. Unitatea de măsură a puterii active este [W] – Watt.

Puterea activă este egală cu suma puterilor active ale armonicilor de acelaşi ordin din tensiune şi curent, la care se adaugă termenul corespunzător componentelor continue.

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

b) Puterea reactivă Q, se defineşte prin relaţia

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot I_n \cdot sin\varphi_{(u,i)}. \qquad (10)$$

Unitatea de măsură a puterii reactive este [VAR] – VoltAmperReactiv.

c) Puterea aparentă S, se defineşte ca produsul dintre valorile efective ale tensiunii şi curentului

$$S = UI. \qquad (11)$$

Unitatea de măsură a puterii aparente este [VA] – VoltAmper.

d) Puterea deformantă D

Între puterea aparentă S, puterea activă P, puterea reactivă Q şi puterea deformantă D se poate scrie relaţia de legătură

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2. \qquad (12)$$

de unde

$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}. \qquad (13)$$

Unitatea de măsură a puterii deformante este [VAD] – VoltAmperDeformant.

e) Factorul de putere, Δ, se defineşte ca raportul dintre puterea activă şi puterea aparentă

$$\varDelta = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}} \qquad (14)$$

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

4.3 Calculul circuitelor electrice liniare în regim periodic nesinusoidal

În aplicaţii, dacă la bornele unui circuit se aplică un semnal (o tensiune, un curent) periodic nesinusoidal, este necesară evaluarea conţinutului de armonici al semnalului de ieşire.

Pentru circuitele electrice liniare, alimentate cu tensiuni periodice nesinusoidale de forma

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} U_n \sin(n\omega t + \varphi_{un}) \qquad (15)$$

calculul curenţilor în regim permanent se bazează pe teorema superpoziţiei şi anume:

- se consideră că seria Fourier este o grupare serie de surse de tensiune;
- se determină răspunsul circuitului (curenţii) la fiecare din aceste surse – armonici presupunănd că este singură în circuit, celelalte fiind pasivizate. Deoarece fiecare sursă este sinusoidală, se aplică metoda reprezentării în complex;
- răspunsul circuitului (curenţii finali) se obţin însumând curenţii corespunzători fiecărei armonici.

Obs.: În general, forma de variaţie în timp a semnalului de ieşire este diferită de cea a semnalului de intrare, deoarece raportul dintre amplitudinea unei armonici de un anumit ordin din semnalul de ieşire şi amplitudinea armonicii de acelaşi ordin din semnalul de intrare este dependent de ordinul armonicii (doar la circuitele rezistive).

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

Se consideră circuitul RLC – serie alimentat cu o tensiune nesinusoidală, curentul rezultat este tot nesinusoidal, la care componenta continuă este $I_0 = 0$, din cauza condensatorului:

$$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \sin(n\omega t - \varphi_{in}) \tag{16}$$

Valorile efective ale armonicilor se calculează cu relaţia:

$$I_n = \frac{U_n}{\sqrt{R^2 + \left(n\omega L - \frac{1}{n\omega C}\right)^2}}. \tag{17}$$

iar defazajul corespunzător fiecărei armonici este

$$\varphi = arctg \frac{n\omega L - \frac{1}{n\omega C}}{R}. \tag{18}$$

Circuitul RLC – serie este la rezonanţă dacă $n\omega L - \frac{1}{n\omega C} = 0$, adică pentru armonica de ordinul $n = \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}$.

Exemple:

1. Se consideră tensiunea periodic nesinusoidală reprezentată în fig.4.1

Să se calculeze valoarea efectivă a tensiunii.

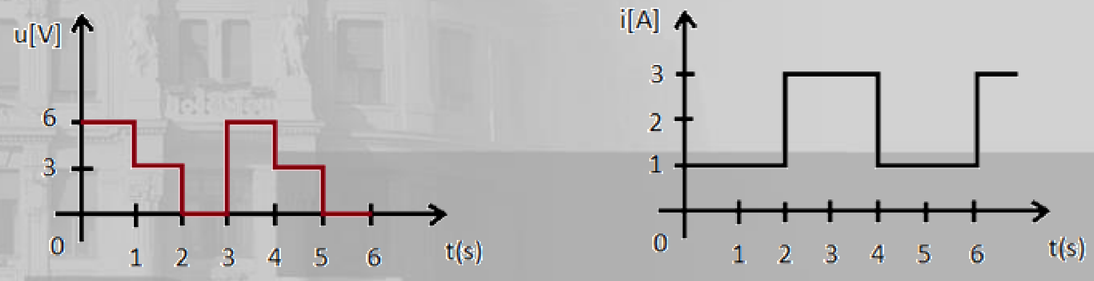


Fig.4.1

Expresia valorii efective a tensiunii periodice este

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}$$

Pentru perioada semnalului de T=3s se integrează pe porțiuni, se obține

$$U = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\int_0^1 6^2 dt + \int_1^2 3^2 dt + \int_2^3 0\ dt\right]} = \sqrt{\frac{1}{3}(16+9)} = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = 2.88\ V$$

2. Pentru curentul cu variația periodic nesinusoidală reprezentată în figura (b), să se calculeze valoarea efectivă

Perioada semnalului este T=4s. Valoarea efectivă a curentului determină prin integrarea pe porțiuni

$$I = \sqrt{\frac{1}{4}\left[\int_0^2 1^2 dt + \int_2^4 3^2 dt\right]} = \sqrt{\frac{1}{4}(1+9)} = \sqrt{\frac{10}{4}} = 1.581A$$

3. Să se calculeze valorile efective ale tensiunilor și curenților:

a) $u(t) = 20 + 10\sqrt{2}\sin(100t)V$

b) $u(t) = 10 + 20\sqrt{2}\sin(2\omega t) + 10\sqrt{2}\sin(4\omega t)V$

c) $u(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t) + 30\sqrt{2}\sin(3\omega t)V$

d) $i(t) = 3 + 4\sqrt{2}\sin(2\omega t + \frac{\pi}{3})A$

e) $i(t) = 2 + 2\sqrt{2}\sin(1000t + \mathrm{arctg}\frac{3}{4})A$

f) $i(t) = 5\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 10\sqrt{2}\sin(3\omega t)\ A$

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

Expresia valorii efective a tensiunii periodice este

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots}$$

Astfel,

a) $U = \sqrt{20^2 + 10^2} = \cdots$

b) $U = \sqrt{10^2 + 20^2 + 10^2} = \ldots$

c) $U = \sqrt{10^2 + 30^2} = \cdots$

a) $u(t) = 20 + 10\sqrt{2}\sin(100t)$ V

b) $u(t) = 10 + 20\sqrt{2}\sin(2\omega t) + 10\sqrt{2}\sin(4\omega t)$ V

c) $u(t) = 10\sqrt{2}\sin(\omega t) + 30\sqrt{2}\sin(3\omega t)$ V

Similar, pentru calculul valorilor efective ale curenților , expresia

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \cdots}$$

deci

d) $I = \sqrt{3^2 + 4^2} = \ldots$

e) $I = \sqrt{2^2 + 2^2} = \ldots$

f) $I = \sqrt{5^2 + 10^2} = \ldots$

d) $i(t) = 3 + 4\sqrt{2}\sin(2\omega t + \frac{\pi}{3})$ A

e) $i(t) = 2 + 2\sqrt{2}\sin(1000t + \mathrm{arctg}\frac{3}{4})$ A

f) $i(t) = 5\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 10\sqrt{2}\sin(3\omega t) A$

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

4. Circuitului cu schema din figura 4.2 i se aplica o tensiune periodică nesinusoidală $u(t)=20+20\sqrt{2}\sin(1000t)$V. Se mai cunosc valorile parametrilor de circuit $R=10\Omega$, $L=20$mH, $C=100\mu$F. Să se calculeze curenții din laturile circuitului.

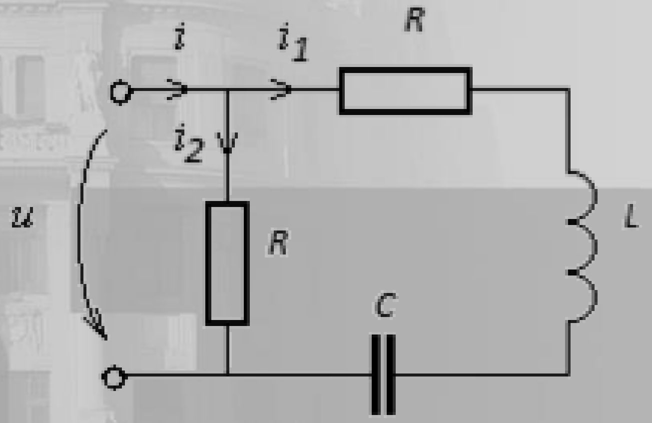


Fig. 4.2

Tensiunea periodică nesinusoidală are 2 termeni, primul termen este componenta continuă a tensiunii U(0)=V, iar cel de-al II-lea termen este armonica de ordinul I (fundamentala) a tensiunii $u_{(1)}(t)= 20\sqrt{2}\sin(1000t)$V.

Calculul curenților i, i_1 și i_2 se face separat pentru componenta continuă și pentru armonica de ordinul I, deci practic se analizează același circuit alimentat cu tensiunea U_0, respectiv $u_{(1)}(t)$.

- Analiza circuitului de curent continuu; alimentat cu tensiunea U_0=20V.

  Deoarece componenta continuă a curentului nu trece prin condensator, curenții au valorile:

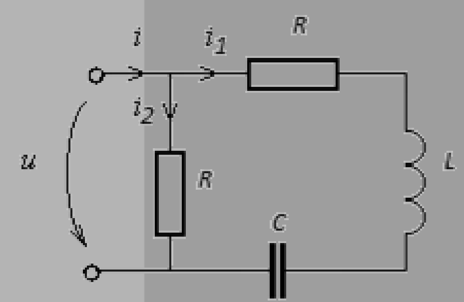
  $I_1(0)=0$

  $$\mathrm{I}(0) = \mathrm{I}_2(0) = \frac{U_{(0)}}{R} = \frac{20}{10} = 2A$$

- Analiza circuitului în regim sinusoidal, alimentat cu tensiunea $u_{(1)}(t)=20\sqrt{2}\sin(1000t)$V. Rezolvarea este cea clasică, folosind reprezentarea în complex simplificat, se cunosc:

$\underline{U}_{(1)}=U_{(1)}e^{jl}=20e^0=20$V

$\omega L=1000\cdot 20\cdot 10^{-3}=20\Omega$



$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000\cdot 100\cdot 10^{-6}} = 10\Omega$$

Calculăm cei trei curenți în mărimi complexe

$$\underline{I}_{1(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{20}{10+20j-10j} = 1-j$$

$$\underline{I}_{2(1)} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{R} = \frac{20}{10} = 2A$$

$$\underline{I}_{(1)} = \underline{I}_{1(1)} + \underline{I}_{2(1)} = 1-j+2 = 3-j$$

Cap.4 Circuite electrice liniare în regim nesinusoidal

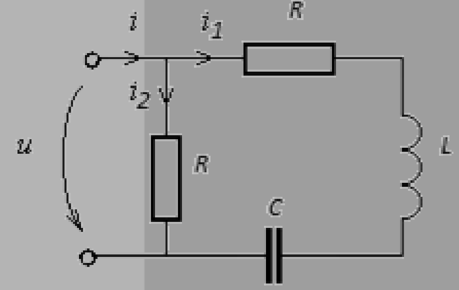
iar mai apoi valorile efective ale acestora:

$$i_{1(1)}(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(1000t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

$$i_{2(1)}(t) = 2\sqrt{2} \cdot \sin(1000t)$$

$$i_{(1)}(t) = \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t - arctg\,\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10}\sin\left(1000t + 2\pi - \ arctg\,\frac{1}{3}\right).$$

Curenții $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, se calculează prin însumarea curenților stabiliți de fiecare armonică a tensiunii aplicate circuitului:



$$i_1(t) = \ \mathrm{I}_1(0) + i_{1(1)}(t) = 2\sin\left(1000t + \frac{7\pi}{4}\right)$$

$$i_2(t) = \ \mathrm{I}_2(0) + i_{2(1)}(t) = 2 + 2\sqrt{2} \cdot \sin(1000t)$$

$$i(t) = \ \mathrm{I}(0) + i_{(1)}(t) = 2 + \sqrt{10} \cdot \sin\left(1000t + 2\pi - \ arctg\,\frac{1}{3}\right)$$