PARȚIAL PS !!

Curs 1 Introducere în teoria probabilităților

* $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

* $P(A) \approx \frac{k}{n}$ ← nr. cazuri în care ev. de interes s-a produs; ← nr. experimente

* $P(C_\Omega A) = 1 - P(A)$

* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

* $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

* $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Curs 2 Probabilități condiționate. Formula lui Bayes

* $P(E_2 | E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$ $\quad \boxed{P(E_2 | E_1) = P_{E_1}(E_2)}$

* $P(E_1 \cap E_2) = P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)$ sau $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$, dacă evenimentele sunt independente

$$\boxed{P(H_k | A) = \frac{P(H_k) P(A | H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A | H_i)}}$$

Formula lui Bayes

Curs 3 Variabile aleatoare discrete

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.}$$

Distribuția de probabilitate:

$p_X : D \to [0,1] \qquad p_X(x_k) = P(X = x_k)$

Probabilitatea ca variabila aleatoare X să ia valori mai mici sau egale cu x:

funcția $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F_X(x) = P(X \le x) \qquad F_X(x) = \sum_{i : x_i \le x} p_i$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots \\ p_1 + p_2 + \dots + p_k, & x_k \le x < x_{k+1} \\ \vdots \\ 1, & x \ge x_m \end{cases}$$

PROPRIETĂȚI

$$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \\ \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1. \\ a < b \Rightarrow F_X(a) < F_X(b). \end{cases}$$

Media $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Dispersia $\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i = M(x^2) - [M(x)]^2.$

Curs 4 Vectori aleatori discreți

		Y						
		y_1	y_2	...	y_i	...	y_n
	x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1i}	...	p_{1n}
	x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2i}	...	p_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
X	x_i	p_{i1}	p_{i2}	...	p_{ii}		p_{in}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mi}	...	p_{mn}

* $p_{X,Y}(x_i;y_j) = P((X,Y)=(x_i;y_j)) = P(X=x_i, Y=y_j)$

* $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$

Funcția de repartiție

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \sum_{x_i \le x}\sum_{y_j \le y} p(x,y).$$

OBS. $P(X=x_i)$ = suma elem. de pe linia i

$$\Rightarrow \boxed{p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}}$$

$P(Y=y_j)$ = suma elem. de pe coloana j.

Distribuțiile de probabilitate ale var. aleatoare X și Y:

$$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_{i\cdot} \end{pmatrix} i \in \{1,m\} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_j \\ p_{\cdot j} \end{pmatrix} j \in \{1,n\}$$

Variabile aleatoare condiționate

$$\boxed{P(X=x_i | Y=y_j) = \frac{P(X=x_i; Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}}} \;!$$

$$(X|Y=y_j) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i & \dots & x_m \\ p(x_1|y_j) & p(x_2|y_j) & & p(x_i|y_j) & & P(x_m|y_j) \end{pmatrix}$$

$$(Y|X=x_i) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_j & \dots & y_n \\ p(y_1|x_i) & p(y_2|x_i) & & p(y_j|x_i) & & P(y_n|x_i) \end{pmatrix}$$

Cursul 5 Distribuții clasice de probabilitate

Distribuția Bernoulli $X \sim Bernoulli(p)$	Se aruncă o monedă $B = 0$ $S = 1$	$X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$ $q = 1-p$ p - prob. succesului	$M(X) = p$ $\sigma^2(X) = p(1-p)$.
Distribuția Binomială $X \sim Bin(n,p)$	Se aruncă o monedă de n ori.	$X\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k \underbrace{(1-p)}_{q}^{n-k} \end{pmatrix}$ $k = 0, 1, \dots, n$ $1-p = q$	$M(X) = n \cdot p$ $\sigma^2(X) = npq$.
Distribuția Geometrică $X \sim Geom(p)$	Se aruncă o monedă de un nr. infinit de ori.	$X\begin{pmatrix} k \\ \underbrace{(1-p)}_{q}^{k-1} \cdot p \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{N}^*$ $1-p = q$	$M(X) = \frac{1}{p}$ $\sigma^2(X) = \frac{q}{p^2}$.
Distribuția Hipergeometrică $X \sim Hipergeom(N, n, p = \frac{a}{N})$	Se aruncă n monede din N monede a = monede B b = monede S.	$X\begin{pmatrix} k \\ \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_N^n} \end{pmatrix}$	$M(X) = np$ $\sigma^2(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot npq$ $1-p = q$
Distribuția Poisson $X \sim Pois(\lambda)$	Se produc x aruncări într-un interval de timp fixat.	$X\begin{pmatrix} k \\ \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!} \end{pmatrix}$ $k = 0, \dots n, \dots$	$M(X) = \lambda$ $\sigma^2(X) = \lambda$

Curs 6 Variabile aleatoare continue

Densitate de prob. (p.d.f).

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu prop.: $\boxed{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{array}}$

Variabilă aleatoare continuă - v.a pt. care distribuția de probab. este definită de o densitate de probab.

* Ce putem face cu p.d.f?

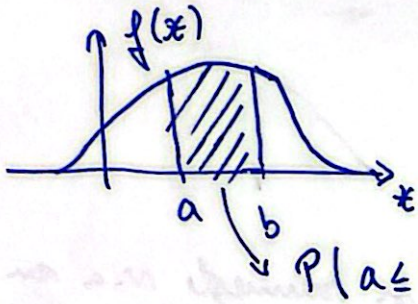
* Ne interesează $P(X \in I)$

$I = [a,b],\ (a,b),\ (a,b],\ [a,b),\ (-\infty, b],\ (-\infty, b),\ (a, +\infty),\ [a, +\infty)$

$$\boxed{P(X \in I) = \int_I f_X(x)\,dx}$$

Interpretare geometrică

$$\int_I f_X(x)\,dx = \text{Aria de sub } G_f.$$



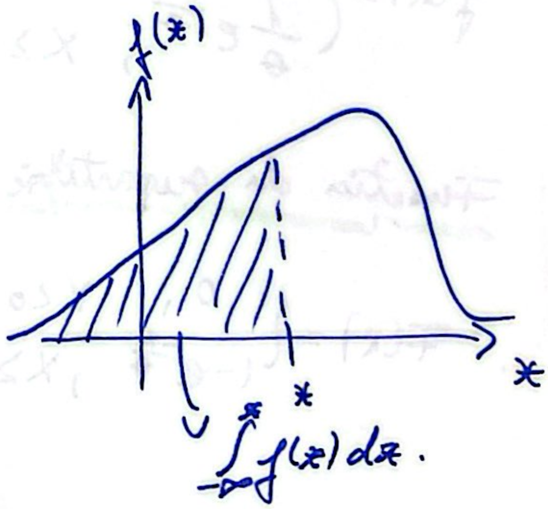
obs. $P(X = a) = P(X \in [a,a]) =$

$$= \int_a^a f_X(x)\,dx = 0.$$

Funcția de repartiție

$F_X: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$



OBS. $P(X\in I) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx - \int_{-\infty}^a f(x)\,dx =$

$= F(b) - F(a)$

EXEMPLU $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x\geq 0 \end{cases}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 0\,dx = 0 & x<0 \\ \int_{-\infty}^0 0\,dx + \int_0^x \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}dx = 1-e^{-\frac{x}{2}} & x\geq 0. \end{cases}$$

Unif

V.a. cont. are den. de prob.:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in[a,b) \\ 0, & x\notin(a,b) \end{cases}$ se numește v.a uniform distribuită pe $[a,b)$

$X \sim Unif[a,b)$

Funcția de repartiție

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x\in[a,b) \\ 1, & x\geq b. \end{cases}$$

Exp

V.a. cont. are den. de prob.:

$f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geq 0. \end{cases}$ $\theta>0$, se numește v.a cu distribuție exponențială de param. θ

$X \sim Exp(\theta)$

Funcția de repartiție

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta}}, & x\geq 0. \end{cases}$$

Media și dispersia v.a. cont.

$$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.}$$

Fie X v.a cu pdf.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fct. cont. sau cu nr. finit de pct. de discontinuitate de speța I $\Rightarrow Y = g(X)$ este o v.a.

Dacă $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x)\, dx < \infty$ atunci $Y = g(X)$ are media:

$$\boxed{M(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx.}$$

LOTUS = law of the unconscious statistician.

Dispersia

$D^2(X) = \sigma^2(X) = M((X-m)^2)$ unde $m = M(X)$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\, dx.} = M(X^2) - (M(X))^2.$$

CONCLUZII

V.a. discrete		V.a. continue
D_X - finită	Mulț. de valori	interval din $\mathbb{R}$
$X\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$ $p(x_i) = P(X = x_i) = p_i$	Reprezentare	$f(x) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$
$P(X = x_i) = p_i$	Calcul prob.	$P(X \in I) = \int_I f(x)\,dx.$
$F_X(x) = P(X \leq x)$ $F_X(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i$	Funcția de repartiție	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$ $P(X \in I) = \int_a^b f(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a).$
$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	Media	$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$
$\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 p_i$	Dispersia	$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)\,dx.$

$$\boxed{\sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.}$$

Curs 7 Distribuții continue clasice: uniformă, exponențială, normală

I. Distribuția uniformă $\boxed{Unif\,[a,b]}$

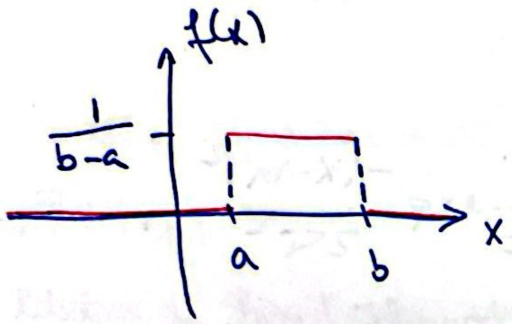
→ parametrii: a, b

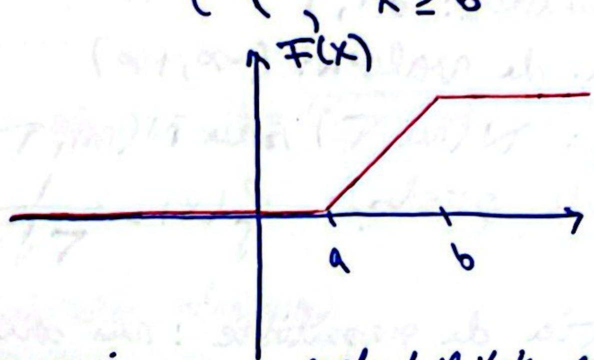
→ dom. de valori: $[a,b]$.

→ not.: $Unif\,[a,b]$ sau $uniform\,[a,b]$

→ den. de prob.: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$

→ funcție de repartiție: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1, & x \ge b \end{cases}$





→ model: valorile din domeniu au probabilitate egală de apariție

II. Distribuția exponențială $\boxed{Exp(\theta)}$

→ parametrii: θ

→ dom. de valori: $[0, +\infty)$

→ not.: $Exp(\theta)$

→ den. de prob.: $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \ge 0 \end{cases}$ $\theta > 0$.

→ funcția de repartiție: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}, & x \ge 0. \end{cases}$

→ $\boxed{M(X) = \theta;\ \sigma^2(X) = \theta^2.}$

→ **model**: timpul de așteptare pt. un proces continuu.

→ **lipsa de memorie**: prob. de a aștepta încă t minute nu este afectată de acea de a fi așteptat deja s minute fără eveniment
$$P(X > s+t / X > s) = P(X > t).$$

III. Distribuția normală = Distribuția Gaussiană $\boxed{N(m, \sigma)}$

DEF. → o variabilă aleatoare continuă, X, ce are den. de probab. $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}$, $x \in \mathbb{R}$ se numește v.a normal distribuită.

→ **parametrii**: m, σ
→ **dom. de valori**: $(-\infty, +\infty)$
→ **not.**: $N(m, \sigma)$ sau $N(m, \sigma^2)$.
→ **den. de prob.**: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

→ **funcția de repartiție**: nu are formulă (val. se pot det. folosind tabele sau software matematice: precum în R)

→ $\boxed{M(X) = m,\ \sigma^2(X) = \sigma^2.}$
→ **model**: măsurarea erorilor, înălțime, media big data.

IV. Distribuția normală standard $\boxed{Z \sim N(0,1)}$

→ **parametrii**: $m = 0$, $\sigma = 1$.
→ **den. de prob.**: $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$
→ **φ este pară.**
→ graficul se numește **clopotul lui Gauss**.
→ **not.**: $N(0,1)$
→ **fct. de repartiție**: $\Phi(x) = P(Z \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.
→ $\boxed{M(Z) = 0,\ \sigma^2(Z) = 1}$

Cuantilele unei variabile aleatoare

Mediana $\rightarrow$ mediana unei v. a X este real. x pt. care $P(X \leq x) = P(X \geq x) = 0,5$. Adică acel real. x pt. care $F(x) = 0,5$.

α - cuantila $\rightarrow$ unicul nr. real x_α ; $\alpha \in (0,1)$

$\rightarrow F(x_\alpha) = P(X \leq x_\alpha) = \alpha$

PROP.

- Între cuantilele $z_{1-\alpha}$ și z_α ale unei v.a. $Z \sim N(0,1)$ are loc:

$$\boxed{z_{1-\alpha} = -z_\alpha \quad \alpha \in (0,1)}$$

- Fie $X \sim N(m, \sigma^2)$. Atunci, $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ are prop. că $Z \sim (0,1)$.

Curs 8 Simularea variabilelor aleatoare

$\hookrightarrow$ presupune a genera independent, conform unui algoritm, un șir de nr. $y_1, y_2, \dots, y_n$ care să aibă particularitățile unor valori de observație asupra variabilei.

ex: generatorul $u = urand()$;

A - eveniment

$P(A) = 0,65$

$B = CA$ $P(B) = 0,35$

dacă $u < 0,65 \Rightarrow$ s-a produs evenimentul $U < 0,65$.

$\Rightarrow P(U < 0,65) = P(U \in [0; 0,65)) = 0,65$.

dacă $u \in [0,65, 1] \Rightarrow$ s-a produs evenimentul $U \in (0,65; 1]$

$\Rightarrow P(u \in (0,65; 1]) = 1 - 0,65 = 0,35$.

PROP Dacă $U \sim Unif[0,1)$ v.a uniform distribuită pe $[0,1)$, iar n este nr. întreg, $n > 1$, atunci $X = [nU]$, o v.a discretă ce are distribuție uniformă pe mulț. $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ adică $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.

* algoritm

```
Function SimDiscretU(n)
  u = urand();
  k = int(n*u);
  return k;
end.
```

* algoritm ce extrage un nr. la întâmplare din mulț. de nr. întregi $\{m, m+1, \dots, n\}$ $m < n$.

$N = n - m + 1$ elem.

$$X = \begin{pmatrix} m & m+1 & \dots & n \\ \frac{1}{n-m+1} & \frac{1}{n-m+1} & \dots & \frac{1}{n-m+1} \end{pmatrix}$$

```
Function randint(m, n)
  u = urand();
  k = int((n-m+1)*u));
  return k+m;
end.
```

* generarea unei permutări aleatoare

fie X o v.a. discretă cu val. ordonate $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{n-1} \end{pmatrix} \quad \sum_{k=0}^{n-1} p_k = 1.$$

Simularea v.a discrete cu o distribuție neuniformă

Fie X o v.a discretă cu val. ordonate, $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}$

$$X = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{n-1} \end{pmatrix} \quad \sum_{k=0}^{n-1} p_k = 1$$

```
Function SimDiscret(x, p, n)
k = 0;
F = p0;
u = urand();
while (u > F)
  {   k = k+1;
      F = F+pk;
  }
return xk;
end.
```

Simularea distribuției Bernoulli

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

- dacă $u \leq p \Rightarrow$ s-a produs ev. $(U \leq p)$
  $P(U \leq p) = P(0 \leq U \leq p) = p - 0 = p.$
- dacă $u > p \Rightarrow$ alegerea codificată de 0.

```
Function Bernoulli(p);
u = urand();
if (u < p)
      return 1;
else  return 0;
end.
```

Simularea distribuției binomiale

$X \sim Bin(n,p)$ $\quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ pr_0 & pr_1 & \dots & pr_k & \dots & pr_n \end{pmatrix}$

```
Function Bin(n,p)
k = 0;
c = p/(1-p);
pr = (1-p)^n;
F = pr;
u = urand();
while( u>F)
      { pr = (c*(n-k)/(k+1))*pr;
        F = F+pr;
        k = k+1;
      }
return k;
end.
```

Simularea distribuției geometrice

$X \sim Geom(p)$ $\quad X = \begin{pmatrix} k \\ p(1-p)^{k-1} \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

```
Function Geom1(p)
k = 0;
do {
      u = urand();
      k = k+1;
  } while(u>p);
return k;
end.
```

PROP. Dacă $p \in (0,1)$ și $U \sim Unif[0,1)$, atunci v.a.:

$$X = \left[\frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)}\right] + 1$$ are distribuția geom. de parametru p.

```
Function Geom2(p)
u = urand();
return int(log(1-u)/log(1-p)) + 1;
end.
```

Metoda inversării

→ se aplică pt. variabilele ce au fct. de repartiție inversabile.

X - v.a. cont.

den. de prob. f_X.

fct. de repartiție $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\boxed{F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx}$$

PROP.:
* fct. cont.
* nedescrescătoare $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$
* $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
* $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

Simulare v.a. continue

Fct. de repartiție F_U a unei v.a. $U \sim Unif[0,1)$

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0,1) \\ 1, & x \ge 1. \end{cases}$$

F_X - strict $\nearrow$ $\Rightarrow$ inversabilă

$\forall u \in (0,1)$, $F_X^{-1}(u) \in \mathbb{R}$.

```
Function MetodaInv()
u = urand();
X = Fx^-1(u);
return X;
end.
```

Simularea distribuției exponențiale de parametru θ.

fct. de repartiție $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & x \geq 0 \end{cases}$.

$P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - F_X(0) = 1 - 0 = 1.$

```
Function SimulareExp(theta)
u = urand();
x = - theta * log(1-u);
return x;
end.
```

$1 - e^{-\frac{x}{\theta}} = u$

$\Rightarrow x = -\theta \ln(1-u)$