Capitolul 1

Elemente de combinatorică

1.1 Definiţii şi rezultate de bază

Teorema 1.1.1 *Fie două mulţimi A şi B ce conţin fiecare m, respectiv n elemente. Numărul perechilor distincte $(x, y), x \in A, y \in B$ este $m \times n$.*

Exemplul 1.1.2 *Numărul perechilor distincte ce se pot forma cu elementele mulţimilor $A = \{\alpha, \beta\}$ şi $B = \{a, b, c\}$ este $2 \times 3 = 6$. Într-adevăr, perechile sunt $(\alpha, a), (\alpha, b), (\alpha, c), (\beta, a), (\beta, b), (\beta, c)$.*

Exemplul 1.1.3 *Dorim să determinăm câte numere Romtelecom sunt posibile a se distribui în interiorul unui judeţ, ştiind că aceste numere au în componenţa lor 10 cifre, primele 4 cifre reprezentând codul judeţului, următoarele 6 cifre fiind codul local al abonatului telefonic. Astfel, căutăm numere de forma $xyztuv$, unde $x \in \{2, \ldots, 9\}$, iar $y, z, t, u, v \in \{0, 9\}$. Obţinem că este posibil să se definească $(8)(10)(10)(10)(10)(10)$ numere locale diferite în reţeaua Romtelecom la nivelul unui judeţ.*

Exemplul 1.1.4 *Numărul perechilor de litere ce se pot forma cu literele alfabetului român este 31^2 (se consideră că alfabetul român are 31 litere).*

Definiţia 1.1.5 *Se numeşte* <u>*permutare*</u> *a elementelor distincte unei mulţimi o ordonare a acestor elemente astfel încât un anumit element este primul, un alt element este al doilea, etc. Numărul permutărilor unei mulţimi de n elemente este notat prin simbolul P_n şi este egal cu $n!$.*

Exemplul 1.1.6 *Permutările posibile cu literele $A; B; C$ reprezintă mulţimile ordonate ce se pot forma cu elementele mulţimii $\mathcal{M} = \{A, B, C\}$, şi anume $(A; B; C)$, $(A; C; B)$, $(B; A; C)$, $(B; C; A)$, $(C; A; B)$, $(C; B; A)$. Există astfel $P_3 = 3! = 6$ moduri diferite de a forma aceste mulţimi.*

Exemplul 1.1.7 *Există $P_5 = 5!$ moduri posibile de a aşeza în linie 5 copii pentru a fi pozaţi.*

Exemplul 1.1.8 *Există $P_6 = 6!$ moduri de a aşeza 6 persoane într-o maşină de 6 locuri.*

Definiţia 1.1.9 *Se numeşte* <u>*aranjament*</u> *de k elemente distincte ale unei mulţimi de n elemente o submulţime ordonată cu aceste elemente. Numărul lor se notează cu simbolul A_n^k şi este egal cu $\frac{n!}{(n-k)!}$.*

Exemplul 1.1.10 *Se consideră că la o cursă participă 8 cai. Modurile diferite în care aceşti cai pot să ocupe locurile I, II şi III este dat de numărul submulţimilor ordonate de 3 elemente ce se pot forma, adică $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6$. Într-adevăr, primul loc poate fi ocupat cu şanse egale de oricare din cei opt cai. Există astfel 8 moduri diferite de a ocupa locul I. Mai departe, locul II poate fi ocupat în 7 moduri diferite, iar poziţia a III-a poate fi ocupată în 6 moduri diferite. În total, există (8)(7)(6) moduri diferite de a ocupa podiumul.*

Exemplul 1.1.11 *Numărul modurilor prin care cei 50 de angajaţi ai unei firme pot să câştige cele 3 premii (de diferite valori) puse în joc cu ocazia organizării unei tombole este $A_{50}^3 = (50)(49)(48)$.*

Definiţia 1.1.12 *Se numeşte* <u>*combinare*</u> *de k elemente distincte ale unei mulţimi de n elemente o submulţime cu aceste elemente. Numărul lor se notează cu simbolul C_n^k şi este egal cu $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.*

Exemplul 1.1.13 *Considerând faptul că un lacăt cu cifru se deschide dacă combinaţia corectă de 3 numere (de la 1 la 40) este găsită, numărul total al combinaţiilor posibile ce se pot forma este C_{40}^3.*

Exemplul 1.1.14 *Numărul modurilor diferite prin care pot fi alese 3 litere dintre literele A, B, C, D este C_4^3. Submulţimile obţinute sunt $\{A, B, C\}, \{A, B, D\}$ $\{A, C, D\}, \{B, C, D\}$.*

Exemplul 1.1.15 *Există C_{12}^{10} moduri prin care un student poate să răspundă la 10 din cele 12 întrebări ale unui examen.*

Exemplul 1.1.16 *Există C_{20}^4 moduri de a forma o echipă de 4 persoane dintr-o grupă de 20 de studenţi.*

1.2 Probleme rezolvate

Problema 1.2.1 *Opt bileţele sunt numerotate de la 1 la 8 şi introduse într-o cutie. Un bileţel este scos aleator din cutie, numărul lui fiind reţinut şi apoi este repus în cutie. Se repetă procedura cu un alt bileţel. În final, cele două numere corespunzătoare celor două bileţele sunt adunate. În câte moduri diferite se poate ca suma celor două numere să fie 12?*

<u>Soluţie:</u>

Vom număra modurile diferite de a obţine 12 adunând două numere de la 1 la 8. Deci, $x + y = 12, x, y \in \{1, \ldots, 8\}$. Obţinem următoarele perechi $\{(4, 8), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (8, 4)\}$. Deci, există 5 moduri de a obţine suma dorită.

Problema 1.2.2 *O echipă de baschet a unei universităţi este formată din 2 mijlocaşi, 5 înaintaşi şi 4 apărători. În câte moduri diferite antrenorul poate să selecteze o echipă astfel încât să fie formată dintr-un mijlocaş, 2 înaintaşi şi 3 apărători?*

Soluţie:

Poziţia de mijlocaş poate fi ocupată în C_2^1 moduri, cea de înaintaş de C_5^2 iar cea de apărător în C_4^2 moduri diferite. Numărul total de moduri de a forma echipa este produsul celor trei numere, adică $(C_2^1)(C_5^2)(C_4^2)$.

1.3 Probleme propuse

Problema 1.3.1 *Un calculator generează aleator un număr întreg de la 1 la 30. Să se găsească numărul de moduri în care este generat:*

A: Un număr par.

B: Un număr mai mic de 20.

C: Un număr prim.

Răspuns:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30\}$. Există 15 moduri prin care A se poate realiza.

$B = \{1, \ldots, 20\}$. Există 20 de moduri ca să se realizeze B.

$C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$. Există 10 moduri diferite de a se realiza C.

Problema 1.3.2 *Presupunem că tu esti angajatorul a 11 persoane. Una din responsabilităţile tale este de a realiza o evaluare anuală pentru fiecare angajat cu scopul de a-i analiza performanţele. În câte moduri se poate face acest lucru?*

Răspuns:

$P_{11} = 11!$

Problema 1.3.3 *O universitate are nevoie de 2 noi membri: un chimist şi un statistician. În câte moduri pot fi ocupate aceste poziţii dacă există 3 cereri pentru poziţia de chimist şi 4 pentru poziţia de statistician.*

Răspuns:

$(C_3^1)(C_4^1)$

Problema 1.3.4 *Un client într-un magazin de calculatoare poate să aleagă unul din cele 3 monitoare, o tastatură din cele 2 şi un calculator din cele 4 aflate în stoc. În câte moduri se poate forma un calculator?*

Răspuns:

$(C_3^1)(C_2^1)(C_4^1)$.

Problema 1.3.5 *Un student îşi programează cursurile opţionale pentru următorul semestru. Îşi poate alege un curs de matematică din cele 2 propuse, unul de ştiinţe ale naturii cele 3 propuse şi două din cele 5 cursuri de ştiinţe sociale şi umane. În câte moduri se poate face alegerea cursurilor?*

Răspuns:

$(C_2^1)(C_3^1)(C_5^2)$.

Problema 1.3.6 *Câte submulţimi de 5 elemente se pot forma dintr-o mulţime de 100 elemente?*

Răspuns:

C_{100}^5

Problema 1.3.7 *Un angajator intervievează 8 persoane pentru cele 4 posturi scoase la concurs; 3 din cei 8 sunt femei. În câte moduri pot fi ocupate pozițiile respective, dacă:*
(i) nu există nici o restricție Substantiv
(ii) trebuie să aleagă 2 femei?

<u>Răspuns:</u>

(i) C_8^4; (ii) $C_3^2 C_5^2$.

Capitolul 2

Evenimente. Probabilitate

2.1 Definiţii şi rezultate de bază

2.1.1 Evenimente. Probabilitate

Fie Ω o mulţime nevidă oarecare şi $\mathcal{P}(\Omega)$ mulţimea părţilor sale.

Definiţia 2.1.1 *O familie nevidă $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se numeşte corp borelian pe Ω dacă*

(i) $A \in \mathcal{K} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{K}$ ($\overline{A}$ este complementara mulţimii A);

(ii) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{K} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{K}$.

Definiţia 2.1.2 *O familie nevidă $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se numeşte corp de mulţimi pe Ω dacă îndeplineşte condiţia (i), iar condiţia (ii) este înlocuită cu*

(ii)' $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{K} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{K}$.

Definiţia 2.1.3 *Perechea $(\Omega, \mathcal{K})$, unde Ω este o mulţime nevidă, iar $\mathcal{K}$ un corp borelian pe Ω se numeşte spaţiu măsurabil sau câmp de evenimente.*

Definiţia 2.1.4 *Se numeşte* <u>*probabilitate*</u> *pe spaţiul măsurabil* $(\Omega, \mathcal{K})$, *o funcţie* $P : \mathcal{K} \to [0, 1]$ *cu proprietăţile*

(*i*) *Dacă* $A_n \in \mathcal{K}$, *pentru* $n = 1, 2, \ldots$ *şi* $A_n \cap A_m = \emptyset$, *pentru* $n \neq m$, *atunci*

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

proprietate numită complet aditivitate;

(*ii*) $P(\Omega) = 1$.

Definiţia 2.1.5 *Tripletul* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, *unde* $(\Omega, \mathcal{K})$ *este un spaţiu măsurabil (câmp de evenimente), iar* P *o probabilitate pe* $(\Omega, \mathcal{K})$ *se numeşte* <u>*câmp de probabilitate*</u>.

Definiţia 2.1.6 (Definiţia clasică a probabilităţilor)

În câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *cu* $card(\Omega)$ *finit, dacă evenimentele sunt egal probabile* $[\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ *cu* $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n)]$ *atunci probabilitatea unui eveniment* $A \in \mathcal{K}$ *este*

$$P(A) = \frac{\textit{numărul cazurilor favorabile producerii evenimentului } A}{\textit{numărul cazurilor posibile producerii evenimentului } A} \tag{2.1.1}$$

Dacă Ω *este o mulţime infinită, nenumărabilă, care are o măsură finită* μ, *atunci probabilitatea unui eveniment* $A \in \mathcal{K}$ *este*

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Astfel de probabilităţi sunt

$$P(A) = \frac{\textit{lungimea } (A)}{\textit{lungimea } (\Omega)}, \textit{ dacă } \Omega \subset \mathbb{R}; \tag{2.1.2}$$

$$P(A) = \frac{\textit{aria } (A)}{\textit{aria } (\Omega)}, \textit{ dacă } \Omega \subset \mathbb{R}^2; \tag{2.1.3}$$

$$P(A) = \frac{\textit{volum } (A)}{\textit{volum } (\Omega)}, \textit{ dacă } \Omega \subset \mathbb{R}^3; \tag{2.1.4}$$

Propoziţia 2.1.7 *Pentru orice câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ au loc proprietăţile*

(i) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B), \forall\, A, B \in \mathcal{K}$;

(ii) Dacă $A, B \in \mathcal{K}$ *cu* $A \subset B$ *atunci* $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

(iii) Dacă $A, B \in \mathcal{K}$ *cu* $A \subset B$ *atunci* $P(A) \leq P(B)$;

(iv) $P(\overline{A}) = 1 - P(A), \forall\, A \in \mathcal{K}$;

(v) $P(\emptyset) = 0$;

(vi) $0 \leq P(A) \leq 1, \forall\, A \in \mathcal{K}$;

(vii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall\, A, B \in \mathcal{K}$;

(viii) $P(A \,\Delta\, B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B), \forall\, A, B \in \mathcal{K}$, *unde* $A \,\Delta\, B$ *este diferenţa simetrică a lui* A *şi* B, *adică* $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Exemplul 2.1.8 (Schema bilei nerevenite (neîntoarse))

O urnă conţine a *bile albe şi* b *bile negre. Se iau la întâmplare* n *bile din urnă. Probabilitatea ca din* n *bile extrase exact* k *bile să fie albe este*

$$\frac{C_a^k \, C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},$$

unde $n \leq a + b$, $k \leq n$, $k \leq a$ *şi* $n - k \leq b$.

Exemplul 2.1.9 (Schema bilei revenite (întoarse))

O urnă conţine a *bile albe şi* b *bile negre. Extragem în mod aleator o bilă, ne uităm la ea şi o punem înapoi în urnă. Repetăm această procedură de* n *ori. Probabilitatea ca de* k *ori să extragem o bilă albă este*

$$C_n^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k} = C_n^k \, p^k \, (1-p)^{n-k},$$

unde p *este probabilitatea extragerii unei bile albe din urnă, la o procedură oarecare din cele* n *în total, evident* $1 - p$ *reprezintă probabilitatea extragerii unei bile negre în aceeaşi procedură de extragere.*

Teorema 2.1.10 (Formula lui Poincaré)

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi fie $(A_i)_{i\in I}$, cu I mulţime finită, o familie de evenimente din $\mathcal{K}$. Atunci are loc egalitatea

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{L\subset I} (-1)^{card(L)-1} P(\bigcap_{i\in L} A_i).$$

Teorema 2.1.11 (Inegalitatea lui Boole)

În condiţiile Teoremei 2.1.10, *dacă presupunem că $I = \{1, 2, \dots, n\}$, atunci are loc egalitatea*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

2.1.2 Probabilităţi condiţionate

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate, finit sau infinit, şi $A, B \in \mathcal{K}$ astfel ca $P(A) > 0$.

Definiţia 2.1.12 *Se numeşte probabilitate a evenimentului B condiţionată de evenimentul A sau probabilitate a lui B în raport cu A, notată prin $P_A(B)$ sau $P(B/A)$, numărul definit prin*

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}. \tag{2.1.5}$$

Teorema 2.1.13 (Formula probabilităţii totale)

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate, finit sau infinit, şi fie $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{K}$ un sistem complet de evenimente ($A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{K}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j \in I$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$) cu $P(A_i) > 0$, pentru orice $i \in I$, I fiind o mulţime de indici cel mult numărabilă. Atunci pentru orice $X \in \mathcal{K}$ are loc egalitatea

$$P(X) = \sum_{i\in I} P(A_i) P_{A_i}(X).$$

Teorema 2.1.14 (Formula lui Bayes)

În condiţiile Teoremei 2.1.13, *pentru orice* $X \in \mathcal{K}$ *cu* $P(X) > 0$, *are loc egalitatea*

$$P_X(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(X)}{P(X)}.$$

Teorema 2.1.15 (Formula de înmulţire a probabilităţilor)

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *un câmp de probabilitate şi fie* $(A_i)_{i=\overline{1,n}} \subset \mathcal{K}$ *un sistem complet de evenimente astfel încât* $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. *Atunci are loc egalitatea*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n).$$

2.1.3 Evenimente independente

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi $A, B \in \mathcal{K}$.

Definiţia 2.1.16 *Spunem că evenimentele A şi B sunt independente dacă*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Definiţia 2.1.17 *Sistemul de evenimente* $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ *din* $\mathcal{K}$ *se numeşte sistem de evenimente independente dacă pentru orice* $i_1, i_2, \dots, i_m$ *cu* $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n$ *şi* $m \le n$ *are loc*

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_m}).$$

2.2 Probleme rezolvate

Problema 2.2.1 *Se aruncă un zar. Să se scrie mulţimea evenimentelor elementare şi câmpul de evenimente asociat.*

Soluţie:

Evenimentele elementare sunt $\{i\}$ = apare faţa cu numărul i, $i = \overline{1,6}$. Deci $\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$={1,2,3,4,5,6}. Câmpul de evenimente este

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{i\}, \{i,j\}, \{i,j,k\}, \{i,j,k,l\}, \{i,j,k,l,m\}, \Omega\},$$

unde $i,j,k,l,m = \overline{1,6}$, $i \neq j \neq k \neq l \neq m$.

Deoarece evenimentele $\{i\}$ sunt în număr de $6 = C_6^1$, $\{i,j\}$ în număr de C_6^2 ş.a.m.d., în câmp avem $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 = 64$ de evenimente.

Problema 2.2.2 *O urnă conţine bile albe şi bile negre. Se extrag succesiv din urnă două bile. Cu ajutorul evenimentelor*

$A =$ *prima bilă extrasă este albă,*

$B =$ *a doua bilă extrasă este albă,*

să se scrie evenimentele

$C =$ *prima bilă extrasă este neagră,*

$D =$ *cel puţin o bilă este albă,*

$E =$ *ambele bile sunt negre,*

$F =$ *o bilă şi numai una este albă.*

Soluţie:

$C = \overline{A}$, $D = A \cup B$, $E = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ şi $F = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) =$ $= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \vartriangle B$.

Problema 2.2.3 *O ţintă este formată din 4 cercuri concentrice de rază $i = 1,2,3,4$. Evenimentul A_i constă în nimerirea cercului de rază i. Să se explice semnificaţia evenimentelor*

$$A = \bigcup_{i=1}^{3} A_i,\ B = \bigcap_{i=1}^{3} A_i,\ C = \overline{A_1} \cap A_2.$$

Soluţie:

$A =$ nimerirea cercului de rază 3,

$B =$ nimerirea cercului de rază 1,

$C =$ nimerirea coroanei circulare determinată de cercurile de rază 1 şi 2.

Problema 2.2.4 *O urnă conţine 3 bile albe şi 5 bile negre, iar o altă urnă conţine 4 bile albe şi 5 bile negre. Din fiecare urnă se extrage câte o bilă. Se consideră evenimentele*

$A =$ bila extrasă din prima urnă este albă;

$B =$ bila extrasă din a doua urnă este albă.

Să se calculeze $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \setminus B)$ şi $P(\overline{B})$.

Soluţie:

Aplicând formula (2.1.1) pentru evenimentele A şi B, obţinem

$$P(A) = \frac{3}{8} \text{ şi } P(B) = \frac{4}{9} .$$

Cum $A \cap B =$ prima bilă este albă şi a doua este albă, rezultă din aceeaşi formulă că

$$P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 9} = \frac{1}{6} .$$

În final, din Propoziţia 2.1.7, (vii), (i) şi respectiv (iv) avem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} = \frac{47}{72} ,$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$$

şi respectiv

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} .$$

Problema 2.2.5 *Se ia la intâmplare un număr din mulţimea* $\{1, 2, \ldots, 10.00$
Care este probabilitatea ca numărul ales să fie pătrat perfect sau un număr divizibil prin trei?.

<u>Soluţie:</u>

Fie evenimentele

$A =$ numărul este pătrat perfect,

$B =$ numărul este divizibil cu 3.

Atunci avem

$$P(A) = \frac{[\sqrt{10.001}]}{10.001} = \frac{100}{10.001},$$

$$P(B) = \frac{[\frac{10.001}{3}]}{10.001} = \frac{3333}{10.001}$$

şi

$A \cap B =$ numărul este pătrat perfect şi divizibil cu 3,

adică

$$P(A \cap B) = \frac{[\frac{\sqrt{10.001}}{3}]}{10.001} = \frac{33}{10.001}.$$

Prin urmare, conform Propoziţiei 2.1.7(*vii*), obţinem

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{100}{10.001} + \frac{3333}{10.001} - \frac{33}{10.001} = 0,34.$$

Problema 2.2.6 *Dacă se aruncă de trei ori un zar, care este probabilitatea să apară cel puţin o dată faţa* 4*?*

<u>Soluţie:</u>

Fie evenimentul contrar

$A =$ într-o serie de trei aruncări nu apare niciodată faţa 4.

Dacă se aruncă un zar de trei ori, numărul cazurilor posibile este 6^3, iar dacă într-o serie de trei aruncări nu apare niciodată faţa 4, rezultă că de fiecare dată se obţine un număr din mulţimea $\{1, 2, 3, 5, 6\}$, deci numărul cazurilor favorabile este 5^3.

În concluzie,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5^3}{6^3} = 0,42.$$

Problema 2.2.7 *Într-un lot de* 85 *de piese,* 7 *sunt defecte. Se aleg la întâmplare* 5 *piese din lot. Care este probabilitatea ca printre piesele alese cel puţin una să fie defectă?*

Soluţie:

Fie evenimentul contrar

$A =$ toate piesele alese sunt bune.

Numărul cazurilor posibile de a alege 5 piese din totalul de 85 este C_{85}^5, iar numărul de cazuri favorabile de a alege 5 piese bune din totalul de $85 - 7 = 78$, este C_{78}^5.

În concluzie,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{C_{78}^5}{C_{85}^5} = 0,36.$$

Problema 2.2.8 *Într-o cutie sunt* 8 *creioane negre,* 6 *creioane roşii şi* 4 *creioane galbene. Se aleg la întâmplare* 3 *creioane, fără a pune creionul extras înapoi. Care este probabilitatea ca să fie ales cel puţin un creion galben?*

Soluţie:

Fie evenimentul

$A = i$ creioane alese sunt galbene şi $3 - i$ nu sunt galbene,

atunci trebuie calculată probabilitatea evenimentului $X = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Cum evenimentele A_1, A_2 şi A_3 sunt incompatibile două câte două, din Definiţia 2.1.4(i), rezultă că $P(X) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.

Conform Exemplului 2.1.8, avem

$$P(A_1) = \frac{C_4^1\, C_{14}^2}{C_{18}^3} = 0,44,$$

$$P(A_2) = \frac{C_4^2\, C_{14}^1}{C_{18}^3} = 0,1,$$

$$P(A_3) = \frac{C_4^3\, C_{14}^0}{C_{18}^3} = 0,001,$$

şi atunci $P(X) = 0,541$.

Problema 2.2.9 *O urnă conţine 60 de bile numerotate de la 1 la 60. Se extrag 5 bile. Care este probabilitatea să se obţină 3 numere din următoarele: 2, 8, 38, 5, 16, 47, 22, 13, 51?*

Soluţie:

Probabilitatea cerută este, conform Exemplului 2.1.8,

$$\frac{C_9^3\, C_{51}^{5-3}}{C_{60}^5} = 0,017.$$

Problema 2.2.10 *Se aruncă două zaruri de 70 de ori. Care este probabilitatea ca de 25 de ori să se obţină suma punctelor 4 şi în rest altă sumă?*

Soluţie:

Considerând evenimentul

$A =$ suma punctelor obţinute la aruncarea a două zaruri este 4,

rezultă că

$$p = P(A) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$$

şi atunci conform Exemplului 2.1.9, probabilitatea cerută este:

$$C_{70}^{25}\left(\frac{1}{12}\right)^{25}\left(1-\frac{1}{12}\right)^{70-25} = C_{70}^{25}\left(\frac{1}{12}\right)^{25}\left(\frac{11}{12}\right)^{45}.$$

Problema 2.2.11 *Într-un joc, faţă de un adversar la fel de puternic, ce este mai probabil să se câştige: 3 partide din 4 sau 5 partide din 8?*

Soluţie:

Persoana A câştigă faţă de adversarul B, 3 partide din 4, cu probabilitatea

$$p_1 = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

iar 5 partide din 8, cu probabilitatea

$$p_2 = C_8^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

În concluzie, cum $p_1 > p_2$, este mai probabil să se câştige 3 partide din 4 decât 5 partide din 8.

Problema 2.2.12 (Problema concordanţelor)

O urnă conţine n bile numerotate $\{1, 2, \dots, n\}$. Se extrag din urnă, una câte una, toate cele n bile. Se spune că s-a realizat o concordanţă, dacă la extragerea i s-a obţinut bila cu numărul i. Să se calculeze probabilitatea obţinerii a cel puţin unei concordanţe.

Soluţie:

Considerând evenimentul

$A_i =$ în extragerea i se obţine bila cu numărul i,

se obţine cel puţin o concordanţă dacă se realizează evenimentul $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ şi atunci conform formulei lui Poincaré, adică a Teoremei 2.1.10, avem

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \tag{2.2.1}$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Deoarece prima sumă conţine C_n^1 termeni, a doua sumă C_n^2 termeni şi aşa mai departe, şi

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

(dacă bila i este fixată, celelalte $n-1$ bile se pot distribui în $(n-1)!$ moduri),

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!},\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j,$$

şi

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_i}) = \frac{(n-i)!}{n!},\ i = 1, 2, \ldots, n,\ 1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_i \leq n$$

atunci

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} C_n^i \frac{(n-i)!}{n!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

Problema 2.2.13 *Într-un câmp de probabilitate, evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ au proprietatea $A_i \subset \bigcup_{i \neq j} A_j$, $A_i \cap A_j \cap A_k = \emptyset$, pentru orice $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $i < j < k$.*

(i) Să se arate că $P(\bigcup_{j=1}^{n} A_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} P(A_i)$.

(ii) Pentru $n = 3$ să se construiască o familie de evenimente care să îndeplinească condiţiile date.

Soluţie:

Ţinând seama că intersecţia a trei mulţimi oarecare distincte este vidă, formula (2.2.1) devine

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j). \qquad (2.2.2)$$

(62.904

Din ipoteză se deduce că $A_1 \subset A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$, adică

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = \\ &= (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup \ldots \cup (A_1 \cap A_n) = \\ &= \bigcup_{j=2}^{n} (A_1 \cap A_j). \end{aligned}$$

În mod analog, se deduce că

$$A_i = \bigcup_{j=1,\ j\neq i}^{n} (A_i \cap A_j),$$

de unde, ţinând cont că intersecţia a trei astfel de paranteze distincte este vidă, obţinem

$$P(A_i) = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} P(A_i \cap A_j),$$

adică

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} P(A_i \cap A_j) = 2 \sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} P(A_i \cap A_j),$$

ceea ce este echivalent cu

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} P(A_i \cap A_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Înlocuind această relaţie în (2.2.2), se obţine

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} P(A_i).$$

(*ii*) Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\omega_i) = \frac{1}{4}$ cu $i = 1, 2, 3, 4$ şi $A_1 = \{\omega_2, \omega_3\}$, $A_2 = \{\omega_1, \omega_3\}$, $A_3 = \{\omega_1, \omega_2\}$, atunci $A_1 \subset A_2 \cup A_3$, $A_2 \subset A_1 \cup A_3$, $A_3 \subset A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ şi

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = \frac{3}{4},$$

iar

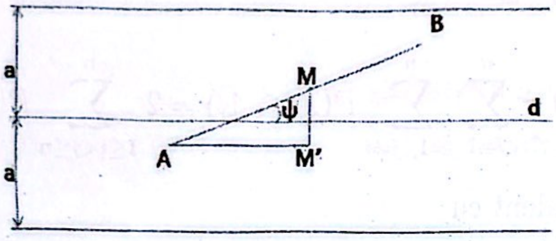
$$\frac{1}{2}(P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\,.$$

Problema 2.2.14 (Problema acului sau problema lui Buffon).

Pe un plan sunt trasate drepte paralele, astfel ca distanţa între oricare două drepte consecutive să fie 2a, $a > 0$. Pe acest plan se aruncă la întâmplare un ac de lungime 2l, cu $l > 0$ şi $l < a$. Care este probabilitatea ca acul să întretaie una din aceste drepte?

Soluţie:

Fie M mijlocul acului AB care intersectează o dreaptă d şi AC o semidreaptă paralelă cu dreapta d. Proiecţia punctului M pe AC se notează cu M'. Dacă x este distanţa de la M la dreapta d şi Ψ este unghiul dintre AB şi d, atunci AB intersectează pe d dacă şi numai dacă $0 \leq x \leq MM'$. Dar în triunghiul dreptunghic AMM', $MM' = l\sin\Psi$, unde $0 \leq \Psi \leq \pi$.

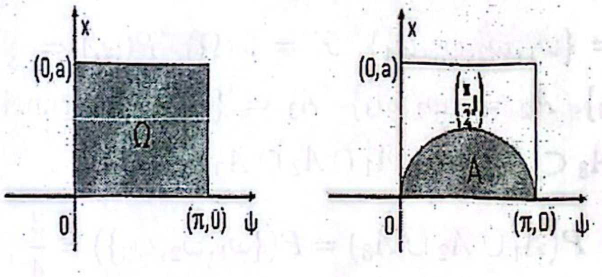


În planul variabilelor α şi x se consideră mulţimea evenimentelor posibile $\Omega = [0,\pi]\times[0,a]$ şi evenimentul

$A =$ acul intersectează o dreaptă,

adică

$$A = \{(\Psi,x)\in\Omega \mid 0\leq x\leq l\sin\Psi,\ 0\leq\Psi\leq\pi\}.$$



Ţinând seama de relaţia (2.2.3) şi de faptul că

$$aria(A) = \int\int_A d\Psi\, dx = \int_0^\pi \left(\int_0^{l \sin\Psi} dx\right) d\Psi = \int_0^\pi l \sin\Psi d\Psi = 2l$$

şi

$$aria(\Omega) = \pi a,$$

se obţine

$$P(A) = \frac{2l}{\pi a}.$$

Problema 2.2.15 *Două persoane trebuie să se întâlnească într-un anumit punct între orele 10 şi 11. Conform înţelegerii, primul sosit aşteaptă 15 minute, după care pleacă. Se cere probabilitatea ca întâlnirea să aibă loc.*

Soluţie:

Dacă o persoană soseşte la momentul $x \in [10, 11]$, iar cealaltă la momentul $y \in [10, 11]$, atunci ele se vor întâlni dacă

$$|x - y| \leq \frac{1}{4}.$$

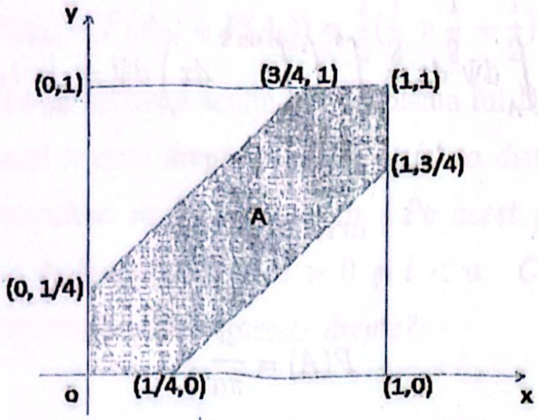
Considerând ora 10, momentul 0 şi ora 11, momentul 1, avem

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

şi

$$A = \{(x, y) \in \Omega \mid |x - y| \leq \frac{1}{4}\},$$

adică persoanele se vor întâlni dacă $(x, y) \in A$.



Conform relaţiei (2.2.3), probabilitatea cerută este

$$P(A) = \frac{\text{aria }(A)}{\text{aria }(\Omega)} = \frac{\text{aria }(A)}{1} = \text{aria }(\Omega) - 2\,\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{2} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}\ .$$

Problema 2.2.16 *Pentru ca un produs să corespundă controlului de calitate al secţiei, trebuie să îndeplinească patru condiţii de calitate, notate A, B, C, D. Ştiind că 82% din produse îndeplinesc condiţia A, 91% îndeplinesc condiţia B, 95% îndeplinesc condiţia C şi 88% îndeplinesc condiţia D, să se calculeze probabilitatea minimă ca un produs să corespundă controlului de calitate al secţiei.*

Soluţie:

Pentru ca un produs să corespundă controlului de calitate al secţiei, trebuie să aibă loc evenimentul $X = A \cap B \cap C \cap D$. Aplicând inegalitatea lui Boole, adică Teorema 2.1.11, obţinem:

$$\begin{aligned} P(X) = P(A\cap B\cap C\cap D) &\geq P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-3 = \\ &= 0,82+0,91+0,95+0,88-3 = \\ &= 0,56, \end{aligned}$$

deci probabilitatea minimă căutată este $0,56$.

Problema 2.2.17 *Se aruncă trei zaruri şi se cere probabilitatea ca cel puţin pe una dintre feţe să apară cifra 3, dacă se ştie că pe cele trei feţe sunt cifre diferite.*

Soluţie:

Fie evenimentele

$A =$ cel puţin pe o faţă să apară cifra 3;

$B =$ pe cele trei feţe să apară cifre diferite.

Cum $P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$ şi $P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{18}$, conform relaţiei (2.2.6) obţinem probabilitatea cerută

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Problema 2.2.18 *Un student are trei CD-uri, colorate pe ambele feţe în felul următor: un CD are ambele feţe colorate în roşu, un CD are o faţă colorată în roşu şi una în albastru şi un CD are ambele feţe colorate în albastru. Se alege un CD la întâmplare şi se constată că una din feţe este roşie. Care este probabilitatea ca a doua faţă să fie:*

(i) roşie;

(ii) albastră?

Soluţie:

Fie evenimentele

$A =$ prima faţă a CD-lui ales este roşie;

$B =$ a doua faţă a CD-lui ales este roşie.

(i) Cum $P(A) = \frac{3}{6}$ şi $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$, conform relaţiei (2.2.6) obţinem probabilitatea cerută

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}.$$

(*ii*) <u>Metoda I.</u> Cum $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{6}$, conform relației (2.2.6) obținem probabilitatea cerută

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{1}{3}\,.$$

<u>Metoda II.</u> Cum $P(A) \neq 0$, atunci $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Problema 2.2.19 *Fie câmpul de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, $A \subset B$, $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. *Să se determine* $P_B(A)$ *și* $P_A(B)$.

<u>Soluție:</u>

Deoarece $A \subset B$, rezultă că $A = A \cap B$, și atunci conform relației (2.2.6) obținem

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{5}$$

și

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Problema 2.2.20 *O urnă conține a bile albe și b bile negre. Se extrag succesiv două bile fără a repune bila extrasă înapoi în urnă. Să se calculeze probabilitatea ca:*

(*i*) *prima bilă extrasă să fie albă și a doua să fie neagră;*

(*ii*) *prima bilă extrasă să fie neagră și a doua să fie albă;*

(*iii*) *bilele să aibă culori diferite.*

<u>Soluție:</u>

Considerând evenimentele

$A_i =$ se obține bilă albă la extragerea $i = 1, 2$,

$B_i =$ se obține bilă neagră la extragerea $i = 1, 2$,

rezultă că

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b} \text{ și } P(B_1) = \frac{b}{a+b},$$

iar probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie neagră (respectiv albă), dacă prima a fost albă (respectiv neagră) este

$$P_{A_1}(B_2) = \frac{b}{a+b-1} \text{ [respectiv } P_{B_1}(A_2) = \frac{a}{a+b-1}\text{]}$$

şi atunci conform relaţiei (2.2.6) găsim probabilităţile cerute la (i) şi (ii).

(i)

$$P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)} ;$$

(ii)

$$P(B_1 \cap A_2) = P(B_1)P_{B_1}(A_2) = \frac{ab}{(a+b)(a+b-1)} ;$$

(iii) Conform Definiţiei 2.1.4(i) obţinem

$$P((A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap A_2)) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2) = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)} .$$

Problema 2.2.21 *Se dau probabilităţile* $P_B(A) = \frac{8}{11}$, $P_{\overline{B}}(A) = \frac{4}{11}$, $P_A(B) = \frac{6}{11}$. *Să se determine* $P(A)$ *şi* $P(B)$.

Soluţie:

Cum din relaţia (2.2.6) avem

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) \text{ şi } P(A \cap B) = P(B)P_B(A),$$

rezultă că

$$\begin{aligned} P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) \;&\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{6}{11}P(A) = \frac{8}{11}P(B) \;&\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A) = \frac{4}{3}P(B) & \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Analog,

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P_A(\overline{B}) \text{ şi } P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A),$$

adică

$$\begin{aligned} P(A)P_A(\overline{B}) = P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A)(1 - P_A(B)) = (1 - P(B))P_{\overline{B}}(A) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A)(1 - \frac{6}{11}) = \frac{4}{11}(1 - P(B)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(A) = \frac{4}{5}(1 - P(B)). \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Făcând sistem din relaţiile (2.2.3) şi (2.2.4), obţinem

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ şi } P(B) = \frac{3}{8}.$$

Problema 2.2.22 *Se consideră trei urne: U_1 conţine 2 bile albe, o bilă neagră şi 3 bile roşii, U_2 conţine 3 bile albe, 2 bile negre şi o bilă roşie şi U_3 conţine 4 bile albe, 5 bile negre şi 3 bile roşii.*

(i) Se alege la întâmplare o urnă şi din urnă o bilă. Care este probabilitatea ca bila să fie albă?

(ii) Se alege la întâmplare o urnă şi din urnă o bilă. Dacă bila este albă care este probabilitatea ca ea să provină din urna U_3?

(iii) Se alege la întâmplare o urnă şi din urnă 2 bile. Dacă o bilă este albă şi una roşie, care este probabilitatea ca bilele să provină din urna U_2?

Soluţie:

(i) Considerăm evenimentele:

X = se extrage o bilă albă;

U_i = este aleasă urna U_i.

Din formula probabilităţii totale, adică din Teorema 2.1.13, avem

$$P(X) = P(U_1)P_{U_1}(X) + P(U_2)P_{U_2}(X) + P(U_3)P_{U_3}(X).$$

Cum $P(U_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, $P_{U_1}(X) = \frac{1}{3}$, $P_{U_2}(X) - \frac{1}{2}$, $P_{U_3}(X) = \frac{1}{3}$, înlocuite în relaţia precedentă obţinem

$$P(X) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{18}.$$

(ii) Din formula lui Bayes, adică din Teorema 2.1.14, avem

$$P_X(U_3) = \frac{P(U_3)P_{U_3}(X)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{7}{18}} = \frac{2}{7}\,.$$

(iii) Fie evenimentul

$Y =$ se extrage o bilă albă şi una roşie.

Din formula lui Bayes avem

$$P_Y(U_2) = \frac{P(U_2)P_{U_2}(Y)}{P(Y)},$$

unde din formula probabilităţii totale

$$P(Y) = P(U_1)P_{U_1}(Y) + P(U_2)P_{U_2}(Y) + P(U_3)P_{U_3}(Y).$$

Cum $P_{U_1}(Y) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{2}{5}$, $P_{U_2}(Y) = \frac{C_3^1 C_1^1}{C_6^2} = \frac{1}{5}$ şi $P_{U_3}(Y) = \frac{C_4^1 C_3^1}{C_{12}^2} = \frac{2}{11}$, obţinem

$$P(Y) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{11}\right) = \frac{43}{165}$$

şi

$$P_Y(U_2) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{43}{165}} = \frac{11}{43}\,.$$

Problema 2.2.23 *Se aruncă un zar de două ori. Care este probabilitatea ca numărul ce se obţine la a doua aruncare să fie mai mare sau egal decât numărul ce se obţine la prima aruncare?*

Soluţie:

Fie evenimentelele

$A_i =$ la prima aruncare să apară faţa i, $i = 1, 2, \ldots, 6$;

$X =$ la aruncarea a doua să obţinem un număr mai mare sau egal cu cel din prima aruncare.

Cum A_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, este un sistem complet de evenimente, din formula probabilităţii totale avem

$$P(X) = P(A_1)P_{A_1}(X) + P(A_2)P_{A_2}(X) + \ldots + P(A_6)P_{A_6}(X).$$

Observăm că $P(A_i) = \frac{1}{6}$, iar $P_{A_i}(X) = \frac{7-i}{6}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$, deoarece dacă la prima aruncare a apărut faţa i, atunci pentru ca evenimentul X să se realizeze avem $7-i$ cazuri favorabile şi atunci avem $P(X) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{5}{6} + \ldots + \frac{1}{6}\right) = \frac{7}{12}$.

Problema 2.2.24 *Fie urnele U_1 şi U_2. Urna U_1 conţine 3 bile albe şi 2 bile negre, iar urna U_2 conţine o bilă albă şi 4 bile negre. Se extrage o bilă din U_1 şi se introduce în U_2, apoi se extrage o bilă din U_2. Ştiind că bila extrasă din U_2 este albă, care este probabilitatea ca bila transferată să fi fost neagră.*

Soluţie:

Considerând evenimentele

A_1 = se extrage bilă albă din urna U_1,

A_2 = se extrage bilă neagră din urna U_1,

X = se extrage bilă albă din urna U_2, după ce s-a introdus o bilă extrasă din U_1,

evenimentul sigur este $\Omega = A_1 \cup A_2$ şi din formula lui Bayes şi formula probabilităţii totale avem

$$P_X(A_2) = \frac{P(A_2)P_{A_2}(X)}{P(A_1)P_{A_1}(X) + P(A_2)P_{A_2}(X)}.$$

Cum $P(A_1) = \frac{3}{5}$, $P(A_2) = \frac{2}{5}$, $P_{A_1}(X) = \frac{1}{3}$, $P_{A_2}(X) = \frac{1}{6}$ obţinem

$$P_X(A_2) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{1}{4}.$$

Problema 2.2.25 *Se aleg la întâmplare trei loturi a câte 20 de piese şi se constată că ele conţin respectiv 20, 15 şi 10 piese bune. Se alege la întâmplare un lot din care se extrage o piesă care se constată că este bună. Se pune la loc piesa extrasă şi se face o nouă extragere întâmplătoare a unei piese care din nou se constată că este bună. Să se determine probabilitatea ca aceste piese să fi fost extrase din lotul al treilea.*

Soluţie:

Fie evenimentele

X = în ambele extrageri se obţin piese bune;

A_i = extragerile sunt din lotul i, $i = 1, 2, 3$.

evenimentul sigur este $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ şi din formula lui Bayes şi formula probabilităţii totale avem

$$P_X(A_3) = \frac{P(A_3)P_{A_3}(X)}{P(A_1)P_{A_1}(X) + P(A_2)P_{A_2}(X) + P(A_3)P_{A_3}(X)}.$$

Cum $P(A_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$, $P_{A_1}(X) = 1$, $P_{A_2}(X) = \frac{9}{16}$, $P_{A_3}(X) = \frac{1}{4}$, obţinem

$$P_X(A_2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4}{29}.$$

Problema 2.2.26 *Un lot de 100 de piese este supus controlului de calitate. Condiţia ca acest lot să fie respins este găsirea a cel puţin un rebut în primele cinci piese controlate. Care este probabilitatea ca lotul să fie respins dacă el conţine cinci piese rebut?*

Soluţie:

Fie evenimentul

A_i = a "i"-a piesă controlată să fie corectă, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Probabilitatea cerută este

$$P(\bigcup_{i=1}^{5} \overline{A_i}) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{5} A_i). \tag{2.2.5}$$

Din formula de înmulţire a probabilităţilor, adică din Teorema **2.1.15**, avem

$$P(\bigcap_{i=1}^{5} A_i) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)P_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4)P_{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4}(A_5).$$

Dar $P(A_1) = \frac{95}{100}$, $P_{A_1}(A_2) = \frac{94}{99}$, $P_{A_1\cap A_2}(A_3) = \frac{93}{98}$, $P_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4) = \frac{92}{97}$, $P_{A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4}(A_5) = \frac{91}{96}$ şi atunci

$$P(\bigcap_{i=1}^{5} A_i) = \frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96} = 0,77\,,$$

care înlocuită în (2.2.5) ne conduce la

$$P(\bigcup_{i=1}^{5} \overline{A_i}) = 1 - 0,77 = 0,33\,.$$

Problema 2.2.27 *La un depozit se găsesc* 1000 *de saci de fructe,* 700 *cu mere şi* 300 *cu pere. Trei magazine urmează a prelua de la acesta câte* 70, 50 *şi respectiv* 90 *de saci de fructe. Să se precizeze probabilitatea ca fiecare magazin să preia numai mere. Care este probabilitatea să preia numai pere?*

Soluţie:

Considerând evenimentele

A_i= al "i"-lea magazin preia numai mere, $i = 1, 2, 3$,

B_i = al "i"-lea magazin preia numai pere, $i = 1, 2, 3$,

conform formulei de înmulţire a probabilităţilor avem

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3) = \\ = \frac{C_{700}^{70}}{C_{1000}^{70}}\cdot\frac{C_{630}^{50}}{C_{930}^{50}}\cdot\frac{C_{580}^{90}}{C_{880}^{90}}\,,$$

respectiv

$$P(B_1\cap B_2\cap B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(B_3) = \\ = \frac{C_{300}^{70}}{C_{1000}^{70}}\cdot\frac{C_{230}^{50}}{C_{930}^{50}}\cdot\frac{C_{180}^{90}}{C_{880}^{90}}\,.$$

Problema 2.2.28 *O urnă conţine 6 bile albe şi 4 bile negre. Se extrage o bilă, i se înregistrează culoarea şi apoi se pun în urnă două bile de aceeaşi culoare. Care este probabilitatea ca în trei experienţe să obţinem 2 bile albe şi una neagră?*

Soluţie:

Considerăm evenimentele

A_i = se obţine o bilă albă la extragerea i, $i = 1, 2, 3$;

B_i = se obţine o bilă neagră la extragerea i, $i = 1, 2, 3$.

Trebuie calculată probabilitatea evenimentului

$$X = (A_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup (A_1 \cap B_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Din Definiţia 2.1.4(i) şi formula de înmulţire a probabilităţilor, adică din Teorema 2.1.15, avem

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + (B_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(B_3) + P(A_1)P_{A_1}(B_2)P_{A_1 \cap B_2}(A_3) + \\ &+ P(B_1)P_{B_1}(A_2)P_{B_1 \cap A_2}(A_3) = \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{12} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{12} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{7}{12} = \frac{21}{55}\,. \end{aligned}$$

Problema 2.2.29 *O urnă conţine a bile albe şi b bile negre. Se extrage o bilă şi se repune în urnă împreună cu c bile de aceeaşi culoare cu cea extrasă. Să se determine probabilitatea ca în extragerea a treia să se obţină bilă neagră, dacă în extragerea a doua s-a extras tot bilă neagră?*

Soluţie:

Considerând evenimentele

A_i = se obţine o bilă albă la extragerea i, $i = 1, 2, 3$,

B_i = se obţine o bilă neagră la extragerea i, $i = 1, 2, 3$, probabilitatea cerută este

$$P_{B_2}(B_3) = \frac{P(B_3 \cap B_2)}{P(B_2)}. \tag{2.2.6}$$

Cum evenimentul sigur este $\Omega = A_1 \cup B_1$ şi $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, din **Definiţia** 2.1.4(i) şi formula de înmulţire a probabilităţilor avem

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(\Omega \cap B_2) = P((A_1 \cup B_1) \cap B_2) = \\
&= P((A_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2) = \\
&= P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \\
&= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b+c} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} = \frac{b}{a+b},
\end{aligned}$$

precum şi

$$\begin{aligned}
P(B_3 \cap B_2) &= P((B_3 \cap B_2) \cap \Omega) = P((B_3 \cap B_2) \cap (A_1 \cup B_1)) = \\
&= P((B_3 \cap B_2 \cap A_1) \cup (B_3 \cap B_2 \cap B_1)) = \\
&= P(B_3 \cap B_2 \cap A_1) + P(B_3 \cap B_2 \cap B_1) = \\
&= P(A_1)P_{A_1}(B_2)P_{A_1 \cap B_2}(B_3) + P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \\
&= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b+c} \cdot \frac{b+c}{a+b+2c} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{b+2c}{a+b+2c} = \\
&= \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b+c}{a+b+c},
\end{aligned}$$

care înlocuite în (2.2.6), obţinem

$$P_{B_2}(B_3) = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Problema 2.2.30 *Fie spaţiul* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, *unde* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\omega_i) = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$. *Să se studieze independenţa evenimentelor*

(i) $A_1 = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $A_2 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$, $A_3 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$;

(ii) $B_1 = \{\omega_1, \omega_4\}$, $B_2 = \{\omega_2, \omega_4\}$, $B_3 = \{\omega_3, \omega_4\}$.

Soluţie:

(*i*) Cum $P(A_1 \cap A_2) = P(\{\omega_3, \omega_4\}) = \frac{1}{2} \neq (\frac{3}{4})^2 = P(A_1)P(A_2)$, rezultă că evenimentele A_1, A_2 şi A_3 nu sunt independente.

(*ii*) Deoarece

$$P(B_1 \cap B_2) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = P(B_1)P(B_2),$$

$$P(B_1 \cap B_3) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = P(B_1)P(B_3),$$

$$P(B_2 \cap B_3) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = P(B_2)P(B_3),$$

rezultă că evenimentele B_1, B_2 şi B_3 sunt independente două câte două, iar cum

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \neq P(B_1)P(B_2)P(B_3),$$

avem că evenimentele B_1, B_2 şi B_3 nu sunt independente trei câte trei, deci ele nu formează un sistem de evenimente independente.

Problema 2.2.31 *Se aruncă o monedă de trei ori. Să se studieze independenţa evenimentelor:*

$A =$ *la prima aruncare se obţine stema;*

$B =$ *la a doua aruncare se obţine valoarea;*

$C =$ *se obţine stema exact de două ori consecutiv.*

Soluţie:

Evenimentele elementare sunt $S =$ apare stema şi $V =$ apare valoarea. Spaţiul evenimentelor elementare este:

$$\Omega = \{SSS, SSV, SVS, VSS, SVV, VSV, VVS, VVV\},$$

iar evenimentele considerate sunt

$$A = \{SSS, SSV, SVS, SVV\} \text{ cu } P(A) = \frac{1}{2},$$

$$B = \{VVV, VVS, SVS, SVV\} \text{ cu } P(B) = \frac{1}{2},$$

$$C = \{SSV, VSS\} \text{ cu } P(C) = \frac{1}{4},$$

şi avem

$$A \cap B = \{SVS, SVV\} \text{ cu } P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B),$$

de unde rezultă că A şi B sunt independente,

$$A \cap C = \{SSV\} \text{ cu } P(A \cap C) = \frac{1}{8} = P(A)P(C),$$

de unde rezultă că A şi C sunt independente,

$$B \cap C = \emptyset \text{ cu } P(B \cap C) = 0 \neq P(B)P(C),$$

de unde rezultă că B şi C nu sunt independente,

$$A \cap B \cap C = \emptyset \text{ cu } P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C),$$

de unde rezultă că A, B şi C nu sunt independente.

Problema 2.2.32 *Fie spaţiul* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ *şi* $A, B, C \in \mathcal{K}$ *având proprietatea* $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. *Rezultă că evenimentele sunt independente două câte două?*

Soluţie:

Următorul exemplu arată că răspunsul este negativ.

Fie $\Omega = \{\omega_i, i = \overline{1,16}\}$, $P(\omega_i) = \frac{1}{16}$, $i = \overline{1,16}$, $A = \{\omega_i, i = \overline{1,8}\}$, $B = \{\omega_1, \omega_i, i = \overline{9,11}\}$, $C = \{\omega_1, \omega_i, i = \overline{10,16}\}$, de unde rezultă că $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{1}{2}$,

$$P(A \cap B \cap C) = P(\omega_4) = \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)P(C),$$

şi atunci

$$P(A\cap B) = P(\omega_1) = \frac{1}{16} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = P(A)P(B),$$

adică evenimentele nu sunt independente două câte două.

Problema 2.2.33 *Într-un circuit sunt introduse trei rezistoare. Într-un regim de suprasolicitare aceste rezistoare se pot arde cu probabilităţile:* $0,03$, $0,01$, *respectiv* $0,04$. *Să se calculeze probabilitatea ca într-un astfel de regim de funcţionare să se întrerupă curentul.*

Se vor considera numai cazurile în care toate rezistoarele sunt legate în:

(i) serie;

(ii) paralel.

Soluţie:

Fie evenimentul

A_i = se arde rezistorul i, $i = 1, 2, 3$.

(i) Dacă rezistoarele sunt legate în serie, atunci curentul se întrerupe dacă s-a ars cel puţin un rezistor, deci trebuie calculată probabilitatea evenimentului $A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

Evenimentele fiind independente şi ţinând cont de Propoziţia 2.1.7(iv) avem

$$\begin{aligned}
P(A_1\cup A_2\cup A_3) &= 1 - P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}) = \\
&= 1 - P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}) = \\
&= 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = \\
&= 1 - (1-P(A_1))(1-P(A_2))(1-P(A_3)) = \\
&= 1 - 0,97\cdot 0,99\cdot 0,96 = 0,07811\ .
\end{aligned}$$

(ii) Dacă rezistoarele sunt legate în paralel, atunci curentul se întrerupe dacă s-au ars toate rezistoarele, deci trebuie calculată probabilitatea evenimentului $A_1\cap A_2\cap A_3$.

Evenimentele fiind independente avem

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0,03 \cdot 0,01 \cdot 0,04 = 0,000012\,.$$

Problema 2.2.34 *Un motor este construit din două unităţi. Într-un interval de timp , cele două unităţi se pot defecta în mod independent cu probabilităţile $\frac{1}{5}$, respectiv $\frac{1}{3}$. Ştiind că a avut loc o defecţiune a aparatului, se cere probabilitatea ca să se fi defectat:*

(i) numai prima unitate;

(ii) ambele unităţi.

Soluţie:

Considerând evenimentele

$A =$ s-a defectat prima unitate,

$B =$ s-a defectat a doua unitate

şi ţinând cont de faptul că A şi B sunt independente, rezultă din **Definiţia** 2.1.16 că $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

(*i*) Conform relaţiei (2.2.6) şi a Propoziţiei 2.1.7(*i*), (*vii*), obţinem

$$P_{A\cup B}(A \setminus B) = \frac{P((A \setminus B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} =$$
$$= \frac{P(A \setminus B)}{P(A \cup B)} =$$
$$= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} =$$
$$= \frac{P(A) - P(A)P(B)}{P(A) + P(B) - P(A)P(B)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{7}$$

(ii) Conform relaţiei (2.2.6) şi a Propoziţiei 2.1.7(i), (vii), obţinem

$$P_{A\cup B}(A\cap B) = \frac{P((A\cap B)\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} =$$
$$= \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} =$$
$$= \frac{P(A)P(B)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{7}\,.$$

Problema 2.2.35 *Să se arate că dacă A şi B sunt evenimente ale unui câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, $P(B) \neq \{0,1\}$ şi $P_B(A) = P_{\overline{B}}(A)$, atunci A şi B sunt independente.*

Soluţie:

Din ipoteză avem următoarele echivalenţe

$$P_B(A) = P_{\overline{B}}(A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})} =$$
$$= \frac{P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})}{P(B)+P(\overline{B})} =$$
$$= \frac{P((A\cap B)\cup(A\cap \overline{B}))}{P(B)+1-P(B)} =$$
$$= \frac{P(A)}{1}\,.$$

Egalând primul şi ultimul raport, obţinem $P(A\cap B) = P(A)P(B)$, ceea ce înseamnă că A şi B sunt independente.

Problema 2.2.36 *Doi trăgători trag câte un foc asupra unei ţinte. Primul nimereşte ţinta cu probabilitatea $\frac{7}{9}$, iar al doilea cu probabilitatea $\frac{9}{11}$. Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă?*

Soluţie:

Fie evenimentele

$A =$ primul tragător nimereşte ţinta,

$B =$ al doilea tragător nimereşte ţinta.

Din enunţ se deduce că cele două trageri sunt independente una de alta şi $P(A) = \frac{7}{9}$, $P(B) = \frac{9}{11}$. Ţinta este atinsă dacă are loc unul din următoarele evenimente: $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$ sau $\overline{A} \cap B$, care au probabilităţile

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{7}{9} \cdot \frac{9}{11} = \frac{7}{11},$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) = P(A)(1 - P(B)) = \frac{7}{9} \cdot (1 - \frac{9}{11}) = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{11} = \frac{14}{99},$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B) = (1 - P(A))P(B) = (1 - \frac{7}{9}) \cdot \frac{9}{11} = \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{11} = \frac{2}{11},$$

În concluzie, trebuie calculată probabilitatea evenimentului $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.

$$P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) =$$
$$= \frac{7}{11} + \frac{14}{99} + \frac{2}{11} = \frac{95}{99}.$$

2.3 Probleme propuse

Problema 2.3.1 *Se aruncă o monedă. Să se scrie mulţimea evenimentelor elementare şi câmpul de evenimente asociat.*

Răspuns:

Evenimentele elementare sunt $S =$ apare stema şi $V =$ apare valoarea. Câmpul de evenimente este $\mathcal{K} = \{\emptyset, S, V, \{S, V\}\}$.

Problema 2.3.2 *Dacă se aruncă două zaruri de 20 de ori, care este probabilitatea să obţinem cel puţin la o aruncare faţa 5 pe ambele zaruri (dublă de 5). Dar dacă cele două zaruri se aruncă de 30 de ori?*

Răspuns:

$1 - \frac{35^{20}}{36^{20}}$, $1 - \frac{35^{30}}{36^{30}}$.

Problema 2.3.3 *Într-un coş sunt 90 de portocale dintre care 7 sunt stricate. Se iau pe rând 4 portocale, fără revenirea portocalei extrase. Care este probabilitatea ca:*

(*i*) *toate portocalele extrase să fie bune;*

(*ii*) *cel puţin o portocală să fie stricată?*

Răspuns:

(*i*) $\frac{C_{83}^4}{C_{90}^4}$;

(*ii*) $1 - \frac{C_{83}^4}{C_{90}^4}$.

Problema 2.3.4 *O urnă conţine 10 bile albe şi 6 bile negre. Din această urnă se extrag 2 bile nepunându-se înapoi prima bilă extrasă. Se cere probabilitatea ca:*

(*i*) *cele două bile să fie albe;*

(*ii*) *cele două bile să fie negre;*

(*iii*) *bilele să fie de culori diferite;*

(*iv*) *bilele să fie de aceeaşi culoare.*

Răspuns:

(*i*) $\frac{C_{10}^2 \, C_6^0}{C_{16}^2} = 0,375$;

(*ii*) $\frac{C_{10}^0 \, C_6^2}{C_{16}^2} = 0,125$;

(*iii*) $\frac{C_{10}^1 \, C_6^1}{C_{16}^2} = 0,5$;

(*iv*) 0,5.

Problema 2.3.5 *Într-o grupă sunt 22 de fete şi 13 băieţi. Care este probabilitatea ca, alegând 10 studenţi pentru a forma o echipă, aceasta să fie formată din 7 fete şi 3 băieţi?*

Răspuns:
$\frac{C_{22}^7 \ C_{13}^3}{C_{35}^{10}}$.

Problema 2.3.6 *Din 1000 de lozuri, se estimează că 6 sunt câştigătoare. Într-o pungă sunt 50 de lozuri. Să se determine probabilitatea ca:*

(i) 3 lozuri să fie câstigătoare;

(ii) niciun loz să nu fie câştigător;

(iii) cel mult un loz să fie câştigător.

Răspuns:
(i) $\frac{C_6^3 \ C_{994}^{47}}{C_{1000}^{50}}$;
(ii) $\frac{C_6^0 \ C_{994}^{50}}{C_{1000}^{50}}$;
(iii) $\frac{C_6^0 \ C_{994}^{50}+C_6^1 \ C_{994}^{49}}{C_{1000}^{50}}$;

Problema 2.3.7 *Precizia de măsurare a unui aparat de control este de 90%. Să se determine probabilitatea ca:*

(i) din 12 măsurători, 9 să fie exacte;

(ii) din 12 măsurători, cel puţin 9 să fie exacte.

Răspuns:
(i) $C_{12}^9 \ \left(\frac{9}{10}\right)^9 \ \left(\frac{1}{10}\right)^3$;
(ii) $C_{12}^9 \ \left(\frac{9}{10}\right)^9 \ \left(\frac{1}{10}\right)^3 + C_{12}^{10} \ \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \ \left(\frac{1}{10}\right)^2 + C_{12}^{11} \ \left(\frac{9}{10}\right)^{11} \ \frac{1}{10} + C_{12}^{12} \ \left(\frac{9}{10}\right)^{12}$.

Problema 2.3.8 *Un trăgător la ţintă nimereşte ţinta cu probabilitatea $\frac{3}{5}$. Să se determine probabilitatea ca, din 8 încercări, ţinta să fie atinsă de 6 ori.*

Răspuns:
$C_8^6 \ \left(\frac{3}{5}\right)^6 \ \left(\frac{2}{5}\right)^2$.

Problema 2.3.9 *Se aruncă 3 zaruri de 7 ori. Care este probabilitatea ca de 5 ori să se obţină combinaţia $(2,3,6)$?*

Răspuns:

$C_7^5 \left(\frac{3!}{6^3}\right)^6 \left(1 - \frac{3!}{6^3}\right)^2$.

Problema 2.3.10 *O urnă conţine 3 bile albe şi 4 bile negre, iar o altă urnă conţine 4 bile albe şi 5 bile negre. Se extrage o bilă din prima urnă şi se introduce în cea de-a doua, după care se face o extragere din a doua urnă. Care este probabilitatea ca:*

(i) a doua bilă să fie albă;

(ii) ambele bile extrase să fie albe;

(iii) bilele apărute în cele două extrageri să fie de aceeaşi culoare?

Răspuns:

(i) $\frac{31}{70}$;

(ii) $\frac{3}{14}$;

(iii) $\frac{39}{70}$.

Problema 2.3.11 *Într-o cutie sunt şase cartonaşe: trei albe şi trei negre, fiecare numerotate de la 1 la 3. Se extrage din cutie un cartonaş şi se constată că este alb. Care este probabilitatea ca, cartonaşul extras să aibă numărul 2?*

Răspuns:

$\frac{1}{3}$.

Problema 2.3.12 *O urnă conţine 5 bile albe şi 4 bile negre. Se fac trei extrageri succesive din urnă fără întoarcerea în urnă a bilei extrase. Care este probabilitatea ca:*

(i) cele trei bile extrase să fie de aceeaşi culoare;

(ii) două bile să fie albe şi una să fie neagră?

Răspuns:

(*i*) $\frac{1}{6}$;

(*ii*) $\frac{10}{21}$.

Problema 2.3.13 *Două persoane trag succesiv câte un loz în plic. În plic sunt 50 de lozuri dintre care 10 sunt câştigătoare. La care dintre cele două persoane este probabilitatea mai mare de a extrage un loz câştigător.*

Răspuns:

$\frac{1}{5}$.

Problema 2.3.14 *Se dau două urne identice în exterior: U_1 conţinând 3 bile albe şi 4 bile negre şi U_2 conţinând 4 bile albe şi 5 bile negre. Din una din aceste urne se ia o bilă. Care este probabilitatea ca bila extrasă să fie albă?*

Răspuns:

$\frac{55}{126}$.

Problema 2.3.15 *Avem trei urne ce conţin: prima 3 bile albe şi 2 negre, a doua 2 bile albe şi una neagră, a treia 4 bile albe şi 5 negre. Se alege la întâmplare o urnă şi se extrage o bilă. Să se determine probabilitatea de a extrage o bilă albă.*

Răspuns:

0,57.

Problema 2.3.16 *Un magazin se aprovizionează cu tastaturi de la trei fabrici în proporţie de 45%, 40% şi respectiv 15% de la fiecare fabrică. Se ştie că fabricile produc tastaturi de cea mai bună calitate în proporţie de 70%, 80% şi respectiv 81%. Se cere probabilitatea ca la cumpărarea unei tastaturi să primim o tastatură de cea mai bună calitate.*

Răspuns:

$0,75$.

Problema 2.3.17 *Produsele secţiei unei fabrici sunt analizate sub raportul calităţii de către doi controlori. Probabilitatea ca produsele să fie verificate de primul controlor este $0,6$, iar pentru al doilea $0,4$. Probabilitatea ca o piesă admisibilă să fie verificată de primul controlor este $0,94$, iar pentru al doilea $0,98$. O piesă a fost identificată ca admisibilă, să se determine probabilitatea ca ea să fi fost verificată de primul controlor.*

Răspuns:

$0,59$.

Problema 2.3.18 *Zece calculatoare provin de la trei firme producătoare: 3 de la firma F_1, 5 de la firma F_2 şi 2 de la firma F_3. La o verificare trec proba de admisibilitate cele de la firma F_1 cu probabilitatea $0,9$, cele de la firma F_2 cu probabilitatea $0,75$, iar cele de la firma F_3 cu probabilitatea $0,85$. Se alege un aparat şi se constată că trece proba. Care este probabilitatea ca el să provină de la firma F_1?*

Răspuns:

$0,331$.

Problema 2.3.19 *Fie o urnă în care se găsesc 10 bile: 4 de culoare roşie, 4 de culoare neagră şi 2 de culoare albă. Care este probabilitatea ca în urma a trei extrageri să avem o bilă albă, una roşie şi una neagră.*

Răspuns:

$\frac{2}{45}$.

Problema 2.3.20 *Un lot de 100 de piese de maşină este supus controlului de calitate. Condiţia ca acest lot să fie acceptat este ca în patru din verificările consecutive să nu apară nici un rebut. Care este probabilitatea ca lotul să fie respins dacă el conţine 3% piese rebut?*

Răspuns:

0, 177.

Problema 2.3.21 *Pe o tavă sunt 25 boabe de struguri, 20 albe şi 5 negre. Se scot pe rând la întâmplare şapte boabe, fără a le pune la loc. Care este probabilitatea ca să nu apară nicio boabă neagră?*

Răspuns:

$\frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} \cdot \frac{17}{22} \cdot \frac{16}{21} \cdot \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \approx 0,16127$.

Problema 2.3.22 *Fie spaţiul* $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, *unde* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_9\}$, $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\Omega)$, $P(\omega_i) = \frac{1}{9}$, $i = \overline{1,9}$ *şi evenimentele* $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B = \{\omega_1, \omega_6, \omega_7\}$, $C = \{\omega_1, \omega_8, \omega_9\}$. *Să se studieze dacă evenimentele* A, B, C *sunt independente două câte două şi dacă formează un sistem de evenimente independente.*

Răspuns:

Evenimentele A, B şi C sunt independente două câte două, dar ele nu formează un sistem de evenimente independente.

Problema 2.3.23 *Fie o urnă cu 60 de bile, numerotate de la 1 la 60. Se extrage o singură bilă. Să se studieze independenţa următoarelor evenimente:*

$A =$ *bila are număr multiplu de 2;*

$B =$ *bila are număr multiplu de 3;*

$C =$ *bila are număr multiplu de 5.*

Răspuns:

Evenimentele A, B şi C sunt independente două câte două şi formează un sistem de evenimente independente.

Problema 2.3.24 *Trei trăgători trag câte un foc asupra unei ţinte. Primul nimereşte ţinta cu probabilitatea $\frac{3}{4}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{4}{5}$, iar al treilea cu probabilitatea $\frac{5}{6}$. Care este probabilitatea ca ţinta să fie atinsă?*

Răspuns:

$\frac{119}{120}$.

Problema 2.3.25 *Se aruncă de trei ori o pereche de zaruri. Care este probabilitatea să obţinem un total de*

(i) 6 puncte la prima aruncare, 7 puncte la a doua aruncare şi 8 puncte la a treia aruncare;

(ii) 6 puncte la o aruncare, 7 puncte la o altă aruncare şi 8 puncte la altă aruncare?

Răspuns:

(i) $\frac{5}{36} \cdot \frac{6}{36} \cdot \frac{5}{36} = \frac{25}{7776}$;

(ii) $6 \cdot \frac{25}{7776} = \frac{25}{1296}$.

Problema 2.3.26 *Urna U_1 conţine 3 bile albe şi 4 bile negre, U_2 conţine 4 bile albe şi 5 bile negre şi U_3 conţine 5 bile albe şi 6 bile negre. Din fiecare urnă se ia câte o bilă. Care este probabilitatea ca*

(i) bilele extrase să fie de aceeaşi culoare;

(ii) o bilă să fie albă şi două să fie negre?

Răspuns:

(i) $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{11} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{11} = \frac{20}{77}$;

(ii) $\frac{3}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{6}{11} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{11} + \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{11} = \frac{376}{693}$.

Capitolul 3

Variabile aleatoare

3.1 Definiţii şi rezultate de bază

3.1.1 Variabile aleatoare. Repartiţii de probabilitate. Funcţii de repartiţie

Fie câmpul de probabilitate (Ω, K, P).

Definiţia 3.1.1 *O* <u>*variabilă aleatoare*</u> *este o aplicaţie* $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ *ce asociază rezultatului* ω *al unui experiment oarecare un număr real* $f(\omega)$.

Definiţia 3.1.2 *O variabilă aleatoare* $f : \Omega \to \mathbf{R}$ *se numeşte* <u>*discretă*</u> *dacă mulţimea valorilor ei* $f(\Omega)$ *este numărabilă, adică este submulţime a lui* $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ *sau* $\mathbf{Q}$.

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete se descrie cu ajutorul unui "tablou" de forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \; x_2 \; \dots \; x_i \; \dots \\ p_1 \; p_2 \; \dots \; p_i \; \dots \end{pmatrix}, \sum_i p_i = 1 \quad (3.1.1)$$

unde $p_i = P(\{\omega \in \Omega / f(\omega) = x_i\})$.

Definiţia 3.1.3 *O variabilă aleatoare $f : \Omega \to \mathbf{R}$ se numeşte continuă dacă mulţimea valorilor ei $f(\Omega)$ conţine un interval mărginit sau nemărginit.*

Definiţia 3.1.4 *Funcţia $F_f : \mathbf{R} \to [0,1]$ definită prin*

$$F_f(x) = P(\omega \in \Omega : f(\omega) < x) \tag{3.1.2}$$

se numeşte funcţie de repartiţie asociată variabilei aleatoare f.

Teorema 3.1.5 *Funcţia de repartiţie $F_f : \mathbf{R} \to [0,1]$ asociată variabilei aleatoare f are următoarele proprietăţi:*

- *F_f este monoton crescătoare,*
- $\lim_{x \to -\infty} F_f(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F_f(x) = 1$
- *F_f este continuă la stânga în orice punct $x \in \mathbf{R}$.*
- *Daca $a < b$, atunci*

$$\begin{aligned} P(a \leq f < b) &= F_f(b) - F_f(a), \\ P(a < f < b) &= F_f(b) - F_f(a+0), \\ P(a \leq f \leq b) &= F_f(b+0) - F_f(a) \\ P(a < f \leq b) &= F_f(b+0) - F_f(a+0) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

Observaţia 3.1.6 *Dacă f este o variabilă aleatoare discretă, atunci:*

$$F_f(x) = \sum_{i : x_i < x} p_i, \tag{3.1.4}$$

unde $p_i = P(\{\omega \in \Omega / f(\omega) = x_i\})$.

Propoziţia 3.1.7 *Fie f, g două variabile aleatoare discrete cu următoarele repartiţii:*

$$f : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}, \quad g : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j=\overline{1,m}} \tag{3.1.5}$$

Atunci $f+g, fg, cf, c \in \mathbf{R}$ sunt deasemenea variabile aleatoare discrete, având repartiţiile date prin:

$$cf : \begin{pmatrix} cx_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}, \quad f+g : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{\overline{i=1,n,j=1,m}}, \quad fg : \begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{\overline{i=1,n,j=1,m}} \tag{3.1.6}$$

unde $p_{ij} = P(A_i \cap B_j)$ este probabilitatea realizării simultane a evenimentelor $A_i = \{\omega \in \Omega / f(\omega) = x_i\}$ şi $B = \{\omega \in \Omega / g(\omega) = y_j\}$.

Definiţia 3.1.8 *Fie F_f funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare f. Dacă F_f este diferenţiabilă, atunci se poate defini densitatea de repartiţie sau densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare f, functia $\rho : \mathbf{R} \longrightarrow [0, \infty)$ cu proprietatea că $\rho = \frac{d}{dx} F_f$.*

Teorema 3.1.9 *Dacă variabila aleatoare f admite densitatea de repartiţie ρ, atunci:*

- $F_f(x) = \int\limits_{x}^{\infty} \rho(u) du$
- $P(a \leq f < b) = \int_a^b \rho(x) dx$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1$

Definiţia 3.1.10 *Două variabile aleatoare f şi g se numesc independente dacă*

$$P(f < x, g < y) = F_f(x) \cdot F_g(x) \tag{3.1.7}$$

3.1.2 Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate şi $f : \Omega \to \mathbf{R}$ o variabilă aleatoare şi F_f funcţia sa de repartiţie, iar ρ densitatea de repartiţie.

Definiţia 3.1.11 *Se numeşte* <u>*valoare medie*</u> *a lui f numărul real*

$$\overline{f} = M(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx \tag{3.1.8}$$

Observaţia 3.1.12 *Dacă f este o variabilă aleatoare discretă cu repartiţia*

$$f : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=I}, \tag{3.1.9}$$

atunci

$$M(f) = \sum_{i \in I} x_i p_i \tag{3.1.10}$$

Remarca 3.1.13 *Alte caracteristici ale variabilelor aleatoare:*

- <u>*Momentul de ordin k*</u>

$$M_k(f) = M(f^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \rho(x)dx \tag{3.1.11}$$

- <u>*Momentul absolut de ordin k*</u>

$$M_k(|f|) = M(|f|^k) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \rho(x)dx \tag{3.1.12}$$

- <u>*Momentul centrat de ordin k*</u>

$$m_k(f) = M[(f - \overline{f})^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{f})^k dF_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{f})^k \rho(x)dx \tag{3.1.13}$$

- *Dispersia*

$$D^2(f) = m_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{f})^2 dF_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{f})^2 \rho(x) dx \quad (3.1.14)$$

- *Abaterea medie pătratică*

$$D(f) = \sqrt{m_2(f)} \quad (3.1.15)$$

Propoziţia 3.1.14 *Fie $f, g : \Omega \to \mathbf{R}$ două variabile aleatoare. Valoarea medie şi dispersia variabilelor aleatoare $f + g$ şi af, $a \in \mathbf{R}$, au următoarele prorietăţi:*

- $M(f + g) = M(f) + M(g)$,
- $M(af) = aM(f)$,
- $M(af + b) = aM(f) + b$
- *dacă f şi g sunt variabile aleatoare independente, atunci* $M(fg) = M(f)M(g)$.
- $D^2(f + g) = D^2(f) + D^2(g) \Leftrightarrow f, g$ *sunt independente*
- $D^2(af) = a^2 D^2(f)$
- $D^2(a) = 0$
- $D^2(f) = M_2(f) - [M(f)]^2 = M(f^2) - [M(f)]^2$

Definiţia 3.1.15 *Se numeşte funcţie caracteristică a variabilei aleatoare f, aplicaţia $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ definită prin relaţia:*

$$\varphi(t) = M(e^{itf}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_f(x) \quad (3.1.16)$$

Observaţia 3.1.16 • *Dacă f este o variabilă aleatoare discretă dată prin* $f : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i=\overline{1,n}}$ *atunci funcţia caracteristică asociată lui f este definită prin*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} p_k \tag{3.1.17}$$

- *Dacă f este o variabilă aleatoare continuă şi are densitatea de repartiţie $\rho(x)$, atunci funcţia caracteristică asociată lui f este dată prin:*

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \rho(x) dx \tag{3.1.18}$$

Teorema 3.1.17 . *Dacă variabila aleatoare f admite o repatiţie continuă, atunci densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare f, notată prin $\rho(x)$, se obţine cu ajutorul funcţiei caracteristice φ corespunzătoare prin:*

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt \tag{3.1.19}$$

3.1.3 Dependenţa variabilelor aleatoare. Corelaţie. Coeficient de corelaţie

Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate, $f, g : \Omega \to \mathbf{R}$ două variabile aleatoare. Ele pot fi independente, între ele poate exista o dependenţă funcţională, de exemplu de natură liniară $g = \alpha f + \beta$ sau pot fi dependente, dar nu funcţional, adică între ele poate exista o dependenţă de natură aleatoare. Covarianţa şi coeficientul de covarianţă reprezintă măsuri ale gradului de dependenţă aleatoare a două variabile.

Definiţia 3.1.18 *Se numeşte corelaţie sau covarianţă a variabilelor aleatoare f şi g valoarea:*

$$cov(f, g) = M[(f - \overline{f})(g - \overline{g})] \tag{3.1.20}$$

Observaţia 3.1.19 *În calculul covarianţiei este mai util să se folosească formula echivalenta*

$$cov(f,g) = M(fg) - M(f)M(g).$$

Propoziţia 3.1.20 *Covarianţa are următoarele proprietăţi:*

- $cov(f,a) = 0$
- $cov(f,f) = D^2(f)$
- $cov(f,g) = cov(g,f);$
- $cov(af,bg) = ab \cdot cov(f,g);$
- $cov(f+a,g+b) = cov(f,g)$
- $D^2(f+g) = D^2(f) + D^2(g) + 2cov(f,g)$

Observaţia 3.1.21 *Pentru două variabile aleatoare f şi g, covarianţa ne furnizează următoarele informaţii despre gradul în care poate să existe o dependenţă între cele două variabile:*

- *dacă f şi g sunt independente, atunci $cov(f,g) = 0$.*
- *dacă $cov(f,g) = 0$, atunci variabilele aleatoare f şi g se numesc <u>necorelate</u>, ele nefiind în mod obligatoriu independente.*

Definiţia 3.1.22 *Se numeşte <u>coeficient de corelaţie</u> al variabilelor f şi g valoarea:*

$$\rho(f,g) = \frac{cov(f,g)}{\sqrt{D^2(f)D^2(g)}} \tag{3.1.21}$$

Propoziţia 3.1.23 *Dacă variabilele f şi g sunt discrete şi iau valorile $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, respectiv $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, iar $p_{ij} = P(f = x_i$ şi $g = y_j)$ atunci:*

$$\rho(f,g) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i - f)(y_j - g)p_{ij}}{\sqrt{D^2(f)D^2(g)}} \tag{3.1.22}$$

Observaţia 3.1.24 *Dacă f şi g sunt două variabile aleatoare, atunci*

- $-1 \leq \rho(f,g) \leq 1$
- *între f şi g există o relaţie liniară dacă şi numai dacă $\rho^2(f,g) = 1$.*
- *dacă f şi g sunt independente, atunci $\rho(f,g) = 0$.*

3.1.4 Inegalitatea lui Cebîşev şi legea numerelor mari

Propoziţia 3.1.25 *(Inegalitatea lui Markov) Dacă f este o variabilă aleatoare ce admite numai valori nenegative, atunci $\forall a > 0$*

$$P(f \geq a) \leq \frac{M(f)}{a} \tag{3.1.23}$$

Propoziţia 3.1.26 *(Inegalitatea lui Cebîşev) Dacă f este o variabilă aleatoare de medie $M(f)$ şi dispersie $D^2(f)$, atunci $\forall k > 0$ are loc*

$$P(|f - M(f)| \geq k) \leq \frac{D^2(f)}{k^2} \tag{3.1.24}$$

Teorema 3.1.27 *(Legea numerelor mari) Dacă $f_1, f_2, \ldots,$ este un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite, fiecare de medie $M(f_i) = \mu$, atunci $\forall \epsilon > 0$,*

$$P\left[|\frac{f_1 + f_2 \cdots f_n}{n} - \mu| > \epsilon\right] \to 0 \quad pentru \quad n \to \infty \tag{3.1.25}$$

3.2 Probleme rezolvate

Problema 3.2.1 *Fie f variabilă aleatoare ce reprezintă suma punctelor aruncării a două zaruri. Să se scrie repartiţia variabilei aleatoare f.*

Soluţie:

Prin aruncarea a două zaruri se pot obţine perchile $(a, b), a, b = 1, 2, \dots, 6$, unde a, b reprezintă numărul de puncte obţinut prin aruncarea primului, respectiv celui de al doilea zar. În consecinţă, variabila aleatoare f ce reprezintă suma punctelor obţinute prin aruncarea celor două zaruri, adică $a + b$, poate avea valori de la 2 până la 12 inclusiv. În continuare vom analiza probabilitatea de a obţine aceste valori. Astfel,

$$P[f=2] = P[\{(1,1)\}] = \frac{1}{6\cdot 6} = \frac{1}{36}$$

$$P[f=3] = P[\{(1,2),(2,1)\}] = \frac{2}{6\cdot 6} = \frac{2}{36}$$

$$P[f=4] = P[\{(1,3),(2,2),(3,1)\}] = \frac{3}{6\cdot 6} = \frac{3}{36}$$

$$P[f=5] = P[\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}] = \frac{4}{6\cdot 6} = \frac{4}{36}$$

$$P[f=6] = P[\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}] = \frac{5}{6\cdot 6} = \frac{5}{36}$$

$$P[f=7] = P[\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}] = \frac{6}{6\cdot 6} = \frac{6}{36}$$

$$P[f=8] = P[\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}] = \frac{5}{6\cdot 6} = \frac{5}{36}$$

$$P[f=9] = P[\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}] = \frac{4}{6\cdot 6} = \frac{4}{36}$$

$$P[f=10] = P[\{(4,6),(5,5),(6,4)\}] = \frac{3}{6\cdot 6} = \frac{3}{36}$$

$$P[f=11] = P[\{(5,6),(6,5)\}] = \frac{2}{6\cdot 6} = \frac{2}{36}$$

$$P[f=12] = P[\{(6,6)\}] = \frac{1}{6\cdot 6} = \frac{1}{36}$$

Deci, tabloul de distribuţie al variabilei aleatoare f este

$$f : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.2 *Se consideră trei urne cu bile având următoarea compoziţie: în prima urnă se află 3 bile albe şi 2 negre, a doua urnă conţine 5 bile albe şi 4 bile negre, iar în cea de a treia urnă se află 5 bile albe şi 6 bile negre. Se extrage din fiecare urnă câte o bilă şi se consideră f numărul de bile albe obţinut.*

Să se calculeze $M(f)$.

Soluţie: Pentru a determina tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare f este necesar să definim evenimentele

A_i =se extrage o bilă albă din urna $i, i = 1, 2, 3$.

Din ipoteza rezultă că $p(A_1) = \frac{3}{5}$, $p(A_2) = \frac{5}{9}, p(A_3) = \frac{5}{11}$.

Evenimentele CA_i = se extrage o bilă neagră din urna $i, i = 1, 2, 3$ au loc cu probabilităţile $P(CA_1) = 1 - p(A_1) = \frac{2}{5}$, $P(CA_2) = 1 - p(A_2) = \frac{4}{9}, p(CA_3) = 1 - p(A_3) = \frac{6}{11}$. În plus, evenimentele $A_i, i = 1, 2, 3$ sunt independente, extragerea din fiecare urnă făcându-se în mod separat.

Numărul de bile albe extrase din cele trei urne poate avea valorile $0, 1, 2, 3$ şi astfel, în consecinţă variabila aleatoare f asociată are repartiţia:

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ P(f = 0) & P(f = 1) & P(f = 2) & P(f = 3) \end{pmatrix}$$

Cazul în care bilele extrase din cele trei urne sunt toate negre corespunde atribuirii lui f valorii 0. De fapt, au loc simultan evenimentele $CA_i, i = 1, 2, 3$ sau echivalent are loc evenimentul $\bigcap_{i=1}^{3} CA_i$, iar probabilitatea asociată este

$$P(f = 0) = P(\bigcap_{i=1}^{3} CA_i) = \prod_{i=1}^{3} P(CA_i) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{11} = \frac{48}{495}$$

Daca din una din urne a fost extrasă o bilă albă şi din celelalte două bila neagră, variabila aleatoare f are valoarea 1. Astfel, au loc evenimente de forma $A_i \cap CA_j \cap CA_k, i,j,k = 1,2,3, i \neq j \neq k$, iar probabilitatea asociată este

$$P(f=1) = P(A_1 \cap CA_2 \cap CA_3) + P(CA_1 \cap A_2 \cap CA_3) + P(CA_1 \cap CA_2 \cap A_3)$$

$$= P(A_1)\cdot P(CA_2)\cdot P(CA_3) + P(CA_1)\cdot P(A_2)\cdot P(CA_3) + P(CA_1)\cdot P(CA_2)\cdot P(A_3)$$

$$= \frac{72}{495} + \frac{60}{495} + \frac{40}{495} = \frac{172}{495}.$$

Valoarea 2 este atribuită variabilei aleatoare f în cazul în care două bile extrase sunte albe şi una este neagră, adică au loc evenimente de forma $A_i \cap A_j \cap CA_k, i,j,k = 1,2,3, i \neq j \neq k$, iar acesta are loc cu probabilitatea

$$P(f=2) = P(A_1 \cap A_2 \cap CA_3) + P(A_1 \cap CA_2 \cap A_3) + P(CA_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(CA_3) + P(A_1)\cdot P(CA_2)\cdot P(A_3) + P(CA_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$$

$$= \frac{90}{495} + \frac{60}{495} + \frac{50}{495} = \frac{200}{495}.$$

Ultimul caz corespunde situaţiei în care toate bilele extrase sunt albe, având loc simultan evenimentele $A_i, i = 1,2,3$, adică $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$. Astfel, variabila aleatoare f primeşte valoarea 3, iar probabilitatea asociată este

$$P(f=3) = P(\bigcap_{i=1}^{3} A_i) = \prod_{i=1}^{3} P(A_i) = \frac{75}{495}.$$

Deci, variabila aleatoare f are tabloul de repartiţie

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{48}{495} & \frac{172}{495} & \frac{200}{495} & \frac{75}{495} \end{pmatrix}$$

Folosind formula (3.1.10) obţinem că

$$M(f) = 0 \cdot \frac{48}{495} + 1 \cdot \frac{172}{495} + 2 \cdot \frac{200}{495} + 3\frac{75}{495} = \frac{597}{495}.$$

Problema 3.2.3 *Trei trăgători trag simultan asupra unei ţinte. Variabila aleatoare ce dă numărul de nimeriri ale ţintei are distribuţia*

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{p^2}{4} & \frac{11p}{24} & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

Se cere:

(a) să se determine valoarea parametrului real p;

(b) să se calculeze probabilitatea ca f să ia o valoare mai mică sau egală cu 2;

(c) să se determine probabilităţile cu care trăgătorii nimeresc ţinta.

Soluţie:

(a) Din condiţia $\frac{p^2}{4} + \frac{11p}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = 1 \Rightarrow p = 1$.

(b) $P(f \leq 2) = 1 - P(f = 3) = 1 - \frac{1}{24} = \frac{23}{24}$.

(c) Notăm cu $p_i = P(A_i), i = 1, 2, 3$ probabilitatea evenimentului A_i: trăgătorul i nimereşte ţinta

şi definim $q_i = 1 - p_i, i = 1, 2, 3$ probabilitatea evenimentului complementar.

Dacă $\sum_{i=1}^{3} p_i = p_1 + p_2 + p_3$ şi $\sum_{1 \leq i < j \leq 3} p_i p_j = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3$, avem că:

$$\frac{1}{4} = P(f = 0) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 1 - \sum_{i=1}^{3} p_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p_i p_j - p_1p_2p_3$$

$$\frac{11}{24} = P(f = 1) = p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2 = \sum_{i=1}^{3} p_i - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p_i p_j + 3p_1p_2p_3$$

$$\frac{1}{4} = P(f = 2) = p_1p_2q_3 + p_1p_3q_2 + p_2p_3q_1 = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} p_i p_j - 3p_1p_2p_3$$

$$\frac{1}{24} = P(f = 3) = p_1p_2p_3$$

Din relaţiile de mai sus deducem că:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = \frac{13}{12} \\ p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 = \frac{3}{8} \\ p_1p_2p_3 = \frac{1}{24} \end{cases} \tag{3.2.1}$$

În consecinţă, ecuaţia ce admite ca rădăcini probabilităţile $p_i = P(A_i)$ este

$$24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$$

cu soluţiile $1/2, 1/3, 1/4$.

Problema 3.2.4 *Fie variabilele aleatoare independente*

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & p \end{pmatrix}, p \in \mathbb{R}^+$$

Să se scrie tabloul de distribuţie al variabilelor aleatoare $3g$, $f+g$, $f \cdot g$ şi f^2.

Soluţie:

Pentru început vom determina parametrul real p ce apare în repartiţia variabilei aleatoare g, din condiţia $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, unde $p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$ şi $p_3 = p$. Se obţine că $p = \frac{1}{2}$. Din formula (3.1.6) rezultă că

$$3g : \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Pentru a determina distribuţia variabilei aleatoare $f+g$ este necesar a nota cu $x_i, i = 1,2$ şi $y_j, j = 1,2,3$ valorile variabilelor f, respectiv g. Evenimentele $A_i = \{f = x_i\}, i = 1,2$ i respectiv $B_j = \{g = y_j\}, j = 1,2,3$, formează sisteme complete de evenimente. De asemenea, se verifică imediat că şi evenimentele $C_{ij} = A_i \cap B_j$ formează un sistem complet de evenimente.

Din formula (3.1.6) şi ţinând cont că variabilele aleatoare f şi g sunt independente, deci şi sistemele de evenimente definite de ele sunt independente, deducem că variabila aleatoare $f+g$ ia valorile $x_i + y_j$ cu probabilităţile $P(C_{ij}) = P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j)$. Observăm că $x_i + y_j \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ Deci,

$$P(f+g=-1) = P(f=0 \cap g=-1) = P(f=0) \cdot P(g=-1) = \frac{1}{4}$$

$$P(f+g=0) = P(f=1 \cap g=-1) = \frac{1}{4}$$

$$P(f+g=1) = P(f=0 \cap g=1) = \frac{1}{8}$$

$$P(f+g=2) = P(f=0 \cap g=2) + P(f=1 \cap g=1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(f+g=3) = P(f=1 \cap g=2) = \frac{1}{8}$$

Astfel, variabila aleatoare $f+g$ are distribuţia

$$f+g : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

În mod asemănător, se poate construi distribuţia variabilei aleatoare fg ale cărei valori aparţin mulţimii $\{-1, 0, 1, 2\}$ Astfel,

$$P(fg=-1) = P(f=1 \cap g=-1) = P(f=1) \cdot P(g=-1) = \frac{1}{4}$$

$$P(fg=0) = P(f=0 \cap g=1) + P(f=0 \cap g=2) + P(f=0 \cap g=-1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(fg=1) = P(f=1 \cap g=1) = \frac{1}{8}$$

$$P(fg=2) = P(f=1 \cap g=2) = \frac{1}{8}$$

Deci, avem că

$$f \cdot g : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Este important a observa că variabila aleatoare $f^2 = f \cdot f$ ia valorile x_i^2 cu probabilităţile $P(A_i \cap A_i) = P(A_i)$. Astfel, variabila aleatoare f^2 are distribuţia

$$f^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.5 *Fie o variabilă aleatoare f ce ia valori pozitive cu probabilităţi ce descresc în progresie geometrică*

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \dots & k & \dots \\ p & ab & ab^2 & \dots & ab^k & \dots \end{pmatrix}, a, b > 0, a + b = 1, p \in \mathbf{R}$$

Să se determine

(a) parametrul real $p, p \in \mathbf{R}$;

(b) $P(f < 2)$, $P(f \geq 1)$, $P(1 \leq f < 3)$, $P_{f \leq 3}(f \geq 2)$.

Soluţie:

(a) Din ipoteza că $a, b > 0$ şi $a + b = 1$, obţinem că $a, b \in [0, 1]$. Parametrul real p se determină din condiţia ca $p + \sum_{k=1}^{\infty} ab^k = 1$. Folosind faptul că $\sum_{k=1}^{\infty} ab^k = ab\frac{1}{1-b}$, rezultă că $p + ab\frac{1}{1-b} = 1$. Obţinem $p = a$.

(b) $P(f < 2) = P(f = 0) + P(f = 1) = a + ab = 2a - a^2$.

De asemenea, $P(f \geq 1) = 1 - P(f < 1) = 1 - P(f = 0) = 1 - a = b$.

În mod asemănător, $P(1 \leq f < 3) = P(f = 1) + P(f = 2) = ab + ab^2$.

Iar, $P(f \geq 2 | f \leq 3) = \frac{P(2 \leq f \leq 3)}{P(f \leq 3)} = \frac{P(f=2)+P(f=3)}{P(f=0)+P(f=1)+P(f=2)+P(f=3)} = \frac{b^2}{1+b^2}$.

Problema 3.2.6 *Fie o variabilă aleatoare f ale cărci valori posibile sunt* $1, 2, 3$. *Ştiind că $p_1 \equiv P(f = 1) = \frac{1}{2}$ şi $p_2 \equiv P(f = 2) = \frac{1}{3}$, să se determine* *şi să se reprezinte grafic funcţia de repartiţie F_f a variabilei aleatoare f. În plus, să se determine media şi dispersia variabilei aleatoare f.*

<u>Soluţie:</u>

Variabila aleatoare f are distribuţia

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & p \end{pmatrix}$$

unde $p_3 \equiv P(f = 3)$ se determină din condiţia $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + p = 1$. Obţinem că $p = \frac{1}{6}$. Din formula (3.1.4), deducem că

$$F_f(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i,$$

unde $p_i = P(\{\omega \in \Omega / f(\omega) = x_i\})$.

Astfel, pentru $x < 1$, avem că $F_f(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i = 0$.

Dacă $1 \leq x < 2$, avem că $F_f(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i = p_1 = \frac{1}{2}$.

De asemenea, dacă $2 \leq x < 3$, avem că

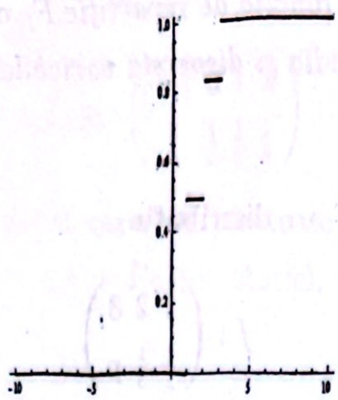
$F_f(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i = p_1 + p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

În final, dacă $x \geq 3$, atunci $F_f(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

Deci, funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare f este

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad x \in (-\infty, 1) \\ \frac{1}{2} & \textit{pentru} \quad x \in [1, 2) \\ \frac{5}{6} & \textit{pentru} \quad x \in [2, 3) \\ 1 & \textit{pentru} \quad x \in [3, \infty) \end{cases}$$

iar reprezentarea ei grafică este:



Problema 3.2.7 *Se fac trageri asupra unei ţinte până când aceasta este doborâtă. Probabilitatea de a atinge ţinta la fiecare tragere în parte este de 1/3. Se cere:*

(a) să se scrie distribuţia variabilei aleatoare a numărului de trageri necesare doborârii ţintei;

(b) valoarea medie şi dispersia acestei variabile aleatoare.

Soluţie:

(a) Fie f variabila aleatoare ce defineşte numărul de trageri necesare doborârii ţintei. Evenimentul $\{f = k\}$ se defineşte în modul următor: "prima tragere este ratată", ..., " $k-1$ tragere este ratată", iar "tragerea k este cea reuşită". Astfel, $P(f=1) = \frac{1}{3}, P(f=2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$, etc. Distribuţia variabilei aleatoare f este

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2^2}{3^3} & \ldots & \frac{2^{k-1}}{3^k} & \ldots \end{pmatrix}$$

(b)$M(f) = \frac{1}{3}\left[1 + 2\cdot\frac{2}{3} + 3(\frac{2}{3})^2 + \ldots + k(\frac{2}{3})^{k-1} + \ldots\right]$

În scopul scrierii mediei $M(f)$ într-o formă mai simplă, folosim faptul că

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + \ldots x^k + \ldots, \forall x \in (0,1) \qquad (3.2.2)$$

Prin derivarea relaţiei de mai sus obţinem identitatea matematică

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + kx^{k-1} + \ldots, \forall x \in (0,1) \qquad (3.2.3)$$

Înlocuind $x = 2/3$ deducem că $M(f) = \frac{1}{3}9 = 3$.

Pentru a calcula dispersia $D^2(f)$ folosim formula

$$D^2(f) = M(f^2) - [M(f)]^2$$

Distribuţia variabilei aleatoare f^2 este

$$f : \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & \ldots & k^2 & \ldots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2^2}{3^3} & \ldots & \frac{2^{k-1}}{3^k} & \ldots \end{pmatrix}$$

Astfel, $M(f^2) = \frac{1}{3}\left[1 + 2^2\frac{2}{3} + \ldots + k^2(\frac{2}{3})^{k-1} + \ldots\right]$.

Această sumă se poate simplifica folosind faptul că

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + kx^k + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2}, \forall x \in (0,1) \qquad (3.2.4)$$

(s-a înmulţit cu x relaţia (3.2.3)).

Atribuind lui x valoarea $2/3$, deducem că $M(f^2) = 15$. Deci, $D^2(f) = 15 - 9 = 6$.

Problema 3.2.8 *Fie variabila aleatoare f a cărei funcţie de repartiţie este*

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 0) \\ ax^2 & pentru \quad x \in [0,1) \\ 1 & pentru \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Se cere:

(a) să se determine parametrul real a;

(b) să se calculeze $P(-\frac{1}{4} < f < \frac{1}{2})$;

(c) să se determine funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare $g = 2f + 3$, $h = -3f + 2$, $i = f^2$, $k = e^f$.

Soluţie:

(a) Parametrul real a se va determina din condiţia ca funcţia F_f să fie continuă la stânga în 0 şi 1. Astfel, $\lim_{x\to 0, x<0} F_f(x) = F_f(0)$ şi $\lim_{x\to 1, x<1} F_f(x) = F_f(1)$. Obţinem $a = 1$.

(b) $P(-\frac{1}{4} < f < \frac{1}{2}) = F_f(\frac{1}{2}) - F_f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$.

(c) $F_g(x) = P(g < x) = P(2f + 3 < x) = P(f < \frac{x-3}{2}) = F_f(\frac{x-3}{2})$. Adică,

$$F_g(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 3) \\ (\frac{x-3}{2})^2 & pentru \quad x \in [3, 5) \\ 1 & pentru \quad x \in [5, \infty) \end{cases}$$

De asemenea, variabila aleatoare $h = -3f + 2$ are funcţia de repartiţie dată de relaţia

$$F_h(x) = P(-3f + 2 < x) = P(f > \frac{2-x}{3}) = 1 - F_f(\frac{2-x}{3})$$

Deci,

$$F_h(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, -1) \\ 1 - (\frac{2-x}{3})^2 & pentru \quad x \in [-1, 2) \\ 1 & pentru \quad x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare $i = f^2$ verifică

$$F_i(x) = P(i < x) = P(f^2 < x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 0) \\ P(-\sqrt{x} < f < \sqrt{x}) & pentru \quad x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Astfel,

$$F_i(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ F_f(\sqrt{x}) - F_f(-\sqrt{x}) & x \in [0, \infty) \end{cases} = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x} & pentru \quad x \in [0, 1) \\ 1 & pentru \quad x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Ştiind că variabila aleatoare k verifică relaţia $k = e^f$ obţinem că

$$F_k(x) = P(k < x) = P(e^f < x) = P(f < lnx) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 0) \\ P(f < lnx), & pentru \quad x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Astfel,

$$F_k(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \cup \{x > 0, lnx \leq 0\} \\ lnx & lnx \in (0,1) \\ 1 & pentru \quad lnx \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & pentru \quad x \in (-\infty, 1] \\ lnx & pentru \quad x \in (1, e) \\ 1, & pentru \quad x \in [e, \infty) \end{cases}$$

Problema 3.2.9 *Fie variabila aleatoare f a cărei densitate de repartiţie este*

$$\rho(x) = \begin{cases} k\cos x & pentru \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & pentru \quad x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases}$$

Se cere:

(a) să se determine parametrul real k;

(b) să se determine funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare f;

(c) să se calculeze probabilităţile $P(-\frac{\pi}{6} < f < \frac{\pi}{2})$, $P(f \in [0, \frac{\pi}{2}]/f > \frac{\pi}{3})$ şi

$P(f > 0/f \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}])$.

<u>Soluţie:</u>

(a) Parametrul real k se va determina din condiţia ca $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(u)du = 1$.

Astfel, $k \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho(u)du = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$.

Din teorema(3.1.9) ştim că $F_f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(u)du$. Pentru a determina forma explicită a expresiei funcţiei de repartiţie F_f distingem următoarele cazuri:

- dacă $x < -\frac{\pi}{2}$, atunci $\rho(u) = 0, (\forall)u \in (-\infty, x)$ şi deci $F_f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(u)du = 0$.

- dacă $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, atunci $\rho(u) = 0, (\forall)u \in (-\infty, -\frac{\pi}{2})$ şi $\rho(u) = \frac{\cos u}{2}, (\forall)u \in [-\frac{\pi}{2}, x]$. Astfel, $F_f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(u)du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{\cos u}{2} = \frac{1+\sin x}{2}$

- dacă $x \in (\frac{\pi}{2}, \infty)$, atunci $\rho(u) = 0, (\forall)u \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}) \cup [\frac{\pi}{2}, x]$ şi $\rho(u) = \frac{\cos u}{2}, (\forall)u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Astfel, $F_f(x) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{2} = 1$.

Deci, funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare f este

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}] \\ \frac{1+\sin x}{2} & \textit{pentru} \quad x \in (-\frac{\pi}{2} \frac{\pi}{2}) \\ 1, & \textit{pentru} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \infty) \end{cases}$$

(c) $P(-\frac{\pi}{3} < f < \frac{\pi}{2}) = F_f(\frac{\pi}{2}) - F_f(-\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(f \in [0, \frac{\pi}{2}]/f < \frac{\pi}{3}) = \frac{P(f\in(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}])}{P(f\in(\frac{\pi}{3},\infty))} = \frac{1-\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

$P(f > 0/f \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]) = \frac{P((0,\infty)\cap[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}])}{P([-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}])} = \frac{P(f\in(0,\frac{\pi}{3}])}{P(f\in[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}])} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1-\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

Problema 3.2.10 *Se consideră că două aparate sunt alese la întâmplare dintr-un set de 9 aparate, dintre care 2 sunt noi, 3 sunt vechi, dar încă funcţionale, iar restul sunt defecte. Să se construiască tabelul distribuţiei vectorului aleator $h = (f, g)$, unde f, g reprezintă variabilele aleatoare ce dau numărul aparatelor noi, respectiv folosite, dar încă funcţionale ce sunt alese.*

Soluţie:

Notăm $p_{ij} = P(f = i \text{ şi } g = j)$. Avem

$$p_{00} = P(f = 0 \text{ şi } g = 0) = \frac{C_2^0 \cdot C_3^0 \cdot C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36}$$

$f \setminus g$	0	1	2
0	6/36	12/36	3/36
1	8/36	6/36	0
2	1/36	0	0

$$p_{01} = P(f = 0 \text{ şi } g = 1) = \frac{C_2^0 \cdot C_3^1 \cdot C_4^1}{C_9^2} = \frac{12}{36}$$

$$p_{10} = P(f = 1 \text{ şi } g = 0) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^0 \cdot C_4^1}{C_9^2} = \frac{8}{36}$$

$$p_{11} = P(f = 1 \text{ şi } g = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^1 \cdot C_4^0}{C_9^2} = \frac{6}{36}$$

$$p_{02} = P(f = 0 \text{ şi } g = 2) = \frac{C_2^0 \cdot C_3^2 \cdot C_4^0}{C_9^2} = \frac{3}{36}$$

$$p_{20} = P(f = 2 \text{ şi } g = 0) = \frac{C_2^2 \cdot C_3^0 \cdot C_4^0}{C_9^2} = \frac{1}{36}$$

Datele de mai sus se pot organiza în următorul tabel

Din tabelul de mai sus observăm că variabila aleatoare f ce dă numărul aparatelor noi selectate are valorile $x_i = 0, 1, 2$. Probabilităţile $p_i = P(f = x_i)$ de a obţine aceste valori se determină însumând valorile din liniile respective. Astfel

$$p_0 = P(f = 0 \text{ şi } g = 0) + P(f = 0 \text{ şi } g = 1) + P(f = 0 \text{ şi } g = 2) = \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{3}{36} = \frac{21}{36}$$

$$p_1 = P(f = 1 \text{ şi } g = 0) + P(f = 1 \text{ şi } g = 1) + P(f = 1 \text{ şi } g = 1) = \frac{8}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{14}{36}$$

$$p_2 = P(f = 2 \text{ şi } g = 0) + P(f = 2 \text{ şi } g = 1) + P(f = 2 \text{ şi } g = 2) = \frac{1}{36} + 0 + 0 = \frac{1}{36}$$

Deci, variabila aleatoare f are tabloul de repartiţie

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{21}{36} & \frac{14}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

În mod asemănător, variabila aleatoare g ce dă numărul aparatelor uzate, dar încă funcţionale selectate are valorile $x_i = 0, 1, 2$. Probabilităţile $q_i = P(g = x_i)$ au valorile

$$q_0 = P(f = 0 \text{ şi } g = 0) + P(f = 1 \text{ şi } g = 0) + P(f = 2 \text{ şi } g = 0) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$$

$$q_1 = P(f = 0 \text{ şi } g = 1) + P(f = 1 \text{ şi } g = 1) + P(f = 2 \text{ şi } g = 1) = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{18}{36}$$

$$q_2 = P(f = 0 \text{ şi } g = 2) + P(f = 1 \text{ şi } g = 2) + P(f = 2 \text{ şi } g = 2) = \frac{3}{36} + 0 + 0 = \frac{3}{36}$$

În consecinţă, variabila aleatoare g are tabloul de repartiţie

$$g\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{15}{36} & \frac{18}{36} & \frac{3}{36} \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.11 *Fie vectorul aleator bidimensional $h = (f, g)$ dat prin tabloul: Se cere:*

$f \setminus g$	0	1	2
0	1/10	1/5	p
1	1/10	1/5	1/10

(a) să se determine parametrul real p;

(b) să se scrie tabelele de repartiţie ale variabilelor aleatoare f şi g;

(c) să se calculeze $M(g|f = 1)$ şi $M(f|g = 2)$;

(d) să se studieze dacă variabilele aleatoare f, g sunt independente;

(e) să se studieze necorelarea variabilele aleatoare f, g.

Soluţie:

(a) Parametrul real p se determină din condiţia

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+p+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=1$$

Obţinem $p=\frac{3}{10}$.

(b) Variabilele aleatoare f şi g au tabelele de repartiţie

$$f:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{10}+\frac{1}{5}+p & \frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

şi

$$g:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{10}+\frac{1}{10} & \frac{1}{5}+\frac{1}{5} & p+\frac{1}{10} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{10} & \frac{2}{5} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$$

(c) Pentru început vom determina tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare $(g|f=1)$. Avem că

$$(g|f=1):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{P(g=0,f=1)}{P(f=1)} & \frac{P(g=1,f=1)}{P(f=1)} & \frac{P(g=2,f=1)}{P(f=1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Deci, $M(g|f=1)=1$.

În mod asemănător, vom scrie tabelul de repartiţie al variabilei aleatoare $(f|g=2)$. Obţinem

$$(f|g=2):\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{P(f=0,g=2)}{P(g=2)} & \frac{P(f=1,g=2)}{P(g=2)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Deci, $M(f|g=2)=\frac{1}{4}$.

(d) Din tabel observăm că $P(f=0 \text{ şi } g=0)=\frac{1}{10}$. Dar $P(f=0)=\frac{6}{10}$, iar $P(g=0)=\frac{2}{10}$. Deci, $P(f=0 \text{ şi } g=0)\neq P(f=0)P(g=0)$. Putem concluziona că variabilele aleatoare f şi g nu sunt independente.

(e) Pentru studiul corelaţiei dintre variabilele aleatoare f şi g, conform propoziţiei (3.1.20), verificăm dacă relaţia $M(f \cdot g) = M(f) \cdot M(g)$ este satisfăcută. Variabila aleatoare $f \cdot g$ are tabloul de repartiţie

$$f \cdot g : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{68}{100} & \frac{16}{100} & \frac{16}{100} \end{pmatrix}$$

Atunci, conform formulei (3.1.10) obţinem $M(f \cdot g) = \frac{48}{100}$. În mod asemănător, avem că $M(f) = \frac{4}{10}$, $M(g) = \frac{8}{10}$. Deci, $M(f \cdot g) \neq M(f) \cdot M(g)$, prin urmare variabilele aleatoare f şi g sunt necorelate.

Problema 3.2.12 *Fie o variabilă aleatoare f ce poate lua trei valori, dintre care una este* 0. *Se cere:*

(a) să se determine tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare f cunoscându-se momentele $M_0(f) = 1, M_1(f) = 0, M_2(f) = 2, M_3(f) = -1$ şi $M_4(f) = \frac{21}{2}$;

(b) să se determine funcţia de repartiţie asociată variabilei aleatoare f;

(c) să se determine $P_{(0 \leq f \leq 2)}(1 \leq f \leq 3)$.

<u>Soluţie:</u>

(a) Fie

$$f : \begin{pmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

Din formula (3.1.11) a momentului de ordin k, scrisă acum pentru $k = 0, 1, 2, 3, 4$, obţinem următorul sistem

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ 0 \cdot p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0 \\ 0^2 \cdot p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = 2 \\ 0^3 p_1 + x_2^3 p_2 + x_3^3 p_3 = -1 \\ 0^4 p_1 + x_2^4 p_2 + x_3^4 p_3 = \frac{21}{2} \end{cases} \tag{3.2.5}$$

Vom căuta o ecuaţie de forma $x^2 + ax + b = 0$ astfel încât x_2, x_3 să fie rădăcinile acestei ecuaţii. Obţinem $a = 1/2, b = -5, x_2 = 2, x_3 = -5/2, p_1 = 3/5, p_2 = 2/9, p_3 = 8/45$. Deci,

$$f : \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 0 & 2 \\ \frac{8}{45} & \frac{3}{5} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

(b)

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, -\frac{5}{2}] \\ \frac{8}{45} & pentru \quad x \in (-\frac{5}{2}, 0] \\ \frac{35}{45} & pentru \quad x \in (0, 2] \\ 1 & pentru \quad x \in (2, \infty) \end{cases}$$

(c) $P_{(0 \le f \le 2)}(1 \le f \le 3) = 0$.

Problema 3.2.13 *Fie $\varphi(t) = \frac{1}{8}(1 + e^{it})^3$ funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare discrete f. Să se determine funcţia de repartiţie corespunzătoare variabilei aleatoare f.*

Soluţie:

Observăm că $\varphi(t) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}e^{it} + \frac{3}{8}e^{2it} + \frac{1}{8}e^{i3t}$. Din formula (3.1.17), deducem că $p_0 = P(f = 0) = \frac{1}{8}$, $p_1 = P(f = 1) = \frac{3}{8}$, $p_2 = P(f = 2) = \frac{3}{8}$, iar $p_3 = P(f = 3) = \frac{1}{8}$. Deci, f are tabloul de repartiţie

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Din formula (3.1.4), deducem că funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare f este

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{8} & pentru \quad x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & pentru \quad x \in [1, 2) \\ \frac{7}{8} & pentru \quad x \in [2, 3) \\ 1 & pentru \quad x \in [3, \infty) \end{cases}$$

Problema 3.2.14 *Să se scrie tabloul de repartiţie a variabilei aleatoare f, ştiind că funcţia sa caracteristică este $\varphi(t) = \frac{1}{2}(1 - \frac{e^{2it}}{3})^{-1}$.*

Soluţie:

Observăm că $|\frac{e^{2it}}{3}| = \frac{1}{3} < 1$. Notând $r = \frac{e^{2it}}{3}$, funcţia caracteristică devine $\varphi(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-r} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{e^{2it}}{3})^n$. Variabila aleatoare f are tabloul de repartiţie

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & \dots & 2n & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \dots & \frac{1}{2}\frac{1}{3^n} & \dots \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.15 *Să presupunem că numărul maşinilor produse de o fabrică într-o săptămână este o variabilă aleatoare de medie 60.*

(a) Să se determine probablitatea ca producţie din această săptămână să depăşească 85?

(b) Dacă este cunoscut că dispersia producţiei de maşini pe săptămână este 5, să se studieze probabilitatea ca producţia din această săptămână să fie între 45 şi 75?

Soluţie:

(a) Din inegalitatea lui Markov (3.1.23) avem că

$$P(f > 85) \leq \frac{60}{85} = \frac{12}{17}.$$

(b) Din inegalitatea lui Cebîşev (3.1.24) obţinem că

$$P(|f - 60| \geq 15) \leq \frac{5}{15^2}.$$

Astfel

$$P(|f - 60| \leq 15) \geq 1 - \frac{5}{15^2} = \frac{220}{225}.$$

Problema 3.2.16 *Fie variabila aleatoare f cu $M(f) = 2$ şi $D^2(f) = 5$. Să se determine o margine inferioară a $P(|f - 2| < 5)$.*

Soluţie:

Ştim că $P(|f-2|<5) = 1 - P(|f-2| \geq 5)$.

Din inegalitatea lui Cebîşev (3.1.24) deducem că

$P(|f-2| \geq 5) \leq \frac{5}{5^2} \Rightarrow P(|f-2| \geq 5) \leq \frac{1}{5}$

Astfel,

$$P(|f-2|<5) > 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Problema 3.2.17 *Variabila aleatoare f are $M(f) = 10$, iar $M(f^2) = 150$. Să se determine o margine inferioară a probabilităţii $P(-40 < f < 60)$.*

Soluţie:

Din ipoteza problemei se poate determina dispersia

$$D^2(f) = M(f^2) - M(f)^2 = 150 - 100 = 50$$

Inegalitatea lui Cebîşev (3.1.24) poate fi scrisă în modul următor:

$1 - P(|f - M(f)| < k) \leq \frac{D^2(f)}{k^2}$ sau $P(-k < f - M(f) < k) \geq 1 - \frac{D^2(f)}{k^2}$

Echivalent avem că $P(-k+10 < f < k+10) \geq 1 - \frac{50}{k^2}$.

Observăm că dacă $-k+10 = 40, k+10 = 60$, deci $k = 50$, se obţine că $P(-40 < f < 60) \geq 1 - \frac{50}{50^2} = \frac{49}{50}$.

3.3 Probleme propuse

Problema 3.3.1 *La un concurs de aruncare a două zaruri, există următoarele reguli: se acordă 12 puncte dacă suma feţelor care apar este 2 sau 12, 4 puncte dacă aceeaşi sumă este 7 şi un punct în rest. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare f a numărului de puncte acordate celui care aruncă zarurile.*

<u>Răspuns:</u>

$$f : \begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 \\ \frac{2}{36} & \frac{6}{36} & \frac{28}{36} \end{pmatrix}$$

Problema 3.3.2 *Doi băieţi se joacă următorul joc: fiecare aruncă câte o monedă. Primul băiat câştigă un leu, respectiv 2 lei, dacă ambele monede arată faţa cu stema, respectiv faţa cu banul. În celelalte cazuri, primul băiat va pierde suma de un leu. Să se determine distribuţia variabilei aleatoare f a câştigurilor, dacă se joacă o singură dată acest joc.*

<u>Răspuns:</u>

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$$

Problema 3.3.3 *Presupunem că variabila aleatoare f are tabloul de repartiţie*

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Să se calculeze $M(f^2)$ şi $D^2(f)$.

<u>Răspuns:</u> $M(f) = 1,6$; $D^2(f) = 0,6$.

Problema 3.3.4 *Fie variabila aleatoare f al cărei tablou de repartiţie este*

$$f : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Să se determine funcţia de repartiţie F_f şi să se reprezinte grafic.

<u>Răspuns:</u>

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad x \in (-\infty, 2) \\ \frac{1}{3} & \textit{pentru} \quad x \in [2, 4) \\ \frac{2}{3} & \textit{pentru} \quad x \in [4, 6) \\ 1 & \textit{pentru} \quad x \in [6, \infty) \end{cases}$$

Problema 3.3.5 *Se presupune că timpul de aşteptare în minute la o staţie de autobuz este o variabilă aleatoare a cărei funcţii de repartiţie este*

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x}{2} & pentru \quad x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & pentru \quad x \in [1, 2) \\ \frac{x}{4} & pentru \quad x \in [2, 4) \\ 1 & pentru \quad x \in [4, \infty) \end{cases}$$

Se cere:

(a) densitatea de repartiţie corespunzătoare;

(b) probabilitatea ca un călător să aştepte

(i) mai mult de 3 minute;

(ii) mai puţin de 3 minute;

(iii) între un minut şi 3 minute;

(c) probabilitatea condiţionată ca un călător să aştepte:

(i) mai mult de 3 minute, ştiind că a aşteptat mai mult de un minut;

(ii) mai puţin de 3 minute, ştiind că a aşteptat mai mult de un minut;

Răspuns:

(a) $\rho(x) = F_f'(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x < 0 \quad sau \quad 1 < x < 2 \quad sau \quad x > 4 \\ \frac{1}{2} & pentru \quad x \in (0, 1) \\ \frac{1}{4} & pentru \quad x \in (2, 4) \end{cases}$

b)

(i) $P(f \geq 3) = 1 - P(f < 3) = 1 - F_f(3) = \frac{1}{4}$;

(ii) $P(f < 3) = F(3) = \frac{3}{4}$;

(iii) $P(1 \leq f \leq 3) = F_f(3) - F_f(1) = \frac{1}{4}$;

(c) (i) $P_{(f \geq 1)}(f \geq 3) = \frac{1}{2}$;

(ii) $P_{(f \geq 1)}(f \leq 3) = \frac{1}{2}$.

Problema 3.3.6 *Doi ţintaşi trag asupra aceleeaşi ţinte, numărul de puncte obţinute la o singură tragere fiind o variabilă aleatoare cu legea de repartiţie* $f_i, i = 1, 2$, *unde* $f_1 : \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ *şi* $f_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.5 & 0,3 \end{pmatrix}$.
Să se determine distribuţia sumei punctelor realizate de cei doi ţintaşi.

<u>Răspuns:</u> $f = f_1 + f_2 : \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.04 & 0,26 & 0.46 & 0,24 \end{pmatrix}$.

Problema 3.3.7 *Fie ecuaţia dreptei* $(d) : ax + by + c = 0$, *unde parametrii* a, b, c *se determină prin aruncarea unui zar. Să se determine probabilitatea ca punctul* $A(-1, 1)$ *să aparţină dreptei* (d).

<u>Răspuns:</u> Variabilele aleatoare corespunzătoare determinării coeficienţilor a, b, c au distribuţia $f_i : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3.$
Obţinem că $P(-f_1 + f_2 + f_3 = 0) = \frac{5}{72}$.

Problema 3.3.8 *În experienţa aruncării unei monede considerăm* f *variabila aleatoare ce atribuie zero puncte la obţinerea stemei, respectiv un punct la obţinerea banului. De asemenea, fie* g *variabila aleatoare ce reprezintă numărul de puncte obţinute prin aruncarea unui zar. Să se scrie tabelele de repartiţie ale variabilelor aleatoare* $f, g, f+g, f^2, |f-g|, max(f, g), min(f, g)$.

<u>Răspuns:</u>

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$f + g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$f^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$|f-g| : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}, \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

Problema 3.3.9 *Fie variabilele aleatoare cu distribuţiile*

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Se cere:

(a) distribuţia variabilei aleatoare $f+g$;

(b) distribuţia variabilei aleatoare $f \cdot g$;

(c) distribuţia variabilei aleatoare f^2.

Răspuns: (a)

$$f+g : \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0,04 & 0,13 & 0,39 & 0,37 & 0,07 \end{pmatrix}$$

(b)

$$f \cdot g : \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 12 & 15 & 18 \\ 0,04 & 0,05 & 0,01 & 0,08 & 0,1 & 0,3 & 0,35 & 0,07 \end{pmatrix}$$

(c)

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Problema 3.3.10 *Fie variabilele aleatoare independente*

$$f : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \alpha + \frac{1}{6} & \beta + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2\alpha - \beta & 12\alpha^2 \end{pmatrix}$$

Să se determine valorile parametrilor reali α şi β şi să se scrie tabloul de repartiţie al variabilei aleatoare $f \cdot g$.

Răspuns: $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = 0$; $f \cdot g : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

Problema 3.3.11 *Fie ρ densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare f:*

$$\rho(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & \textit{pentru} \quad x \in [0, \infty) \\ 0 & \textit{pentru} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Să se determine parametrul k şi să se calculeze $P(f > 1)$.

Răspuns: $k = 3$; $P(f > 1) = 1 - \frac{1}{e^3}$.

Problema 3.3.12 *Fie variabila aleatoare f cu densitatea de repartiţie*

$$\rho_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \textit{pentru} \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & \textit{pentru} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

Se cere:

(a) să se afle funcţia de repartiţie corespunzătoare;

(b) să se determine densităţile de repartiţie ale variabilelor aleatoare $g = e^f$ şi $h = 2f^2 + 1$.

Răspuns: (a) $F_f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{pentru} \quad x \in (-\infty, -1] \\ \frac{x+1}{2} & \textit{pentru} \quad x \in (-1, 1] \\ 1 & \textit{pentru} \quad x \in (1, \infty) \end{cases}$

$$(b)\ F_g(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, \frac{1}{e}] \\ \frac{\ln x+1}{2} & pentru \quad x \in (\frac{1}{e}, e] \\ 1 & pentru \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$$

$$\rho_g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & pentru \quad x \in (\frac{1}{e}, e) \\ 0 & pentru \quad x \in (-\infty, \frac{1}{e}] \cup [e, \infty) \end{cases}$$

$$\rho_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2(x-1)}} & pentru \quad x \in (\frac{1}{e}, e) \\ 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty) \end{cases}$$

Problema 3.3.13 *Se consideră variabila aleatoare f a cărei densitate de probabilitate este*

$$\rho(x) = \begin{cases} a + bx^2 & pentru \quad x \in [0,1] \\ 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

Dacă $M(f) = \frac{3}{5}$, să se găsească valorile parametrilor a şi b.

Răspuns: $a = -0,6$; $b = 1,2$.

Problema 3.3.14 *Fie variabilele aleatoare independente*

$$f : \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, g : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

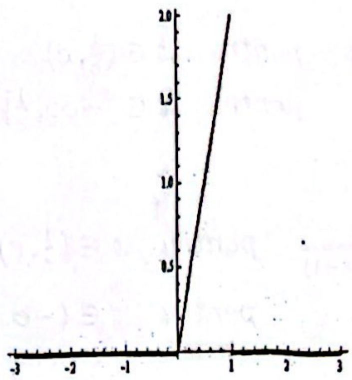
Să se calculeze:

(a) $M(f), M(g), M_2(f), M_2(g), D^2(f), D^2(g)$,

(b) $M(h_1), D^2(h_1), M(h_2), D^2(h_2)$, unde $h_1 = f + g, h_2 - 4f - 3g$.

Răspuns: (a) $M(f) = 1, M(g) = 2, M_2(f) = 3, M_2(g) = \frac{9}{2}, D^2(f) = 2, D^2(g) = \frac{1}{2}$. (b) $M(h_1) = 3, D^2(h_1) = \frac{5}{2}, M(h_2) = -2, D^2(h_2) = \frac{73}{2}$.

Problema 3.3.15 *O variabilă aleatòre f urmează o lege de distribuţie a cărei densitate este dată graficul de mai jos.*



Se cere:

(a) să se determine expresia analitică a densităţii de repartiţie;

(b) dispersia;

(c) $P(\frac{1}{4} < f < \frac{1}{2})$, $P_{(f<\frac{1}{2})}(f > \frac{3}{4})$.

<u>Răspuns:</u> (a) $\rho(x) = \begin{cases} 2x & pentru \quad x \in [0,1] \\ 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{cases}$.

(b) $M(f) = \frac{2}{3}, D^2(f) = \frac{1}{18}$.

(c)$P(\frac{1}{4} < f < \frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$, $P_{(f<\frac{1}{2})}(f > \frac{3}{4}) = \frac{7}{12}$.

Problema 3.3.16 *Viaţa în ore a bateriilor telefoanelor mobile este o variabilă aleatoare de densitate de probabilitate*

$$\rho(x) = \begin{cases} a^2 x e^{-ax} & pentru \quad x \in [0, \infty) \\ 0 & pentru \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

,unde $a > 0$. Să se calculeze media de viaţă a bateriei unui telefon mobil.

<u>Răspuns:</u> $M(f) = \frac{2}{a}$.

Problema 3.3.17 *Fie o variabilă aleatoare f cu densitatea de probabilitate $\rho(x) = \frac{1}{x^2+\pi^2}$ (repartiţia Cauchy).*
Să se calculeze $P(0 < f < \pi)$, $P(\pi \leq f < \infty)$ şi $P(f < \pi/f > -\pi)$.

Răspuns: $P(0 < f < \pi) = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{x^2+\pi^2}dx = \frac{1}{\pi}$; $P(\pi \leq f < \infty) = \int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2+\pi^2}dx = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - 1)$; $P(f < \pi/f > -\pi) = \frac{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{x^2+\pi^2}dx}{\int\limits_{-\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2+\pi^2}dx} = \frac{2}{\pi+2}$.

Problema 3.3.18 *S-a constatat că timpul, în ore, până când un calculator se defectează este o variabilă aleatoare continuă a cărei densitate de probabilitate este dată de funcţia*

$$\rho(x) = \begin{cases} ke^{-x/50} & \textit{pentru} \quad x \in [0, \infty) \\ 0 & \textit{pentru} \quad x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Care este probabilitatea ca un calculator să funţioneze între 50 şi 100 de ore, înainte de a se defecta? Care este probabilitatea de a funcţiona fără oprire mai puţin de 100 ore?

Răspuns: $k = \frac{1}{50}$; $P(50 < f < 100) = 50^2\frac{e^2-1}{e}$; $P(f < 100) = \frac{50}{e^2}$.

Problema 3.3.19 *Fie variabila f asociată experienţiei aruncării unei monede; f ia valoarea 0, dacă aruncând moneda obţinem banul şi 1 dacă obţinem stema. Să se calculeze media şi dispersia variabilei aletoare f. Aruncând simultan 10 monede, să notează cu g variabila aleatoare a punctelor obţinute. Să se calculeze media şi dispersia variabilei aletoare g.*

Răspuns:

$$f_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; M(f_1) = \frac{1}{2}; f_1^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; M(f_1^2) = \frac{1}{2}; D^2(f) = \frac{1}{4}$$

$$g = \sum_{i=1}^{10} f_i, M(g) = \sum_{i=1}^{10} M(f_i) = 5; D^2(g) = \sum_{i=1}^{10} D^2(f_i) = \frac{5}{2}.$$

Problema 3.3.20 *Să se calculeze media şi dispersia variabilei aleatoare:*

(a)

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix};$$

(b)

$$g : \begin{pmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \dots & C_n^n \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix};$$

(c)

$$h : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2^n}C_n^0 & \frac{1}{2^n}C_n^1 & \dots & \frac{1}{2^n}C_n^n \end{pmatrix};$$

(d)

$$i : \begin{pmatrix} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 & 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 & \dots & n(n+1)(n+2)(n+3) \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix};$$

(e)

$$j : \begin{pmatrix} \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} & \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} & \dots & \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix};$$

Răspuns: (a)$M(f) = \frac{n+1}{2}$; (b) $M(g) = \frac{2^n}{n+1}$;

(c) $M(h) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\frac{k+1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{2^n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n(n+1)}$

(d) $M(i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{n} = \frac{4!}{n} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$;

(e) $M(j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{3n}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$

Problema 3.3.21 *Dacă* $M(f) = 2$ *şi* $M(f^2) = 4$, *să se calculeze* $M[(1+2f)^2]$ *şi* $M[f^2 + (f+2)^2]$.

Răspuns: $M[(1+2f)^2]=25$; $M[f^2+(f+2)^2]=16$.

Problema 3.3.22 *Se aruncă două zaruri. Să se scrie funcția caracteristică a variabilelor aleatoare f ce reprezintă suma numărului de puncte obținute.*

Răspuns: $\varphi_f(t)=M(e^{itf})=M(e^{it(f_1+f_2)})=M(e^{itf_1})M(e^{itf_2})=[\frac{1}{6}\sum\limits_{k=1}^{6}e^{itk}]^2$, f_i-variabila aleatoare ce dă numărul de puncte la aruncarea zarului $i, i=1,2$.

Problema 3.3.23 *Fie funcțiile caracteristice:*

(a) $\varphi(t)=\frac{1}{4}(1+e^{it})^2$;

(b) $\varphi(t)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}e^{it})^{-2}$.

Să se determine funcțiile de repartiție corespunzătoare.

Răspuns: a)

$$F_1(x)=\begin{cases}0 & \textit{pentru} \quad x\in(-\infty,0)\\ \frac{1}{4} & \textit{pentru} \quad x\in[0,1)\\ \frac{3}{4} & \textit{pentru} \quad x\in[1,2)\\ 1 & \textit{pentru} \quad x\in[2,\infty)\end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}0 & \textit{pentru} \quad x\in(-\infty,0)\\ \frac{1}{2} & \textit{pentru} \quad x\in[0,1)\\ \dots & \\ \sum\limits_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^{k+1}} & \textit{pentru} \quad x\in[n-2,n-1), n=2,3,\dots,\end{cases}$$

Problema 3.3.24 *Un produs este clasat în funcție de numărul defectelor ce le prezintă și fabrica care îl produce. Fie f și g variabilele aleatoare ce descriu numărul de defecte pe unitate, luând valori posibile $0,1,2,3$, respectiv numărul fabricii, cu valori posibile 1 și 2. Dacă $h=(f,g)$ vectorul aletor bidimensional cu repartiția*

$g \setminus f$	0	1	2	3
1	1/8	1/16	3/16	1/8
2	1/16	1/16	1/8	1/4

se cere:

(a) să se determine tabloul de distribuţie a lui f, respectiv g;

(b) să se calculeze $M(f)$, $M(g)$, $D^2(f)$, $D^2(g)$ şi $cov(f, g)$.

Răspuns: (a)

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3/16 & 2/16 & 5/16 & 6/16 \end{pmatrix}, \quad g : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8/16 & 8/16 \end{pmatrix}$$

(b) $M(f) = \frac{30}{16}; M(g) = \frac{24}{16}, D^2(f) = \frac{316}{256}; D^2(g) = \frac{1}{4}; cov(f, g) = \frac{10}{256}$

Problema 3.3.25 *Fie vectorul $h = (f, g)$ cu repartiţia*

$g \setminus f$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0,1
2	0,3	0,1	0,2

Să se determine coeficientul de corelaţie al variabilelor f şi g. Sunt f şi g variabile aleatoare independente?

Răspuns:

$$f : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,5 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad g : \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad f \cdot g : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0,3 & 0,12 & 0,3 & 0,2 & 0,18 \end{pmatrix}$$

$cov(f, g) = 0 \Rightarrow \rho(f, g) = 0.$

Variabilele f şi nu sunt independente pentru că $P(f - 1, g - -1) \neq P(f = 1) \cdot P(g = -1)$.

Problema 3.3.26 *Fie variabila aleatoare f astfel încât $D^2(f) < \infty$. Să se estimeze probabilitatea mulţimii*

$$A = \{\omega / |f(\omega) - M(f)| < 5D(f)\}$$

unde $D(f) = \sqrt{D^2(f)}$ este abaterea medie pătrată a variabilei aleatoare f.

<u>Răspuns:</u>

$P(|f - M(f)| < 5D(f)) \geq \frac{24}{25}$

Problema 3.3.27 *Să presupunem că o variabilă aleatoare f are media si dispersia egale cu 20. Ce putem spune despre $P(0 \leq f \leq 40)$?*

<u>Răspuns:</u>

$P(0 < f < 40) = P(|f - 20| < 20) = 1 - P(|f - 20| \geq 20) \geq 1 - \frac{20}{20^2} = \frac{19}{20}$.

Problema 3.3.28 *De-a lungul anilor un profesor a observat că notele studenţilor săi sunt o variabilă aleatoare de medie 6. Să se determine limita superioară a probablilităţii ca note unui student la examen să depăşească nota 9.*

<u>Răspuns:</u> $P(f \geq 9) \leq \frac{6}{9}$

Capitolul 4

Legi clasice de probabilitate

4.1 Definiţii şi rezultate de bază

4.1.1 Repartiţia binomială (Legea de probabilitate Bernoulli)

Definiţia 4.1.1 *Spunem că o variabilă aleatoare f are o distribuţie binomială cu parametrii $n \in \mathbb{N}$ şi $p \in (0,1)$, şi notăm $f \in B(n,p)$, dacă f ia valorile k, $k = 0, 1, \ldots, n$, cu probabilităţile*

$$P_n(k) = P(f = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \; q = 1 - p \; ,$$

adică are distribuţia dată prin tabloul

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots n \\ q^n & C_n^1 p \; q^{n-1} & \ldots & C_n^k p^k q^{n-k} & \ldots p^n \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.1.2 *Dacă f este o variabilă aleatoare binomială de parametrii n şi p atunci aceasta are valoarea medie $M(f) = n \cdot p$ şi dispersia $D^2(f) = n \cdot p \cdot q$, unde $q = 1 - p$.*

4.1.2 Repartiţia Poisson (Legea evenimentelor rare)

Definiţia 4.1.3 *Repartiţia de probabilitate discretă, determinată de probabilităţile*

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \; k = 0, 1, 2, \dots$$

se numeşte repartiţia lui Poisson de parametru λ, şi notăm $f \in P(\lambda)$, adică are distribuţia dată prin tabloul

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ e^{-\lambda} & \frac{\lambda}{1!}\, e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!}\, e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.1.4 *Dacă f este o variabilă aleatoare de repartiţie Poisson, de parametru λ, atunci aceasta are valoarea medie $M(f) = \lambda$ şi dispersia $D^2(f) = \lambda$.*

4.1.3 Repartiţia hipergeometrică

Să considerăm schema bilei nerevenite. Fie U o urnă cu a bile albe, b bile negre şi $a + b = N$. Din urnă se fac n extracţii succesive fără a pune bila extrasă înapoi în urnă. Să notăm cu f variabila aleatoare care ia ca valori numărul de bile albe extrase. Presupunem $n \leq min(a, b)$.

Definiţia 4.1.5 *Spunem că variabila aleatoare f are o distribuţie hipergeometrică dacă f ia valorile k, unde $max(n - b, 0) \leq k \leq min(a, n)$, cu probabilităţile*

$$P_n(k) = P(f = k) = \frac{C_a^k C_{N-a}^{n-k}}{C_N^n},$$

adică are distribuţia dată prin tabloul

$$f : \begin{pmatrix} 0\ 1\ 2 \dots & k & \dots n \\ \dots\dots & \frac{C_a^k C_{N-a}^{n-k}}{C_N^n} & \dots \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.1.6 *Valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare de repartiţie hipergeometrică f sunt date prin*

$$M(f) = n \cdot p \ , \ D^2(f) = n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1},$$

unde $p = \frac{a}{a+b}$, *iar* $q = \frac{b}{a+b}$, *deci* $p + q = 1$.

4.1.4 Repartiţia uniformă

Definiţia 4.1.7 *Spunem că o variabilă aleatoare continuă f are o repartiţie uniformă pe segmentul $[a, b]$ dacă densitatea ei de repartiţie este dată prin*

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ pentru } x \in [a, b], \\ 0 \quad \text{pentru } x < a, \ x > b, \end{cases}$$

Teorema 4.1.8 *(i) Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare uniforme f pe segmentul $[a, b]$ este*

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{pentru } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ pentru } a < x \leq b, \\ 1 \quad \text{pentru } x > b, \end{cases}$$

(ii) Valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare uniforme f sunt date prin

$$M(f) = \frac{a+b}{2}, \ D^2(f) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

4.1.5 Repartiţia normală (Legea de probabilitate Gauss-Laplace)

Definiţia 4.1.9 *Spunem că o variabilă aleatoare f continuă are o repartiţie normală, de parametrii m şi σ^2, şi notăm $f \in N(m, \sigma^2)$, dacă densitatea sa* *de repartiţie este dată de*

$$\rho(x, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.1.1}$$

Observaţia 4.1.10 *Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare normale $f \in N(m, \sigma^2)$ este dată prin*

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 4.1.11 *Dacă f este o variabilă aleatoare normală de parametrii m şi σ^2, atunci aceasta are valoarea medie $M(f) = m$ şi dispersia $D^2(f) = \sigma^2$.*

Definiţia 4.1.12 *Spunem că variabilă aleatoare f are o repartiţie normală redusă dacă densitatea sa de repartiţie se obţine din (4.1.1) făcând $m = 0$ şi $\sigma = 1$, adică are ca densitate de repartiţie funcţia:*

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Observaţia 4.1.13 (*i*) *Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare normale reduse este dată prin*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \ x \in \mathbb{R}$$

şi ea este cunoscută sub numele de funcţia Laplace;

(*ii*) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.1.14 *Dacă f este o variabilă aleatoare normală de parametrii m şi σ^2 , atunci $g = \frac{f-m}{\sigma} \sim N(0,1)$ şi*

$$P(a < f < b) = \Phi(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-m}{\sigma}).$$

($a < b$ numerele reale date)

4.2 Probleme rezolvate

Problema 4.2.1 *Într-o firmă, numărul zilelor lucrătoare într-o perioadă de timp (lună, an, etc.) în care ritmul zilnic este îndeplinit, reprezintă o variabilă aleatoare. Probabilitatea ca acest ritm zilnic să fie realizat este* $p = \frac{2}{5}$. *Se cere legea de repartiţie, valoarea medie şi dispersia acestei variabile aleatoare pe o perioadă de o lună, formată din 22 de zile lucrătoare.*

Soluţie:

Observăm că variabila aleatoare din enunţ respectă legea binomială de parametrii $n = 22$ şi $p = \frac{2}{5}$ şi convenim să o notăm cu f, adică $f \in B(22, \frac{2}{5})$. Atunci conform Definiţiei 4.1.1 şi a Teoremei 4.1.2 avem $q = \frac{3}{5}$ şi

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & 22 \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{22} & C_{22}^{1}\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{21} & \ldots & C_{22}^{k}\left(\frac{2}{5}\right)^{k}\left(\frac{3}{5}\right)^{22-k} & \ldots & \left(\frac{2}{5}\right)^{22} \end{pmatrix},$$

$$M(f) = n \cdot p = 22 \cdot \frac{2}{5} = \frac{44}{5} = 8{,}8\ ,$$

$$D^2(f) = n \cdot p \cdot q = 22 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{132}{25} = 5,28\ .$$

Problema 4.2.2 *Se aruncă un zar de* 50 *de ori. Fie* f *numărul de apariţii ale feţei cu* 3 *puncte. Se cere:*

(i) Să se scrie repartiţia variabilei aleatoare f;

(ii) Să se calculeze probabilitatea $P(f = 2)$;

(iii) Să se calculeze probabilitatea ca f *să ia cel mult valoarea* 2;

(iv) Să se calculeze valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare f.

Soluţie:

Dacă considerăm evenimentul

$A =$ apare faţa cu numărul 3,

cu $P(A) = \frac{1}{6}$ şi $P(\overline{A}) = \frac{5}{6}$, atunci observăm că variabila aleatoare f respectă legea binomială de parametrii $n = 50$ şi $p = P(A)$, adică $f \in B(50, \frac{1}{6})$.

(i) Din Definiţia 4.1.1 avem $q = P(\overline{A})$ şi

$$f: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & 50 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^{50} & C_{50}^{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{49} & \dots & C_{50}^{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{50-k} & \dots & \left(\frac{1}{6}\right)^{50} \end{pmatrix}.$$

(ii) $P(f=2) = C_{50}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{48} = 49 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{50}$.

(iii) $P(f \le 2) = P((f=0) \cup (f=1) \cup (f=2)) = \left(\frac{5}{6}\right)^{50} + C_{50}^{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{49} + C_{50}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{48} = \left(\frac{5}{6}\right)^{50} + 10 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{50} + 49 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{50} = 60 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{50}$.

(iv) Din Teorema 4.1.2 obţinem că

$$M(f) = n \cdot p = 50 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{3} = 8,33\,,$$

$$D^2(f) = n \cdot p \cdot q = 50 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{18} = 6,94\,.$$

Problema 4.2.3 *Fie variabilele aleatoare independente f şi g cu repartiţiile binomiale $f \in B(3, \frac{1}{3})$ şi $g \in B(4, \frac{1}{2})$. Să se calculeze probabilitatea ca $f = g$.*

Soluţie:

Cum $f \in B(3, \frac{1}{3})$ şi $g \in B(4, \frac{1}{2})$, din Definiţia 4.1.1, observăm că ele au distribuţiile date prin

$$f: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{3} & C_{3}^{1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2} & C_{3}^{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\frac{2}{3} & \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \end{pmatrix}$$

şi

$$g: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{4} & C_{4}^{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} & C_{4}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} & C_{4}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \end{pmatrix}.$$

Evenimentul cerut se mai poate scrie

$$\{f=g\} = \{f=0, g=0\} \cup \{f=1, g=1\} \cup \{f=2, g=2\} \cup \{f=3, g=3\} =$$

$$= \bigcup_{k=0}^{3} \{f=k, g=k\}$$

şi cum evenimentele $\{f = k\}$ şi $\{g = k\}$ sunt incompatibile şi independente, avem

$$P(f = g) = \sum_{k=0}^{3} P(f = k, g = k) = \sum_{k=0}^{3} P(f = k)P(g = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{3} C_3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k} C_4^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_3^1 \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 C_4^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^3 +$$

$$+ C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3}\, C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{2}{9}\,.$$

Problema 4.2.4 *O firmă de telecomunicaţii are 200 de calculatoare pentru uzul intern. Se presupune că numărul calculatoarelor defecte într-o zi este o variabilă aleatoare f, care are o repartiţie Poisson de parametru $\lambda = 5$. Se cere să se calculeze:*

(i) Probabilitatea ca cel puţin 196 de calculatoare să fie în activitate într-o anumită zi;

(ii) Numărul de calculatoare care pot fi în activitate într-o anumită zi, cu o probabilitate de 0,7;

(iii) Să se calculeze valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare f.

Soluţie:

Cum $f \in P(5)$, atunci conform Definiţiei 4.1.3, ea are distribuţia

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \\ e^{-5} & \frac{5}{1!}\, e^{-5} & \frac{5^2}{2!}\, e^{-5} & \dots & \frac{5^k}{k!}\, e^{-5} & \dots \end{pmatrix}.$$

(i) Dacă cel puţin 196 de calculatoare sunt în activitate, atunci cel mult 4 sunt defecte, adică probabilitatea cerută este

$$P(f \le 4) = P((f = 0) \cup (f = 1) \cup (f = 2) \cup (f = 3) \cup (f = 4)) =$$

$$= P(f = 0) + P(f = 1) + P(f = 2) + P(f = 3) + P(f = 4) =$$

$$= e^{-5}(1 + \frac{5}{1!} + \frac{5^2}{2!} + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^4}{4!}) = e^{-5}\frac{1569}{24} \approx 0,4405 \; (e \approx 2,7181).$$

(ii) Trebuie determinat numărul de calculatoare defecte astfel ca $P(f \leq k) \geq 0,7$. Astfel, se ţine seama că mai sus s-a obţinut $P(f \leq 4) \approx 0,4405 < 0,7$ şi se calculează $P(f \leq k)$, $k \geq 5$ până se obţine o probabilitate mai mare ca $0,7$.

Deoarece

$$P(f \leq 5) = P(f \leq 4) + P(f = 5) \approx 0,6160 < 0,7\,,$$

$$P(f \leq 6) = P(f \leq 5) + P(f = 6) \approx 0,7622 > 0,7\,,$$

rezultă că cel mult 6 calculatoare sunt defecte cu o probabilitate de $0,7$ şi cel puţin 194 de calculatoare sunt în activitate.

(iii) Din Teorema 4.1.4 obţinem că $M(f) = D(f) = 5$.

Problema 4.2.5 *Fie un lot de* 300 *de aparate, din care* 18% *nu se încadează în limitele de funcţionare admise. Alegând la întâmplare* 15 *aparate se cere:*

(i) *Să se stabilească legea de repartiţie a variabilei aleatoare care reprezintă numărul de aparate, din cele* 15*, care nu se încadrează în limitele de funcţionare;*

(ii) *Să se calculeze valoarea medie şi dispersia acestei variabile aleatoare.*

<u>Soluţie:</u>

(i) Variabila aleatoare cerută urmează o lege hipergeometrică, unde

$$a = \frac{18}{100} \cdot 300 = 54,\; b = 300 - 54 = 246 \text{ şi } k = 0, 1, 2, \ldots, 15.$$

Din Definiţia 4.1.5 obţinem că

$$P_{15}(k) = P(f = k) = \frac{C_{54}^{k} C_{246}^{15-k}}{C_{300}^{15}}\,,$$

şi f este descrisă de tabloul

$$f : \begin{pmatrix} 0 \; 1 \; 2 \ldots & k & \ldots 15 \\ . \; . \; . \ldots & \frac{C_{54}^{k} C_{246}^{15-k}}{C_{300}^{15}} & \ldots \; . \end{pmatrix}.$$

(ii) Conform Teoremei 4.1.6, avem

$$M(f) = n \cdot p = n \cdot \frac{a}{a+b} = 15 \cdot \frac{54}{300} = 2{,}7\ ,$$

$$D^2(f) = n \cdot p \cdot q \cdot \frac{N-n}{N-1} = 15 \cdot \frac{54}{300} \cdot \frac{246}{300} \cdot \frac{300-15}{300-1} = 2{,}11\ .$$

Problema 4.2.6 *O variabilă aleatoare f se numşte uniform distribuită dacă are densitatea de repartiţie*

$$\rho(x) = \begin{cases} k & pentru \quad x \in [a,b] \\ 0 & pentru \quad x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty) \end{cases} \quad a < 0, b > 0$$

Se cere:

(i) să se determine parametrul real k;

(ii) să se determine funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare f;

(iii) să se calculeze caracteristicile numerice asociate variabilei f;

(iv) să se determine expresia analitică a funcţiei caracteristice asociate variabilei aleatoare f.

Soluţie:

(i) Din condiţia $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(u)du = 1$, deducem că $k = \frac{1}{b-a}$.

(ii) Ştim că $F_f(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \rho(u)du$.

Astfel, dacă $x < a$ atunci $F_f(x) = \int\limits_{\infty}^{x} 0du = 0$.

Dacă $a \leq x < b$, atunci $F_f(x) = \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \frac{x-a}{b-a}$.

Dacă $x \geq b$, atunci $F_f(x) = \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a} = 1$.

În concluzie,

$$F_f(x) = \begin{cases} 0 & pentru \quad x \in (-\infty, a) \\ \frac{x-a}{b-a} & pentru \quad x \in [a, b) \\ 1 & pentru \quad x \in [b, \infty) \end{cases}$$

(iii) Caracteristicile numerice asociate variabilei aleatoare f se vor calcula după cum urmează:

- Valoarea medie cu formula (3.1.9). Obţinem

$$M(f) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}$$

- Momentul de ordin k se calculează cu formula (3.1.11). Deducem că

$$M_k(f) = \int_a^b x^k\frac{1}{b-a}dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$$

- Momentul absolut de ordin k se deduce din formula (3.1.12). Avem

$$M_k(f) = \int_a^b |x|^k\frac{1}{b-a}dx = \int_a^0 (-x)^k\frac{1}{b-a}dx + \int_0^b x^k\frac{1}{b-a}dx = \frac{[b^{k+1}+(-a)^{k+1}]}{(k+1)(b-a)}$$

- Momentul centrat de ordin k se determină cu formula (3.1.13). Rezultă

$$m_k(f) = \int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^k\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{(k+1)(b-a)}[(\frac{b-a}{2})^{k+1}-(\frac{a-b}{2})^{k+1}]$$

- Dispersia se determină ca fiind momentul central de ordin 2. Obţinem

$$D^2(f) = \frac{1}{3(b-a)}[(\frac{b-a}{2})^3-(\frac{a-b}{2})^3]$$

- Abaterea medie pătrată se calulează cu ecuaţia (3.1.15). Astfel, avem

$$D(f) = \sqrt{\frac{1}{3(b-a)}[(\frac{b-a}{2})^3 - (\frac{a-b}{2})^3]}$$

(iv) Funcţia caracteristică a variabilei aleatoare f este dată de formula (3.1.18). Obţinem $\varphi(t) = \int\limits_a^b e^{itx}dx = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$, pentru $x \in [a,b]$. Deci,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)} & pentru \quad t \in [a,b] \\ 0 & pentru \quad t \in (-\infty, a) \cup (b, \infty) \end{cases} \quad a < 0, b > 0$$

Problema 4.2.7 *O variabilă aleatoare f este repartizată uniform în intervalul $[800, 1200]$. Să se determine probabilitatea ca $f \in [900, 1000]$.*

Soluţie:

Densitatea de repartiţie a variabilei aleatoare f este

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{400} \; pentru \; x \in [800, 1200], \\ \\ 0 \quad pentru \; x < 800, \; x > 1200, \end{cases}$$

În consecinţă, $P(f \in [900, 1000]) = \int\limits_{900}^{1000} \rho(x)dx = \frac{1}{4}$.

Problema 4.2.8 *Se consideră o variabilă aleatoare f de repartiţie normală redusă ($f \sim N(0,1)$). Să se determine z_0 astfel încât*

(a) $P(f > z_0) = 0,5$

(b) $P(f < z_0) = 0,8665$

(c) $P(-z_0 < f < z_0) = 0,9$

Soluţie:

(a) $P(f > z_0) = 1 - \Phi(z_0) \Rightarrow \Phi(z_0) = 0,5 \Rightarrow z_0 = 0.$

(b) $P(f < z_0) = 0,8665 \Rightarrow \Phi(z_0) = 0,8665 \Rightarrow z_0 = 1,11$

(c) $P(-z_0 < f < z_0) = 0,9 \Rightarrow \phi(z_0) - \Phi(-z_0) = 0,9$. Folosind faptul că $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, obţinem că $2\Phi(z_0) - 1 = 0,9 \Rightarrow \Phi(z_0) = 0,95 \Rightarrow z_0 = 1,65$.

Problema 4.2.9 *Fie variabila aleatoare $f \in N(1000; 20^2)$. Să se calculeze $P(f \in (940, 1040))$.*

Soluţie:

Variabila aleatoare f are distribuţie normală de parametrii $m = 1000$, $\sigma = 20$. Conform teoremei (4.1.14) avem că

$$P(940 < f < 1040) = \Phi(\frac{1040 - 1000}{20}) - \Phi(\frac{940 - 1000}{20}),$$

unde funcţia $\Phi(x)$ este funcţia Laplace introdusă în (4.1.13). Obţinem că $P(940 < f < 1040) = \Phi(2) - \Phi(-3)$. Din tabelul de valori al funcţiei Laplace se deduce că $\Phi(2) = 0,9772$, iar $\Phi(-3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0,9987 = 0,0013$, deci $P(940 < f < 1040) = 0,9759$.

Problema 4.2.10 *O universitate admite 20% din candidaţii înscrişi. Testul de admitere are un punctaj ce urmează o repartiţie normală cu media 500 şi abaterea standard $\sigma = 200$. Să se determine punctajul minim necesar unui candidat pentru a putea fi declarat admis.*

Soluţie:

Fie f variabila aleatoare ce reprezintă punctajul obţinut de un candidat la testul de admitere. Avem că $f \sim N(500, 200)$ şi $g = \frac{f-500}{200} \sim N(0,1)$. Notăm cu x punctajul minim de admitere, iar din ipoteza problemei $P(f < x) = 1 - \frac{20}{100} = 0,8$. Dar $P(f < x) = P(g < \frac{x-500}{100}) = 0,8$. Deci, $\Phi(\frac{x-500}{200}) = 0.8 \Rightarrow \frac{x-500}{200} = 0,85 \Rightarrow x = 670$.

Problema 4.2.11 *Variabila aleatoare f ce indică eroarea de măsurare a unui aparat respectă o repartiţie normală cu abaterea medie pătrată 3. Să* *se determine probabilitatea ca din 3 măsurători independente, eroarea să aparţină cel puţin intervalului* $(0; 2,4)$.

Soluţie:

Definim evenimentul
A =din 3 măsurători independente, eroarea să aparţină cel puţin intervalului $(0; 2,4)$. Avem că $P(A) = 1 - P(CA)$, unde $P(CA) = (1 - P(0 < f < 2,4))^3$, iar $P(0 < f < 2,4) = \frac{1}{2}[\Phi(\frac{2,4}{3}) - \Phi(\frac{0}{3})] = \frac{1}{2}\Phi(0,8) = 0,2881$. În final obţinem că $P(A) = 0,6392$

4.3 Probleme propuse

Problema 4.3.1 *Un trăgător trage asupra unei ţinte trei focuri. Probabilitatea ca o lovitură oarecare să atingă ţinta este* $0,6$. *Pentru fiecare lovitură reuşită se primesc* 3 *puncte. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare* f *a numărului de puncte câştigate.*

Răspuns:

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ (0,4)^3 & 3 \cdot (0,4)^2 \cdot 0,6 & 3 \cdot (0,6)^2 \cdot 0,4 & (0,6)^3 \end{pmatrix}$$

Problema 4.3.2 *De-a lungul unei şosele sunt* 3 *bariere de cale ferată. Probabilitatea ca o maşină care circulă pe şosea să găsească deschise oricare dintre cele trei bariere este* $p = 0,8$. *Dacă se presupune că cele trei bariere funcţionează independent una de alta, să se determine:*

(a) distribuţia variabilei aleatoare ce reprezintă numărul de bariere trecute de o maşină până la întâlnirea primei bariere închise;

(b) să se determine funcţia sa de repartiţie şi să se reprezinte grafic.

Răspuns: (a)

$$f:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ (0,2)^3 & C_3^1\cdot 0,8\cdot(0,2)^2 & C_3^2\cdot(0,8)^2\cdot 0,2 & (0,8)^3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$F_f(x)=\begin{cases} 0 & pentru \quad x\in(-\infty,0] \\ 0,2 & pentru \quad x\in(0,1] \\ 0,36 & pentru \quad x\in(1,2] \\ 0,488 & pentru \quad x\in(2,3] \\ 1 & pentru \quad x\in(3,\infty) \end{cases}$$

Problema 4.3.3 *Un ţintaş trage 100 de focuri asupra unei ţinte. Ştiind că nimereşte ţinta cu probabilitatea $p=\frac{3}{4}$, să se arate că probabilitatea ca ţintaşul să nimerească de mai multe ori ţinta decât să nu o nimerească este mai mare decât $\frac{97}{100}$.*

Răspuns: $f\sim B(\frac{3}{4},100), M(f)=75, D^2(f)=\frac{75}{4}$. Inegalitatea lui Chebişev: $P(|f-75|<25)\geq 1-\frac{75/4}{25}\geq\frac{97}{100}$

Problema 4.3.4 *O urnă conţine 3 bile albe şi 5 bile negre. Se extrag 3 bile, fără a repune bila extrasă. Dacă consideră f variabila aleatoare ce desemnează numărul bilelor albe extrase, să se determine tabloul de repartiţie a lui f.*

Răspuns:

$$f:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{C_3^0C_5^3}{C_8^3} & \frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3} & \frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3} & \frac{C_3^3C_5^0}{C_8^3} \end{pmatrix}$$

Problema 4.3.5 *Într-un laborator de analiză a produselor alimentare lucrează 4 bărbaţi şi 3 femei. Cu scopul unei misiuni speciale trebuie să se* *selecteze în mod aleator o echipă de 2 persoane. Să se determine tabloul de distribuţie al variabilei aleatoare f ce desemnează numărul de femei ce fac parte din echipa selecţionată.*

Răspuns: $P(f=0)=\frac{C_3^0 \cdot C_4^2}{C_7^2}$, $P(f=1)=\frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{C_7^2}$, $P(f=2)=\frac{C_3^2 \cdot C_4^0}{C_7^2}$

$$f:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{6}{21} & \frac{12}{21} & \frac{3}{21} \end{pmatrix}$$

Problema 4.3.6 *O variabilă aleatoare f urmează o distribuţie Poisson de parametru $\lambda = 2$. Să se găsescă*

(a) $P(f=2)$
(b) $P(f \geq 2)$
(c) $P(f < 2)$
(d) $P_{(f \geq 1)}(f > 2)$.

Răspuns:

(a) $P(f=2)=2e^{-2}$
(b) $P(f \geq 2)=\sum\limits_{n=2}^{\infty} p(n)=1-p(0)-p(1)=1-3e^{-2}$
(c) $P(f<2)=3e^{-2}$
(d) $P_{(f \geq 1)}(f>2)=\frac{P(f>2)}{P(f>1)}=\frac{e^2-3}{e^2-2}$.

Problema 4.3.7 *Probabilitatea ca o persoană vaccinată să se imbolnăvească este 0,1. Folosind repartiţia Poisson, să se determine probabilitatea ca cel mult 2 persoane dintr-un total de 30 să se imbolnăvească.*

Răspuns:

$f \sim P(0,1); P(f<2)=P(f=0)+P(f=1)+P(f=2)=1,105e^{-0,1}$

Problema 4.3.8 *O variabilă aleatoare f este repartizată uniform pe intervalul $[0,10]$. Să se calculeze probabilitatea condiţionată $P_{(f \geq 3)}(f \in [1,5])$.*

Răspuns:

$P_{(f\geq 3)}(f \in [1,5]) = \frac{4}{7}$

Problema 4.3.9 *Timpul necesar unui camion de a transporta marfa între două oraşe este o variabilă aleatoare uniform distribuită în intervalul* $[60, 90]$. *Care este probabilitatea ca să fie nevoie de mai mult de 70 minute, considerând faptul că în general sunt necesare mai mult de 65 minute.*

Răspuns:

$P_{(f>65)}(f > 70) = \frac{4}{5}$

Problema 4.3.10 *Fie variabila aleatoare* $f \in N(m, \sigma^2)$. *Să se calculeze probabilitatea ca* $P(m - \sigma < f < m + \sigma)$.

Răspuns:

$P(m - \sigma < f < m + \sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826$.

Problema 4.3.11 *Se consideră o variabilă aleatoare* f *ce respectă o repartiţie normală de parametrii* $m = 3$ *şi* $\sigma = 2$. *Se cere*

(a) $P(0 \leq f \leq 4)$

(b) $P(|f| < 2)$

(c) $P_{(0<f<2)}(-1 \leq f < 2)$.

Răspuns:

(a) $P(0 \leq f \leq 4) = \Phi(\frac{1}{2}) + \Phi(\frac{3}{2}) - 1 = 0,6247$

(b) $P(|f| < 2) = \Phi(\frac{5}{2}) - \Phi(\frac{1}{2}) = 0,3023$

(c) $P_{(0<f<2)}(-1 \leq f < 2) = 1$.

Problema 4.3.12 *O companie cheltuieşte săptămânal pe întreţinere şi reparaţii o suma de bani ce urmează o distribuţie normală de parametrii* $m = 400$ *RON şi* $\sigma = 20$ *RON. Dacă pentru o anumită săptămână s-a prevăzut suma de 450 RON, care este probabilitatea să fie depăşită această sumă?*

Răspuns:

$S \sim N(400, 20^2), \frac{S-400}{20} \sim N(0,1); P(S > 450) = 1 - P(S < 450) = 1 - \Phi(2,5) = 0,0062.$

Problema 4.3.13 *O fabrică produce lanţuri cu o lungime ce respectă o distribuţie normală cu media de $m = 850mm$ şi abaterea standard $\sigma = 10mm$.*

(a) Să se determine probabilitatea ca un lanţ ales la întâmplare să aibă lungime între $845mm$şi $855mm$.

(b) Să se determine constanta Cmm astfel încât un lanţ ales aleator să aibă lungimea mai mică decât Cmm cu probabilitatea $0,9394$.

Răspuns:

(a) $P(845 < L < 855) = \Phi(\frac{1}{2}) - \Phi(-\frac{1}{2}) = 0,3830.$

(b) $P(L < C) = 0,9394 \Rightarrow \Phi(\frac{C-850}{10}) = 0,9394 \Rightarrow \frac{C-850}{10} = 1,55 \Rightarrow C = 865,5mm.$

Problema 4.3.14 *Punctajele obţinute de către o grupă de studenţi la un examen respectă o repartiţie normală cu o medie de 78 puncte şi o abatere medie pătrată $\sigma^2 = 36$.*

(a) Care este probabilitatea ca o persoană să obţină un punctaj mai mare de 72?

(b) Care este punctajul minim x_{min} de trecere a testului dacă examinatorul doreşte ca doar 40% dintre studenţi să treacă testul?

(c) Dacă se presupune că punctajul unui student depăşeşte 72 puncte, care este probabilitatea ca scorul lui să depăşească 85?

Răspuns:

(a) $Punctaj \sim N(78, 6^2) \Rightarrow \frac{Punctaj-78}{6} \sim N(0,1).$

$P(Punctaj > 72) = 1 - P(Punctaj < 72) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) = 0,8413$

(b)$P(Punctaj < x_{min}) = 1 - 0,4 = 0,6$. Deci, $\Phi(\frac{x_{min}-78}{6}) = 0,6 \Rightarrow \frac{x_{min}-78}{6} = 0,25 \Rightarrow x_{min} = 79,5$ puncte.

(c) $P_{(Punctaj>72)}(Punctaj > 85) = \frac{P(Punctaj>85)}{P(Punctaj>72)} = \frac{1-P(Punctaj<85)}{1-P(Punctaj<72)} = \frac{1-\Phi(\frac{7}{6})}{1-\Phi(-1)} = \frac{1-0,877}{1-(1-0,8413)} = 0,0146$.

Problema 4.3.15 *Firele de cablu ale unui calculator sunt construite a avea o rezistenţă între $0,15\Omega$ şi $0,18\Omega$. Rezultatele măsurătorilor rezistenţelor produse de o anumită fabrică demonstrează ca acestea urmează o distribuţie normală de medie $m = 0,16$ şi abatere standard $\sigma = 0,05$. Să se determine care este probabilitatea ca o rezistenţă selectată aleator dintr-un lot al fabricii să îndeplinească cerinţele specificate?*

Răspuns:

$P(0,15 < R < 0,18) = \Phi(0,4) - \Phi(-0,2) = 0,2347$.