Capitolul 1

Rezolvarea ecuaţiilor

Definiţia 1.1. Fie x_c o versiune calculată a valorii exacte x. Atunci

$$\textbf{eroarea absolută} = |x_c - x|,$$

şi

$$\textbf{eroarea relativă} = \frac{|x_c - x|}{|x|},$$

dacă această din urmă cantitate există ($x \neq 0$).

Teorema 1.1. *Fie f o funcţie continuă pe $[a, b]$, care satisface $f(a)f(b) < 0$. Atunci f are o rădăcină între a şi b, adică există un număr r care satisface $a < r < b$ şi $f(r) = 0$.*

Algoritmul 1.1 (Metoda bisecţiei).

Dându-se un interval iniţial $[a, b]$ astfel încât $f(a)f(b) < 0$
while $(b - a)/2 > TOL$
    $c = (a + b)/2$
    if $f(c) = 0$, ***stop, end***
    if $f(a)f(c) < 0$
        $b = c$
    else
        $a = c$
    end
end
Intervalul final $[a, b]$ conţine o rădăcină.
Aproximarea rădăcinii este $(a + b)/2$.

Propoziție 1.1. *Dacă $[a, b]$ este intervalul inițial, atunci după n pași ai metodei bisecției, intervalul $[a_n, b_n]$ are lungimea $(b-a)/2^n$. Alegând mijlocul $x_c = (a_n + b_n)/2$ obținem cea mai bună estimare a soluției r, care este la jumătate din lungimea intervalului de soluția adevărată. Rezumând, după n pași din metoda bisecției, avem că*

$$\textit{Eroarea soluției} = |x_c - r| < \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Exercițiul 1.1. Folosiți teorema valorii intermediare pentru a găsi un interval de lungime doi care conține rădăcina pozitivă a ecuației $3x^2 + 2x = 8$. Aplicați metoda bisecției pentru a găsi o aproximare a rădăcinii care se află la cel mult $1/4$ de rădăcina adevărată. Calculați eroarea de aproximare.

Rezolvare. Definim funcția $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$. Avem că $f(0) = -8$, $f(2) = 8$, prin urmare $f(0)f(2) < 0$, și, din Teorema 1.1, rezultă că există o rădăcină r a funcției f pe intervalul $[0, 2]$.

Din Propoziția 1.1, rezultă că trebuie să alegem numărul de pași n al metodei bisecției astfel încât $\frac{2-0}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}$, de unde $n = 2$, ceea ce înseamnă că 2 pași sunt suficienți pentru a obține o aproximare a rădăcinii care se află la cel mult $1/4$ de rădăcina adevărată.

Luăm $c = (0+2)/2 = 1$, și calculăm $f(1) = -3$. Deci $f(1)f(2) = -24 < 0$, deci noul interval va fi $[1, 2]$.

Acum $c = (1+2)/2 = 3/2$, și $f(3/2) = 7/4$. Prin urmare, $f(1)f(3/2) = -21/4 < 0$, noul interval fiind $[1, 3/2]$. Deoarece am efectuat 2 pași ai metodei bisecției, ne putem opri, deoarece avem garanția că soluția aproximativă dată prin $x_c = (1 + 3/2)/2 = 5/4$ este la cel mult $1/4$ de rădăcina adevărată.

Într-adevăr, rădăcina pozitivă a funcției f se poate calcula ușor ca fiind $r = 4/3$, și, prin urmare, eroarea de aproximare este, conform Definiției 1.1, $e = |x_c - r| = |5/4 - 4/3| = 1/12 < 1/4$. □

Definiția 1.2. Numărul real r este un **punct fix** al funcției g dacă $g(r) = r$.

Definiția 1.3. O metodă iterativă se numește **local convergentă** la r dacă metoda converge la r pentru valori inițiale suficient de apropiate de r.

Definiția 1.4. Fie e_i eroarea la pasul i al unei metode iterative. Dacă

$$\lim_{i \to \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = S < 1,$$

se spune că metoda este **liniar convergentă** cu rata S.

Teorema 1.2. *Să presupunem că g este o funcție derivabilă cu derivata continuă, că $g(r) = r$, și că $S = |g'(r)| < 1$. Atunci iterația de punct fix converge liniar cu rata S la punctul fix r pentru o valoare inițială suficient de apropiată de r.*

Algoritmul 1.2 (Iterația de punct fix).
x_0= *valoarea inițială*
$x_{i+1} = g(x_i)$ *for* $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Exercițiul 1.2. Găsiți toate punctele fixe ale funcției $g(x) = x^2 + x - \frac{1}{4}$ și decideți dacă iterația de punct fix este local convergentă pentru fiecare punct fix. În caz de local convergență, aplicați doi pași ai iterației de punct fix cu o valoare inițială din apropierea punctului și determinați rata de convergență. Calculați eroarea de aproximare.

Rezolvare. Din Definiția 1.2, punctele fixe ale funcției g satisfac $g(r) = r$, de unde rezultă $r_1 = -1/2$, $r_2 = 1/2$. Derivata lui g este $g'(x) = 2x + 1$, astfel că $|g'(r_1)| = 0 < 1$ și $|g'(r_2)| = 2 > 1$. Aplicând Teorema 1.2 și Definiția 1.3, rezultă că metoda este local convergentă pentru punctul fix $r_1 = -1/2$. De asemenea, se poate deduce că, pentru $r_1 = -1/2$, metoda este liniar convergentă cu rata de convergență $S = |g'(r_1)| = 0$.

Luăm valoarea inițială $x_0 = -1$, și avem $x_1 = g(x_0) = g(-1) = -1/4$ și $x_2 = g(x_1) = g(-1/4) = -7/16$. Eroarea de aproximare este $e = |x_c - r| = |-7/16 - (-1/2)| = 1/16$. □

$r = \sqrt{3}$

Exercițiul 1.3. Care dintre următoarele iterații de punct fix converge la $\sqrt{3}$? Ordonați-le pe cele care converg, descrescător în funcție de rata de convergență. S
(A) $x \to \frac{1}{2}x + \frac{3}{2x}$, (B) $x \to \frac{2}{3}x + \frac{1}{x}$, (C) $x \to \frac{3}{4}x + \frac{3}{4x}$.

Rezolvare. Definim $g_A(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2x}$, $g_B(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{x}$, $g_C(x) = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4x}$. Punctele fixe ale lui g_A satisfac $g_A(r) = r$, conform Definiției 1.2, de unde $r_{1A} = \sqrt{3}$, $r_{1A} = -\sqrt{3}$. Analog rezultă că $r_{1B} = \sqrt{3}$, $r_{1B} = -\sqrt{3}$ și $r_{1C} = \sqrt{3}$, $r_{1C} = -\sqrt{3}$. Astfel, $\sqrt{3}$ este punct fix pentru toate cele trei funcții.

Acum calculăm $g'_A(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2}$, $g'_B(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{x^2}$, $g'_C(x) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4x^2}$. Avem $|g'_A(\sqrt{3})| = 0 < 1$, $|g'_B(\sqrt{3})| = 1/3 < 1$, $|g'_C(\sqrt{3})| = 1/2 < 1$, deci, Aplicând Teorema 1.2 și Definiția 1.3, rezultă că iterația de punct fix este local convergentă pentru toate cele trei funcții.

Ratele de convergență sunt $S_A = |g'_A(\sqrt{3})| = 0$, $S_B = |g'_B(\sqrt{3})| = 1/3$, $S_C = |g'_C(\sqrt{3})| = 1/2$, deci iterațiile de punct fix ordonate descrescător în funcție de rata de convergență sunt (C), (B), (A). □

Algoritmul 1.3 (Metoda lui Newton).
x_0= *valoarea iniţială*
$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ *for* $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Definiţia 1.5. Fie e_i eroarea după pasul i al unei metode iterative. Iteraţia este **pătratic convergentă** dacă

$$M = \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} < \infty.$$

Teorema 1.3. *Fie f de două ori derivabilă cu derivata continuă şi $f(r) = 0$. Dacă $f'(r) \neq 0$, atunci metoda lui Newton este local şi pătratic convergentă la r. Eroarea e_i la pasul i satisface*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = M,$$

unde

$$M = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|.$$

Exerciţiul 1.4. Aplicaţi doi paşi ai metodei lui Newton cu valoarea iniţială $x_0 = 0$ pentru ecuaţia $x^2 + x = 2$. Determinaţi rata de convergenţă. Calculaţi eroarea de aproximare.

Rezolvare. Definim funcţia $f(x) = x^2+x-2$. Avem $f'(x) = 2x+1$ şi $f''(x) = 2$. Primul pas din metoda lui Newton devine:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{-2}{1} = 2.$$

Al doilea pas este:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}.$$

Se observă că metoda lui Newton converge către rădăcina pozitivă a funcţiei f, şi anume $r = 1$. Conform Teoremei 1.3, rata de convergenţă este

$$M = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right| = \left|\frac{f''(1)}{2f'(1)}\right| = \left|\frac{2}{2\cdot 3}\right| = \frac{1}{3}.$$

Eroarea de aproximare este $e = |x_c - r| = |6/5 - 1| = 1/5$. □

Exercițiul 1.5. Estimați eroarea e_{i+1} în funcție de eroarea anterioară e_i pe măsură ce metoda lui Newton converge la rădăcinile $r_1 = -1$ și $r_2 = 1$ pentru ecuația $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$. Este convergența liniară sau pătratică?

Rezolvare. Fie $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Avem $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ și $f''(x) = 6x - 2$. Rezultă că $f'(-1) = 4 \neq 0$ și $f'(1) = 0$. Folosind Teorema 1.3, putem deduce că metoda lui Newton este pătratic convergentă pentru rădăcina $r_1 = -1$, având rata de convergență

$$M_1 = \left|\frac{f''(r_1)}{2f'(r_1)}\right| = \left|\frac{f''(-1)}{2f'(-1)}\right| = \left|\frac{-8}{2 \cdot 4}\right| = 1.$$

Prin urmare $\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = 1$, pentru $r_1 = -1$.

Deoarece $f'(1) = 0$, nu putem aplica Teorema 1.3 pentru $r_2 = 1$. Vom arăta, însă, că metoda lui Newton este liniar convergentă în acest caz, scriind-o ca o iterație de punct fix. Într-adevăr, dacă definim $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, metoda lui Newton devine o iterație de punct fix pentru funcția g.

Calculăm $g'(x) = 1 - \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f'(x))^2} = -\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = -\frac{(x^3-x^2-x+1)(6x-2)}{(3x^2-2x-1)^2} = -\frac{(x+1)(6x-2)}{(3x+1)^2}$. Acum $S_2 = |g'(r_2)| = |g'(1)| = \left|-\frac{2\cdot 4}{(3\cdot 1+1)^2}\right| = \frac{1}{2}$. Din Teorema 1.2, rezultă că metoda lui Newton este liniar convergentă cu rata $S_2 = \frac{1}{2}$, ceea ce înseamnă că $\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \frac{1}{2}$, pentru $r_2 = 1$. □

Algoritmul 1.4 (Metoda secantei).

x_0, x_1 = *valorile inițiale*
$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$ *for* $i = 1, 2, 3, \ldots$

Exercițiul 1.6. Aplicați doi pași ai metodei secantei cu valorile inițiale $x_0 = 0$ și $x_1 = 2$ pentru ecuația $x^2 + x = 2$. Calculați eroarea de aproximare.

Rezolvare. Fie $f(x) = x^2 + x - 2$, cu rădăcina pozitivă $r = 1$. Primul pas din metoda secantei este

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 2 - \frac{f(2)(2-0)}{f(2) - f(0)} = 2 - \frac{4 \cdot 2}{4 + 2} = \frac{2}{3}.$$

Al doilea pas este

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{2}{3} - \frac{f\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - 2\right)}{f\left(\frac{2}{3}\right) - f(2)} = \frac{2}{3} - \frac{-\frac{8}{9} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}{-\frac{8}{9} - 4} = \frac{2}{3} + \frac{8}{33} = \frac{10}{11}.$$

Eroarea de aproximare este $e = |x_c - r| = |10/11 - 1| = 1/11$. □

Algoritmul 1.5 (Metoda falsei poziţii).

Dându-se intervalul $[a, b]$ *astfel încât* $f(a)f(b) < 0$

for $i = 1, 2, 3, \dots$

$\quad c = \frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}$

$\quad$ ***if*** $f(c) = 0$, ***stop, end***

$\quad$ ***if*** $f(a)f(c) < 0$

$\qquad b = c$

$\quad$ ***else***

$\qquad a = c$

$\quad$ ***end***

end

Exerciţiul 1.7. Aplicaţi doi paşi ai metodei falsei poziţii cu intervalul iniţial $[0, 2]$ pentru ecuaţia $x^2 = 1$. Calculaţi eroarea de aproximare.

Rezolvare. Definim $f(x) = x^2 - 1$, care are rădăcina pozitivă $r = 1$ şi avem $f(0) = -1$ şi $f(2) = 3$. Intervalul iniţial este $[0, 2]$, deci

$$c = \frac{2 \cdot f(0) - 0 \cdot f(2)}{f(0) - f(2)} = \frac{2 \cdot (-1)}{-1 - 3} = \frac{1}{2}.$$

Calculăm $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$, de unde $f\left(\frac{1}{2}\right) f(2) = -\frac{9}{4} < 0$, deci noul interval va fi $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Noua valoare a lui c este

$$c = \frac{2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot f(2)}{f\left(\frac{1}{2}\right) - f(2)} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2} \cdot 3}{-\frac{3}{4} - 3} = \frac{4}{5}.$$

Acum calculăm $f\left(\frac{4}{5}\right) = -\frac{9}{25}$, deci $f\left(\frac{4}{5}\right) f(2) = -\frac{27}{25} < 0$, ceea ce înseamnă că noul interval va fi $\left[\frac{4}{5}, 2\right]$. În final, aproximarea rădăcinii este

$$x_c = \frac{2 \cdot f\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{4}{5} \cdot f(2)}{f\left(\frac{4}{5}\right) - f(2)} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{9}{25}\right) - \frac{4}{5} \cdot 3}{-\frac{9}{25} - 3} = \frac{13}{14}.$$

Eroarea de aproximare este $e = |x_c - r| = |13/14 - 1| = 1/14.$ $\square$

Capitolul 2

Sisteme de ecuaţii

Algoritmul 2.1 (Eliminarea gaussiană).

for $j = 1, \ldots, n-1$
    if $a_{jj} = 0$, ***stop, end***
    for $i = j+1, \ldots, n$
        for $k = j+1, \ldots, n$
            $a_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} a_{jk}$
        end
        $b_i = b_i - \frac{a_{ij}}{a_{jj}} b_j$
    end
end

Algoritmul 2.2 (Substituţia înapoi pentru eliminarea gaussiană).

for $i = n, \ldots, 1$
    for $j = i+1, \ldots, n$
        $b_i = b_i - a_{ij} x_j$
    end
    $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$
end

Exerciţiul 2.1. Folosiţi eliminarea gaussiană clasică pentru a rezolva sistemul:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Rezolvare. Sistemul poate fi scris în formă tabulară astfel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -6 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Doi paşi sunt necesari pentru a elimina coloana 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -6 \\ 4 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{scădem } 2\times\text{rândul 1 din rândul 2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } -1\times\text{rândul 1 din rândul 3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right]$$

şi încă un pas pentru a elimina coloana 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{scădem } -\frac{1}{5}\times\text{rândul 2 din rândul 3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right].$$

Întorcându-ne la ecuaţii, avem

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= -6 \\ 5x_2 + 5x_3 &= 15 \\ -x_3 &= -2, \end{aligned}$$

sistem pe care îl rezolvăm de jos în sus:

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \\ x_2 &= 3 - x_3 \\ x_1 &= \frac{-6 + 2x_2 + x_3}{2}, \end{aligned}$$

obţinând soluţia $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. □

Definiţia 2.1. O matrice L de dimensiune $m \times n$ este **inferior triangulară** dacă intrările sale satisfac $l_{ij} = 0$ pentru $i < j$. O matrice U de dimensiune $m \times n$ este **superior triangulară** dacă intrările sale satisfac $u_{ij} = 0$ pentru $i > j$.

Exerciţiul 2.2. Găsiţi factorizarea LU a matricii de mai jos. Verificaţi corectitudinea factorizării folosind înmulţirea matricilor.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Pașii de eliminare sunt aceiași ca cei din Exercițiul 2.1:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scădem } 2\times \text{rândul 1 din rândul 2}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } -1\times \text{rândul 1 din rândul 3}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } -\frac{1}{5}\times \text{rândul 2 din rândul 3}} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matricea U din factorizarea LU este matricea superior triangulară

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

obținută în urma eliminării gaussiene. Matricea inferior triangulară L din factorizarea LU se formează prin plasarea de 1-uri pe diagonala principală și a multiplicatorilor în locațiile unde au fost folosiți pentru eliminare. Mai exact,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}.$$

Se verifică ușor că

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

□

Algoritmul 2.3 (Rezolvarea sistemelor folosind factorizarea LU). *Dându-se sistemul $Ax = b$, folosind factorizarea LU a matricii A, acesta poate fi scris sub forma $LUx = b$. Definim un vector auxiliar $c = Ux$. Atunci substituția înapoi este o procedură în doi pași:*

(a) Rezolvăm $Lc = b$ pentru a găsi c.

(b) Rezolvăm $Ux = c$ pentru a găsi x.

Exercițiul 2.3. Rezolvați sistemul de mai jos prin găsirea factorizării LU și substituție înapoi.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Matricile L și U care dau factorizarea LU a matricii sistemului sunt aceleași ca cele din Exercițiul 2.2:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Acum trebuie să rezolvăm sistemul $Lc = b$:

$$\begin{aligned} c_1 &= -6 \\ 2c_1 + c_2 &= 3 \\ -c_1 - \frac{1}{5}c_2 + c_3 &= 1, \end{aligned}$$

care se rezolvă de sus în jos, având soluția $c_1 = -6$, $c_2 = 15$, $c_3 = -2$. Sistemul $Ux = c$ este:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= -6 \\ 5x_2 + 5x_3 &= 15 \\ -x_3 &= -2, \end{aligned}$$

care se rezolvă de jos în sus, obținându-se astfel soluția sistemului inițial: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. □

Exercițiul 2.4. Găsiți factorizarea PA=LU a următoarei matrici, folosind pivotarea parțială.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. În cazul factorizării PA=LU, pivotul este ales ca fiind acel element care este cel mai mare în modul de pe coloana pe care se află. Pentru acest lucru, pot fi necesare interschimbări de rânduri. Astfel, rândurile 1 şi 2 trebuie interschimbate:

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{interschimbăm rândurile 1 şi 2}]{P=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ -1 & -1 & 0\\ -2 & 6 & -2\end{bmatrix}.$$

Vom folosi matricea de permutare P pentru a ţine evidenţa permutării cumulative a rândurilor care a fost făcută până la momentul actual. Acum vom face trei operaţii de rânduri, şi anume,

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ -1 & -1 & 0\\ -2 & 6 & -2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scădem } -\frac{1}{2}\times\text{rândul 1 din rândul 2}} \begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ -\frac{1}{2} & -2 & 2\\ -2 & 6 & -2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{scădem } -1\times\text{rândul 1 din rândul 3}} \begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ -\frac{1}{2} & -2 & 2\\ -1 & 4 & 2\end{bmatrix}.$$

În loc să plasăm doar un zero în poziţia eliminată, l-am făcut pe zero o locaţie de stocare. În interiorul zero-ului de la poziţia (i, j), stocăm multiplicatorul m_{ij} pe care l-am folosit pentru eliminarea acelei poziţii. Acesta este mecanismul prin care multiplicatorii vor rămâne pe rândul lor în cazul efectuării unor interschimbări viitoare. Acum, facem interschimbarea rândurilor 2 şi 3:

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ -\frac{1}{2} & -2 & 2\\ -1 & 4 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{interschimbăm rândurile 2 şi 3}]{P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ -1 & 4 & 2\\ -\frac{1}{2} & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

Eliminarea se termină cu încă o operaţie de rânduri:

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ -1 & 4 & 2\\ -\frac{1}{2} & -2 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{scădem } -\frac{1}{2}\times\text{rândul 2 din rândul 3}} \begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ -1 & 4 & 2\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 3\end{bmatrix}$$

În final, putem citi factorizarea PA=LU:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 4\\ -2 & 6 & -2\end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}2 & -2 & 4\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}}_{U}.$$

□

Exercițiul 2.5. Rezolvați sistemul prin găsirea factorizării PA=LU și substituție înapoi.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Folosim factorizarea PA=LU găsită la Exercițiul 2.4:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Acum, adaptăm Algoritmul 2.3 pentru rezolvarea sistemelor folosind factorizarea LU, în cazul factorizării PA=LU. În primul rând, formăm sistemul $Lc = Pb$:

$$\begin{aligned} c_1 &= 10 \\ -c_1 + c_2 &= 4 \\ -\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 + c_3 &= -3, \end{aligned}$$

care se rezolvă de sus în jos, având soluția $c_1 = 10$, $c_2 = 14$, $c_3 = 9$. Sistemul $Ux = c$ este:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 10 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 14 \\ 3x_3 &= 9, \end{aligned}$$

care se rezolvă de jos în sus, obținându-se astfel soluția sistemului inițial: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. □

Algoritmul 2.4 (Metoda lui Jacobi).

$$\begin{aligned} x_0 &= \textit{vectorul inițial} \\ x_{k+1} &= D^{-1}(b - (L+U)x_k)\ \textbf{\textit{for}}\ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

unde D este diagonala principală a matricii sistemului, L este partea de sub diagonala principală a matricii sistemului, iar U este partea de deasupra diagonalei principale a matricii sistemului.

Exerciţiul 2.6. Calculaţi un pas din metoda lui Jacobi cu vectorul iniţial $[-1, 2, -2]^T$ pentru sistemul:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Avem că

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iteraţia Jacobi este

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-4+v_k}{2} \\ \frac{6-u_k-w_k}{3} \\ \frac{3+u_k}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Acum rezultă imediat că

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4+v_0}{2} \\ \frac{6-u_0-w_0}{3} \\ \frac{3+u_0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4+2}{2} \\ \frac{6+1+2}{3} \\ \frac{3-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Algoritmul 2.5 (Metoda Gauss–Seidel).

$$\begin{aligned} x_0 &= \textit{vectorul iniţial} \\ x_{k+1} &= D^{-1}(b - Ux_k - Lx_{k+1}) \textbf{\textit{ for }} k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

unde D este diagonala principală a matricii sistemului, L este partea de sub diagonala principală a matricii sistemului, iar U este partea de deasupra diagonalei principale a matricii sistemului.

Exerciţiul 2.7. Calculaţi un pas din metoda Gauss–Seidel cu vectorul iniţial $[1, 2, 1]^T$ pentru sistemul:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Avem că

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iterația Gauss–Seidel este

$$\begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-4+v_k}{2} \\ \frac{6-u_{k+1}-w_k}{3} \\ \frac{v_{k+1}}{2} \end{bmatrix}.$$

În acest caz, deoarece în expresia lui v_{k+1} apare u_{k+1}, noile valori vor fi calculate secvențial, de sus în jos. Astfel, avem că

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-4+v_k}{2} = \frac{-4+2}{2} = -1 \\ v_1 &= \frac{6-u_1-w_0}{3} = \frac{6+1-1}{3} = 2 \\ w_1 &= \frac{v_1}{2} = \frac{2}{2} = 1. \end{aligned}$$

□

Algoritmul 2.6 (Metoda supra-relaxărilor succesive (SRS)).

$$\begin{aligned} x_0 &= \textit{vectorul inițial} \\ x_{k+1} &= (\omega L + D)^{-1}[(1-\omega)Dx_k - \omega U x_k] \\ &\quad + \omega(\omega L + D)^{-1} b \; \textbf{\textit{for}} \; k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

unde D este diagonala principală a matricii sistemului, L este partea de sub diagonala principală a matricii sistemului, iar U este partea de deasupra diagonalei principale a matricii sistemului.

Exercițiul 2.8. Calculați un pas din metoda supra relaxărilor succesive (SRS) cu vectorul inițial $[5, 4, 5]^T$ și $\omega = 1.2$ pentru sistemul:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. În primul rând, prelucrăm expresia iteraţiei supra relaxărilor succesive în forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\omega L + D)^{-1}[(1-\omega)Dx_k - \omega U x_k] + \omega(\omega L + D)^{-1} b \Leftrightarrow \\ (\omega L + D)x_{k+1} &= (1-\omega)Dx_k - \omega U x_k + \omega b \Leftrightarrow \\ Dx_{k+1} &= (1-\omega)Dx_k + \omega(b - Ux_k - Lx_{k+1}) \Leftrightarrow \\ x_{k+1} &= (1-\omega)x_k + \omega D^{-1}(b - Ux_k - Lx_{k+1}). \end{aligned}$$

Avem că

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iteraţia supra relaxărilor succesive (SRS) este

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} &= (1-\omega)\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} \right. \\ &\qquad \left. - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} (1-\omega)u_k + \omega\frac{-4+v_k}{2} \\ (1-\omega)v_k + \omega\frac{6-u_{k+1}-w_k}{3} \\ (1-\omega)w_k + \omega\frac{v_{k+1}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Din nou, în expresia lui v_{k+1} apare u_{k+1}, astfel că noile valori vor fi calculate secvenţial, de sus în jos. Prin urmare, avem că

$$\begin{aligned} u_1 &= (1-\omega)u_0 + \omega\frac{-4+v_0}{2} = -0.2 \cdot 5 + 1.2 \cdot \frac{-4+4}{2} = -1 \\ v_1 &= (1-\omega)v_0 + \omega\frac{6-u_1-w_0}{3} = -0.2 \cdot 4 + 1.2 \cdot \frac{6+1-5}{3} = 0 \\ w_1 &= (1-\omega)w_0 + \omega\frac{v_1}{2} = -0.2 \cdot 5 + 1.2 \cdot \frac{0}{2} = -1. \end{aligned}$$

□

Definiţia 2.2. Matricea $n \times n$ $A = (a_{ij})$ este **strict diagonal dominantă** dacă, pentru orice $1 \le i \le n$, $|a_{ii}| > \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$. Cu alte cuvinte, fiecare intrare de pe diagonala principală domină rândul pe care se află în sensul în care este mai mare în valoare absolută decât suma valorilor absolute ale celorlalte intrări de pe rândul respectiv.

Exerciţiul 2.9. Rearanjaţi ecuaţiile pentru a forma un sistem strict diagonal dominant. Aplicaţi un pas din metoda lui Jacobi cu vectorul iniţial $[0, 3, -2]^T$.

$$\begin{cases} 2u - 7v + 3w = 1 \\ -u - 3v + 5w = 6 \\ 4u - 2v + w = -3. \end{cases}$$

Rezolvare. Pornind de la Definiţia 2.2, sistemul rearanjat este:

$$\begin{cases} 4u - 2v + w = -3 \\ 2u - 7v + 3w = 1 \\ -u - 3v + 5w = 6, \end{cases}$$

a cărui matrice $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ este strict diagonal dominantă. Acum putem aplica metoda lui Jacobi. Avem că

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iteraţia Jacobi este

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \\ w_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-3+2v_k-w_k}{4} \\ -\frac{1-2u_k-3w_k}{7} \\ \frac{6+u_k+3v_k}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Acum rezultă imediat că

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3+2v_0-w_0}{4} \\ -\frac{1-2u_0-3w_0}{7} \\ \frac{6+u_0+3v_0}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3+2\cdot 3+2}{4} \\ -\frac{1-2\cdot 0+3\cdot 2}{7} \\ \frac{6+0+3\cdot 3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

□

Algoritmul 2.7 (Factorizarea Cholesky).

for $k = 1, 2, \dots, n$

  if $A_{kk} < 0$, *stop, end*

  $R_{kk} = \sqrt{A_{kk}}$

  $u^T = \frac{1}{R_{kk}} A_{k,k+1:n}$

  $R_{k,k+1:n} = u^T$

  $A_{k+1:n,k+1:n} = A_{k+1:n,k+1:n} - uu^T$

end

Exerciţiul 2.10. Găsiţi factorizarea Cholesky $A = R^T R$ a următoarei matrici:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Luăm elementul $A_{11} = 4$ şi calculăm $R_{11} = \sqrt{A_{11}} = 2$, iar apoi $R_{1,2:3} = u^T = A_{1,2:3}/R_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}/2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$, matricea R având forma:

$$R = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & -1 & 1 \\ \hline & & \\ & & \end{array}\right].$$

Scăzând produsul $uu^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ din submatricea $A_{2:3,2:3}$ a lui A, obţinem

$$\left[\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline & 2 & -3 \\ & -3 & 6 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline & 1 & -1 \\ & -1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} & & \\ \hline & 1 & -2 \\ & -2 & 5 \end{array}\right].$$

Acum, repetăm aceiaşi paşi pentru submatricea 2×2 şi găsim $R_{22} = \sqrt{A_{22}} = 1$ şi $R_{23} = u^T = A_{2,3:3}/R_{11} = -2/1 = -2$:

$$R = \left[\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -2 \\ \hline & & \end{array}\right].$$

Submatricea principală 1×1 inferioară $A_{3:3,3:3}$ a lui A devine $5 - (-2)(-2) = 1$, deci $R_{33} = \sqrt{A_{33}} = 1$. Factorul Cholesky al lui A este

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Exercițiul 2.11. Rezolvați sistemul găsind factorizarea Cholesky a matricii coeficienților și folosind substituția înapoi.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Matricea este aceeaşi cu cea de la Exercițiul 2.10, prin urmare factorul Cholesky este

$$R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Acum vom folosi o adaptare a Algoritmului 2.3 pentru rezolvarea sistemelor folosind factorizarea LU, în cazul factorizării Cholesky. Astfel, sistemul $R^T c = b$ are forma

$$\begin{aligned} 2c_1 &= -2 \\ -c_1 + c_2 &= -1 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 &= 4, \end{aligned}$$

care se rezolvă de sus în jos, având soluția $c_1 = -1$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$. Sistemul $Rx = c$ are forma

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ x_2 - 2x_3 &= -2 \\ x_3 &= 1, \end{aligned}$$

care se rezolvă de jos în sus, dând soluția sistemului inițial $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. □

Algoritmul 2.8 (Metoda gradienților conjugați).

$x_0 =$ *vectorul inițial*
$d_0 = r_0 = b - Ax_0$
for $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$
  if $r_k = 0$, ***stop, end***
  $\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{d_k^T A d_k}$
  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
  $r_{k+1} = r_k - \alpha_k A d_k$
  $\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$
  $d_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k d_k$
end

Exerciţiul 2.12. Rezolvaţi sistemul de mai jos prin metoda gradienţilor conjugaţi cu vectorul iniţial $[-1, -1]^T$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Primul pas din metoda gradienţilor conjugaţi este:

$$d_0 = r_0 = b - Ax_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 = \frac{r_0^T r_0}{d_0^T A d_0} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

1,1
1,2 2,1

1,2 2,2 2,1

$\underbrace{1,2 \quad 2,1}_{1,1}$

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 d_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_1 = r_0 - \alpha_0 A d_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta_0 = \frac{r_1^T r_1}{r_0^T r_0} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}} = \frac{1}{4}$$

$$d_1 = r_1 + \beta_0 d_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Al doilea pas este:

$$\alpha_1 = \frac{r_1^T r_1}{d_1^T A d_1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 d_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r_2 = r_1 - \alpha_1 A d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Deoarece restul este $r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, metoda se încheie. Soluţia sistemului este $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. □

Algoritmul 2.9 (Metoda lui Newton pentru mai multe variabile).

$$\begin{aligned} x_0 &= \textit{vectorul inițial} \\ x_{k+1} &= x_k - (DF(x_k))^{-1}F(x_k) \textit{ for } k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

unde DF reprezintă matricea jacobiană a lui F.

Exercițiul 2.13. Aplicați un pas din metoda lui Newton cu vectorul inițial $[1, 1]^T$ pentru sistemul de mai jos:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 1 \\ (u-1)^2 + 4v^2 = 1. \end{cases}$$

Rezolvare. Scriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} u^2 - v^2 - 1 = 0 \\ (u-1)^2 + 4v^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

ceea ce înseamnă că $F\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u^2 - v^2 - 1 \\ (u-1)^2 + 4v^2 - 1 \end{bmatrix}$. Matricea jacobiană a lui F este:

$$DF\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2u & -2v \\ 2u-2 & 8v \end{bmatrix},$$

care are inversa

$$\left(DF\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{2v(5u-1)} \begin{bmatrix} 4v & v \\ -u+1 & u \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, un pas din metoda lui Newton este:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - \left(DF\left(\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right)\right)^{-1} F\left(\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(DF\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right)^{-1} F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Algoritmul 2.10 (Metoda lui Broyden I).

x_0= *vectorul iniţial*

A_0= *matricea iniţială*

for $i = 0, 1, 2, \dots$

$$x_{i+1} = x_i - A_i^{-1}F(x_i)$$

$$A_{i+1} = A_i + \frac{(\Delta_{i+1} - A_i\delta_{i+1})\delta_{i+1}^T}{\delta_{i+1}^T\delta_{i+1}}.$$

end

unde $\delta_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ *şi* $\Delta_{i+1} = F(x_{i+1}) - F(x_i)$.

Exerciţiul 2.14. Aplicaţi un pas din metoda lui Broyden I cu vectorul iniţial $[1, 1]^T$ pentru sistemul de mai jos, cu $A_0 = I_2$:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 1 \\ (u-1)^2 + 4v^2 = 1. \end{cases}$$

Rezolvare. Scriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} u^2 - v^2 - 1 = 0 \\ (u-1)^2 + 4v^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

ceea ce înseamnă că $F\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u^2 - v^2 - 1 \\ (u-1)^2 + 4v^2 - 1 \end{bmatrix}$. Un pas din metoda lui Broyden I este:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} - A_0^{-1}F\left(\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}\right) - F\left(\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right) \\ &= F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) - F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= A_0 + \frac{(\Delta_1 - A_0\delta_1)\delta_1^T}{\delta_1^T\delta_1} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix}0\\13\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & -3\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & 3\\16 & -48\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{9}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{8}{5} & -\frac{19}{5}\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Algoritmul 2.11 (Metoda lui Broyden II).

x_0= vectorul inițial
B_0= matricea inițială
for $i = 0, 1, 2, \ldots$
  $x_{i+1} = x_i - B_iF(x_i)$
  $B_{i+1} = B_i + \frac{(\delta_{i+1} - B_i\Delta_{i+1})\delta_{i+1}^T B_i}{\delta_{i+1}^T B_i\Delta_{i+1}}$
end
unde $\delta_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ *și* $\Delta_{i+1} = F(x_{i+1}) - F(x_i)$.

Exercițiul 2.15. Aplicați un pas din metoda lui Broyden II cu vectorul inițial $[1, 1]^T$ pentru sistemul de mai jos, cu $B_0 = I_2$:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 1 \\ (u-1)^2 + 4v^2 = 1. \end{cases}$$

Rezolvare. Scriem sistemul sub forma

$$\begin{cases} u^2 - v^2 - 1 = 0 \\ (u-1)^2 + 4v^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

ceea ce înseamnă că $F\left(\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}u^2 - v^2 - 1\\(u-1)^2 + 4v^2 - 1\end{bmatrix}$. Un pas din metoda lui Broyden II este:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}u_1\\v_1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix} - B_0F\left(\begin{bmatrix}u_0\\v_0\end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}F\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\delta_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}\right) - F\left(\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}\right) \\ &= F\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) - F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= B_0 + \frac{(\delta_1 - B_0\Delta_1)\delta_1^T B_0}{\delta_1^T B_0 \Delta_1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{39}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -16 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{38}{39} & \frac{1}{13} \\ \frac{16}{39} & -\frac{3}{13} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Capitolul 3

Interpolarea

Algoritmul 3.1. *Dacă avem n puncte $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, pentru fiecare k între 1 şi n, definim polinomul de gradul $n-1$*

$$L_k(x) = \frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}.$$

Apoi, definim ***polinomul de interpolare Lagrange de gradul $n-1$****, ca fiind*

$$P_{n-1}(x) = y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x).$$

Exerciţiul 3.1. Folosiţi interpolarea Lagrange pentru a găsi polinomul care trece prin punctele: $(-1, 6)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$. Verificaţi rezultatul obţinut.

Rezolvare. Mai întâi, calculăm polinoamele $L_k(x)$, $k = \overline{1,3}$:

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{6} \\
L_2(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} = -\frac{x^2 - x - 2}{2} \\
L_3(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} = \frac{x^2 - 1}{3}.
\end{aligned}$$

Acum, polinomul de interpolare Lagrange este:

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x) \\
&= 6 \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{6} + 2 \cdot \left(-\frac{x^2 - x - 2}{2}\right) + 3 \cdot \frac{x^2 - 1}{3} \\
&= x^2 - 3x + 2 - x^2 + x + 2 + x^2 - 1 \\
&= x^2 - 2x + 3.
\end{aligned}$$

Se poate verifica uşor că $P_2(-1) = 6$, $P_2(1) = 2$, $P_2(2) = 3$. □

Algoritmul 3.2 (Metoda diferenţelor divizate a lui Newton).

Fiind daţi $x = [x_1, \dots, x_n], y = [y_1, \dots, y_n]$
for $j = 1, \dots, n$
$f[x_j] = y_j$
end
for $i = 2, \dots, n$
for $j = 1, \dots, n+1-i$
$f[x_j \cdots x_{j+i-1}] = (f[x_{j+1} \cdots x_{j+i-1}] - f[x_j \cdots x_{j+i-2}])/(x_{j+i-1} - x_j)$
end
end
Polinomul de interpolare este

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1 \cdots x_i](x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}).$$

Exerciţiul 3.2. Folosiţi metoda diferenţelor divizate a lui Newton pentru a găsi polinomul care trece prin punctele: $(-1, 6)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$. Verificaţi rezultatul obţinut.

Rezolvare. În primul rând, avem $f[x_j] = y_j$, $j = \overline{1,3}$, adică $f[-1] = 6$, $f[1] = 2$, $f[2] = 3$. Apoi,

$$\begin{aligned} f\left[x_1 \quad x_2\right] &= \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2} = \frac{f[-1] - f[1]}{-1 - 1} = -2 \\ f\left[x_2 \quad x_3\right] &= \frac{f[x_2] - f[x_3]}{x_2 - x_3} = \frac{f[1] - f[2]}{1 - 2} = 1, \end{aligned}$$

şi

$$f\left[x_1 \quad x_2 \quad x_3\right] = \frac{f\left[x_1 \quad x_2\right] - f\left[x_2 \quad x_3\right]}{x_1 - x_3} = \frac{f\left[-1 \quad 1\right] - f\left[1 \quad 2\right]}{-1 - 2} = 1.$$

Polinomul de interpolare este:

$$\begin{aligned} P(x) &= f[x_1] + f\left[x_1 \quad x_2\right](x - x_1) + f\left[x_1 \quad x_2 \quad x_3\right](x - x_1)(x - x_2) \\ &= f[-1] + f\left[-1 \quad 1\right](x + 1) + f\left[-1 \quad 1 \quad 2\right](x + 1)(x - 1) \\ &= 6 + (-2) \cdot (x + 1) + 1 \cdot (x^2 - 1) \\ &= 6 - 2x - 2 + x^2 - 1 \\ &= x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

Se poate verifica uşor că $P(-1) = 6$, $P(1) = 2$, $P(2) = 3$. □

Algoritmul 3.3 (Nodurile de interpolare Cebîşev).

Pe intervalul $[a, b]$,

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}$$

pentru $i = 1, \ldots, n$. *Inegalitatea*

$$|(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \le \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}$$

are loc pe $[a, b]$.

Exerciţiul 3.3. Scrieţi nodurile de interpolare Cebîşev $x_1, \ldots, x_n$ pe intervalul $[-1, 3]$, unde $n = 4$. Găsiţi limita superioară pentru $|(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$. Calculaţi polinomul Cebîşev $T_n(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

Rezolvare. Nodurile de interpolare Cebîşev pe intervalul $[-1, 3]$ sunt: $x_1 = 1 + 2\cos\frac{\pi}{8}$, $x_2 = 1 + 2\cos\frac{3\pi}{8}$, $x_3 = 1 + 2\cos\frac{5\pi}{8}$, $x_4 = 1 + 2\cos\frac{7\pi}{8}$.

Limita superioară pentru $|(x-x_1)\cdots(x-x_4)|$ este:

$$|(x-x_1)\cdots(x-x_4)| \le \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}} = \frac{2^4}{2^3} = 2.$$

Pentru a calcula polinomul Cebîşev, trebuie să găsim

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\
\cos\frac{3\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
\cos\frac{5\pi}{8} &= -\cos\frac{3\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\
\cos\frac{7\pi}{8} &= -\cos\frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},
\end{aligned}$$

şi acum

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \left(x-1-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(x-1-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \\ &\quad\times\left(x-1+\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\left(x-1+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) \\ &= \left((x-1)^2-(2+\sqrt{2})\right)\left((x-1)^2-(2-\sqrt{2})\right) \\ &= ((x-1)^2-2)^2-2 \\ &= (x-1)^4-4(x-1)^2+2. \end{aligned}$$

□

Algoritmul 3.4 (Curbă splină cubică naturală).

Dându-se $x = [x_1, \ldots, x_n]$, *unde* $x_1 < \cdots < x_n$, $y = [y_1, \ldots, y_n]$

for $i = 1, \ldots, n-1$

$a_i = y_i$

$\delta_i = x_{i+1} - x_i$

$\Delta_i = y_{i+1} - y_i$

end

Rezolvăm pentru a găsi $c_1, \ldots, c_n$ *sistemul:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & \\ \delta_1 & 2\delta_1+2\delta_2 & \delta_2 & \ddots & & \\ 0 & \delta_2 & 2\delta_2+2\delta_3 & \delta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \delta_{n-2} & 2\delta_{n-2}+2\delta_{n-1} & \delta_{n-1} \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \\ \vdots \\ \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1}\right) \\ \vdots \\ 3\left(\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} - \frac{\Delta_{n-2}}{\delta_{n-2}}\right) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

for $i = 1, \ldots, n-1$

$d_i = \frac{c_{i+1}-c_i}{3\delta_i}$

$b_i = \frac{\Delta_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i}{3}(2c_i + c_{i+1})$

end

Curba splină cubică naturală este

$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ *pe* $[x_i, x_{i+1}]$ *pentru* $i = 1, \dots, n-1$.

Exercițiul 3.4. Găsiți curba splină cubică naturală care trece prin punctele $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,-1)$.

Rezolvare. În primul rând, avem că

$$\begin{aligned}
a_1 &= y_1 = 1\\
\delta_1 &= x_2 - x_1 = 1\\
\Delta_1 &= y_2 - y_1 = 1\\
a_2 &= y_2 = 2\\
\delta_2 &= x_3 - x_2 = 1\\
\Delta_2 &= y_3 - y_2 = -3.
\end{aligned}$$

Sistemul devine

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ \delta_1 & 2\delta_1 + 2\delta_2 & \delta_2\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 3\left(\frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\Delta_1}{\delta_1}\right)\\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ -12\\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ -3\\ 0 \end{bmatrix}.$$

Acum avem

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{c_2 - c_1}{3\delta_1} = -1\\
b_1 &= \frac{\Delta_1}{\delta_1} - \frac{\delta_1}{3}(2c_1 + c_2) = 2\\
d_2 &= \frac{c_3 - c_2}{3\delta_2} = 1\\
b_2 &= \frac{\Delta_2}{\delta_2} - \frac{\delta_2}{3}(2c_2 + c_3) = -1.
\end{aligned}$$

Prin urmare, curba splină cubică naturală este

$$\begin{aligned} S_1(x) &= 1 + 2x + 0x^2 - 1x^3 \text{ pe } [0,1] \\ S_2(x) &= 2 - 1(x-1) - 3(x-1)^2 + 1(x-1)^3 \text{ pe } [1,2]. \end{aligned}$$

□

Algoritmul 3.5 (Curbă Bézier).
Dându-se capetele (x_1, y_1), (x_4, y_4)
Dându-se punctele de control (x_2, y_2), (x_3, y_3)
Considerăm

$$\begin{aligned} b_x &= 3(x_2 - x_1) \\ c_x &= 3(x_3 - x_2) - b_x \\ d_x &= x_4 - x_1 - b_x - c_x \\ b_y &= 3(y_2 - y_1) \\ c_y &= 3(y_3 - y_2) - b_y \\ d_y &= y_4 - y_1 - b_y - c_y. \end{aligned}$$

Curba Bézier este definită pentru $0 \leq t \leq 1$ *prin*

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + b_x t + c_x t^2 + d_x t^3 \\ y(t) &= y_1 + b_y t + c_y t^2 + d_y t^3. \end{aligned}$$

Exercițiul 3.5. Găsiți curba Bézier definită de punctele $(-1,-2)$, $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Verificați apartenența capetelor la curba găsită.

Rezolvare. Avem

$$\begin{aligned} b_x &= 3(x_2 - x_1) = 3 \\ c_x &= 3(x_3 - x_2) - b_x = -3 \\ d_x &= x_4 - x_1 - b_x - c_x = 2 \\ b_y &= 3(y_2 - y_1) = 3 \\ c_y &= 3(y_3 - y_2) - b_y = 3 \\ d_y &= y_4 - y_1 - b_y - c_y = -4. \end{aligned}$$

Curba Bézier este

capete

$$\begin{aligned} x(t) &= -1 + 3t - 3t^2 + 2t^3 \\ y(t) &= -2 + 3t + 3t^2 - 4t^3. \end{aligned}$$

Se verifică ușor că $x(0) = -1$, $y(0) = -2$, $x(1) = 1$, $y(1) = 0$. □

puncte de control   puncte de control

Exercițiul 3.6. Găsiți cele două capete și cele două puncte de control pentru curba Bézier dată prin

$$\begin{cases} x(t) = -1 + 3t - 3t^2 + 2t^3 \\ y(t) = -2 + 3t + 3t^2 - 4t^3. \end{cases}$$

Verificați apartenența capetelor la curba dată mai sus.

Rezolvare. În primul rând, avem imediat că $x_1 = -1$, $y_1 = -2$. Apoi, deducem că

$$\begin{aligned} b_x &= 3(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = 0 \\ c_x &= 3(x_3 - x_2) - b_x \Rightarrow x_3 = 0 \\ d_x &= x_4 - x_1 - b_x - c_x \Rightarrow x_4 = 1 \\ b_y &= 3(y_2 - y_1) = 3 \Rightarrow y_2 = -1 \\ c_y &= 3(y_3 - y_2) - b_y = 3 \Rightarrow y_3 = 1 \\ d_y &= y_4 - y_1 - b_y - c_y \Rightarrow y_4 = 0. \end{aligned}$$

Prin urmare, cele două capete sunt $(-1, -2)$, $(1, 0)$ și cele două puncte de control sunt $(0, -1)$, $(0, 1)$. Se verifică ușor că $x(0) = -1$, $y(0) = -2$, $x(1) = 1$, $y(1) = 0$. □

Capitolul 4

Cele mai mici pătrate

Algoritmul 4.1 (Ecuaţiile normale pentru cele mai mici pătrate).
Dându-se sistemul inconsistent

$$Ax = b,$$

rezolvăm

$$A^T A\overline{x} = A^T b$$

pentru a găsi soluţia în sensul celor mai mici pătrate $\overline{x}$ *care minimizează lungimea euclidiană a vectorului rezidual* $r = b - Ax$.

Exerciţiul 4.1. Rezolvaţi ecuaţiile normale şi găsiţi REMP-ul pentru sistemul

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Ecuaţiile normale sunt

$$A^T A\overline{x} = A^T b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vectorul rezidual este $r = b - Ax = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\0\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$, iar rădăcina erorii medii pătratice (REMP) este REMP $= \sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2+r_4^2}{4}} = \sqrt{\frac{0+1+0+1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. □

Algoritmul 4.2 (Interpolarea datelor folosind cele mai mici pătrate).

Dându-se o mulţime de m puncte $(t_1, y_1), \ldots, (t_m, y_m)$.

PASUL 1. Alegem un model. *Identificăm un model parametrizat, de exemplu $y = c_1 + c_2 t$, care va fi folosit pentru a interpola datele.*

PASUL 2. Forţăm modelul să interpoleze datele. *Înlocuim punctele în model. Fiecare punct dă naştere unei ecuaţii ale cărei necunoscute sunt parametri, de exemplu c_1 şi c_2 în modelul cu dreapta. Aceasta rezultă într-un sistem $Ax = b$, în care necunoscuta x reprezintă parametrii necunoscuţi.*

PASUL 3. Rezolvăm ecuaţiile normale. *Soluţia în sensul celor mai mici pătrate pentru parametri va fi găsită ca soluţia sistemului de ecuaţii normale $A^T A x = A^T b$.*

Exerciţiul 4.2. Găsiţi cea mai bună dreaptă care interpolează punctele $(-1, 2)$, $(0, 4)$, $(1, -4)$, $(2, -2)$.

Rezolvare. Modelul este de forma $y = c_1 + c_2 t$. Sistemul $Ac = b$ este în acest caz

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\-4\\-2\end{bmatrix}.$$

Ecuaţiile normale sunt

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\-4\\-2\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}4 & 2\\2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-10\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}.$$

Prin urmare, cea mai bună dreaptă este $y = 1 - 2t$. □

Exercițiul 4.3. Găsiți cea mai bună parabolă care interpolează punctele $(-1,2)$, $(0,4)$, $(1,-6)$, $(2,-8)$.

Rezolvare. Modelul este de forma $y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2$. Sistemul $Ac = b$ este în acest caz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Ecuațiile normale sunt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -24 \\ -36 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, cea mai bună parabolă este $y = 1 - 3t - t^2$. □

Exercițiul 4.4. Interpolați datele din tabel folosind modelul periodic $y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t$.

t	y
0	1
1/4	2
1/2	−3
3/4	−4

Rezolvare. Pentru modelul $y = c_1 + c_2 \cos 2\pi t + c_3 \sin 2\pi t$, sistemul $Ac = b$ este:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Ecuațiile normale sunt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Modelul periodic care interpolează datele este $y = -1+2\cos 2\pi t+3\sin 2\pi t.$ □

Exercițiul 4.5. Interpolați datele din tabel folosind modelul exponențial $y = c_1 e^{c_2 t}$, folosind liniarizarea.

t	y
-1	8
0	4
1	2
2	1

Rezolvare. Liniarizând modelul, obținem $\ln y = \ln c_1 + c_2 t$. Sistemul $Ac = b$ este în acest caz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 8 \\ \ln 4 \\ \ln 2 \\ \ln 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuațiile normale sunt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln 8 \\ \ln 4 \\ \ln 2 \\ \ln 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 64 \\ -\ln 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \ln c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 4 \\ -\ln 2 \end{bmatrix}.$$

Modelul exponențial obținut este $y = 4e^{(-\ln 2)t}$. □

Exercițiul 4.6. Interpolați datele din tabel folosind modelul lege de putere $y = c_1 t^{c_2}$, folosind liniarizarea.

t	y
e^{-1}	8
1	4
e	2
e^2	1

Rezolvare. Liniarizând modelul, obţinem $\ln y = \ln c_1 + c_2 \ln t$. Sistemul $Ac = b$ este în acest caz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 8 \\ \ln 4 \\ \ln 2 \\ \ln 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuaţiile normale sunt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln 8 \\ \ln 4 \\ \ln 2 \\ \ln 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 64 \\ -\ln 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \ln c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 4 \\ -\ln 2 \end{bmatrix}.$$

Modelul lege de putere obţinut este $y = 4t^{-\ln 2}$. □

Algoritmul 4.3 (Ortogonalizarea Gram–Schmidt clasică).

Fie A_j, $j = 1, \ldots, n$ vectori liniar independenţi.

for $j = 1, 2, \ldots, n$

  $y = A_j$

  for $i = 1, 2, \ldots, j-1$

    $r_{ij} = q_i^T A_j$

    $y = y - r_{ij} q_i$

  end

  $r_{jj} = ||y||_2$

  $q_j = y / r_{jj}$

end

Exerciţiul 4.7. Găsiţi factorizarea QR completă a matricii de mai jos folosind ortogonalizarea Gram–Schmidt clasică.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Luăm $y_1 = A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Atunci $r_{11} = ||y_1||_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, şi primul vector unitar este

$$q_1 = \frac{y_1}{||y_1||_2} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Pentru a găsi al doilea vector unitar, luăm

$$y_2 = A_2 - q_1 q_1^T A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} 1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

şi

$$q_2 = \frac{y_2}{||y_2||_2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Deoarece $r_{12} = q_1^T A_2 = 1$ şi $r_{22} = ||y_2||_2 = 2$, rezultatul scris în formă matricială este

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = QR.$$

□

Exerciţiul 4.8. Găsiţi factorizarea QR completă a matricii de mai jos folosind ortogonalizarea Gram–Schmidt completă.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. În Exerciţiul 4.7, am găsit vectorii ortogonali unitari $q_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ şi $q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. Adăugând un al treilea vector $A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, avem că

$$\begin{aligned} y_3 &= A_3 - q_1 q_1^T A_3 - q_2 q_2^T A_3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \frac{2}{3} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

şi $q_3 = \frac{y_3}{||y_3||} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Punând cele trei părţi împreună, obţinem factorizarea QR completă

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = QR.$$

□

Algoritmul 4.4 (Cele mai mici pătrate folosind factorizarea QR).

Dându-se sistemul inconsistent $m \times n$ $Ax = b$, găsim factorizarea QR completă $A = QR$ şi luăm

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \textit{submatricea } n \times n \textit{ superioară a lui } R \\ \hat{d} &= \textit{primele } n \textit{ intrări superioare ale lui } d = Q^T b. \end{aligned}$$

Rezolvăm $\hat{R}\overline{x} = \hat{d}$ pentru a găsi soluţia în sensul celor mai mici pătrate $\overline{x}$.

Exerciţiul 4.9. Folosiţi factorizarea QR pentru a rezolva problema de tip cele mai mici pătrate:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Din Exerciţiul 4.8, avem

$$Q = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Atunci, $\hat{R} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ şi $d = Q^T b = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$, de unde $\hat{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

Sistemul $\hat{R}x = \hat{d}$ devine

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix},$$

a cărui soluţie este $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, care reprezintă soluţia în sensul celor mai mici pătrate a sistemului iniţial. □

Capitolul 5

Integrarea numerică

Algoritmul 5.1 (Regula trapezului compusă).

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_m + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_i\right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(c),$$

unde $h = (b-a)/m$, $y_i = f(x_i) = f(a + i \cdot h)$, $i = \overline{0, m}$ *şi* c *este între* a *şi* b.

Exerciţiul 5.1. Aplicaţi regula trapezului compusă cu $m = 4$ paneluri pentru a aproxima integrala. Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei.

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 + x)dx.$$

Rezolvare. Definim $f(x) = 3x^2 + x$. Avem $h = (b-a)/m = (1+1)/4 = 1/2$, şi apoi

$$\begin{aligned}
y_0 &= f(a + 0 \cdot h) = f(-1) = 3 - 1 = 2 \\
y_1 &= f(a + 1 \cdot h) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
y_2 &= f(a + 2 \cdot h) = f(0) = 0 \\
y_3 &= f(a + 3 \cdot h) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \\
y_4 &= f(a + 4 \cdot h) = f(1) = 4,
\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &\approx \frac{h}{2}\left(y_0 + y_m + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_i\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2+4+2\left(\frac{1}{4}+0+\frac{5}{4}\right)\right)\\ &= \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Valoarea exactă a integralei este

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+x)dx = \left(x^3+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = 2.$$

Eroarea este $e = |9/4 - 2| = 1/4$. □

Algoritmul 5.2 (Regula mijlocului compusă).

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{m} f(w_i) + \frac{(b-a)h^2}{24} f''(c),$$

unde $h = (b-a)/m$ *şi* c *este între* a *şi* b. *Valorile* w_i *sunt mijloacele celor* m *subintervale* $[a+(i-1)\cdot h, a+i\cdot h]$, $i = \overline{1,m}$ *ale lui* $[a,b]$.

Exerciţiul 5.2. Aplicaţi regula mijlocului compusă cu $m = 4$ paneluri pentru a aproxima integrala. Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei.

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+x)dx.$$

Rezolvare. Definim $f(x) = 3x^2 + x$. Avem $h = (b-a)/m = (1+1)/4 = 1/2$, şi apoi

$$\begin{aligned}f(w_1) &= f(a+\frac{0+1}{2}\cdot h) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{16}-\frac{3}{4} = \frac{15}{16}\\ f(w_2) &= f(a+\frac{1+2}{2}\cdot h) = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{16}\\ f(w_3) &= f(a+\frac{2+3}{2}\cdot h) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}+\frac{1}{4} = \frac{7}{16}\\ f(w_4) &= f(a+\frac{3+4}{2}\cdot h) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{16}+\frac{3}{4} = \frac{39}{16},\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &\approx h\sum_{i=1}^{m} f(w_i)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{15}{16}-\frac{1}{16}+\frac{7}{16}+\frac{39}{16}\right)\\ &= \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

Eroarea este $e = |15/8 - 2| = 1/8$, deoarece valoarea exactă a integralei a fost calculată la Exerciţiul 5.1. □

Algoritmul 5.3 (Regula lui Simpson compusă).

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right] - \frac{(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(c),$$

unde $h = (b-a)/(2m)$, $y_i = f(x_i) = f(a+i\cdot h)$, $i = \overline{0, 2m}$ *şi c este între a şi b.*

Exerciţiul 5.3. Aplicaţi regula lui Simpson compusă cu $2m = 4$ paneluri pentru a aproxima integrala. Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei.

$$\int_{-1}^{1}(3x^2 + x)dx.$$

Rezolvare. Definim $f(x) = 3x^2+x$. Avem $h = (b-a)/(2m) = (1+1)/4 = 1/2$, şi apoi

$$\begin{aligned} y_0 &= f(a+0\cdot h) = f(-1) = 3-1 = 2\\ y_1 &= f(a+1\cdot h) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}-\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\\ y_2 &= f(a+2\cdot h) = f(0) = 0\\ y_3 &= f(a+3\cdot h) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{5}{4}\\ y_4 &= f(a+4\cdot h) = f(1) = 4,\end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &\approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 4\sum_{i=1}^{m} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i}\right]\\ &= \frac{1}{6}\left(2+4+4\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)+2\cdot 0\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$

Deoarece valoarea exactă a integralei a fost găsită la Exercițiul 5.1, eroarea este $e = |2 - 2| = 0$, ceea ce înseamnă că integrala este calculată exact cu regula lui Simpson. □

Algoritmul 5.4 (Integrarea Romberg).

$R_{11} = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$
for $j = 2, 3, \ldots$
  $h_j = \frac{b-a}{2^{j-1}}$
  $R_{j1} = \frac{1}{2}R_{j-1,1} + h_j \sum_{i=1}^{2^{j-2}} f(a + (2i-1)h_j)$
  for $k = 2, \ldots, j$
    $R_{jk} = \frac{4^{k-1}R_{j,k-1} - R_{j-1,k-1}}{4^{k-1}-1}$
  end
end

Exercițiul 5.4. Aplicați integrarea Romberg pentru a găsi aproximarea R_{22} a integralei. Aflați eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei.

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 + x)dx.$$

Rezolvare. Definim $f(x) = 3x^2 + x$. Avem, în primul rând, că

$$R_{11} = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = (1+1)\frac{f(-1)+f(1)}{2} = 3 - 1 + 3 + 1 = 6.$$

Apoi, $h_2 = \frac{b-a}{2^{2-1}} = \frac{1+1}{2} = 1$, deci

$$R_{21} = \frac{1}{2}R_{11} + h_2 \sum_{i=1}^{2^{2-2}} f(a + (2i-1)h_j) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

În final, avem că

$$R_{22} = \frac{4^{2-1}R_{21} - R_{11}}{4^{2-1} - 1} = \frac{4 \cdot 3 - 6}{4 - 1} = 2.$$

Valoarea exactă a integralei a fost găsită la Exercițiul 5.1. Eroarea este $e = |2 - 2| = 0$. Prin urmare, integrala este exact egală cu aproximarea R_{22} dată de integrarea Romberg. □

Algoritmul 5.5 (Cuadratura adaptivă).

Pentru a aproxima $\int_a^b f(x)dx$ cu o toleranţă TOL:

$c = \frac{a+b}{2}$

$S_{[a,b]} = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

if $|S_{[a,b]} - S_{[a,c]} - S_{[c,b]}| < 3 \cdot TOL \cdot \left(\frac{b-a}{b_{orig}-a_{orig}}\right)$

acceptăm $S_{[a,c]} + S_{[c,b]}$ ca aproximare pe $[a,b]$

else

repetăm cele de mai sus recursiv pentru $[a,c]$ şi $[c,b]$

end

Exerciţiul 5.5. Aplicaţi cuadratura adaptivă, folosind regula trapezului cu toleranţa $TOL = 2/7$ pentru a aproxima integrala. Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei.

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+x)dx.$$

Rezolvare. Definim $f(x) = 3x^2 + x$. Atunci $c = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$, şi avem

$$\begin{aligned}
S_{[-1,1]} &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = (1+1)\frac{f(-1)+f(1)}{2} = 6 \\
S_{[-1,0]} &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = (0+1)\frac{f(-1)+f(0)}{2} = 1 \\
S_{[0,1]} &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = (1-0)\frac{f(0)+f(1)}{2} = 2,
\end{aligned}$$

de unde $|S_{[-1,1]} - S_{[-1,0]} - S_{[0,1]}| = 3$. Dar $3 \cdot \mathrm{TOL} \cdot \left(\frac{b-a}{b_{\mathrm{orig}}-a_{\mathrm{orig}}}\right) = \frac{6}{7} < 3$, ceea ce înseamnă că trebuie să repetăm recursiv pentru $[-1,0]$ şi, respectiv, pentru $[0,1]$. Avem:

$$\begin{aligned}
S_{[-1,-\frac{1}{2}]} &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \left(-\frac{1}{2}+1\right)\frac{f(-1)+f\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{9}{16} \\
S_{[-\frac{1}{2},0]} &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \left(0+\frac{1}{2}\right)\frac{f\left(-\frac{1}{2}\right)+f(0)}{2} = \frac{1}{16},
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
S_{[0,\frac{1}{2}]} &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \left(\frac{1}{2}-0\right)\frac{f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{5}{16} \\
S_{[\frac{1}{2},1]} &= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)}{2} = \frac{21}{16},
\end{aligned}$$

de unde $|S_{[-1,0]} - S_{[-1,-\frac{1}{2}]} - S_{[-\frac{1}{2},0]}| = \frac{3}{8}$ şi $|S_{[0,1]} - S_{[0,\frac{1}{2}]} - S_{[\frac{1}{2},1]}| = \frac{3}{8}$. Acum, $3 \cdot \mathrm{TOL} \cdot \left(\frac{b-a}{b_{\mathrm{orig}} - a_{\mathrm{orig}}}\right) = \frac{3}{7}$, ceea ce înseamnă că putem accepta pe $S_{[-1,-\frac{1}{2}]} + S_{[-\frac{1}{2},0]}$ ca aproximare a integralei pe $[-1, 0]$ şi, respectiv, pe $S_{[0,\frac{1}{2}]} + S_{[\frac{1}{2},1]}$ ca aproximare a integralei pe $[0, 1]$. Prin urmare,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)dx &\approx S_{[-1,-\frac{1}{2}]} + S_{[-\frac{1}{2},0]} + S_{[0,\frac{1}{2}]} + S_{[\frac{1}{2},1]}\\ &= \frac{9}{16} + \frac{1}{16} + \frac{5}{16} + \frac{21}{16}\\ &= \frac{9}{4}.\end{aligned}$$

Valoarea exactă a integralei a fost găsită la Exerciţiul 5.1. Eroarea este $e = |9/4 - 2| = 1/4 < \mathrm{TOL} = 2/7$. □

Algoritmul 5.6 (Cuadratura gaussiană).

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i),$$

unde

$$c_i = \int_{-1}^{1} L_i(x)dx,\ i = 1, \ldots, n.$$

n	rădăcinile x_i	coeficienţii c_i
3	$-\sqrt{3/5}$	$5/9$
	0	$8/9$
	$\sqrt{3/5}$	$5/9$

Exerciţiul 5.6. Aproximaţi integrala, folosind cuadratura gaussiană cu $n = 3$. Aflaţi eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei.

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 + x)dx.$$

Rezolvare. Fie $f(x) = 3x^2 + x$. Avem:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \\
&= \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\
&= \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Deoarece valoarea exactă a integralei a fost găsită la Exercițiul 5.1, eroarea este $e = |2 - 2| = 0$, ceea ce înseamnă că integrala este calculată exact folosind cuadratura gaussiană. □

Exercițiul 5.7. Faceți o schimbare de variabilă pentru a rescrie integrala pe $[-1, 1]$. Aproximați integrala, folosind cuadratura gaussiană cu $n = 3$. Aflați eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei.

$$\int_0^1 (24x^2 - 20x + 4)dx.$$

Rezolvare. Fie $f(x) = 3x^2 + x$. Folosind substituția $t = (2x - a - b)/(b - a) = (2x - 0 - 1)/(1 - 0) = 2x - 1$, de unde $x = \frac{t+1}{2}$ și $dx = \frac{1}{2}dt$, integrala devine

$$\int_{-1}^{1} \left(24\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 20\frac{t+1}{2} + 4\right)\frac{1}{2}dt = \int_{-1}^{1} (3t^2 + t)dt,$$

care se reduce la Exercițiul 5.6. □

Capitolul 6

Ecuaţii diferenţiale ordinare

Algoritmul 6.1 (Metoda lui Euler).

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i). \end{aligned}$$

Exerciţiul 6.1. Folosiţi separarea variabilelor pentru a găsi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială de mai jos. Aplicaţi metoda lui Euler cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă.

$$y' = 2ty.$$

Rezolvare. Separând variabilele, şi presupunând că $y \neq 0$, avem

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= 2tdt \\ \int \frac{dy}{y} &= \int 2tdt \\ \ln|y| &= t^2 + c \\ |y| &= e^{t^2+c}. \end{aligned}$$

Din condiţia iniţială $y(0) = 1$, rezultă $c = 0$, deci $y(t) = e^{t^2}$, $\forall t \in [0, 1]$.

Deoarece $f(t, y) = 2ty$, aplicând metoda lui Euler, obţinem că

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 = 1 \\ w_1 &= w_0 + hf(t_0, w_0) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1 \\ w_2 &= w_1 + hf(t_1, w_1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Estimarea soluţiei în $t = 1$ dată de metoda lui Euler este $w_2 = 3/2$. Valoarea reală a soluţiei în $t = 1$ este $y(1) = e^{1^2} = e$, deci eroarea este $|e - 3/2| \approx 1.21$. □

Algoritmul 6.2 (Metoda trapezului explicită).

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))). \end{aligned}$$

Exerciţiul 6.2. Folosiţi separarea variabilelor pentru a găsi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială de mai jos. Aplicaţi metoda trapezului cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă.

$$y' = 2ty.$$

Rezolvare. Soluţia este aceeaşi cu cea găsită la Exerciţiul 6.1: $y(t) = e^{t^2}$, $\forall t \in [0, 1]$. Deoarece $f(t, y) = 2ty$, aplicând metoda trapezului explicită, obţinem că

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 = 1 \\ w_1 &= w_0 + \frac{h}{2}(f(t_0, w_0) + f(t_0 + h, w_0 + hf(t_0, w_0))) \\ &= 1 + \frac{1}{4}\left(2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot \left(0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 1\right)\right) = \frac{5}{4} \\ w_2 &= w_1 + \frac{h}{2}(f(t_1, w_1) + f(t_1 + h, w_1 + hf(t_1, w_1))) \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}\right)\right) = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Estimarea soluţiei în $t = 1$ dată de metoda trapezului explicită este $w_2 = 5/2$. Eroarea este $|e - 5/2| \approx 0.21$. □

Algoritmul 6.3 (Metoda lui Taylor de ordinul k).

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(t_i, w_i), \end{aligned}$$

unde

$$f'(t, y) = f_t(t, y) + f_y(t, y) f(t, y).$$

Exerciţiul 6.3. Folosiţi separarea variabilelor pentru a găsi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială de mai jos. Aplicaţi metoda lui Taylor de ordinul 2 cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă.

$$y' = 2ty.$$

Rezolvare. Soluţia PVI este cea găsită la Exerciţiul 6.1: $y(t) = e^{t^2}$, $\forall t \in [0, 1]$. Deoarece $f(t, y) = 2ty$, avem că

$$\begin{aligned} f'(t,y) &= f_t(t,y) + f_y(t,y)f(t,y) \\ &= 2y + 2t \cdot 2ty \\ &= 4t^2y + 2y. \end{aligned}$$

Aplicaţi metoda lui Taylor de ordinul 2, obţinem:

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 = 1 \\ w_1 &= w_0 + hf(t_0, w_0) + \frac{h^2}{2}f'(t_0, w_0) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0 \cdot 1 + \frac{1}{8}(4 \cdot 0^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) = \frac{5}{4} \\ w_2 &= w_1 + hf(t_1, w_1) + \frac{h^2}{2}f'(t_1, w_1) \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{8}\left(4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{5}{4}\right) = \frac{75}{32}. \end{aligned}$$

Estimarea soluţiei în $t = 1$ dată de metoda lui Taylor de ordinul 2 este $w_2 = 75/32$. Eroarea este $|e - 75/32| \approx 0.37$. □

Algoritmul 6.4 (Metoda mijlocului).

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 \\ w_{i+1} &= w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right). \end{aligned}$$

Exerciţiul 6.4. Folosiţi separarea variabilelor pentru a găsi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială de mai jos. Aplicaţi metoda mijlocului cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă.

$$y' = 2ty.$$

Rezolvare. Soluţia este cea găsită la Exerciţiul 6.1: $y(t) = e^{t^2}$, $\forall t \in [0,1]$. Deoarece $f(t,y) = 2ty$, aplicând metoda mijlocului, obţinem

$$
\begin{aligned}
w_0 &= y_0 = 1 \\
w_1 &= w_0 + hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{h}{2}f(t_0, w_0)\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(0+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot 0\cdot 1\right) = \frac{5}{4} \\
w_2 &= w_1 + hf\left(t_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{h}{2}f(t_1, w_1)\right) \\
&= \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\right) = \frac{155}{64}.
\end{aligned}
$$

Estimarea soluţiei în $t = 1$ dată de metoda mijlocului este $w_2 = 155/64$. Eroarea este $|e - 155/64| \approx 0.29$. □

Algoritmul 6.5. *Dându-se ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi*

$$y' = g(t)y + h(t),$$

soluţia ei este dată prin:

$$y(t) = e^{\int g(t)dt}\int e^{-\int g(t)dt}h(t)dt.$$

Algoritmul 6.6 (Metoda lui Euler implicită).

$$
\begin{aligned}
w_0 &= y_0 \\
w_{i+1} &= w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1}).
\end{aligned}
$$

Exerciţiul 6.5. Găsiţi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi de mai jos. Aplicaţi metoda lui Euler implicită cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0,1]$. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă.

$$y' = -\frac{1}{t+1}y.$$

Rezolvare. Scriind ecuaţia sub forma $y' = g(t)y + h(t)$, avem că $g(t) = -\frac{1}{t+1}$ şi

$h(t) = 0$. Aplicând formula din Algoritmul 6.5, rezultă că

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int g(t)dt} \int e^{-\int g(t)dt} h(t)dt \\ &= e^{\int -\frac{1}{t+1}dt} \int e^{\int \frac{1}{t+1}dt} 0dt \\ &= e^{-\ln(t+1)} c \\ &= \frac{c}{t+1}. \end{aligned}$$

Din condiţia iniţială $y(0) = 1$, rezultă $c = 1$, deci $y(t) = \frac{1}{t+1}$, $\forall t \in [0, 1]$.

Deoarece $f(t, y) = -\frac{1}{t+1} y$, aplicând metoda lui Euler implicită, obţinem

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 = 1 \\ w_1 &= w_0 + hf(t_1, w_1) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot w_1 \Rightarrow w_1 = \frac{3}{4} \\ w_2 &= w_1 + hf(t_2, w_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+1} \cdot w_2 \Rightarrow w_2 = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Estimarea soluţiei în $t = 1$ dată de metoda lui Euler implicită este $w_2 = 3/5$. Eroarea este $|1/2 - 3/5| = 1/10$. □

Algoritmul 6.7 (Metoda Runge–Kutta de ordinul patru (RK4)).

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4)$$

unde

$$\begin{aligned} s_1 &= f(t_i, w_i) \\ s_2 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}s_1\right) \\ s_3 &= f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}s_2\right) \\ s_4 &= f(t_i + h, w_i + hs_3). \end{aligned}$$

Exerciţiul 6.6. Găsiţi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi de mai jos. Aplicaţi metoda Runge–Kutta de ordinul patru cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă.

$$y' = -\frac{1}{t+1} y.$$

Rezolvare. Soluţia PVI a fost găsită în Exerciţiul 6.5: $y(t) = \frac{1}{t+1}$, $\forall t \in [0,1]$. Cum $f(t,y) = -\frac{1}{t+1}y$, aplicând metoda Runge–Kutta de ordinul patru, obţinem

$$\begin{aligned}
w_0 &= y_0 = 1\\
s_1 &= f(t_0, w_0) = -\frac{1}{0+1}\cdot 1 = -1\\
s_2 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{h}{2}s_1\right) = -\frac{1}{(0+\frac{1}{4})+1}\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\cdot(-1)\right) = -\frac{3}{5}\\
s_3 &= f\left(t_0 + \frac{h}{2}, w_0 + \frac{h}{2}s_2\right) = -\frac{1}{(0+\frac{1}{4})+1}\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = -\frac{17}{25}\\
s_4 &= f(t_0 + h, w_0 + hs_3) = -\frac{1}{(0+\frac{1}{2})+1}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{17}{25}\right)\right) = -\frac{11}{25}\\
w_1 &= w_0 + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) = 1 + \frac{1}{12}\left(-1 - \frac{6}{5} - \frac{34}{25} - \frac{11}{25}\right) = \frac{2}{3}\\
s_1 &= f(t_1, w_1) = -\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot\frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\\
s_2 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{h}{2}s_1\right) = -\frac{1}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+1}\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right) = -\frac{20}{63}\\
s_3 &= f\left(t_1 + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{h}{2}s_2\right) = -\frac{1}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+1}\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{20}{63}\right)\right) = -\frac{148}{441}\\
s_4 &= f(t_1 + h, w_1 + hs_3) = -\frac{1}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})+1}\cdot\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{148}{441}\right)\right) = -\frac{110}{441}\\
w_2 &= w_1 + \frac{h}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) = \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\left(-\frac{4}{9} - \frac{40}{63} - \frac{296}{441} - \frac{110}{441}\right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, estimarea soluţiei în $t = 1$ dată de metoda Runge–Kutta de ordinul patru este $w_2 = 1/2$. Eroarea în $t = 1$ este $|1/2 - 1/2| = 0$. □

Algoritmul 6.8 (Metoda Adams–Bashforth cu doi paşi).

$$w_{i+1} = w_i + h\left[\frac{3}{2}f(t_i, w_i) - \frac{1}{2}f(t_{i-1}, w_{i-1})\right].$$

Exerciţiul 6.7. Găsiţi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi de mai jos. Aplicaţi metoda Adams–Bashforth cu doi paşi cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0,1]$. Folosiţi metoda trapezului explicită pentru a determina w_1. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă.

$$y' = -\frac{1}{t+1}y.$$

Rezolvare. Soluţia PVI a fost este aceeaşi cu cea calculată la Exerciţiul 6.5: $y(t) = \frac{1}{t+1}$, $\forall t \in [0,1]$. Deoarece $f(t,y) = -\frac{1}{t+1}y$, aplicând metoda trapezului explicită, obţinem

$$\begin{aligned}
w_0 &= y_0 = 1 \\
w_1 &= w_0 + \frac{h}{2}(f(t_0,w_0) + f(t_0+h, w_0 + hf(t_0,w_0))) \\
&= 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{0+1}\cdot 1 - \frac{1}{\left(0+\frac{1}{2}\right)+1}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0+1}\cdot 1\right)\right) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Acum, aplicând metoda Adams–Bashforth cu doi paşi, avem

$$\begin{aligned}
w_2 &= w_1 + h\left[\frac{3}{2}f(t_1,w_1) - \frac{1}{2}f(t_0,w_0)\right] \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0+1}\cdot 1\right] = \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

Prin urmare, estimarea soluţiei în $t = 1$ dată de metoda Adams–Bashforth cu doi paşi este $w_2 = 7/12$. Eroarea în $t = 1$ este $|1/2 - 7/12| = 1/12$. □

Algoritmul 6.9 (Metoda trapezului implicită (de ordinul doi)).

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + f(t_i, w_i)].$$

Algoritmul 6.10 (Metoda Adams–Moulton cu doi paşi (de ordinul trei)).

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[5f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 8f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1})].$$

Exerciţiul 6.8. Găsiţi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi de mai jos. Aplicaţi metoda Adams–Moulton cu doi paşi cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0,1]$. Folosiţi metoda trapezului implicită pentru a determina w_1. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă.

$$y' = -\frac{1}{t+1}y.$$

Rezolvare. Soluţia PVI a fost calculată la Exerciţiul 6.5: $y(t) = \frac{1}{t+1}$, $\forall t \in [0,1]$. Deoarece $f(t,y) = -\frac{1}{t+1}y$, aplicând metoda trapezului implicită, obţinem

$$\begin{aligned}
w_0 &= y_0 = 1 \\
w_1 &= w_0 + \frac{h}{2}[f(t_1,w_1) + f(t_0,w_0)] \\
&= 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot w_1 - \frac{1}{0+1}\cdot 1\right) \Rightarrow w_1 = \frac{9}{14}.
\end{aligned}$$

Acum, aplicând metoda Adams–Moulton cu doi paşi, avem

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1 + \frac{h}{12}[5f(t_2, w_2) + 8f(t_1, w_1) - f(t_0, w_0)] \\ &= \frac{9}{14} + \frac{1}{24}\left[-5 \cdot \frac{1}{1+1} \cdot w_2 - 8 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot \frac{9}{14} + \frac{1}{0+1} \cdot 1\right] \Rightarrow w_2 = \frac{26}{53}. \end{aligned}$$

Prin urmare, estimarea soluţiei în $t = 1$ dată de metoda Adams–Moulton cu doi paşi este $w_2 = 26/53$. Eroarea în $t = 1$ este $|1/2 - 26/53| = 1/106$. □

Algoritmul 6.11 (Metoda Milne–Simpson).

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}[f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i-1}, w_{i-1})].$$

Exerciţiul 6.9. Găsiţi soluţia PVI dată prin $y(0) = 1$ şi ecuaţia diferenţială liniară de ordinul întâi de mai jos. Aplicaţi metoda Milne–Simpson cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$. Folosiţi metoda trapezului implicită pentru a determina w_1. Găsiţi eroarea în $t = 1$ comparând cu soluţia corectă.

$$y' = -\frac{1}{t+1}y.$$

Rezolvare. Soluţia PVI a fost calculată la Exerciţiul 6.5: $y(t) = \frac{1}{t+1}$, $\forall t \in [0, 1]$. Deoarece $f(t, y) = -\frac{1}{t+1}y$, aplicând metoda trapezului implicită, obţinem

$$\begin{aligned} w_0 &= y_0 = 1 \\ w_1 &= w_0 + \frac{h}{2}[f(t_1, w_1) + f(t_0, w_0)] \\ &= 1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot w_1 - \frac{1}{0+1} \cdot 1\right) \Rightarrow w_1 = \frac{9}{14}. \end{aligned}$$

Acum, aplicând metoda Milne–Simpson, avem

$$\begin{aligned} w_2 &= w_0 + \frac{h}{3}[f(t_2, w_2) + 4f(t_1, w_1) + f(t_0, w_0)]. \\ &= 1 + \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{1+1} \cdot w_2 - 4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \cdot \frac{9}{14} - \frac{1}{0+1} \cdot 1\right] \Rightarrow w_2 = \frac{46}{91}. \end{aligned}$$

Prin urmare, estimarea soluţiei în $t = 1$ dată de metoda Milne–Simpson este $w_2 = 46/91$. Eroarea în $t = 1$ este $|1/2 - 46/91| = 1/182$. □

Capitolul 7

Interpolarea trigonometrică

Definiţia 7.1. **Transformata Fourier Discretă** (TFD) a lui $x = [x_0, \dots, x_{n-1}]^T$ este vectorul n-dimensional $y = [y_0, \dots, y_{n-1}]^T$, unde $\omega = e^{-i2\pi/n}$ şi

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{jk}.$$

Exerciţiul 7.1. Găsiţi TFD a vectorului $[1, 0, -1, 0]^T$.

Rezolvare. Avem că $n = 4$. Scriind formula pentru Transformata Fourier Discretă (TFD) sub formă matricială, obţinem:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Acum, ţinând cont de faptul că $\omega = e^{-i2\pi/4} = e^{-i\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$ (din formula lui Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$), de unde $\omega^2 = -1$, $\omega^3 = i$ şi $\omega^4 = 1$, relaţia de mai sus devine:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

În final, aplicând această formulă pentru vectorul $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, rezultă că

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, TFD a vectorului $[1, 0, -1, 0]^T$ este $[0, 1, 0, 1]^T$. □

Definiţia 7.2. Transformata Fourier Discretă (TFD) a lui $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ este vectorul n-dimensional $y = [y_0, \ldots, y_{n-1}]^T$, unde $\omega = e^{-i2\pi/n}$ şi

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{jk},$$

sau $y = F_n x$. **Transformata Fourier Discretă inversă** a vectorului y este $x = \overline{F_n} y$.

Exerciţiul 7.2. Găsiţi TFD inversă a vectorului $[0, 1, 0, 1]^T$.

Rezolvare. Am găsit la Exerciţiul 7.1 că

$$F_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix},$$

ceea ce înseamnă că

$$\overline{F_4} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix},$$

deci TFD inversă a vectorului $\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ este

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, TFD inversă a vectorului $[0, 1, 0, 1]^T$ este vectorul $[1, 0, -1, 0]^T$. $\square$

Corolarul 7.1. *Pentru un întreg par n, fie $t_j = c + j(d-c)/n$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$, şi fie $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ un vector de n numere reale. Definim $[a_0, \ldots, a_{n-1}]^T + [b_0, \ldots, b_{n-1}]^T i = F_n x$, unde F_n este Transformata Fourier Discretă. Atunci funcţia*

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} \right) \\ &\quad + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi(t-c)}{d-c} \end{aligned}$$

satisface $P_n(t_j) = x_j$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$.

Exerciţiul 7.3. Folosiţi TFD pentru a găsi funcţia de interpolare trigonometrică pentru următoarele date:

t	x
0	0
$\frac{1}{4}$	0
$\frac{1}{2}$	-2
$\frac{3}{4}$	2

Rezolvare. Transformata Fourier Discretă a vectorului $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ este

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ -2 \\ 1-i \end{bmatrix},$$

de unde $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ şi $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Deoarece $[c, d] = [0, 1]$ şi $n = 4$,

funcţia de interpolare devine:

$$\begin{aligned}
P_4(t) &= \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} \right) \\
&\quad + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi(t-c)}{d-c} \\
&= \frac{0}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{4}} \left(1 \cdot \cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi(t-0)}{1-0} - 1 \cdot \sin \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi(t-0)}{1-0} \right) \\
&\quad + \frac{-2}{\sqrt{4}} \cos \frac{4\pi(t-0)}{1-0} \\
&= \cos 2\pi t - \sin 2\pi t - \cos 4\pi t.
\end{aligned}$$

Se poate verifica uşor că funcţia $P_4(t) = \cos 2\pi t - \sin 2\pi t - \cos 4\pi t$ interpolează exact punctele $(0,0)$, $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 2\right)$. □

Corolarul 7.2. *Pentru un întreg par n, fie $j = 0, \ldots, n-1$, şi fie $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ un vector de n numere reale. Definim $[a_0, \ldots, a_{n-1}]^T + [b_0, \ldots, b_{n-1}]^T i = F_n x$, unde F_n este Transformata Fourier Discretă. Atunci punctele (j, x_j) sunt interpolate de către funcţia trigonometrică*

$$P_n(s) = \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi s}{n} - b_k \sin \frac{2k\pi s}{n} \right) + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi s}{n}.$$

Exerciţiul 7.4. Folosiţi TFD pentru a găsi funcţia de interpolare trigonometrică pentru următoarele date:

t	x
0	0
1	2
2	−2
3	0

Rezolvare. Transformata Fourier Discretă a vectorului $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ este

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ -2 \\ 1+i \end{bmatrix},$$

de unde $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ şi $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Deoarece $n = 4$, funcţia de interpolare devine:

$$\begin{aligned} P_4(s) &= \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi s}{n} - b_k \sin \frac{2k\pi s}{n} \right) + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi s}{n} \\ &= \frac{0}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{4}} \left(1 \cdot \cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi s}{4} + 1 \cdot \sin \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi s}{1-0} \right) \\ &\quad + \frac{-2}{\sqrt{4}} \cos \frac{4\pi s}{4} \\ &= \cos \frac{\pi s}{2} + \sin \frac{\pi s}{2} - \cos \pi s. \end{aligned}$$

Se poate verifica uşor că funcţia $P_4(s) = \cos \frac{\pi s}{2} + \sin \frac{\pi s}{2} - \cos \pi s$ interpolează exact punctele $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, -2)$, $(3, 0)$. □

Exerciţiul 7.5. Găsiţi cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate de ordinul 2 pentru datele din tabel, folosind funcţiile de bază 1 şi $\cos 2\pi t$.

t	x
0	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	0
$\frac{3}{4}$	1

Rezolvare. Transformata Fourier Discretă a vectorului $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ este

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{bmatrix},$$

de unde $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ şi $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Deoarece $[c, d] = [0, 1]$ şi $n = 4$,

funcţia de interpolare devine:

$$\begin{aligned}
P_4(t) &= \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} \right) \\
&\quad + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi(t-c)}{d-c} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{4}} \left(\frac{1}{2} \cdot \cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi(t-0)}{1-0} + \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi(t-0)}{1-0} \right) \\
&\quad + \frac{-1}{\sqrt{4}} \cos \frac{4\pi(t-0)}{1-0} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \frac{1}{2} \sin 2\pi t - \frac{1}{2} \cos 4\pi t.
\end{aligned}$$

Astfel, cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate de ordinul 2 pentru datele din tabel este $P_2(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t$. □

Exerciţiul 7.6. Găsiţi cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate de ordinul 3 pentru datele din tabel, folosind funcţiile de bază 1, $\cos 2\pi t$, şi $\sin 2\pi t$.

t	y
0	2
$\frac{1}{4}$	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{3}{4}$	1

Rezolvare. Transformata Fourier Discretă a vectorului $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ este

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \end{bmatrix},$$

de unde $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ şi $\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Deoarece $[c, d] = [0, 1]$ şi $n = 4$,

funcţia de interpolare devine:

$$
\begin{aligned}
P_4(t) &= \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} \right) \\
&\quad + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi(t-c)}{d-c} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{4}} \left(\frac{1}{2} \cdot \cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi(t-0)}{1-0} - \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi(t-0)}{1-0} \right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{4}} \cos \frac{4\pi(t-0)}{1-0} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t + \frac{1}{2} \cos 4\pi t.
\end{aligned}
$$

Astfel, cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate de ordinul 3 pentru datele din tabel este $P_3(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t - \frac{1}{2} \sin 2\pi t$. □

Capitolul 8

Compresia

Teorema 8.1 (Teorema de interpolare a TCD). *Fie $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ un vector de n numere reale. Definim $y = [y_0, \ldots, y_{n-1}]^T = Cx$, unde C este matricea Transformatei Cosinus Discrete (TCD) de ordinul n:*

$$C = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{\pi}{2n} & \cos\frac{3\pi}{2n} & \cdots & \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} \\ \cos\frac{2\pi}{2n} & \cos\frac{6\pi}{2n} & \cdots & \cos\frac{2(2n-1)\pi}{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{2n} & \cos\frac{(n-1)3\pi}{2n} & \cdots & \cos\frac{(n-1)(2n-1)\pi}{2n} \end{bmatrix}.$$

Atunci funcţia reală

$$P_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} y_0 + \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} y_k \cos\frac{k(2t+1)\pi}{2n}$$

satisface $P_n(j) = x_j$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$.

Exerciţiul 8.1. Folosiţi matricea TCD 4×4 pentru a găsi funcţia de interpolare TCD pentru datele din tabel (puteţi da răspunsul în funcţie de valorile $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\frac{\pi}{8}$ şi $c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\frac{3\pi}{8}$).

t	x
0	1
1	0
2	−1
3	0

Rezolvare. Pentru $n = 4$, matricea TCD are forma:

$$
\begin{aligned}
C &= \sqrt{\frac{2}{4}}\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cos\frac{\pi}{2\cdot 4} & \cos\frac{3\pi}{2\cdot 4} & \cos\frac{5\pi}{2\cdot 4} & \cos\frac{7\pi}{2\cdot 4} \\
\cos\frac{2\pi}{2\cdot 4} & \cos\frac{6\pi}{2\cdot 4} & \cos\frac{10\pi}{2\cdot 4} & \cos\frac{14\pi}{2\cdot 4} \\
\cos\frac{3\pi}{2\cdot 4} & \cos\frac{9\pi}{2\cdot 4} & \cos\frac{15\pi}{2\cdot 4} & \cos\frac{21\pi}{2\cdot 4}
\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cos\frac{\pi}{8} & \cos\frac{3\pi}{8} & \cos\frac{5\pi}{8} & \cos\frac{7\pi}{8} \\
\cos\frac{\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{5\pi}{4} & \cos\frac{7\pi}{4} \\
\cos\frac{3\pi}{8} & \cos\frac{9\pi}{8} & \cos\frac{15\pi}{8} & \cos\frac{21\pi}{8}
\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cos\frac{\pi}{8} & \cos\frac{3\pi}{8} & \cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right) & \cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right) \\
\cos\frac{\pi}{4} & \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) \\
\cos\frac{3\pi}{8} & \cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(3\pi-\frac{3\pi}{8}\right)
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
a & a & a & a \\
b & c & -c & -b \\
a & -a & -a & a \\
c & -b & b & -c
\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

unde am folosit $\cos(\pi-x) = -\cos x$, $\cos(\pi+x) = -\cos x$, $\cos(2\pi-x) = \cos x$, şi am notat $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8}$ şi $c = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8}$.

Acum avem că

$$
\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
a & a & a & a \\
b & c & -c & -b \\
a & -a & -a & a \\
c & -b & b & -c
\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b+c \\ 1 \\ c-b \end{bmatrix},
$$

deci

$$
\begin{aligned}
P_4(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}}y_0 + \sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{k=1}^{n-1} y_k \cos\frac{k(2t+1)\pi}{2n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}}\cdot 0 + \sqrt{\frac{2}{4}}\left((b+c)\cos\frac{1\cdot(2t+1)\pi}{2\cdot 4} + 1\cdot\cos\frac{2\cdot(2t+1)\pi}{2\cdot 4}\right. \\
&\quad \left. +(c-b)\cos\frac{3\cdot(2t+1)\pi}{2\cdot 4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left((b+c)\cos\frac{(2t+1)\pi}{8} + \cos\frac{2(2t+1)\pi}{8} + (c-b)\cos\frac{3(2t+1)\pi}{8}\right.
\end{aligned}
$$

Prin urmare, funcţia de interpolare TCD pentru datele din tabel este $P_4(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((b+c)\cos\frac{(2t+1)\pi}{8} + \cos\frac{2(2t+1)\pi}{8} + (c-b)\cos\frac{3(2t+1)\pi}{8}\right)$. $\square$

Teorema 8.2 (Teorema de aproximare de tip cele mai mici pătrate a TCD). *Fie $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ un vector de n numere reale. Definim $y = [y_0, \ldots, y_{n-1}]^T = Cx$, unde C este matricea Transformatei Cosinus Discrete:*

$$C = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{\pi}{2n} & \cos\frac{3\pi}{2n} & \cdots & \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} \\ \cos\frac{2\pi}{2n} & \cos\frac{6\pi}{2n} & \cdots & \cos\frac{2(2n-1)\pi}{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\frac{(n-1)\pi}{2n} & \cos\frac{(n-1)3\pi}{2n} & \cdots & \cos\frac{(n-1)(2n-1)\pi}{2n} \end{bmatrix}.$$

Atunci, pentru orice întreg pozitiv $m \leq n$, alegerea coeficienţilor $y_0, \ldots, y_{m-1}$ din

$$P_m(t) = \sqrt{\frac{1}{n}}y_0 + \sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{k=1}^{m-1} y_k \cos\frac{k(2t+1)\pi}{2n}$$

minimizează eroarea pătratică de aproximare $\sum_{j=0}^{n-1}(P_m(j) - x_j)^2$ a celor n puncte.

Exerciţiul 8.2. Găsiţi cea mai bună aproximare TCD în sensul celor mai mici pătrate cu $m = 2$ termeni pentru datele din tabel.

t	x
0	1
1	0
2	2
3	−1

Rezolvare. Deoarece matricea TCD pentru $n = 4$ a fost dedusă la Exerciţiul 8.1, avem că

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & -b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2b-2c \\ -1 \\ 2b+2c \end{bmatrix},$$

unde am notat $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{8}$ şi $c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{8}$. Acum avem că

$$\begin{aligned}
P_4(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} y_0 + \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{k=1}^{n-1} y_k \cos \frac{k(2t+1)\pi}{2n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot 1 + \sqrt{\frac{2}{4}} \left((2b - 2c) \cos \frac{1 \cdot (2t+1)\pi}{2 \cdot 4} - 1 \cdot \cos \frac{2 \cdot (2t+1)\pi}{2 \cdot 4} \right. \\
&\quad \left. + (2b + 2c) \cos \frac{3 \cdot (2t+1)\pi}{2 \cdot 4} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left((2b - 2c) \cos \frac{(2t+1)\pi}{8} - \cos \frac{2(2t+1)\pi}{8} \right. \\
&\quad \left. + (2b + 2c) \cos \frac{3(2t+1)\pi}{8} \right).
\end{aligned}$$

Prin urmare, cea mai bună aproximare TCD în sensul celor mai mici pătrate cu $m = 2$ termeni pentru datele din tabel este

$$P_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (2b - 2c) \cos \frac{(2t+1)\pi}{8}.$$

□

Exerciţiul 8.3. Găsiţi cea mai bună aproximare TCD în sensul celor mai mici pătrate cu $m = 3$ termeni pentru datele din tabel.

t	x
0	1
1	1
2	1
3	−1

Rezolvare. Deoarece matricea TCD pentru $n = 4$ a fost dedusă la Exerciţiul 8.1, avem că

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & -b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2b \\ -1 \\ 2c \end{bmatrix},$$

unde am notat $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{8}$ şi $c = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{8}$. Acum avem că

$$\begin{aligned}
P_4(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}}y_0 + \sqrt{\frac{2}{n}}\sum_{k=1}^{n-1} y_k \cos\frac{k(2t+1)\pi}{2n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}}\cdot 1 + \sqrt{\frac{2}{4}}\left(2b\cos\frac{1\cdot(2t+1)\pi}{2\cdot 4} - 1\cdot\cos\frac{2\cdot(2t+1)\pi}{2\cdot 4}\right. \\
&\quad \left. + 2c\cos\frac{3\cdot(2t+1)\pi}{2\cdot 4}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2b\cos\frac{(2t+1)\pi}{8} - \cos\frac{2(2t+1)\pi}{8} + 2c\cos\frac{3(2t+1)\pi}{8}\right)
\end{aligned}$$

Prin urmare, cea mai bună aproximare TCD în sensul celor mai mici pătrate cu $m = 3$ termeni pentru datele din tabel este

$$P_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(2b\cos\frac{(2t+1)\pi}{8} - \cos\frac{2(2t+1)\pi}{8}\right).$$

□

Definiţia 8.1. Transformata Cosinus Discretă bi-dimensională (TCD-2D) a matricii $n \times n$ X este matricea $Y = CXC^T$, unde C este

$$C = \sqrt{\frac{2}{n}}\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\cos\frac{\pi}{2n} & \cos\frac{3\pi}{2n} & \cdots & \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} \\
\cos\frac{2\pi}{2n} & \cos\frac{6\pi}{2n} & \cdots & \cos\frac{2(2n-1)\pi}{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\cos\frac{(n-1)\pi}{2n} & \cos\frac{(n-1)3\pi}{2n} & \cdots & \cos\frac{(n-1)(2n-1)\pi}{2n}
\end{bmatrix}.$$

Teorema 8.3 (Teorema de interpolare a TCD-2D). *Fie $X = (x_{ij})$ o matrice de n^2 numere reale. Fie $Y = (y_{kl})$ Transformata Cosinus Discretă bi-dimensională (TCD-2D) a lui X. Definim $a_0 = 1/\sqrt{2}$ şi $a_k = 1$ pentru $k > 0$. Atunci funcţia reală*

$$P_n(s,t) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} y_{kl}a_k a_l \cos\frac{k(2s+1)\pi}{2n}\cos\frac{l(2t+1)\pi}{2n}$$

satisface $P_n(i,j) = x_{ij}$, pentru $i,j = 0,\ldots,n-1$.

Exerciţiul 8.4. Găsiţi TCD-2D a matricii X, şi găsiţi funcţia de interpolare corespunzătoare $P_n(s,t)$ pentru punctele (i,j,x_{ij}), $i,j = 0,\ldots,n-1$.

$$X = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1
\end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Deoarece matricea TCD pentru $n = 4$ a fost dedusă la Exercițiul 8.1, Transformata Cosinus Discretă bi-dimensională (TCD-2D) a lui X este

$$\begin{aligned}
Y &= CXC^T \\
&= \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & -b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & a & c \\ a & c & -a & -b \\ a & -c & -a & b \\ a & -b & a & -c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2b-2c & 0 & 2c-2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2b+2c & 0 & -2b-2c & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Deducem că $y_{00} = 2$, $y_{02} = 2$, $y_{10} = 2b - 2c$, $y_{12} = 2c - 2b$, $y_{30} = 2b + 2c$, $y_{32} = -2b - 2c$. Funcția de interpolare este:

$$\begin{aligned}
P_n(s,t) &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} y_{kl}a_k a_l \cos\frac{k(2s+1)\pi}{2n}\cos\frac{l(2t+1)\pi}{2n} \\
&= \frac{2}{4}\left(2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{0(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{0(2t+1)\pi}{2\cdot 4}\right. \\
&\quad +2\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{0(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{2\cdot 4} \\
&\quad +(2b-2c)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{0(2t+1)\pi}{2\cdot 4} \\
&\quad +(2c-2b)\cos\frac{1(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{2\cdot 4} \\
&\quad +(2b+2c)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{3(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{0(2t+1)\pi}{2\cdot 4} \\
&\quad \left.+(-2b-2c)\cos\frac{3(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{2\cdot 4}\right).
\end{aligned}$$

Prin urmare, funcția de interpolare este:

$$\begin{aligned}
P_4(s,t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{8} + \frac{b-c}{\sqrt{2}}\cos\frac{(2s+1)\pi}{8} + \frac{b+c}{\sqrt{2}}\cos\frac{3(2s+1)\pi}{8} \\
&\quad +(c-b)\cos\frac{(2s+1)\pi}{8}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{8} \\
&\quad -(b+c)\cos\frac{3(2s+1)\pi}{8}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Se poate verifica, de exemplu, că $P_4(0,0) = 1$, şi celelalte egalităţi asemănătoare.

□

Exerciţiul 8.5. Găsiţi aproximarea de tip cele mai mici pătrate pentru matricea de mai jos, folosind funcţiile de bază 1, $\cos\frac{(2s+1)\pi}{8}$, $\cos\frac{2(2t+1)\pi}{8}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezolvare. Deoarece matricea TCD pentru $n = 4$ a fost dedusă la Exerciţiul 8.1, Transformata Cosinus Discretă bi-dimensională (TCD-2D) a lui X este

$$\begin{aligned} Y &= CXC^T \\ &= \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & -b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & a & c \\ a & c & -a & -b \\ a & -c & -a & b \\ a & -b & a & -c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ b-c & 0 & c-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b+c & 0 & -b-c & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Deducem că $y_{00} = 3$, $y_{02} = 1$, $y_{10} = b-c$, $y_{12} = c-b$, $y_{30} = b+c$, $y_{32} = -b-c$. Funcţia de interpolare este:

$$\begin{aligned} P_n(s,t) &= \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} y_{kl}a_k a_l \cos\frac{k(2s+1)\pi}{2n}\cos\frac{l(2t+1)\pi}{2n} \\ &= \frac{2}{4}\Bigg(3\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{0(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{0(2t+1)\pi}{2\cdot 4} \\ &\quad +1\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{0(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{2\cdot 4} \\ &\quad +(b-c)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{1(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{0(2t+1)\pi}{2\cdot 4} \\ &\quad +(c-b)\cos\frac{1(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{2\cdot 4} \\ &\quad +(b+c)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{3(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{0(2t+1)\pi}{2\cdot 4} \\ &\quad +(-b-c)\cos\frac{3(2s+1)\pi}{2\cdot 4}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{2\cdot 4}\Bigg). \end{aligned}$$

Prin urmare, aproximarea de tip cele mai mici pătrate pentru matricea X, folosind funcţiile de bază 1, $\cos\frac{(2s+1)\pi}{8}$, $\cos\frac{2(2t+1)\pi}{8}$, este:

$$P(s,t) = \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{b-c}{2\sqrt{2}}\cos\frac{(2s+1)\pi}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{2(2t+1)\pi}{8}.$$

□

Definiţia 8.2. Fie n un întreg pozitiv par. **Transformata Cosinus Discretă Modificată (TCDM)** a lui $x = [x_0, \ldots, x_{2n-1}]^T$ este vectorul n-dimensional

$$y = Mx,$$

unde M este matricea $n \times 2n$

$$M_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n}}\cos\frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi}{n},$$

pentru $0 \le i \le n-1$ şi $0 \le j \le 2n-1$.

Exerciţiul 8.6. Găsiţi TCDM a vectorului $[-2,-1,1,2]^T$. Exprimaţi răspunsul în funcţie de $b = \cos\frac{\pi}{8}$ şi $c = \cos\frac{3\pi}{8}$.

Rezolvare. Avem că $n = 2$, şi matricea TCDM este:

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{\frac{2}{2}}\begin{bmatrix} \cos\frac{(0+\frac{1}{2})(0+\frac{2}{2}+\frac{1}{2})\pi}{2} & \cos\frac{(0+\frac{1}{2})(1+\frac{2}{2}+\frac{1}{2})\pi}{2} \\ \cos\frac{(1+\frac{1}{2})(0+\frac{2}{2}+\frac{1}{2})\pi}{2} & \cos\frac{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{2}{2}+\frac{1}{2})\pi}{2} \end{bmatrix.} \\ &\qquad \begin{matrix.} \cos\frac{(0+\frac{1}{2})(2+\frac{2}{2}+\frac{1}{2})\pi}{2} & \cos\frac{(0+\frac{1}{2})(3+\frac{2}{2}+\frac{1}{2})\pi}{2} \\ \cos\frac{(1+\frac{1}{2})(2+\frac{2}{2}+\frac{1}{2})\pi}{2} & \cos\frac{(1+\frac{1}{2})(3+\frac{2}{2}+\frac{1}{2})\pi}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{8} & \cos\frac{5\pi}{8} & \cos\frac{7\pi}{8} & \cos\frac{9\pi}{8} \\ \cos\frac{9\pi}{8} & \cos\frac{15\pi}{8} & \cos\frac{21\pi}{8} & \cos\frac{27\pi}{8} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{8} & \cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right) & \cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{8}\right) & \cos\left(3\pi-\frac{3\pi}{8}\right) & \cos\left(3\pi+\frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c & -c & -b & -b \\ -b & b & -c & -c \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

unde am folosit $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$, şi am notat $b = \cos\frac{\pi}{8}$ şi $c = \cos\frac{3\pi}{8}$.

Prin urmare, TCDM a vectorului $[-2,-1,1,2]^T$ este:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c & -b & -b \\ -b & b & -c & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3b-c \\ b-3c \end{bmatrix},$$

adică vectorul $[-3b-c, b-3c]^T$. □

Teorema 8.4 (Inversarea TCDM prin suprapunere). *Fie M matricea TCDM $n \times 2n$,*

$$M_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi}{n},$$

pentru $0 \le i \le n-1$ şi $0 \le j \le 2n-1$, şi $N = M^T$. Fie u_1, u_2, u_3 n-vectori, şi luăm

$$v_1 = M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ şi } v_2 = M \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Atunci n-vectorii w_1, w_2, w_3, w_4 definiţi prin

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = Nv_1 \text{ şi } \begin{bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = Nv_2,$$

satisfac $u_2 = \frac{1}{2}(w_2 + w_3)$.

Exerciţiul 8.7. Găsiţi TCDM a celor două suprapuneri de lungime 4 ale vectorului $[-3,-2,-1,1,2,3]^T$. Reconstruiţi apoi secţiunea din mijloc, folosind TCDM inversă.

Rezolvare. Matricea TCDM a fost calculată pentru $n = 2$ la Exerciţiul 8.6 ca fiind

$$M = \begin{bmatrix} c & -c & -b & -b \\ -b & b & -c & -c \end{bmatrix}.$$

Scriem vectorul $[-3,-2,-1,1,2,3]^T$ sub forma $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, de unde $u_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Astfel, TCDM a vectorului $[-3,-2,-1,1]^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ este:

$$v_1 = M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c & -b & -b \\ -b & b & -c & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix},$$

şi TCDM a vectorului $[-1,1,2,3]^T = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ este:

$$v_2 = M\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c & -b & -b \\ -b & b & -c & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5b-2c \\ 2b-5c \end{bmatrix}.$$

Acum, avem că

$$N = M^T = \begin{bmatrix} c & -b \\ -c & b \\ -b & -c \\ -b & -c \end{bmatrix},$$

deci

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = Nv_1 = \begin{bmatrix} c & -b \\ -c & b \\ -b & -c \\ -b & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b^2-c^2 \\ b^2+c^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

respectiv

$$\begin{bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = Nv_2 = \begin{bmatrix} c & -b \\ -c & b \\ -b & -c \\ -b & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5b-2c \\ 2b-5c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b^2-2c^2 \\ 2b^2+2c^2 \\ 5b^2+5c^2 \\ 5b^2+5c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix},$$

unde am folosit faptul că

$$b^2+c^2 = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right) = \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} = 1.$$

În final, avem că

$$\frac{1}{2}(w_2+w_3) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = u_2,$$

ceea ce constituie reconstrucţia secţiunii din mijloc, pentru care am folosit TCDM inversă. □

Capitolul 9

Valori proprii şi valori singulare

Algoritmul 9.1 (Iteraţia de putere).

Dându-se vectorul iniţial x_0.

for $j = 1, 2, 3, \ldots$

$u_{j-1} = x_{j-1}/||x_{j-1}||_2$

$x_j = Au_{j-1}$

$\lambda_j = u_{j-1}^T A u_{j-1}$

end

$u_j = x_j/||x_j||_2$

Exerciţiul 9.1. Fie $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai lui A. Aplicaţi un pas din iteraţia de putere cu vectorul iniţial $x_0 = [1, -2]^T$. Decideţi la care valoare proprie va converge iteraţia de putere.

Rezolvare. Pentru a determina valorile proprii ale matricii A, rezolvăm ecuaţia

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(2-\lambda) = 0,$$

deci valorile proprii sunt $\lambda^1 = -1$, $\lambda^2 = 2$. Vectorii proprii normalizaţi sunt:

$$(A - \lambda_1 I_2)u^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot u_1^1 + 0 \cdot u_2^1 = 0 \\ 2u_1^1 + 3u_2^1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix},$$

$$(A-\lambda_2 I_2)u^2 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^2\\u_2^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-3u_1^2 = 0\\ 2u_1^2 = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow u^2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Aplicăm acum un pas din iteraţia de putere:

$$\begin{aligned}
u_0 &= x_0/||x_0||_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\\
x_1 &= Au_0 = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\\
\lambda_1 &= u_0^T A u_0 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix} = \frac{3}{5}\\
u_1 &= x_1/||x_1||_2 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Iteraţia de putere va converge la valoarea proprie $\lambda^2 = 2$ şi la vectorul propriu $u^2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Estimările după un pas al iteraţiei de putere sunt $\lambda^2 \approx \frac{3}{5}$ şi $u^2 \approx \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$. □

Algoritmul 9.2 (Iteraţia de putere inversă).

Dându-se vectorul iniţial x_0 *şi deplasarea* s

for $j = 1, 2, 3, \ldots$

$u_{j-1} = x_{j-1}/||x_{j-1}||_2$

Rezolvăm $(A - sI)x_j = u_{j-1}$

$\lambda_j = u_{j-1}^T x_j$

end

$u_j = x_j/||x_j||_2$

Exerciţiul 9.2. Fie $A = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}$. Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai lui A. Aplicaţi un pas din iteraţia de putere inversă cu vectorul iniţial $x_0 = [1, -2]^T$ şi deplasarea $s = -2$. Decideţi la care valoare proprie va converge iteraţia de putere inversă.

Rezolvare. Valorile proprii şi vectorii proprii ai lui A au fost determinaţi la Exerciţiul 9.1:

$$\lambda^1 = -1,\ u^1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \qquad \lambda^2 = 2,\ u^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicând un pas din iteraţia de putere inversă cu deplasarea -2, avem că

$$\begin{aligned}
u_0 &= x_0/||x_0||_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
(A - sI)x_1 &= u_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
\lambda_1 &= u_0^T x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \\
u_1 &= x_1/||x_1||_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Iteraţia de putere inversă va converge la valoarea proprie $\lambda^1 = -1$ şi la vectorul propriu $u^1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$. Estimările după un pas al iteraţiei de putere sunt $\lambda^1 \approx \frac{1}{\lambda_1} + s = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3}$ şi $u^1 \approx \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. □

Algoritmul 9.3 (Iteraţia câtului Rayleigh).

Dându-se vectorul iniţial x_0
for $j = 1, 2, 3, \ldots$
  $u_{j-1} = x_{j-1}/||x_{j-1}||_2$
  $\lambda_{j-1} = u_{j-1}^T A u_{j-1}$
  Rezolvăm $(A - \lambda_{j-1} I)x_j = u_{j-1}$
end
$u_j = x_j/||x_j||_2$
$\lambda_j = u_j^T A u_j$

Exerciţiul 9.3. Fie $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai lui A. Aplicaţi un pas din iteraţia câtului Rayleigh cu vectorul iniţial $x_0 = [1, -2]^T$.

Rezolvare. Valorile proprii şi vectorii proprii ai lui A au fost determinaţi la Exerciţiul 9.1:

$$\lambda^1 = -1,\ u^1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \qquad \lambda^2 = 2,\ u^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicând un pas din iteraţia câtului Rayleigh, avem că

$$\begin{aligned}
u_0 &= x_0/||x_0||_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
\lambda_0 &= u_0^T A u_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \\
(A - \lambda_0 I)x_1 &= u_0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & 0 \\ 2 & \frac{7}{5} \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{8} \\ -\frac{3\sqrt{5}}{28} \end{bmatrix} \\
u_1 &= x_1/||x_1||_2 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{\sqrt{85}} \\ -\frac{6}{\sqrt{85}} \end{bmatrix} \\
\lambda_1 &= u_1^T A u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{\sqrt{85}} & -\frac{6}{\sqrt{85}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{\sqrt{85}} \\ -\frac{6}{\sqrt{85}} \end{bmatrix} = \frac{107}{85}.
\end{aligned}$$

Iteraţia câtului Rayleigh va converge la valoarea proprie $\lambda^2 = 2$ şi la vectorul propriu $u^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Estimările după un pas al iteraţiei câtului Rayleigh sunt $\lambda^2 \approx \frac{107}{85}$ şi $u^2 \approx \begin{bmatrix} -\frac{7}{\sqrt{85}} \\ -\frac{6}{\sqrt{85}} \end{bmatrix}$. □

Algoritmul 9.4 (Iteraţia simultană normalizată).

Luăm $\overline{Q_0} = I$
for $j = 0, 1, 2, \ldots$
  $A\overline{Q_j} = \overline{Q_{j+1}} R_{j+1}$
end
$\Lambda = diag(\overline{Q}^T A \overline{Q})$

Exerciţiul 9.4. Fie $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai lui A. Aplicaţi un pas din iteraţia simultană normalizată cu vectorul iniţial $x_0 = [1, -2]^T$.

Rezolvare. Valorile proprii şi vectorii proprii ai lui A au fost determinaţi la Exerciţiul 9.1:

$$\lambda^1 = -1,\ u^1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}, \qquad \lambda^2 = 2,\ u^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru a aplica un pas din iteraţia simultană normalizată, calculăm mai întâi pe $A\overline{Q_0} = A$, deoarece $\overline{Q_0} = I$. Deci, trebuie să efectuăm o factorizare QR a matricii A. Urmărind Algoritmul 4.3, luăm $y_1 = A_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Atunci $r_{11} = ||y_1||_2 = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, şi primul vector unitar este

$$q_1 = \frac{y_1}{||y_1||_2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Pentru a găsi al doilea vector unitar, luăm

$$y_2 = A_2 - q_1 q_1^T A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{5}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

şi

$$q_2 = \frac{y_2}{||y_2||_2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Deoarece $r_{12} = q_1^T A_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$ şi $r_{22} = ||y_2||_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, rezultatul scris în formă matricială este

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \overline{Q_1} R_1.$$

Acum,

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\overline{Q_1}^T A \overline{Q_1}) = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{14}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, estimările date de iteraţia simultană normalizată pentru valorile proprii sunt $\lambda^1 \approx \frac{2}{5}$, $\lambda^2 \approx \frac{3}{5}$, iar pentru vectorii proprii sunt $u^1 \approx \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$, $u^2 \approx \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$. □

Teorema 9.1. *Fie A o matrice $m \times n$. Atunci există două baze ortonormate $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a lui $\mathbb{R}^n$, şi $\{u_1, \ldots, u_m\}$ a lui $\mathbb{R}^m$, şi numerele reale $s_1 \geq \cdots \geq s_n \geq 0$ astfel încât $Av_i = s_i u_i$ pentru $1 \leq i \leq \min\{m, n\}$. Coloanele lui $V = [v_1|\ldots|v_n]$, vectorii singulari drepţi, reprezintă mulţimea de vectori proprii ortonormali ai lui $A^T A$; coloanele lui $U = [u_1|\ldots|u_m]$, vectorii singulari stângi, reprezintă mulţimea de vectori proprii ortonormali ai lui AA^T.*

Exerciţiul 9.5. Găsiţi DVS a următoarei matrici: $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rezolvare. Trebuie să calculăm valorile proprii şi vectorii proprii ai matricii:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pentru aceasta rezolvăm ecuaţia

$$\det(A^T A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

de unde $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$. Vectorii proprii ortonormali sunt

$$(A^T A - \lambda_1 I_2)v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2v_{1,1} - 2v_{2,1} = 0 \\ -2v_{1,1} - 2v_{2,1} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$(A^T A - \lambda_2 I_2)v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v_{1,2} - 2v_{2,2} = 0 \\ -2v_{1,2} + 2v_{2,2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, valorile singulare aranjate în ordine descrescătoare şi vectorii singulari drepţi corespunzători sunt $s_1^2 = 4$, $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ şi $s_2^2 = 0$, $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Valorile singulare sunt 2 şi 0. Conform Teoremei 9.1, u_1 este definit prin

$$\begin{aligned} 2u_1 &= Av_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ u_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

şi $u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ este ales pentru a fi ortogonal pe u_1. DVS este

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

□

Faptul 9.1. *Matricea $m \times n$ A poate fi scrisă ca suma de matrici de rangul unu*

$$A = \sum_{i=1}^{r} s_i u_i v_i^T,$$

unde r este rangul lui A, şi u_i şi v_i sunt coloanele i ale lui U şi, respectiv, V.

Exerciţiul 9.6. Găsiţi cea mai bună aproximare de rang unu a matricii $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Rezolvare. Trebuie să calculăm valorile proprii şi vectorii proprii ai matricii:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Pentru aceasta rezolvăm ecuaţia

$$\det(A^T A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

de unde $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$. Vectorii proprii ortonormali sunt

$$(A^T A - \lambda_1 I_2) v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4v_{1,1} - 2v_{2,1} = 0 \\ -2v_{1,1} - v_{2,1} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix},$$

$$(A^T A - \lambda_2 I_2) v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,2} \\ v_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_{1,2} - 2v_{2,2} = 0 \\ -2v_{1,2} + 4v_{2,2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, valorile singulare aranjate în ordine descrescătoare şi vectorii singulari drepţi corespunzători sunt $s_1^2 = 9$, $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ şi $s_2^2 = 4$, $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Valorile singulare sunt 3 şi 2. Conform Teoremei 9.1, u_1 este definit prin

$$\begin{aligned} 3u_1 &= Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{6}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\ u_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

şi $u_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ este ales pentru a fi ortogonal pe u_1. DVS este

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Cea mai bună aproximare de rang unu a matricii $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ este:

$$3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix}.$$

□

Exerciţiul 9.7. Găsiţi cea mai bună dreaptă de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru următorii vectori, şi proiecţiile vectorilor pe subspaţiul unudimensional găsit: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Rezolvare. Formăm matricea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, şi va trebui să găsim descompunerea DVS a matricii A.

Trebuie să calculăm valorile proprii şi vectorii proprii ai matricii:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Pentru aceasta rezolvăm ecuaţia

$$\det(A^T A - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0,$$

de unde $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$. Vectorii proprii ortonormali sunt

$$(A^TA - \lambda_1 I_2)v_1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}-4 & -2\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1,1}\\v_{2,1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-4v_{1,1} - 2v_{2,1} = 0\\ -2v_{1,1} - v_{2,1} = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},$$

$$(A^TA - \lambda_2 I_2)v_2 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & -2\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1,2}\\v_{2,2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}v_{1,2} - 2v_{2,2} = 0\\ -2v_{1,2} + 4v_{2,2} = 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}.$$

Prin urmare, valorile singulare aranjate în ordine descrescătoare şi vectorii singulari drepţi corespunzători sunt $s_1^2 = 9$, $v_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ şi $s_2^2 = 4$, $v_2 = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$.

Valorile singulare sunt 3 şi 2. Conform Teoremei 9.1, u_1 este definit prin

$$\begin{aligned}3u_1 &= Av_1 = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{5}}\\ \frac{6}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\\ u_1 &= \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

şi $u_2 = \begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$ este ales pentru a fi ortogonal pe u_1. DVS este

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}.$$

Cea mai bună aproximare de rang unu a matricii $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -2\end{bmatrix}$ este:

$$3\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{6}{5}\\ \frac{6}{5} & -\frac{12}{5}\end{bmatrix}.$$

Proiecţiile sunt

$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{6}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{6}{5}\\ -\frac{12}{5}\end{bmatrix}.$$

□

Capitolul 10

Optimizarea

Definiţia 10.1. Funcţia continuă $f(x)$ se numeşte **unimodală** pe intervalul $[a, b]$ dacă există exact un minim sau un maxim relativ pe $[a, b]$, şi f este strict descrescătoare sau crescătoare în toate celelalte puncte.

Algoritmul 10.1 (Căutarea secţiunii de aur).

Fiind dată funcţia f unimodală cu minimul în $[a, b]$
for $i = 1, 2, 3, \ldots$
    $g = (\sqrt{5} - 1)/2$
    if $f(a + (1 - g)(b - a)) < f(a + g(b - a))$
        $b = a + g(b - a)$
    else
        $a = a + (1 - g)(b - a)$
    end
end
Intervalul final $[a, b]$ conţine minimul.

Exerciţiul 10.1. Găsiţi un interval de lungime unu pe care funcţia $f(x) = x^2 - x$ este unimodală în jurul minimului relativ. Aplicaţi apoi un pas din căutarea secţiunii de aur pentru găsirea minimului funcţiei pe intervalul respectiv.

Rezolvare. Funcţia este unimodală pe intervalul $[a, b] = [0, 1]$. Minimul funcţiei este $\frac{1}{2}$. Acum putem aplica căutarea secţiunii de aur:

$$\begin{aligned} f(a + (1 - g)(b - a)) &= f\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = 2 - \sqrt{5} \\ f(a + g(b - a)) &= f\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) = 2 - \sqrt{5} \end{aligned}$$

Deoarece $f(a+(1-g)(b-a)) = f(a+g(b-a))$, noul interval este $[a,b] = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right]$. O aproximare a minimului este $\frac{a+b}{2} = \frac{5-\sqrt{5}}{4} \approx 0.69$. □

Algoritmul 10.2 (Interpolarea parabolică succesivă).

Pornim cu minimele aproximative r, s, t
for $i = 1, 2, 3, \ldots$
$x = \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s)-f(r))(t-r)(t-s)}{2[(s-r)(f(t)-f(s))-(f(s)-f(r))(t-s)]}$
$t = s$
$s = r$
$r = x$
end

Exercițiul 10.2. Găsiți un interval de lungime unu pe care funcția $f(x) = x^2 - x$ este unimodală în jurul minimului relativ. Aplicați apoi un pas din interpolarea parabolică succesivă pentru găsirea minimului funcției pe intervalul respectiv.

Rezolvare. Funcția este unimodală pe intervalul $[a,b] = [0,1]$. Minimul funcției este $\frac{1}{2}$. Dacă luăm $r = 0$, $s = \frac{1}{3}$, $t = 1$, avem că $f(r) = f(0) = 0$, $f(s) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{9}$, $f(t) = f(1) = 0$, avem că

$$\begin{aligned}
x &= \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s)-f(r))(t-r)(t-s)}{2[(s-r)(f(t)-f(s))-(f(s)-f(r))(t-s)]} \\
&= \frac{0+\frac{1}{3}}{2} - \frac{\left(f\left(\frac{1}{3}\right)-f(0)\right)(1-0)\left(1-\frac{1}{3}\right)}{2\left[\left(\frac{1}{3}-0\right)\left(f(1)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right)-\left(f\left(\frac{1}{3}\right)-f(0)\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]} \\
&= \frac{1}{6} - \frac{\left(-\frac{2}{9}-0\right)\cdot\frac{2}{3}}{2\left[\frac{1}{3}\left(0+\frac{2}{9}\right)-\left(-\frac{2}{9}-0\right)\cdot\frac{2}{3}\right]} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Deci aproximarea minimului este $\frac{2}{3} \approx 0.66$. Noile valori ale lui t, s și r sunt: $t = \frac{1}{3}$, $s = 0$, $r = \frac{2}{3}$. □

Algoritmul 10.3 (Metoda lui Newton).

Pasul Newton este

$$\begin{cases} H_f(x_k)v = -\nabla f(x_k) \\ x_{k+1} = x_k + v, \end{cases}$$

unde

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$$

denotă gradientul lui f, iar

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix},$$

este matricea hessiană a lui f.

Exerciţiul 10.3. Aplicaţi un pas din metoda lui Newton cu vectorul iniţial $[1, 1]^T$ pentru găsirea minimului funcţiei $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y + 5$.

Rezolvare. În primul rând, calculăm gradientul lui f:

$$\nabla f(x, y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]^T = [4x - 4y - 4, 10y - 4x - 2]^T,$$

iar apoi hessiana lui f:

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Pasul Newton este în acest caz:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} v = -\begin{bmatrix} 4x_k - 4y_k - 4 \\ 10y_k - 4x_k - 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + v. \end{cases}$$

Pentru $k = 0$, avem $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ şi

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} v = -\begin{bmatrix} 4 - 4 - 4 \\ 10 - 4 - 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4v_1 - 4v_2 = 4 \\ -4v_1 + 10v_2 = -4 \\ x_1 = 1 + v_1 \\ y_1 = 1 + v_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 0 \\ x_1 = 1 + v_1 = 2 \\ y_1 = 1 + v_2 = 1. \end{cases}$$

Prin urmare, aproximarea minimului funcţiei f folosind un pas din metoda lui Newton este $(x_1, y_1) = (2, 1)$.

Deoarece funcţia se poate scrie $f(x, y) = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (x-2y)^2$, se observă imediat că minimul funcţiei este $(x, y) = (2, 1)$, ceea ce înseamnă că un pas din metoda lui Newton este suficient pentru a găsi minimul funcţiei f. □

Algoritmul 10.4 (Metoda gradientului).

for $k = 0, 1, 2, \ldots$

$v = \nabla f(x_k)$

Minimizăm $f(x_k - sv)$ *pentru scalarul* $s = s^*$

$x_{k+1} = x_k - s^* v$

end

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$$

Exerciţiul 10.4. Aplicaţi un pas din metoda gradientului cu vectorul iniţial $[1, 1]^T$ pentru găsirea minimului funcţiei $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y + 5$.

Rezolvare. În primul rând, calculăm gradientul lui f:

$$\nabla f(x, y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]^T = [4x - 4y - 4, 10y - 4x - 2]^T .$$

Apoi, un pas din metoda gradientului are forma:

$$\begin{cases} v = -\begin{bmatrix} 4x_k - 4y_k - 4 \\ 10y_k - 4x_k - 2 \end{bmatrix} \\ \text{Minimizăm } f\left(\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - sv\right) \text{ pentru scalarul } s = s^* \\ \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - s^* v. \end{cases}$$

Pentru $k = 0$, avem $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ şi

$$\begin{cases} v = -\begin{bmatrix} 4x_0 - 4y_0 - 4 \\ 10y_0 - 4x_0 - 2 \end{bmatrix} \\ \text{Minimizăm } f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - sv\right) \text{ pentru scalarul } s = s^* \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - s^* v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -\begin{bmatrix} 4 - 4 - 4 \\ 10 - 4 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \text{Minimizăm } f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - s\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}\right) \text{ pentru scalarul } s = s^* \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - s^* \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \text{Minimizăm } f(1 - 4s, 1 + 4s) \text{ pentru scalarul } s = s^* \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - s^* \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \\ \text{Minimizăm } 176s^2 + 32s + 2 \text{ pentru scalarul } s = s^* \Rightarrow s^* = -\frac{1}{11} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{11} \\ \frac{7}{11} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Prin urmare, aproximarea minimului funcţiei f folosind un pas din metoda gradientului este $(x_1, y_1) = \left(\frac{15}{11}, \frac{7}{11}\right) \approx (1.36, 0.63)$. □

Algoritmul 10.5 (Căutarea gradienţilor conjugaţi).

Fie x_0 *valoarea iniţială şi luăm* $d_0 = r_0 = -\nabla f(x_0)$

for $k = 1, 2, 3, \ldots$

$\alpha_k = \alpha$ *care minimizează* $f(x_{k-1} + \alpha d_{k-1})$

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k d_{k-1}$$
$$r_k = -\nabla f(x_k)$$
$$\beta_k = \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}}$$
$$d_k = r_k + \beta_k d_{k-1}$$

end

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$$

Exerciţiul 10.5. Aplicaţi un pas din căutarea gradienţilor conjugaţi cu vectorul iniţial $[1,1]^T$ pentru găsirea minimului funcţiei $f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 4x - 2y + 5$.

Rezolvare. În primul rând, calculăm gradientul lui f:

$$\nabla f(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]^T = [4x - 4y - 4, 10y - 4x - 2]^T .$$

Apoi, un pas din căutarea gradienţilor conjugaţi are forma:

$$\begin{cases} \alpha_k = \alpha \text{ care minimizează } f(x_{k-1} + \alpha d_{k-1}) \\ x_k = x_{k-1} + \alpha_k d_{k-1} \\ r_k = -\nabla f(x_k) \\ \beta_k = \frac{r_k^T r_k}{r_{k-1}^T r_{k-1}} \\ d_k = r_k + \beta_k d_{k-1}. \end{cases}$$

Pentru $k = 1$, avem $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $d_0 = r_0 = -\nabla f(x_0) = -\begin{bmatrix} 4x_0 - 4y_0 - 4 \\ 10y_0 - 4x_0 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ şi

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \text{ care minimizează } f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}\right) = f(1 + 4\alpha, 1 - 4\alpha) \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \\ r_1 = -\begin{bmatrix} 4x_1 - 4y_1 - 4 \\ 10y_1 - 4x_1 - 2 \end{bmatrix} \\ \beta_1 = \frac{r_1^T r_1}{r_0^T r_0} \\ d_1 = r_1 + \beta_1 d_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha \text{ care minimizează } 176s^2 + 32s + 2 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{11} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{11} \\ \frac{7}{11} \end{bmatrix} \\ r_1 = -\begin{bmatrix} 4x_1 - 4y_1 - 4 \\ 10y_1 - 4x_1 - 2 \end{bmatrix} \\ \beta_1 = \frac{r_1^T r_1}{r_0^T r_0} \\ d_1 = r_1 + \beta_1 d_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{11} \\ \frac{7}{11} \end{bmatrix} \\ r_1 = -\begin{bmatrix} 4x_1 - 4y_1 - 4 \\ 10y_1 - 4x_1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{12}{11} \end{bmatrix} \\ \beta_1 = \frac{r_1^T r_1}{r_0^T r_0} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{12}{11} & \frac{12}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{12}{11} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{144}{121} \\ d_1 = r_1 + \beta_1 d_0 = \begin{bmatrix} \frac{12}{11} \\ \frac{12}{11} \end{bmatrix} + \frac{144}{121} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{708}{121} \\ -\frac{444}{121} \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Prin urmare, aproximarea minimului funcţiei f folosind un pas din căutarea gradienţilor conjugaţi este $(x_1, y_1) = \left(\frac{15}{11}, \frac{7}{11}\right) \approx (1.36, 0.63)$. □