Universitatea Politehnica Timișoara
Piața Victoriei nr. 2
RO 300006 - Timișoara
Tel: +40 256 403000
Fax: +40 256 403021
rector@upt.ro
www.upt.ro

CURS

ELECTROTEHNICĂ

AC_CTI/B

Ș.l. dr. ing. Ildiko TATAI

ildiko.tatai@upt.ro

2022

Cap.5 Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu

Universitatea Politehnica Timişoara

5.1 Circuite de ordinul I

În regim variabil ecuaţiile unui circuit de ordinul I (format din rezistoare şi surse, dar un singur condensator sau o singură bobină), pot fi reduse la o singură ecuaţie diferenţială de ordinul I în u_C, respectiv în i_L – de unde şi denumirea circuitului. După rezolvarea acestei ecuaţii, cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff pot fi determinate toate celelalte necunoscute. Din acest motiv u_C şi i_L sunt denumite *mărimi de stare*, iar ecuaţiile diferenţiale respective, *ecuaţii de stare*.

Circuitele de ordinul I cele mai simple sunt circuitele în care sursele sunt constante în timp. Regimul variabil în astfel de circuite apare în urma închiderii sau deschiderii unor comutatoare. Anterior comutării, circuitul se afla în regim staţionar – curenţi şi tensiuni constanţi în timp, iar după un interval de timp suficient de lung el ajunge din nou în regim staţionar. Trecerea de la un regim staţionar la un alt regim staţionar, interval în care curenţii şi tensiunile variază în timp, chiar dacă sursele au valori constante în timp, se numeşte *regim tranzitoriu*. Modul în care curenţii şi tensiunile variază în timp se determină rezolvând ecuaţia de stare a circuitului.

Ecuaţia de stare a circuitului RC

Circuitul rezistiv (format din rezistoare în diferite conexiuni) văzut de la bornele condensatorului se echivalează cu un generator Thevenin (fig.5.1):

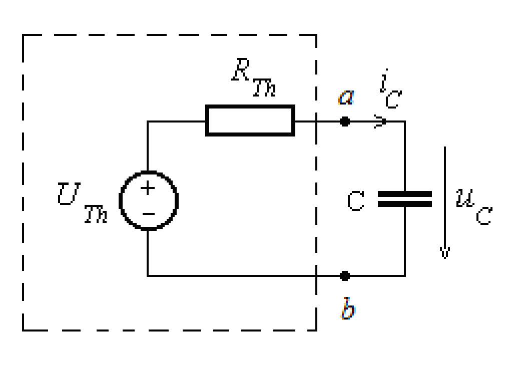


Fig.5.1

Scriem ecuaţia corespunzătoare teoremei a II-a a lui Kirchhoff:

$$U_{TH} = R_{Th} i_C + u_C \,, \tag{1}$$

şi relaţia de legătură dintre curentul prin condensator şi tensiunea la bornele acestuia:

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}\,. \tag{2}$$

Combinând cele două relaţii obţinem ecuaţia de stare

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R_{Th}C}u_C = \frac{U_{Th}}{R_{Th}C}\,. \tag{3}$$

Ecuaţia de stare a circuitului RL

Procedăm în mod similar pentru circuitul RL. Circuitul rezistiv văzut de la bornele bobinei se echivalează cu un generator Thevenin (fig.5.2):

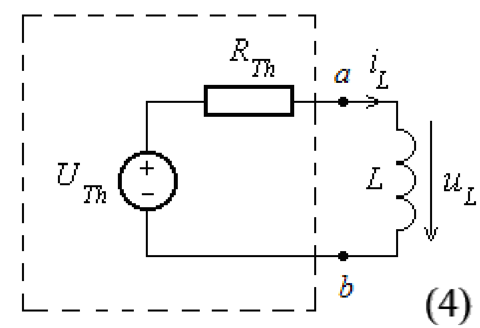


Fig.5.2

Scriem ecuația corespunzătoare teoremei a II-a a lui Kirchhoff:

$$U_{TH} = R_{Th} i_L + u_L \,, \qquad (4)$$

şi relaţia de legătură dintre tensiunea la bornele bobinei şi curentul prin aceasta:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \,. \qquad (5)$$

Combinând cele două relaţii rezultă ecuaţia de stare a circuitului

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R_{Th}}{L} i_L = \frac{U_{Th}}{L} \,, \qquad (6)$$

Cele două ecuațiile de stare (3) și (6) sunt de forma

$$\frac{dx}{dt} + ax = b \,, \qquad (7)$$

$x(t)=x(\infty)+[x(0)-x(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}},\quad t\geq 0$

Cap.5 Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu

Aceasta este o **ecuaţie diferenţială de ordinul I**, unde *a* este un coeficient care depinde de parametrii circuitului, iar *b* coeficientul care depinde de surse. Necunoscuta este funcţia x=x(t), adică $u_C(t)$, respectiv $i_L(t)$.

Pentru circuite cu parametrii R, L, C constanţi în timp, şi cu surse constante în timp, soluţia generală este o **sumă de doi termeni**, **unul constant x_{st}** şi **unul dependent exponenţial de timp x_{tr}**:

$$x(t)=x_{st}+x_{tr}(t)=x_{st}+Ae^{-at},\quad t\geq 0, \tag{8}$$

A fiind o constantă de integrare.

Întrucât $a>0$, exponențiala tinde către *0* atunci când $t\to\infty$, de unde denumirea de *componentă tranzitorie* pentru x_{tr}. Atunci $x(t)\to x_{st}$, motiv pentru care x_{st} este denumit *componentă de regim staționar*, notat de regulă cu $x(\infty)$.

Constanta de integrare *A* se determină presupunând cunoscută valoarea la momentul t = 0 a lui *x(t)*, adică valoarea inițială *x(0)*:

$$x(0)=x(\infty)+A\quad\Rightarrow A=x(0)-x(\infty), \tag{9}$$

Cu acestea obținem forma generală a soluției

$$x(t)=x(\infty)+[x(0)-x(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}},\quad t\geq 0 \quad, \tag{10}$$

unde cu τ s-a notat inversul lui *a*, având denumirea de *constantă de timp*.

Soluția *x(t)*, pe un interval t ≥ 0 este unică dacă se cunoaște valoarea inițială *x(0)*. Mărimile *x(0), x(∞)* şi τ trebuie determinate pentru fiecare problemă în parte.

Cap.5 Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu

- **Valoarea inițială *x*(*0*)** poate fi dată explicit, sau indirect, precizând starea circuitului la momentul t < 0. De regulă, momentul inițial este marcat printr-o comutație (închiderea sau deschiderea bruscă, instantanee, a unui întrerupător). Valoarea inițială care apare în relația (10) corespunde primului moment de după comutare, $x(0_+)$. Tensiunea de la bornele condensatorului, respectiv curentul prin bobină sunt funcții continue de timp, deci valoarea lor imediat după comutare este egală cu valoarea la momentul care precede comutarea:

$$u_C(0_-)=u_C(0_+) \qquad i_L(0_-)=i_L(0_+) \tag{11}$$

Această proprietate, cunoscută sub denumirea de *teorema condiţiilor iniţiale*, poate fi folosită pentru determinarea valorii lui *x(0)*. Astfel, dacă la momentul care precede comutaţia circuitul este în regim staţionar, atunci **bobina ideală** se comportă ca **un scurtcircuit**, iar un **condensator** ca **o întrerupere** (fig.5.3).

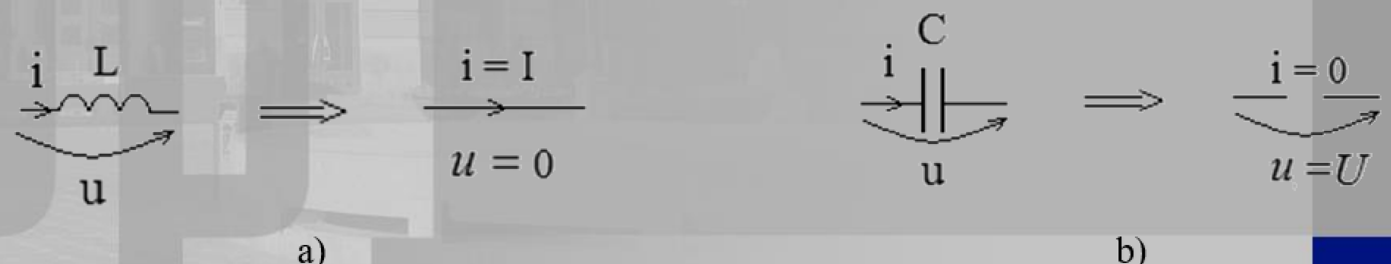


Fig.5.3

Cap.5 Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu

Drept urmare, la momentul $t = 0$ circuitul este format numai din surse și rezistoare, deci poate fi analizat ca un circuit de curent continuu, determinându-se astfel valorile lui $u_C(0_-)$, respectiv $i_L(0_-)$. Din relația (11) rezultă valorile necesare relației (10).

- **Componenta de regim staționar x(∞)** se determină ținând cont de faptul că este o mărime constantă în timp, derivata ei în raport cu *t* este nulă. Din ecuația (7) rezultă atunci

$$x(\infty) = \frac{b}{a}, \qquad (12)$$

Un alt mod de calcul al lui $x(\infty)$, care nu necesită deducerea ecuației de stare, și pe care îl recomandăm, este următorul:

- se desenează schema circuitului având comutatorul pus în poziția finală;
- se înlocuiește condensatorul ideal cu o întrerupere, respectiv bobina ideală cu un scurtcircuit;
- analiza acestui circuit de curent continuu conduce la aflarea lui $u_C(\infty)$, respectiv $i_L(\infty)$.

- **Constanta de timp τ** rezultă ținând cont că este egală cu 1/a. Pentru circuitul RC, comparând rel. (3) cu relația (7), obținem

$$\tau = R_{Th}C, \qquad (13)$$

Analog, pentru circuitul RL, din rel. (6) şi (7) rezultă

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} \qquad (14)$$

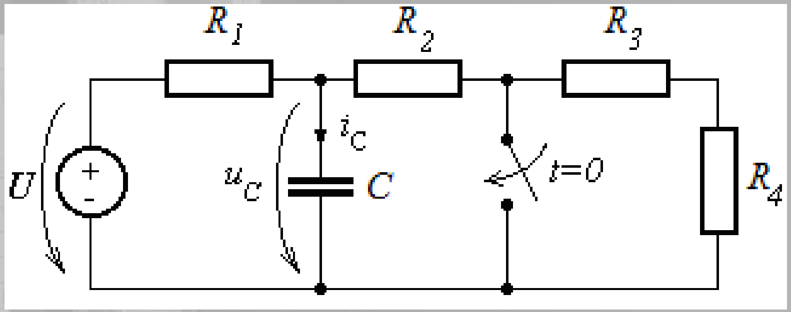
Exemple:

5.2 Circuitul RC

1. În circuitul cu schema din fig.5.4 comutatorul se află în poziţia deschis de mult timp, astfel că circuitul este în regim staţionar. La momentul *t=0* se închide comutatorul. Se cunosc: U = 12V, R_1 = 6kΩ, R_2 = 3kΩ, R_3 = 2kΩ, R_4 = 1kΩ, C = 5μF Să se determine:

a). Tensiunea la bornele condensatorului $u_C(t)$, la $t \geq 0$ şi să se traseze graficul respectiv;

b). Curentul prin condensator $i_C(t)$, la $t \geq 0$ şi să se traseze graficul respectiv;



Rezolvare:

a) Mărimea de stare a circuitului este tensiunea $u_C(t)$ de la bornele condensatorului. Variaţia ei cu *t* este dată de relaţia

$$u_C(t) = u_C(\infty) + \left[u_C(0) - u_C(\infty)\right]e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0$$

Universitatea Politehnica Timişoara

- **Calculul valorii inițiale $u_C(0)$:**

Conform teoremei condițiilor inițiale $u_C(0)=u_C(0_+)=u_C(0_-)$, unde $u_C(0_-)$ reprezintă tensiunea la bornele condensatorului la momentul care precede comutația. La acest moment comutatorul este deschis, iar circuitul este în regim staționar, condensatorul fiind echivalent cu o întrerupere. Schema circuitului corespunzătoare acestui moment este reprezentată în fig. 5.5.

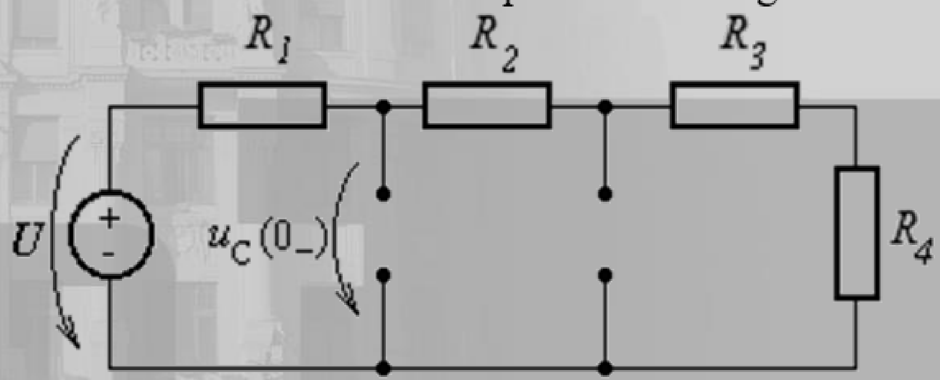


Fig.5.5

Aplicând formula divizorului de tensiune, obținem

$$u_C(0_-)=\frac{R_2+R_3+R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}\cdot U=\frac{3+2+1}{6+3+2+1}\cdot 12=6V\ .$$

Cap.5 Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu

- **Calculul valorii de regim staționar *u(∞)*:**

După stingerea regimului tranzitoriu, circuitul ajunge din nou în regim staționar. Comutatorul este închis, iar condensatorul este echivalent cu o întrerupere (fig.5.6a). Se observă că prin închiderea comutatorului se scurtcircuitează gruparea serie R_3, R_4 (fig.5.6b).

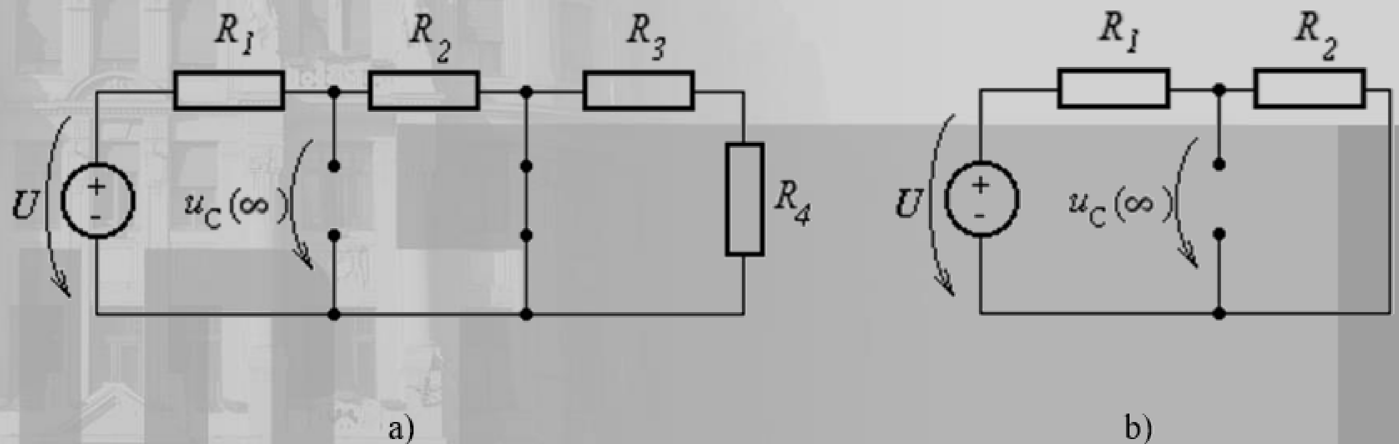


Fig.5.6

Cu ajutorul formulei divizorului de tensiune obținem

$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U = \frac{3}{6+3} \cdot 12 = 4\ V\ .$$

Universitatea Politehnica Timişoara

- **Calculul constantei de timp τ:**

La un moment arbitrar t > 0 schema circuitului pasivizat văzut de la bornele condensatorului este ca în fig.5.7.

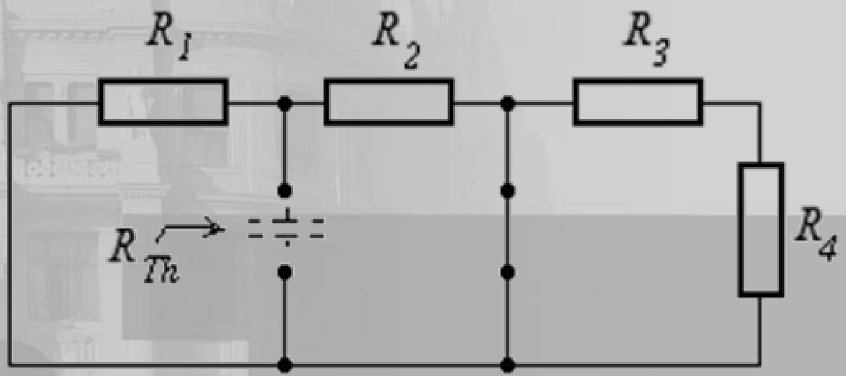


Fig.5.7

Rezistența echivalentă a circuitului față de bornele condensatorului este:

$$R_{Th} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \cdot 3}{6+3} = 2\,k\Omega .$$

Constanta de timp este atunci

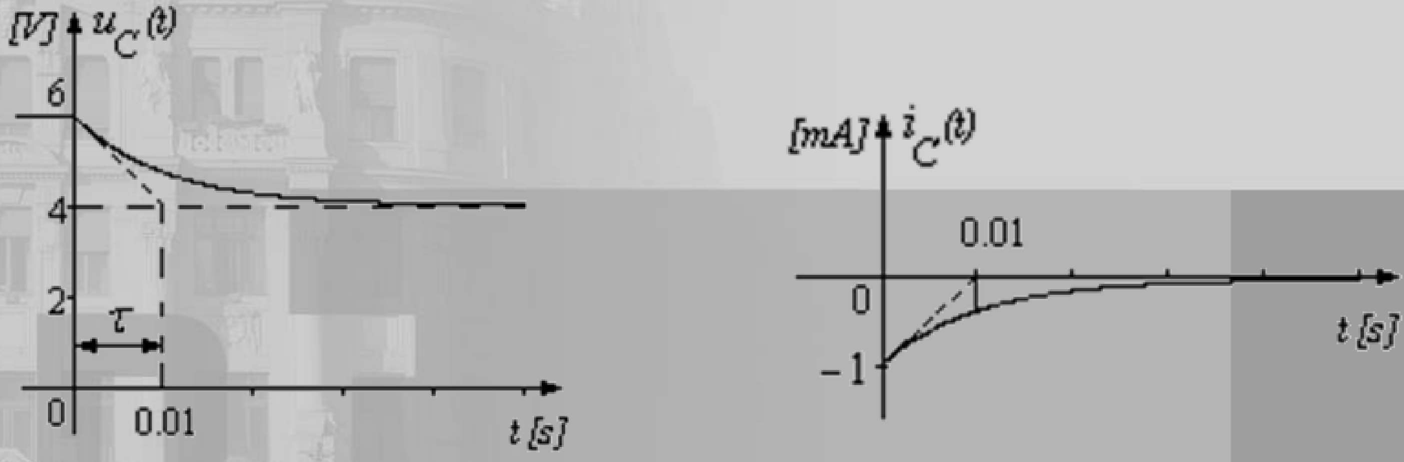
$$\tau = R_{Th}C = 2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 10^{-2}\ s = 10\,ms .$$

- **Expresia finală a soluției ecuației de stare**

Înlocuind rezultatele obținute în relația generală, obținem

$$u_C(t) = 4 + 2e^{-100\,t} \quad [V],\ t \geq 0 .$$

Graficul acestei funcții este reprezentat în figura 5.8a.



a) b)

Fig.5.8

b) Cunoscând tensiunea la bornele condensatorului $u_C(t)$, curentul prin condensator rezultă imediat din relația:

$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot (-100) e^{-100\,t} = -10^{-3} e^{-100\,t}[A] = -e^{-100\,t}\ [mA].$$

Anterior închiderii comutatorului circuitul fiind în regim staționar curentul prin condensator este nul. Cu aceste precizări, se obține graficul reprezentat în figura 5.8b.

5.3 Circuitul RL

1. Circuitul cu schema din figura 5.9 se află în regim staţionar până la momentul $t = 0$ când se deschide comutatorul. Se cunosc: $U_1 = 6V$, $R_1 = R_3 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $L = 2H$. Să se calculeze:

a) curentul $i_L(t)$ prin bobină pentru $t \geq 0$;

b) tensiunea $u(t)$ pentru $t \geq 0$ şi să se reprezinte grafic aceste funcţii.

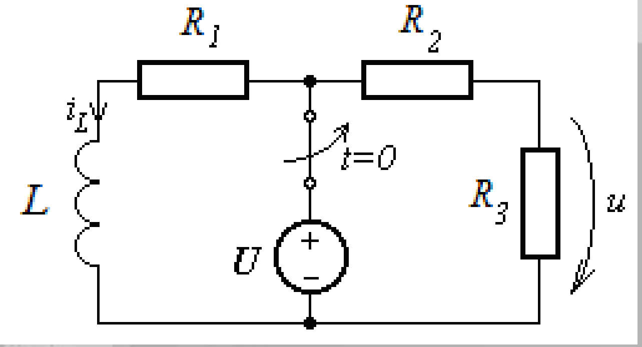


Fig.5.9

Rezolvare:

a)**Mărimea de stare a circuitului este curentul i_L din bobină.** Dependenţa acestuia de timp este dată de relaţia generală

$$i_L(t) = i_L(\infty) + \left[i_L(0) - i_L(\infty)\right] e^{-\frac{t}{\tau}},\ t \geq 0$$

Cap.5 Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu

Mărimile care intervin în această relaţie au semnificaţiile cunoscute.

- **Calculul valorii iniţiale *$i_L(0)$*:**

  Conform teoremei condiţiilor iniţiale

$$i_L(0) = i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

La momentul $t = 0_-$, care precede deschiderea comutatorului, circuitul se află în regim staţionar bobina fiind aşadar echivalentă cu un scurtcircuit (fig.5.10).

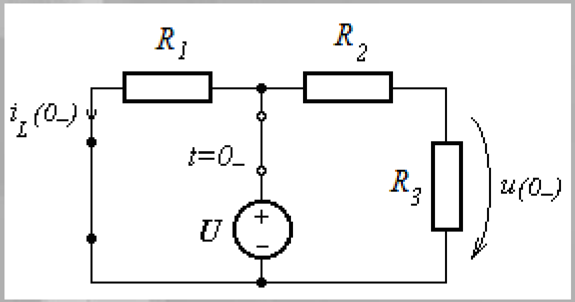


Fig.5.10

Rezultă imediat

$$i_L(0_-) = \frac{6}{2} = 3\ A$$

Cap.5 Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu

- **Calculul valorii de regim staţionar $i_L(\infty)$:**

După stingerea regimului tranzitoriu (t = ∞) circuitul este din nou în regim staţionar. Schema corespunzătoare este prezentată în fig.5.11.

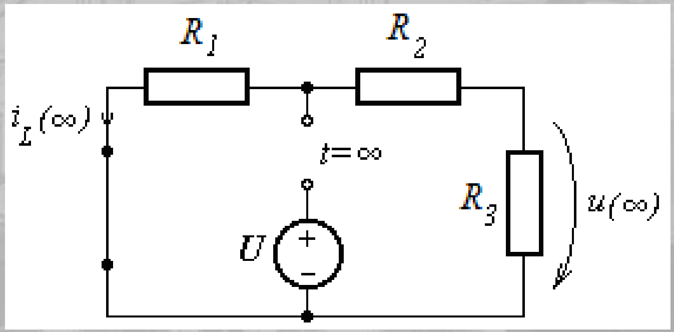


Fig.5.11

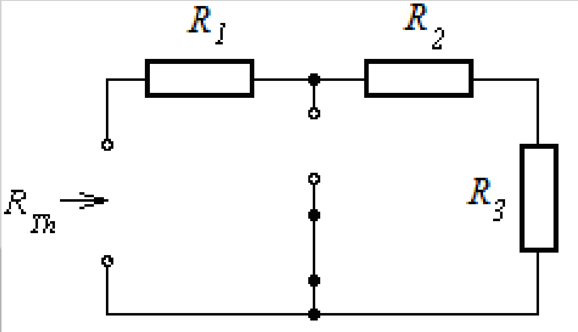


Fig.5.12

Sursa fiind decuplată de restul circuitului, rezultă $i_L(\infty)=0$

- **Calculul constantei de timp τ**

Circuitul pasivizat, văzut de la bornele bobinei la un moment arbitrar t > 0, are schema din fig.5.12.

Faţă de bornele bobinei cele trei rezistoare sunt legate în serie, astfel că

$$R_{Th}=R_1+R_2+R_3=2+4+2=8\ \ \Omega$$

Constanta de timp a circuitului inductiv este atunci $\tau=\dfrac{L}{R_{Th}}=0{,}25\ \ s$

Cap.5 Circuite electrice liniare în regim tranzitoriu

- **Forma finală a soluţiei pentru *$i_L(t)$*:**

  Înlocuind valorile obţinute în relaţia generală, obţinem

$$i_L(t)=3e^{-4t}\quad [A],\ t\geq 0$$

Graficul este reprezentat în figura 5.13.

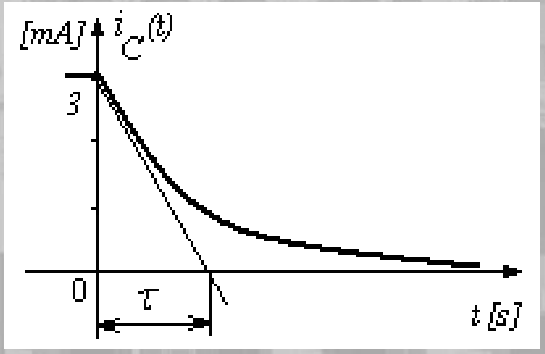


Fig.5.13

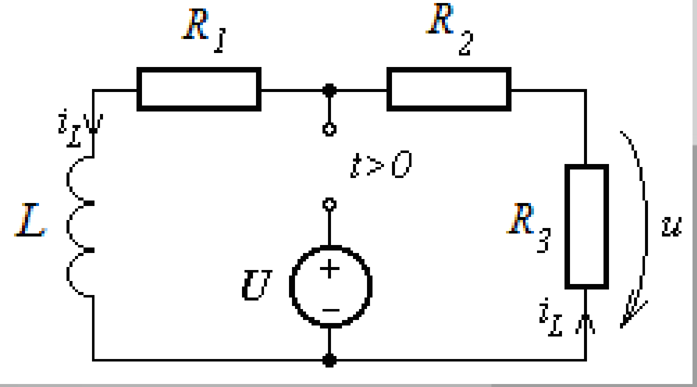


Fig.5.14

b) **Calculul tensiunii *u(t)*:**

Această tensiune **nu este** mărime de stare. Ea trebuie exprimată în funcţie de i_L folosind teoremele lui Kirchhoff. La un moment arbitrar $t > 0$ schema circuitului este reprezentată în figura 5.14.

Rezultă imediat

$$u(t) = -2 \cdot i_L(t) = -6e^{-4t} \ [V], \ t \geq 0_+$$

Rezultatul este valabil pentru orice moment de după comutare ($t \geq 0_+$). În particular, $u(0_+) = -6\,V$. Tensiunea *u* nefiind mărime de stare, pentru ea nu este valabilă teorema condițiilor inițiale, adică, în general, $u_C(0_+) \neq u_C(0_-)$. Dacă dorim să calculăm valoarea lui *u* anterioară comutării, adică $u(0_-)$ trebuie să mergem la schema circuitului valabilă la acel moment. Din acea schemă rezultă

$$u(0_-) = \frac{2}{4+2} 6 = 2\ V\ .$$

Așadar *u* suferă un salt la momentul $t = 0$, de la 2 V la -6 V, după care scade exponențial la zero. Graficul u(t) este reprezentat în fig. 5.15.

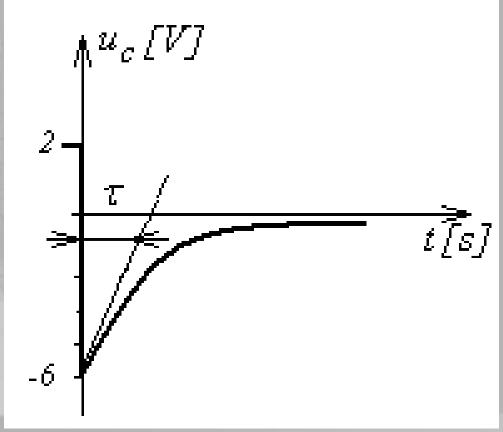


Fig.5.15