FORMULE. PS.

PARTEA I.

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ dacă A, B - independente

$= P(A) \cdot P(B \mid A)$ altfel.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(H_k \mid A) = \frac{P(A \mid H_k) \cdot P(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)}$$ Formula lui Bayes.

Probabilități totale $\sum_{i=1}^{n} P(A \mid H_i) \cdot P(H_i)$

Nr total de fct. $f: \mathbb{R} \to \underbrace{\{0,1\}}_{2\,val.}^{5} \Rightarrow 2^5 = 32$ elem

$\text{nr. elem.}^{|f|} = \text{nr. tot. fct.}$

$F_X(x) = P(X \leq x)$

$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

$\sigma^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

$X \sim Bernoulli(p)$ → experiment cu două rezultate ⌈succes, eșec

$P(X=k) = p^k (1-p)^{1-k}$ $\quad M(X) = p \quad \sigma^2(X) = p(1-p)$

$X \sim Bin(n,p)$ → n experimente Bernoulli

$P(X=k) = C_n^k p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad M(X) = np \quad \sigma^2(X) = np(1-p)$

$X \sim Poiss(\lambda)$ → nr. de ev. în timp fixat

$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad M(X) = \sigma^2(X) = \lambda$

$X \sim Geom(p)$ → nr. încercări până la primul succes.

$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad M(X) = \frac{1}{p} \quad \sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

z_α - cuantilă pt. $P(X \le z_\alpha) = \alpha$.

$z_{1-\alpha} = -z_\alpha$.

Abatere standard $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

$X \sim N(m, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{x-m}{\sigma}$.

Formule cuantilă:

→ Uniformă $U(a,b)$ $\quad x_\alpha = a + \alpha(b-a)$

→ Exponențială $Exp(\lambda)$ $\quad x_\alpha = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\alpha)$

→ Normală $N(m, \sigma^2)$. $\quad x_\alpha = m + \sigma \cdot z_\alpha$ - cuantila de ordin α care se dă

PARTEA II

$$f_{X,Y} = \begin{cases} \frac{1}{\text{Arie}} & x,y \in D \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Dreptunghi $[a,b]\times[c,d]$. X,Y - indep.

$A = (b-a)(d-c)$.

$\Rightarrow P(X>a \mid Y) = P(X>a) = \frac{b-a}{b}$.

Generare

```
x ← a+(b-a)*urand();
y ← c+(d-c)*urand();
return(x,y);
```

Disc $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2$. X,Y - nu sunt indep.

$A = \pi \cdot r^2$.

Generare

```
do{
    x ← x0-r+2*r*urand();
    y ← y0-r+2*r*urand();
} while( Disc >);
```

Elipsă: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$ dacă $y \ge 0$ semielipsă cu partea de sus.

$A_{\text{elipsă}} = \pi \cdot a \cdot b$

$A_{\text{semielipsă}} = \frac{1}{2} A_{\text{elipsă}}$

$a = k \Rightarrow x \in [-k,k]$.

$b = j \Rightarrow y \in [-j,j]$.

Generare

```
do {
    x ← -k+(k-(-k))*urand();
    y ← -j+(j-(-j))*urand();
} while( Elipsă ≥);
```

$P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n) = \pi_0(s_0) \cdot Q(s_0, s_1) \cdot Q(s_1, s_2) \cdot \dots \cdot Q(s_{n-1}, s_n)$

$\pi_0(s_0) = \frac{1}{nr.val.}$ dacă sunt uniform distribuite.

Lanț ired. → dintr-un nod se poate ajunge în toate

Nod aperiodic → cmmdc cicluri $= 1$.

Lanț ——"—— $\left\{ \begin{array}{l} \text{lanț. ired.} \\ \text{nod aperiodic} \end{array} \right.$

$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = Q(i, j)$.

Distribuția de echilibru $\pi Q = \pi$. $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$

$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$. ↳ timp petrecut de lanț la fiecare nod.

$P(X_{k+m} = j \mid X_k = i) = Q^m(i, j)$. înmulț. linia i cu col. j.

Q^T – are vector propriu pe $w \Rightarrow \bar{\pi} = \frac{w}{\sum w_i}$

$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$\hat{p}$ - estimator succes

$\hat{p} = \frac{\text{caz. fav}}{\text{caz. tot.}}$ – la Bin și Ber.

$\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$ - restul
– media.

MLE → $L(p)$ = den. de probab.
→ ln.
→ deriv.
→ calc.

$T = T_1 + T_2 + \dots + T_k$ – mom. în care apare al k-lea eveniment.

$M(T) = \frac{k}{\lambda}$

$\sigma^2(T) = \frac{k}{\lambda^2}$

4.

FORMULE FOLOSITE - SUB. PARȚIAL / ȘMECHERI :P

R1 1. $P(y \cup C) = P(y) + P(C) - P(y \cap C)$.

2. Bayes $P(H_i|A) = \dfrac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$

2. $P(Y|X=a) = \dfrac{P(X=a, Y)}{P(X=a)}$ $\quad M(Y|X=0) = \sum_{i=0}^{n} y \cdot P(y, X=0)$.

Distribuția Binomială $C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$ $\quad X \sim Bin(n, p)$.

$M(X) = n \cdot p$

3. $P(X \leq x) = a \Rightarrow x_a$ - cuantilă de a.

$X \sim N(m, \sigma^2)$.

$x_a = Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$.

R2 1. Formula probabilității totale

$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$

2. X, Y - independente $\Leftrightarrow P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$.

$X \sim Poiss(\lambda)$ $\quad P(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot k^{\lambda}}{k!}$

abaterea standard : $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\lambda}$

3. $U \sim Unif(0,1)$ $\quad X = [nU]$

$nU \in [0, n]$.

$\Rightarrow P(X = k) = P(k \leq nU < k+1) = P\left(U \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow X \sim Unif(\{0, 1, 2, \ldots, n-1\})$.

R3 1. A, B - indep. $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$.

2. $X \sim Geom(p)$

$P(X = k) = p^{k-1}(1-p)$

3. $P\left(Z \leq \dfrac{x - m}{\sigma}\right) = \Phi(a)$

$\Rightarrow \dfrac{x - m}{\sigma} = a$.

R4

1. $h: P \to \underbrace{\{0,1\}}_{2 \text{ elem.}}^{5} \Rightarrow 2^5 = 32$ elem.

$|P| = a.$

$\Rightarrow$ nr. total de fct. $= 32^{a}$.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

2. $X \sim Bin(n,p)$

$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$

3. α - cuantilă este z_α pt. care $P(Z \le z_\alpha) = \alpha$.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

$x_\alpha = \mu + z_\alpha \cdot \sigma$.

$P(X = a) = 0. \ \forall a \in \mathbb{R}$.

$P(a \le x < b) = F_X(a) - F_X(b)$.

Metoda inversei

$F(x) = \ldots \Rightarrow u = \ldots$

ajungem la $e^x = \ldots$

logaritmăm

$\Rightarrow F^{-1}(u) = $ rezultat.

Sim.

$u \leftarrow urand()$;

$x \leftarrow rez$;

return x;

EXAMEN PS EXERCIȚII | PARTEA 1

PARȚIALE

Rând 1.

1) a) Studenți la CTI

$$\boxed{P(J \cup C) = P(J) + P(C) - P(J \cap C)}$$

formulă folosită.

20% - Java $\Rightarrow P(J) = 20$

15% - C++. $\Rightarrow P(C) = 15.$

10% - Ambele $\Rightarrow P(J \cap C) = 10.$

P care nu știu nici Java nici C++? $\Rightarrow P(\bar{J} \cup \bar{C}) =$

$= 1 - P(J) - P(C) + P(J \cap C) = 1 - 0,2 - 0,15 + 0,10 =$

$= 0,65 + 0,10 = 0,75$

$\Rightarrow 75\%.$

2. b) Mașina poate fi în una din cele 4 locații: L_1, L_2, L_3, L_4

$P(L_1) = \frac{1}{8}$

$P(L_2) = \frac{1}{8}$

$P(L_3) = \frac{1}{4}$

$P(L_4) = \frac{1}{2}.$

Satelit activ fiecare loc.:

$P(A|L_1) = \frac{1}{2}$

$P(A|L_2) = 1$

$P(A|L_3) = \frac{3}{4}$

$P(A|L_4) = \frac{3}{4}$

$$P(L_3|A) = ? = \frac{P(A|L_3) \cdot P(L_3)}{\sum_{i=1}^{4} P(A|L_i) \cdot P(L_i)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{3}{16}}{\frac{3}{4}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{16}_4} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} = \frac{1}{4}$$

Formula lui Bayes

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}.$$

2) Proiect 2 module

a) X, Y - v.a

distr. com. de probab.:

X \ Y	0	1	2	3	
0	0,2	0,2	0,05	0,05	0,5
1	0,2	0,10	0,10	0,10	0,6
	0,4	0,3	0,15	0,15.	

$\rightarrow P(Y \leq 1)$

$\rightarrow$ distrib. de probab. $(Y|X=0)$.

+ media sa.

$P(Y \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,7.$

$$\underset{\underset{0,4}{\parallel}}{0,2+0,2} \qquad \underset{\underset{0,3.}{\parallel}}{0,2+0,1}$$

$P(Y|X=0).$

$P(X=0) = 0,2+0,2+0,05+0,05 = 0,5.$

$$P(Y|X=0) = \frac{P(X=0, Y=y)}{P(X=0)}$$

$(Y = y | X=0)$

Y	0	1	2	3
$P(Y=y \mid X=0)$	$\frac{0,2}{0,5} = 0,4$	$\frac{0,2}{0,5} = 0,4$	$\frac{0,05}{0,5} = 0,1$	$\frac{0,05}{0,5} = 0,1$

$$M(Y|X=0) = \sum_{y=0}^{3} y \cdot P(y|X=0) = 0 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 = 0,9.$$

b). $P = 95\%$

analizează 10 fețe umane pe oră

P ca aplicația să înregistreze cel mult o eroare în acea oră.

Nr. mediu de fețe recunoscute într-o oră?

$p = 0,95 \Rightarrow q = 0,05$

$X \sim Bin(10; 0,05).$

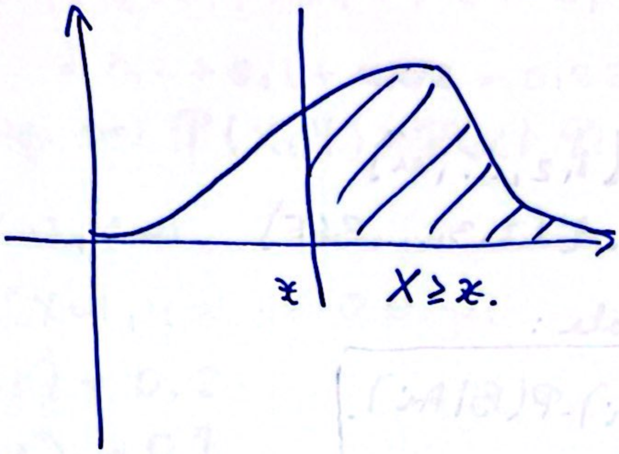
$$P(\text{cel mult o eroare}) = \underset{0\ \text{erori}}{P(X=0)} + \underset{1\ \text{eroare}}{P(X=1)}$$

$\Rightarrow P = C_{10}^{0} \cdot (0,95)^{0} \cdot (0,05)^{10} + C_{10}^{1} (0,95)^{1} \cdot (0,05)^{9} \simeq 0,9138.$

Distrib. Binomială: $C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$M(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0,95 = 9,5.$

3). a).



$P(X > x) = 0,25 \Rightarrow P(X \leq x) = 0,75. \Rightarrow x$ - cuantilă de 0,75

$X \sim N(1, 9) \Rightarrow M = 1. \quad \sigma^2 = 9$

$x \Rightarrow x_{0,75} = 0,68.$

$\boxed{x = \frac{X - m}{\sigma^2}} \Rightarrow 0,68 = \frac{X - 1}{3} \Rightarrow X = 3,04.$

b). X v.a..

Fct. de repartiție

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\alpha x^2}, & x > 0. \end{cases} \quad \alpha > 0.$

$P(\alpha = 0) = F_X(0) = 0.$

$P(X = 2) = F_X(2) = 1 - e^{-\alpha \cdot 2^2} = 1 - e^{-4\alpha}.$

Rând 2

1) a) Problema zilei de naștere

n persoane participă la o reuniune

P ca cel puțin două să aibă aceeași zi

de naștere.

365 zile

mulț. participanți $A = \{1, 2, \dots, n\}$

mulț. zilele anului $B = \{1, 2, 3, \dots, 365\}$

b) ~~Formula probab. totale~~:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Producere cipuri: 2 tipuri
- I: 80% $\Rightarrow P(T_1) = 0{,}8$
- II: 20% $\Rightarrow P(T_2) = 0{,}2$.

$P(D|T_1) = 0{,}01$

$P(D|T_2) = 0{,}1$ (fără)

$P(D) = ?$ $\quad$ $P(\text{fără } D) = 1 - P(D)$

$P(D) = P(T_1) \cdot P(D|T_1) + P(T_2) \cdot P(D|T_2) = \dots = 0{,}028$.

$\Rightarrow P(\text{fără } D) = 0{,}972$.

2) A - PC virusat

B - fișier corupt. $\quad$ X - ia val. 1 dacă A / altfel 0

Y - ia val 1 dacă B / altfel 0.

Y \ X	A	$\bar{A}$
B	0,02	0,1
$\bar{B}$	0,18	0,7

$$P(X|Y=1) = \frac{P(X, Y=1)}{P(Y=1)}$$

$P(Y=1) = 0{,}02 + 0{,}1 = 0{,}12$.

X	0	1
$P(X\mid Y=1)$	$\frac{0,1}{0,12}$	$\frac{0,02}{0,12}$

$P(X\le Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=$

$=0,7+0,1+0,02=0,82.$

X,Y - indep. $\Leftrightarrow P(X,Y)=P(X)\cdot P(Y)$

pt. $X=1, Y=1$

$P(X=1,Y=1)=0,02.$

$P(X=1)=0,2.$

$P(Y=1)=0,8$

$\Rightarrow P(X=1,Y=1)\ne P(X=1)\cdot P(Y=1)$

$\Rightarrow X,Y$ ~~indep~~ nu sunt indep.

b) rata 100 pachete pe minut? $X\sim Poiss(100)$.

$P(X=1)=\frac{e^{-100}\cdot 100^1}{1!}=100\cdot e^{-100}\simeq 0.$

$P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-\frac{e^{-100}\cdot 100^0}{0!}=1-e^{-100}\simeq 1.$

abaterea standard $\sigma=\sqrt{\lambda}=\sqrt{100}=10.$

3. a) Studenți admiși $2,5\% \Rightarrow p=0,025.$

$\mu=500$

$\sigma=50$

Punctaj minim necesar $P(X\ge x)=0,025.$

$\Rightarrow P(X<x)=0,975.$

$z=\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow 1,96=\frac{x-500}{50}$ $\quad z_{0,975}=1,96$

$\Rightarrow x-500=1,96\cdot 50$

$x=500+98=598$ punctaj minim.

b) $U \sim Unif(0,1)$

$X = [mU]$.

$X \sim Unif(\{0,1,\dots,m-1\})$?

$U \sim Unif(0,1) \Rightarrow$ den. const. în $(0,1)$.

$\Rightarrow mU \in [0,m)$.

$X = [mU]$ ia val întregi în $[0,m-1]$.

$\forall k \in \{0,\dots,m-1\}$

$P(X=k) = P(k \le mU < k+1) = P\left(U \in \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right)\right) = \frac{1}{m}$

$\Rightarrow X \sim Unif(\{0,1,\dots,m-1\})$.

$Y = 2X+3 \quad n = 10$

$X \sim Unif(\{0,1,2,\dots,9\}) \Rightarrow Y = \{3,5,7,\dots,21\}$

fiecare val. are aceeași prob. $P(Y=y) = \frac{1}{10}$.

$\Rightarrow Y \sim Unif(\{3,5,\dots,21\})$.

$\cancel{M(-2Y+2) = \sum_{x=0}^{9} (2x+3)\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\sum_{x=0}^{9}(2x+3) = \frac{1}{10}(3+5+\dots+21)} =$

$=$

$M(-2Y+2)$

$Z = -2Y+2$

$Y \sim Unif(\{3,5,\dots,21\}) \Rightarrow Z = \{-4,-8,-12,-16,\dots,-40\}$

$M(Z) = \frac{1}{10}(-4-8-\dots-40) = -22.$

Rândul 3.

1) a) A, B - indep. $\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Arătați că $\bar{A}$, B - indep.

$P(\bar{A}\cap B) = P(\bar{A})\cdot P(B)$.

: ?

— $P(B|A) = P(B) - P(A)$?

fals! $P(B|A)$ ~~...~~ $= P(B) - P(A\cap B)$.

— $P(A) = 0,2$

$P(B) = 0,4$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= 0,2 + 0,4 - \underbrace{P(A)\cdot P(B)}_{0,2\cdot 0,4} =$

$= 0,2 + 0,4 - 0,08 = 0,52$.

b) Formula prob. totale: $P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A|B_i)\cdot P(B_i)$

Evenimente

M_A - se alege moneda A. $P(MA) = P(MB) = \frac{1}{2}$

M_B - se alege moneda B.

$P(C|M_A) = \frac{1}{3}$

$P(C|M_B) = \frac{1}{4}$

$P(CAP) = P(C/MA)\cdot P(MA) + P(C/MB)\cdot P(MB) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24}$.

$\boxed{7}$.

2) a) Proiect cu două module

v.a X cu $D_X = \{1, 2, 3, 4\}$

v.a. Y cu $D_Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$P(X=i \mid Y=j) = \frac{i+j}{80}.$$

$Z = (Y \mid X=1)$.

$M(Z) = ?$

$$P(Y \mid X=1) = \frac{P(X=1, Y)}{P(X=1)}$$

$$P(X=1, Y) = \frac{1+j}{80}.$$

j	$P(X=1, Y)$
1	$\frac{2}{80}$
2	$\frac{3}{80}$
3	$\frac{4}{80}$
4	$\frac{5}{80}$

$$P(X=1) = \frac{2+3+4+5}{80} = \frac{14}{80}.$$

$$P(Y \mid X=1) = \frac{\frac{1+j}{80}}{\frac{14}{80}} = \frac{1+j}{14}.$$

j	$P(\overset{Z}{Y} \mid X=1)$
1	$\frac{2}{14}$
2	$\frac{3}{14}$
3	$\frac{4}{14}$
4	$\frac{5}{14}$

$$M(Z) = 1 \cdot \frac{2}{14} + 2 \cdot \frac{3}{14} + 3 \cdot \frac{4}{14} + 4 \cdot \frac{5}{14} = \frac{20}{7}.$$

b) B - tenue $P(B) = 0{,}7$.

X - dă nr. de execuții ale instrucțiunii

ce distribuție de probab. este X?

$P(X \le 5)$.

$X \sim Geom(0{,}7)$

$$P(X=k) = p^{k-1}(1-p).$$

$$P(X \le 5) = \sum_{k=1}^{5} P(X=k) = \sum_{k=1}^{5} (0{,}7)^{k-1} \cdot 0{,}3 \simeq 0{,}83.$$

$\boxed{8}$.

3) a) T - timpul T exprimat în ore cât lucrează studenții la un proiect este o v.a. cu $M=12$ $\sigma=2$. timpul minim depus de studenți cu $P=0,95$

Se știe $\Phi(z)=0,97$.

$z_{0,97}=1,64$.

rezolvare bună?

$M=12$ $\sigma=2$.

$x=M+\sigma\cdot z_{0,97}$

$x=12+1,64\cdot 2$.

$x=15,28$.

$T\sim N(12, 2^2)$

$P(T\le t)=0,97$.

$Z=\frac{t-12}{2}$

$P(T\le t)=P(Z\le\frac{t-12}{2})=0,97$.

$\Rightarrow \frac{t-12}{2}=2$ $(\Phi(2)=0,97)$.

$\frac{t-12}{2}=2 \Rightarrow t-12=4$

$t=16$.

b) $U\sim Unif(0,1)$

$X=[nU]$.

$X\sim Unif(\{0,1,2,\dots,n-1\})$?

$U\sim Unif(0,1) \Rightarrow nU\in[0,n)$.

$\Rightarrow nU\in[0,n-1]$.

$P(X=k)=P(k\le nU<k+1)=\frac{1}{n}$.

$\Rightarrow X\sim Unif(\{0,\dots,n-1\})$.

$Y\sim Unif(\{1,2,3,4,5\})$.

val. ~~2Y-1~~ v.a $-2Y+1=Z$

$Z=-2Y+1\sim Unif(\{-1,-3,-5,-7,-9\})$

$M(Z)=\frac{-1-3-5-7-9}{5}=\frac{-25}{5}=-5$.

$\boxed{9}$.

Rândul 4 ..

1) a) not. P - mulț. parole formate din 4 cifre distincte să se det. nr. fct. $h: P \to \{0,1\}^5$ care se pot forma.

4 cifre din $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$|P| = A_{10}^4 = \frac{10!}{6!} = 5040.$

$2^5 = 32$ elemente

Fiecare el. din P poate fi transmis în oricare dintre cele 5040 val

Nr. total de fct. $= 32^{5040}.$

b) $P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)$ - prob. totală

A_1 - rută prin Brașov

A_2 - rută prin Grabova

B - blocat

$P(A_1) = \frac{3}{4}$

$P(A_2) = \frac{1}{4}$

$P(B|A_1) = \frac{1}{3}$

$P(B|A_2) = \frac{1}{4}.$

$P(B) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

punct blocat.

$P(A_2|\overline{B}) = \frac{P(A_2 \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}.$

$P(A_2 \cap \overline{B}) = P(A_2) \cdot P(\overline{B}|A_2) =$

$= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$

$P(A_2|\overline{B}) = \frac{\frac{3}{\cancel{16}}}{\frac{11}{\cancel{16}}} = \frac{3}{11}.$

$\boxed{10}.$

27 a).

X \ Y	1	2	3
0	0,1	0,2	0,1
1	0,1	0,2	0,3.

$(Y|X=1)$

$$P(Y|X=1) = \frac{P(X=1, Y)}{P(X=1)}$$

$$P(X=1) = 0,1+0,2+0,3 = 0,6$$

j	$(X=1, Y)$
1	$\frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6}$
2	$\frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3}$
3	$\frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2}$

$$P(Y>1 | X=1) = \frac{P(X=1, Y>1)}{P(X=1)} = \frac{0,2+0,3}{0,6} = \frac{0,5}{0,6} = \frac{5}{6}$$

X, Y indep $\Leftrightarrow P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$

$$\left.\begin{array}{l} P(X=1, Y=1) = 0,1 \\ P(X=1) = 0,6 \\ P(Y=1) = 0,2 \end{array}\right\} \Rightarrow P(X=1, Y=1) \neq P(X=1) \cdot P(Y=1)$$

$\Rightarrow X, Y$ nu sunt independente.

b). Experiment Bernoulli - are două rez. posibile - succes / eșec

P(succes) = 1
P(eșec) = 0.

O v.a $X \sim Geom(p)$ măsoară nr de încercări până la primul succes.

O v.a $X \sim Bin(n,p)$ măsoară nr. de succese într-un set de n încercări.

$n = 20$ spamuri

P de a ajunge în inbox grupat. $p = 0,1$.

$X \sim Bin(20; 0,1)$

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} C_{20}^{k} \cdot (0,1)^k \cdot (0,9)^{20-k}$$

3). a) Def. α-cuantila

Pt. v.a. cont. $Z \sim N(0,1)$ α-cuantilă este real. z_α pt. care $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$.

50% - cuantilă

$P(Z \leq z_{0,5}) = 0,5 \Rightarrow z_{0,5} = 0$.

2,5% - cuantili pt. $X \sim N(2, 4)$ σ^2

$\mu = 2$
$\sigma = \sqrt{4} = 2$.

$z_{0,025} = -z_{0,975} = -1,96$

$x_{0,025} = \mu + z_{0,025} \cdot \sigma = 2 + (-1,96) 2 = 2 - 3,92 = -1,92$.

b) $F_X(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ $x \in \mathbb{R}$.

$P(X=0) = 0$ $\boxed{P(X=a) = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}}$

$$P(-1 \leq X < 2) = F_X(2) - F_X(-1) = \frac{1}{1+e^{-2}} - \frac{1}{1+e^{1}} =$$

$$= \frac{\cancel{1}+e-\cancel{1}-e^{-2}}{(1+e)(1+e^{-2})} =$$

$$= \frac{e-e^{-2}}{(1+e)(1+e^{-2})}.$$

Metoda inversei

$F(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} \Rightarrow u = \dfrac{1}{1+e^{-x}} \Rightarrow (1+e^{-x})u = 1$

$1+e^{-x} = \dfrac{1}{u}$

$e^{-x} = \dfrac{1}{u} - 1$

12

$$e^{-x} = \frac{1-u}{u}.$$

$$\Rightarrow -x = \ln\left(\frac{1-u}{u}\right) \Rightarrow x = -\ln\left(\frac{1-u}{u}\right).$$

$$x = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$$

$$\Rightarrow F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right).$$

Simulare:

```
Sim_X()
u ← urand();
x ← ln(u/(1-u));
return x;
```

Primul exercițiu Partea a II-a PS.

Rând 1

4. v.a. cont. (X,Y) uniform distribuit pe

$G = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, y \geq 0 \}$

a) dens. de probab. a lui (X,Y)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Aria(G)} & x,y \in G \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ formă canonică elipsă

$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \Rightarrow a = 2$
$b = 1.$

$Aria_{elipsă} = \pi \cdot a \cdot b = 2\pi \Rightarrow Aria(G) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi.$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x,y \in G \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

b) $a = 2 \Rightarrow x \in [\underset{a}{-2}, \underset{b}{2}]$

$b = 1 \Rightarrow y \in [0,1]$

$y \geq 0$

$2-(-2)$ $\boxed{(b-a)}$

```
do
{ x ← -2+4*urand();
  y ← 0+1* urand();
} while (x^2/4 + y^2 ≤ 1);
return (x,y);
```

c) $[-2;2] \times [0;1]$ - dreptunghi cu aria $= 4 \cdot 1 = 4$.

$A_{elipsă} = \pi.$

$$P = \frac{A_{elipsă}}{A_{drept.}} = \frac{\pi}{4}.$$

Rândul 3

4. v.a (X,Y) uniform distribuită pe dreptunghiul $D = [0,3] \times [-2,2]$.

a) den. de probab. $P(X > \frac{1}{2} \mid Y = 1)$.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Arie} & x,y \in D \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

$$Arie = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{12} & x,y \in R \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

distrib. uniformă $\Rightarrow X, Y$ indep.

$$P(X > \tfrac{1}{2} \mid Y = 1) = P(X > \tfrac{1}{2}) = \frac{3 - \frac{1}{2}}{3} = \frac{2{,}5}{3} = \frac{5}{6}.$$

b) $x \in [0,3]$ $y \in [-2,2]$

$x \leftarrow 0 + 3 * urand();$
$y \leftarrow -2 + 4 * urand();$
returnu (x, y);

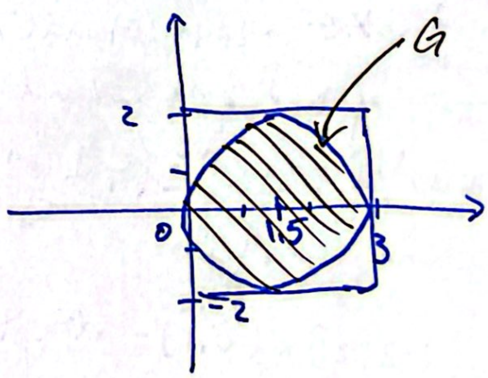
c) G – disc înscris în D
centru $(1{,}5; 0)$.

raza $= 3 - 1{,}5 = 1{,}5$.

$A_D = 12$

$A_G = \pi \cdot r^2 = 2{,}25\pi$.

$$P = \frac{A_G}{A_D} = \frac{2{,}25\pi}{12} = \frac{3\pi}{16}.$$



Alte posibile + formule:

$$f_{X,Y} = \begin{cases} \frac{1}{Arie} & x,y \in G \\ 0 & altfel. \end{cases}$$

! La tot.

* Dreptunghi $[a,b) \times [c,d]$. ! X, Y indep.

$x \in$, $y \in$

$\Rightarrow P(X>a \mid Y=b) = P(X>a) = \frac{\boxed{b}-a}{\boxed{b}}$

$$A_{drept.} = l \cdot L = (b-a)(d-c).$$

Generare:

$x \leftarrow a+(b-a) * urand();$
$y \leftarrow c+(d-c) * urand();$
return (x,y);

* Disc $x^2+y^2 \le r^2$. ! dacă avem $y \ge 0 \Rightarrow$ semidisc.

$A = \frac{\pi r^2}{2}.$

$$A_{disc} = \pi \cdot r^2$$

! X, Y nu sunt indep.

Generare:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \le r^2.$

do {
$x \leftarrow x_0 - r + 2r\, urand();$
$y \leftarrow y_0 - r + 2r\, urand();$
} while( ) dar cu >.

* Semielipsă $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$ $y \ge 0$ – partea de sus
$y \le 0$ – partea de jos.

$$A_{semielipsă} = \frac{1}{2}\pi ab$$
$$A_{Elipsă} = \pi ab.$$

Generare:

$a = k \Rightarrow x \in [-k,k]$.
$b = j \Rightarrow y \in [-j,j]$ sau $y \in [0,j]$ dacă $y \ge 0$.

do { $x \leftarrow -k+(k+k) * urand();$
$y \leftarrow -j+(j+j) * urand();$
} while( ); dar cu >1.

Al doilea ex. – Lanțuri Markov.

Rândul 1.

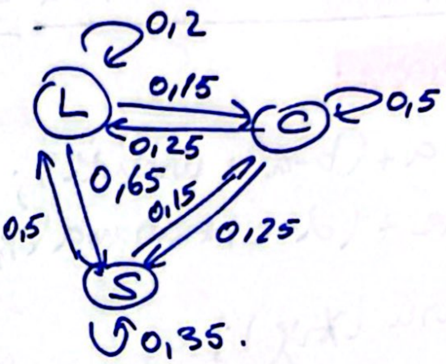
5. scrieți formula pt. evoluția pe o traiectorie.

traiectoria $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$

$P(X_0=s_0, X_1=s_1, \ldots, X_n=s_n)=\pi_0(s_0)Q(s_0,s_1)Q(s_1,s_2)\cdot$

$\cdot \ldots Q(s_{n-1}, s_n)$.

	L	C	S
L	0,2	0,15	0,65
C	0,25	0,5	0,25
S	0,5	0,15	0,35



$P(X_2=C \mid X_1=L)=0{,}15$

L, L, C, S - prob. să evolueze pe această traiectorie

$P(X_0=L, X_1=L, X_2=C, X_3=S)=\pi_0(s_0)Q(s_0,s_1)\cdot$

$\cdot Q(s_1,s_2)\cdot Q(s_2,s_3)=\pi_0(L)Q(L,L)\cdot Q(L,C)\cdot Q(C,S$

$\Rightarrow$ dist. unif. $\pi_0(L)=\frac{1}{3}$. $=\frac{1}{3}\cdot 0{,}2\cdot 0{,}15\cdot 0{,}25=$

$=0{,}0025$.

lanț ireductibil și aperiodic

lanțul este ireductibil deoarece din fiecare nod poți ajunge în celelalte.

ciclurile nod L: $L\to C\to S\to L$ (3), $L\to S\to L$ (2) $\Rightarrow$ cmmdc $=1$. $\Rightarrow$ nod aperiodic $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ lanț aperiodic.

Rândul 3.

5. să se def. distribuția de echilibru și să se precizeze ce reprez. coord. acestuia.

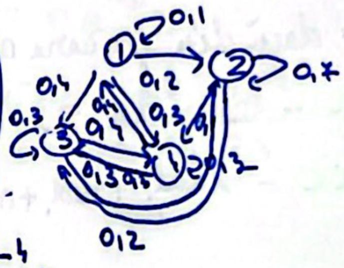
$\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$.

$\pi Q = \pi \qquad \sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1.$

→ coord. reprez. prop. de timp pe care lanțul o petrece la starea i.

condițiile pt. distrib. de echilibru → lanț aperiodic
↳ lanț ireductibil.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & Q = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$



L_4

$P(X_5=1 \mid X_3=4) = Q^2(4,1) = 0,4 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,16.$

$P(X_{m+k}=j \mid X_m=i) = Q^k(i,j)$

$P(X_2=1, X_3=4 \mid X_0=1) = P(X_2=1 \mid X_0=1) \cdot P(X_3=4 \mid X_2=1)$

$P(X_2=1 \mid X_0=1) = Q^2(1,2) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0 = 0,13.$

$P(X_3=4 \mid X_2=1) = Q(1,4) = 0,3.$

$\Rightarrow P(X_2=1, X_3=4 \mid X_0=1) = 0,13 \cdot 0,3 = 0,039.$

lanțul este ired. ...

aperiodic: ②. $2 \to 3 \to 4 \to 1 \to 2 : 4$
$2 \to 4 \to 1 \to 2 : 3$
cmmdc $= 1$ ⇒ nod aperiodic } ⇒

⇒ lanț. aperiodic.

5.

Q^T are vectorul propriu $(0,4;\ 0,6;\ 0,5;\ 0,5)^T$.

$$\pi = \frac{1}{0,4+0,6+0,5+0,5}(0,4;0,6;0,5;0,5) = (0,2;0,3;0,25;0,25)$$

· E distrib. de echilibru.

Formule

Evoluția pe o traiectorie $P(X_0=s_0, X_1=s_1, \dots, X_n=s_n) =$
$= \pi_0(s_0)\cdot Q(s_0,s_1)\cdot Q(s_1,s_2)\dots\cdot Q(s_{n-1},s_n)$

• $\pi_0(s_0) = \frac{1}{\text{nr. de noduri}}$ dacă este uniformă.

Lanț ired. - dacă din fiecare nod se ajunge în celelalte.
Nod aperiodic - cmmdc al ciclurilor $= 1$.
Lanț aperiodic - lanț ired. + nod aperiodic.

• $P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = Q(i,j)$.

Distrib. de echilibru: $\pi Q = \pi$. $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$
$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$.
↳ prop. de timp pe care lanțul o petrece la nodul i.

!. $P(X_{k+n}=j \mid X_k=i) = Q^n(i,j)$
↳ produs dintre linia i și col. j.

!!. $P(X_n=i, X_{n+1}=j \mid X_k=k) = P(X_n=i \mid X_k=k)\cdot P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$

$\boxed{Q^T - \text{vector propriu } w \Rightarrow \pi = \frac{w}{\sum w_i}}$

Ex. procese poisson

Rând 1

6. a) $\lambda = 2$ cereri /minut

$P(\underbrace{\text{primele 3 min}}_{t}\ \underbrace{\text{exact 4 cereri}}_{k}) = P_1$

$P(\underbrace{\text{în ultim. min.}}_{t}\ \underbrace{\text{1 cerere}}_{k}) = P_2$

$\Big\} P$

$$\boxed{P(N_t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}}$$

$$P_1(N_3 = 4) = e^{-2\cdot 3}\frac{(2\cdot 3)^4}{4!} = e^{-6}\frac{6^4}{24}$$

$$P(N_1 = 1) = e^{-2\cdot 1}\frac{(2\cdot 1)^1}{1!} = e^{-2}\cdot 2.$$

$$P = P(N_3=4)\cdot P(N_1=1) = e^{-8}\cdot\frac{2\cdot 6^4}{24}.$$

b) $X \sim Bernoulli(p)$.

s-a generat 1010101111 → 10 biți → 7 de 1
↳ 3 de 0.

Estimatorul pt. p. – p de a genera bitul 1

$$\hat{p} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Estimator MLE

$$L(p; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = p^7(1-p)^3. \quad | \cdot \ln$$

$$\ln L(p) = 7\ln p + 3\ln(1-p) \quad |'.$$

$$\frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{7}{p} - \frac{3}{1-p}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{p} = \frac{3}{1-p}$$

$$7(1-p) = 3p \Rightarrow 7 - 7p = 3p$$

$$10p = 7 \quad p = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Rând 3.

6. a) discount la fiecare al 4-lea client.

$\lambda = 5/zi$

P(primele 3 zile să fie depune 18 cereri)

P(urm. 2 zile mai 8 cereri).

$$\left.\begin{aligned} P(N_3 = 18) &= e^{-5\cdot 3}\cdot\frac{(5\cdot 3)^{18}}{18!} \\ P(N_2 = 8) &= e^{-5\cdot 2}\,\frac{(5\cdot 2)^{8}}{8!} \end{aligned}\right\} \cdot \Rightarrow P \text{ final.}$$

media și dispersia

$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ – timp până la al 4-lea client

$M(T) = M(T_1) + M(T_2) + M(T_3) + M(T_4) = 4\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ zile

$\sigma^2(T) = \ldots \quad = 4\cdot\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4}{25} = 0{,}16$ zile^2.

b) den. de probab.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

$x_1 = 0{,}34 \quad x_2 = 0{,}75 \quad x_3 = 0{,}26 \quad x_4 = 0{,}65 \quad x_5 = 0{,}1$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\theta(x)\,dx = \int_0^1 x(\theta+1)x^\theta\,dx = (\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}dx =$$

$$= (\theta+1)\cdot\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\Big|_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

MLE:

$L(\theta) = (\theta+1)^5\cdot x^\theta \quad | \ln$

$\ln L(\theta) = 5\ln(\theta+1) + \theta\ln x \quad |'$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d} = 5\,\frac{1}{\theta+1} + \ln x$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\theta+1} = -\ln x$$

$$-(\theta+1)\ln x = 5$$

$$-\theta - 1 = \frac{5}{\ln x}$$

$$-\theta = \frac{5}{\ln x} + 1$$

$$\theta = \frac{5}{\ln x} - 1.$$

↑ înlocuim x cu $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_5$.

... calc. $\theta = -0,083$.

Formule

Proces Poisson $\boxed{P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}}$

$\hat{p}$ - estimatorul de succes

$\hat{p} = \frac{\text{caz. fav.}}{\text{caz. tot}}$ — la Bernoulli / la Binomială

$\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$ — la Geometrică / la Exponențială (not. $\hat{\lambda}$)

$\bar{x}$ - media aritm. a datelor

MLE: → $L(p)$ = densitatea de probab.

→ logaritmăm

→ derivăm în fct. de p (sau θ la alte cazuri)

→ calculăm și aflăm p sau θ.

$$\boxed{\begin{aligned} &T = T_1 + T_2 + \ldots + T_k \\ &M(T) = \frac{k}{\lambda} \\ &\sigma^2(T) = \frac{k}{\lambda^2} \end{aligned}}$$

T - mom. în care apare al k-lea eveniment

$$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\theta(x)\,dx.}$$