

# Matematica Discreta e Probabilità

## Suddivisione corso

Il corso è suddiviso in quattro parti: calcolo combinatorio, statistica descrittiva, probabilità e statistica inferenziale.

Verranno dedicate 10 ore per la parte di calcolo combinatorio, 5 per la parte di statistica descrittiva, 40 per la parte di probabilità e 5 per la parte di statistica inferenziale.

## 1 Calcolo Combinatorio

### 1.1 Richiami

Serviranno i concetti di **insieme**, **sottoinsieme**, e di funzioni **iniettive** e **suriettive**.

#### 1.1.1 Insieme

Un **insieme** è un raggruppamento di elementi che può essere individuato mediante una caratteristica comune che gli appartengono.

$$A = \{a, b\}$$

#### 1.1.2 Sottoinsieme

Un **sottoinsieme** è un raggruppamento di elementi appartenenti ad un insieme che è anch'esso un insieme.

$$B = \{n \in N : 1 \leq n \leq 5\}$$

#### 1.1.3 Funzioni Iniettive

Una funzione si dice **Iniettiva** se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. Possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

#### 1.1.4 Funzioni Suriettive

Una funzione si dice **Suriettiva** se ogni elemento del codominio è raggiunto da almeno un elemento del dominio. Non possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

### 1.1.5 Funzioni Biettive

Una funzione si dice **Biettiva** se è sia suriettiva che iniettiva.

## 1.2 Teoria della Cardinalità

Due insiemi hanno la stessa **cardinalità** se esiste una biezione tra essi.  
Se è possibile costruire una funzione biettiva tra due insiemi.

### 1.2.1 Definizioni

Un insieme  $A$  si dice finito se esiste  $n \geq 0$  tale che  $A$  e  $\{1, 2, \dots, n\}$  hanno la stessa **cardinalità**.

Se  $A \longleftrightarrow \{1, \dots, n\}$  diciamo che  $A$  ha **cardinalità**  $n$  e scriviamo  $|A| = n$

Un insieme  $A$  si dice **numerabile** se esiste biezione.  $A \longleftrightarrow N = \{0, 1, 2, \dots\}$

### 1.2.2 Esempi

**1**

$B = \{1, 2, 3, \dots\}$   $f : N \rightarrow B, f(n) = n + 1$

La funzione rappresenta la corrispondenza tra  $B$  e l'insieme dei numeri interi positivi (infiniti)  $\mapsto B$  è **numerabile**.

**2**

$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$  è **numerabile**?

Sì, lo è perchè basta fare le giuste associazioni :

$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$

$f : Z \rightarrow N \begin{cases} 2z - 1 & \text{se } z > 0 \\ -2z & \text{se } z \leq 0 \end{cases}$

#### Osservazione

Un insieme è **numerabile** se riesco ad elencare tutti i suoi elementi in un elenco infinito e viceversa.

**3**

$Q \geq 0 = \{\frac{a}{b} : a, b \in N, b \neq 0\}$  (Tutte le frazioni  $> 0$ )

è **numerabile**, l'importante è poter esprimere le frazioni in un elenco.

$0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, 4, \dots$

In questo modo posso sicuramente scrivere **tutti** i numeri razionali.

## 4

$A = \{\text{sequenze binarie di lunghezza infinita}\}$

Vogliamo mostrare che  $A$  non è **numerabile**. Prendiamo un elenco infinito di elementi di  $A$ .

$a_1 = 0110101..$ ,  $a_2 = 1100101..$ ,  $a_3 = 0010100..$ ,  $\dots$ ,  $a_n = 1000011..$

Vogliamo costruire una sequenza che non fa parte di questo elenco.

Come primo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del primo di  $a_1$ .

Come secondo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del secondo di  $a_2$ .

Come terzo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del terzo di  $a_3$ .

Ragionando in questo modo fino ad  $n$  avremo una sequenza che non fa parte di  $A$ .

$A$  non è **numerabile**, perchè è impossibile creare un elenco infinito che contenga tutte le sequenze di  $A$ .

### Osservazione

Questo insieme  $A$  e  $R$  hanno la stessa cardinalità. Tale cardinalità si dice **del continuo**. <http://www.scit.wlv.ac.uk/~cm1993/maths/mm2217/rup.htm>

## 1.2.3 Esercizi

### 1

Abbiamo due biglietti da regalare a due amici scelti su 10. In quanti modi posso fare la scelta?

#### Soluzione

Possiamo partire puntando la prima persona (1) e contando con quante possibili persone la persona 1 può andare al concerto. Siccome sono 10 persone, allora la persona 1 potrà andare al concerto con 9 persone. Ora controlliamo con quante persone la persona 2 può andare al concerto (escludendo l'esistenza della persona 1), e sta volta saranno 8. Ora vedremo uno schema ricorsivo per il conteggio delle combinazioni siccome la persona 3, potrà andare al concerto con 7 persone (escludendo questa volta la persona 1,2). Ora per contare le possibili combinazioni è facile vedere che ci basta fare una sommatoria da 1 a 9.

$\sum_{i=1}^9 i = 45$ , using Gauss formula  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

### 2

C' un torneo di un gioco (non specificato) in quale abbiamo 3 concorrenti A, B, C. Quali sono le possibili combinazioni del podio contando anche i pareggi?

#### Soluzione

1° Caso: nessun pareggio. 6 possibili combinazioni:

- 1) A,B,C
- 2) A,C,B
- 3) B,A,C
- 4) B,C,A
- 5) C,A,B
- 6) C,B,A

Possiamo trovare queste combinazioni calcolando  $3! = 6$ .

2° Caso: tutti parimerito. 1 Combinazione:

A,B,C (Indipendente dall'ordine)

3° Caso: due parimerito. 6 Combinazioni:

1) (A,B),C o alternativamente C,(A,B). ( ) Indica stessa posizione/pareggio, siccome sono 3 concorrenti moltiplico queste 2 possibili combinazioni per 3, quindi  $3 \cdot 2 = 6$ .

Totale =  $6 + 1 + 6 = 13$ .

### 3

Lancio un dado 3 volte. Quante sono le possibili sequenze di risultati in cui in ordine di grandezza il dado con valore pi alto  $\geq 5$ , il secondo pi alto  $\geq 4$ , il terzo pi alto  $\geq 3$ .

#### Soluzione

Come prima, dividiamo il problema in sottoproblemi e studiamo caso per caso.

1° Caso: 3 risultati diversi:

- 1) 4, 5, 6
- 2) 3, 4, 5
- 3) 3, 4, 6
- 4) 3, 5, 6

Ognuna di queste ha 6 possibili combinazioni.

Totale temporaneo =  $4 \cdot 6 = 24$ .

2° Caso: 2 risultati uguali 1 diverso:

- 1) 4, 4, 5
- 2) 4, 4, 6
- 3) 5, 5, 3
- 4) 5, 5, 4
- 5) 5, 5, 6
- 6) 6, 6, 3
- 7) 6, 6, 4
- 8) 6, 6, 5

E ognuna di queste può avere 3 combinazioni diverse,

quindi totale temporaneo =  $24 + (8 \cdot 3) = 48$ .

3° Caso: 3 risultati uguali:

1) 5, 5, 5

2) 6, 6, 6

Totale =  $48 + 2 = 50$ .

Non contiamo il caso 1 risultato uguale e 2 diversi perch non ha senso, siccome 1 uguale a cosa? lol..

**4**

L'insieme  $A = \{1, 2, \dots, 11\}$  ha pi sottoinsiemi di cardinalità pari o dispari o il numero di sottoinsiemi pari uguale a quello di dimensione dispari?

**Soluzione**

Possiamo usare di ciascun sottoinsieme il suo complementare, esempio con  $n = 3$  :

$$\begin{aligned}\{1, 2\} &\longleftrightarrow 3 \\ \{1, 3\} &\longleftrightarrow 2 \\ \{2, 3\} &\longleftrightarrow 1 \\ \emptyset &\longleftrightarrow \{1, 2, 3\}\end{aligned}$$

Per induzione quindi avremo sempre degli insiemi pari complementari a quelli dispari e quindi il numero di sottoinsiemi pari uguale a quelli dispari.

**5**

4 coppie moglie e marito, sono scambisti per una serata, in quanti modi possono scambiarsi? (Sono etero).

**Soluzione**

Si possono scambiare in 9 modi diversi (Risposta da chiarire mercoledì).

## 1.3 Proprietà Cartesiane

### 1.3.1 Prodotto Cartesiano

$A, B$  insiemi.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Si estende in moto naturale al caso di 3 o più insiemi.

**Esempio**

$A = \{1, 2\}$  e  $B = \{1, a, 3\}$ . Allora :  $A \times B = \{(1, 1), (1, a), (1, 3), (2, 1), (2, a), (2, 3)\}$

### 1.3.2 Potenza Cartesiana

$A^n = A \times A \times A \times \dots \times A$  ( $n$ ) volte.

$A^n$  l'insieme dell n-ple di ordinate di elementi di  $A$ . Gli elementi di  $A^n$  si dicono **liste** o **sequenze**.

#### Esempio

$A = \{0, 1\}$ , allora  $A^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots, (1, 1, 1)\}$ .

### 1.4 L'insieme delle parti

$A$  insieme, l'insieme delle parti di  $A$ , l'insieme  $P(A)$  i cui elementi sono i sottoinsiemi di  $A$ .

$A = \{1, a, 3\}$ .

$P(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{a\}, \{3\}, \{1, a\}, \{1, 3\}, \{a, 3\}\}$ ,  $|P(A)| = 8$ .

#### 1.4.1 Definizione

Sia  $A$  un insieme e  $|A| = n$ . Allora esiste una biiezione tra  $P(A)$  e  $0, 1^n$ .

#### 1.4.2 Dimostrazione

Iniziamo con un esempio  $A = \{1, 2, 3\}$ .

$$\begin{aligned}\{\emptyset\} &\longrightarrow 000 \\ \{1, 2, 3\} &\longrightarrow 111 \\ \{1\} &\longrightarrow 100 \\ \{2\} &\longrightarrow 010 \\ \{3\} &\longrightarrow 001 \\ \{1, 2\} &\longrightarrow 110 \\ \{1, 3\} &\longrightarrow 101 \\ \{2, 3\} &\longrightarrow 011\end{aligned}$$

In generale se  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  allora  $F : P(A) \rightarrow \{0, 1\}^n$ .

Sia  $S \subseteq A$ ,  $F(S) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$  con 
$$\begin{cases} 1 & \text{if } a_i \in S \\ 0 & \text{if } a_i \notin S \end{cases}$$
 Da aggiustare.

## 1.5 Principio di induzione

Supponiamo di avere una famiglia di proposizione chiamata  $\underline{P}(n), n \geq n_0$  possono essere vere o false. Per mostrare che sono tutte vere dobbiamo verificare i seguenti due passi.

- 1) **passo base** dell'induzione: verificare che  $\underline{P}(n_0)$  è vera.
- 2) **passo induttivo** verificare che se  $\underline{P}(n)$  è vera, allora  $\underline{P}(n+1)$  è anche vera  $\forall n \geq n_0$ .

### 1.5.1 Esempio

Supponiamo di avere  $n$  amici.

Il primo amico beve **1** birra, il secondo amico beve **2** birre, il terzo **3**, e così via.. Quante birre vengono bevute in tutto?

Se  $n = 1$ , viene bevuta **1** birra, se  $n = 2$ , ne vengono bevute **4**, mentre se  $n = 3$  ne vengono bevute **9**.

Ipotizziamo quindi che il numero di birre sia  $n^2$ . Verifichiamo i passi dell'induzione.

**Passo base** :  $P(1) = 1$  . Verificato.

**Passo induttivo** : Il numero totale di birre per  $n+1$  allora dovrebbe essere  $n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ .

## 1.6 Principio di uguaglianza

$A, B$  insiemi in corrispondenza biunivoca  $\rightarrow |A| = |B|$ , vale anche il **vicversa**.

### 1.6.1 Esempio

Il numero di cioccolatini mangiati è uguale al numero di incarti lasciati in giro.

## 1.7 Principio di somma

$A, B$  insiemi tale che  $A \cap B = \emptyset \rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$ .

## 1.8 Principio di moltiplicazione

$A, B$  insiemi  $\rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B|$ , in particolare  $|A^n| = |A|^n$ .

### 1.8.1 Corollario

Se  $|A| = n$ ,  $|P(A)| = 2^n$ .

#### Dimostrazione

Per il principio di uguaglianza  $|P(A)| = |\{0, 1\}^n|$  perchè abbiamo visto che esiste una biiezione tra  $P(A)$  e  $\{0, 1\}^n$ .

Per il principio di moltiplicazione  $|\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n$

## 1.9 Prodotti Condizionati

$A, B$  insiemi.

Un prodotto condizionato é un sottoinsieme di  $A \times B$  che soddisfa certe condizioni.

**Ad esempio:**

$A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$

$\mathbf{C} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$ ,  $\mathbf{D} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

$\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  sono due possibili sottoinsiemi di  $A \times B$ .

### 1.9.1 Definizione

$S \subseteq A \times B$ , si dice prodotto condizionato di tipo  $(n, m)$  se

1. La prima coordinata di un elemento di  $S$  può essere scelta in  $n$  modi.
2. Fissata la prima coordinata in uno di questi  $n$  modi, la seconda può essere scelta in  $m$  modi.

**Ad esempio:**

$A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$

$\mathbf{C} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$ ,  $\mathbf{D} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

$\mathbf{C}$  é un prodotto condizionato di tipo  $(3, 1)$ ,  $\mathbf{D}$  non lo é perché ho **una** scelta con prima coordinata 2 e **due** scelte con prima coordinata 1.

**Altro esempio:**  $A = B = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$C = \{(a, b) : a, b \in A, a \neq b\}$ , abbiamo **dieci** scelte per la prima coordinata.

Fissata questa prima coordinata, ne abbiamo **nove** per la seconda.

É un prodotto condizionato di tipo  $(10, 9)$ .

### 1.9.2 Proposizione

Se  $S \subseteq A \times B$  é prodotto condizionato di tipo  $(n, m)$  allora  $|S| = n \cdot m$ .



### 1.9.3 Dimostrazione

Siano  $a_1, \dots, a_n$  le possibili scelte per la prima coordinata.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n.$$

$$S_i = \{ \text{elementi di } S \text{ con prima coordinata } a_i \}.$$

$$|S_i| = m \text{ (prodotto condizionato)}.$$

Siccome gli  $S_i$  sono disgiunti per il principio di somma,

$$\text{ho } |S| = |S_1| + \dots + |S_n| = m + \dots + m = n \cdot m.$$

### 1.9.4 Estendiamo il concetto

$S \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$  é un prodotto condizionato di tipo  $(m_1, m_2, m_3, \dots, m_k)$

se:

1. Ho  $m_1$  scelte per la prima coordinata
2. Fissata la prima coordinata, ho  $m_2$  scelte per la seconda coordinata.
3. Fissate le prime due coordinate ho  $m_3$  scelte per la terza.  
Cosí via fino a..
4. Fissate le prime  $(k - 1)$  coordinate ho  $m_k$  scelte per la k.

Analogamente a prima se  $S$  é un prodotto condizionato di tipo  $(m_1, \dots, m_k)$

$$\text{allora } |S| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k.$$

### Esempio

$$A = \{a, b, c : a, b, c \in N, a \leq 10, 0 \leq b - a \leq 10, 0 \leq c - a - b \leq 10\}.$$

$A$  = terne di numeri naturali che rispettano le condizioni.  $|A|$  ?

Abbiamo **11** modi per scegliere  $a$ , fissata  $a$  abbiamo **11** modi per scegliere  $b \rightarrow (a \leq b \leq 10 + a)$

Fissate  $(a, b)$ , abbiamo **11** modi anche per scegliere la terza coordinata  $c \rightarrow (a + b \leq c \leq 10 + a + b)$ .

$A$  é quindi un prodotto condizionato di tipo  $(11, 11, 11)$ ,  $|A| = 11^3 = 1331$ .

### Osservazione

$A, B$ ,  $|A| = n$ ,  $|B| = n$ .  $A \times B$  é un prodotto condizionato di tipo  $(n, n)$ .

## 1.10 Disposizioni e Permutazioni

Una disposizione in  $A$  é una sequenza in  $A$  in cui le coordinate sono distinte tra loro.

$\{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A, a_i \neq a_j \vee i \neq j\}$  é l'insieme delle disposizioni di lunghezza  $n$  in  $A$ .

### 1.10.1 Proposizione

$|A| = n$ . L'insieme delle disposizioni di lunghezza  $k$  é un prodotto condizionato del tipo  $(n, n-1, n-2, \dots, n-k)$ .

### 1.10.2 Dimostrazione

La prima coordinata la posso scegliere in  $n$  modi.

La seconda deve essere  $\neq$  dalla prima, quindi ho  $n-1$  modi.

La terza deve essere diversa dalla prima e dalla seconda,  $n-2$  modi.

L'ultima deve essere diversa da tutte le altre, quindi  $n-k+1$  modi.

### 1.10.3 Conseguenza

Le disposizioni di lunghezza  $k$  in un insieme di  $n$  elementi sono:

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Esso viene chiamato **fattoriale discendente**, é il prodotto di  $k$  numeri interi consecutivi di cui il piú grande é  $n$ .

#### Esempio

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  Le disposizioni di lunghezza 3 in  $A$  sono  $(5)_3, (5 \cdot 4 \cdot 3) = 60$ .

Sarebbero tutti i modi di disporre, ad esempio  $(1, 2, 3)$ ,  $(1, 3, 2)$ ,  $(3, 1, 2)$ .

#### Caso particolare

Se  $k = n$  le disposizioni di lunghezza  $n$  si dicono **permutazioni**.

Le permutazioni di  $n$  sono  $(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = n!$ .

## 1.11 Combinazioni

Una combinazione in  $A$  di lunghezza  $k$  é un sottoinsieme di  $A$  di cardinalit   $k$ .

#### Esempio

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , scelto  $k = 3$ . Le combinazioni di lunghezza 3 in  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  sono 10.

$\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 2, 4\}$ ,  $\{1, 2, 5\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$ ,  $\{1, 3, 5\}$ ,  $\{1, 4, 5\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$ ,  $\{2, 3, 5\}$ ,  $\{2, 4, 5\}$ ,  $\{3, 4, 5\}$ .

### 1.11.1 Legame tra disposizioni e combinazioni

Possiamo associare ad ogni disposizione di lunghezza  $k$  una combinazione di lunghezza  $k$ . La funzione con cui le associeremo dimentica l'ordine.

Per **ogni** combinazione ho esattamente  $k!$  disposizioni la cui immagine é la combinazione data: sono tutte le permutazioni di questi  $k$  elementi.

Il numero di disposizioni é quindi  $k!$  volte il numero delle combinazioni.

### 1.11.2 Conclusione

I sottoinsiemi di cardinalità  $k$  (combinazioni) sono

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

### 1.12 Esercizi per il 3 Ottobre

**1**

*Quante sono le sequenze date da due cifre decimali?*

**Soluzione**

$\{00, 01, 02, \dots, 09, 10, 11, \dots, 99\}$  La somma di tali sequenze è 100.

**2**

*Un cammino reticolare è un percorso sul piano cartesiano che effettua passi di lunghezza uno verso destra o verso l'alto. Quanti sono i cammini reticolari da  $(0, 0)$  a  $(2, 2)$ ?*

**Soluzione**

1 percorso: fissiamo una sola direzione di partenza e muoviamoci verso questa finché non sarà necessario cambiarla.  $n - 1$  percorsi: partendo dall'ultimo movimento del percorso precedente modifichiamo il più vicino in modo tale da creare un percorso diverso da quello precedente.

Percorsi totali: 6.

**3**

*Mostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i cammini reticolari (vedi esercizio precedente per la definizione) da  $(0, 0)$  a  $(3, 2)$  e i sottoinsiemi di  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  di cardinalità 2.*

**Soluzione**

Notando che il numero totale di movimenti per arrivare a  $(3, 2)$  pari a 5 (elementi dell'insieme) e che gli spostamenti verso l'alto sono necessariamente 2 (elementi del sottoinsieme di cardinalità 2), possiamo pensare al numero di ogni sottoinsieme come il numero del movimento in cui ci spostiamo verso l'alto:

$$\begin{aligned} \{1, 2\} &\rightarrow \text{primo e secondo movimento verso l'alto} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\{1, 5\} \rightarrow$  primo e quinto movimento ” ”  
 $\{2, 3\} \rightarrow$  secondo e terzo movimento ” ”  
 $\vdots$   
 $\{4, 5\} \rightarrow$  quarto e quinto movimento ” ”

**4**

*Esibire una corrispondenza biunivoca tra gli intervalli aperti reali  $(0, 1)$  e  $(5, 10)$ .*

**Soluzione**

$$f : ]0, 1[ \longrightarrow ]5, 10[$$

$$f(x) = 5x + 5$$

$f$  è iniettiva?

$$5x + 5 = 5x' + 5$$

$$\Rightarrow x = x'$$

$f$  è suriettiva?

$$y \in (5, 10)$$

$$y = 5x + 5 \iff x = \frac{y-5}{5}$$

