Matematica Discreta e Probabilitá

Suddivisione corso

Il corso é suddiviso in quattro parti: calcolo combinatorio, statistica descrittiva, probabilitá e statistica inferenziale.
Verranno dedicate 10 ore per la parte di calcolo combinatorio, 5 per la parte di statistica descrittiva, 40 per la parte di probabilitá e 5 per la parte di statistica inferenziale.

1 Calcolo Combinatorio

1.1 Richiami

Serviranno i concetti di **insieme**, **sottoinsieme**, e di funzioni **iniettive** e **suriettive**.

1.1.1 Insieme

Un **insieme** é un raggruppamento di elementi che puó essere individuato mediante una caratteristica comune che gli appartengono.
$A = \{a, b\}$

1.1.2 Sottoinsieme

Un **sottoinsieme** é un raggruppamento di elementi appartenenti ad un insieme che é anch'esso un insieme.
$B = \{n \in N : 1 \leq n \leq 5\}$

1.1.3 Funzioni Iniettive

Una funzione si dice **Iniettiva** se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. Possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

1.1.4 Funzioni Suriettive

Una funzione si dice **Suriettiva** se ogni elemento del codominio é raggiunto da almeno un elemento del dominio. Non possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

1.1.5 Funzioni Biettive

Una funzione si dice **Biettiva** se é sia suriettiva che iniettiva.

1.2 Teoria della Cardinalitá

Due insiemi hanno la stessa **cardinalitá** se esiste una biezione tra essi.
Se é possibile costruire una funzione biettiva tra due insiemi.

1.2.1 Definizioni

Un insieme A si dice finito se esiste $n \geq 0$ tale che A e $\{1, 2, ..n\}$ hanno la stessa **cardinalitá**.

Se $A \longleftrightarrow \{1, .., n\}$ diciamo che A ha **cardinalitá** n e scriviamo $\mid A \mid = n$

Un insieme A si dice **numerabile** se esiste biezione. $A \longleftrightarrow N = \{0, 1, 2, ..\}$

1.2.2 Esempi

1
$B = \{1, 2, 3, ..\}$ $f : N \to B, f(n) = n + 1$
La funzione rappresenta la corrispondenza tra B e l'insieme dei numeri interi positivi (infiniti) $\mapsto B$ é **numerabile**.
2
$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, ..\}$ é **numerabile**?
Si, lo é perché basta fare le giuste associazioni :
$0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$, $-1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$
$f : Z \to N$ $\{2z - 1$ se $z > 0$
$\{-2z$ se $z \leq 0$
Osservazione
Un insieme é **numerabile** se riesco ad elencare tutti i suoi elementi in un elenco infinito e viceversa.
3
$Q \geq 0 = \{\frac{a}{b} : a, b \in N, b \neq 0\}$ (Tutte le frazioni > 0)
É **numerabile**, l'importante é poter esprimere le frazioni in un elenco.
$0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, 4, ...$
In questo modo posso sicuramente scrivere **tutti** i numeri razionali.

4
$A = \{\text{sequenze binarie di lunghezza infinita}\}$
Vogliamo mostrare che A non é **numerabile**. Prendiamo un elenco infinito di elementi di A.
$a_1 = 0110101..$, $a_2 = 1100101..$, $a_3 = 0010100..$, ... , $a_n = 1000011..$
Vogliamo costruire una sequenza che non fa parte di questo elenco.
Come primo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del primo di a_1.
Come secondo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del secondo di a_2.
Come terzo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del terzo di a_3.
Ragionando in questo modo fino ad n avremo una sequenza che non fa parte di A.
A non é **numerabile** , perché é impossibile creare un elenco infinito che contenga tutte le sequenze di A.
Osservazione
Questo insieme A e R hanno la stessa cardinalitá. Tale cardinalitá si dice **del continuo**. `http://www.scit.wlv.ac.uk/~cm1993/maths/mm2217/rup.htm`

1.2.3 Esercizi

1
Abbiamo due biglietti da regalare a due amici scelti su 10. In quanti modi posso fare la scelta?
Soluzione
Possiamo partire puntando la prima persona (1) e contando con quante possibili persone la persona 1 pu andare al concerto. Siccome sono 10 persone, allora la persona 1 potr andare al concerto con 9 persone. Ora controlliamo con quante persone la persona 2 pu andare al concerto (escludendo l'esistenza della persona 1), e sta volta saranno 8. Ora vedremo uno schema ricorsivo per il conteggio delle combinazioni siccome la persona 3, potr andare al concerto con 7 persone (escludendo questa volta la persona $1, 2$). Ora per contare le possibili combinazioni è facile vedere che ci basta fare una sommatoria da 1 a 9.
$\sum_{i=1}^{9} i = 45$, using Gauss formula $\frac{n(n+1)}{2}$.

2
C' un torneo di un gioco (non specificato) in quale abbiamo 3 concorrenti A, B, C. Quali sono le possibili combinazioni del podio contando anche i pareggi?
Soluzione
1^o Caso: nessun pareggio. 6 possibili combinazioni:

1) A,B,C
2) A,C,B
3) B,A,C
4) B,C,A
5) C,A,B
6) C,B,A

Possiamo trovare queste combinazioni calcolando $3! = 6$.
2^o Caso: tutti parimerito. 1 Combinazione:
A,B,C (Indipendente dall'ordine)
3^o Caso: due parimerito. 6 Combinazioni:
1) (A,B),C o alternativamente C,(A,B). () Indica stessa posizione/pareggio, siccome sono 3 concorrenti moltiplico queste 2 possibili combinazioni per 3, quindi $3 \cdot 2 = 6$.
Totale $= 6 + 1 + 6 = 13$.

3
Lancio un dado 3 volte. Quante sono le possibili sequenze di risultati in cui in ordine di grandezza il dado con valore pi alto ≥ 5, il secondo pi alto ≥ 4, il terzo pi alto ≥ 3.
Soluzione
Come prima, dividiamo il problema in sottoproblemi e studiamo caso per caso.
1^o Caso: 3 risultati diversi:

1) $4, 5, 6$
2) $3, 4, 5$
3) $3, 4, 6$
4) $3, 5, 6$

Ognuna di queste ha 6 possibili combinazioni.
Totale temporaneo $= 4 \cdot 6 = 24$.
2^o Caso: 2 risultati uguali 1 diverso:

1) $4, 4, 5$
2) $4, 4, 6$
3) $5, 5, 3$
4) $5, 5, 4$
5) $5, 5, 6$
6) $6, 6, 3$
7) $6, 6, 4$
8) $6, 6, 5$

E ognuna di queste pu avere 3 combinazioni diverse,
quindi totale temporaneo $= 24 + (8 \cdot 3) = 48$.
3^o Caso: 3 risultati uguali:
1) $5, 5, 5$
2) $6, 6, 6$
Totale $= 48 + 2 = 50$.
Non contiamo il caso 1 risultato uguale e 2 diversi perch non ha senso, siccome 1 uguale a cosa? lol..

4

L'insieme $A = \{1, 2, ..., 11\}$ ha pi sottoinsiemi di cardinalit pari o dispari o il numero di sottoinsiemi pari uguale a quello di dimensione dispari?

Soluzione

Possiamo usare di ciascun sottoinsieme il suo complementare, esempio con $n = 3$:

$$\{1, 2\} \longleftrightarrow 3$$
$$\{1, 3\} \longleftrightarrow 2$$
$$\{2, 3\} \longleftrightarrow 1$$
$$\emptyset \longleftrightarrow \{1, 2, 3\}$$

Per induzione quindi avremo sempre degli insiemi pari complementari a quelli dispari e quindi il numero di sottoinsiemi pari uguale a quelli dispari.

5

4 coppie moglie e marito, sono scambisti per una serata, in quanti modi possono scambiarsi? (Sono etero).

Soluzione

Si possono scambiare in 9 modi diversi (Risposta da chiarire mercoledi).

1.3 Proprietá Cartesiane

1.3.1 Prodotto Cartesiano

A, B insiemi.
$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Si estende in moto naturale al caso di 3 o piú insiemi.

Esempio

$A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, a, 3\}$. Allora : $A \times B = \{(1, 1), (1, a), (1, 3), (2, 1), (2, a), (2, 3)\}$

1.3.2 Potenza Cartesiana

$A^n = A \times A \times A \times ... \times A$ (n) volte.
A^n l'insieme dell n-ple di ordinate di elementi di A. Gli elementi di A^n si dicono **liste** o **sequenze**.

Esempio
$A = \{0, 1\}$, allora $A^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), ..., (1, 1, 1)\}$.

1.4 L'insieme delle parti

A insieme, l'insieme delle parti di A, l'insieme $P(A)$ i cui elementi sono i sottoinsiemi di A.
$A = \{1, a, 3\}$.
$P(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{a\}, \{3\}, \{1, a\}, \{1, 3\}, \{a, 3\}\}$, $|P(A)| = 8$.

1.4.1 Definizione

Sia A un insieme e $|A| = n$. ALlora esiste una biiezione tra $P(A)$ e $0, 1^n$.

1.4.2 Dimostrazione

Iniziamo con un esempio $A = \{1, 2, 3\}$.

$$
\begin{gathered}
\{\emptyset\} \longrightarrow 000 \\
\{1, 2, 3\} \longrightarrow 111 \\
\{1\} \longrightarrow 100 \\
\{2\} \longrightarrow 010 \\
\{3\} \longrightarrow 001 \\
\{1, 2\} \longrightarrow 110 \\
\{1, 3\} \longrightarrow 101 \\
\{2, 3\} \longrightarrow 011
\end{gathered}
$$

In generale se $A = \{1, 2, ..., n\}$ allora $F : P(A) \to \{0, 1\}^n$.
Sia $S \subseteq A$, $F(S) = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \{0, 1\}^n$ con $\begin{cases} 1 if a_i \in S \\ 2 if a_i \notin S \end{cases}$ Da aggiustare.

1.5 Principio di induzione

Supponiamo di avere una famiglia di proposizione chiamata $\underline{P}(n), n \geq n_0$ possono essere vere o false. Per mostrare che sono tutte vere dobbiamo verificare i seguenti due passi.
1) **passo base** dell'induzione: verificare che $P(n_0)$ é vera.
2) **passo induttivo** verificare che se $\underline{P}(n)$ é vera, allora $\underline{P}(n+1)$ é anche vera $\forall n \geq n_0$.

1.5.1 Esempio

Supponiamo di avere n amici.
Il primo amico beve **1** birra, il secondo amico beve **2** birre, il terzo **3**, e cosí via.. Quante birre vengono bevute in tutto?
Se $n = 1$, viene bevuta **1** birra, se $n = 2$, ne vengono bevute **4**, mentre se $n = 3$ ne vengono bevute **9**.
Ipotizziamo quindi che il numero di birre sia n^2. Verifichiamo i passi dell'induzione.
Passo base : $P(1) = 1$. Verificato.
Passo induttivo : Il numero totale di birre per n+1 allora dovrebbe essere $n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

1.6 Principio di uguaglianza

A, B insiemi in corrispondenza biunivoca $\rightarrow \mid A \mid = \mid B \mid$, vale anche il **vicerversa**.

1.6.1 Esempio

Il numero di cioccolatini mangiati é uguale al numero di incarti lasciati in giro.

1.7 Principio di somma

A, B insiemi tale che $A \cap B = \emptyset \rightarrow \mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid$.

1.8 Principio di moltiplicazione

A, B insiemi $\rightarrow \mid A \times B \mid = \mid A \mid \cdot \mid B \mid$, in particolare $\mid A^n \mid = \mid A \mid^n$.

1.8.1 Corollario

Se $\mid A \mid = n$, $\mid P(A) \mid = 2^n$.
Dimostrazione
Per il principio di uguaglianza $\mid P(A) \mid = \mid \{0,1\}^n \mid$ perché abbiamo visto che esiste una biiezione tra $P(A)$ e $\{0,1\}^n$.
Per il principio di moltiplicazione $\mid \{0,1\}^n \mid = \mid \{0,1\} \mid^n = 2^n$

1.9 Esercizi per il 3 Ottobre

1
Quante sono le sequenze date da due difre decimali?

Soluzione
$\{00, 01, 02, ..., 09, 10, 11, ..., 99\}$ La somma di tali sequenze è 100.

2
Un cammino reticolare un percorso sul piano cartesiano che effettua passi di lunghezza uno verso destra o verso lalto. Quanti sono i cammini reticolari da $(0,0)$ *a* $(2,2)$*?*

Soluzione
1 percorso: fissiamo una sola direzione di partenza e muoviamoci verso questa finchè non sarà necessario cambiarla. $n-1$ percorsi: partendo dall'ultimo movimento del percorso precedente modifichiamo il piú vicino in modo tale da creare un percorso diverso da quello precedente.
Percorsi totali: 6.

3
Mostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i cammini reticolari (vedi esercizio precedente per la definizione) da $(0,0)$ *a* $(3,2)$ *e i sottoinsiemi di* $\{1,2,3,4,5\}$ *di cardinalità* 2.

Soluzione
Notando che il numero totale di movimenti per arrivare a $(3,2)$ pari a 5 (elementi dell'insieme) e che gli spostamenti verso l'alto sono necessariamente 2 (elementi del sottoinsieme di cardinalit 2), possiamo pensare al numero di ogni sottoinsieme come il numero del movimento in cui ci spostiamo verso l'alto:

$$\{1,2\} \to \text{primo e secondo movimento verso l'alto}$$
$$\vdots$$
$$\{1,5\} \to \text{primo e quinto movimento " "}$$
$$\{2,3\} \to \text{secondo e terzo movimento " "}$$
$$\vdots$$
$$\{4,5\} \to \text{quarto e quinto movimento " "}$$

4
Esibire una corrispondenza biunivoca tra gli intervalli aperti reali $(0,1)$ *e* $(5,10)$.

Soluzione
$f :]0,1[\longrightarrow]5,10[$
$f(x) = 5x + 5$

f è iniettiva?
$5x + 5 = 5x' + 5$
$\Rightarrow x = x'$
f è suriettiva?
$y \in (5,10)$
$y = 5x + 5 \iff x = \frac{y-5}{5}$