Esercizi

October 13, 2019

3 Ottobre

1

Quante sono le sequenze date da due difre decimali?

Soluzione

$\{00, 01, 02, ..., 09, 10, 11, ..., 99\}$ La somma di tali sequenze è 100.

2

Un cammino reticolare un percorso sul piano cartesiano che effettua passi di lunghezza uno verso destra o verso lalto. Quanti sono i cammini reticolari da $(0, 0)$ *a* $(2, 2)$*?*

Soluzione

1 percorso: fissiamo una sola direzione di partenza e muoviamoci verso questa finchè non sarà necessario cambiarla. $n - 1$ percorsi: partendo dall'ultimo movimento del percorso precedente modifichiamo il piú vicino in modo tale da creare un percorso diverso da quello precedente.
Percorsi totali: 6.

3

Mostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i cammini reticolari (vedi esercizio precedente per la definizione) da $(0, 0)$ *a* $(3, 2)$ *e i sottoinsiemi di* $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ *di cardinalità* 2.

Soluzione

Notando che il numero totale di movimenti per arrivare a $(3, 2)$ pari a 5 (elementi dell'insieme) e che gli spostamenti verso l'alto sono necessariamente 2 (elementi del sottoinsieme di cardinalità 2), possiamo pensare al numero di ogni sottoinsieme come il numero del movimento in cui ci spostiamo verso l'alto:

$$\begin{gathered}
\{1,2\} \rightarrow \text{primo e secondo movimento verso l'alto} \\
\vdots \\
\{1,5\} \rightarrow \text{primo e quinto movimento " "} \\
\{2,3\} \rightarrow \text{secondo e terzo movimento " "} \\
\vdots \\
\{4,5\} \rightarrow \text{quarto e quinto movimento " "}
\end{gathered}$$

4

Esibire una corrispondenza biunivoca tra gli intervalli aperti reali $(0, 1)$ *e* $(5, 10)$.

Soluzione

$f :]0,1[\longrightarrow]5,10[$

$f(x) = 5x + 5$

f è iniettiva?

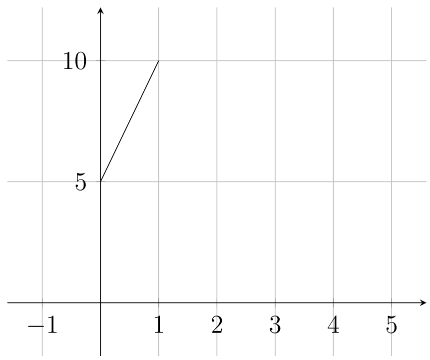
$5x + 5 = 5x' + 5$

$\rightarrow x = x'$

f è suriettiva?

$y \in (5, 10)$

$y = 5x + 5 \longleftrightarrow x = \frac{y-5}{5}$



5

Mostrare che i sottoinsiemi di cardinalità pari di un insieme con 10 elementi sono tanti quanti quelli di cardinalità dispari (sugg.: aggiungere o togliere un elemento da un sottoinsieme cambia la parit della sua cardinalità).

Soluzione

Per Def. le combinazioni di lunghezza k in A, dove $|A| = n$ sono i sottoinsiemi di A con k elementi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Se $a = 1, b = -1$:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k - 1^{n-k}$$

$n = 10$:

$$\binom{10}{0} - \binom{10}{1} + \binom{10}{2} - \cdots + \binom{10}{10} = 0$$

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \cdots + \binom{10}{10} = \binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} + \binom{10}{9}$$

$\Longrightarrow$ I sottoinsiemi di cardinalità pari sono tanti quelli di cardinalità dispari.

6

Quante sono le sequenze binarie lunghe 5,6,7 in cui non compaiono mai due 1 consecutivi? (Sugg. Iniziare con sequenze più corte e cercare di capire una regola ricorsiva)

Soluzione

Procedimento: partendo dalla sequenza 0 ed 1 dove $n = 1$ costruiamo le successive $n = 2\dots$ aggiungendo uno 0 per ogni sequenza lunga $n-1$ e un 1 alle sequenze che iniziano con uno 0.

- $n = 1 \to 0, 1$
- $n = 2 \to 00, 01, 10$
- $n = 3 \to 000, 001, 010, 100, 101$

$\vdots$

Le sequenze lunghe n che iniziano con 0 sono tante quante quelle lunghe $n-1$, quelle che iniziano con $n-1$ sono tante quante quelle lunghe $n-2$.
Numeri di Fibonacci :

$$F(n) = \begin{cases} F(n-1) + F(n-2) & \text{if } n \geq 3 \\ 3 & \text{if } n = 2 \\ 2 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

$F(5) = F(4) - F(3) = [F(3) + F(2)] - [(F(2) + F(1)] = 13$
$F(6) = 21, F(7) = 55$

7

Quante sono le sequenze binarie lunghe 5,6,7 in cui non compaiono mai tre 1 consecutivi? (Sugg. Iniziare con sequenze pi corte e cercare di capire una regola ricorsiva)

Soluzione

Simile all'esercizio precedente:

- $n = 1 \to 0, 1$
- $n = 2 \to 00, 01, 10, 11$
- $n = 3 \to 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110$

$\vdots$

$$G(n) = \begin{cases} G(n-1) + G(n-2) + G(n-3) & \text{if } n \geq 4 \\ 7 & \text{if } n = 3 \\ 4 & \text{if } n = 2 \\ 2 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

$G(5) = 24, G(6) = 44, G(7) = 81$