

# Matematica Discreta e Probabilità

## Suddivisione corso

Il corso é suddiviso in quattro parti: calcolo combinatorio, statistica descrittiva, probabilità e statistica inferenziale.

Verranno dedicate 10 ore per la parte di calcolo combinatorio, 5 per la parte di statistica descrittiva, 40 per la parte di probabilità e 5 per la parte di statistica inferenziale.

## 1 Calcolo Combinatorio

### 1.1 Richiami

Serviranno i concetti di **insieme**, **sottoinsieme**, e di funzioni **iniettive** e **suriettive**.

#### 1.1.1 Insieme

Un **insieme** é un raggruppamento di elementi che può essere individuato mediante una caratteristica comune che gli appartengono.

$$A = \{a, b\}$$

#### 1.1.2 Sottoinsieme

Un **sottoinsieme** é un raggruppamento di elementi appartenenti ad un insieme che é anch'esso un insieme.

$$B = \{n \in N : 1 \leq n \leq 5\}$$

#### 1.1.3 Funzioni Iniettive

Una funzione si dice **Iniettiva** se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. Possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

#### 1.1.4 Funzioni Suriettive

Una funzione si dice **Suriettiva** se ogni elemento del codominio é raggiunto da almeno un elemento del dominio. Non possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

### 1.1.5 Funzioni Biettive

Una funzione si dice **Biettiva** se é sia suriettiva che iniettiva.

## 1.2 Teoria della Cardinalit 

Due insiemi hanno la stessa **cardinalit ** se esiste una biezione tra essi.

Se é possibile costruire una funzione biettiva tra due insiemi.

### 1.2.1 Definizioni

Un insieme  $A$  si dice finito se esiste  $n \geq 0$  tale che  $A$  e  $\{1, 2, ..n\}$  hanno la stessa **cardinalit **.

Se  $A \longleftrightarrow \{1, .., n\}$  diciamo che  $A$  ha **cardinalit **  $n$  e scriviamo  $|A| = n$

Un insieme  $A$  si dice **numerabile** se esiste biezione.  $A \longleftrightarrow N = \{0, 1, 2, ..\}$

### 1.2.2 Esempi

**1**

$B = \{1, 2, 3, ..\}$   $f : N \rightarrow B, f(n) = n + 1$

La funzione rappresenta la corrispondenza tra  $B$  e l'insieme dei numeri interi positivi (infiniti)  $\mapsto B$  é **numerabile**.

**2**

$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, ..\}$  é **numerabile**?

S , lo é perch  basta fare le giuste associazioni :

$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$

$f : Z \rightarrow N \begin{cases} 2z - 1 & \text{se } z > 0 \\ -2z & \text{se } z \leq 0 \end{cases}$

#### Osservazione

Un insieme é **numerabile** se riesco ad elencare tutti i suoi elementi in un elenco infinito e viceversa.

**3**

$Q \geq 0 = \{\frac{a}{b} : a, b \in N, b \neq 0\}$  (Tutte le frazioni  $> 0$ )

  **numerabile**, l'importante é poter esprimere le frazioni in un elenco.

$0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, 4, ...$

In questo modo posso sicuramente scrivere **tutti** i numeri razionali.

#### 4

$A = \{\text{sequenze binarie di lunghezza infinita}\}$

Vogliamo mostrare che  $A$  non é **numerabile**. Prendiamo un elenco infinito di elementi di  $A$ .

$a_1 = 0110101..$  ,  $a_2 = 1100101..$  ,  $a_3 = 0010100..$  , ... ,  $a_n = 1000011..$

Vogliamo costruire una sequenza che non fa parte di questo elenco.

Come primo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del primo di  $a_1$ .

Come secondo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del secondo di  $a_2$ .

Come terzo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del terzo di  $a_3$ .

Ragionando in questo modo fino ad  $n$  avremo una sequenza che non fa parte di  $A$ .

$A$  non é **numerabile** , perché é impossibile creare un elenco infinito che contenga tutte le sequenze di  $A$ .

#### Osservazione

Questo insieme  $A$  e  $R$  hanno la stessa cardinalità. Tale cardinalità si dice **del continuo**. <http://www.scit.wlv.ac.uk/~cm1993/maths/mm2217/rup.htm>

### 1.2.3 Esercizi

#### 1

Abbiamo due biglietti da regalare a due amici scelti su 10. In quanti modi posso fare la scelta?

#### Soluzione

Possiamo partire puntando la prima persona (1) e contando con quante possibili persone la persona 1 può andare al concerto. Siccome sono 10 persone, allora la persona 1 potrà andare al concerto con 9 persone. Ora controlliamo con quante persone la persona 2 può andare al concerto (escludendo l'esistenza della persona 1), e sta volta saranno 8. Ora vedremo uno schema ricorsivo per il conteggio delle combinazioni siccome la persona 3, potrà andare al concerto con 7 persone (escludendo questa volta la persona 1,2). Ora per contare le possibili combinazioni è facile vedere che ci basta fare una sommatoria da 1 a 9.

$\sum_{i=1}^9 i = 45$ , using Gauss formula  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

#### 2

C'è un torneo di un gioco (non specificato) in quale abbiamo 3 concorrenti A, B, C. Quali sono le possibili combinazioni del podio contando anche i pareggi?

#### Soluzione

1° Caso: nessun pareggio. 6 possibili combinazioni:

- 1) A,B,C
- 2) A,C,B
- 3) B,A,C
- 4) B,C,A
- 5) C,A,B
- 6) C,B,A

Possiamo trovare queste combinazioni calcolando  $3! = 6$ .

2° Caso: tutti parimerito. 1 Combinazione:

A,B,C (Indipendente dall'ordine)

3° Caso: due parimerito. 6 Combinazioni:

1) (A,B),C o alternativamente C,(A,B). ( ) Indica stessa posizione/pareggio, siccome sono 3 concorrenti multiplico queste 2 possibili combinazioni per 3, quindi  $3 \cdot 2 = 6$ .

Totale =  $6 + 1 + 6 = 13$ .

### 3

Lancio un dado 3 volte. Quante sono le possibili sequenze di risultati in cui in ordine di grandezza il dado con valore più alto è  $\geq 5$ , il secondo più alto  $\geq 4$ , il terzo più alto  $\geq 3$ .

#### Soluzione

Come prima, dividiamo il problema in sottoproblemi e studiamo caso per caso.

1° Caso: 3 risultati diversi:

- 1) 4, 5, 6
- 2) 3, 4, 5
- 3) 3, 4, 6
- 4) 3, 5, 6

Ognuna di queste ha 6 possibili combinazioni.

Totale temporaneo =  $4 \cdot 6 = 24$ .

2° Caso: 2 risultati uguali 1 diverso:

- 1) 4, 4, 5
- 2) 4, 4, 6
- 3) 5, 5, 3
- 4) 5, 5, 4
- 5) 5, 5, 6
- 6) 6, 6, 3
- 7) 6, 6, 4
- 8) 6, 6, 5

E ognuna di queste può avere 3 combinazioni diverse,

quindi totale temporaneo =  $24 + (8 \cdot 3) = 48$ .

3° Caso: 3 risultati uguali:

1) 5, 5, 5

2) 6, 6, 6

Totale =  $48 + 2 = 50$ .

Non contiamo il caso 1 risultato uguale e 2 diversi perchè non ha senso, siccome 1 uguale a cosa? lol..

**4**

L'insieme  $A = \{1, 2, \dots, 11\}$  ha più sottoinsiemi di cardinalità pari o dispari o il numero di sottoinsiemi pari è uguale a quello di dimensione dispari?

**Soluzione**

Possiamo usare di ciascun sottoinsieme il suo complementare, esempio con  $n = 3$  :

$\{1, 2\} \longleftrightarrow 3$

$\{1, 3\} \longleftrightarrow 2$

$\{2, 3\} \longleftrightarrow 1$

$\emptyset \longleftrightarrow \{1, 2, 3\}$

Per induzione quindi avremo sempre degli insiemi pari complementari a quelli dispari e quindi il numero di sottoinsiemi pari è uguale a quelli dispari.

**5**

4 coppie moglie e marito, sono scambisti per una serata, in quanti modi possono scambiarsi? (Sono etero).

**Soluzione**

Si possono scambiare in 9 modi diversi (Risposta da chiarire mercoledì).

## 1.3 Proprietà Cartesiane

### 1.3.1 Prodotto Cartesiano

$A, B$  insiemi.

$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

Si estende in modo naturale al caso di 3 o più insiemi.

**Esempio**

$A = \{1, 2\}$  e  $B = \{1, a, 3\}$ . Allora:  $A \times B = \{(1, 1), (1, a), (1, 3), (2, 1), (2, a), (2, 3)\}$

### 1.3.2 Potenza Cartesiana

$A^n = A \times A \times A \times \dots \times A$  ( $n$ ) volte.

$A^n$  è l'insieme dell n-ple di ordinate di elementi di  $A$ . Gli elementi di  $A^n$  si dicono **liste** o **sequenze**.

#### Esempio

$A = \{0, 1\}$ , allora  $A^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots, (1, 1, 1)\}$ .

### 1.4 L'insieme delle parti

A insieme, l'insieme delle parti di  $A$ , è l'insieme  $P(A)$  i cui elementi sono i sottoinsiemi di  $A$ .

$A = \{1, a, 3\}$ .

$P(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{a\}, \{3\}, \{1, a\}, \{1, 3\}, \{a, 3\}\}$ ,  $|P(A)| = 8$ .

#### 1.4.1 Definizione

Sia  $A$  un insieme e  $|A| = n$ . Allora esiste una biiezione tra  $P(A)$  e  $0, 1^n$ .

#### 1.4.2 Dimostrazione

Iniziamo con un esempio  $A = \{1, 2, 3\}$ .

$\{\emptyset\} \rightarrow 000$

$\{1, 2, 3\} \rightarrow 111$

$\{1\} \rightarrow 100$

$\{2\} \rightarrow 010$

$\{3\} \rightarrow 001$

$\{1, 2\} \rightarrow 110$

$\{1, 3\} \rightarrow 101$

$\{2, 3\} \rightarrow 011$

In generale se  $A = \{1, 2, \dots, n\}$  allora  $F : P(A) \rightarrow \{0, 1\}^n$ .

Sia  $S \subseteq A$ ,  $F(S) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$  con  $\{1 \text{ if } a_i \in S$

$2 \text{ if } a_i \notin S$

Da aggiustare.