

Matematica Discreta e Probabilità

Suddivisione corso

Il corso é suddiviso in quattro parti: calcolo combinatorio, statistica descrittiva, probabilità e statistica inferenziale.

Verranno dedicate 10 ore per la parte di calcolo combinatorio, 5 per la parte di statistica descrittiva, 40 per la parte di probabilità e 5 per la parte di statistica inferenziale.

1 Calcolo Combinatorio

1.1 Richiami

Serviranno i concetti di **insieme**, **sottoinsieme**, e di funzioni **iniettive** e **suriettive**.

1.1.1 Insieme

Un **insieme** é un raggruppamento di elementi che può essere individuato mediante una caratteristica comune che gli appartengono.

$$A = \{a, b\}$$

1.1.2 Sottoinsieme

Un **sottoinsieme** é un raggruppamento di elementi appartenenti ad un insieme che é anch'esso un insieme.

$$B = \{n \in N : 1 \leq n \leq 5\}$$

1.1.3 Funzioni Iniettive

Una funzione si dice **Iniettiva** se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. Possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

1.1.4 Funzioni Suriettive

Una funzione si dice **Suriettiva** se ogni elemento del codominio é raggiunto da almeno un elemento del dominio. Non possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

1.1.5 Funzioni Biettive

Una funzione si dice **Biettiva** se é sia suriettiva che iniettiva.

1.2 Teoria della Cardinalit 

Due insiemi hanno la stessa **cardinalit ** se esiste una biezione tra essi.

Se é possibile costruire una funzione biettiva tra due insiemi.

1.2.1 Definizioni

Un insieme A si dice finito se esiste $n \geq 0$ tale che A e $\{1, 2, \dots, n\}$ hanno la stessa **cardinalit **.

Se $A \iff \{1, \dots, n\}$ diciamo che A ha **cardinalit ** n e scriviamo $|A| = n$

Un insieme A si dice **numerabile** se esiste biezione. $A \iff N = \{0, 1, 2, \dots\}$

1.2.2 Esempi

1

$B = \{1, 2, 3, \dots\}$ $f : N \mapsto B, f(n) = n + 1$

La funzione rappresenta la corrispondenza tra B e l'insieme dei numeri interi positivi (infiniti) $\mapsto B$ é **numerabile**.

2

$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ é **numerabile**?

S , lo é perch  basta fare le giuste associazioni :

$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$

$f : Z \mapsto N \begin{cases} 2z - 1 & \text{se } z > 0 \\ -2z & \text{se } z \leq 0 \end{cases}$

Osservazione

Un insieme é **numerabile** se riesco ad elencare tutti i suoi elementi in un elenco infinito e viceversa.

3

$Q \geq 0 = \{\frac{a}{b} : a, b \in N, b \neq 0\}$ (Tutte le frazioni > 0)

  **numerabile**, l'importante é poter esprimere le frazioni in un elenco.

$0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, 4, \dots$

In questo modo posso sicuramente scrivere **tutti** i numeri razionali.

4

$A = \{\text{sequenze binarie di lunghezza infinita}\}$

Vogliamo mostrare che A non é **numerabile**. Prendiamo un elenco infinito di elementi di A .

$a_1 = 0110101..$, $a_2 = 1100101..$, $a_3 = 0010100..$, ... , $a_n = 1000011..$

Vogliamo costruire una sequenza che non fa parte di questo elenco.

Come primo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del primo di a_1 .

Come secondo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del secondo di a_2 .

Come terzo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del terzo di a_3 .

Ragionando in questo modo fino ad n avremo una sequenza che non fa parte di A .

A non é **numerabile** , perché é impossibile creare un elenco infinito che contenga tutte le sequenze di A .

Osservazione

Questo insieme A e R hanno la stessa cardinalità. Tale cardinalità si dice **del continuo**. <http://www.scit.wlv.ac.uk/~cm1993/maths/mm2217/rup.htm>

1.2.3 Esercizi

1

Abbiamo due biglietti da regalare a due amici scelti su 10. In quanti modi posso fare la scelta?

Soluzione

Possiamo partire puntando la prima persona (1) e contando con quante possibili persone la persona 1 può andare al concerto. Siccome sono 10 persone, allora la persona 1 potrà andare al concerto con 9 persone. Ora controlliamo con quante persone la persona 2 può andare al concerto (escludendo l'esistenza della persona 1), e sta volta saranno 8. Ora vedremo uno schema ricorsivo per il conteggio delle combinazioni siccome la persona 3, potrà andare al concerto con 7 persone (escludendo questa volta la persona 1,2). Ora per contare le possibili combinazioni è facile vedere che ci basta fare una sommatoria da 1 a 9.

$\sum_{i=1}^9 i = 45$, using Gauss formula $\frac{n(n+1)}{2}$.

2

C'è un torneo di un gioco (non specificato) in quale abbiamo 3 concorrenti A, B, C. Quali sono le possibili combinazioni del podio contando anche i pareggi?

Soluzione

1° Caso: nessun pareggio. 6 possibili combinazioni:

- 1) A,B,C
- 2) A,C,B
- 3) B,A,C
- 4) B,C,A
- 5) C,A,B
- 6) C,B,A

Possiamo trovare queste combinazioni calcolando $3! = 6$.

2° Caso: tutti parimerito. 1 Combinazione:

A,B,C (Indipendente dall'ordine)

3° Caso: due parimerito. 6 Combinazioni:

1) (A,B),C o alternativamente C,(A,B). () Indica stessa posizione/pareggio, siccome sono 3 concorrenti multiplico queste 2 possibili combinazioni per 3, quindi $3 \cdot 2 = 6$.

Totale = $6 + 1 + 6 = 13$.

3

Lancio un dado 3 volte. Quante sono le possibili sequenze di risultati in cui in ordine di grandezza il dado con valore più alto è ≥ 5 , il secondo più alto ≥ 4 , il terzo più alto ≥ 3 .

Soluzione

Come prima, dividiamo il problema in sottoproblemi e studiamo caso per caso.

1° Caso: 3 risultati diversi:

- 1) 4, 5, 6
- 2) 3, 4, 5
- 3) 3, 4, 6
- 4) 3, 5, 6

Ognuna di queste ha 6 possibili combinazioni.

Totale temporaneo = $4 \cdot 6 = 24$.

2° Caso: 2 risultati uguali 1 diverso:

- 1) 4, 4, 5
- 2) 4, 4, 6
- 3) 5, 5, 3
- 4) 5, 5, 4
- 5) 5, 5, 6
- 6) 6, 6, 3
- 7) 6, 6, 4
- 8) 6, 6, 5

E ognuna di queste può avere 3 combinazioni diverse, quindi totale tempo-

$$\text{raneo} = 24 + (8 \cdot 3) = 48.$$

3° Caso: 3 risultati uguali:

1) 5, 5, 5

2) 6, 6, 6

$$\text{Totale} = 48 + 2 = 50.$$

Non contiamo il caso 1 risultato uguale e 2 diversi perchè non ha senso, siccome 1 uguale a cosa? lol..