Matematica Discreta e Probabilitá

Suddivisione corso

Il corso è suddiviso in quattro parti: calcolo combinatorio, statistica descrittiva, probabilitá e statistica inferenziale.
Verranno dedicate 10 ore per la parte di calcolo combinatorio, 5 per la parte di statistica descrittiva, 40 per la parte di probabilitá e 5 per la parte di statistica inferenziale.

1 Calcolo Combinatorio

1.1 Richiami

Serviranno i concetti di **insieme**, **sottoinsieme**, e di funzioni **iniettive** e **suriettive**.

1.1.1 Insieme

Un **insieme** è un raggruppamento di elementi che puó essere individuato mediante una caratteristica comune che gli appartengono.
$A = \{a, b\}$

1.1.2 Sottoinsieme

Un **sottoinsieme** è un raggruppamento di elementi appartenenti ad un insieme che è anch'esso un insieme.
$B = \{n \in N : 1 \leq n \leq 5\}$

1.1.3 Funzioni Iniettive

Una funzione si dice **Iniettiva** se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. Possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

1.1.4 Funzioni Suriettive

Una funzione si dice **Suriettiva** se ogni elemento del codominio è raggiunto da almeno un elemento del dominio. Non possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

1.1.5 Funzioni Biettive

Una funzione si dice **Biettiva** se è sia suriettiva che iniettiva.

1.2 Teoria della Cardinalitá

Due insiemi hanno la stessa **cardinalitá** se esiste una biezione tra essi.
Se è possibile costruire una funzione biettiva tra due insiemi.

1.2.1 Definizioni

Un insieme A si dice finito se esiste $n \geq 0$ tale che A e $\{1, 2, ..n\}$ hanno la stessa **cardinalitá**.

Se $A \longleftrightarrow \{1, .., n\}$ diciamo che A ha **cardinalitá** n e scriviamo $|A| = n$

Un insieme A si dice **numerabile** se esiste biezione. $A \longleftrightarrow N = \{0, 1, 2, ..\}$

1.2.2 Esempi

1
$B = \{1, 2, 3, ..\} \quad f : N \to B, f(n) = n + 1$
La funzione rappresenta la corrispondenza tra B e l'insieme dei numeri interi positivi (infiniti) $\mapsto B$ è **numerabile**.
2
$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, ..\}$ è **numerabile**?
Si, lo è perchè basta fare le giuste associazioni :
$0 \mapsto 0,\ 1 \mapsto 1,\ -1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3$
$f : Z \to N$ $\{2z - 1$ se $z > 0$
$\{-2z$ se $z \leq 0$
Osservazione
Un insieme è **numerabile** se riesco ad elencare tutti i suoi elementi in un elenco infinito e viceversa.
3
$Q \geq 0 = \{\frac{a}{b} : a, b \in N, b \neq 0\}$ (Tutte le frazioni > 0)
è **numerabile**, l'importante è poter esprimere le frazioni in un elenco.
$0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, 4, ...$
In questo modo posso sicuramente scrivere **tutti** i numeri razionali.

4
$A = \{\text{sequenze binarie di lunghezza infinita}\}$
Vogliamo mostrare che A non è **numerabile**. Prendiamo un elenco infinito di elementi di A.
$a_1 = 0110101..$, $a_2 = 1100101..$, $a_3 = 0010100..$, ... , $a_n = 1000011..$
Vogliamo costruire una sequenza che non fa parte di questo elenco.
Come primo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del primo di a_1.
Come secondo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del secondo di a_2.
Come terzo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del terzo di a_3.
Ragionando in questo modo fino ad n avremo una sequenza che non fa parte di A.
A non è **numerabile** , perchè è impossibile creare un elenco infinito che contenga tutte le sequenze di A.
Osservazione
Questo insieme A e R hanno la stessa cardinalitá. Tale cardinalitá si dice **del continuo**. `http://www.scit.wlv.ac.uk/~cm1993/maths/mm2217/rup.htm`

1.2.3 Esercizi

1
Abbiamo due biglietti da regalare a due amici scelti su 10. In quanti modi posso fare la scelta?
Soluzione
Possiamo partire puntando la prima persona (1) e contando con quante possibili persone la persona 1 può andare al concerto. Siccome sono 10 persone, allora la persona 1 potrà andare al concerto con 9 persone. Ora controlliamo con quante persone la persona 2 può andare al concerto (escludendo l'esistenza della persona 1), e sta volta saranno 8. Ora vedremo uno schema ricorsivo per il conteggio delle combinazioni siccome la persona 3, potrà andare al concerto con 7 persone (escludendo questa volta la persona $1, 2$). Ora per contare le possibili combinazioni è facile vedere che ci basta fare una sommatoria da 1 a 9.
$\sum_{i=1}^{9} i = 45$, using Gauss formula $\frac{n(n+1)}{2}$.

2
C'è un torneo di un gioco (non specificato) in quale abbiamo 3 concorrenti A, B, C. Quali sono le possibili combinazioni del podio contando anche i pareggi?
Soluzione
1^o Caso: nessun pareggio. 6 possibili combinazioni:

1) A,B,C
2) A,C,B
3) B,A,C
4) B,C,A
5) C,A,B
6) C,B,A

Possiamo trovare queste combinazioni calcolando $3! = 6$.
2^o Caso: tutti parimerito. 1 Combinazione:
A,B,C (Indipendente dall'ordine)
3^o Caso: due parimerito. 6 Combinazioni:
1) (A,B),C o alternativamente C,(A,B). () Indica stessa posizione/pareggio, siccome sono 3 concorrenti moltiplico queste 2 possibili combinazioni per 3, quindi $3 \cdot 2 = 6$.
Totale $= 6 + 1 + 6 = 13$.

3
Lancio un dado 3 volte. Quante sono le possibili sequenze di risultati in cui in ordine di grandezza il dado con valore più alto è ≥ 5, il secondo più alto ≥ 4, il terzo più alto ≥ 3.

Soluzione

Come prima, dividiamo il problema in sottoproblemi e studiamo caso per caso.
1^o Caso: 3 risultati diversi:

1) $4, 5, 6$
2) $3, 4, 5$
3) $3, 4, 6$
4) $3, 5, 6$

Ognuna di queste ha 6 possibili combinazioni.
Totale temporaneo $= 4 \cdot 6 = 24$.
2^o Caso: 2 risultati uguali 1 diverso:

1) $4, 4, 5$
2) $4, 4, 6$
3) $5, 5, 3$
4) $5, 5, 4$
5) $5, 5, 6$
6) $6, 6, 3$
7) $6, 6, 4$
8) $6, 6, 5$

E ognuna di queste può avere 3 combinazioni diverse,
quindi totale temporaneo $= 24 + (8 \cdot 3) = 48$.
3^o Caso: 3 risultati uguali:
1) $5, 5, 5$
2) $6, 6, 6$
Totale $= 48 + 2 = 50$.
Non contiamo il caso 1 risultato uguale e 2 diversi perchè non ha senso, siccome 1 uguale a cosa? lol..

4

L'insieme $A = \{1, 2, ..., 11\}$ ha più sottoinsiemi di cardinalità pari o dispari o il numero di sottoinsiemi pari è uguale a quello di dimensione dispari?

Soluzione

Possiamo usare di ciascun sottoinsieme il suo complementare, esempio con $n = 3$:

$$\{1, 2\} \longleftrightarrow 3$$
$$\{1, 3\} \longleftrightarrow 2$$
$$\{2, 3\} \longleftrightarrow 1$$
$$\emptyset \longleftrightarrow \{1, 2, 3\}$$

Per induzione quindi avremo sempre degli insiemi pari complementari a quelli dispari e quindi il numero di sottoinsiemi pari è uguale a quelli dispari.

5

4 coppie moglie e marito, sono scambisti per una serata, in quanti modi possono scambiarsi? (Sono etero).

Soluzione

Si possono scambiare in 9 modi diversi (Risposta da chiarire mercoledi).

1.3 Proprietá Cartesiane

1.3.1 Prodotto Cartesiano

A, B insiemi.
$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
Si estende in moto naturale al caso di 3 o piú insiemi.

Esempio

$A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, a, 3\}$. Allora : $A \times B = \{(1, 1), (1, a), (1, 3), (2, 1), (2, a), (2, 3)\}$

1.3.2 Potenza Cartesiana

$A^n = A \times A \times A \times ... \times A$ (n) volte.
A^n è l'insieme dell n-ple di ordinate di elementi di A. Gli elementi di A^n si dicono **liste** o **sequenze**.

Esempio
$A = \{0, 1\}$, allora $A^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), ..., (1, 1, 1)\}$.

1.4 L'insieme delle parti

A insieme, l'insieme delle parti di A, è l'insieme $P(A)$ i cui elementi sono i sottoinsiemi di A.
$A = \{1, a, 3\}$.
$P(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{a\}, \{3\}, \{1, a\}, \{1, 3\}, \{a, 3\}\}$, $|P(A)| = 8$.

1.4.1 Definizione

Sia A un insieme e $|A| = n$. ALlora esiste una biiezione tra $P(A)$ e $0, 1^n$.

1.4.2 Dimostrazione

Iniziamo con un esempio $A = \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{gathered}
\{\emptyset\} \longrightarrow 000 \\
\{1, 2, 3\} \longrightarrow 111 \\
\{1\} \longrightarrow 100 \\
\{2\} \longrightarrow 010 \\
\{3\} \longrightarrow 001 \\
\{1, 2\} \longrightarrow 110 \\
\{1, 3\} \longrightarrow 101 \\
\{2, 3\} \longrightarrow 011
\end{gathered}$$

In generale se $A = \{1, 2, ..., n\}$ allora $F : P(A) \to \{0, 1\}^n$.
Sia $S \subseteq A$, $F(S) = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \{0, 1\}^n$ con $\begin{cases} 1 if a_i \in S \\ 2 if a_i \notin S \end{cases}$ Da aggiustare.

1.5 Principio di induzione

Supponiamo di avere una famiglia di proposizione chiamata $\underline{P}(n), n \geq n_0$ possono essere vere o false. Per mostrare che sono tutte vere dobbiamo verificare i seguenti due passi.
1) **passo base** dell'induzione: verificare che $P(n_0)$ è vera.
2) **passo induttivo** verificare che se $\underline{P}(n)$ è vera, allora $\underline{P}(n+1)$ è anche vera $\forall n \geq n_0$.

1.5.1 Esempio

Supponiamo di avere n amici.
Il primo amico beve **1** birra, il secondo amico beve **2** birre, il terzo **3**, e cosí via.. Quante birre vengono bevute in tutto?
Se $n = 1$, viene bevuta **1** birra, se $n = 2$, ne vengono bevute **4**, mentre se $n = 3$ ne vengono bevute **9**.
Ipotizziamo quindi che il numero di birre sia n^2. Verifichiamo i passi dell'induzione.
Passo base : $P(1) = 1$. Verificato.
Passo induttivo : Il numero totale di birre per n+1 allora dovrebbe essere $n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

1.6 Principio di uguaglianza

A, B insiemi in corrispondenza biunivoca $\rightarrow \mid A \mid = \mid B \mid$, vale anche il **vicerversa**.

1.6.1 Esempio

Il numero di cioccolatini mangiati è uguale al numero di incarti lasciati in giro.

1.7 Principio di somma

A, B insiemi tale che $A \cap B = \emptyset \rightarrow \mid A \cup B \mid = \mid A \mid + \mid B \mid$.

1.8 Principio di moltiplicazione

A, B insiemi $\rightarrow \mid A \times B \mid = \mid A \mid \cdot \mid B \mid$, in particolare $\mid A^n \mid = \mid A \mid^n$.

1.8.1 Corollario

Se $\mid A \mid = n$, $\mid P(A) \mid = 2^n$.

Dimostrazione
Per il principio di uguaglianza $\mid P(A) \mid = \mid \{0,1\}^n \mid$ perchè abbiamo visto che esiste una biiezione tra $P(A)$ e $\{0,1\}^n$.
Per il principio di moltiplicazione $\mid \{0,1\}^n \mid = \mid \{0,1\} \mid^n = 2^n$

1.9 Prodotti Condizionati

A, B insiemi.
Un prodotto condizionato é un sottoinsieme di $A \times B$ che soddisfa certe condizioni.
Ad esempio:
$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3\}$
$\mathbf{C} = \{(1,3),(2,1),(3,3)\}$, $\mathbf{D} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$
C e **D** sono due possibili sottoinsiemi di $A \times B$.

1.9.1 Definizione

$S \subseteq A \times B$, si dice prodotto condizionato di tipo (n, m) se

1. La prima coordinata di un elemento di S puó essere scelta in n modi.
2. Fissata la prima coordinata in uno di questi n modi, la seconda puó essere scelta in m modi.

Ad esempio:
$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3\}$
$\mathbf{C} = \{(1,3),(2,1),(3,3)\}$, $\mathbf{D} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$
C é un prodotto condizionato di tipo $(3,1)$, **D** non lo é perché ho **una** scelta con prima coordinata 2 e **due** scelte con prima coordinata 1.

Altro esempio: $A = B = \{0,1,2,...,9\}$
$C = \{(a,b) : a, b \in A, a \neq b\}$, abbiamo **dieci** scelte per la prima coordinata. Fissata questa prima coordinata, ne abbiamo **nove** per la seconda.
É un prodotto condizionato di tipo $(10,9)$.

1.9.2 Proposizione

Se $S \subseteq A \times B$ é prodotto condizionato di tipo (n, m) allora $\mid S \mid = n \cdot m$.

1.9.3 Dimostrazione

Siano $a_1, ..., a_n$ le possibili scelte per la prima coordinata.
$S = S_1 \cup S_2 \cup ... \cup S_n$.
$S_i = \{$ *elementi di S con prima coordinata* a_i $\}$.
$\mid S_i \mid = m$ (*prodotto condizionato*).
Siccome gli S_i sono disgiunti per il principio di somma,
ho $\mid S \mid = \mid S_1 \mid + ... + \mid S_n \mid = m + ... + m = n \cdot m$.

1.9.4 Estendiamo il concetto

$S \subseteq A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ é un prodotto condizionato di tipo $(m_1, m_2, m_3, ..., m_k)$ se:
1. Ho m_1 scelte per la prima coordinata
2. Fissata la prima coordinata, ho m_2 scelte per la seconda coordinata.
3. Fissate le prime due coordinate ho m_3 scelte per la terza.
Cosí via fino a..
4. Fissate le prime $(k-1)$ coordinate ho m_k scelte per la k.

Analogamente a prima se S é un prodotto condizionato di tipo $(m_1, ..., m_k)$ allora $\mid S \mid = m_1 \cdot m_2 \cdot ... \cdot m_k$.

Esempio
$A = \{a, b, c : a, b, c \in N \ , a \leq 10 \ , 0 \leq b - a \leq 10 \ , 0 \leq c - a - b \leq 10\}$.
A= terne di numeri naturali che rispettano le condizioni. $\mid A \mid$?
Abbiamo **11** modi per scegliere a, fissata a abbiamo **11** modi per scegliere $b \rightarrow (a \leq b \leq 10 + a)$
Fissate (a, b), abbiamo **11** modi anche per scegliere la terza coordinata $c \rightarrow (a + b \leq c \leq 10 + a + b)$.
A é quindi un prodotto condizionato di tipo (11,11,11), $\mid A \mid = 11^3 = 1331$.
Osservazione
A, B , $\mid A \mid = n$, $\mid B \mid = n$. $A \times B$ é un prodotto condizionato di tipo (n, m).

1.10 Disposizioni e Permutazioni

Una disposizione in A é una sequenza in A in cui le coordinate sono distinte tra loro.
$\{(a_1, ..., a_n) : a_i \in A, a_i \neq a_j \vee i \neq j\}$ é l'insieme delle disposizioni di lunghezza n in A.

1.10.1 Proposizione

$| A | = n$. L'insieme delle disposizioni di lunghezza k é un prodotto condizionato del tipo $(n, n-1, n-2, ..., n-k)$.

1.10.2 Dimostrazione

La prima coordinata la posso scegliere in n modi.
La seconda deve essere $\neq$ dalla prima, quindi ho $n-1$ modi.
La terza deve essere diversa dalla prima e dalla seconda , $n-2$ modi.
L'ultima deve essere diversa da tutte le altre, quindi $n-k+1$ modi.

1.10.3 Conseguenza

Le disposizioni di lunghezza k in un insieme di n elementi sono:
$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)$.
Esso viene chiamato **fattoriale discendente**, é il prodotto di k numeri interi consecutivi di cui il piú grande é n.
Esempio
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Le disposizioni di lunghezza 3 in A sono $(5)_3$,$(5 \cdot 4 \cdot 3) = 60$.
Sarebbero tutti i modi di disporre, ad esempio $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 1, 2)$.
Caso particolare
Se $k = n$ le disposizioni di lunghezza n si dicono **permutazioni**.
Le permutazioni di n sono $(n)_n$=$n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-n+1)$= $n!$.

1.11 Combinazioni

Una combinazione in A di lunghezza k é un sottoinsieme di A di cardinalitá k.
Esempio
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, scelto $k = 3$. Le combinazioni di lunghezza 3 in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sono 10.
$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$.

1.11.1 Legame tra disposizioni e combinazioni

Possiamo associare ad ogni disposizione di lunghezza k una combinazione di lunghezza k. La funzione con cui le associeremo dimentica l'ordine.
Per **ogni** combinazione ho esattamente $k!$ disposizioni la cui immagine é la combinazione data: sono tutte le permutazione di questi k elementi.
Il numero di disposizioni é quindi $k!$ volte il numero delle combinazioni.

1.11.2 Corollario

I sottoinsiemi di cardinalitá k(combinazioni) sono

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot ... \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Siano $a, b, c > 0$ tale che $a+b+c = n$, una combinazione di tipo (a, b, c) é una sequenza in cui compare a volte il 2, b volte l'1, c volte lo 0.

1.11.3 Esempio

Combinazioni di tipo $(2, 1, 2)$

Quante sono?

Procediamo facendo scelte.

- Posizione degli 0. $\binom{5}{2}$ possibilitá.
- Posizione degli 1. 3 scelte $\rightarrow \binom{3}{1}$.
- Posizione dei 2. 1 scelta.

Le combinazione di tipo $(2, 1, 2)$ sono un prodotto condizionato di tipo $(10, 3, 1)$. Sono quindi 30.

Più in generale le combinazioni di tipo a, b, c con $a+b+c = n$, sono:

- per scegliere la posizione degli 0
$$\binom{n}{a}$$
- per scegliere la posizione degli 1
$$\binom{n-a}{b}$$
- per scegliere la posizione dei 2
$$\binom{n-a-b}{c}$$

La combinazione $a+b+c = n$ puó essere quindi espressa con

$$\binom{n}{a, b, c} := \binom{n}{a} \cdot \binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!(n-a)!} \frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!} = \frac{n!}{a!b!c!}$$

Generalmente :

$$\binom{n}{a,b,c} = \frac{n!}{a!b!c!(n-a-b-c)!}$$

A cosa corrisponde una combinazione di tipo (a,b,c) dal lato insiemistico?

- $00122 \longleftrightarrow (\{4,5\},\{3\},\{1,2\})$
- $01022 \longleftrightarrow (\{4,5\},\{2\},\{1,3\})$
- $22010 \longleftrightarrow (\{1,2\},\{4\},\{3,5\})$
- $12002 \longleftrightarrow (\{2,5\},\{1\},\{3,4\})$
- $22100 \longleftrightarrow (\{1,2\},\{3\},\{4,5\})$

Concludiamo che le combinazioni di tipo (a,b,c) sono in biezione con le terne ordinate di sottoinsiemi (s_1,s_2,s_3) con $|s_1| = a, |s_2| = b, |s_3| = c$ e $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{1,2,\ldots,n\}$

1.11.4 Formula Ricorsiva

La formula ricorsiva di Stifel, Pascal, Tartaglia afferma che se $n > k > 0$, allora:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Dimostrazione

Dimostriamo che $\binom{n}{k}$ = # (numero) di sottoinsiemi di cardinalità k di $\{1,\ldots,n\}$.

Dividiamo questi sottoinsiemi in 2 gruppi.

- A : quelli che contengono n
- B : queli che non contengono n

Quanti sono quelli del gruppo B ?

Sono

$$\binom{n-1}{k}$$

perchè questi sono proprio i sottoinsiemi di $\{1,\ldots,n-1\}$ con k elementi.

Quanti sono quelli del gruppo A ?

Sono

$$\binom{n-1}{k-1}$$

infatte le otteniamo scegliendo un sottoinsieme di $\{1,\dots,n-1\}$ con $k-1$ elementi, aggiungendo n

1.11.5 Esempio formula di Stifel

$n = 5$, $k = 3$

A :

- 1,2,3
- 1,2,4
- 1,3,4
- 2,3,4

Quindi $\binom{4}{3}$.

B :

- 1,2,5
- 1,3,5
- 1,4,5
- 2,3,5
- 2,4,5
- 3,4,5

Da notare che il $5 = n$ c'è sempre nell'ultima colonna di B. Quindi per calcolarli ci basta fare $\binom{n-1=4}{2=k-1}$

Facile vedere adesso che :

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$$

Più in generale:

$$\binom{n}{a,b,c} = \binom{n-1}{(a-1),b,c} + \binom{n-1}{a,(b-1),c} + \binom{n-1}{a,b,(c-1)}$$

Essenzialmente dividiamo in 3 gruppi in modo tale che:

- A quelle in cui $n \in S_1 : \binom{n-1}{(a-1),b,c}$
- B quelle in cui $n \in S_2 : \binom{n-1}{a,(b-1),c}$
- C quelle in cui $n \in S_3 : \binom{n-1}{a,b,(c-1)}$

1.11.6 Cammini reticolari

TODO grafici

1.12 Numeri di Fibonacci

Poniamo $F_n = \#$ sequenze binarie di lunghezza n che non hanno due 1 consecutivi.

- $0, 1 \to F_1 = 2$
- $00, 01, 10 \to F_2 = 3$
- $\ldots$

1.12.1 Proposizione

$\forall n \geq 3$ abbiamo $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

1.12.2 Dimostrazione

Dividiamo le sequenze di F_n in due gruppi:

- A : Quelle che iniziano con 0.
- B : Quelle che iniziano con 1.

Quelle che iniziano con $0(A)$ sono F_{n-1}.

Infatti partendo da una sequenza lunga $n-1$ e aggiungendo uno 0 ottengo una sequenza del gruppo A.

Quelle che iniziano con $1(B)$ sono F_{n-2}.

$10(\ldots\ldots)$ quello marchiato tra parentesi sono $n-2$.

1.12.3 Proposizione

$$F_n = \sum_{n=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{n-k+1}{k}$$

1.12.4 Dimostrazione

Suddividiamo le sequenze lunghe n senza due 1 consecutivi in tanti gruppi a seconda di quanti 1 compaiono.

- A_0 : nessun 1
- A_1 : un 1
- A_2 : due 1

Esempio $n = 4$:

- $A_0 : 0000$
- $A_1 : 1000, 0100, 0010, 0001$
- $A_2 : 1010, 1001, 0101$
- $A_3, A_4 : \emptyset$

Contiamo ora quante sequenze ci sono in A_k.
Esempio $n = 9, k = 3$.

- 010(01)0(01)0
- 100(01)00(01)
- 10000(01)(01)

E riscriviamo gli elementi cerchiati () trasformandoli da (01) a (1)

- $010(01)0(01)0 \longleftrightarrow 010(1)0(1)0$
- $100(01)00(01) \longleftrightarrow 100(1)0(1)$
- $10000(01)(01) \longleftrightarrow 00100(1)(1)$

Ora quante sono lunghe 7 ? sono $\binom{7}{3}$
Questo caso si può espandere al caso n, k arbitrari con:

$$\binom{n-(k-1)}{k}$$

Il numero di sequenze in A_k, nell'esempio con $n = 4$.

- $|A_1| = 4 = \binom{4-0}{1}$
- $|A_2| = 3 = \binom{4-1}{2}$

In conclusione :

$$F_n = |A_0|+|A_1|+|A_2|+\ldots = 1+\binom{n}{1}+\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{3}\ldots = \sum_{k}^{n}\binom{n-k+1}{k}$$

1.13 Insiemi

$A \cup B = |A| + |B| - |A \cap B|$

1.13.1 Esempio

Quanti sono i numeri tra $0, 100$ multipli di 3 o 4?

- A : multipli di 3 e $|A| = 34$
- B : multipli di 4 e $|B| = 25$
- $A \cap B$: multipli di 12 e $|A \cap B| = 9$

Quindi in totale sono $34 + 25 - 9 = 51$.

1.13.2 3 insiemi

Con 3 insiemi abbiamo che:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

1.14 Lezione 16-10-2019 Principio di inclusione-esclusione

$n = 2 : |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

$n = 3 : |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2||A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

n qualsiasi?

Notazione: $I = \{2, 4, 5\}$

$\cap_{i \in I} A_i = A_2 \cap A_4 \cap A_5$

Principio di inclu. escl.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|+1}$$

$$| \cap_{i \in i} A_i|$$

1.14.1 Condizioni

Se $A_i \subseteq U$, chiamiamo U insieme universo.

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c| = |U| - |A_1 \cup \ldots \cup A_n|.$$

Poniamo $\cap_{i \neq \emptyset} A_i = U$

Quando calcoliamo :

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c| = |U| - |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |\cap_{i \neq \emptyset} A_i| - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq 1,\ldots,n (-1)^{|I|+1}} |\cap_{i \in I} A_i| = .$$

$$\sum_{I \subseteq 1,\ldots,n} (-1)^{|I|} | \cap_{i \in I} A_i|$$

1.14.2 A cosa serve dio merda?

Funzioni (iniettive e) suriettive.

$A = \{1, 2\}$

$B = \{1, 2, 3\}$

Quante sono le funzioni $f : A \to B$? sono 9.

3 scelte per l'immagine di 1, e 3 per l'immagine di 2.

Quante sono quelle iniettive? Sono 6.

3 scelte per immagine di 1, e poi dopo questa scelta per l'immagine di 2.

Quante sono quelle suriettive? sono 0 coglione.

Quante funzioni suriettive da $B \to A$?

Solo 2 non sono suriettive, la funzione che manda $\{1,2,3\}$ in 1, e quelle che mandano $\{1,2,3\}$ in 2. E quindi sono 6.

1.14.3 Esempio o generalizzazione

- $A = \{1,\ldots,m\}$
- $B = \{1,\ldots,n\}$

Mh..

- Le funzioni da A a B sono n^m
- Le funzioni iniettive da $A \to B$, esistono se $m \leq n$, e in tal caso sono $n(n-1)\cdots(n-m+1) = (n)_m$
- Le funzioni suriettive esistono se $m \geq n$. Per contarle usiamo il principio di incl. escl., Poniamo

  $A_1 = \{F : A \to B, 1 \notin Imf\}$

  $A_2 = \{F : A \to B, 2 \notin Imf\}$

  $\vdots$

  $A_n = \{F : A \to B, n \notin Imf\}$

1.14.4 Esempio

$A = \{1,2,3,4\}$
$B = \{1,2,3\}$

- $f(1) = 1, f \notin A_1$
- $f(2) = 2, f \notin A_2$
- $f(3) = 3, f \notin A_3$

Una funzione è suriettiva se e solo se NON sta in nessuno degli A_i.
Quindi le funzioni suriettive sono proprio:
$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c$
$|A_1| = (n-1)^m$
perchè ho $n-1$ scelte per le immagini di $1,2,\ldots,n$.
$|A_2| = (n-1)^m$
$|A_1 \cap A_2| = (n-2)^m$

$|A_3 \cap A_6| = (n-2)^m$

Se prendo un sottoinsieme I, allora:

$$| \cap_{i \in I} A_i| = (n - |I|)^m$$

Per il princ. di inclus - esclusione il # di funzioni suriettive $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ è

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} | \cap_{i \in I} A_i| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|} (n - |I|)^m =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)^m$$

Le funzioni suriettive $\{1, \ldots, 5\} \to \{1, 2, 3\}$ sono

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} (-1)^k (3-k)^5 = 3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3$$

1.15 Scombussolamenti

Sono le permutazioni in cui nessun elemento rimane al propro posto.

$n = 3 \longrightarrow 231, 312$, quindi sono 2.

Non vanno bene:

- 123_x
- 213_x
- 321_x
- 132_x

Con $n = 4$ sono 9.

Con n qualunque?

Chiamiamo

- A_1 = permutazione dove 1 resta al suo posto, $|A_1| = (n-1)!$
- A_2 = permutazione dove 2 resta al suo posto, $|A_2| = (n-1)!$

$\vdots$

- A_n = permutazioni dove n resta al suo posto, $|A_n| = (n-1)!$

Scombussolamenti = $(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$
$|A_1 \cup A_2| = (n-2)!$
$| \cap_{i \in I} A_i| = (n - |I|)!$

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c| = \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|I|}(n-|I|)! =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (n-k)! = \sum_{k=0}^{h=n-k} \binom{n}{n-h} (-1)^{n-h} h!$$

$$\sum_{h=0}^{n} (-1)^{n-h} \frac{n!}{(n-h)!h!} \cdot h! = \sum_{h=0}^{n} (-1)^{n-h} (n)_h =$$

$$(n)_{n-2} - (n)_{n-3} + (n)_{n-4} - \ldots$$

- $n = 3, (3)_1 - (3)_0 = 3 - 1 = 3$
- $n = 4, (4)_2 - (4)_1 + (4)_0 = 4 \cdot 3 - 4 + 1 = 9$
- $n = 5, (5)_3 - (5)_2 + (5)_1 - (5)_0 = 60 - 20 + 5 - 1 = 44$

1.16 Partizioni di un insieme

TODO DISEGNO

1.16.1 Definizione

Una partizione di A è un insieme di sottoinsiemi di A:
$A_1, A_2, A_3, \ldots$
tale che

- $A_1 \neq \emptyset$
- $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$
- $\cup_i A_i = A$

I sottoinsiemi di A_i si dicono blocchi o parti della partizione.
Le partizioni le scriviamo $\{A_1, A_2, \ldots, \}$

1.16.2 Esempio

$A = \{1, 2\}$, ha 2 possibili partizioni. TODO DISEGNO.

1. {{1},{2}}
2. {{1,2}}

Se $|A| = 3$, abbiamo 5 partizioni.
TODO DISEGNO

1. {{1},{2},{3}}
2. {{1,2,3}}
3. {{1},{2,3}}
4. {{2},{1,3}}
5. {{3},{1,2}}

1.16.3 Definizione

Il numero di partizioni di $\{1, \ldots, n\}$ si dice numero di Bell e si indica B_n.

- $B_2 = 3$
- $B_3 = 5$

Una formula per calcolare B_n.

1.16.4 Formula ricorsiva

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

dove $B_0 = 1, B_1 = 1$.

1.16.5 Dimostrazione

Sia A l'insieme di tutte le partizioni.
$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
dove A_k è formato dalle partizioni in cui n sta in un blocco con k elementi.
Quanti sono gli elementi di A_k?
Procediamo per scelte:

1. Scegliamo gli altri $k-1$ elementi che formano un blocco con n. Quindi ho $\binom{n-1}{k-1}$ scelte.

2. Scegliamo una partizione dei rimanenti $(n-k)$: B_{n-k} possibilità.

$$\implies |A_k| = \binom{n-1}{k-1} \cdot B_{n-k} \implies B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

1.16.6 Esempio

$$B_4 = \binom{3}{0} \cdot B_3 + \binom{3}{1} \cdot B_2 + \binom{3}{2} \cdot B_1 + \binom{3}{3} \cdot B_0 = 15$$

1.16.7 Partizioni di $\{1, \ldots, n\}$ in k blocchi

$S_{n,k} = \#$ partizioni di $\{1, \ldots, n\}$ in k blocchi.

$S_{3,2} = 3$ (visto prima).

1.16.8 Formula ricorsiva per calcolare numeri di Stirling bho

Per ogni $n, k > 1$, $S_{n,k} = k \cdot S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1}$

1.16.9 Dimostrazione

Contiamo separatamente le partizioni in k blocchi in cui n è da solo e quelle in cui è in "compagnia".

Nel primo gruppo devo partizionare i numeri $\{1, \ldots, n-1\}$ in $k-1$ blocchi: ho per definizione $S_{n-1,k-1}$ scelte.

Secondo gruppo (n in compagnia), scegliamo una partizione in k blocchi dei numeri da $\{1, \ldots, n-1\}$: $S_{n-1,k}$ scelte.

Scelgo il blocco a cui aggiungere n : k scelte.

1.16.10 Esempio

$S_{5,3}$, insieme di 5 partizioni con 3 blocchi.

$$S_{5,3} = 3 \cdot S_{4,3} + S_{4,2} = 18 + 2 \cdot S_{3,2} + S_{3,1} = 18 + 2 \cdot 3 + 1 = 25$$

$S_{4,3} = 6 = \binom{4}{2}$

Vogliamo calcolare $S_{5,3}$ in un altro modo.

- $1 \to 1$
- $2 \to 3$
- $3 \to 2$
- $4 \to 1$
- $5 \to 3$

Due elementi stanno nello stesso blocco se hanno la stessa immagine.
$\{\{1,4\},\{2,5\},\{3\}\}$
Se permuto le immagini ottengo la stessa partizione.

1.16.11 Morale