

Matematica Discreta e Probabilità

Suddivisione corso

Il corso è suddiviso in quattro parti: calcolo combinatorio, statistica descrittiva, probabilità e statistica inferenziale.

Verranno dedicate 10 ore per la parte di calcolo combinatorio, 5 per la parte di statistica descrittiva, 40 per la parte di probabilità e 5 per la parte di statistica inferenziale.

1 Calcolo Combinatorio

1.1 Richiami

Serviranno i concetti di **insieme**, **sottoinsieme**, e di funzioni **iniettive** e **suriettive**.

1.1.1 Insieme

Un **insieme** è un raggruppamento di elementi che può essere individuato mediante una caratteristica comune che gli appartengono.

$$A = \{a, b\}$$

1.1.2 Sottoinsieme

Un **sottoinsieme** è un raggruppamento di elementi appartenenti ad un insieme che è anch'esso un insieme.

$$B = \{n \in N : 1 \leq n \leq 5\}$$

1.1.3 Funzioni Iniettive

Una funzione si dice **Iniettiva** se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. Possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

1.1.4 Funzioni Suriettive

Una funzione si dice **Suriettiva** se ogni elemento del codominio è raggiunto da almeno un elemento del dominio. Non possono esistere elementi del codominio non raggiunto da elementi del dominio.

1.1.5 Funzioni Biettive

Una funzione si dice **Biettiva** se è sia suriettiva che iniettiva.

1.2 Teoria della Cardinalità

Due insiemi hanno la stessa **cardinalità** se esiste una biezione tra essi.
Se è possibile costruire una funzione biettiva tra due insiemi.

1.2.1 Definizioni

Un insieme A si dice finito se esiste $n \geq 0$ tale che A e $\{1, 2, \dots, n\}$ hanno la stessa **cardinalità**.

Se $A \longleftrightarrow \{1, \dots, n\}$ diciamo che A ha **cardinalità** n e scriviamo $|A| = n$

Un insieme A si dice **numerabile** se esiste biezione. $A \longleftrightarrow N = \{0, 1, 2, \dots\}$

1.2.2 Esempi

1

$B = \{1, 2, 3, \dots\}$ $f : N \rightarrow B, f(n) = n + 1$

La funzione rappresenta la corrispondenza tra B e l'insieme dei numeri interi positivi (infiniti) $\mapsto B$ è **numerabile**.

2

$Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ è **numerabile**?

Sì, lo è perchè basta fare le giuste associazioni :

$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1, -1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3$

$f : Z \rightarrow N \begin{cases} 2z - 1 & \text{se } z > 0 \\ -2z & \text{se } z \leq 0 \end{cases}$

Osservazione

Un insieme è **numerabile** se riesco ad elencare tutti i suoi elementi in un elenco infinito e viceversa.

3

$Q \geq 0 = \{\frac{a}{b} : a, b \in N, b \neq 0\}$ (Tutte le frazioni > 0)

è **numerabile**, l'importante è poter esprimere le frazioni in un elenco.

$0, 1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, 4, \dots$

In questo modo posso sicuramente scrivere **tutti** i numeri razionali.

4

$A = \{\text{sequenze binarie di lunghezza infinita}\}$

Vogliamo mostrare che A non è **numerabile**. Prendiamo un elenco infinito di elementi di A .

$a_1 = 0110101..$, $a_2 = 1100101..$, $a_3 = 0010100..$, \dots , $a_n = 1000011..$

Vogliamo costruire una sequenza che non fa parte di questo elenco.

Come primo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del primo di a_1 .

Come secondo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del secondo di a_2 .

Come terzo bit mettiamo il bit **opposto** a quello del terzo di a_3 .

Ragionando in questo modo fino ad n avremo una sequenza che non fa parte di A .

A non è **numerabile**, perchè è impossibile creare un elenco infinito che contenga tutte le sequenze di A .

Osservazione

Questo insieme A e R hanno la stessa cardinalità. Tale cardinalità si dice **del continuo**. <http://www.scit.wlv.ac.uk/~cm1993/maths/mm2217/rup.htm>

1.2.3 Esercizi

1

Abbiamo due biglietti da regalare a due amici scelti su 10. In quanti modi posso fare la scelta?

Soluzione

Possiamo partire puntando la prima persona (1) e contando con quante possibili persone la persona 1 può andare al concerto. Siccome sono 10 persone, allora la persona 1 potrà andare al concerto con 9 persone. Ora controlliamo con quante persone la persona 2 può andare al concerto (escludendo l'esistenza della persona 1), e sta volta saranno 8. Ora vedremo uno schema ricorsivo per il conteggio delle combinazioni siccome la persona 3, potrà andare al concerto con 7 persone (escludendo questa volta la persona 1,2). Ora per contare le possibili combinazioni è facile vedere che ci basta fare una sommatoria da 1 a 9.

$\sum_{i=1}^9 i = 45$, using Gauss formula $\frac{n(n+1)}{2}$.

2

C' un torneo di un gioco (non specificato) in quale abbiamo 3 concorrenti A, B, C. Quali sono le possibili combinazioni del podio contando anche i pareggi?

Soluzione

1° Caso: nessun pareggio. 6 possibili combinazioni:

- 1) A,B,C
- 2) A,C,B
- 3) B,A,C
- 4) B,C,A
- 5) C,A,B
- 6) C,B,A

Possiamo trovare queste combinazioni calcolando $3! = 6$.

2° Caso: tutti parimerito. 1 Combinazione:

A,B,C (Indipendente dall'ordine)

3° Caso: due parimerito. 6 Combinazioni:

1) (A,B),C o alternativamente C,(A,B). () Indica stessa posizione/pareggio, siccome sono 3 concorrenti moltiplico queste 2 possibili combinazioni per 3, quindi $3 \cdot 2 = 6$.

Totale = $6 + 1 + 6 = 13$.

3

Lancio un dado 3 volte. Quante sono le possibili sequenze di risultati in cui in ordine di grandezza il dado con valore pi alto ≥ 5 , il secondo pi alto ≥ 4 , il terzo pi alto ≥ 3 .

Soluzione

Come prima, dividiamo il problema in sottoproblemi e studiamo caso per caso.

1° Caso: 3 risultati diversi:

- 1) 4, 5, 6
- 2) 3, 4, 5
- 3) 3, 4, 6
- 4) 3, 5, 6

Ognuna di queste ha 6 possibili combinazioni.

Totale temporaneo = $4 \cdot 6 = 24$.

2° Caso: 2 risultati uguali 1 diverso:

- 1) 4, 4, 5
- 2) 4, 4, 6
- 3) 5, 5, 3
- 4) 5, 5, 4
- 5) 5, 5, 6
- 6) 6, 6, 3
- 7) 6, 6, 4
- 8) 6, 6, 5

E ognuna di queste può avere 3 combinazioni diverse,

quindi totale temporaneo = $24 + (8 \cdot 3) = 48$.

3° Caso: 3 risultati uguali:

1) 5, 5, 5

2) 6, 6, 6

Totale = $48 + 2 = 50$.

Non contiamo il caso 1 risultato uguale e 2 diversi perch non ha senso, siccome 1 uguale a cosa? lol..

4

L'insieme $A = \{1, 2, \dots, 11\}$ ha pi sottoinsiemi di cardinalità pari o dispari o il numero di sottoinsiemi pari uguale a quello di dimensione dispari?

Soluzione

Possiamo usare di ciascun sottoinsieme il suo complementare, esempio con $n = 3$:

$$\begin{aligned}\{1, 2\} &\longleftrightarrow 3 \\ \{1, 3\} &\longleftrightarrow 2 \\ \{2, 3\} &\longleftrightarrow 1 \\ \emptyset &\longleftrightarrow \{1, 2, 3\}\end{aligned}$$

Per induzione quindi avremo sempre degli insiemi pari complementari a quelli dispari e quindi il numero di sottoinsiemi pari uguale a quelli dispari.

5

4 coppie moglie e marito, sono scambisti per una serata, in quanti modi possono scambiarsi? (Sono etero).

Soluzione

Si possono scambiare in 9 modi diversi (Risposta da chiarire mercoledì).

1.3 Proprietà Cartesiane

1.3.1 Prodotto Cartesiano

A, B insiemi.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Si estende in moto naturale al caso di 3 o più insiemi.

Esempio

$A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, a, 3\}$. Allora : $A \times B = \{(1, 1), (1, a), (1, 3), (2, 1), (2, a), (2, 3)\}$

1.3.2 Potenza Cartesiana

$A^n = A \times A \times A \times \dots \times A$ (n) volte.

A^n l'insieme dell n-ple di ordinate di elementi di A . Gli elementi di A^n si dicono **liste** o **sequenze**.

Esempio

$A = \{0, 1\}$, allora $A^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), \dots, (1, 1, 1)\}$.

1.4 L'insieme delle parti

A insieme, l'insieme delle parti di A , l'insieme $P(A)$ i cui elementi sono i sottoinsiemi di A .

$A = \{1, a, 3\}$.

$P(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{a\}, \{3\}, \{1, a\}, \{1, 3\}, \{a, 3\}\}$, $|P(A)| = 8$.

1.4.1 Definizione

Sia A un insieme e $|A| = n$. Allora esiste una biiezione tra $P(A)$ e $0, 1^n$.

1.4.2 Dimostrazione

Iniziamo con un esempio $A = \{1, 2, 3\}$.

$$\begin{aligned}\{\emptyset\} &\longrightarrow 000 \\ \{1, 2, 3\} &\longrightarrow 111 \\ \{1\} &\longrightarrow 100 \\ \{2\} &\longrightarrow 010 \\ \{3\} &\longrightarrow 001 \\ \{1, 2\} &\longrightarrow 110 \\ \{1, 3\} &\longrightarrow 101 \\ \{2, 3\} &\longrightarrow 011\end{aligned}$$

In generale se $A = \{1, 2, \dots, n\}$ allora $F : P(A) \rightarrow \{0, 1\}^n$.

Sia $S \subseteq A$, $F(S) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$ con
$$\begin{cases} 1 & \text{if } a_i \in S \\ 0 & \text{if } a_i \notin S \end{cases}$$
 Da aggiustare.

1.5 Principio di induzione

Supponiamo di avere una famiglia di proposizione chiamata $\underline{P}(n), n \geq n_0$ possono essere vere o false. Per mostrare che sono tutte vere dobbiamo verificare i seguenti due passi.

- 1) **passo base** dell'induzione: verificare che $\underline{P}(n_0)$ è vera.
- 2) **passo induttivo** verificare che se $\underline{P}(n)$ è vera, allora $\underline{P}(n+1)$ è anche vera $\forall n \geq n_0$.

1.5.1 Esempio

Supponiamo di avere n amici.

Il primo amico beve **1** birra, il secondo amico beve **2** birre, il terzo **3**, e così via.. Quante birre vengono bevute in tutto?

Se $n = 1$, viene bevuta **1** birra, se $n = 2$, ne vengono bevute **4**, mentre se $n = 3$ ne vengono bevute **9**.

Ipotizziamo quindi che il numero di birre sia n^2 . Verifichiamo i passi dell'induzione.

Passo base : $\underline{P}(1) = 1$. Verificato.

Passo induttivo : Il numero totale di birre per $n+1$ allora dovrebbe essere $n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

1.6 Principio di uguaglianza

A, B insiemi in corrispondenza biunivoca $\rightarrow |A| = |B|$, vale anche il **vicversa**.

1.6.1 Esempio

Il numero di cioccolatini mangiati è uguale al numero di incarti lasciati in giro.

1.7 Principio di somma

A, B insiemi tale che $A \cap B = \emptyset \rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$.

1.8 Principio di moltiplicazione

A, B insiemi $\rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B|$, in particolare $|A^n| = |A|^n$.

1.8.1 Corollario

Se $|A| = n$, $|P(A)| = 2^n$.

Dimostrazione

Per il principio di uguaglianza $|P(A)| = |\{0, 1\}^n|$ perchè abbiamo visto che esiste una biiezione tra $P(A)$ e $\{0, 1\}^n$.

Per il principio di moltiplicazione $|\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n$

1.9 Prodotti Condizionati

A, B insiemi.

Un prodotto condizionato é un sottoinsieme di $A \times B$ che soddisfa certe condizioni.

Ad esempio:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$\mathbf{C} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$, $\mathbf{D} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

\mathbf{C} e \mathbf{D} sono due possibili sottoinsiemi di $A \times B$.

1.9.1 Definizione

$S \subseteq A \times B$, si dice prodotto condizionato di tipo (n, m) se

1. La prima coordinata di un elemento di S può essere scelta in n modi.
2. Fissata la prima coordinata in uno di questi n modi, la seconda può essere scelta in m modi.

Ad esempio:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

$\mathbf{C} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 3)\}$, $\mathbf{D} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

\mathbf{C} é un prodotto condizionato di tipo $(3, 1)$, \mathbf{D} non lo é perché ho **una** scelta con prima coordinata 2 e **due** scelte con prima coordinata 1.

Altro esempio: $A = B = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$C = \{(a, b) : a, b \in A, a \neq b\}$, abbiamo **dieci** scelte per la prima coordinata.

Fissata questa prima coordinata, ne abbiamo **nove** per la seconda.

É un prodotto condizionato di tipo $(10, 9)$.

1.9.2 Proposizione

Se $S \subseteq A \times B$ é prodotto condizionato di tipo (n, m) allora $|S| = n \cdot m$.

1.9.3 Dimostrazione

Siano a_1, \dots, a_n le possibili scelte per la prima coordinata.

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n.$$

$$S_i = \{ \text{elementi di } S \text{ con prima coordinata } a_i \}.$$

$$|S_i| = m \text{ (prodotto condizionato)}.$$

Siccome gli S_i sono disgiunti per il principio di somma,

$$\text{ho } |S| = |S_1| + \dots + |S_n| = m + \dots + m = n \cdot m.$$

1.9.4 Estendiamo il concetto

$S \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ é un prodotto condizionato di tipo $(m_1, m_2, m_3, \dots, m_k)$

se:

1. Ho m_1 scelte per la prima coordinata
2. Fissata la prima coordinata, ho m_2 scelte per la seconda coordinata.
3. Fissate le prime due coordinate ho m_3 scelte per la terza.
Cosí via fino a..
4. Fissate le prime $(k - 1)$ coordinate ho m_k scelte per la k.

Analogamente a prima se S é un prodotto condizionato di tipo (m_1, \dots, m_k)

$$\text{allora } |S| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k.$$

Esempio

$$A = \{a, b, c : a, b, c \in N, a \leq 10, 0 \leq b - a \leq 10, 0 \leq c - a - b \leq 10\}.$$

A = terne di numeri naturali che rispettano le condizioni. $|A|$?

Abbiamo **11** modi per scegliere a , fissata a abbiamo **11** modi per scegliere $b \rightarrow (a \leq b \leq 10 + a)$

Fissate (a, b) , abbiamo **11** modi anche per scegliere la terza coordinata $c \rightarrow (a + b \leq c \leq 10 + a + b)$.

A é quindi un prodotto condizionato di tipo $(11, 11, 11)$, $|A| = 11^3 = 1331$.

Osservazione

A, B , $|A| = n$, $|B| = n$. $A \times B$ é un prodotto condizionato di tipo (n, n) .

1.10 Disposizioni e Permutazioni

Una disposizione in A é una sequenza in A in cui le coordinate sono distinte tra loro.

$\{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A, a_i \neq a_j \vee i \neq j\}$ é l'insieme delle disposizioni di lunghezza n in A .

1.10.1 Proposizione

$|A| = n$. L'insieme delle disposizioni di lunghezza k é un prodotto condizionato del tipo $(n, n-1, n-2, \dots, n-k)$.

1.10.2 Dimostrazione

La prima coordinata la posso scegliere in n modi.

La seconda deve essere \neq dalla prima, quindi ho $n-1$ modi.

La terza deve essere diversa dalla prima e dalla seconda, $n-2$ modi.

L'ultima deve essere diversa da tutte le altre, quindi $n-k+1$ modi.

1.10.3 Conseguenza

Le disposizioni di lunghezza k in un insieme di n elementi sono:

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Esso viene chiamato **fattoriale discendente**, é il prodotto di k numeri interi consecutivi di cui il piú grande é n .

Esempio

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Le disposizioni di lunghezza 3 in A sono $(5)_3, (5 \cdot 4 \cdot 3) = 60$.

Sarebbero tutti i modi di disporre, ad esempio $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(3, 1, 2)$.

Caso particolare

Se $k = n$ le disposizioni di lunghezza n si dicono **permutazioni**.

Le permutazioni di n sono $(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1) = n!$.

1.11 Combinazioni

Una combinazione in A di lunghezza k é un sottoinsieme di A di cardinalit  k .

Esempio

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, scelto $k = 3$. Le combinazioni di lunghezza 3 in $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sono 10.

$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$.

1.11.1 Legame tra disposizioni e combinazioni

Possiamo associare ad ogni disposizione di lunghezza k una combinazione di lunghezza k . La funzione con cui le associeremo dimentica l'ordine.

Per **ogni** combinazione ho esattamente $k!$ disposizioni la cui immagine é la combinazione data: sono tutte le permutazioni di questi k elementi.

Il numero di disposizioni é quindi $k!$ volte il numero delle combinazioni.

1.11.2 Conclusione

I sottoinsiemi di cardinalità k (combinazioni) sono

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

1.12 Esercizi per il 3 Ottobre

1

Quante sono le sequenze date da due cifre decimali?

Soluzione

$\{00, 01, 02, \dots, 09, 10, 11, \dots, 99\}$ La somma di tali sequenze è 100.

2

Un cammino reticolare è un percorso sul piano cartesiano che effettua passi di lunghezza uno verso destra o verso l'alto. Quanti sono i cammini reticolari da $(0, 0)$ a $(2, 2)$?

Soluzione

1 percorso: fissiamo una sola direzione di partenza e muoviamoci verso questa finché non sarà necessario cambiarla. $n - 1$ percorsi: partendo dall'ultimo movimento del percorso precedente modifichiamo il più vicino in modo tale da creare un percorso diverso da quello precedente.

Percorsi totali: 6.

3

Mostrare che esiste una corrispondenza biunivoca tra i cammini reticolari (vedi esercizio precedente per la definizione) da $(0, 0)$ a $(3, 2)$ e i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ di cardinalità 2.

Soluzione

Notando che il numero totale di movimenti per arrivare a $(3, 2)$ pari a 5 (elementi dell'insieme) e che gli spostamenti verso l'alto sono necessariamente 2 (elementi del sottoinsieme di cardinalità 2), possiamo pensare al numero di ogni sottoinsieme come il numero del movimento in cui ci spostiamo verso l'alto:

$$\begin{aligned} \{1, 2\} &\rightarrow \text{primo e secondo movimento verso l'alto} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$\{1, 5\} \rightarrow$ primo e quinto movimento ” ”
 $\{2, 3\} \rightarrow$ secondo e terzo movimento ” ”
 \vdots
 $\{4, 5\} \rightarrow$ quarto e quinto movimento ” ”

4

Esibire una corrispondenza biunivoca tra gli intervalli aperti reali $(0, 1)$ e $(5, 10)$.

Soluzione

$$f :]0, 1[\longrightarrow]5, 10[$$

$$f(x) = 5x + 5$$

f è iniettiva?

$$5x + 5 = 5x' + 5$$

$$\Rightarrow x = x'$$

f è suriettiva?

$$y \in (5, 10)$$

$$y = 5x + 5 \iff x = \frac{y-5}{5}$$

