Curso 2021/22

Trabajo de Fin de Grado

OBJETOS FINITOS EN LA CATEGORÍA TOPOLÓGICA Y FUNTORES ALGEBRAICOS

Alejandro Moreno Becerra

Dirigido por Manuel Alonso Morón

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Grado en Matemáticas

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología

Facultad de Ciencias Matemáticas

Madrid, 21 de marzo de 2024

OBJETOS FINITOS EN LA CATEGORÍA TOPOLÓGICA Y FUNTORES ALGEBRAICOS

Alejandro Moreno Becerra

Resumen. En este trabajo pretendemos ofrecer una introducción razonable a la topología algebraica en espacios topológicos finitos. Primero, los abordamos topológicamente llegando a obtener el Teorema de Clasificación, que caracteriza las equivalencias homotópicas entre espacios finitos. Después, estudiamos la relación de los espacios finitos con los complejos simpliciales culminando en los Teoremas de McCord, que nos muestran que los espacios finitos cubren, en cuanto a funtores algebraicos, gran parte de los espacios importantes: tienen la misma homotopía débil que las realizaciones de complejos simpliciales finitos. Finalizamos el trabajo con la exposición de dos ejemplos sencillos de aplicación de la teoría que ayudan a su comprensión e ilustran su alcance.

Palabras clave: topología, topología algebraica, espacios finitos, homotopía, complejos simpliciales

Abstract. In this work we intend to offer a reasonable introduction to algebraic topology in finite spaces. At first, we tackle the problem topologically, obtaining the Classification Theorem, which characterizes homotopy equivalences between finite spaces. Then, we study the relation between finite spaces and simplicial complexes, leading up to the McCord theorems, which show that finite spaces cover a big part of the important spaces in relation to algebraic functors: they have the same weak homotopy type as geometric realizations of simplicial complexes. We finish with the exposition of two simple examples using the theory developed along the work that we hope help its understanding and show its reach.

Keywords: topology, algebraic topology, finite spaces, homotopy, simplicial complexes

Índice general

Capítulo 1

Topología en espacios finitos

1. Introducción

Lo primero que vamos a hacer notar es que la finitud del espacio tiene importantes consecuencias sobre su topología: dado un espacio finito (X, T), sabemos que $T \subseteq \mathcal{P}(X)$, que es un conjunto finito, así que todas las intersecciones posibles de abiertos son finitas, y por lo tanto están contenidas en T. Los espacios con esta propiedad se conocen como **espacios de Alexandroff**. Además, si el espacio es T_1, para cualquier elemento $x \in X$, el conjunto $\{x\}$ es un cerrado. Esto implica que todos los conjuntos $\{y\} = \bigcap_{x \neq y} X \setminus \{x\}$ son abiertos, y por tanto T es la topología discreta.

Los espacios topológicos finitos están directamente relacionados con los conjuntos preordenados de la siguiente forma: si consideramos para cada punto $x \in X$ el abierto minimal (en sentido conjuntista) que lo contiene y lo denotamos por U_x, podemos definir un preorden en X como sigue: dados dos puntos $x, y \in X$, decimos que $x \leq y$ si $U_x \subseteq U_y$ (que equivale a $x \in U_y$). Llamaremos **base minimal** de X al conjunto de dichos abiertos, y observamos que cualquier otra base la contiene. En sentido inverso, dado un conjunto preordenado $\mathcal{U}$, podemos obtener una topología tomando como base la familia de conjuntos $\{y \in X \mid y \leq x\}_{x \in X}$. Es evidente que la unión es todo X y que dados dos abiertos de la base U y V tales que $p \in U \cap V$, entonces $W = \{y \in Y \mid y \leq p\}$ está contenido en ambos por la transitividad y contiene a p. Esto prueba que la familia es base para alguna topología. Además, al volver a aplicar la consideración anterior a este nuevo espacio topológico obtenemos el mismo conjunto preordenado: $U_x \subseteq U_y$ implica que $x \in U_y \subseteq \{z \in X \mid z \leq y\}$, y por tanto $x \leq y$. Asimismo, si $x \leq y$, entonces todo $z \leq x$ es $z \leq y$, y por tanto $U_x \subseteq U_y$.

En nuestro estudio pondremos atención a los espacios T_0, en los cuales siempre podemos encontrar un abierto que separe a dos puntos arbitrarios. Esto implica que no puede darse $x \in U_y$ e $y \in U_x$ sin que $x = y$, es decir, que el preorden también es antisimétrico, convirtiéndose en un orden parcial. De la misma forma, si partimos de un conjunto parcialmente ordenado, el espacio finito resultante es T_0.

Hemos conseguido de esta manera una asignación biyectiva entre espacios topológicos finitos y conjuntos preordenados, que además es una biyección entre los espacios finitos T_0 y los conjuntos parcialmente ordenados. Esta relación entre objetos matemáticos aparentemente distintos será la que nos permita estudiar las propiedades de los espacios finitos y clasificarlos.

En un conjunto parcialmente ordenado, un elemento es **maximal** si no hay ninguno mayor que él, es **minimal** si no lo hay menor; es un **máximo** si es mayor que todos y es un **mínimo** si es menor que todos los demás elementos. Una **cadena** es un conjunto de elementos conmparables entre sí. Un conjunto es **de bajada** si contiene a cualquier elemento menor que alguno del propio conjunto, y es **de subida** si contiene a cualquiera mayor. Un abierto es un conjunto de bajada porque si $x \in U$,

$U_x \subseteq U$, así que todo $z \leq x$ pertenece a U. El complementario de un conjunto de bajada es de subida, de donde los cerrados son conjuntos de subida.

2. Continuidad y conexión

PROPOSICIÓN 1.1. *Una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos finitos es continua si y solo si para todos $x, y \in X$ tales que $x \leq y$ se tiene $f(x) \leq f(y)$. De las funciones con esta propiedad se dice que **preservan el orden**.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es continua y tomemos $x \leq y$. Entonces $x \in U_y \subseteq f^{-1}(U_{f(y)})$ y por tanto $f(x) \in U_{f(y)}$. Recíprocamente, si f preserva el orden y tenemos un abierto de la base minimal de Y, U_y, veamos que es un conjunto de bajada. Si $x \in f^{-1}(U_y)$ y $z \leq x$, entonces $f(z) \leq f(x) \leq y$, de donde $z \in f^{-1}(f(z)) \subseteq f^{-1}(U_y)$. □

OBSERVACIÓN 1.1. Toda función biyectiva de un espacio finito de n elementos en sí mismo es en realidad una permutación de $\mathcal{S}_n$ y por tanto cumple que $f^n = \mathrm{id}$, así que f^{n-1} es su inversa. Además, si es continua, f^{n-1} también lo es, así que f es un homeomorfismo.

LEMA 1.1. *Si dos puntos $x, y \in X$ son comparables, entonces existe un camino que los une.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $x \leq y$ y consideremos la función

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & [0,1] & \longrightarrow & X \\ & t & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } t \in [0,1) \\ y & \text{si } t = 1 \end{cases}. \end{array}$$

Entonces α es continua, puesto que dado un abierto de X, U,

$$\alpha^{-1}(U) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } x, y \notin U \\ [0,1) & \text{si } x \in U \text{ e } y \notin U \\ [0,1] & \text{si } x, y \in U \end{cases}$$

y estos son todos los casos, dado que si $y \in U$, x también lo está por ser menor. □

DEFINICIÓN 1.1. Sea X un conjunto parcialmente ordenado finito. Llamamos **cenefa** a una sucesión de puntos $x_0, ..., x_n$ ordenados de tal forma que cada uno es comparable con el siguiente. Diremos que X es **ordenadamente conexo** si cualesquiera dos puntos tienen una cenefa que los une.

PROPOSICIÓN 1.2. *En un espacio topológico finito son equivalentes:*

1. *X es conexo,*
2. *X es ordenadamente conexo,*
3. *X es conexo por caminos.*

DEMOSTRACIÓN. En realidad ya sabemos que la primera y la última son equivalentes, puesto que el espacio es localmente conexo. En cualquier caso, si tomamos $x \in X$ y consideramos $\{y \in X \mid \text{ hay una cenefa que los une con } x\}$, entonces este es un conjunto de subida y de bajada sin más que ampliar la cenefa, y por tanto es abierto y cerrado no vacío en un espacio conexo, con lo que es el total. Que (2) $\Longrightarrow$ (3) se sigue del lema anterior, así que todas son equivalentes. □

Para clasificar los espacios finitos salvo homeomorfismo de forma teórica, tenemos el siguiente teorema de Stong [5]:

TEOREMA 1.1 (Stong). *Denotamos por $\mathcal{T}$ la clase de espacios topológicos finitos bajo la relación de homeomorfismo. Asimismo, denotamos por $\mathcal{M}$ el conjunto de las matrices de la forma $M = (a_{ij})_{ij}$ donde*

1. $a_{ii} \geq 1$,
2. $a_{ij} = 1, 0, -1$ *si* $i \neq j$,
3. $a_{ij} = -a_{ji}$ *si* $i \neq j$,
4. $a_{ij} = 0$ *si existe una cadena de índices* $i_1, ..., i_s$ *de tal forma que* $a_{i_k i_{k+1}} = 1$ *para todo* $k = 1, ..., s-1$ *con* $s > 2$,

cocientado por la relación de congruencia por matrices de permutaciones, es decir, dos matrices de dicha forma M y M' son la misma si existe una matriz P resultado de permutar las columnas de la identidad tal que $M' = P^T M P$. El teorema afirma que podemos establecer una biyección entre ambos conjuntos según la cual a cada espacio con una base minimal de r abiertos le corresponde una matriz $r \times r$, el espacio es T_0 si y solo si las entradas de la diagonal de la matriz son todas uno, y la traza es el cardinal del espacio.

DEMOSTRACIÓN. Para asociar a un espacio X una matriz en $\mathcal{M}$, tomamos una base minimal de X, $\mathcal{B} = \{U_1, ..., U_r\}$. Definimos la siguiente matriz:

$$\mathfrak{m}(X, \mathcal{B}) = \begin{cases} |\{x \in X \mid U_x = U_i\}| & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } U_i \subseteq U_j \text{ y } \nexists k \neq i, j \text{ tal que } U_i \subseteq U_k \subseteq U_j \\ -1 & \text{si } U_j \subseteq U_i \text{ y } \nexists k \neq i, j \text{ tal que } U_j \subseteq U_k \subseteq U_i \\ 0 & \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Es claro que esta matriz pertenece a $\mathcal{M}$. Falta por ver que cualquier otro orden en la base minimal nos da la misma clase en $\mathcal{M}$. Supongamos que en vez de dicha base hemos tomado $\mathcal{B}' = \{U_{\sigma(1)}, ..., U_{\sigma(r)}\}$, donde σ es una permutación en $\mathcal{S}_r$. Hay que ver que

$$\mathfrak{m}(X, \mathcal{B}') = P^T \mathfrak{m}(X, \mathcal{B}) P$$

donde P es cierta matriz de permutaciones. Denotamos $\mathfrak{m}(X, \mathcal{B})_{ij} = a_{ij}$ y definimos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(r)} \end{pmatrix}.$$

Si estudiamos la congruencia

$$P^T \mathfrak{m}(X, \mathcal{B}) P = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)}^T \\ \vdots \\ e_{\sigma(r)}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ir} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(r)} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{\sigma(1)1} & \cdots & a_{\sigma(1)r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\sigma(r)1} & \cdots & a_{\sigma(r)r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)\sigma(1)} & \cdots & a_{\sigma(1)\sigma(r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\sigma(r)\sigma(1)} & \cdots & a_{\sigma(r)\sigma(r)} \end{pmatrix} = (a_{\sigma(i)\sigma(j)})_{ij},$$

obtenemos exactamente lo que queríamos demostrar, puesto que si hacemos $\mathfrak{m}(X, \mathcal{B}')_{ij} = b_{ij}$, por definición

$$b_{ij} = \begin{cases} \left|\{x \in X \mid U_x = U_{\sigma(i)}\}\right| & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } U_{\sigma(i)} \subseteq U_{\sigma(j)} \text{ y } \nexists k \text{ tal que } U_{\sigma(i)} \subsetneq U_k \subsetneq U_{\sigma(j)} \\ -1 & \text{si } U_{\sigma(j)} \subseteq U_{\sigma(i)} \text{ y } \nexists k \text{ tal que } U_{\sigma(j)} \subsetneq U_k \subsetneq U_{\sigma(i)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

y obtenemos la identidad deseada. A partir de ahora nos referirnos a $\mathfrak{m}$ como una asignación que no depende de la base y llega a clases de matrices en $\mathcal{M}$.

Hay que ver que dicha asignación

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{m}: & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & X & \mapsto & \mathfrak{m}(X) \end{array}$$

es efectivamente una aplicación y de hecho es biyectiva. Para ver que está bien definida, tomamos dos espacios homeomorfos (el mismo elemento de $\mathcal{T}$). Como los homeomorfismos llevan una base minimal en otra y preservan los cardinales y las inclusiones, ambos espacios tienen que definir la misma matriz.

Para ver la inyectividad, supongamos que dos espacios X e Y con bases minimales $\{U_i\}_i$ y $\{V_i\}_i$ dan lugar a la misma matriz $M = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}$. Sabemos por tanto que los conjuntos $\{x \in X \mid U_x = U_i\}$ y $\{y \in Y \mid V_y = V_i\}$ tienen el mismo cardinal a_{ii}, así que existe una biyección entre ellos f_i. También sabemos que dichos conjuntos son disjuntos según varía i, así que tiene sentido definir la función global

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & \quad Y \\ & x & \mapsto & f_i(x) \quad \text{si } U_x = U_i \end{array}$$

y vamos a comprobar que es un homeomorfismo. Dado que X e Y tienen el mismo cardinal, la inyectividad de f prueba la sobreyectividad. Para ver la continuidad observamos que f preserva el orden: dados $x \leq y$ en X, con $U_x = U_i$ y $U_y = U_j$, $f(x) = f_i(x) \in \{z \in Y \mid V_z = V_i\}$ y $f(y) = f_j(y) \in \{z \in Y \mid V_z = V_j\}$. Como $U_i \subseteq U_j$, $V_i \subseteq V_j$ porque la matriz asociada es la misma, se tiene que $V_{f_i(x)} = V_i \subseteq V_j = V_{f_j(y)}$, como queríamos demostrar. Para probar que la inversa también es continua el argumento es simétrico utilizando las inversas de las f_i.

Por último tenemos que ver la sobreyectividad. Para eso, dada una matriz M en $\mathcal{M}$, vamos a obtener un espacio topológico X tal que $\mathfrak{m}(X) = M$. Definimos

$$X = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq r, \; 1 \leq v \leq a_{u,u}\}.$$

La idea es que en este X habrá tantos pares como sume la traza de M, por cada posición de la diagonal indicada por u tenemos $a_{u,u}$ pares. Si queremos definir los abiertos de tal manera que respeten las inclusiones que marca la matriz M, cada $\{(u, v) \in X \mid U_{(u,v)} = U_i\}$ tiene que tener cardinal $a_{u,u}$, así que U_i tiene que contener $a_{u,u}$ elementos que lo tengan como abierto minimal y los demás tendrán que venir de una cadena de inclusiones $U_{i_1} \subseteq \cdots \subseteq U_{i_s} = U_i$ marcada por M:

$$U_i = \{(u, v) \in X \mid u = i, m \text{ o bien}$$
$$u = i_1 \text{ donde } 1 \leq i_1, ..., i_s \leq r, i_s = i \text{ y } a_{i_k i_{k+1}} = 1 \text{ para } k = 1, ..., s-1\}$$

Usaremos el teorema () para ver que forman base minimal de X: es claro que todo $(u, v) \subseteq U_u$; si $(u, v) \in U_i$, o bien $U_u = U_i$, o bien tenemos una cadena de índices desde u hasta i. Dado cualquier elemento $(k, w) \in U_u$, hay también una cadena de índices que conecta k y u, de tal forma que podemos conectar k e i y por tanto $(k, w) \in U_i$ y $U_u \subseteq U_i$. Si $(u, v) \in U_i \cap U_j$, entonces $U_u \subseteq U_i \cap U_j$ y por tanto dicha intersección se puede poner como unión de abiertos. Si $U_j = \bigcup_{i \in I} U_i$, entonces hay algún elemento de U_j en algún U_{i_0}, y por tanto $U_j \subseteq U_{i_0}$, de donde $U_j = U_{i_0}$.

Solo falta demostrar que $(b_{ij}) = \mathfrak{m}(X) = M = (a_{ij})$. Para ello, analizamos coeficiente por coeficiente:

1. $b_{ii} = |\{(u, v) \in X \mid U_{(u,v)} = U_i\}| = |\{x \in X \mid (u, v) = (i, v)\}| = a_{ii}$;
2. si $b_{ij} = 1$, entonces $U_i \subseteq U_j$ y no hay otro abierto básico entre ambos, lo cual implica que todo $(i, v) \in U_j$, por lo que se puede conectar i con j por una cadena de índices. Si la cadena fuera de longitud mayor que dos, tendríamos un abierto básico entre ambos, así que es de longitud dos y por tanto $a_{ij} = 1$.

   Por otra parte, si $a_{ij} = 1$, todos los $(i, v) \in U_j$ y además, todos los que se puedan unir con i se pueden unir con j en un paso más, por tanto todo $U_i \subseteq U_j$. En el caso de que existiera $U_i \subseteq U_k \subseteq U_j$, tendríamos $a_{ik} = a_{kj} = 1$, y como $M \in \mathcal{M}$, $a_{ij} = 0$ llegando a absurdo. Por tanto $b_{ij} = 1$.

   Por un razonamiento análogo, $a_{ij} = -1$ si y solo si $b_{ij} = -1$, y como solo hay tres opciones para a_{ij} y lo mismo con b_{ij}, y coinciden exactamente en dos, todos los coeficientes tienen que coincidir, lo cual concluye la prueba.

$\square$

3. Homotopía en espacios finitos

Ahora vamos a estudiar las relaciones entre las homotopías de funciones en espacios finitos. Una homotopía entre dos funciones f y g es algo así como una «colección continua» de caminos, así que tendrá que ver con un montón de cenefas que unen cada $f(x)$ con $g(x)$. Tiene sentido preguntarse entonces la relación que tienen f y g en cuanto al orden cuando son homótopas. En esta línea, consideramos el espacio Y^X de las funciones continuas de X en Y y lo dotamos del **orden punto a punto**: $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Tenemos pues un conjunto con un orden parcial, del cual podemos obtener una topología.

PROPOSICIÓN 1.3. *El orden punto a punto en Y^X corresponde con la topología compacta-abierta, cuya subbase está formada por los conjuntos $S(K, W) = \{f \in Y^X \mid f(K) \subseteq W\}$, donde $K \subseteq X$ es compacto y $W \subseteq Y$ abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Hay que ver que los abiertos $S(K, W)$ son los conjuntos de bajada que define el orden y viceversa. Si $f \in S(K, W)$ y $g \leq f$, entonces $g(K) \subseteq f(K) \subseteq W$ y por tanto $g \in S(K, W)$. Recíprocamente, si consideramos un conjunto de la base que define el orden, $A = \{g \in Y^X \mid g \leq f\}$ para alguna $f \in Y^X$, tenemos que $A = \bigcap S(\{x\}, U_{f(x)})$. $\square$

Recordamos que una homotopía entre dos funciones $f, g : X \longrightarrow Y$ es una función continua $H : X \times I \longrightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$. Podemos entonces buscar una relación entre las funciones continuas de I en Y^X y las funciones continuas de $Y^{X \times I}$. Hay desde luego una correspondecia natural que envía $H : X \times I \longrightarrow Y$ en $h : I \longrightarrow Y^X$ definida como $h(t) = H(\cdot, t)$, pero no está claro si mantiene la continuidad en ambos sentidos. Para esto, es necesario que cada punto tenga una base de entornos compactos, lo cual se tiene en cualquier espacio finito, y por tanto concluimos que cada homotopía corresponde con un camino en

Y^X, que a su vez corresponderá con una cenefa en el orden punto a punto por la proposición anterior.

Corolario 1.1. *Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ dos funciones continuas entre espacios finitos. Entonces son homótopas (que denotamos $f \simeq g$) si y solo si existe una cenefa de funciones continuas que las une en el orden punto a punto. Además, si son homótopas relativamente a un subconjunto de X, todas las funciones de la cenefa coinciden en dicho subconjunto.*

Como hicimos con los homeomorfismos, vamos a dirigirnos hacia la clasificación de los espacios finitos en base a su tipo de homotopía. En la topología algebraica usual, estamos acostumbrados a buscar retractos por deformación de los espacios con los que reducirlos a otros espacios conocidos cuyos grupos podemos computar fácilmente. Así, es usual dibujar un espacio y «reducir» o «eliminar» ciertas partes que no influyen en su tipo de homotopía. Podemos intentar hacer lo mismo en los espacios finitos, encontrando una forma de representarlos que dé pistas sobre qué puntos son prescindibles.

En general, un retracto por deformación es un conjunto A tal que existe una aplicación continua $r : X \longrightarrow A$ cumpliendo $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ y $r\big|_A = \mathrm{id}_A$. En espacios finitos, lo primero equivale a que $i \circ r$ e id_X estén unidas por una cenefa de funciones continuas. Por ejemplo, si tenemos una situación del tipo $x \leq y \leq z$ e y no tiene más relaciones, la aplicación $r(y) = x$, $r(a) = a$ para todo $a \in X \setminus \{y\}$ cumple que $i \circ r \leq \mathrm{id}_X$ y preserva el orden, por tanto $X \setminus \{y\}$ resulta ser un retracto por deformación de X.

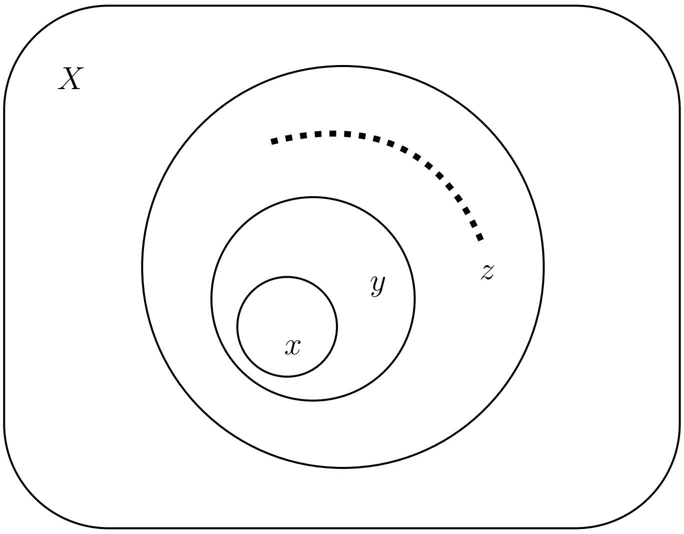


Figura 1.1. Situación en la que podemos aplicar lo anterior.

Este es un ejemplo de cómo podemos eliminar puntos de espacios sin cambiar su tipo de homotopía, aunque cabrá analizar casos más generales. De cualquier manera, como hay finitos puntos, podemos hacer esto una cantidad finita de veces hasta obtener un espacio «irreducible». Al oibtener unos espacios de otros por retractos por deformación, todo espacio tendrá el mismo tipo de homotopía que uno «irreducible», y será pertinente preguntarse qué propiedades tienen dichos espacios y qué significa que sean homótopos.

La representación esquemática que podemos hacer para evidenciar de manera más sencilla este tipo de situaciones es el llamado **diagrama de Hasse** del espacio: un grafo en el que cada punto de X es un vértice y estos se unen según la relación de orden, de tal forma que empezamos desde los mayores y vamos trazando líneas hacia abajo hasta los menores.

EJEMPLO 1.1. Consideremos el espacio generado por la base

$$\{\{e\}, \{b\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}.$$

Podemos representar su diagrama de Hasse como

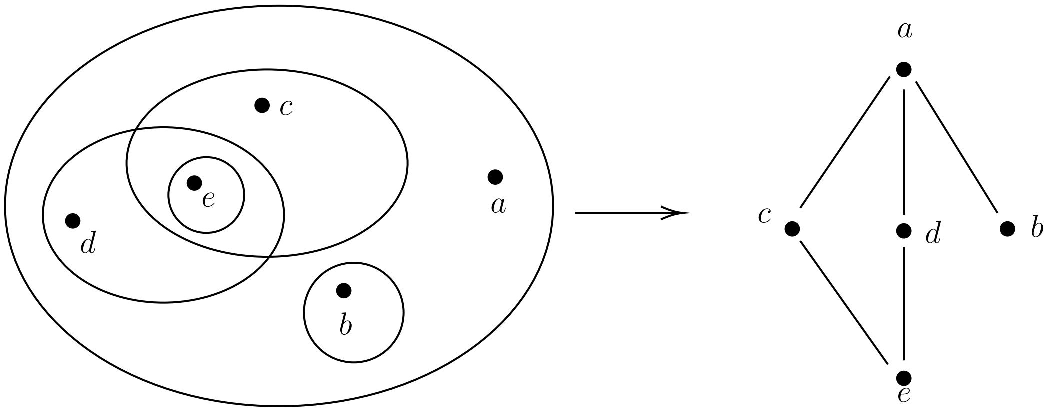


FIGURA 1.2. Construcción del diagrama de Hasse a partir del espacio finito.

Vamos a formalizar todo este desarrollo:

PROPOSICIÓN 1.4. *Todo espacio finito tiene el mismo tipo de homotopía que un espacio T_0.*

DEMOSTRACIÓN. Dado X espacio finito, podemos considerar la relación de equivalencia $x \sim y$ si y solo si $x \leq y$ e $y \leq x$. La idea es que la relación cociente identificará todos los puntos que no se pueden separar, haciendo el orden del espacio cociente antisimétrico y, por tanto, dicho espacio T_0. Denotando $i : X/\sim \longrightarrow X$ la inclusión que asigna a cada clase un representante, la proyección canónica $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ cumple que $i \circ \pi \leq \mathrm{id}_X$, y por tanto es un retracto por deformación.

Falta comprobar que el orden es antisimétrico en $\mathrm{im}(i)$. Si tomamos dos elementos, $x, y \in \mathrm{im}(i)$ tales que $x \leq y$ y $x \geq y$, entonces $[x] = [y]$ en el cociente y por tanto $x = i([x]) = i([y]) = y$, como queríamos demostrar. □

DEFINICIÓN 1.2. Si X es un espcio finito T_0, llamaremos **punto colapsable** a todo $x \in X$ tal que $U_x \setminus \{x\}$ tenga máximo (colapsables **hacia abajo**) o $F_x \setminus \{x\}$ tenga mínimo (colapsables **hacia arriba**), donde F_x es la intersección de todos los cerrados que contienen a x.

OBSERVACIÓN 1.2. Como X es un espacio T_0, esto equivale a decir que solo hay un elemento mayor que x (hacia abajo) o que solo hay un elemento menor que x (hacia arriba).

Esto se ve reflejado en el diagrama de Hasse: cuando es colapsable hacia abajo solo hay una línea de salida en x y cuando lo es hacia arriba solo hay una de entrada.

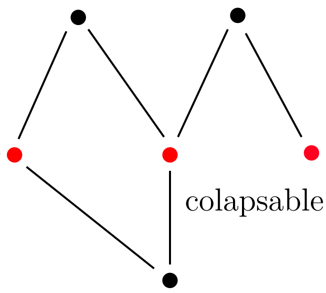


FIGURA 1.3. Diagrama de Hasse con puntos colapsables (en rojo) y no colapsables (en negro).

PROPOSICIÓN 1.5. *Si x es un punto colapsable de X, entonces $X \setminus \{x\}$ es un retracto por deformación de X.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que es colapsable hacia abajo. Entonces $U = U_x \setminus \{x\}$ tiene un máximo y, es decir, estamos en una situación del tipo $z \leq y \leq x$ para todo $z \in U$, y por tanto podemos definir r como lo hacíamos en el comentario precedente, $r(x) = y$, y se cumple que $X \setminus \{x\}$ es retracto por deformación de X.

Si es colapsable hacia arriba, tenemos una situación del tipo $x \leq y \leq z$ para todo $z \in F_x$, y la aplicación que lleva x en y y fija el resto es un retracto por deformación igualmente. $\square$

DEFINICIÓN 1.3. Un espacio finito T_0 es **minimal** si no tiene puntos colapsables. El **núcleo** de un espacio es un retracto por deformación minimal.

OBSERVACIÓN 1.3. Traduciendo lo que comentábamos antes, es claro que todo espacio tiene un núcleo único salvo homotopía, puesto que se puede reducir en finitos pasos hasta un minimal. Igualmente, dos espacios que tengan núcleos homótopos serán homótopos, pero de hecho ocurre algo más fuerte: en espacios minimales, homotopía equivale a homeomorfía.

PROPOSICIÓN 1.6. *Sea X un espacio minimal. Entonces una aplicación continua $f : X \longrightarrow X$ es homótopa a la identidad si y solo si es la identidad.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $f \leq \mathrm{id}_X$. Podemos hacer inducción en los puntos de X: si no hay puntos menores que x, $f(x) \leq \mathrm{id}(x) = x$ obliga a que $f(x) = x$. Sean así $x \in X$, $V_x = U_x \setminus \{x\}$ y supongamos que $f\big|_{V_x} = \mathrm{id}_{V_x}$. Tiene que ser $f(x) = x$, por que si no, $y = f(y) \leq f(x) \leq \mathrm{id}(x) = x$ para todo $y \in V_x$ por la continuidad y $f(x)$ sería un máximo de V_x contra la minimalidad del espacio. El caso $f \geq \mathrm{id}_X$ es simétrico.

En el caso general, si $f \leq g_1 \geq g_2 \leq \ldots \geq g_n \leq \mathrm{id}_X$, podemos aplicar lo anterior recurrentemente hasta concluir que $f = \mathrm{id}_X$. $\square$

TEOREMA 1.2 (Teorema de Clasificación). *Dos espacios finitos minimales homotópicamente equivalentes son homeomorfos. Asimismo, dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y solo si sus núcleos son homeomorfos. En particular, todos los núcleos de un espacio son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Una equivalencia homotópica $f : X \longrightarrow Y$ cumple que existe g tal que $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ y $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$; por la proposición anterior son iguales a la identidad y por tanto f es homeomorfismo. $\square$

Capítulo 2

Homotopía débil

1. Complejo del orden y espacio de caras

Es bien sabido que todo espacio topológico es aproximable por un CW-complejo con los mismos grupos fundamentales [2, p. 353]. Además, todo espacio compacto y localmente contráctil (como las variedades compactas o los CW-complejos finitos) es un retracto por deformación de la realización de un complejo simplicial finito [2, p. 525]. En este capítulo tratamos la Teoría de McCord [4], que relaciona la homotopía de los espacios finitos con la de los complejos simpliciales. Esta relación aparentemente ingenua, unida al comentario anterior, abre una amplísima parte de la Teoría de la Homotopía a ser estudiada a través de los espacios finitos. La relevancia de esta teoría comienza a ser patente: ofrece medios nuevos y combinatorios, accesibles y refrescantes, para tratar problemas conocidos desde nuevas perspectivas.

Definición 2.1. Llamaremos **equivalencia homotópica débil** a una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f_* : \Pi_0(X, x_0) \longrightarrow \Pi_0(Y, f(x_0))$ es biyectiva y

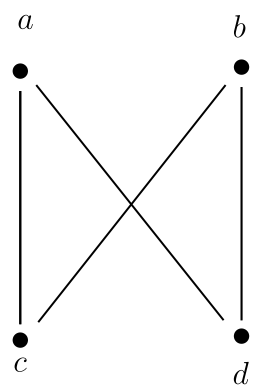
$$f_* : \Pi_n(X, x_0) \longrightarrow \Pi_n(Y, f(x_0))$$

es un isomorfismo para $n \geq 1$.

Esta noción, sin embargo, no establece una relación de equivalencia entre espacios, puesto que no es simétrica: el hecho de que haya una equivalencia homotópica débil de $X \xrightarrow{f} Y$ no implica que la haya en sentido contrario. Por ejemplo, podemos estudiar el caso del pseudocírculo

$$S^1 = \Big(\{a, b, c, d\}, T = \langle\{c\}, \{d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\rangle\Big),$$

que se representa de manera sencilla mediante su diagrama de Hasse



Para este espacio, veremos que existe una función $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow S^1$ que es una equivalencia homotópica débil, pero no existe ninguna en sentido contrario, puesto que cualquier función continua $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es constante: como S^1 es conexo por caminos por la Proposición 1.2 y f es continua, su imagen tiene que ser conexa por caminos. Al estar compuesta por 4 puntos en la circunferencia, estos tienen que coincidir, de tal forma que f es constante.

La existencia de una homotopía débil de $\mathbb{S}^1$ en el pseudocírculo es un hecho que se deriva de otro más general: para cada espacio finito podemos encontrar un complejo simplicial y una equivalencia homotópica débil de este en el espacio.

Para hacer la relación simétrica, hace falta añadir un componente adicional a la homotopía débil sin perder los isomorfismos entre grupos fundamentales. Esto se hace mediante la siguiente

DEFINICIÓN 2.2. Dos espacios topológicos X e Y son **débilmente homotópicamente equivalentes** (o tienen el mismo tipo de homotopía débil) si existe una sucesión de espacios $X = X_0$, X_1,..., $X_n = Y$ tales que entre cada X_i y X_{i+1} existe una equivalencia homotópica débil en alguno de los sentidos. Lo denotaremos por $X \overset{we}{\approx} Y$.

OBSERVACIÓN 2.1. Como la composición de equivalencias débiles lo sigue siendo, de la definición anterior podemos eliminar todos los pasos con equivalencias $X_{i-1} \longrightarrow X_i \longrightarrow X_{i+1}$, quedando por tanto algo que recuerda a una cenefa de equivalencias homotópicas, $X \longrightarrow X_1 \longleftarrow X_2 \longrightarrow \ldots \longleftarrow X_{n-1} \longrightarrow Y$. Es obvio que esta sí es una relación de equivalencia.

Para demostrar que cierta aplicación es una equivalencia homotópica débil aplicaremos el siguiente teorema de McCord:

DEFINICIÓN 2.3. Sea X un espacio y $\mathcal{U}$ un recubrimiento abierto. Diremos que $\mathcal{U}$ es un **recubrimiento abierto básico** si $\mathcal{U}$ es base para alguna topología en X, es decir, si dados $U, V \in \mathcal{U}$, $x \in U \cap V$, entonces existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

TEOREMA 2.1 (McCord). *Dada una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$, si $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto básico de Y, f es una equivalencia homotópica débil si y solo si las restricciones*

$$f\Big|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \longrightarrow U$$

lo son para cada $U \in \mathcal{U}$.

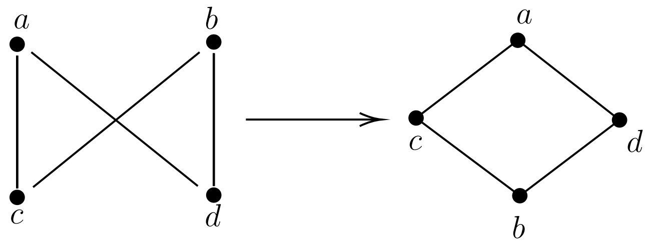
Ahora, vamos a estudiar cómo asociar un complejo simplicial[1] a un espacio topológico de tal forma que se mantenga el tipo de homotopía débil:

DEFINICIÓN 2.4. Dado un espacio X finito y T_0, el **complejo del orden** $\mathcal{K}(X)$ es el que tiene por vértices los puntos de X y por símplices a las cadenas no vacías. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, se define la **función simplicial asociada** $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(Y)$ por $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$.

OBSERVACIÓN 2.2. La función simplicial asociada está bien definida como aplicación simplicial porque es continua, así que preserva el orden y por tanto las cadenas, que son los símplices en los complejos asociados.

EJEMPLO 2.1. Por ejemplo, podemos tomar el pseudocírculo y su símplice asociado

[1]Introducimos los conceptos fundamentales necesarios para el desarrollo de la teoría en el Apéndice A.



En los próximos resultados nos referiremos a conceptos del Apéndice A como el soporte de un $\alpha \in \mathcal{K}(X)$ o la realización geométrica $|\mathcal{K}(X)|$ de un complejo simplicial.

Teorema 2.2. *Sea X un espacio topológico finito y T_0. La* ***aplicación de McCord*** *definida como*

$$\begin{array}{cccc} \mu_X : & |\mathcal{K}(X)| & \longrightarrow & X \\ & \alpha & \mapsto & \min \operatorname{sop}(\alpha) \end{array}$$

es una equivalencia homotópica débil.

Demostración. Para demostrarlo usaremos el Teorema de McCord con el recubrimiento abierto dado por la base minimal del espacio. Tendremos que probar que μ_X es continua, para lo que veremos que $\mu_X^{-1}(U_x)$ es abierto para todo $x \in X$, y que las restricciónes de μ_X a estos mismos conjuntos son equivalencias homotópicas débiles, demostrando que los $\mu_X^{-1}(U_x)$ tienen un retracto por deformación contráctil, y como U_x también es contráctil (tiene máximo), entonces

$$\left(\mu_X\Big|_{\mu_X^{-1}(U_X)}\right)_* : \Pi_n(\mu_X^{-1}(U_x)) \longrightarrow \Pi_n(U_x)$$

solo puede ser el homomorfismo trivial, que es isomorfismo entre los grupos triviales. Sea $x \in X$ y consideremos U_x. Vamos a probar que

$$\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |\mathcal{K}(X \setminus U_x)| = M.$$

Sea $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$, entonces $\mu_x(\alpha) \in U_x$, es decir, $\min \operatorname{sop}(\alpha) \in U_x$ y por tanto al menos un elemento de $\operatorname{sop}(\alpha)$ pertenece a U_x, de donde $\alpha \notin |\mathcal{K}(X \setminus U_x)|$. Recíprocamente, si α no pertenece a dicho conjunto, existe al menos un $y \in \operatorname{sop}(\alpha)$ tal que $y \in U_x$. Esto implica que $\mu_X(\alpha) = \min \operatorname{sop}(\alpha) \leq y \in U_x$ como queríamos demostrar.

Ahora vamos a ver que $|\mathcal{K}(U_x)|$ es un retracto por deformación de M. Si tomamos $\alpha \in M$, es seguro que hay algún punto de U_x en $\operatorname{sop}(\alpha)$, puesto que hemos quitado exactamente los puntos cuyo soporte está formado por puntos que no están en U_x. Entonces podremos escribir

$$\alpha = \sum_i \lambda_i u_i + \sum_j \mu_j v_j \quad u_i \in U_x, v_j \notin U_x, \ \sum_i \lambda_i + \sum_j \mu_j = 1$$

y reescribiendo,

$$\alpha = \sum_j \lambda_j \underbrace{\left[\sum_i \frac{\lambda_i}{\sum_j \lambda_j} u_i\right]}_{u} + \sum_j \mu_j \underbrace{\left[\sum_i \frac{\mu_i}{\sum_j \mu_j} v_i\right]}_{v}.$$

Hemos descompuesto $\alpha = su + (1-s)v$ donde $u \in |\mathcal{K}(U_x)|$, $v \in |\mathcal{K}(X \setminus U_x)|$ y $s \in (0,1]$. Introducimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} r: & |\mathcal{K}(X)| \setminus |\mathcal{K}(X \setminus U_x)| & \longrightarrow & |\mathcal{K}(U_x)| \\ & \alpha & \mapsto & u \end{array}$$

y observamos que está bien definida, puesto que las coordenadas de α determinan un solo u. Para ver la continuidad en $\alpha \in M$, sea $\varepsilon > 0$ y el cardinal de X igual a n, y $\beta \in M$ cuya expresión equivalente a la de α viene dada por

$$\beta = \sum_i \theta_i u_i + \sum_i \sigma_i v_i.$$

Entonces

$$d(\alpha, \beta) < \delta \iff \sqrt{\sum_i (\lambda_i - \theta_i)^2 + \sum_i (\mu_i - \sigma_i)^2} < \delta,$$

de donde

$$|\lambda_i - \theta_i| < \delta.$$

Esto a su vez implica que

$$\left| \sum_i \lambda_i - \sum_i \theta_i \right| < \sum_i |\lambda_i - \theta_i| < n\delta.$$

Con estas cotas, y denotando $L = \sum_i \lambda_i$ y $T = \sum_i \theta_i$, conseguimos

$$d(r(\alpha), r(\beta))^2 = \sum_i \left(\frac{\lambda_i}{L} - \frac{\theta_i}{T} \right)^2 = \frac{1}{L^2T^2} \sum_i (T\lambda_i - L\theta_i)^2 =$$
$$\frac{1}{L^2T^2} \sum_i (T\lambda_i - T\theta_i + T\theta_i - L\theta_i)^2 = \frac{1}{L^2T^2} \sum_i (T(\lambda_i - \theta_i) + (T-L)\theta_i)^2 \leq$$
$$\frac{1}{L^2T^2} \sum_i \left[T^2(\lambda_i - \theta_i)^2 + (T-L)^2\theta_i^2 + 2T\theta_i |\lambda_i - \theta_i||T-L| \right] \leq$$
$$\frac{1}{L^2T^2} \left[nT^2\delta^2 + n^2\delta^2 \sum_i \theta_i^2 + 2Tn\delta^2 \sum_i \theta_i \right] \leq \frac{n(n+3)}{L^2}\delta^2$$

y si

$$\delta^2 < \varepsilon^2 \frac{L^2}{n(n+3)},$$

concluimos que

$$d(r(\alpha), r(\beta)) < \varepsilon.$$

Para ver que es un retracto, necesitamos una homotopía $i \circ r \simeq \mathrm{id}_M$:

$$\begin{array}{rccc} H: & M \times I & \longrightarrow & M \\ & (\alpha, t) & \mapsto & (1-t)\alpha + tu \end{array}$$

donde $r(\alpha) = u$. Si tomamos $\beta \in M$ y adoptamos la notación anterior, $s, r \in I$, podemos comprobar la continuidad de H de la misma forma que antes:

$$d(H(\alpha,t),H(\beta,s))^2 =$$
$$\sum_i \left[(1-t)\lambda_i - (1-s)\theta_i + \frac{t}{L}\lambda_i - \frac{t}{T}\theta_i\right]^2 + \sum_i \left[(1-t)\mu_i - (1-s)\sigma_i\right]^2 =$$
$$\sum_i \left[(1-t)(\lambda_i - \theta_i) + (s-t)\theta_i + \frac{t}{L}(\lambda_i - \theta_i) + \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{T}\right) t\theta_i\right]^2 +$$
$$\sum_i \left[(1-t)(\mu_i - \sigma_i) + (s-t)\sigma_i\right]^2$$

y podemos acotar igualmente para demostrar la continuidad de H.

Hemos demostrado que $|\mathcal{K}(U_x)|$ es un retracto por deformación de $M = \mu_X^{-1}(U_x)$. Al ser x máximo de U_x, cualquier símplice $\sigma \in \mathcal{K}(U_x)$ cumple que $\sigma \cup \{x\}$ también es símplice, por lo que el complejo es un cono simplicial y por la Proposición A.2 $|\mathcal{K}(U_x)|$ es contráctil. Los comentarios iniciales concluyen la demostración. $\square$

Observación 2.3. Dada una función continua f, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{|\mathcal{K}(f)|} & |\mathcal{K}(Y)| \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_X} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_Y} \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \end{array}$$

es conmutativo, puesto que

$$f(\mu_X(\alpha)) = f(\text{mín}\,\text{sop}(\alpha)) = f(\text{mín}_i\, v_i) = \text{mín}_i\, f(v_i) = \mu_Y(\sum_i \alpha_i f(v_i)) = \mu_Y(|\mathcal{K}(f)|(\alpha))$$

porque f preserva el orden.

Tenemos entonces el siguiente esquema:

$$f \circ \mu_X = \mu_Y \circ |\mathcal{K}(f)|$$

en el que μ_X y μ_Y son homotopías débiles. Por la propiedad 2-de-3, si f también es equivalencia débil, entonces $|\mathcal{K}(f)|$ también lo es, y de hecho, por el Teorema de Whitehead [2, p. 346], $|\mathcal{K}(f)|$ es equivalencia homotópica. El camino de vuelta es el mismo, de donde f **es equivalencia débil si y solo si $\mathcal{K}(f)$ es equivalencia homotópica**.

Ahora queremos obtener un resultado parecido partiendo de un complejo simplicial. Para ello, tenemos que asociarle primero un espacio finito y luego comprobar que son débilmente homotópicamente equivalentes. Lo haremos mediante el funtor $\mathcal{X}(\cdot)$, que asocia a cada complejo el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{X}(K)$ de símplices de K ordenados por la inclusión. Este espacio se conoce como **espacio de caras** del complejo K. A las aplicaciones simpliciales $\varphi : K \longrightarrow L$ les asocia aplicaciones continuas

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{X}(\varphi): & \mathcal{X}(K) & \longrightarrow & \mathcal{X}(L) \\ & \sigma & \mapsto & \varphi(\sigma) \end{array}$$

¿Qué complejo simplicial obtendremos al hacer $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$? Los vértices serán los puntos de $\mathcal{X}(K)$, que son los símplices de K, y los símplices las cadenas de $\mathcal{X}(K)$, que son las cadenas de símplices de K. Esta es exactamente la descripción de la subdivisión baricéntrica de K. Como existe un homeomorfismo s_K entre $K' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ y K, definimos la aplicación de McCord

$$\begin{array}{rccc} \mu_K : & |K| & \longrightarrow & \mathcal{X}(K) \\ & \alpha & \mapsto & \mu_K(\alpha) = \mu_{\mathcal{X}(K)} \circ s_K^{-1}(\alpha). \end{array}$$

Claramente, esta aplicación es una equivalencia homotópica débil, puesto que tanto $\mu_{\mathcal{X}(K)}$ como s_K^{-1} lo son. Para aproximarnos a un resultado parecido al de la observación anterior, tenemos la siguiente

Proposición 2.1. *Dada una aplicación simplicial $\varphi : K \longrightarrow L$ entre complejos, el siguiente diagrama conmuta en homotopía:*

$$\begin{tikzcd} {|K|} \arrow[r, "|\varphi|"] \arrow[d, "\mu_K"] & {|L|} \arrow[d, "\mu_L"] \\ \mathcal{X}(K) \arrow[r, "\mathcal{X}(\varphi)"] & \mathcal{X}(L) \end{tikzcd}$$

Demostración. Se trata de ver que

$$\mathcal{X}(\varphi) \circ \mu_{\mathcal{X}(K)} \circ s_K^{-1} = \mathcal{X}(\varphi) \circ \mu_K = \mu_L \circ |\varphi| = \mu_{\mathcal{X}(L)} \circ s_L^{-1} \circ |\varphi|.$$

De la observación anterior tenemos que $f \circ \mu_X = \mu_Y \circ |\mathcal{K}(f)|$, así que

$$\mathcal{X}(\varphi) \circ \mu_{\mathcal{X}(K)} \circ s_K^{-1} = \mu_{\mathcal{X}(L)} \circ |\mathcal{K}(\mathcal{X}(\varphi))| \circ s_K^{-1} = \mu_{\mathcal{X}(L)} \circ |\varphi'| \circ s_K^{-1}.$$

Solo resta comprobar que $|\varphi'|s_K^{-1} \approx s_L^{-1}|\varphi|$, o equivalentemente, $s_L \circ |\varphi'| \approx |\varphi| \circ s_K$.

Sea $s \in K'$ símplice, entonces $s = \{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ cadena de símplices $\sigma_1 \subsetneq \sigma_2 \subsetneq ... \subsetneq \sigma_n$ de K. Dado $\alpha = \sum_i \alpha_i \sigma_i \in \overline{s}$, $s_k(\alpha) = \sum_i \alpha_i \mathrm{b}(\sigma_i)$. Como $\sigma_i \subseteq \sigma_n$, $\mathrm{b}(\sigma_i) \subseteq \overline{\sigma_n}$ y por tanto $s_k(\alpha) \in \overline{\sigma_n} \subseteq \overline{K}$, de donde $|\varphi|s_k(\alpha) \in \overline{\varphi(\sigma_n)} \subseteq |L|$. De la misma forma, $|\varphi'(\alpha)| = \{\varphi(\sigma_1), ..., \varphi(\sigma_n)\}$, así que $s_L|\varphi'|(\alpha) \in \overline{\varphi(\sigma_n)}$. Podemos entonces definir la homotopía

$$\begin{array}{rccc} H : & I \times |K'| & \longrightarrow & |L| \\ & (t, \alpha) & \mapsto & (1-t)s_L \circ |\varphi'|(\alpha) + t|\varphi| \circ s_K(\alpha) \end{array}$$

Esta función es continua por la propiedad universal de la topología producto y es la homotopía que buscábamos. $\square$

Corolario 2.1. *Si $\varphi : K \longrightarrow L$ es una aplicación simplicial entre complejos finitos, entonces $|\varphi|$ es una equivalencia homotópica si y solo si $\mathcal{X}(\varphi)$ es una equivalencia homotópica débil.*

Demostración. Del teorema anterior sabemos que $\mathcal{X}(\varphi) \circ \mu_K \approx \mu_L \circ |\varphi|$. Además, el Teorema de Whitehead afirma que $|\varphi|$ es equivalencia homotópica si y solo si es equivalencia débil y este hecho equivale a que $\mu_L \circ |\varphi|$ también lo sea por la propiedad 2-de-3. Como ser equivalencia débil se conserva bajo homotopía, $|\varphi|$ es débil si y solo si $\mathcal{X}(\varphi) \circ \mu_K$ también lo es, y por la propiedad 2-de-3 de nuevo, esto equivale a que $\mathcal{X}(\varphi)$ sea equivalencia débil. $\square$

2. Construcciones con espacios finitos

En esta sección vamos a definir nociones equivalentes a las sumas, productos y cocientes topológicos en espacios finitos y analizar sus propiedades.

2.1. La suma ordinal. La suma ordinal de dos espacios topológicos se define como el espacio

$$X * Y = X \sqcup_{X\times Y\times[0,1]\to X} (X\times Y\times[0,1]) \sqcup_{X\times Y\times[0,1]\to Y} Y,$$

es decir, en el producto $X\times Y\times[0,1]$ identificamos el nivel 0 con X y el nivel 1 con Y.

Se puede definir una noción de suma ordinal para complejos simpliciales que consiga

$$|K * L| \approx |K| * |L|$$

con tal de hacer

$$K * L = K \cup L \cup \{\sigma\cup\tau \mid \sigma\in K, \tau\in L\}.$$

En espacios finitos, una definición satisfactoria conseguiría que

$$\mathcal{K}(X \circledast Y) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(Y).$$

Para que esto sea cierto, es necesario que en $X\circledast Y$ estén todas las cadenas que representan los símplices $\sigma\cup\tau$ de la definición anterior. Estas se consiguen tomando todas las cadenas de X y añadiendo a estas las de Y; en realidad, estamos considerando el espacio $X\sqcup Y$, manteniendo los órdenes anteriores y estableciendo $x\leq y$ para todo $x\in X$ e $y\in Y$, y esta es la definición.

Ejemplo 2.2. El **cono** de un espacio finito se define como $\mathbb{C}(X) = X\circledast D^0$, es decir, su suma ordinal con un conjunto de un solo punto. Análogamente, se define el **cono simplicial**[2] de un complejo K como su suma con un vértice a que no pertence a K, y se denota aK. Se tiene

$$\mathcal{K}(\mathbb{C}(X)) = \mathcal{K}(X\circledast D^0) = \mathcal{K}(X) * \mathcal{K}(D^0) = a\mathcal{K}(X)$$

y además

$$|\mathcal{K}(\mathbb{C}(X))| = |a\mathcal{K}(X)| \approx |\{a\}| * |\mathcal{K}(X)| = \mathbb{C}(\mathcal{K}(X)).$$

De la misma forma, definimos la **suspensión** de un espacio como su suma ordinal con un conjunto de dos puntos no relacionados.

Proposición 2.2. *Si X e Y son espacios finitos T_0, entonces $X\circledast Y$ es contráctil si y solo si lo es X o lo es Y.*

Demostración. Supongamos que X es contráctil. Entonces su núcleo es homeomorfo a un punto. Es decir, existe una cadena de espacios

$$\{x_1\} = X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \dots \subsetneq X_n = X$$

tales que de cada iteración a la anterior se pasa eliminando un punto colapsable x_i. Observamos que también es colapsable en $X_i\circledast Y$: los puntos de Y no pueden estar entre él y sus superiores en el diagrama de Hasse, puesto que son mayores que ambos. Esto implica que $X\circledast Y$ se retrae a $\{x_1\}\circledast Y$, que es contráctil por tener mínimo. Si Y es contráctil, procedemos análogamente.

Recíprocamente, si $X\circledast Y$ es contráctil, tenemos una cadena

$$\{z_1\} = X_1\circledast Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n\circledast Y_n = X\circledast Y$$

[2]Esta definición es coherente con la Definición A.2, es decir, el cono simplicial de un complejo es un cono simplicial como complejo.

de espacios a los que vamos quitando puntos colapsables z_i en cada paso. Si $z_i \in X_i$, o bien es un punto maximal de X_i e Y_i tiene un mínimo, o bien es colapsable en X_i. De igual forma, si $z_i \in Y_i$, o bien es minimal en Y_i y X_i tiene un máximo, o bien es colapsable en Y_i. En los primeros casos, podemos retraer X_i a X_{i-1} e Y_i a Y_{i-1}. Si alguno tiene máximo o mínimo, es contráctil. En ambas situaciones podemos retraer o bien X o bien Y hasta obtener un punto, como queríamos demostrar. □

2.2. El producto. Cuando hacemos el producto de dos espacios finitos X e Y, una base del nuevo espacio viene dada por los productos de abiertos de los espacios anteriores. Esto implica que $U_{(x,y)} = U_x \times U_y$, y por tanto $(x, y) \leq (x', y')$ si y solo si $x \leq x'$ e $y \leq y'$.

Para estudiar el tipo de homotopía del producto tenemos la siguiente

Proposición 2.3. *Si X e Y son espacios finitos con núcleos X_c e Y_c respectivamente, entonces $X_c \times Y_c$ es el núcleo de $X \times Y$.*

Demostración. Primero, observamos que si A es un retracto por deformación de X, entonces $A \times Y$ lo es de $X \times Y$. Es sencillo ver que, si $r : X \longrightarrow A$ es el retracto, la función $h : X \times Y \longrightarrow A \times Y$ definida como $h = (r, \mathrm{id}_Y)$ también lo es.

Esto implica que $X_c \times Y$ es retracto de $X \times Y$, y usándolo de nuevo, que $X_c \times Y_c$ lo es de $X \times Y$. Solo resta probar que es minimal: si tomamos $(x, y) \in X_c \times Y_c$ tal que solo cubre a un elemento, entonces $U_x \times U_y \setminus \{(x, y)\}$ tiene un máximo (x', y'). Esto implica que x cubre a x' en X_c e y cubre a y' en Y_c. Como ambos son minimales, hay otros x'' e y'' cubiertos por x e y respectivamente, que dan a su vez puntos (x'', y) y (x, y'') cubiertos por (x, y), contradiciendo lo que habíamos supuesto. □

2.3. El cociente. Dado un subespacio A de un espacio finito T_0, sabemos que el cociente X/A no tiene por qué ser T_0. Vamos a denotar $\overline{A} = \{x \in X \mid \exists a \in A\ x \geq a\}$ la **adherencia** de A y por $\underline{A} = \{x \in X \mid \exists a \in A\ x \leq a\}$ a la **envoltura abierta** de A, que también cumple $\underline{A} = \bigcup_{a \in A} U_a$.

Para analizar las propiedades básicas del nuevo orden en el cociente y ser capaces de caracterizarlas, tenemos que entender quiénes son los abiertos minimales en X/A con respecto a los de X.

Proposición 2.4. *Sea $\pi : X \longrightarrow X/A$ la proyección canónica y $[x] = \pi(x)$. Si $x \in \overline{A}$, entonces $U_{[x]} = \pi(U_x \cup \underline{A})$, y si $x \notin \overline{A}$, entonces $U_{[x]} = \pi(U_x)$.*

Demostración. Pongámonos en el primer caso. El conjunto $\pi(U_x \cup \underline{A})$ es abierto porque $\pi^{-1}(\pi(U_x \cup \underline{A})) = U_x \cup \underline{A}$. En efecto, si $[y] \in \pi(U_x \cup \underline{A})$, entonces

1. o bien $[y] = [z]$ donde $z \in U_x \cup \underline{A} \setminus A$, en cuyo caso $y = z$,
2. o bien $[y] = [a]$ para algún $a \in A$, en cuyo caso $y \in A$.

En ambos casos $y \in U_x \cup \underline{A}$. Como es abierto que contiene a x, se tiene que $U_{[x]} \subseteq \pi(U_x \cup \underline{A})$. Para la otra inclusión, si $[y] \in \pi(U_x \cup \underline{A})$, solo hace falta ver el caso $y \in \underline{A}$: $\exists a, b \in A$ tales que $a \leq x$ e $y \leq b$, de donde $[y] \leq [b] = [a] \leq [x]$ por la continuidad de la proyección, como queríamos demostrar.

Si $x \notin \overline{A}$, entonces $\pi^{-1}(\pi(U_x)) = U_x$ y el razonamiento anterior es trivial. □

Ya estamos en condiciones de analizar el orden del cociente: supongamos que $[x] \leq [y]$. Entonces sabemos que $[x] \in U_{[y]}$. Por la anterior proposición,

- si $y \in \overline{A}$, esto significa que $[x] \in \pi(U_y \cup \underline{A})$, por lo que $x \in U_y \cup \underline{A}$ y tenemos que $x \leq y$ o bien existe un $a \in A$ tal que $x \leq a$;

- si $y \notin \overline{A}$, entonces $[x] \in \pi(U_y)$ y $x \leq y$.

Y se tiene una suerte de recíproco: si $x \leq y$ o existen $a, b \in A$ tales que $x \leq b$ y $a \leq y$, entonces $[x] \leq [y]$.

PROPOSICIÓN 2.5. *En el contexto de la proposición anterior, $[x] \leq [y]$ si y solo si $x \leq y$ o existen $a, b \in A$ tales que $x \leq a$ y $b \leq y$.*

Inmediatamente obtenemos una forma de determinar cuándo el cociente es T_0:

COROLARIO 2.2. *Sea X un espacio finito T_0 y $A \subseteq X$ un subespacio. Entonces ${}^{X}/_{A}$ es T_0 si y solo si no existen $x \in X \setminus A$ y $a, b \in A$ tales que $a < x < b$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el cociente no es T_0. Entonces existen clases distintas tales que $[x] \leq [y]$ y $[y] \leq [x]$. Por la proposición anterior, $x \leq y$ o existen $a, b \in A$ tales que $x \leq a$ y $b \leq y$; además, $y \leq x$ o existen $a', b' \in A$ con $a' \leq y$, $b' \leq x$. Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$ contra la hipótesis. En cualquiera de los otros casos, tenemos que,

- o bien $x \leq y$, $x \leq a'$ y $b' \leq y$, de donde $a' \leq x \leq y \leq b'$ y como x e y no pueden pertenecer ambos a A porque serían de la misma clase, se tiene lo que buscábamos;
- o bien $x \geq y$, $x \leq a$ y $b \leq y$, que es análogo al caso anterior;
- o bien $a' \leq x \leq a$ y $b \leq y \leq b'$, y como los dos no pertenecen a A, de nuevo obtenemos lo deseado.

Para la otra implicación basta observar que $a < x < b$ significa, pasando al cociente, que $[a] < [x] < [a] = [b]$, lo cual evidencia que no es T_0. $\square$

3. La subdivisión baricéntrica

Para completar el estudio de los funtores $\mathcal{X}$ y $\mathcal{K}$, resta estudiar la composición $\mathcal{X}(\mathcal{K}(\cdot))$. En el caso $\mathcal{K} \circ \mathcal{X}$ vimos que el complejo simplicial obtenido era la subdivisión baricéntrica del original, y con esto motivamos la siguiente

DEFINICIÓN 2.5. Llamamos **subdivisión baricéntrica de un espacio finito** X al espacio $X' = \mathcal{X}(\mathcal{K}(X))$.

OBSERVACIÓN 2.4. La relación más obvia entre X y su subdivisión baricéntrica es que son débilmente homotópicamente equivalentes, puesto que se tiene el diagrama de equivalencias débiles

$$\begin{tikzcd} & {|\mathcal{K}(X)|} \arrow[dl, "\mu_X"'] \arrow[dr, "\mu_{\mathcal{K}(X)}"] & \\ X & & \mathcal{X}(\mathcal{K}(X)) = X'. \end{tikzcd}$$

Sabemos que esto, en general, no es equivalente a que exista una homotopía débil entre ambos, aunque sería interesante saber si en el caso particular de espacios y sus subdivisiones baricéntricas se da la equivalencia.

EJEMPLO 2.3. Empezamos analizando un ejemplo sencillo: el pseudocírculo. Sabemos que su complejo del orden, $\mathcal{K}(S^1)$, es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$. En concreto, es el complejo

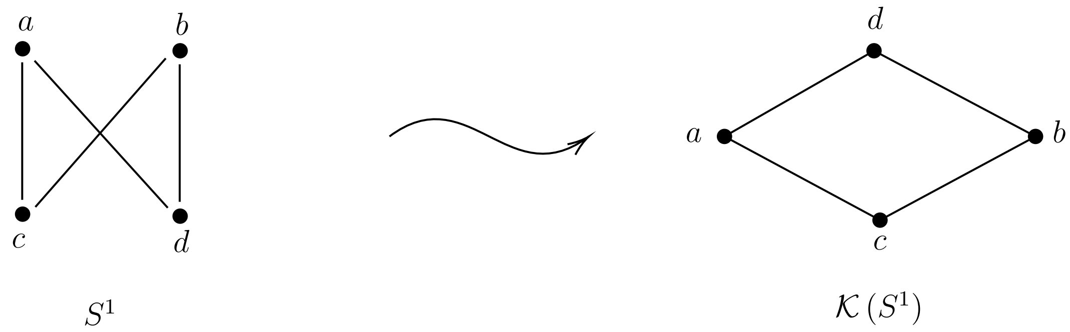


FIGURA 2.1. Complejo del orden del pseudocírculo S^1

Para calcular de nuevo su espacio de caras, recordamos que los puntos son los símplices y están ordenados por la inclusión, así que tenemos 8 vértices relacionados de la siguiente forma:

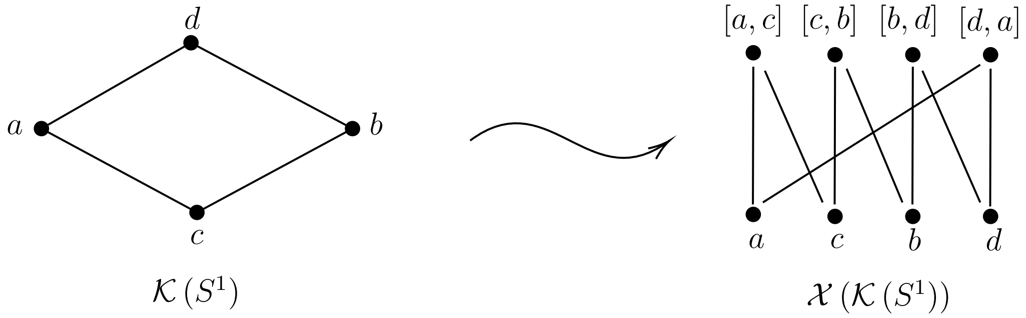


FIGURA 2.2. Espacio de caras del complejo $\mathcal{K}(S^1)$.

Demostramos que tampoco hay ninguna equivalencia débil de $X = S^1$ en X': supongamos que f es una función continua entre ambos espacios. Como X es conexo por caminos, su imagen también lo es. Si los puntos a o b van a un punto en la parte inferior de X', la preservación del orden obliga a c y d a ir al mismo punto, haciendo a f constante y contrariando que f induzca isomorfismos entre los grupos fundamentales, que son no triviales. El caso opuesto, en que c o d van a un punto superior, es análogo. Esto implica que la imagen de los puntos superiores son otros puntos superiores, e igualmente con los inferiores. Supongamos que a va a un punto $[a, c]$. Entonces $f(b)$ tiene que ser mayor que $f(c)$ y $f(d)$, lo cual determina completamente su imagen, haciendo que el diagrama de Hasse sea uno de los siguientes:

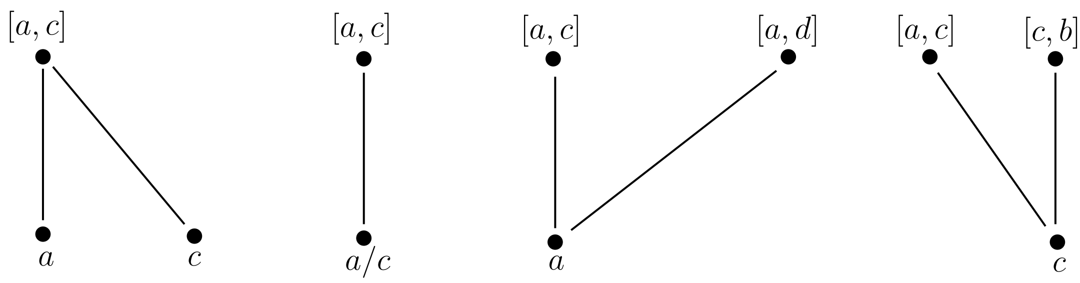


FIGURA 2.3. Diagramas de Hasse de la imagen según las posibles imágenes de $f(c)$ y $f(d)$,

Este argumento se puede repetir cualquiera que sea $f(a)$, y por tanto la imagen de f, si no es constante, siempre es contráctil. Así, cualquier aplicación continua de X en X' tiene imagen contráctil, y por tanto no es equivalencia débil.

Con todo, sí que podemos encontrar una equivalencia homotópica débil desde X' hasta X. Cambiamos la notación por simplicidad a

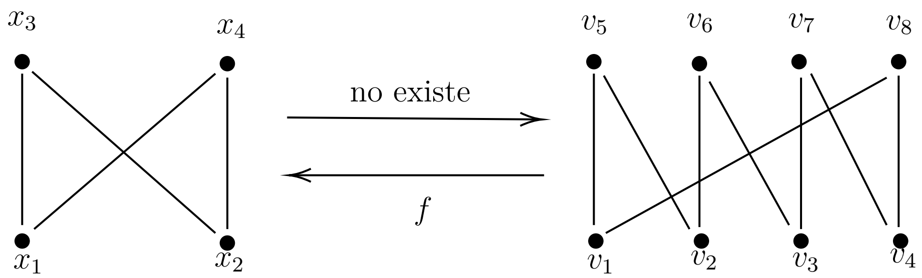


Figura 2.4. El pseudocírculo y su subdivisión baricéntrica.

Analicemos la aplicación f definida por

$$\begin{array}{llll} f(v_1) = x_1 & f(v_2) = x_2 & f(v_3) = x_1 & f(v_4) = x_2 \\ f(v_5) = x_3 & f(v_6) = x_4 & f(v_7) = x_3 & f(v_8) = x_4 \end{array}$$

Para probar que es equivalencia homotópica débil, hemos de probar que es continua y, por el Teorema de McCord 2.1, que su restricción a la preimagen de cada U_x es débil para todo $x \in X$. Sabemos que

$$\begin{array}{ll} f^{-1}(U_{x_1}) = f^{-1}(x_1) = \{v_1, v_3\} & f^{-1}(U_{x_2}) = \{v_2, v_4\} \\ f^{-1}(U_{x_3}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\} & f^{-1}(U_{x_4}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_8\}, \end{array}$$

y representado en diagramas queda

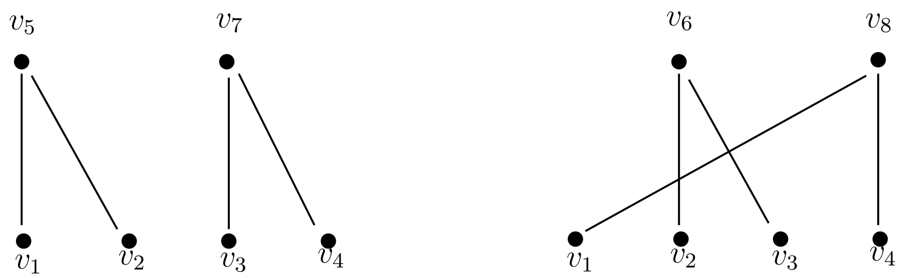


Figura 2.5. Preimágenes de los abiertos minimales.

Como en todos los casos tanto el entorno como su preimagen son contráctiles, tenemos que f es equivalencia débil trivialmente.

Vale la pena comentar que antes de saber que no podía haber una equivalencia homotópica débil entre ambos, podíamos saber que tampoco había una equivalencia homotópica: ambos son minimales (no tienen puntos colapsables) y por el Teorema de Clasificación 1.2 serían homeomorfos con distinta cardinalidad.

En realidad, la situación del ejemplo anterior se puede extrapolar a cualquier espacio finito X y su subdivisión baricéntrica.

Teorema 2.3. *Sea X un espacio finito T_0. Siempre existe una equivalencia homotópica débil de la subdivisión baricéntrica del espacio en sí mismo dada por $f(C) = \max C$ para cualquier cadena $C \subseteq X$.*

Demostración. Empecemos viendo la continuidad. Si dos elementos $C_1, C_2 \in X'$ son comparables, pongamos $C_1 \leq C_2$, significa que $C_1 \subseteq C_2$. Esto a su vez implica que el máximo de C_1 es menor que el de C_2 y pertenece a C_2, así que ambos son comparables y $f(C_1) = \max C_1 \leq \max C_2 = f(C_2)$, lo que prueba la continuidad.

Para probar que es eqivalencia débil, usamos el Teorema de McCord 2.1. Si tomamos un $U_x \subseteq X$ y consideramos $f^{-1}(U_x)$, este conjunto está formado por las cadenas de X cuyos máximos son los puntos de U_x. Formalmente,

$$f^{-1}(U_x) = \{C \text{ cadena} \mid \max C \in U_x\}.$$

Observamos que dicho conjunto lo integran en realidad todas las cadenas de U_x, puesto que U_x es un conjunto de bajada, es decir, $f^{-1}(U_x) = \mathcal{X}(\mathcal{K}(U_x))$. Si bien, como $U_x = \{x\} \circledast U_x$, tenemos

$$\mathcal{K}(U_x) = \mathcal{K}(\{x\} \circledast U_x \setminus \{x\}) = \mathcal{K}(\{x\}) * \mathcal{K}(U_x \setminus \{x\}) = x\mathcal{K}(U_x \setminus \{x\}).$$

Concluimos con el siguiente lema:

Lema 2.1. *El espacio de caras $\mathcal{X}(aK)$ de un cono simplicial aK siempre es contráctil.*

Demostración del lema. La aplicación constante $g : \mathcal{X}(aK) \longrightarrow \{a\}$ cumple que es homótopa a la identidad $\mathrm{id}_{\mathcal{X}(aK)}$ a través de la función $h : \mathcal{X}(aK) \longrightarrow \mathcal{X}(aK)$ dada por $h(\sigma) = \sigma \cup \{a\}$, de tal forma que $\mathrm{id}_{\mathcal{X}(K)} \leq h \geq g$. $\square$

$\square$

Observación 2.5. Una observación interesante es que el argumento de la demostración anterior prueba que para cualquier espacio finito X con máximo, X' es contráctil. Este resultado se puede mejorar, y de hecho se tiene que si X es contráctil, X' también lo es.

Capítulo 3

Dos casos particulares

Vamos a analizar dos casos de espacios finitos y sus respectivas subdivisiones baricéntricas aplicando toda la teoría desarrollada en el trabajo. El primer espacio tiene diagrama de Hasse

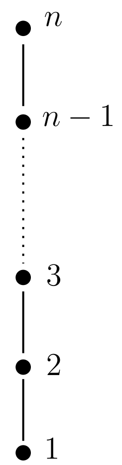


Figura 3.1. Diagrama de Hasse de X_n.

y se puede describir mediante el conjunto parcialmente ordenado $X_n = \{1, ..., n\}$. Para calcular su complejo del orden podemos observar que cualquier subconjunto de X_n es una cadena de dicho espacio, y por tanto un símplice del complejo $\mathcal{K}(X_n)$. El complejo simplicial abstracto cuyos símplices son todos los subconjuntos de vértices posibles se llama **símplice estándar** y su realización geométrica es homeomorfa a la bola unidad cerrada en $\mathbb{R}^{n-1}$.

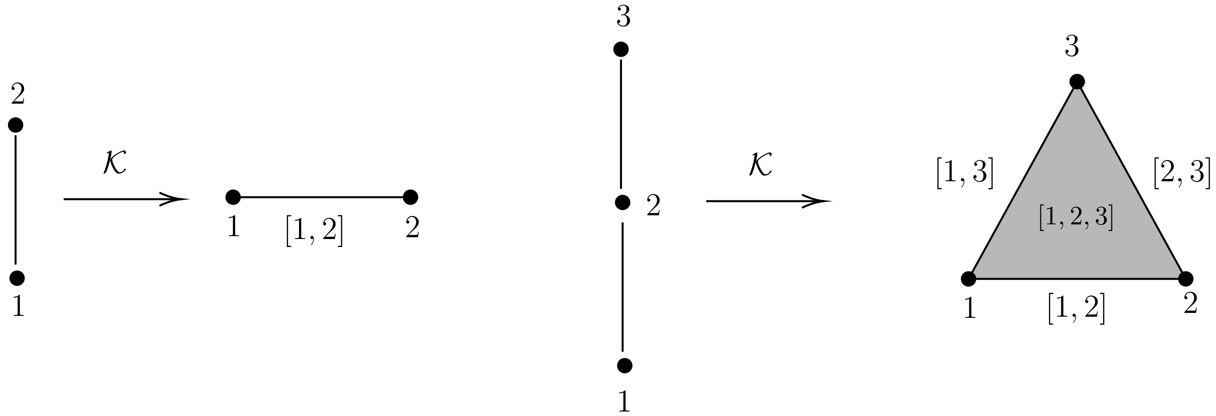


Figura 3.2. Las realizaciones de los complejos del orden de X_2 y X_3 son homeomorfas a las bolas cerradas de dimensión 1 y 2.

Vamos a demostrar que la realización geométrica del complejo del orden del espacio X_n es homeomorfa a $\overline{B^{n-1}(0,1)} = B_{n-1}$ por inducción. Es obvio que para $X_1 = \{1\}$ lo es, y supongamos que para X_n también lo es. Entonces, observamos que $X_{n+1} = \mathbb{C}(X_n)$, puesto que ambos espacios se construyen añadiendo un punto al anterior y haciendo que este sea mayor que todos los anteriores. Esto implica que

$$|\mathcal{K}(X_{n+1})| = |\mathcal{K}(\mathbb{C}(X_n))| \approx \mathbb{C}(|\mathcal{K}(X_n)|) = \mathbb{C}(B_{n-1}) \approx B_n.$$

También observamos que la representación del espacio en su diagrama de Hasse nos permite contar los símplices[1] de cada orden en el complejo $\mathcal{K}(X_n)$. Dado que un símpice de orden m en el complejo del orden corresponde a una cadena de m puntos en X_n, y cualquier subconjunto de X_n forma una cadena, los m-símplices son todos los subconjuntos de m elementos de $X_n = \{1, ..., n\}$, y de estos hay $\binom{n}{m}$.

Por último, vamos a analizar la subdivisión baricéntrica de este espacio. Para los casos particulares anteriores, obtenemos

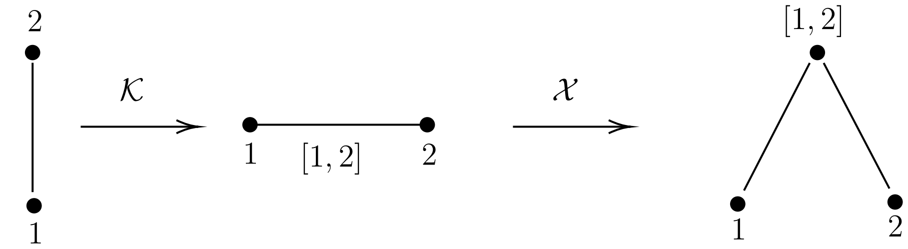


Figura 3.3. Subdivisión baricéntrica de X_2

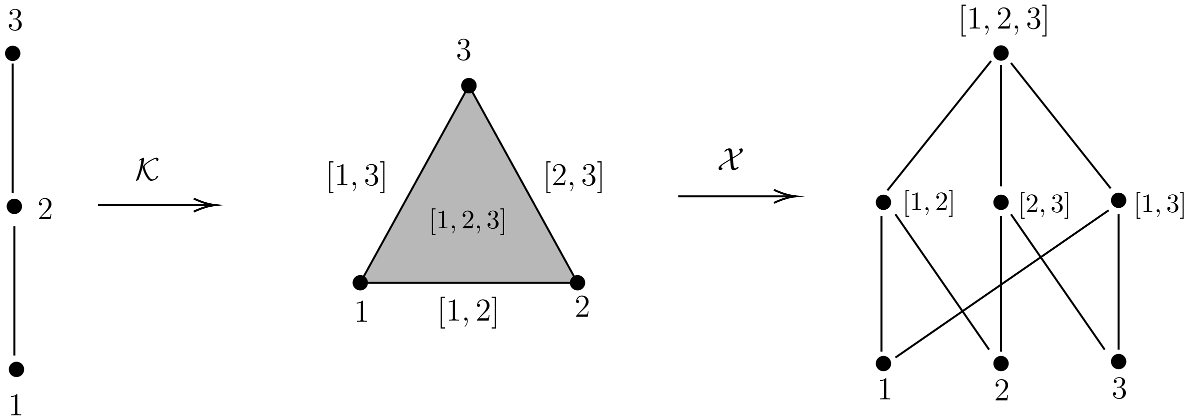


Figura 3.4. Subdivisión baricéntrica de X_3.

En general, espacio X_n contiene una cadena de longitud n que incluye a todas las demás, y por tanto su subdivisión tendrá siempre un máximo. Esto, aunque ya lo sabemos por la Observación 2.5, nos confirma que X'_n es contráctil. Además, estará dividido en n niveles de vértices, cada uno correspondiente a las cadenas de un orden entre 1 y n. Habrá $\binom{n}{m}$ vértices en el nivel m (el número de m-símplices), y de cada uno saldrán hacia abajo $\binom{m}{m-1} = m$ aristas (el número de $(m-1)$-símplices contenidos en cada m-símplice).

[1]En este trabajo denotaremos por m-símplice a un símplice formado por m puntos y cuya realización geométrica tiene dimensión $m-1$.

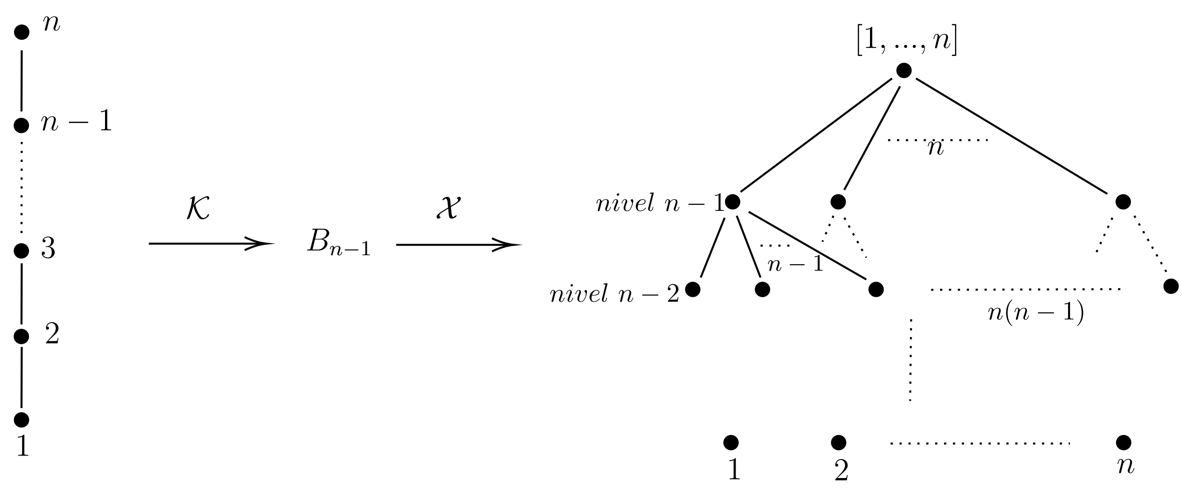


FIGURA 3.5. Subdivisión baricéntrica de X_n.

El segundo ejemplo a considerar en profundidad es un caso general del estudiado pseudocírculo, que llamaremos S_n y vendrá representado por el diagrama de Hasse

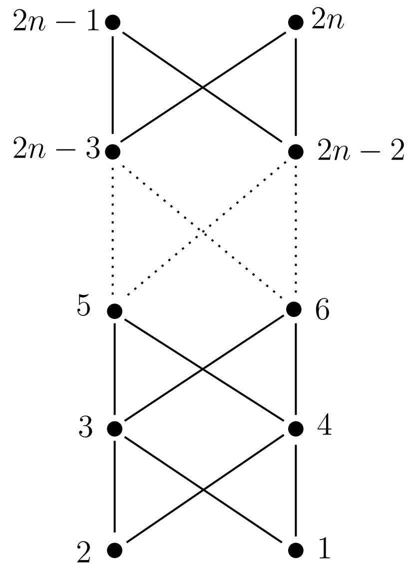


FIGURA 3.6. Diagrama de Hasse de S_n.

Podemos demostrar que el complejo del orden de S_n es homemorfo a la $(n-1)$-esfera de nuevo por inducción: el caso $n = 1$ es evidente, y si se cumple para S_n basta observar que la nueva iteración se construye añadiendo dos puntos mayores que cualquiera de los anteriores, y tales que ellos no se relacionan entre sí. Esto es equivalente a considerar la suspensión del espacio:

$$|\mathcal{K}(S_{n+1})| = |\mathcal{K}(\mathbb{S}(S_n))| = \left|\mathcal{K}(S_n) * \mathcal{K}(S^0)\right| \approx |\mathcal{K}(S_n)| * \left|\mathcal{K}(S^0)\right| =$$
$$\Sigma|\mathcal{K}(S_n)| \approx \Sigma(\mathbb{S}^{n-1}) \approx \mathbb{S}^n.$$

Para concluir, vamos a calcular también el número de m-símplices en el complejo del orden de S_n. Se trata de contar todas las cadenas de orden m en S_n. Observamos que para formar dichas cadenas, necesitamos m puntos de exactamente m niveles del diagrama de Hasse, puesto que los puntos del mismo nivel no están relacionados entre sí. Esto nos da, en principio, $\binom{n}{m}$ elecciones de niveles para formar cadenas. Ahora tenemos que contar cuántas m-cadenas podemos formar con cada elección de m niveles. Estos m niveles tienen diagrama de Hasse igual al de S_m, así que basta calcular el número de m-cadenas en S_m. Sabemos que en S_2 hay 4 2-cadenas, y si añadimos dos puntos más, cada uno forma una 3-cadena nueva por cada una de las anteriores:

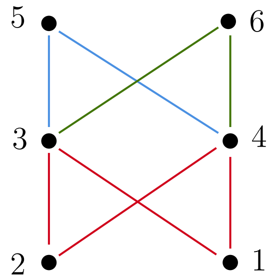


FIGURA 3.7. Cómo contar las 3-cadenas en S_3 a partir de las de S_2.

doblando el número de cadenas previo. Por recurrencia, el número de cadenas de máxima longitud se dobla en cada iteración, habiendo 2^m en S_m. Concluimos que en $\mathcal{K}(S_n)$ hay exactamente $\binom{n}{m}2^m$ m-símplices.

Apéndice A

Complejos simpliciales

En este apéndice vamos a definir brevemente los conceptos relacionados con los complejos simpliciales que aparecen a lo largo del trabajo.

Definición A.1. Un complejo simplicial abstracto K es una dupla (V_K, S_K) formada por un conjunto de puntos V_K a los que llamaremos **vértices** y un subconjunto $S_K \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que si $\sigma \in S_K$, todo $\tau \subseteq \sigma$, que llamaremos **cara** de σ, está a su vez en S_K, y además $\{v\} \in S_K$ para todo $v \in V_K$. A los elementos de S_K los llamaremos **símplices**. Normalmente identificaremos K con S_K.

Visto esto, tenemos que estudiar las aplicaciones entre complejos:

Definición A.2. Dados dos complejos K y L, y una aplicación $\varphi : V_K \longrightarrow V_L$, decimos que es una **aplicación simplicial** si para todo $\sigma \in K$, $\varphi(\sigma) \in L$.

Ahora veamos cómo representarlos en el espacio:

Definición A.3. La realización geométrica de un símplice $\sigma = \{v_1, ..., v_m\}$ de un complejo abstracto es el conjunto de combinaciones lineales convexas

$$\overline{\sigma} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i v_i \mid \sum_i t_i = 1, t_i \in [0,1] \right\},$$

dado que los v_i son vistos como puntos linealmente independientes de $\mathbb{R}^{n-1}$. El **baricentro** $b(\sigma)$ de un símplice es el punto resultado de fijar todas las coordenadas $t_i = \frac{1}{\#\sigma}$.

Definición A.4. La realización geométrica $|K|$ de un complejo simplicial es la unión de las realizaciones de todos sus símplices en $\mathbb{R}^{n-1}$, con la topología cuyos cerrados son los $U \subseteq |K|$ tales que $U \cap \overline{\sigma}$ es cerrado en $\mathbb{R}^{n-1}$ para todo $\sigma \in K$.

Si K es finito, esta coincide con la topología heredada de $\mathbb{R}^{n-1}$ y es la misma que induce la métrica

$$\mathrm{d}\Big(\sum_{v \in K} \alpha_v v, \sum_{v \in K} \beta_v v\Big) = \sqrt{\sum_{v \in K} (\alpha_v - \beta_v)^2}.$$

Observación A.1. Una aplicación simplicial $\varphi : K \longrightarrow L$ induce otra aplicación continua entre las realizaciones geométricas dada por

$$\begin{array}{cccc} |\varphi| : & |K| & \longrightarrow & |L| \\ & \sum_{v \in K} \alpha_v v & \mapsto & \sum_{v \in K} \alpha_v \varphi(v). \end{array}$$

Está bien definida porque $\{v \mid \alpha_v > 0\}$ siempre es un símplice de K, y por tanto $\{\varphi(v) \mid \alpha_v > 0\}$ lo es de L.

Definición A.5. Dado un $x \in |K|$, que podemos representar como $x = \sum_{v \in K} \alpha_v v$ en general, llamamos **soporte** de x al símplice $\{v \mid \alpha_v > 0\}$.

Definición A.6. La **subdivisión baricéntrica** K' de un complejo K es el complejo cuyos vértices son los símplices de K y cuyos símplices son las cadenas de símplices de K. La aplicación lineal dada por

$$\begin{array}{rccc} s_K: & |K'| & \longrightarrow & |K| \\ & \sigma & \mapsto & s_K(\sigma)=b(\sigma)=\sum_{v\in\sigma}\frac{v}{\#\sigma} \end{array}$$

es un homeomorfismo.

Definición A.7. Dados aplicaciones simpliciales entre complejos $\varphi,\psi : K \longrightarrow L$, son **contiguas** si para cada $\sigma \in K$ tenemos $\varphi(\sigma)\cup\psi(\sigma)\in L$.

Proposición A.1. *Si dos aplicaciones simpliciales φ y ψ son contiguas, sus aplicaciones asociadas entre las realizaciones son homótopas.*

Demostración. Tenemos dos aplicaciones $|\varphi|, |\psi| : |K| \longrightarrow |L|$ continuas tales que dado $x \in |K|$, será $x \in \overline{\sigma}$ para algún $\sigma \in K$. Entonces $\varphi(x)\cup\psi(x) \in \varphi(\sigma)\cup\psi(\sigma)$ para todo $x \in |K|$, es decir, dado un punto de $|K|$, las imágenes por las aplicaciones siempre caen en el mismo símplice de $|L|$. Esto significa que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} H: & |K|\times I & \longrightarrow & |L| \\ & (x,t) & \mapsto & t\varphi(x)+(1-t)\psi(x) \end{array}$$

está bien definida. Además, es fácil probar que es continua usando las propiedades de la topología y la métrica, y por ende es la homotopía que buscábamos. □

Definición A.8. Un **cono simplicial** es un complejo K que tiene un vértice a tal que para todo $\sigma \in K$, $\sigma \cup \{a\}$ también es símplice de K.

Proposición A.2. *Si K es un cono simplicial, $|K|$ es contráctil.*

Demostración. Basta usar la proposición anterior: la identidad es contigua a la aplicación que envía cada vértice a a. □

Bibliografía

[1] J.A. Barmak. *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN: 9783642220036. URL: https://books.google.es/books?id=KR3zCAAAQBAJ.

[2] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. URL: https://cds.cern.ch/record/478079.

[3] J.P. May. *Finite spaces and larger contexts*. URL: https://math.uchicago.edu/~may/FINITE/FINITEBOOK/FINITEBOOKCollatedDraft.pdf.

[4] Michael C. McCord. «Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces». En: *Duke Mathematical Journal* 33.3 (1966), págs. 465-474. DOI: 10.1215/S0012-7094-66-03352-7. URL: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-66-03352-7.

[5] Stong R. E. «Finite Topological Spaces». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 123 (1966), págs. 325-340.