

CURSO 2022/23

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

**EXPANSIONES POLIEDRALES DE ESPACIOS
COMPACTOS ASOCIADAS A APROXIMACIONES
FINITAS**

ALEJANDRO MORENO BECERRA

DIRIGIDO POR MANUEL ALONSO MORÓN



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Madrid, 5 de febrero de 2024

EXPANSIONES POLIEDRALES DE ESPACIOS COMPACTOS ASOCIADAS A APROXIMACIONES FINITAS

Alejandro Moreno Becerra

RESUMEN. El presente trabajo demuestra que es posible servirse de la teoría de espacios finitos para describir la forma de los espacios compactos métricos. Para ello, presenta los espacios topológicos ANR y hace una introducción histórica a la teoría de la forma en la que revisa distintas descripciones de la misma y prueba su equivalencia. Después, describe la generalización categórica de la forma para espacios topológicos y resume las propiedades clave de los espacios finitos. Para finalizar, llega a los teoremas de síntesis entre teorías. El último capítulo investiga la implementación en código de uno de los resultados anteriores.

Palabras clave: topología, topología algebraica, espacios finitos, homotopía, complejos simpliciales, teoría de la forma, límite inverso, homología, teoría de McCord, topología computacional, combinatoria

ABSTRACT. The present work demonstrates that it is possible to describe shape theory of metric compacta by means of the theory of finite spaces. With this intention, we introduce ANR topological spaces and we do an introduction to shape theory reviewing various of its descriptions and proving their equivalency. Then, we describe the categorical generalization of shape for topological spaces and summarize the key properties of finite spaces. Ultimately, we arrive at the synthesis theorems bridging these theories. The last chapter investigates the code implementation of one of the previous results.

Keywords: topology, algebraic topology, finite spaces, homotopy, simplicial complexes, shape theory, inverse limit, homology, McCord theory, computational topology, combinatorics

Índice general

Prefacio	5
Capítulo 1. Espacios localmente regulares y homotopía	7
Capítulo 2. Teoría de la forma	11
1. La teoría de la forma de Borsuk	11
2. La forma mediante ANR-sistemas	14
3. La Forma mediante aplicaciones multivaluadas	19
4. Hiperespacios	23
Capítulo 3. La forma en espacios topológicos	27
1. La definición de la forma	29
2. Invariantes de forma	33
3. Algunos teoremas importantes	35
Capítulo 4. Topología en espacios finitos	37
1. Teoría de McCord	38
Capítulo 5. Sucesiones aproximativas finitas	41
Capítulo 6. Computando sucesiones aproximativas	47
Apéndice A. Complejos simpliciales	53
Apéndice. Bibliografía	57

Prefacio

Este trabajo tiene por objetivo relacionar la teoría de la forma y la teoría de espacios finitos. La primera adapta y mejora la teoría de homotopía en espacios con mal comportamiento local, pasando de considerar las aplicaciones entre espacios a estudiar sucesiones de aplicaciones entre «aproximaciones regulares» de dichos espacios, mientras que la segunda relaciona los espacios topológicos finitos con los complejos simpliciales finitos y, en particular, demuestra que sus tipos de homotopía débil son iguales.

En el Capítulo 1 introducimos los conceptos básicos sobre los espacios localmente «regulares», quienes constituirán los cimientos sobre los que estatuir la teoría de la forma. En el Capítulo 2, haciendo uso de la teoría desarrollada previamente, introduciremos la teoría de la forma desde una perspectiva histórica, pasando por distintas descripciones de la categoría forma hasta llegar a la más general en el Capítulo 3. En él, definimos la forma para espacios topológicos cualesquiera y damos algunos ejemplos de aplicación de la teoría, yendo desde los invariantes algebraicos hasta las versiones *shape* de algunos teoremas clásicos.

El capítulo 4 revisa los conceptos fundamentales de la teoría de espacios finitos, definiendo los funtores «espacio de caras» y «complejo del orden» que nos llevarán a establecer la relación entre dicha teoría y la teoría de la forma. La conexión, que se explicita en el Capítulo 5, pasa por usar estos funtores para construir, a partir de aproximaciones finitas de un espacio compacto métrico, sucesiones inversas de poliedros que reflejen la forma del espacio, o sucesiones de espacios finitos cuyo límite inverso recupere la topología del espacio original.

Para concluir el trabajo, incluimos un capítulo que implementa un código que permite calcular, dadas unas ciertas aproximaciones finitas de un compacto métrico, los términos de la sucesión inversa que lo aproxima. Además, representa dichos términos (que son espacios finitos) en su diagrama de Hasse minimal.

Espacios localmente regulares y homotopía

La teoría de homotopía establece un funtor $H : \text{Top} \longrightarrow \text{HTop}$ de la categoría Top de espacios topológicos y aplicaciones continuas en la categoría HTop de espacios topológicos y clases de homotopía de aplicaciones continuas. Los mejores frutos de esta teoría, sin embargo, se obtienen al restringirnos a Pol , la subcategoría de Top de espacios con el tipo de homotopía de un poliedro (la realización geométrica de un complejo simplicial¹). La teoría de la forma trata de extender este funtor $H : \text{Pol} \longrightarrow \text{HPol}$ a HTop , estableciendo un funtor $S : \text{HTop} \longrightarrow \text{ShTop}$ que coincide con él al restringirse a HPol , es decir, tal que las categorías $S(\text{HPol})$ y HPol son isomorfas.

La interpretación de HPol que prima en la teoría de la forma, y sobre cuyos resultados descansa su fundación, es la de la teoría de retracts. Esta teoría fue iniciada por Karul Borsuk [7, 8] y sus resultados fundamentales se pueden consultar en [18, 3]. La descripción que hacemos aquí se basa en el libro *Shape theory: the inverse system approach* [20], que introduce los conceptos básicos de la teoría necesarios para el desarrollo de la forma.

Dado un espacio topológico X y un subconjunto $Y \subseteq X$, una **retracción** $r : X \longrightarrow Y$ es una aplicación (función continua) tal que $r|_Y = \text{id}_Y$.

DEFINICIÓN 1.1. Diremos que una clase \mathcal{C} de espacios Hausdorff es **débilmente hereditaria** si

1. todo cerrado de un espacio de \mathcal{C} está también en la clase, y
2. todo espacio homeomorfo a uno de \mathcal{C} está también en la clase.

Dada una clase \mathcal{C} débilmente hereditaria, un espacio Y es un **retracto absoluto para la clase \mathcal{C}** ($\text{AR}(\mathcal{C})$) si:

1. $Y \in \mathcal{C}$, y
2. si Y es homeomorfo a un subconjunto cerrado Y' de un $X \in \mathcal{C}$, entonces Y' es un retracto de X .

Asimismo, diremos que Y es un **retracto entorno absoluto** ($\text{ANR}(\mathcal{C})$) si Y' solo es un retracto de un entorno suyo en X . Claramente, todo $\text{AR}(\mathcal{C})$ es un $\text{ANR}(\mathcal{C})$.

Análogamente, dados un espacio X y $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado, un espacio Y es un **extensor absoluto** ($\text{AE}(\mathcal{C})$) si toda aplicación $f : A \longrightarrow Y$ admite una extensión $\tilde{f} : X \longrightarrow Y$. Será un **extensor entorno absoluto** ($\text{ANE}(\mathcal{C})$) si f solo se extiende a un entorno de A en X . De nuevo, todo $\text{AE}(\mathcal{C})$ es un $\text{ANE}(\mathcal{C})$.

Todas estas clases de espacios tienen algunas propiedades fácilmente deducibles, como que el producto finito de ANE 's es ANE y que el producto arbitrario de AE 's es AE . Además, siempre tenemos que $Y \in \mathcal{C}$ e $Y \in \text{AE}(\mathcal{C})$ ($Y \in \text{ANE}(\mathcal{C})$) implica $Y \in \text{AR}(\mathcal{C})$ ($Y \in \text{ANR}(\mathcal{C})$). Sin embargo, no siempre se tienen los recíprocos.

¹Introducimos las nociones básicas sobre los complejos simpliciales en el Apéndice A.

EJEMPLO 1.1. El contenido del Teorema de Extensión de Tietze [13, p. 49] es precisamente que el intervalo unidad I es un AE para la categoría de espacios normales. Esto implica que también lo es para la subcategoría de compactos métricos. Como el producto arbitrario de AE's es un AE, concluimos que el cubo de Hilbert también lo es.

A lo largo del trabajo, cuando nos refiramos a un ANR o un AE será siempre para la clase de espacios métricos, para la cual las nociones que eran similares anteriormente coinciden:

TEOREMA 1.1. *Todo AR (ANR) para la clase de espacios métricos es un AE (ANE).*

Ahora, pasamos a estudiar las propiedades homotópicas de los ANR's. Dados X e Y espacios topológicos y \mathcal{V} un recubrimiento de Y , diremos que dos aplicaciones $f, g : X \rightarrow Y$ son \mathcal{V} -**cercanas** si para todo $x \in X$ existe $U \in \mathcal{V}$ tal que $f(x)$ y $g(x)$ pertenecen a U .

TEOREMA 1.2. *Para todo $Y \in \text{ANR}$ existe un recubrimiento abierto \mathcal{V} tal que dos aplicaciones $f, g : X \rightarrow Y$ \mathcal{V} -cercanas son homótopas.*

La demostración de este teorema requiere la consideración de algún tipo de distancia en Y , para lo cual enunciamos los siguientes dos teoremas, que también intervienen en la demostración de 1.1:

TEOREMA 1.3. *Para todo espacio métrico Y existen un espacio vectorial normado L y una inmersión $h : Y \rightarrow L$ tales que $h(Y)$ es un cerrado de su envoltura convexa.*

TEOREMA 1.4. *Todo subconjunto K convexo de un espacio vectorial normado es un AE.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1.2. Por los Teoremas 1.3 y 1.4, podemos suponer que Y es un cerrado de un convexo $K \subseteq L$, donde L es un espacio vectorial normado. Como $Y \in \text{ANR}$, existen un entorno abierto N de Y en K y una retracción $r : N \rightarrow Y$. Podemos considerar un recubrimiento \mathcal{W} de $r^{-1}(Y)$ de bolas en K , y definimos $\mathcal{V} = \{W \cap Y\}_{W \in \mathcal{W}}$. Dado un par de aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ \mathcal{V} -cercanas, todo $x \in X$ admite un $V \in \mathcal{V}$ tal que $f(x), g(x) \in V = W \cap Y$. La homotopía

$$\begin{aligned} G : X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto tf(x) + (1-t)g(x) \end{aligned}$$

está bien definida porque $G(\{x\} \times I) \subseteq W \subseteq N$ y W es convexo, así que $H = rG$ es la homotopía buscada. \square

Las propiedades de los ANR nos permiten extender también homotopías entre funciones.

TEOREMA 1.5. *Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado. Si $Y \in \text{ANR}$ y $f, g : X \rightarrow Y$ son aplicaciones tales que $f|_A \simeq g|_A$, entonces dicha homotopía se puede extender a un entorno V de A en X , $f|_V \simeq g|_V$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos el conjunto cerrado $C = (A \times I) \cup (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \subseteq (X \times I)$ y la aplicación $h : C \rightarrow Y$ dada por

$$h(x, 0) = f(x) \quad \& \quad h(x, 1) = g(x) \quad \& \quad h(a, t) = H(a, t).$$

Por el Teorema 1.1, Y es un ANE. Esto implica que existe una extensión $\tilde{h} : U \rightarrow Y$, donde U es un entorno de C en $X \times I$. Usando la compacidad de I , encontramos un entorno V de A tal que $V \times I \subseteq U$. Claramente, $\tilde{h}|_{V \times I}$ es la homotopía buscada. \square

Dados un espacio topológico X y $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado, diremos que un espacio Y tiene la **propiedad de extensión de homotopía** respecto de (X, A) si, para cualquier aplicación $f : X \rightarrow Y$ y cualquier homotopía $H : A \times I \rightarrow Y$ tal que $H_0 = f|_A$, existe una homotopía $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$ que extiende a H y tal que $\tilde{H}_0 = f$.

TEOREMA 1.6. *Sea X un espacio métrico y $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado. Todo $Y \in \text{ANR}$ tiene la propiedad de extensión de homotopía respecto de (X, A) .*

Ahora, relacionemos los complejos simpliciales con la nueva clase de espacios que hemos definido:

TEOREMA 1.7. *Todo complejo simplicial con la topología métrica $|K|_m$ es un ANR.*

La demostración de este resultado escapa a los objetivos de este capítulo y preferimos limitarnos a bosquejarla:

1. Si K es un complejo de tal forma que cualquier subconjunto de K forma un símlice, entonces $|K|_m$ es un AR.

DEMOSTRACIÓN. Se trata de conseguir una inmersión de $|K|_m$ en un convexo de un espacio vectorial normado L , y después usar el Teorema 1.4. Para ello, se hace $L = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_{v \in K} |f(v)| < \infty\}$. \square

2. Todo complejo simplicial K es subcomplejo del dado por $P = (V_K, P(V_K))$, donde $P(V_K)$ denota el conjunto de todos sus subconjuntos.
3. La topología relativa de todo subcomplejo de $|P|_m$ es su topología métrica.
4. Sean K un complejo simplicial y $L \subseteq K$ un subcomplejo. Entonces existe un entorno U de $|L|_m$ en $|K|_m$ tal que U se retracts en $|L|_m$.

En el Apéndice A, enunciamos que la identidad es una equivalencia homotópica entre $|K|$ y $|K|_m$. A la luz del teorema anterior, se hace patente que todo complejo simplicial tiene el tipo de homotopía de un ANR. El recíproco también es cierto, y lo enunciamos en el siguiente teorema:

TEOREMA 1.8. *Para todo espacio topológico X , equivalen:*

1. X tiene el tipo de homotopía de un poliedro.
2. X tiene el tipo de homotopía de un ANR.

Capítulo 2

Teoría de la forma

1. La teoría de la forma de Borsuk

La primera vez que la palabra «forma» es usada en el sentido del que nos ocupamos en este trabajo se sitúa en la conferencia de Karul Borsuk *Concerning the notion of the shape of compacta* en el International Symposium on Topology and its Applications, celebrado en Herzegovina en agosto de 1968 [6]. No obstante, el contenido de esta conferencia había sido publicado previamente en el artículo fundacional *Concerning homotopy properties of compacta* [5] de Borsuk.

Borsuk observó que muchos de los teoremas más importantes en la teoría de homotopía solo son válidos en espacios con buen comportamiento local, pero fallan en espacios como los compactos métricos. El autor buscaba ampliar esta teoría para que capturase mejor las propiedades topológicas globales de los espacios, con una idea similar a la que ya había expuesto D. E. Christie años antes en *Net homotopy for compacta* [11]: en vez de considerar aplicaciones de \mathbb{S}^n en el espacio, las consideró en entornos del espacio cada vez más pequeños, puesto que estos no tenían esas malas propiedades locales pero podían seguir capturando las globales. De esta forma, también se podían definir aplicaciones entre espacios como aplicaciones entre sus entornos para llegar a una nueva noción de homotopía, y a una nueva categoría. Christie ya observó que esta vía era equivalente a la propia teoría de homotopía en espacios con regulares localmente como los ANR's.

Antes de describir la forma según Borsuk, hagamos un excursio para estudiar cómo esta idea informal es provechosa en el paradigmático y clásico ejemplo del *Círculo de Varsovia*:

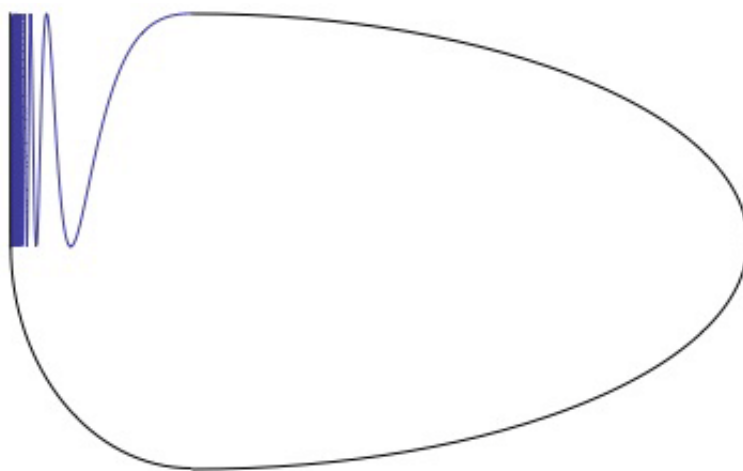


FIGURA 2.1. El círculo de Varsovia.

Este espacio es conexo por caminos y simplemente conexo, de tal forma que la aplicación $f : X \longrightarrow \{*\}$ induce isomorfismos en todos sus grupos de homotopía. Sin embargo, no se cumple en él el Teorema de Whitehead, puesto que no hay una equivalencia homotópica entre ambos: si la hubiera, pongamos $H(x, 0) = \text{id}_X$ y $H(x, 1) = \{a\}$, entonces $h_x(t) = H(x, t)$ constituiría un camino uniendo x y a . Por las propiedades del Círculo de Varsovia, sabemos que un tal camino no puede pasar por el tramo irregular, de tal forma que los puntos en la línea contigua a dicho tramo viajan a su imagen dando la vuelta por debajo y los puntos infinitamente próximos del tramo lo hacen superando las ondas, contra la continuidad de H . Sin embargo, las aplicaciones de $\mathbb{S}^1 \longrightarrow U_n$ donde los U_n son entornos de X cada vez más cercanos sí se hacen cargo de su similitud con la circunferencia, y de hecho el grupo de dichos lazos es \mathbb{Z} , como lo es el grupo fundamental de la circunferencia.

Volvemos a la descripción de la forma de Borsuk. Borsuk considera espacios métricos compactos X, Y inmersos en el cubo de Hilbert Q , y estudia sucesiones de aplicaciones entre sus entornos que llama **sucesiones fundamentales**, $f_n : Q \longrightarrow Q$ tales que

para todo entorno V de Y existe un entorno U de X (todos ellos en Q) que cumple $f_n(U) \subseteq V$ y $f_n|_U \simeq f_{n+1}|_U$ para casi todo n .

Dos sucesiones $\underline{f}, \underline{g}$ son homótopas si todo entorno V de Y admite un entorno U de X tal que $f_n|_U \simeq g_n|_U$ para casi todo n . Esto define una relación de equivalencia entre sucesiones que las divide en **clases fundamentales**. Podemos comprobar que la composición de clases componiendo sus representantes es una operación bien definida [5, p. 232] y que la sucesión (id_X) es fundamental. Obtenemos así una categoría Sh_B cuyos objetos son los compactos en Q y sus morfismos las clases fundamentales. Tal y como hacíamos en homotopía, diremos que dos espacios X e Y tienen la misma **forma** si existen clases fundamentales $[\underline{f}] : X \longrightarrow Y$, $[\underline{g}] : Y \longrightarrow X$ tales que $[\underline{f}][\underline{g}] = [\text{id}_Y]$ y $[\underline{g}][\underline{f}] = [\text{id}_X]$.

Siguiendo a Christie, Borsuk presenta otro acercamiento a la forma a través de lo que denomina **aplicaciones aproximativas**: dados dos compactos $X, Y \subseteq Q$, son sucesiones de aplicaciones $f_n : X \longrightarrow Q$ tales que

para todo V entorno de Y se tiene $f_n \simeq f_{n+1}$ en V para casi todo n .

Entre aplicaciones aproximativas también podemos definir una noción de homotopía, y diremos que (φ_n) y (ψ_n) son homótopas si para todo entorno V de Y tenemos $\varphi_n \simeq \psi_n$ en V para casi todo n . De nuevo, esto define una relación de equivalencia a cuyas clases llamaremos **clases aproximativas**. Observamos que, aunque no podemos componer clases aproximativas porque los dominios no coinciden, sí podemos definir la composición de clases fundamentales con clases aproximativas componiendo representantes. Si asociáramos a cada clase aproximativa una fundamental, podríamos definir una categoría mediante esta operación.

TEOREMA 2.1. *Existe tal asociación y nos permite definir una categoría de compactos métricos que tiene por morfismos las clases aproximativas y es isomorfa a Sh_B .*

DEMOSTRACIÓN. Dada una aplicación aproximativa $\varphi = (\varphi_n) : X \longrightarrow Q$, podemos extender cada aplicación $\varphi_n : X \longrightarrow Q$ a una $\Phi_n : Q \longrightarrow Q$ porque el cubo de Hilbert es un AE. Todo entorno abierto V de Y en Q es abierto de un ANE, así

que es ANE y, por tanto, ANR. Como $\Phi_n|_X \simeq \Phi_m|_X$ en V , el Teorema 1.5 asegura que podemos extender esta homotopía de tal forma que (Φ_n) sea una sucesión fundamental.

Si tomamos otra aplicación aproximativa $\psi = (\psi_n)$ homótopa a φ , tenemos que las sucesiones fundamentales asociadas a cada una, Ψ y Φ respectivamente, cumplen que para todo V entorno de Y en Q ,

$$\Phi_n|_X = \varphi_n \simeq \psi_n = \Psi_n|_X \text{ en } V \text{ para casi todos } n, m.$$

De nuevo por el Teorema 1.5 podemos extender esta homotopía y, por tanto, la correspondencia establecida respeta las clases aproximativas. Esto significa que la composición de clases aproximativas $[\psi] \circ [\varphi]$ está bien definida como $[\Psi] \circ [\Phi]$. Llamaremos a esta correspondencia F . Observamos que

$$F([\psi] \circ [\varphi]) = F([\Psi] \circ [\Phi]) \quad \& \quad F([\psi]) \circ F([\varphi]) = [\Psi] \circ [\Phi] = [\Psi \circ \Phi].$$

Si tenemos un representante Γ de $F([\Psi \circ \Phi])$, es claro que para todo V entorno de Y en Q ,

$$\Gamma_n|_X \simeq \Psi_n \circ \varphi_n = \Psi_n \circ \Phi_n|_X \text{ en } V \text{ para casi todos } n, m,$$

de donde F es un funtor por el argumento anterior.

La restricción a X de una sucesión fundamental $\underline{f} = (f_n) : Q \longrightarrow Q$ es una clase aproximativa por definición y, si dos sucesiones son homótopas, dichas clases lo son también. Además, la restricción conmuta con la composición y, por ende, esta asociación trivial es el funtor inverso de F . Esto implica que F es un isomorfismo de categorías, como queríamos demostrar. \square

Será útil más adelante tener en cuenta esta correspondencia entre aplicaciones aproximativas y sucesiones fundamentales. Mediante la noción de clase aproximativa se definen operaciones de producto e inversión y se da estructura de grupo a las clases aproximativas de $\mathbb{S}^n \longrightarrow Y$, lo que se llama el **n -ésimo grupo de homotopía fundamental** de Y . De hecho, toda clase fundamental entre dos espacios induce de manera funtorial un homomorfismo entre sus grupos fundamentales¹ y aunando ambas afirmaciones se obtiene un funtor $\text{Sh}_B \longrightarrow \text{Ab}$ para $n > 1$ y en Grp para $n = 1$.

Como afirmamos al principio, toda esta teoría se puede ver como una extensión interesada de la teoría de homotopía, puesto que sobre los espacios con buenas propiedades locales como los ANR's, coinciden. Esto es consecuencia de los siguientes hechos:

1. Toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se puede extender a una $\hat{f} : Q \longrightarrow Q$ por ser Q un AE y X cerrado en Q . Así, podemos formar una sucesión fundamental $(f_n)_n$ con $f_n = \hat{f}$.
2. Si dos aplicaciones son débilmente homótopas, es decir, homótopas en cada entorno V de Y en Q , sus sucesiones fundamentales inducidas son homótopas.
3. La clase fundamental $[\hat{f}]$ no depende de la extensión escogida.
4. Si Y es un ANR, toda clase fundamental $[\underline{f}] : X \longrightarrow Y$ viene inducida por una aplicación $f : X \longrightarrow Y$.
5. Si dos aplicaciones $f, g : X \longrightarrow Y$ generan la misma clase fundamental, entonces son débilmente homótopas.

¹No confundir con el grupo fundamental de teoría de homotopía clásica.

6. Si dos aplicaciones entre ANR's son débilmente homotópicas, entonces son homotópicas.
7. Si dos ANR X e Y tienen la misma forma, entonces tienen el mismo tipo de homotopía.

DEMOSTRACIÓN DEL PUNTO 7. Sean $[f]$ y $[g]$ las clases que nos dan la equivalencia de forma. Por ser ambos espacios ANR's, ambos morfismos vienen inducidos por aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$. Como $[g][f] = [\text{id}_X]$ y $[f][g] = [\text{id}_Y]$, son débilmente homotópicas por el punto 5, y por el punto 6 son homotópicas. \square

Como corolario de este desarrollo también podemos deducir que si dos espacios tienen el mismo tipo de homotopía, la equivalencia homotópica induce una equivalencia fundamental por el punto 2 y tienen la misma forma.

Después de la publicación del artículo de Borsuk, diversos autores intentaron generalizar la teoría más allá de los compactos métricos mediante nuevas aproximaciones. En 1970, S. Mardešić y J. Segal definieron la forma en espacios Hausdorff compactos [22, 23], iniciando el acercamiento por sistemas inversos a la forma y poniendo la base para la generalización categórica del concepto, que vendría de la mano de Morita para espacios topológicos en general [28]. Mientras tanto, Fox [15] y Borsuk [4] la generalizarían por distintas vías a espacios métricos generales. En España, J. M. Sanjurjo dio una nueva descripción de la categoría forma basada en las aplicaciones multivaluadas [31, 30] que más tarde revisarían M. A. Morón y A. González [1].

Más progresos de la teoría siguieron llegando, consiguiendo probar teoremas análogos a los de Whitehead, Hurewicz [28] y Smale [14] sin las condiciones locales que aparecían como necesarias en la teoría de homotopía. Otra fuente de aplicaciones de la teoría de la forma serían los sorprendentes teoremas sobre complementos demostrados por Chapman [9, 10], quien consiguió caracterizar la forma de un compacto métrico mediante el tipo topológico de su complementario en Q .

2. La forma mediante ANR-sistemas

En esta sección vamos a generalizar la teoría de la forma a compactos Hausdorff basándonos en el artículo *Shape of compacta and ANR-systems* de S. Mardešić y J. Segal [23]. Esta descripción fue rápidamente generalizada a un nivel más abstracto que visitaremos en el Capítulo 3. La filosofía consistirá en asociar a cada espacio un sistema de espacios ANR y estudiar los morfismos entre estos sistemas, emulando lo que hacíamos mediante los entornos y las sucesiones fundamentales.

En lo que sigue, cuando hablemos de un ANR nos referiremos a un compacto ANR para la categoría de espacios métricos; cuando hablemos de un espacio X , será de la categoría Cpt de espacios compactos Hausdorff.

DEFINICIÓN 2.1. Diremos que un conjunto parcialmente ordenado Λ es **dirigido** si, para todos $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, existe un $\lambda \in \Lambda$ mayor que ambos, $\lambda_1, \lambda_2 \leq \lambda$. Diremos que es **cofinito** si el conjunto de predecesores de todo índice es finito. Un subconjunto $\Lambda' \subseteq \Lambda$ es **cofinal** si, para todo $\lambda \in \Lambda$, existe $\lambda' \in \Lambda'$ tal que $\lambda \leq \lambda'$.

DEFINICIÓN 2.2. Sea \mathcal{C} una categoría. Un **sistema inverso** \mathbf{X} en \mathcal{C} está formado por un conjunto dirigido de índices Λ , un objeto X_λ para cada $\lambda \in \Lambda$ y un **morfismo de paso** $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \rightarrow X_\lambda$ para cada par $\lambda \leq \lambda'$. Estos morfismos han de cumplir

$p_{\lambda\lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$ y que si tenemos $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$ entonces $p_{\lambda\lambda'}p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$. Si $\Lambda = \mathbb{N}$, diremos que \mathbf{X} es una sucesión inversa.

Diremos que un sistema inverso es un **ANR-sistema**² si el conjunto dirigido es cofinito, cada X_λ es un ANR y los morfismos de paso son funciones continuas. Dado un ANR X , podemos construir un ANR-sistema trivial asociado haciendo $X_\lambda = X$ y $p_{\lambda\lambda'} = \text{id}_X$. Un **morfismo de ANR-sistemas** o **ANR-morfismo** $\mathbf{f} : \mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \rightarrow \mathbf{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ consiste en una función creciente $\varphi : M \rightarrow \Lambda$ y aplicaciones $f_\mu : X_{\varphi(\mu)} \rightarrow Y_\mu$ tales que para todo μ , si $\mu \leq \mu'$, el siguiente diagrama conmuta en homotopía³:

$$\begin{array}{ccc} X_{\varphi(\mu)} & \longleftarrow & X_{\varphi(\mu')} \\ \downarrow f_\mu & & \downarrow f_{\mu'} \\ Y_\mu & \longleftarrow & Y_{\mu'} \end{array} .$$

Si cambiamos los sistemas por Cpt-sistemas, obtenemos un **Cpt-morfismo**. Denotaremos los morfismos desde un sistema trivial (X, id_X) como $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbf{Y}$. El morfismo identidad es $\text{id}_{\mathbf{X}} = (\text{id}_{X_\lambda}, \text{id}_\Lambda)$. La composición de dos morfismos (f_μ, φ) y (g_α, ψ) se define como el morfismo $(g_\alpha \circ f_{\psi(\alpha)}, \varphi \circ \psi)$, y está bien definida por la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccccc} X_{\varphi\psi(\alpha')} & \xrightarrow{f_{\psi(\alpha')}} & Y_{\psi(\alpha')} & \xrightarrow{g_{\alpha'}} & Z_{\alpha'} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{\varphi\psi(\alpha)} & \xrightarrow{f_{\psi(\alpha)}} & Y_{\psi(\alpha)} & \xrightarrow{g_\alpha} & Z_\alpha \end{array} .$$

Diremos que dos morfismos de ANR-sistemas $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ son homótopos, $\mathbf{f} \simeq \mathbf{g}$, si para todo $\mu \in M$ existe un índice $\lambda \geq \varphi(\mu), \psi(\mu)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} X_{\varphi(\mu)} & \longleftarrow & X_\lambda & \longrightarrow & X_{\psi(\mu)} \\ & \searrow f_\mu & & \swarrow g_\mu & \\ & & Y_\mu & & \end{array} .$$

Es rutinario comprobar que esta relación es de equivalencia por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & X_{\lambda''} & & & \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\ X_{\varphi(\mu)} & \longleftarrow & X_\lambda & \longrightarrow & X_{\psi(\mu)} & \longleftarrow & X_{\lambda'} \longrightarrow X_{\chi(\mu)} \\ & \searrow f_\mu & & \swarrow g_\mu & & \swarrow h_\mu & \\ & & & Y_\mu & & & \end{array}$$

tomando $\lambda'' \geq \lambda, \lambda'$. De hecho, esta relación de equivalencia respeta la composición de morfismos: si tenemos $\mathbf{f}, \mathbf{f}' : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ y $\mathbf{g}, \mathbf{g}' : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ homótopos dos a dos,

²La traducción clásica al español de este concepto es «sistema de ANR's». En este texto preferimos «ANR-sistema» porque acorta la escritura y es más conveniente.

³A partir de aquí, cada vez que nos refiramos a la conmutatividad de un diagrama, será en homotopía a no ser que se especifique lo contrario.

1. primero, probamos que $\mathbf{gf} \simeq \mathbf{g'f}$: existe un $\mu \geq \psi(\alpha), \psi'(\alpha)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 X_{\varphi\psi(\alpha)} & \longleftarrow & X_{\varphi(\mu)} & \longrightarrow & X_{\varphi\psi'(\alpha)} \\
 \downarrow f_{\psi(\alpha)} & & \downarrow f_{\mu} & & \downarrow f_{\psi'(\alpha)} \\
 Y_{\psi(\alpha)} & \longleftarrow & Y_{\mu} & \longrightarrow & Y_{\psi'(\alpha)} \\
 & \searrow g_{\alpha} & & \swarrow g_{\alpha} & \\
 & & Z_{\alpha} & &
 \end{array} ;$$

2. segundo, observamos que $\mathbf{gf} \simeq \mathbf{g'f}$ porque existe $\lambda \geq \varphi\psi(\alpha), \varphi'\psi(\alpha)$ que hace conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 X_{\varphi\psi(\alpha)} & \longleftarrow & X_{\lambda} & \longrightarrow & X_{\varphi'\psi(\alpha)} \\
 & \searrow f_{\psi(\alpha)} & & \swarrow f_{\psi(\alpha)} & \\
 & & Y_{\psi(\alpha)} & & \\
 & & \downarrow g_{\alpha} & & \\
 & & Z_{\alpha} & &
 \end{array}$$

Diremos que un ANR-morfismo \mathbf{f} es una **equivalencia homotópica** si existe \mathbf{g} tal que $\mathbf{gf} \simeq \text{id}_X$ y $\mathbf{fg} \simeq \text{id}_Y$. Diremos que dos sistemas tienen el mismo **tipo de homotopía** si existe una equivalencia homotópica entre ellos. Gracias a lo que acabamos de ver, sabemos que esta relación es de equivalencia y divide la categoría de ANR-sistemas y ANR-morfismos en clases de equivalencia.

DEFINICIÓN 2.3. Un **límite inverso** de un Cpt-sistema \mathbf{X} son un $X \in \text{Cpt}$ y un Cpt-morfismo $\mathbf{p} : X \rightarrow \mathbf{X}$ con la propiedad universal siguiente: para todo Cpt-morfismo $\mathbf{g} : Y \rightarrow \mathbf{X}$ con $Y \in \text{Cpt}$, existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $\mathbf{p}g = \mathbf{g}$.

OBSERVACIÓN 2.1. Para cualquier otro límite inverso $\mathbf{p}' : X' \rightarrow \mathbf{X}$, la aplicación $g : X \rightarrow X'$ es un homeomorfismo, es decir, el límite inverso es único. Escribiremos $X = \varprojlim \mathbf{X}$ y diremos en tal caso que \mathbf{X} está **asociado** con el espacio X .

De la misma forma, si tenemos sistemas \mathbf{X}, \mathbf{Y} asociados a espacios X, Y , diremos que los morfismos $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ y $f : X \rightarrow Y$ están **asociados** si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 X_{\varphi(\mu)} & \xleftarrow{p_{\varphi(\mu)}} & X \\
 \downarrow f_{\mu} & & \downarrow f \\
 Y_{\mu} & \xleftarrow{q_{\mu}} & Y
 \end{array}$$

TEOREMA 2.2. *Todo espacio compacto Hausdorff admite un ANR-sistema asociado.*

DEMOSTRACIÓN. Si el cardinal de X es finito, entonces X ya es un poliedro y el sistema trivial es suficiente. Por el Teorema de Inmersión de Tykhonov [32, pág. 17.11], X se puede considerar como un subconjunto del producto infinito de intervalos unidad $I^{\Omega} = \prod_{\omega \in \Omega} I_{\omega}$, donde el cardinal de Ω es igual al peso de X ,

es decir, el menor cardinal de sus bases de abiertos. Vamos a ver que podemos construir un sistema inverso con límite inverso I^Ω de tal forma que al restringirnos a X obtengamos el deseado.

Consideramos $\Lambda = F(\Omega)$ el conjunto de subconjuntos finitos no vacíos de Ω , ordenado por la inclusión. Para $\lambda = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, definimos $I^\lambda = I_{\omega_1} \times \dots \times I_{\omega_n}$. Si $\lambda \leq \lambda'$, la proyección natural $p_{\lambda\lambda'} : I^{\lambda'} \rightarrow I^\lambda$ completa un sistema inverso $(I^\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ cuyo límite inverso es I^Ω mediante la proyección natural $p_\lambda : I^\Omega \rightarrow I^\lambda$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, denotamos por $|\lambda|$ su cardinal. Construimos una sucesión de abiertos $U_n^\lambda \subseteq I^\lambda$ tales que:

1. $p_\lambda(X) = \bigcap_n U_n^\lambda$,
2. $U_1^\lambda \supset \overline{U_2^\lambda} \supset U_2^\lambda \supset U_3^\lambda \supset U_4^\lambda \supset \dots$,
3. $p_{\lambda\lambda'}(U_1^{\lambda'}) \subseteq U_{|\lambda'| - |\lambda| + 1}^\lambda$, para todo $\lambda \leq \lambda'$.

Por inducción en $|\lambda|$, si $|\lambda| = 1$, podemos escoger los U_n^λ libremente para que satisfagan las dos primeras condiciones. Si ahora tomamos λ' y lo suponemos probado para todo λ con cardinal $|\lambda| < |\lambda'|$,

$$p_{\lambda\lambda'}(p_{\lambda'}(X)) = p_\lambda(X) \subseteq U_{|\lambda'| - |\lambda| + 1}^\lambda.$$

Como solo hay una cantidad finita de estos $\lambda < \lambda'$, podemos encontrar un entorno abierto $U_1^{\lambda'}$ de $p_{\lambda'}(X)$ que cumpla la tercera propiedad. Después, definimos el resto de sucesión de entornos para que se cumplan las demás propiedades.

Claramente, para todo $\lambda \in \Lambda$ podemos encontrar un poliedro $X_\lambda \subseteq I^\lambda$ tal que

$$\overline{U_2^\lambda} \subseteq X_\lambda \subseteq U_1^\lambda.$$

Combinando esto con lo anterior, para todo $\lambda < \lambda'$ se tiene

$$p_{\lambda\lambda'}(X_{\lambda'}) \subseteq p_{\lambda\lambda'}(U_1^{\lambda'}) \subseteq U_{|\lambda'| - |\lambda| + 1}^\lambda \subseteq U_1^\lambda \subseteq X_\lambda,$$

y, por ende, $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ es un sistema inverso de poliedros (que son ANR's por el Teorema 1.8). Su límite inverso \mathfrak{X} cumple que, para todos $y \in \mathfrak{X}$ y $\lambda \leq \lambda'$,

$$p_\lambda(y) = p_{\lambda\lambda'}p_{\lambda'}(y) \in p_{\lambda\lambda'}(X_{\lambda'}) \subseteq U_{|\lambda'| - |\lambda| + 1}^\lambda.$$

Como λ' puede ser de cardinal arbitrariamente grande, esto implica que para todo $\lambda \in \Lambda$

$$p_\lambda(y) \in \bigcap_n U_n^\lambda = p_\lambda(X)$$

y por tanto $y \in X$. Recíprocamente, $p_\lambda(X) \subseteq U_2^\lambda \subseteq X_\lambda$, de donde se colige que $X \subseteq \mathfrak{X}$, como queríamos demostrar. \square

OBSERVACIÓN 2.2. Todo espacio compacto métrico X tiene una base numerable. Esto implica que el peso de X es menor o igual que \aleph_0 , y la demostración anterior prueba que existe una ANR-sucesión de poliedros asociada a X .

Visto esto, podemos asociar a cada X una clase de homotopía de ANR-sistemas, y esto es lo que llamaremos la **forma** de X , y denotaremos por $\text{Sh}(X)$. Sin embargo, no hemos demostrado que esta clase sea única, es decir, que dos sistemas asociados con el mismo espacio sean siempre homótopos. Esto es consecuencia de los siguientes hechos:

1. Si tenemos morfismos $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, $\mathbf{g} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ asociados con morfismos $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, entonces $\mathbf{g}\mathbf{f}$ está asociado con gf ; además, $\text{id}_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ está asociada con la identidad $\text{id}_X : X \rightarrow X$.

2. Si \mathbf{f} está asociado con f y tenemos otro morfismo $\mathbf{g} \simeq \mathbf{f}$, entonces \mathbf{g} también está asociado con f .
3. Toda aplicación $f : X \rightarrow Y$ tiene un ANR-morfismo $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ asociado.
4. Si tenemos \mathbf{f}, \mathbf{g} asociados con f, g , entonces $f \simeq g$ implica $\mathbf{f} \simeq \mathbf{g}$.
5. Si X e Y tienen el mismo tipo de homotopía, cualesquiera sistemas asociados \mathbf{X} e \mathbf{Y} también lo tienen, así que tienen la misma forma.

DEMOSTRACIÓN DEL PUNTO 5. Sabemos que hay aplicaciones $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$ tales que $gf \simeq \text{id}_X$ y $fg \simeq \text{id}_Y$. Por el punto 3, existen ANR-morfismos $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ y $\mathbf{g} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ asociados, y por el punto 1, $\mathbf{g}\mathbf{f}$ y $\mathbf{f}\mathbf{g}$ están asociados con gf y fg . Es más, por el punto 4, $\mathbf{g}\mathbf{f} \simeq \text{id}_{\mathbf{X}}$ y $\mathbf{f}\mathbf{g} \simeq \text{id}_{\mathbf{Y}}$, de donde tienen la misma forma. \square

Al igual que en el caso de Borsuk, la forma es un invariante por homotopía, y si nos ponemos en el caso de espacios ANR, coinciden: si X e Y son ANR's, sabemos que los sistemas triviales (X, id_X) y (Y, id_Y) son ANR-sistemas asociados; que tengan la misma homotopía implica que existe una equivalencia homotópica de sistemas dada por $\mathbf{f} : (X) \rightarrow (Y)$ y $\mathbf{g} : (Y) \rightarrow (X)$, pero en este caso ambos morfismos se reducen a morfismos $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ que nos dan una equivalencia homotópica.

TEOREMA 2.3. *La categoría de compactos métricos y ANR-morfismos es isomorfa a Sh_B .*

DEMOSTRACIÓN. Todo compacto métrico X admite un ANR-sistema sencillo asociado, consistente en tomar entornos abiertos cada vez más pequeños en Q ordenados por la inclusión, $X_n := X_{\frac{1}{n}} = \{x \in Q \mid d(x, X_n) < \frac{1}{n}\}$. El límite inverso será $\bigcap_n X_n = X$. Trabajaremos con estos sistemas durante toda la demostración.

Para definir un functor entre las categorías, tomamos primero una sucesión fundamental $\varphi : X \rightarrow Y$. Dado $n \in \mathbb{N}$, Y_n es un entorno de Y , de donde existen un índice n_0 y un entorno U_n tales que $\varphi_m(U_n) \subseteq Y_n$ y $\varphi_m|_{U_n} \simeq \varphi_{m+1}|_{U_n}$ en Y_n para todo $m \geq n_0$. Podemos tomar n_1 tal que, si $k \geq n_1$, $X_k \subseteq U_n$. Escogiendo una función creciente $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que cumpla $f(n) \geq n_0, n_1$, tenemos que $X_{f(n)} \subseteq U_n$, y por ende para todo $m \geq f(n)$, $\varphi_m|_{X_{f(n)}} \simeq \varphi_{m+1}|_{X_{f(n)}}$ en Y_n . Podemos definir $f_n = \varphi_{f(n)}|_{X_{f(n)}}$, que es un ANR-morfismo porque, dados $n \leq m$,

$$f_n = \varphi_{f(n)}|_{X_{f(n)}} \simeq \varphi_{f(m)}|_{X_{f(n)}} \text{ en } Y_n,$$

y esto implica que, restringiendo a $X_{f(m)}$,

$$f_n|_{X_{f(m)}} \simeq \varphi_{f(m)}|_{X_{f(m)}} = f_m \text{ en } Y_n.$$

Hemos deducido así que $f_n i_{f(n)f(m)} \simeq j_{nm} f_m$, como queríamos demostrar.

Esta asociación no es sobreyectiva sobre el conjunto de ANR-morfismos, pero sí lo es sobre el conjunto de ANR-morfismos regulares: aquellos que tienen función de índices φ estrictamente creciente. Esto es suficiente para establecer una biyección entre clases de ANR-morfismos y clases fundamentales, puesto que toda clase de ANR-morfismos tiene un representante regular. Solo queda demostrar que hemos definido un functor: sean $\varphi : X \rightarrow Y$ y $\psi : Y \rightarrow Z$ sucesiones fundamentales

asociadas con $\mathbf{f} = (f_n, f) : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ y $\mathbf{g} = (g_n, g) : \mathbf{Y} \longrightarrow \mathbf{Z}$ respectivamente. Queremos ver que la clase asociada a $[\underline{\psi}][\underline{\varphi}]$ es $[\mathbf{g}][\mathbf{f}]$.

Por definición, si $m \geq fg(n)$, entonces

$$\varphi_m|_{X_{fg(n)}} \simeq \varphi_{fg(n)}|_{X_{fg(n)}} = f_{g(n)} \text{ en } Y_{g(n)}.$$

De igual modo, si $m \geq g(n)$,

$$\psi_m|_{Y_{g(n)}} \simeq \psi_{g(n)}|_{Y_{g(n)}} = g_n \text{ en } Z_n.$$

Si escogemos una función $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ creciente tal que $h(n) \geq fg(n), g(n)$, entonces

$$h_n = \psi_{h(n)}\varphi_{h(n)}|_{X_{h(n)}} \simeq g_n f_{g(n)} \text{ en } Z_n.$$

Es claro que $\mathbf{h} = (h_n, h)$ está asociado a $\underline{\psi}\underline{\varphi}$ y, además, $\mathbf{h} \simeq \mathbf{g}\mathbf{f}$, por lo que ambas clases coinciden, y esto concluye la demostración. Los detalles sobre esta demostración se pueden consultar en el artículo *Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes* de Mardešić y Segal [21]. \square

3. La Forma mediante aplicaciones multivaluadas

Como comentábamos en la primera sección, J. M. Sanjurjo [31, 30] introdujo una nueva descripción de la forma en la categoría de compactos métricos basándose en las aplicaciones multivaluadas y descripción de la forma de Christie mediante las aplicaciones aproximativas [11]. Esta descripción de la forma es intrínseca en el sentido de que no necesita de expansiones y espacios distintos del propio compacto métrico para describir los morfismos y definir la forma. A lo largo de la sección, X e Y denotarán compactos métricos si no indicamos lo contrario.

Una **función multivaluada** $F : X \longrightarrow Y$ es una correspondencia que a cada $x \in X$ le asigna un conjunto cerrado $F(x) \subseteq Y$. Diremos que es **semicontinua superiormente** si para todo $x \in X$ y $V \subseteq Y$ entorno de $F(x)$ existe un entorno $U \subseteq X$ del punto tal que $F(U) = \bigcup\{F(x') \mid x' \in U\}$ está contenido en V . El papel de las homotopías en la teoría clásica lo juegan ahora las ε -homotopías:

DEFINICIÓN 2.4. Diremos que una función multivaluada es ε -**pequeña** si $\text{diam}(F(x)) < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Dos aplicaciones ε -pequeñas son ε -**multihomótopas** si existe una aplicación multivaluada semicontinua superiormente

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

ε -pequeña que cumple $H(x, 0) = F(x)$ y $H(x, 1) = G(x)$. Lo denotaremos $F \simeq_\varepsilon G$ y llamaremos a H una ε -**multihomotopía**.

Observamos que, si Y es un compacto métrico, toda aplicación multivaluada es ε -pequeña para algún $\varepsilon > 0$. Ser aplicaciones ε -multihomótopas define una relación de equivalencia. Ya podemos definir el análogo a una sucesión fundamental:

DEFINICIÓN 2.5. Una **multirred** de X en Y es una sucesión de funciones multivaluadas $F_n : X \longrightarrow Y$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_n \simeq_\varepsilon F_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$. Las representaremos en negrita como $\mathbf{F} : X \longrightarrow Y$.

Dadas dos multirredes $\mathbf{F}, \mathbf{G} : X \longrightarrow Y$, diremos que son homótopas si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $F_n \simeq_\varepsilon G_n$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$. En la demostración de la equivalencia de categorías nos serviremos de un tipo más de funciones:

Diremos que una aplicación aproximativa φ se obtiene de una multirred \mathbf{F} si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $d(\varphi_n, F_n) < \varepsilon$ para casi todo n . Para asociar una aplicación aproximativa a una multirred, demostramos el siguiente lema:

LEMA 2.1 (de Aproximación). *Para toda aplicación multivaluada ε -pequeña $F : Y \longrightarrow Q$ con Y compacto existe una aplicación $f : Y \longrightarrow Q$ tal que $d(f, F) < \varepsilon$.*

DEMOSTRACIÓN. Asumimos que Y tiene más de un punto (de lo contrario, el resultado es trivial). Como F es semicontinua superiormente, para todo $y \in Y$ existe un entorno V tal que $F(V) \subseteq B(F(y), r)$, donde $r = \frac{\varepsilon - \text{diam}(F(y))}{3}$. Recopilando estos entornos y usando la compacidad de Y , existe un recubrimiento abierto finito $\{Y_i\}_{i=1, \dots, n}$ de abiertos no vacíos, distintos entre sí y tales que $\text{diam}(F(Y_i)) < 2r + \text{diam}(F(y)) < \varepsilon$. Para cada $i = 1, \dots, n$, definimos la función

$$\lambda_i(y) = \frac{d(y, Y \setminus Y_i)}{\sum_{j=1}^n d(y, Y \setminus Y_j)}.$$

Estas funciones son claramente continuas y $\lambda_i(y) \neq 0$ si y solo si $y \in Y_i$. Para construir $f : Y \longrightarrow Q$, escogemos un punto $x_i \in F(Y_i)$ para cada i y los pegamos mediante las funciones λ_i :

$$f(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(y) x_i.$$

Esta función es continua por serlo las λ_i y se cumple que para todo $y \in Y$, si tomamos $x \in F(y)$,

$$\begin{aligned} d(x, f(y)) &\leq \left\| x - \sum_{i=1}^n \lambda_i(y) x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i(y) (x - x_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i(y) \|x - x_i\| < \\ &\varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i(y) = \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. \square

Dadas una multirred $\mathbf{F} = (F_n)_n$ y una sucesión decreciente que tiende a cero $(\varepsilon_n)_n$, por el Lema de Aproximación 2.1, para cada $F_n : X \longrightarrow Y \subseteq Q$ existe una aplicación $\varphi_n : X \longrightarrow Q$ a distancia $d(\varphi_n, F_n) < \varepsilon_n$. Nuestro objetivo es probar que es una aplicación aproximativa. Para todo entorno V de Y en Q , por ser Y cerrado en Q , existe un n_0 tal que $Y_{2\varepsilon_{n_0}} = \{z \in V \mid d(z, Y) < 2\varepsilon_{n_0}\}$ está contenido en V . Tal vez aumentando n_0 , podemos conseguir $F_n \simeq_{\varepsilon_{n_0}} F_{n+1}$ para $n \geq n_0$. Si llamamos H_{n_0} a esta ε_{n_0} -multihomotopía, podemos usar de nuevo el Lema de Aproximación 2.1 para obtener una homotopía H a distancia $d(H_{\varepsilon_{n_0}}, H) < \varepsilon_{n_0}$. Denotamos $f_n = H(x, 0)$ y $f_{n+1} = H(x, 1)$ y observamos que

$$d(\varphi_n, f_n) \leq d(\varphi_n, F_n) + d(F_n, f_n) < 2\varepsilon_{n_0},$$

e igualmente para $n + 1$. Así pues, tenemos dos aplicaciones $\varphi_n, f_n : X \longrightarrow Y$ a distancia menor que $2\varepsilon_{n_0}$. Esto implica que la función

$$\begin{aligned} G : X \times I &\longrightarrow V \\ (x, t) &\mapsto t\varphi_n(x) + (1-t)f_n(x) \end{aligned}$$

tiene su imagen contenida en $Y_{2\varepsilon_{n_0}} \subseteq V$ y por tanto $\varphi_n \simeq f_n$. Si repetimos el argumento para f_{n+1} , conseguimos $\varphi_n \simeq f_n \simeq f_{n+1} \simeq \varphi_{n+1}$, como queríamos demostrar.

Esta demostración prueba también que para cualquier otra elección $\mathbf{G} \simeq \mathbf{F}$ que hubiéramos hecho, la aplicación aproximativa resultante sería homótopa a φ , y por tanto una clase de homotopía de multirredes determina una única clase aproximativa. Vamos a probar que esta correspondencia es biyectiva:

TEOREMA 2.4. *La correspondencia $\omega : [\mathbf{F}] \mapsto [\varphi]$ entre multirredes y clases aproximativas descrita anteriormente es biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, veamos la sobreyectividad. Sea $[\varphi]$ una clase aproximativa y $(\varepsilon_n)_n$ una sucesión decreciente que tiende a cero. Para cada $n \geq 1$, si consideramos el entorno Y_{ε_n} de Y , sabemos que existe un $m_0 \geq n$ tal que para todo $m \geq m_0$ se tiene $\varphi_m \simeq \varphi_{m+1}$ en Y_{ε_n} . Si eliminamos los términos previos a m_0 de la sucesión para cada n , obtenemos un nuevo representante de la misma clase aproximativa que cumple $\varphi_n \simeq \varphi_{n+1}$ en Y_{ε_n} para todo $n \geq 1$. Denotamos a esta homotopía H_n , y definimos ahora

$$F_n(x) = \{y \in Y \mid d(y, \varphi_n(x)) \leq \varepsilon_n/3\}.$$

Para todo $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$. Entonces, para todo $n \geq n_0$, la función multivaluada

$$\hat{H}_n(x, t) = \{y \in Y \mid d(y, H_n(x, t)) \leq \varepsilon_n/3\}$$

es semicontinua superiormente por ser H_n continua y es ε_n -pequeña. Además, cumple que $\hat{H}_n(x, 0) = F_n(x)$ y $\hat{H}_n(x, 1) = F_{n+1}(x)$, de donde ambas son ε -multihomótopas y $\mathbf{F} = (F_n)_n$ es una multirred. Llamemos $[\psi] = \omega([\mathbf{F}])$. Para todo entorno V de Y en Q , dado que para todo $n \geq 1$

$$d(\varphi_n, \psi_n) \leq d(\varphi_n, F_n) + d(F_n, \psi_n) < \varepsilon_n/3 + \varepsilon_n < 2\varepsilon_n,$$

podemos encontrar (por el desarrollo hecho en la definición de ω) n_0 suficientemente grande tal que dos aplicaciones $2\varepsilon_n$ -ceranas sean homótopas para todo $n \geq n_0$. Esto prueba la sobreyectividad.

Para la inyectividad, supongamos que $[\varphi] = \omega([\mathbf{F}]) = \omega([\mathbf{G}]) = [\psi]$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que $\varepsilon_n < \varepsilon/3$ y $\varphi_n \simeq \psi_n$ en Y_ε para $n \geq n_0$. Llamamos a esta homotopía H_n y definimos $\hat{H}_n(x, t) = \{y \in Y \mid d(y, H_n(x, t)) \leq \varepsilon/3\}$. Esta es una aplicación multivaluada ε -pequeña y cumple $F_n(x) \subseteq \hat{H}_n(x, 0)$ y $G_n(x) \subseteq \hat{H}_n(x, 1)$, así que son ε -multihomótopas, como queríamos demostrar. \square

Para elevar el conjunto de multirredes a categoría, necesitamos una noción de composición. Sin embargo, la composición componente a componente no es necesariamente una multirred porque la composición de aplicaciones ε -pequeñas no tiene por qué serlo. Sanjurjo soluciona el problema definiendo la composición de clases de homotopía de multirredes $\mathbf{F} : X \rightarrow Y$, $\mathbf{G} : Y \rightarrow Z$ escogiendo una cierta sucesión $(k_n)_n$ y haciendo $[\mathbf{G}] \circ [\mathbf{F}] = [(G_n \circ F_{k_n})_n]$. El modo de construir esta sucesión es el siguiente: se escoge una sucesión de reales decreciente que tiende a cero, $(\varepsilon_n)_n$, para la cual G_m es ε_n -multihomótopa a G_n para $m \geq n$ (se puede conseguir eliminando miembros de la sucesión sin modificar su clase de homotopía) y otra $(\mu_n)_n$ tal que

$\text{diam}(G_n(K)) < \varepsilon_n$ para todo $K \subseteq Y$ de $\text{diam}(K) < \mu_n$ ⁴. Entonces $(k_n)_n$ es una sucesión creciente de índices tal que F_k es μ_n -multihomótopa a F_{k_n} para todo $k \geq k_n$. Esta definición de composición nos lleva al teorema final

TEOREMA 2.5 (Sanjurjo). *La categoría de compactos métricos y clases de homotopía de multirredes, que denotaremos HN, es isomorfa a la categoría forma de compactos métricos.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que la definición de composición asegura que hemos definido una multirred. Para todo $\varepsilon > 0$, tomamos n_0 tal que $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$. Sabemos que $G_n \simeq_{\varepsilon_n} G_{n_0}$, y llamamos H_n a esta homotopía. Por el mismo razonamiento de antes, podemos escoger $m_0 \geq n_0$ suficientemente grande de tal forma que, si $\text{diam}(K) < \mu_{m_0}$ para $K \subseteq Y \times I$, entonces $\text{diam}(H_n(K)) < \varepsilon_{n_0}$. Para este índice, $F_{k_n} \simeq_{\mu_0} F_{k_{m_0}}$ si $n \geq m_0$ por una μ_{m_0} -multihomotopía que denotamos L_{m_0} . Si consideramos ahora $H_n(L_{m_0}(x, t), t)$, esta es una aplicación multivaluada ε_{n_0} -pequeña que nos da la homotopía $G_{n_0}F_{k_{m_0}} \simeq_{\varepsilon_{n_0}} G_nF_{k_n}$. Por último, dado que $F_{k_{n_0}} \simeq_{\mu_{n_0}} F_{k_{m_0}}$, podemos concluir que $G_{n_0}F_{k_{n_0}} \simeq_{\varepsilon_{n_0}} G_nF_{k_n}$ para todo $n \geq n_0$, como queríamos demostrar.

Tenemos que demostrar ahora que la composición no depende de los representantes. Sean multirredes $\mathbf{F}, \mathbf{F}' : X \rightarrow Y$ y $\mathbf{G}, \mathbf{G}' : Y \rightarrow Z$ con $[\mathbf{F}] = [\mathbf{F}']$ y $[\mathbf{G}] = [\mathbf{G}']$. Denotaremos $(\varepsilon'_n)_n, (\mu'_n)_n, (k'_n)_n$ a las sucesiones que intervienen en la definición de $[\mathbf{G}'][\mathbf{F}']$. Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos n_0 tal que $\varepsilon_{n_0}, \varepsilon'_{n_0} < \varepsilon$, $G_{n_0} \simeq_{\varepsilon} G'_{n_0}$ y $G_nF_{k_n} \simeq_{\varepsilon} G_{n_0}F_{k_{n_0}}$ y $G'_nF'_{k'_n} \simeq_{\varepsilon} G'_{n_0}F'_{k'_{n_0}}$ para todo $n \geq n_0$. Si tomamos $m_0 \geq n_0$ que garantice $G_{n_0}F_{k_{m_0}} \simeq_{\varepsilon} G'_{n_0}F_{k_{m_0}}$ como hicimos antes y también $F_{k_{m_0}} \simeq_{\mu'_{n_0}} F'_{k'_{m_0}}$, entonces

$$G_{n_0}F_{k_{n_0}} \simeq_{\varepsilon} G_{n_0}F_{k_{m_0}} \simeq_{\varepsilon} G'_{n_0}F_{k_{m_0}} \simeq_{\varepsilon} G'_{n_0}F'_{k'_{m_0}} \simeq_{\varepsilon} G'_{n_0}F'_{k'_{n_0}}.$$

Resta demostrar que la correspondencia ω define un isomorfismo de categorías. Llamaremos $\Omega : \text{HN} \rightarrow \text{Sh}_B$ al funtor $\Omega(X) = X$ y $\Omega([\mathbf{F}]) = \omega([\mathbf{F}])$. Hemos de probar que $\Omega([\mathbf{G}]) \circ \Omega([\mathbf{F}]) = \Omega([\mathbf{G}][\mathbf{F}])$. Denotaremos $\Omega([G_nF_{k_n}]) = [\varphi]$, $\Omega([\mathbf{F}]) = [\gamma]$, $\Omega([\mathbf{G}]) = [\psi]$, y Ψ la extensión de ψ tal que $[\psi] \circ [\gamma] = [\Psi \circ \gamma]$.

Sea $(\varepsilon_n)_n$ una sucesión decreciente que tiende a cero tal que

1. $d(\varphi_n, G_nF_{k_n}) < \varepsilon_n$,
2. $d(\psi_n, F_{k_n}) < \varepsilon_n$,
3. $d(\gamma_n, G_n) < \varepsilon_n$.

Queremos probar que para todo V entorno abierto de Y en Q , $\varphi_n \simeq \Psi_n \circ \gamma_n$ en V . Sea $\rho > 0$ tal que todas dos aplicaciones ρ -cercanas en V son homótopas. Sabemos que si $y \in F_{k_n}(x)$,

$$\begin{aligned} d(\varphi_n(x), \Psi_n \circ \gamma_n(x)) &\leq d(\varphi_n(x), G_nF_{k_n}(x)) + d(G_nF_{k_n}(x), \Psi_n(F_{k_n}(x))) + \\ &d(\Psi_n(F_{k_n}(x)), \Psi_n\gamma_n(x)) < \varepsilon_n + d(G_n(y), \Psi_n(y)) + d(\Psi_n(y), \Psi_n\gamma_n(x)). \end{aligned}$$

Escogemos $n_0 \geq 1$ tal que $\varepsilon_n < \rho/3$ y tal que, si $d(F_{k_n}(x), \gamma_n(x)) < \varepsilon_n$, entonces, $d(\Psi_n(F_{k_n}(x)), \Psi_n\gamma_n(x)) < \rho/3$ para $n \geq n_0$. Siguiendo la cadena de desigualdades

⁴Esto es posible por la compacidad de X : dado $x \in X$, para todo $\varepsilon > 0$, por la semicontinuidad superior existe un $\delta_x > 0$ tal que, si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(G_n(x), G_n(y)) < \varepsilon$. La unión $\bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x)$ es un recubrimiento de X y podemos encontrar un número $\rho > 0$ de Lebesgue para el recubrimiento de tal forma que para todo $\varepsilon > 0$ y $x, y \in X$, si $d(x, y) < \rho$, entonces $d(G_n(x), G_n(y)) < \varepsilon$. Si tomamos $\varepsilon = \varepsilon_n$ y $\mu_n = \rho/2$, obtenemos la sucesión deseada.

anterior,

$$d(\varphi_n(x), \Psi_n \circ \gamma_n(x)) < 2\varepsilon_n + \rho/3 < \rho,$$

como queríamos demostrar. \square

4. Hiperpespacios

Esta sección está basada en el artículo *Homotopical properties of upper semifinite hyperspaces of compacta* de M. Alonso Morón y A. González Gómez [1]. En él, los autores introducen una topología especial en el hiperespacio de un compacto métrico que permite reformular el acercamiento a la forma de Sanjurjo, mostrando así sus similitudes con la descripción original de la forma por Borsuk.

DEFINICIÓN 2.6. Llamaremos **hiperespacio** de X al conjunto 2^X de subconjuntos cerrados no vacíos de X .

Podemos asociar diversas topologías a este espacio según las propiedades que queramos otorgarle. La **topología Hausdorff** viene dada por la **métrica Hausdorff**,

$$d_H(C, D) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid C \subseteq D_\varepsilon \text{ \& } D \subseteq C_\varepsilon\}.$$

Con esta topología, el hiperespacio, que denotaremos 2_H^X , es un compacto métrico. Hay multitud de resultados que relacionan ambos espacios, entre los cuales destacamos que 2_H^X es un continuo de Peano si y solo si X lo es. Además, si X es un continuo de Peano, 2^X es un AR y, de hecho, es homeomorfo al cubo de Hilbert.

En este trabajo, nos centraremos en otra topología. Supuesto que X es un espacio T_1 , definimos la **topología semifinita superior** como la dada por la base de abiertos $\mathcal{B} = \{B_U \mid U \text{ abierto en } X\}$, donde $B_U = \{C \in 2^X \mid C \subseteq U\}$. Como cada punto de X es un cerrado, podemos considerar la inmersión

$$\begin{aligned} \phi: X &\longrightarrow 2^X \\ x &\longmapsto \{x\}. \end{aligned}$$

Llamaremos a esta aplicación la **inclusión canónica** y a $\phi(X)$ la **copia canónica** de X en 2^X . Identificaremos X y $\phi(X)$ cuando sea preciso para simplificar la notación.

PROPOSICIÓN 2.1. Sea (X, d) un compacto métrico. La familia $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ formada por $U_\varepsilon = \{C \in 2^X \mid \text{diam}(C) < \varepsilon\}$ es una base de entornos abiertos de $X \subseteq 2^X$ para la topología semifinita superior.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que $X \subseteq U_\varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Veamos que cada U_ε es abierto: dado $C \in U_\varepsilon$, el conjunto $B = \{F \in 2^X \mid F \subseteq C_{\frac{\varepsilon - \text{diam}(C)}{2}}\}$ es abierto en 2^X por definición y está contenido en U_ε : si $F \in B$, entonces para todos $x, y \in F$ se tiene

$$d(x, y) < d(x, C) + d(C, y) + \text{diam}(C) < \varepsilon.$$

Solo resta ver que es base de entornos. Sea $U \subseteq 2^X$ abierto que contiene a X . Todo abierto es unión de elementos de la base, $U = \bigcup_i B_{V_i}$; además, los U_i forman un recubrimiento de X porque $X \subseteq U$. Si tomamos un número de Lebesgue $\rho > 0$ para el recubrimiento, entonces $X \subseteq U_\rho \subseteq U$, como queríamos demostrar. \square

En la sección anterior establecíamos un isomorfismo de categorías considerando aplicaciones multivaluadas. En realidad, una aplicación multivaluada $F : X \longrightarrow Y$ no es más que una función continua $f : X \longrightarrow 2^Y$, y podemos volver de la noción de multirred a la de aplicación aproximativa:

DEFINICIÓN 2.7. Una **aplicación aproximativa en 2^X** consiste en una sucesión de aplicaciones $f_n : X \longrightarrow 2^Y$ tales que, para todo entorno U de Y en 2^Y , $f_n \simeq f_{n+1}$ en U para casi todo n .

Esta noción coincide con la discutida en la primera sección, y aun más: podemos definir una noción de homotopía análoga para obtener, de nuevo, la categoría forma:

TEOREMA 2.6. *La categoría forma es isomorfa a la que tiene por objetos los compactos métricos y, por morfismos, las clases aproximativas en el hiperespacio.*

DEMOSTRACIÓN. La asociación se hace mediante la descripción de la forma de Sanjurjo: cada sucesión aproximativa $(\varphi_n)_n$ es así mismo una multirred. Esto es porque, para todo $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que $\varphi_n \simeq \varphi_{n+1}$ en U_ε . La homotopía H que obtenemos es una aplicación en U_ε , lo que implica que es una ε -multihomotopía viendo φ_n como aplicaciones multivaluadas.

De igual forma, toda multirred constituye una aplicación aproximativa, dado que para todo entorno U de Y en 2^Y existe un $\varepsilon > 0$ con $U_\varepsilon \subseteq U$. Para este ε , existe un n_0 con $F_n \simeq_\varepsilon F_{n+1}$, y esta ε -multihomotopía es una homotopía en U_ε entre F_n y F_{n+1} como aplicaciones en el hiperespacio.

Hemos definido así una correspondencia biunívoca entre aplicaciones aproximativas en el hiperespacio y multirredes. Argumentando como hemos hecho, es claro que esta asociación respeta las clases de homotopía o multihomotopía. Además, sin más que exigir las mismas condiciones a los entornos U_ε , se puede definir una noción análoga a la de Sanjurjo de composición de clases aproximativas en el hiperespacio que convierta la correspondencia en un isomorfismo. \square

La clave de la demostración anterior es la equivalencia entre ser aplicaciones multivaluadas ε -multihomótopas y ser aplicaciones en el hiperespacio homótopas en U_ε . Esta observación nos lleva del enfoque de Sanjurjo al de Borsuk de nuevo, mostrando que, en realidad, estábamos sustituyendo el cubo de Hilbert por el hiperespacio. Terminamos con un teorema que clarifica este comentario:

TEOREMA 2.7. *El hiperespacio 2^X de un compacto métrico (X, d) es un AE para la clase de compactos métricos.*

DEMOSTRACIÓN. Dados un espacio compacto métrico (Y, d_Y) y un subespacio cerrado $A \subseteq Y$, hemos de probar que toda aplicación $f : A \longrightarrow 2^X$ admite una extensión $\tilde{f} : Y \longrightarrow 2^X$. Vamos a definir la extensión en dos partes. Primero, definimos

$$g(y) = \{a \in A \mid d_Y(a, y) = d_Y(y, A)\} = A_y.$$

Esta función está bien definida porque A_y es cerrado: dada una sucesión $(a_n)_n \subseteq A_y$ convergente a a_0 ,

$$d(y, a_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(y, a_n) = d(y, A_y),$$

así que $a_0 \in A_y$. Supongamos que no fuera continua en $y_0 \in Y$. En tal caso, existiría un entorno de la imagen (podemos suponer que es un abierto básico) $U = B_{B(A_{y_0}, \varepsilon_0)}$

tal que ninguna imagen de las bolas $B(y_0, \varepsilon) \subseteq Y$ estaría contenida en dicho entorno. Sea (ε_n) una sucesión decreciente que tiende a cero. Podemos escoger $y_n \in B(y_0, \varepsilon_n)$ de tal forma que $g(y_n) \not\subseteq U$, es decir, existen $b_n \in g(y_n)$ tales que $d_Y(b_n, A_{y_0}) \geq \varepsilon_0$ y, sin embargo, $d_Y(b_n, y_n) = d_Y(y_n, A)$. Como A es compacto, $(b_n)_n$ tiene una subsucesión convergente a un $b \in A$ que denotamos $(b_{n_k})_k$. Ahora bien,

$$d_Y(y_0, A) \leq d_Y(y_0, b_{n_k}) \leq d_Y(y_0, y_n) + d_Y(y_n, b_{n_k}) = d_Y(y_0, y_n) + d_Y(y_n, A).$$

Tomando límites, tenemos $d_Y(y_0, A) = d(y_0, b)$, y entonces $b \in A_{y_0}$, contra la hipótesis. Esto prueba que g es continua.

Para concluir, probamos el hecho general de que, en estas condiciones, la función $f^* : 2^A \rightarrow 2^X$ definida por $f^*(C) = \bigcup_{c \in C} f(c)$ es continua. Primero, demostremos que $f^*(C)$ es cerrado en X . Dada una sucesión convergente $(x_n)_n \subseteq f^*(C)$ a un $x \in X$, entonces $x_n \in f(c_n)$ para una cierta sucesión de $(c_n)_n$. Esta tendrá una subsucesión convergente a un c y, por la continuidad de f ,

$$f(c) = \lim f(c_{n_k}) = \lim x_{n_k} = \lim x_n = x,$$

así que $x \in f^*(C)$. La continuidad también es sencilla: si $C \in 2^A$, sea B_V un entorno de $f^*(C)$ en 2^X . Entonces $f^{-1}(B_V)$ es un entorno abierto de C por la continuidad de f , y $f^*(B_{f^{-1}(B_V)}) \subseteq B_V$. La composición $f^* \circ g$ es la extensión buscada, y esto concluye la demostración. \square

La generalización que Borsuk dio de su teoría de la forma a espacios métricos generales consistía en sustituir el cubo de Hilbert por un par de AR's arbitrarios [4]. Aunque hemos visto claras similitudes entre los enfoques de Borsuk y Sanjurjo, los hiperespacios (con la topología semifinita superior) no nos llevan a dicha generalización, puesto que, a pesar de ser AE's, no son espacios métricos, ni siquiera Haursdorff.

Capítulo 3

La forma en espacios topológicos

En esta sección haremos una introducción a la teoría de la forma desde el punto de vista categórico, basada principalmente en el texto *Shape Theory: The Inverse System Approach* de S. Mardešić y J. Segal [20]. La noción de ANR-sistema del Capítulo 2 será sustituida por la HPol-expansión, y la de homotopía por la relación de equivalencia que define $\text{pro-}\mathcal{C}$. Comenzamos recordando la definición de sistema inverso:

DEFINICIÓN 3.1. Sea \mathcal{C} una categoría. Un **sistema inverso** \mathbf{X} en \mathcal{C} está formado por un conjunto dirigido de índices Λ , un objeto X_λ para cada $\lambda \in \Lambda$ y un **morfismo de paso** $p_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \rightarrow X_\lambda$ para cada par $\lambda \leq \lambda'$. Estos morfismos han de cumplir $p_{\lambda\lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$ y que si tenemos $\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$ entonces $p_{\lambda\lambda'}p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$. Si $\Lambda = \mathbb{N}$, diremos que \mathbf{X} es una sucesión inversa.

DEFINICIÓN 3.2. Un **morfismo de sistemas inversos** $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda) \rightarrow \mathbf{Y} = (Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M)$ viene dado por una función $\varphi : M \rightarrow \Lambda$ y morfismos $f_\mu : X_{\varphi(\mu)} \rightarrow Y_\mu$ en \mathcal{C} , de tal forma que para todo μ , si $\mu \leq \mu'$, existe un $\lambda \geq \varphi(\mu), \varphi(\mu')$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc} X_{\varphi(\mu)} & \longleftarrow & X_\lambda & \longrightarrow & X_{\varphi(\mu')} \\ \downarrow f_\mu & & & & \downarrow f_{\mu'} \\ Y_\mu & \longleftarrow & & \longrightarrow & Y_{\mu'} \end{array} \quad .$$

Para demostrar que hemos definido una categoría $\text{inv-}\mathcal{C}$, podemos definir la composición de morfismos $(f_\mu, \varphi) \circ (g_\nu, \psi)$ como el morfismo $(g_\nu \circ f_{\psi(\nu)}, \varphi \circ \psi)$. La composición es asociativa puesto que lo es para las funciones que lo componen, y podemos definir el morfismo identidad considerando $(\text{id}_{X_\lambda}, \text{id}_\Lambda)$.

OBSERVACIÓN 3.1. Una condición suficiente para que un subsistema $(X_\mu, p_{\mu\mu'}, M)$ de un sistema $(X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, con $M \subseteq \Lambda$, sea isomorfo a él es que M sea cofinal en Λ .

Ahora, definiremos la relación de equivalencia entre morfismos que imita a la homotopía dada por Borsuk entre sucesiones fundamentales. Diremos que $(f_\mu, \varphi) \sim (g_\lambda, \psi)$ si cada $\mu \in M$ admite un $\lambda \geq \varphi(\mu), \psi(\mu)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X_{\varphi(\mu)} & \longleftarrow & X_\lambda & \longrightarrow & X_{\psi(\mu)} \\ & \searrow f_\mu & & \swarrow g_\mu & \\ & & Y_\mu & & \end{array}$$

es conmutativo. Esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, y además respeta la composición, es decir, si $(f_\mu, \varphi) \sim (g_\nu, \psi)$ y $(f'_\mu, \varphi') \sim (g'_\nu, \psi')$, entonces $(g_\nu, \psi) \circ (f_\mu, \varphi) \sim (g'_\nu, \psi') \circ (f'_\mu, \varphi')$. Con esta relación, definimos la categoría $\text{pro-}\mathcal{C}$ en la que los objetos son los de $\text{inv-}\mathcal{C}$ y los morfismos las clases de equivalencia de morfismos

de $\text{inv-}\mathcal{C}$. La observación anterior implica que la composición está bien definida en $\text{pro-}\mathcal{C}$ y la identidad será la clase conteniendo al morfismo $(\text{id}_{X_\lambda}, \text{id}_\Lambda)$.

En realidad, la abstracción inicial se puede simplificar para acercarnos a la intuición:

DEFINICIÓN 3.3. Sean $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ e $\mathbf{Y} = (Y_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ sistemas inversos sobre el mismo conjunto de índices. Un morfismo (f_λ, φ) entre ellos es un **morfismo de nivel** si $\varphi = \text{id}_\Lambda$ y para todos $\lambda \leq \lambda'$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \longleftarrow & X_{\lambda'} \\ \downarrow f_\lambda & & \downarrow f_{\lambda'} \\ Y_\lambda & \longleftarrow & Y_{\lambda'} \end{array}$$

TEOREMA 3.1. Sea $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ un morfismo de $\text{pro-}\mathcal{C}$. Entonces existen sistemas inversos \mathbf{X}', \mathbf{Y}' indizados por el mismo conjunto totalmente ordenado e isomorfismos en $\text{pro-}\mathcal{C}$ $i : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ y $j : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}'$. Además, existe un morfismo $f' : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{i} & \mathbf{X}' \\ \downarrow \mathbf{f} & & \downarrow \mathbf{f}' \\ \mathbf{Y} & \xrightarrow{j} & \mathbf{Y}' \end{array}$$

es conmutativo, y \mathbf{f}' admite un representante que es un morfismo de nivel.

Ahora, demostramos un teorema que nos da una condición necesaria y suficiente para que un morfismo de nivel sea un isomorfismo en $\text{pro-}\mathcal{C}$.

TEOREMA 3.2 (Lema de Morita). Sean $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ e $\mathbf{Y} = (Y_\lambda, q_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ sistemas inversos sobre el mismo conjunto de índices. Un morfismo de nivel en $\text{pro-}\mathcal{C}$ $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ es un isomorfismo si y solo si para todo $\lambda \in \Lambda$ existen $\lambda' \geq \lambda$ y $g_\lambda : Y_{\lambda'} \rightarrow X_\lambda$ morfismo de \mathcal{C} tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \longleftarrow & X_{\lambda'} \\ \downarrow f_\lambda & \nwarrow g_\lambda & \downarrow f_{\lambda'} \\ Y_\lambda & \longleftarrow & Y_{\lambda'} \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN.

(\Rightarrow) Sea \mathbf{f} un isomorfismo de nivel con inversa $\mathbf{h} = (h_\lambda, \chi) : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$. Por definición, esto significa que existe un $\lambda' \geq \lambda, \chi(\lambda)$ tal que los diagramas

$$\begin{array}{ccc} Y_{\chi(\lambda)} & \longleftarrow Y_{\lambda'} & \longrightarrow Y_\lambda \\ & \searrow f_\lambda \circ h_\lambda & \swarrow \text{id}_\lambda \\ & & Y_\lambda \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} X_{\chi(\lambda)} & \longleftarrow X_{\lambda'} & \longrightarrow X_\lambda \\ & \searrow h_\lambda \circ f_{\chi(\lambda)} & \swarrow \text{id}_\lambda \\ & & X_\lambda \end{array}$$

conmutan. Esto implica que el morfismo $g_\lambda = h_\lambda q_{\chi(\lambda)\lambda'} : Y_{\lambda'} \rightarrow X_\lambda$ cumple lo requerido:

$$g_\lambda \circ f_{\lambda'} = h_\lambda \circ q_{\chi(\lambda)\lambda'} \circ f_{\lambda'} = h_\lambda \circ f_{\chi(\lambda)} \circ p_{\chi(\lambda)\lambda'} = p_{\lambda\lambda'}$$

y el segundo subdiagrama conmuta directamente, como queríamos demostrar.

(\Leftarrow) Supongamos que existen tales g_λ . Veamos que si para cada $\lambda \in \Lambda$ tomamos cualquier $\lambda' = \psi(\lambda) \geq \lambda$, entonces $\mathbf{g} = (g_\lambda, \psi) : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ es un morfismo de sistemas. Sean ahora $\lambda \in \Lambda$, $\lambda' \geq \lambda$ y tomemos $\lambda'' \geq \psi(\lambda), \psi(\lambda')$: observando el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 X_\lambda & \longleftarrow & X_{\lambda'} & \longleftarrow & X_{\lambda''} \\
 & \nwarrow g_\lambda & \downarrow f_{\psi(\lambda)} & \nwarrow g_{\lambda'} & \downarrow f_{\psi(\lambda'')} \\
 & & Y_{\psi(\lambda)} & & Y_{\psi(\lambda')} \\
 & & & \nwarrow g_{\lambda''} & \downarrow f_{\psi(\lambda'')} \\
 & & & & Y_{\lambda''} \\
 & & & & \longleftarrow Y_{\psi(\lambda'')}
 \end{array}$$

y atendiendo a las propiedades de g_λ se tiene

$$\begin{aligned}
 g_\lambda \circ q_{\psi(\lambda')\psi(\lambda'')} &= g_\lambda q_{\psi(\lambda')\lambda''} \circ q_{\lambda''\psi(\lambda'')} = p_{\lambda\lambda'} \circ p_{\lambda'\lambda''} \circ g_{\lambda''} = \\
 &= p_{\lambda\lambda'} \circ g_{\lambda'} \circ q_{\psi(\lambda')\lambda''} \circ q_{\lambda''\psi(\lambda'')} = p_{\lambda\lambda'} g_{\lambda'} \circ q_{\psi(\lambda')\psi(\lambda'')}.
 \end{aligned}$$

Así, \mathbf{g} es un morfismo. Además, es la inversa de f en $\text{pro-}\mathcal{C}$, puesto que

$$f_\lambda g_\lambda = q_{\lambda\psi(\lambda)} \quad \& \quad g_\lambda \circ f_{\psi(\lambda)} = p_{\lambda\psi(\lambda)}$$

se deducen de la hipótesis. □

OBSERVACIÓN 3.2. Dado un espacio $X \in \mathcal{C}$, podemos definir un sistema inverso trivial $\mathbf{X} = (X, \text{id}_X)$. Cualesquiera morfismos $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ de $\text{pro-}\mathcal{C}$ desde X que estén relacionados son de hecho el mismo, así que, en este caso, un morfismo de $\text{pro-}\mathcal{C}$ es lo mismo que uno de $\text{inv-}\mathcal{C}$. Por simplicidad, los denotaremos como $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathbf{X}$.

Terminamos la sección con una definición que ya aparecía en el Capítulo 2 a la hora de definir la forma:

DEFINICIÓN 3.4. Sea \mathbf{X} un sistema en $\text{pro-}\mathcal{C}$. Un límite inverso de \mathbf{X} consiste en un objeto $X \in \mathcal{C}$ y un morfismo $\mathbf{p} : X \rightarrow \mathbf{X}$ de $\text{pro-}\mathcal{C}$ con la propiedad universal siguiente: para cualquier otro morfismo $\mathbf{g} : Y \rightarrow \mathbf{X}$ de $\text{pro-}\mathcal{C}$, existe un único morfismo $g : X \rightarrow Y$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\mathbf{p}} & \mathbf{X} \\
 \searrow g & & \uparrow \mathbf{g} \\
 & & Y
 \end{array}$$

1. La definición de la forma

En lo que sigue, vamos a trabajar en las categorías HTop (espacios topológicos y H-aplicaciones¹) y HPol (espacios con el tipo de homotopía de un poliedro y H-aplicaciones). Para definir la forma, asociaremos a cada espacio de HTop un sistema inverso de espacios de HPol , y la forma vendrá dada como una clase de equivalencia de esos sistemas asociados.

DEFINICIÓN 3.5. Dado un objeto $X \in \text{HTop}$, una **HPol-expansión** de X respecto de HTop es un morfismo de pro-HPol $\mathbf{p} : X \rightarrow \mathbf{X}$ con la propiedad universal siguiente: para todo sistema inverso $\mathbf{Y} \in \text{pro-HPol}$, y cada morfismo $\mathbf{h} : X \rightarrow \mathbf{Y}$

¹Por H-aplicación $X \rightarrow Y$ nos referiremos a una clase de homotopía de aplicaciones $X \rightarrow Y$.

de pro-HTop, existe un único morfismo $\mathbf{f} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ en pro-HPol tal que $\mathbf{h} = \mathbf{f}\mathbf{p}$, es decir, hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xleftarrow{\mathbf{p}} & X \\ & \searrow \mathbf{f} & \downarrow \mathbf{h} \\ & & \mathbf{Y} \end{array}$$

OBSERVACIÓN 3.3. Dadas dos HPol-expansiones del mismo espacio, $\mathbf{p} : X \longrightarrow \mathbf{X}$ y $\mathbf{p}' : X \longrightarrow \mathbf{X}'$, existe un único morfismo $\mathbf{i} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}'$ tal que $\mathbf{i}\mathbf{p} = \mathbf{p}'$. También existe un único morfismo $\mathbf{i}' : \mathbf{X}' \longrightarrow \mathbf{X}$ tal que $\mathbf{i}'\mathbf{p} = \mathbf{p}'$. Como $\mathbf{i}'\mathbf{i}\mathbf{p} = \mathbf{p}$, por la unicidad concluimos que $\mathbf{i}'\mathbf{i} = \text{id}_{\mathbf{X}}$. De igual forma, $\mathbf{i}\mathbf{i}' = \text{id}_{\mathbf{X}'}$, así que es un isomorfismo.

Damos ahora una caracterización de las HPol-expansiones útil en la siguiente demostración.

PROPOSICIÓN 3.1. *Dado un espacio X , una HPol-expansión consiste en un sistema inverso $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ en HPol y un morfismo $\mathbf{p} : X \longrightarrow \mathbf{X}$ tal que*

$$p_{\lambda\lambda'}p_{\lambda'} = p_{\lambda} \quad \forall \lambda \leq \lambda'$$

y, además, satisface

- (E1) *Para todos $P \in \text{ANR}$ y H -aplicación $h : X \longrightarrow P$ existe un $\lambda \in \Lambda$ y otra H -aplicación $f : X_\lambda \longrightarrow P$ tal que $fp_\lambda = h$.*
- (E2) *Si tenemos $P \in \text{ANR}$ y dos H -aplicaciones $f, g : X_\lambda \longrightarrow P$ tales que $fp_\lambda = gp_\lambda$, entonces existe un $\lambda' \geq \lambda$ tal que $fp_{\lambda\lambda'} = gp_{\lambda\lambda'}$.*

TEOREMA 3.3. *Todo $X \in \text{HTop}$ tiene una HPol-expansión.*

DEMOSTRACIÓN. Para esta demostración vamos a definir una HPol-expansión especial conocida como el Sistema de Čech. Dado $X \in \text{HTop}$, consideramos Λ el conjunto de todos sus recubrimientos normales, es decir, recubrimientos abiertos que tienen una partición de la unidad localmente finita subordinada. Con cada recubrimiento $\mathcal{U} \in \Lambda$, podemos considerar el complejo simplicial $N(\mathcal{U})$, que llamamos el **nervio** de \mathcal{U} , cuyos vértices son los abiertos del recubrimiento y $\{U_1, \dots, U_n\}$ forman símplice si su intersección es no vacía. Si consideramos el preorden dado por el refinamiento, dados $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ podemos definir $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : N(\mathcal{V}) \longrightarrow N(\mathcal{U})$ que lleva cada $V \in \mathcal{V}$ a un $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$. Claramente, estas proyecciones son aplicaciones simpliciales y por tanto definen aplicaciones entre las realizaciones de los nervios. Además, la composición de proyecciones es una proyección. Dos proyecciones entre los mismos nervios son siempre contiguas, así que sus realizaciones son siempre homótopas (ver A.3).

Así pues, $C(X) = (|N(\mathcal{U})|, [p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}], \Lambda)$ es un sistema inverso en HPol que llamaremos **sistema de Čech**. Queremos demostrar que es una HPol-expansión, para lo cual hemos de definir un morfismo $\mathbf{p} : X \longrightarrow C(X)$. Una aplicación canónica $p : X \longrightarrow |N(\mathcal{U})|$ es una aplicación tal que, para todo $U \in \mathcal{U}$,

$$p^{-1}(\text{St}(U, N(\mathcal{U}))) \subseteq U. \quad (1)$$

Dada una partición de la unidad $\{\psi_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ subordinada a \mathcal{U} , podemos definir una aplicación canónica mediante la fórmula

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{U}} : X &\longrightarrow |N(\mathcal{U})| \\ x &\mapsto \sum_{U \in \mathcal{U}} \psi_U(x)U. \end{aligned}$$

Observamos que dos aplicaciones canónicas p y p' en el mismo nervio $|N(\mathcal{U})|$ son simplicialmente cercanas: dado $x \in X$, la propiedad (1) implica que, si $\text{sop}(p(x)) = \{U_1, \dots, U_n\}$ y $\text{sop}(p'(x)) = \{U'_1, \dots, U'_n\}$, entonces $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n \cap U'_1 \cap \dots \cap U'_n$, así que todos ellos forman un simplejo que contiene a $p(x)$ y $p'(x)$. De la Proposición A.2 se infiere que todas ellas son homótopas. Asimismo, si $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$, entonces $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}p_{\mathcal{U}}$ es una aplicación canónica:

$$(p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}p_{\mathcal{U}})^{-1}(\text{St}(U, N(\mathcal{U}))) \subseteq p_{\mathcal{U}}^{-1}\left(\bigcup_{V \subseteq U} \text{St}(V, N(\mathcal{V}))\right) \subseteq \bigcup_{V \subseteq U} V \subseteq U.$$

Aunando ambos hechos, obtenemos que $[p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}][p_{\mathcal{U}}] = [p_{\mathcal{U}}]$, así que el morfismo $\mathbf{p} = (p_{\mathcal{U}}) : X \rightarrow C(X)$ es un morfismo de sistemas inversos. Para demostrar que es HPol-expansión, hemos de verificar que se cumplen (E1) y (E2).

Sean P y h como en (E1). Tomamos \mathcal{V} un recubrimiento abierto de P tal que dos aplicaciones $f, g : X \rightarrow P$ \mathcal{V} -cercanas sean homótopas (ver 1.2). Entonces, el Lema 2 en [20, p. 316] asegura que

existen un recubrimiento normal \mathcal{U} y una aplicación $f_{\mathcal{U}} : |N(\mathcal{U})| \rightarrow P$ tales que para todo $U \in \mathcal{U}$ existe un $V \in \mathcal{V}$ con

$$f_{\mathcal{U}}(\text{St}(U, N(\mathcal{U}))) \subseteq V \quad \& \quad h(U) \subseteq V.$$

Es evidente que, bajo estas condiciones, $f_{\mathcal{U}}p_{\mathcal{U}}$ y h son \mathcal{V} -cercanas y, por tanto, homótopas, como queríamos demostrar.

Análogamente, sean P y $f, g : X_{\mathcal{U}} \rightarrow P$ como en (E2). Denotaremos $i : |N(\mathcal{U})| \rightarrow |N(\mathcal{U})|_m$ a la equivalencia homotópica del Lema A.1 y j a su inversa homotópica. Sabemos que este complejo métrico es un ANR 1.8, así que el Lema 1 en [20, p. 46] nos asegura que

existen un $M \in \text{ANR}$ y aplicaciones $\varphi : X \rightarrow M$ y $\psi : M \rightarrow |N(\mathcal{U})|_m$ tales que el siguiente diagrama conmuta en homotopía:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & M \\ \downarrow p_{\mathcal{U}} & & \downarrow \psi \\ |N(\mathcal{U})| & \xrightleftharpoons[i]{i} & |N(\mathcal{U})|_m \\ \swarrow f & & \searrow g \\ P & & P \end{array}$$

Si consideramos el recubrimiento $\mathcal{U}' = \{U'\}_{U \in \mathcal{U}}$ dado por $U' = \psi^{-1}(\text{St}(U, N(\mathcal{U})))$, podemos aplicar el Lema 2 que enunciamos antes ([20, p. 316]) para obtener un recubrimiento normal \mathcal{V} y una aplicación $h : |N(\mathcal{V})| \rightarrow M$ tales que, para todo $V \in \mathcal{V}$, existe un $U \in \mathcal{U}$ con

$$h(\text{St}(V, N(\mathcal{V}))) \subseteq \psi^{-1}(\text{St}(U, N(\mathcal{U}))) \quad \& \quad \varphi(V) \subseteq \psi^{-1}(\text{St}(U, N(\mathcal{U}))).$$

Esto implica que

$$V \subseteq \varphi^{-1}\psi^{-1}(\text{St}(U, N(\mathcal{U}))) = p_{\mathcal{U}}^{-1}(\text{St}(U, N(\mathcal{U}))) \subseteq U,$$

de donde \mathcal{V} es un refinamiento de \mathcal{U} y $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(V) = U$ es una proyección. Esta aplicación simplicial es contigua a ψh : dado $y \in |N(\mathcal{V})|$ con $\text{sop}(y) = \{V_1, \dots, V_n\}$, entonces denotamos $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(V_i) = U_i$. Por la definición de h ,

$$\psi h(y) \in \bigcap_{i=1}^n \text{St}(U_i, N(\mathcal{U})),$$

así que $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}}(y) \in \text{sop}(\psi h(y))$, de donde son contiguas. Así, tenemos una homotopía $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \simeq j\psi h$ y concluimos que

$$fp_{\mathcal{U}\mathcal{V}} \simeq fj\psi h \simeq gj\psi h \simeq gp_{\mathcal{U}\mathcal{V}},$$

como queríamos demostrar. \square

Para describir la categoría de forma, tenemos todavía que exhibir sus morfismos. En esencia, son simplemente los morfismos de pro-HPol entre expansiones. Como un espacio puede tener varias, tenemos que relacionarlos para evitar ambigüedades. Dados espacios de HTop y HPol-expansiones representados en el siguiente diagrama,

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{X} & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbf{Y} \\ & \nearrow \mathbf{p} & \downarrow \mathbf{i} & & \downarrow \mathbf{j} \nwarrow \mathbf{q} \\ X & & & & Y \\ & \searrow \mathbf{p}' & \downarrow & & \downarrow \swarrow \mathbf{q}' \\ & & \mathbf{X}' & \xrightarrow{\mathbf{f}'} & \mathbf{Y}' \end{array} ,$$

decimos que dos morfismos \mathbf{f} y \mathbf{f}' de pro-HPol en esta situación están relacionados si el diagrama conmuta. Esta relación es de equivalencia y se puede definir la composición de clases componiendo representantes. Estas clases serán los morfismos de la **categoría Forma**, que denotaremos por ShTop, y sus objetos los de HTop. Dado un morfismo $f : X \rightarrow Y$, podemos asociarle un único morfismo de ShTop expandiendo ambos espacios y completando el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xleftarrow{\mathbf{p}} & X \\ \downarrow \mathbf{f} & & \downarrow f \\ \mathbf{Y} & \xleftarrow{\mathbf{q}} & Y \end{array} .$$

La clase Sh de este morfismo no depende de las expansiones, así que podemos definir el funtor forma

$$S : \text{HTop} \rightarrow \text{ShTop}.$$

Este funtor no es inyectivo ni sobreyectivo, aunque induce una biyección entre morfismos cuando el espacio de llegada es un $Y \in \text{HPol}$. Diremos que dos espacios tienen la misma forma y denotaremos $\text{sh}(X) = \text{sh}(Y)$ cuando sean isomorfos en Sh. Por ser S un funtor, dos espacios homotópicamente equivalentes tienen la misma forma; recíprocamente, si dos espacios son ANR's, podemos asociarles sistemas triviales y que tengan la misma forma equivale a que tengan el mismo tipo de homotopía. Así pues, cuando hay buen comportamiento local, la forma se reduce a la homotopía.

PROPOSICIÓN 3.2. *Un morfismo $F : X \xrightarrow{\text{Sh}} Y$ inducido por un $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ es un isomorfismo si y solo si lo es \mathbf{f} .*

Este teorema nos indica que dos espacios tienen la misma forma si y solo si tienen sendas HPol-expansiones isomorfas en pro-HPol. Esta fue la definición de la forma que dimos en el Capítulo 2, Sección 2, sustituyendo las expansiones por límites inversos. De hecho, son equivalentes tener el tipo de homotopía de un poliedro y el de un ANR 1.8, por lo que nuestros ANR-sistemas son también sistemas en inv-HPol, y también determinan la forma:

TEOREMA 3.4. *Sea \mathbf{X} un sistema inverso de ANR's compactos y $\mathbf{p} : X \rightarrow \mathbf{X}$ un límite inverso. Entonces $H\mathbf{p} : X \rightarrow H\mathbf{X}$ es HPol-expansión, donde H es el funtor de homotopía.*

Para concluir la sección, vamos a introducir un nuevo sistema inverso que llamaremos **Sistema de Vietoris**. Dado un espacio topológico X , tomamos Λ el conjunto de todos sus recubrimientos normales ordenados por el refinamiento. Los poliedros $|K_{\mathcal{U}}|$ serán la realización de los complejos cuyos vértices son los puntos de X , y $\{x_0, \dots, x_n\}$ forman un símplexe si existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $\{x_0, \dots, x_n\} \subseteq U$. Los morfismos de paso $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}} : K_{\mathcal{V}} \rightarrow K_{\mathcal{U}}$ vendrán dados por las aplicaciones simpliciales que llevan cada vértice en sí mismo. Podemos establecer un morfismo de pro-HPol entre este sistema y el Sistema de Čech: para cada $\{U_1, \dots, U_n\} \in |N(\mathcal{U})|$, tenemos que existe un $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n$. La aplicación

$$q_{\mathcal{U}} : \begin{array}{ccc} N(\mathcal{U})' & \longrightarrow & K_{\mathcal{U}} \\ \{U_1, \dots, U_n\} & \mapsto & x \in U_1 \cap \dots \cap U_n, \end{array} \quad (2)$$

es simplicial entre la subdivisión baricéntrica del nervio de \mathcal{U} y su complejo de Vietoris asociado. Dado que las realizaciones de un complejo y de su subdivisión baricéntrica coinciden (ver A.1), esta induce una aplicación continua $q_{\mathcal{U}} : |N(\mathcal{U})| \rightarrow |K_{\mathcal{U}}|$. Es más, cualesquiera dos aplicaciones definidas de esta forma son contiguas, y por tanto homótopas. Fue probado por Dowker en *Homology groups of relations* [12] que este es un isomorfismo de pro-HPol, y por tanto el Sistema de Vietoris es también una HPol-expansión.

Aunque esta definición es bastante abstracta a priori, si nos reducimos a la categoría de espacios métricos compactos, los recubrimientos abiertos siempre son normales. Además, el subconjunto $M \subseteq \Lambda$ de todos los recubrimientos del tipo $\{B(x, \varepsilon) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$ es cofinal y está ordenado por el refinamiento. Esto nos da un subsistema inverso isomorfo a $\mathcal{V}(X)$ en el que cada término, que designaremos ahora $\mathcal{V}_{\varepsilon}(X)$, será la realización del complejo cuyos vértices son los puntos de X y en el que $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ es un símplexe si $\text{diam}(\sigma) < \varepsilon$. Evidentemente, si escogemos una sucesión decreciente de números reales positivos $(\varepsilon_n)_n$, el subsistema de $\mathcal{V}_{\varepsilon}(X)$ dado solo por los recubrimientos $\{B(x, \varepsilon_n) \mid x \in X\}_n$ es también isomorfo a $\mathcal{V}(X)$. Este es el sistema del que nos servimos en el Capítulo 5, y es también HPol-expansión por ser isomorfo a $\mathcal{V}(X)$. Es más, este es un ANR-sistema en el sentido del Capítulo 2, puesto que el conjunto de índices es cofinito. Sin embargo, su límite inverso no es en general homeomorfo a X .

2. Invariantes de forma

Una ventaja clave del acercamiento por sistemas inversos a la forma es la facilidad para definir invariantes algebraicos. En esta sección, vamos a definir invariantes que podemos asociar a un espacio topológico tal y como lo hacíamos en teoría de homotopía.

En muchos de los resultados que son hitos de la teoría de la forma necesitaremos condiciones sobre la dimensión del espacio. Diremos que un complejo simplicial tiene dimensión $\dim K \leq n$ si todos sus símplexes tienen cardinal menor o igual que n . Extenderemos esta definición a su realización, conviniendo que $P = |K|$ tiene $\dim P = n$ si este es el máximo de los cardinales de sus símplexes. Un sistema inverso \mathbf{X} en pro-HPol tendrá dimensión $\dim \mathbf{X} \leq n$ si, para todo $\lambda \in \Lambda$, la $\dim X_{\lambda} \leq n$.

DEFINICIÓN 3.6. Diremos que un espacio topológico X tiene **morfodimensión** $\text{sd}(X) = n$ si n es la mínima dimensión de las HPol-expansiones que admite. Diremos que $\text{sd}(X) = \infty$ si este mínimo no existe.

En sintonía con la idea de la teoría de la forma, en vez de asociar un único grupo invariante por forma, primero construiremos un sistema inverso de grupos, que llamaremos pro-grupo. Si $\mathbf{X} = (X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ es un sistema en pro-HTop , para cada grupo abeliano G podemos definir $H_k(\mathbf{X}, G) = (H_k(X_\lambda; G), H_k(p_{\lambda\lambda'}; G), \Lambda)$, que es un sistema en pro-Ab . De hecho, para cada morfismo $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ podemos definir $H_k(\mathbf{f}; G) : H_k(\mathbf{X}; G) \rightarrow H_k(\mathbf{Y}; G)$ y este funtor respeta la relación de pro-HTop , es decir, todo morfismo de pro-HTop induce uno en pro-Ab . Tenemos así un funtor de homología entre sistemas

$$H_k(-; G) : \text{pro-HTop} \rightarrow \text{pro-Ab}.$$

Recuperando la idea de la sección anterior, para definir invariantes en un $X \in \text{HTop}$, consideramos una HPol-expansión $\mathbf{p} : X \rightarrow \mathbf{X}$ y definimos el **k -ésimo pro-grupo de homotopía con coeficientes en G** como la clase de equivalencia de pro-grupos que contiene a $H_k(\mathbf{X}; G)$. Esta definición es consistente, puesto que para cualquier otra HPol-expansión $\mathbf{p}' : X \rightarrow \mathbf{X}'$ hay un isomorfismo $\mathbf{i} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ que induce un isomorfismo sobre los pro-grupos. Lo denotaremos por $\text{pro-}H_k(X; G)$, y si $G = \mathbb{Z}$ lo omitiremos en la notación. Lo relevante es que estos pro-grupos son un invariante de forma:

$$\text{pro-}H_k(-; G) : \text{ShTop} \rightarrow \text{pro-Ab}$$

es un funtor para todo $k \geq 0$ y $G \in \text{Ab}$.

Podemos dar un paso más: dado que sabemos que la categoría pro-Ab tiene límites inversos, definimos los **k -ésimos grupos de homología de Čech**:

$$\check{H}_k(X; G) = \varprojlim \text{pro-}H_k(X; G).$$

Estos coinciden con los grupos de homología de Čech clásicos y son invariantes de forma.

TEOREMA 3.5 (continuidad). Sea $\mathbf{p} : X \rightarrow \mathbf{X}$ una HTop-expansión y $\check{\mathbf{p}}$ el homomorfismo inducido entre los grupos de homología de Čech. Entonces el homomorfismo límite inducido por este, $\check{p} : \check{H}_k(X; G) \rightarrow \varprojlim \check{H}_k(\mathbf{X}; G)$ es un isomorfismo de grupos.

En el caso de la cohomología de Čech, el desarrollo es idéntico, pero ahora el **k -ésimo grupo de cohomología de Čech** viene dado por un límite directo

$$\check{H}^k(X; G) = \varinjlim H^k(\mathbf{X}; G) = \varinjlim (H^k(X_\lambda; G), H^k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda),$$

puesto que la cohomología es un funtor contravariante. En resumen, es un invariante de forma y también coincide con la cohomología clásica. Dualizando el teorema anterior, tenemos el siguiente

TEOREMA 3.6 (continuidad). Sea $\mathbf{p} : X \rightarrow \mathbf{X}$ una HTop-expansión. Entonces el homomorfismo $\check{p} : \varinjlim \check{H}^k(\mathbf{X}; G) \rightarrow \check{H}^k(X; G)$ inducido por \mathbf{p} es un isomorfismo de grupos.

Por último, construimos los grupos de homotopía y de forma. En homotopía tenemos que considerar espacios puntuados $(X, *)$ de HPol_* , y definimos el **k -ésimo pro-grupo de homotopía** como

$$\text{pro-}\pi_k(X, *) = \pi_k(\mathbf{X}, *) = ((\pi_k(X_\lambda, *)), \pi_k(p_{\lambda\lambda'}), \Lambda),$$

dada una HPol_* -expansión \mathbf{X} cualquiera de X . Estos grupos son independientes de la expansión y están bien definidos en pro-Grp . Además, todo morfismo de Sh_* $F : (X, *) \longrightarrow (Y, *)$ viene dado por uno de pro-HPol_* , y por ende induce uno entre los pro-grupos, de tal forma que

$$\text{pro-}\pi_k(-) : \text{ShTop}_* \longrightarrow \begin{cases} \text{pro-Set}_* & \text{si } k = 0 \\ \text{pro-Grp} & \text{si } k = 1 \\ \text{pro-Ab} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

es un funtor. Podemos definir así el **k -ésimo grupo de forma**

$$\check{\pi}_k(X, *) = \varprojlim \text{pro-}\pi_k(X, *),$$

que es un funtor $\check{\pi}_k : \text{Set}_* \longrightarrow \mathcal{C}$ donde \mathcal{C} varía según k como acabamos de describir. Tenemos también un teorema de continuidad en este caso:

TEOREMA 3.7 (continuidad). *Sea $\mathbf{p} : (X, *) \longrightarrow (\mathbf{X}, *)$ una HTop_* -expansión. Entonces, los homomorfismos*

$$\check{\pi}_k(p_\lambda) : \check{\pi}_k(X, *) \longrightarrow \check{\pi}_k(X_\lambda, *)$$

definen un morfismo

$$\check{\pi}_k(\mathbf{p}) : \check{\pi}_k(X, *) \longrightarrow \check{\pi}_k(\mathbf{X}, *)$$

*que induce un isomorfismo $\check{\pi}_k(X, *) \longrightarrow \varprojlim \check{\pi}_k(\mathbf{X}, *)$ entre los límites.*

3. Algunos teoremas importantes

Como dijimos en la introducción, la teoría de la forma permite llegar a teoremas similares a los de la teoría de homotopía eliminando las condiciones sobre el comportamiento local de los espacios.

Para enunciar el Teorema de Hurewicz, necesitamos definir el análogo al homomorfismo de Hurewicz entre pro-grupos. Los homomorfismos de Hurewicz

$$\varphi_\lambda : \pi_k(X_\lambda, *) \longrightarrow H_k(X_\lambda)$$

definen un morfismo de nivel entre los pro-grupos

$$\varphi : \pi_k(\mathbf{X}, *) \longrightarrow H_k(\mathbf{X}),$$

y este es también un morfismo entre $\text{pro-}\pi_k(X, *) \longrightarrow \text{pro-}H_k(X)$ [20, p. 135]. Ya podemos enunciar el teorema:

TEOREMA 3.8 (Hurewicz). *Sea $(X, *)$ un espacio topológico punteado tal que $\text{pro-}\pi_k(X, *) = 0$ para $k = 0, \dots, n-1$. Si $n \geq 2$, se tienen:*

1. *$\text{pro-}H_k(X) = 0$ para $k = 1, \dots, n-1$;*
2. *el morfismo de Hurewicz $\text{pro-}\pi_n(X, *) \longrightarrow \text{pro-}H_n(X)$ es un isomorfismo de pro-grupos;*
3. *$\text{pro-}\pi_{n+1}(X, *) \longrightarrow \text{pro-}H_{n+1}(X)$ es un epimorfismo de pro-grupos.*

*Además, si $n = 1$, $\text{pro-}\pi_1(X, *) \longrightarrow \text{pro-}H_1(X)$ es un epimorfismo.*

El Teorema de Whitehead afirma que una equivalencia homotópica débil entre CW-complejos es una equivalencia homotópica. En el contexto Sh_* , hablaremos de **n -equivalencias**, que serán morfismos $\mathbf{f} : (\mathbf{X}, *) \longrightarrow (\mathbf{Y}, *)$ en pro-HTop_* que inducen isomorfismos $\pi_k(\mathbf{f}) : \pi_k(\mathbf{X}, *) \longrightarrow \pi_k(\mathbf{Y}, *)$ para $k \leq n-1$ y un epimorfismo cuando $k = n$. Un morfismo $F : (X, *) \longrightarrow (Y, *)$ de Sh_* será n -equivalencia cuando su morfismo asociado en pro-HPol_* lo sea.

TEOREMA 3.9 (Whitehead). *Si $F : (X, *) \longrightarrow (Y, *)$ en Sh_* es una n -equivalencia entre espacios conexos, y $\text{sd}(X) \leq n-1$, $\text{sd}(Y) \leq n$, entonces F es un isomorfismo de Sh_* .*

Es interesante observar que, aunque el Teorema de Whitehead clásico funciona para $n = \infty$, el análogo en forma necesita la finitud de la dimensión.

Topología en espacios finitos

En esta sección vamos a hacer un breve resumen de las propiedades fundamentales de los espacios finitos que nos son de interés en el estudio de la forma. Las referencias fundamentales aquí son el libro *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications* de J. A. Barmak [2] y las notas publicadas por J. P. May [24].

La quintaesencia de la teoría de espacios finitos es que existe una correspondencia entre ellos y los conjuntos preordenados a través de los abiertos minimales: si para un punto $x \in X$ consideramos U_x el abierto minimal que lo contiene, diremos que $x \leq y$ si $U_x \subseteq U_y$. Recíprocamente, podemos dotar a un conjunto preordenado de una topología dada por la base $\{U_x \mid x \in X\}$. Observamos además que los espacios T_0 se corresponden con órdenes parciales y para los espacios finitos T_1 la topología es la discreta.

Mediante esta asociación, las aplicaciones continuas quedan caracterizadas como las que preservan el orden, y dos aplicaciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homótopas si existen otras aplicaciones h_1, \dots, h_n que forman una cadena de desigualdades desde f hasta g , por ejemplo $f \leq h_1 \geq h_2 \leq \dots \leq h_n \geq g$.

La representación esquemática más sencilla de un espacio finito es el llamado **diagrama de Hasse**: un grafo en el que cada punto de X es un vértice y estos se unen según la relación de orden, de tal forma que empezamos desde los mayores y vamos trazando líneas hacia abajo hasta los menores.

EJEMPLO 4.1. Consideremos el espacio generado por la base

$$\{\{a\}, \{b\}, \{e\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}.$$

Podemos representar su diagrama de Hasse como

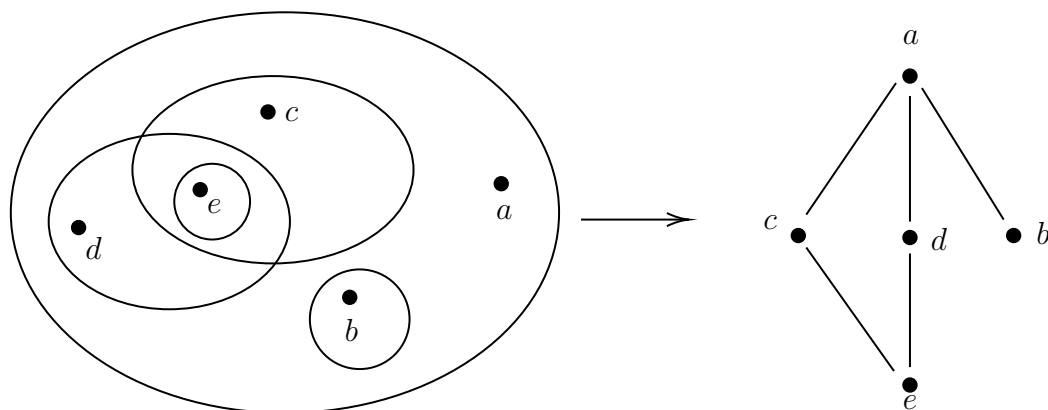


FIGURA 4.1. Construcción del diagrama de Hasse a partir del espacio finito.

Esta representación nos ayuda, además, a reducir un espacio con retráctos por deformación. Llamaremos a un punto **colapsable hacia abajo (arriba)** cuando en el diagrama de Hasse solo tenga una línea de salida (entrada). Estas condiciones son suficientes para asegurar que la aplicación que los envía hacia el punto inmediatamente inferior (superior) y fija el resto de puntos es un retracto por deformación. Si iteramos este proceso de reducción, llegamos a un espacio sin puntos colapsables, que llamaremos **espacio minimal**. Llamaremos **núcleo** de un espacio a su espacio minimal asociado. Esta asociación está bien definida por el siguiente teorema:

TEOREMA 4.1 (Teorema de Clasificación). *Dos espacios finitos minimales homotópicamente equivalentes son homeomorfos. Asimismo, dos espacios finitos son homotópicamente equivalentes si y solo si sus núcleos son homeomorfos. En particular, todos los núcleos de un espacio son homeomorfos.*

1. Teoría de McCord

La teoría de McCord, iniciada por él mismo en 1965 [25], relaciona los tipos de homotopía débil de espacios finitos con los de complejos simpliciales finitos, demostrando que son exactamente los mismos.

DEFINICIÓN 4.1. Llamaremos **equivalencia homotópica débil** a una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f_* : \Pi_0(X, x_0) \rightarrow \Pi_0(Y, f(x_0))$ es biyectiva y

$$f_* : \Pi_n(X, x_0) \rightarrow \Pi_n(Y, f(x_0))$$

es un isomorfismo para $n \geq 1$.

Esta noción no establece una relación de equivalencia entre espacios, puesto que no es simétrica.

Ahora, vamos a estudiar cómo asociar un complejo simplicial¹ a un espacio topológico de tal forma que se mantenga el tipo de homotopía débil:

DEFINICIÓN 4.2. Dado un espacio X finito y T_0 , el **complejo del orden** $\mathcal{K}(X)$ es el que tiene por vértices los puntos de X y por símlices a sus cadenas no vacías. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, se define la **función simplicial asociada** $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$ por $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$.

TEOREMA 4.2. *Sea X un espacio topológico finito y T_0 . La **aplicación de McCord** definida como*

$$\mu_X : \begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X)| & \longrightarrow & X \\ \alpha & \mapsto & \text{mín sop}(\alpha) \end{array}$$

es una equivalencia homotópica débil.

OBSERVACIÓN 4.1. Dada una función continua f , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{K}(X)| & \xrightarrow{|\mathcal{K}(f)|} & |\mathcal{K}(Y)| \\ \downarrow \mu_X & & \downarrow \mu_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

¹Introducimos los conceptos fundamentales necesarios para el desarrollo de la teoría en el Apéndice A.

es conmutativo, y de hecho f es **equivalencia débil** si y solo si $\mathcal{K}(f)$ es **equivalencia homotópica**.

Si partimos de un complejo simplicial, podemos obtener resultados homólogos mediante el funtor $\mathcal{X}(\cdot)$, que asocia a cada complejo el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{X}(K)$ de símlices de K ordenados por la inclusión. Este espacio se conoce como **espacio de caras** del complejo K . A las aplicaciones simpliciales $\varphi : K \rightarrow L$ les asocia aplicaciones continuas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(\varphi) : \mathcal{X}(K) & \longrightarrow & \mathcal{X}(L) \\ \sigma & \mapsto & \varphi(\sigma) \end{array}$$

¿Qué complejo simplicial obtendremos al hacer $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$? Los vértices serán los puntos de $\mathcal{X}(K)$, que son los símlices de K , y los símlices las cadenas de $\mathcal{X}(K)$, que son las cadenas de símlices de K . Esta es exactamente la descripción de la subdivisión baricéntrica de K (ver A.6). Como existe un homeomorfismo s_K entre $K' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ y K , definimos la aplicación de McCord

$$\begin{array}{ccc} \mu_K : |K| & \longrightarrow & \mathcal{X}(K) \\ \alpha & \mapsto & \mu_K(\alpha) = \mu_{\mathcal{X}(K)} \circ s_K^{-1}(\alpha). \end{array}$$

Claramente, esta aplicación es una equivalencia homotópica débil, puesto que tanto $\mu_{\mathcal{X}(K)}$ como s_K^{-1} lo son. Para aproximarnos a un resultado parecido al de la observación anterior, tenemos la siguiente

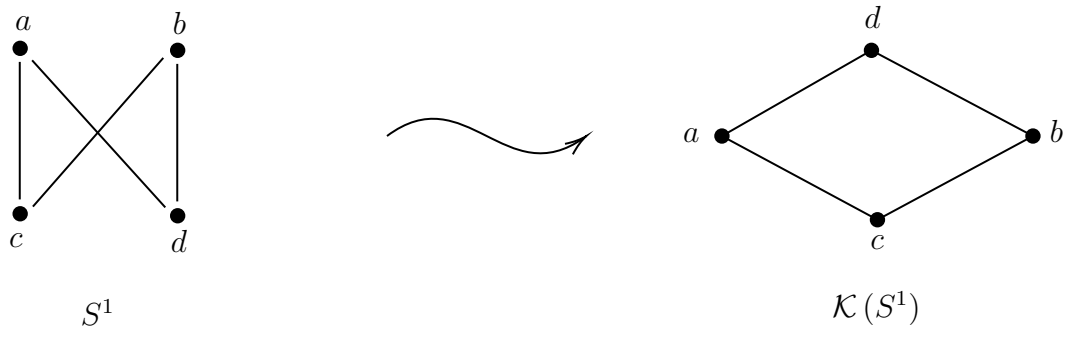
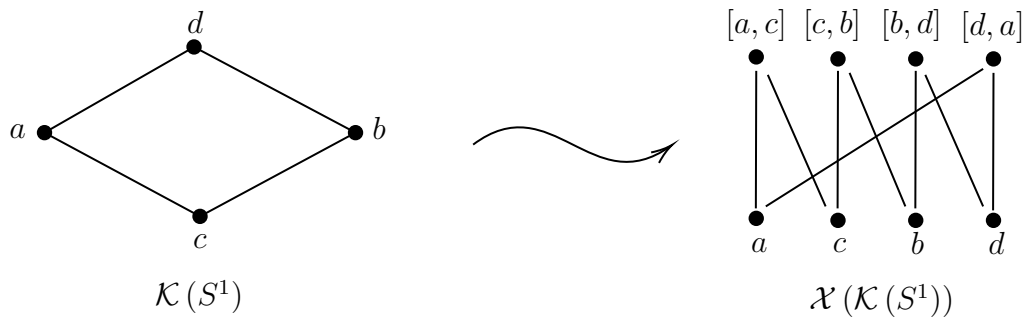
PROPOSICIÓN 4.1. *Dada una aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ entre complejos, el siguiente diagrama conmuta en homotopía:*

$$\begin{array}{ccc} |K| & \xrightarrow{|\varphi|} & |L| \\ \downarrow \mu_K & & \downarrow \mu_L \\ \mathcal{X}(K) & \xrightarrow{\mathcal{X}(\varphi)} & \mathcal{X}(L) \end{array}$$

COROLARIO 4.1. *Si $\varphi : K \rightarrow L$ es una aplicación simplicial entre complejos finitos, entonces $|\varphi|$ es una equivalencia homotópica si y solo si $\mathcal{X}(\varphi)$ es una equivalencia homotópica débil.*

EJEMPLO 4.2. Analizamos el pseudocírculo. Sabemos que la aplicación de McCord es una equivalencia homotópica débil $\mu_{S^1} : |\mathcal{K}(S^1)| = \mathbb{S}^1 \rightarrow S^1$. Sin embargo, no existe ninguna equivalencia débil en sentido contrario, puesto que cualquier función continua $f : S^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es constante: como S^1 es conexo por caminos [2] y f es continua, su imagen tiene que ser conexa por caminos. Al estar compuesta por 4 puntos en la circunferencia, estos tienen que coincidir, de tal forma que f es constante. Así, no puede existir tampoco una equivalencia homotópica entre ambos espacios. Como comentábamos en la introducción, esto constituye un contraejemplo del Teorema de Whitehead en espacios que no son CW-complejos.

Podemos calcular el espacio de caras de su complejo del orden, para obtener

FIGURA 4.2. Complejo del orden del pseudocírculo S^1 FIGURA 4.3. Espacio de caras del complejo $\mathcal{K}(S^1)$.

Sucesiones aproximativas finitas

Desde el punto de vista de la Teoría de la Forma, es interesante encontrar ANR-sistemas que nos permitan obtener los invariantes de forma de un espacio. En el Capítulo 2 hicimos tres observaciones clave:

1. Hay un ANR-sistema asociado a todo compacto métrico $X \subseteq Q$ consistente en tomar entornos cada vez más pequeños del espacio.
2. En cierto modo, podemos usar el hiperespacio 2^X como sustituto del cubo de Hilbert para definir la forma.
3. $\{U_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ es una base de entornos decreciente de X en 2^X .

A través de todas ellas, es razonable pensar que los entornos U_ε constituyan un ANR-sistema asociado a X . En determinados contextos, no es posible contar con toda la información sobre el espacio X , o solo es posible conocer una aproximación finita de puntos en dicho espacio. Pensando ahora desde el Capítulo 4, la teoría de McCord relaciona estrechamente los complejos simpliciales y los espacios finitos. De forma inmediata, surge la pregunta de si podremos encontrar un ANR-sistema de poliedros finitos asociado a X , y qué propiedades mantendrá al volver a pasar a un espacio finito mediante el funtor \mathcal{X} .

En espacios métricos compactos, podemos considerar aproximaciones finitas de la precisión (distancia entre puntos) que deseemos. Así, podemos definir sistemas inversos de poliedros finitos mediante el sistema de Vietoris, pero no es claro que al tomar solo una aproximación, y no todo el espacio, dichos sistemas sigan arrojando información sobre el espacio inicial. Sorprendentemente, la respuesta es afirmativa y es fruto del trabajo de tesis de Diego Mondéjar, dirigido por M. A. Morón, y publicado en los artículos [27, 26].

Recordamos la definición que vimos del **Sistema de Vietoris** en el contexto métrico. Este vendrá dado por

$$\mathcal{V}(X) = (|\mathcal{V}_\varepsilon(X)|, p_{\varepsilon\varepsilon'}, \mathbb{R}^+),$$

donde $\mathcal{V}_\varepsilon(X)$ es el complejo cuyos vértices son los puntos de X y tal que $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ es símlice si $\text{diam}(\sigma) < \varepsilon$, los morfismos $p_{\varepsilon\varepsilon'}$ son simplemente la identidad sobre los vértices y ε es un número real positivo. Es bien sabido que este complejo puede recuperar propiedades topológicas del espacio inicial, por ejemplo el tipo de homotopía en variedades riemannianas [17, 19], y que además codifica la forma del espacio (ver Capítulo 3).

DEFINICIÓN 5.1. Llamaremos **ε -aproximación** de un espacio X a un conjunto de puntos $A_\varepsilon \subseteq X$ tal que para todo $x \in X$ exista un $a \in A_\varepsilon$ con $\text{dist}(x, a) < \varepsilon$.

El complejo $\mathcal{V}_\delta(A_\varepsilon)$ es finito, y podemos considerar su espacio de caras $\mathcal{X}(\mathcal{V}_\delta(A_\varepsilon))$. Si consideramos U_δ en 2^{A_ε} (donde A_ε tiene la topología discreta), es claro que este conjunto es precisamente el conjunto de símlices de $\mathcal{V}_\delta(A_\varepsilon)$, y la topología viene

dada por la condición $C \leq D \iff C \subseteq D$. Es decir, $U_\delta = \mathcal{X}(\mathcal{V}_\delta(A_\varepsilon))$. A partir de aquí denotaremos ambos por $U_\delta(A_\varepsilon)$.

Por el Teorema 1 del Capítulo 4, sabemos que hay una equivalencia homotópica débil $|\mathcal{V}_\delta(A_\varepsilon)| \longrightarrow U_\delta(A_\varepsilon)$, así que, si el complejo está relacionado con el espacio inicial, $U_\delta(A_\varepsilon)$ también lo estará. Esta es una primera respuesta afirmativa a nuestras preguntas; no obstante, esta relación es más profunda de lo que pueda parecer, puesto que los espacios U_δ nos permitirán recuperar los tipos de homotopía y topología de X .

Vamos a probar que si hacemos $\delta = 2\varepsilon = 2\varepsilon_n$, con $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ una cierta sucesión tendiendo a cero y A_n cualquier ε_n aproximación, las realizaciones $|\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(A_n)|$ son una HPol-expansión. El primer problema es que, al no ser los espacios A_n constantes ni tener por qué estar contenidos unos en otros, hay que definir aplicaciones simpliciales entre los complejos.

DEFINICIÓN 5.2. En el contexto de la anterior definición, dada una sucesión decreciente de números reales positivos $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, diremos que ε_{n+1} está **ajustado** a ε_n si

$$\varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n - \gamma_n}{2}, \quad \gamma_n = \sup\{d(x, A_n) \mid x \in X\}.$$

Para definir una aplicación entre las realizaciones de los complejos, sea

$$\begin{aligned} q_{A_n} : \quad X &\longrightarrow 2^{A_n} \\ x &\mapsto q_{A_n}(x) = \{a \in A_n \mid d(x, a) = d(x, A_n)\}. \end{aligned}$$

Esta aplicación se puede definir en cualquier A_n y es continua. Si tomamos una sucesión ajustada, la imagen de un símlice $\sigma \in \mathcal{V}_{2\varepsilon_{n+1}}(A_{n+1})$ será un conjunto de puntos $q_{A_n}(\sigma)$ de tal forma que para dos $b \in q_{A_{n+1}}(\{a\})$ y $b' \in q_{A_{n+1}}(\{a'\})$, $a, a' \in \sigma$,

$$d(b, b') \leq d(b, a) + d(a, a') + d(a', b') < \gamma_n + 2\varepsilon_{n+1} + \gamma_n < \varepsilon_n + \gamma_n < 2\varepsilon_n.$$

Así, la imagen de cualquier símlice sigue siendo un símlice, aunque podría ser de mayor cardinalidad, y su restricción $p_{n,n+1} = q_{A_n}|_{A_{n+1}}$ no define una aplicación simplicial en $\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(A_n)$, sino entre las subdivisiones baricéntricas. Pero, como mostramos en el apéndice A.1, esto es suficiente para obtener una aplicación continua entre las realizaciones geométricas

$$\begin{aligned} |p_{n,n+1}| : \quad \left| \mathcal{V}_{2\varepsilon_{n+1}}(A_{n+1}) \right| &\longrightarrow \left| \mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(A_n) \right| \\ b_\sigma &\mapsto b_{p_{n,n+1}(\sigma)} \end{aligned}$$

y una sucesión inversa

$$\mathcal{V}(A_n) = (|\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(A_n)|, |p_{n,n+1}|).$$

TEOREMA 5.1. *La sucesión inversa $\mathcal{V}(A_n)$ es una HPol-expansión de X .*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a ver que esta sucesión es isomorfa a

$$\mathcal{V}(X) = (|\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(X)|, |i_{n,n+1}|),$$

que sabemos que es una HPol-expansión ser isomorfa al complejo de Čech (ver 2). Es evidente que para pasar de una sucesión a otra podemos usar las inclusiones $j_n : \mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(A_n) \longrightarrow \mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(X)$. La situación queda reflejada en el esquema

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longleftarrow & |\mathcal{V}_{2\varepsilon_{n-1}}(A_{n-1})| & \xleftarrow{|p_{n-1,n}|} & |\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(A_n)| & \xleftarrow{|p_{n,n+1}|} & |\mathcal{V}_{2\varepsilon_{n+1}}(A_{n+1})| \longleftarrow \cdots \\
& & \downarrow |j_{n-1}| & & \downarrow |j_n| & & \downarrow |j_{n+1}| \\
\cdots & \longleftarrow & |\mathcal{V}_{2\varepsilon_{n-1}}(X)| & \xleftarrow{|i_{n-1,n}|} & |\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(X)| & \xleftarrow{|i_{n,n+1}|} & |\mathcal{V}_{2\varepsilon_{n+1}}(X)| \longleftarrow \cdots
\end{array}$$

Este diagrama es conmutativo en homotopía porque las aplicaciones son simplicialmente cercanas (ver A.2): las imágenes de $\bar{\sigma}$, con $\sigma \in \mathcal{V}_{2\varepsilon_{n+1}}(A_{n+1})$, siempre están en la realización de un mismo símple de $|\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(X)|$:

$$|i_{n,n+1}| \circ |j_{n+1}|(\bar{\sigma}) \cup |j_n| \circ |p_{n,n+1}|(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} \cup \{\overline{b_{p_{n,n+1}}(v)}\}_{v \in \sigma} \subseteq \overline{\sigma \cup p_{n,n+1}(\sigma)}.$$

Este último es un símple porque dados $a, a' \in \sigma$ y $b \in p_{n,n+1}(\{a'\})$, tenemos que

$$d(a, b) \leq d(a, a') + d(a', b) < 2\varepsilon_{n+1} + \gamma_n < 2\varepsilon_n.$$

Por el Lema de Morita 3.2, para que el morfismo $(j_n)_{n \geq 1}$ sea un isomorfismo, basta encontrar morfismos $|g_n|$ que hagan el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
|\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(A_n)| & \xleftarrow{|p_{n,n+1}|} & |\mathcal{V}_{2\varepsilon_{n+1}}(A_{n+1})| \\
|j_n| \downarrow & \nwarrow |g_n| & \downarrow |j_{n+1}| \\
|\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(X)| & \xleftarrow{|i_{n,n+1}|} & |\mathcal{V}_{2\varepsilon_{n+1}}(X)|
\end{array}$$

conmutativo en homotopía. Definimos $g_n(\sigma) = q_{A_n}(\sigma)$ como hicimos con $p_{n,n+1}$. La parte superior del diagrama es igual, y para la parte inferior, de nuevo basta comprobar que son simplicialmente cercanas. Esto se deduce observando que la demostración anterior también prueba que dado $\sigma \in \mathcal{V}_{2\varepsilon_{n+1}}(X)$, $q_{A_n}(\sigma) \cup \sigma$ es un símple de $\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(X)$. Así, hemos demostrado que $(j_n)_n$ es isomorfismo y se concluye la demostración. \square

Aunque hayamos definido las $p_{n,n+1}$ desde A_{n+1} , hemos comprobado que son aplicaciones simpliciales entre las subdivisiones baricéntricas de los complejos de Vietoris. Por ende, pueden ser vistas como aplicaciones entre los espacios de caras $\mathcal{X}(\mathcal{V}_\varepsilon(X))$, y son continuas por preservar el orden.

TEOREMA 5.2. *Sea X un espacio métrico compacto y $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ una sucesión ajustada. Si denotamos*

$$\mathfrak{X} = \varprojlim (U_{2\varepsilon_n}(A_n), p_{n,n+1}),$$

entonces \mathfrak{X} se puede retractar por deformación en un $\mathfrak{X}^ \subseteq \mathfrak{X}$ que es homeomorfo a X .*

DEMOSTRACIÓN. A partir de ahora, denotaremos $U_n = U_{2\varepsilon_n}(A_n)$. La primera parte de la demostración consiste en establecer una función $\varphi : \mathfrak{X} \rightarrow X$. Para ello, tenemos que inspeccionar los elementos de \mathfrak{X} , que sabemos que son tuplas $(C_n)_{n \geq 1}$ con $C_n \in U_n$ de tal forma que $p_{n,n+1}(C_{n+1}) = C_n$. Si cambiamos de enfoque, podemos ver los U_n como subespacios del hiperespacio 2^X , y así ver los elementos del límite inverso como sucesiones en 2^X . Vistas con la distancia Hausdorff, estas sucesiones son de Cauchy: dados $n < m$, como por definición

$$p_{n,m}(C_m) = p_{n,n+1} \circ \cdots \circ p_{m-1,m}(C_m) = C_n,$$

todo $c_n \in C_n$ cumple $c_n \in p_{n,m}(\{c_m\})$ para algún $c_m \in C_m$, es decir, hay una cadena de $c_i \in C_i$ para $i = n, \dots, m$ tal que

$$\begin{aligned} d(c_n, c_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(c_i, c_{i+1}) < \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i < \sum_{i=n}^{m-3} \gamma_i + \gamma_{m-2} + \varepsilon_{m-1} \\ &< \sum_{i=n}^{m-3} \gamma_i + \varepsilon_{m-2} < \dots < \frac{\gamma_n + \varepsilon_n}{2} = \overline{\varepsilon}_n. \end{aligned}$$

Esto nos indica que $C_n \subseteq (C_m)_{\overline{\varepsilon}_n}$ y viceversa, de donde $d_H(C_n, C_m) < \overline{\varepsilon}_n$. Como 2_H^X es un espacio métrico compacto, es completo, y la sucesión (C_n) tiene un límite C . Además,

$$\text{diam}(C) = \text{diam}(\lim_n C_n) = \lim_n \text{diam}(C_n) \leq \lim_n 2\varepsilon_n = 0,$$

por la continuidad de la función diámetro, así que $C = \{x\}$. Con esto, ya podemos definir una aplicación φ , precisamente enviando cada sucesión a su límite. Vamos a ver que esta aplicación es continua, sobreyectiva y que tiene una inversa por la derecha cuya imagen es el \mathfrak{X}^* buscado. Sea $(C_n) \in \mathfrak{X}$, $x = \varphi((C_n)_n)$, y $U \subseteq X$ un entorno de x , podemos suponer $U = B(x, \varepsilon)$ para un $\varepsilon > 0$.

LEMA 5.1. *Sea un entorno W de (C_n) en \mathfrak{X} . Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que el entorno*

$$V = \left(2^{C_1} \times 2^{C_2} \times \dots \times 2^{C_{n_0}} \times U_{n_0+1} \times \dots\right) \cap \mathfrak{X}$$

de (C_n) en \mathfrak{X} está contenido en W .

PRUEBA DEL LEMA. Un entorno básico $V' \subseteq V$ de (C_n) es del tipo $\prod_n V'_n \cap \mathfrak{X}$, donde $V'_n = U_n$ excepto en una cantidad finita de índices. Si tomamos n_0 mayor que todos ellos, entonces $V \subseteq V'$, como queríamos demostrar. \square

Si definimos V como en el lema, para cualquier $(D_n)_n \in V$, $y = \varphi((D_n)_n)$,

$$d(x, y) \leq d(x, D_{n_0}) + d(D_{n_0}, y) \leq d(x, C_{n_0}) + d(D_{n_0}, y) < 2\varepsilon_{n_0}.$$

Considerando n_0 suficientemente grande, resulta $\varphi(V) \subseteq U$, como queríamos demostrar.

Para probar la sobreyectividad, sea $x \in X$. Consideramos $B_n = B(x, \varepsilon_n) \cap A_n$ y definimos $X_n = \bigcap_{m>n} p_{n,m}(B_m)$. Estos conjuntos son intersección de cerrados (por ser finitos) que forman una cadena descendiente, por lo que son no vacíos. Para comprobar esto último, sea $c \in p_{m,m+1}(B_{m+1})$: entonces es imagen de un cierto $b \in B_{m+1}$ y

$$d(x, c) \leq d(x, b) + d(b, c) < \varepsilon_{m+1} + \gamma_m < \varepsilon_m.$$

De aquí se colige que $p_{m,m+1}(B_{m+1}) \subseteq B_m$, y aplicando $p_{n,m}$ a ambos lados,

$$p_{n,m+1}(B_{m+1}) \subseteq p_{n,m}(B_m).$$

Una vez demostrado que son no vacíos, como están definidos por una sucesión de conjuntos finitos decreciente, esta tiene que estabilizarse, así que en realidad $X_n = p_{n,m_0}(B_{m_0})$ para un cierto m_0 que depende de n . Esto implica que

$$p_{n-1,n}(X_{n+1}) = p_{n-1,n}(p_{n,m_0}(B_{m_0})) = p_{n-1,m_0}(B_{m_0}) = X_{n-1}$$

para m_0 suficientemente grande, de donde obtenemos que $(X_n)_n$ es un elemento del límite inverso. Por construcción, es claro que $x = \varphi((X_n)_n)$, y hemos probado la sobreyectividad. Pero no solo eso: hemos obtenido ya la inversa por la derecha,

puesto que esta construcción define una función $\psi : X \longrightarrow \mathfrak{X}$ inyectiva. Además, es continua: dados $x \in X$ y un entorno básico

$$V = (2^{X_1} \times \cdots \times 2^{X_{n_0}} \times U_{n_0+1} \times \cdots) \cap \mathfrak{X}$$

de $\psi(x) = (X_n)_n$, tenemos que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $X_{n_0} = p_{n,m-1}(B_{m-1}^x)$. Quizá aumentando m , si tomamos $y \in X$, $\psi(y) = (Y_n)_n$, entonces $Y_{n_0} = p_{n_0,m}(B_m^y)$. Es claro que si y está suficientemente cerca de x , entonces $B_m^y \subseteq B_m^x \cup \partial B_m^x$. Entonces, $p_{n_0,m}(B_m^y \setminus \partial B_m^x) \subseteq p_{n_0,m}(B_m^x)$, y falta demostrar que la parte en la frontera también está contenida. Al proyectar $z \in \partial B_m^x$, observamos que

$$d(z, \partial B_{m-1}^x) = \varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m > \varepsilon_{m-1} - \frac{\varepsilon_{m-1} - \gamma_{m-1}}{2} = \frac{\varepsilon_{m-1} + \gamma_{m-1}}{2} > \gamma_{m-1}.$$

Sin embargo, un punto de B_m siempre está a distancia menor o igual que γ_{m-1} de su proyección. Esto implica que $p_{m-1,m}(\partial B_m^x) \subseteq B_{m-1}^x$, y concluimos

$$\begin{aligned} Y_{n_0} = p_{n_0,m}(B_m^y) &\subseteq p_{n_0,m}(B_m^x \cup \partial B_m^x) = p_{n_0,m-1}(p_{m-1,m}(B_m^x \cup \partial B_m^x)) \subseteq \\ &p_{n_0,m-1}(B_{m-1}^x) = X_{n_0}. \end{aligned}$$

Por último, para cualquier $n < n_0$, $Y_n = p_{n,n_0}(Y_{n_0}) \subseteq p_{n,n_0}(X_{n_0}) = X_n$, como queríamos demostrar.

Hemos obtenido así dos funciones continuas partes de un homeomorfismo entre X y $\psi(X) = \mathfrak{X}^*$. Vamos a probar ahora que este \mathfrak{X}^* es un retracto por deformación de X . Es claro que $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathfrak{X}^*}$, y hay que probar que $\psi \circ \varphi \approx \text{id}_X$. Para ello, definimos explícitamente

$$H((C_n), t) = \begin{cases} (C_n)_n & \text{si } t \in [0, 1) \\ \psi \circ \varphi((C_n)) & \text{si } t = 1 \end{cases}.$$

Solo es necesario ver la continuidad en los puntos con $t = 1$. Sean $((C_n), 1)$ un punto del dominio, $(X_n)_n = \psi \circ \varphi((C_n))$ y

$$V = (2^{X_1} \times \cdots \times 2^{X_{n_0}} \times U_{n_0+1} \times \cdots) \cap \mathfrak{X}$$

un entorno básico de $(X_n)_n$. En (5) vimos que podíamos reducir la distancia entre límites de sucesiones tanto como quisiéramos aumentando n_0 , y acabamos de probar que podemos hacer lo propio con sucesiones si disminuimos la distancia entre límites, así que tomando

$$U = (2^{C_1} \times \cdots \times 2^{C_{n_0}} \times U_{n_0+1} \times \cdots) \cap \mathfrak{X}$$

con n_0 suficientemente grande, $H(U \times [0, 1]) \subseteq V$, lo cual completa la demostración. \square

La sucesión dada por las subdivisiones baricéntricas es la misma que habíamos considerado anteriormente, y por ello

COROLARIO 5.1. *En el contexto de los teoremas anteriores, la sucesión*

$$(|\mathcal{K}(\mathcal{X}(\mathcal{V}_{2\varepsilon_n}(A_n))), |p_{n,n+1}|)$$

es una HPol-expansión de X .

Computando sucesiones aproximativas

En este capítulo vamos a diseñar un programa que nos permita calcular explícitamente sucesiones aproximativas finitas para ciertos espacios.

Sea \mathbb{S}^1 la circunferencia unidad. Podemos conseguir una sucesión aproximativa finita tomando $\varepsilon_n = (2\pi)/n$ y considerando las ε_n -aproximaciones $A_n = \{e^{im\varepsilon_n} \mid m = 0, \dots, n-1\}$. Para definir las en nuestro programa, simplemente añadimos cada punto a una lista que conforme la aproximación: En vez de calcular primero el espacio finito $U_{2\varepsilon_n}(A_n)$ y luego representarlo, vamos a diseñar un programa que cree el espacio como grafo directamente, y luego lo represente como diagrama de Hasse.

En vez de trabajar constantemente con los puntos de la aproximación, vamos a trabajar con el conjunto $\{1, \dots, n\}$ de números naturales en biyección con la aproximación, y almacenar las distancias entre puntos en una matriz:

```
def dist(z,w):
    # Calculamos la distancia euclídea entre ambos puntos
    distancia =math.sqrt((z[0]-w[0])**2+(z[1]-w[1])**2);
    return distancia

def matdist(nube):
    # Creamos una matriz de ceros
    distancias = np.zeros((n,n));
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if i < j:
                # Introducimos d(z_i,z_j) en la posición (i,j)
                d = dist(nube[i],nube[j]);
                distancias[i][j] = d;
                distancias[j][i] = d;
    return distancias
```

Para crear el grafo, recordamos que este tiene por vértices los conjuntos de diámetro menor que $2\varepsilon_n$ y hay una arista $A \longrightarrow B$ si $A \subseteq B$. La idea de la construcción es la siguiente:

1. Empezamos introduciendo los conjuntos unitarios $\{i\}$.
2. Para cada par de nodos A, B en esta lista, comprobamos si su unión tiene diámetro menor que $2\varepsilon_n$. Si es así, introducimos dicha unión como nodo y registramos $(A, A \cup B)$ y $(B, A \cup B)$ como lados.
3. Iteramos el proceso hasta llegar a los nodos de longitud $n-1$ (subconjuntos de A_n de cardinal $n-1$), que ya solo pueden dar A_n como nodo.

Esta idea mejora con las siguientes observaciones:

1. Si en una iteración no introducimos ningún nodo, hemos de parar, puesto que no habrá conjuntos de mayor cardinal con diámetro menor que $2\varepsilon_n$.

2. Si $A \cup B = C$ y en la siguiente iteración $A' \cup B' = C$, con $A \subseteq A'$, podríamos obtener (A, C) y (A', C) como lados, aunque en el diagrama de Hasse no constaría el primero. Esto se puede evitar introduciendo solamente $A \cup B$ cuando su cardinal sea uno por encima del de A y B .

Calculamos el diámetro con la matriz de distancias

```
def diam(C):
    listadistancias = [];
    m = len(C);
    if m == 0 or m == 1:
        return 0
    else:
        for i in range(m):
            for j in range(i+1,m):
                listadistancias.append(matrizdistancias[C[i]][C[j]])
        return max(listadistancias)
```

Construimos el grafo del espacio

```
def construirgrafo(nube):
    listanodos = [];
    listalados = [];
    doseps = 2*epsilon;
    n = len(nube);
    # Introducimos los conjuntos unitarios como nodos
    for i in range(n):
        listanodos.append((i,));
```

Recuento de nodos que introducimos en la iteración anterior
listanodos1 = listanodos;

Iteramos en el número de puntos de la aproximación

```
for i in range(n-1):
    l = len(listanodos1);
    # Si en la iteración anterior no introducimos ninguno, paramos:
    if l == 0:
        break;
    # Almacenamos los que introducimos en esta iteración
    listanodos2 = [];
    for k in range(l):
        a = listanodos1[k]; # tomamos un conjunto
        for j in range(k+1,l):
            b = listanodos1[j]; # tomamos otro
            aubsinorden = list(set(a).union(set(b))); #unimos
            aub = tuple(sorted(aubsinorden)); #ordenamos cifras

        # Comprobamos que la longitud sea solo una por encima
        if len(aub)>len(a)+1:
            continue;
    # Comprobamos que no es redundante
```

```

    if a == aub or b == aub:
        continue;
    # Introducimos el conjunto
    if diam(aub)<doseps:
        if aub not in listanodos2:
            listanodos2.append(aub);
            listanodos.append(aub);
        if (a,aub) not in listalados:
            listalados.append((a,aub));
        if (b,aub) not in listalados:
            listalados.append((b,aub));
    # Actualizamos la lista de reserva
    listanodos1 = listanodos2;
    # Creamos el grafo
    G = nx.DiGraph();
    G.add_nodes_from(listanodos);
    G.add_edges_from(listalados);
    return G

```

Por último, reducimos el diagrama de Hasse a su forma minimal, lo cual simplifica la representación y da más información sobre su tipo topológico. Lo hacemos comprobando si hay puntos de subida o bajada según sus predecesores y eliminándolos en tal caso, en un proceso recurrente que recorre todos los nodos del grafo.

```

def hacermanimal(G):
    i=0;
    numnodos = len(list(G.nodes));
    while i<numnodos and numnodos>1:
        nodo = list(G.nodes)[i];
        # Obtenemos su lista de sucesores
        sucesores = list(G.successors(nodo));
        # Obtenemos su lista de predecesores
        predecesores = list(G.predecessors(nodo));

        # Analizamos el caso en el que es un punto colapsable hacia arriba
        if len(sucesores) == 1:
            sucesor = sucesores[0];
            lista1 = [];
            G.remove_node(nodo) # lo eliminamos
            for n in predecesores:
                # añadimos nuevos lados
                lista1.append((n,sucesor));
            G.add_edges_from(lista1);
            return hacermanimal(G) # volvemos a inciar el proceso

        # Analizamos el caso en el que es un punto colapsable hacia abajo
        elif len(predecesores) == 1:
            predecesor = predecesores[0];
            lista1 = [];

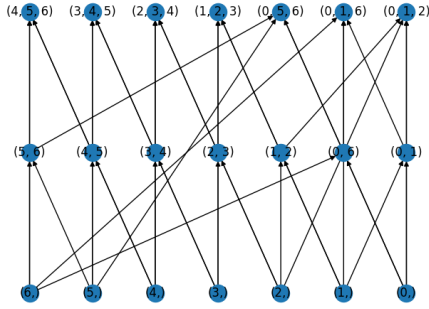
```

```

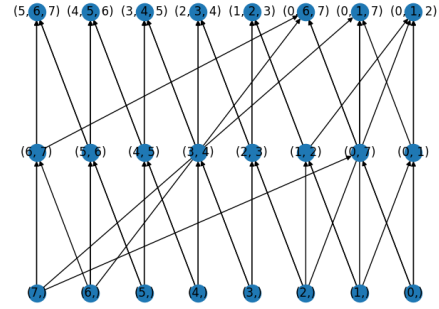
G.remove_node(nodo); # lo eliminamos
for n in sucesores:
    lista1.append((predecesor,n)); # añadimos nuevos lados
G.add_edges_from(lista1);
return hacerminimal(G) # volvemos a inciar el proceso
else:
    i = i+1;
return G

```

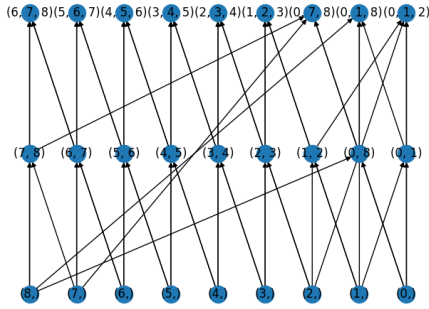
Podemos ver un ejemplo ejecutando este código para $n = 7, \dots, 15$:



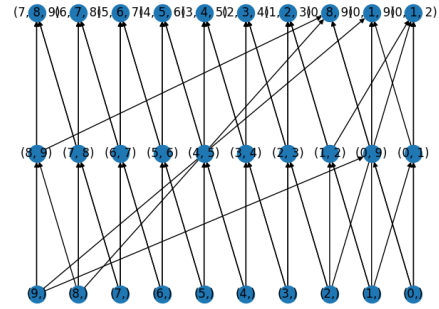
(A) $n = 7$



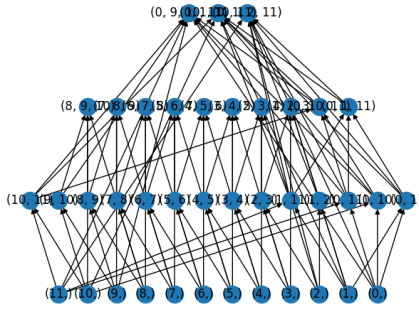
(B) $n = 8$



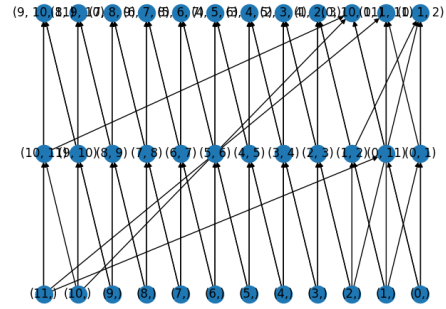
(C) $n = 9$



(D) $n = 10$



(A) $n = 11$



(B) $n = 12$

Apéndice A

Complejos simpliciales

En este apéndice vamos a definir brevemente los conceptos relacionados con los complejos simpliciales que aparecen a lo largo del trabajo.

DEFINICIÓN A.1. Un complejo simplicial abstracto K es una dupla (V_K, S_K) formada por un conjunto de puntos V_K a los que llamaremos **vértices** y un subconjunto $S_K \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que si $\sigma \in S_K$, todo $\tau \subseteq \sigma$, que llamaremos **cara** de σ , está a su vez en S_K , y además $\{v\} \in S_K$ para todo $v \in V_K$. A los elementos de S_K los llamaremos **símplices**. Normalmente identificaremos K con S_K .

Visto esto, tenemos que estudiar las aplicaciones entre complejos:

DEFINICIÓN A.2. Dados dos complejos K y L , y una aplicación $\varphi : V_K \longrightarrow V_L$, decimos que es una **aplicación simplicial** si para todo $\sigma \in K$, $\varphi(\sigma) \in L$.

Ahora veamos cómo representarlos en el espacio:

DEFINICIÓN A.3. La realización geométrica de un símplex $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$ de un complejo abstracto es el conjunto de combinaciones lineales convexas formales

$$\bar{\sigma} = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i \mid \sum_i t_i = 1, t_i \in [0, 1] \right\}.$$

Cada símplex tiene una topología dada por la métrica

$$d\left(\sum_i t_i v_i, \sum_i s_i v_i\right) = \sqrt{\sum_i (t_i - s_i)^2}$$

El **baricentro** $b(\sigma)$ de un símplex es el punto resultado de fijar todas las coordenadas $t_i = \frac{1}{\#\sigma}$.

DEFINICIÓN A.4. La realización geométrica $|K|$ de un complejo simplicial es la unión de las realizaciones de todos sus símplexes con la topología cuyos cerrados son los $C \subseteq |K|$ tales que $C \cap \bar{\sigma}$ es cerrado en $\bar{\sigma}$ para todo $\sigma \in K$ (la topología final con respecto a los $\bar{\sigma}$).

Si K es finito, esta coincide con la topología es la misma que induce la métrica

$$d\left(\sum_{v \in K} \alpha_v v, \sum_{v \in K} \beta_v v\right) = \sqrt{\sum_{v \in K} (\alpha_v - \beta_v)^2}.$$

Al espacio métrico dado por $(|K|, d)$ lo denotaremos por $|K|_m$.

DEFINICIÓN A.5. Dado un $x \in |K|$, que podemos representar como $x = \sum_{v \in K} \alpha_v v$ en general, llamamos **soporte** de x al símplex $\{v \mid \alpha_v > 0\}$ y **estrella** de un vértice v al conjunto $\text{St}(v, |K|) = \{x \in |K| \mid v \in \text{sop}(x)\}$.

OBSERVACIÓN A.1. Una aplicación simplicial $\varphi : K \rightarrow L$ induce otra aplicación continua entre las realizaciones geométricas dada por

$$|\varphi| : \begin{array}{ccc} |K| & \longrightarrow & |L| \\ \sum_{v \in K} \alpha_v v & \mapsto & \sum_{v \in K} \alpha_v \varphi(v). \end{array}$$

Está bien definida porque $\text{sop}(v)$ siempre es un símple de K , y por tanto $\varphi(\text{sop}(v))$ lo es de L .

DEFINICIÓN A.6. La **subdivisión baricéntrica** K' de un complejo K es el complejo cuyos vértices son los símlices de K y cuyos símlices son las cadenas de símlices de K . La aplicación lineal dada por

$$s_K : \begin{array}{ccc} |K'| & \longrightarrow & |K| \\ \sigma & \mapsto & s_K(\sigma) = b(\sigma) = \sum_{v \in \sigma} \frac{v}{\#\sigma} \end{array}$$

es un homeomorfismo. De hecho, ambas realizaciones se pueden construir de tal forma que sean iguales y $|s_K|$ sea la identidad.

PROPOSICIÓN A.1. *Si escogemos como vértices de la realización de K' los baricentros de los símlices de K , entonces $|K'| = |K|$ como espacios topológicos y s_K es la identidad.*

DEMOSTRACIÓN. Si realizamos K con un conjunto de vértices $\{v_i\}_{i \in I}$, cada símple de K' vendrá dado por unos vértices $\{b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_m}\}$ donde $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_m$ es una cadena de símlices de K . Desde luego, todos los vértices de posibles símlices de K' son puntos en la realización de un mismo símple de K , y por ende toda realización de un símple de K' está contenida en una de un símple de K .

Recíprocamente, queremos ver todo punto x en la realización de un símple $\sigma = \{v_0, \dots, v_m\} \in K$ está también en la realización de uno de K' . Si $x \in \bar{\sigma}$, pongamos $x = \sum_{i=0}^m t_i v_i$ y reordenemos y eliminemos vértices de tal forma que $t_0 \geq t_1 \geq \dots \geq t_m > 0$. Queremos reescribir x como combinación convexa de vértices de K' que formen un símple, es decir, de baricentros de una cadena de símlices de K . Observamos, según la intuición geométrica, que los baricentros que intervengan en la expresión de nuestro punto tendrán que ser los asociados a las caras más próximas al punto, y estas distancias vienen representadas por las coordenadas respecto a los vértices. De esta forma, si denotamos $\tau_0 = \{v_0\}, \dots, \tau_{m-1} = \{v_0, \dots, v_{m-1}\}, \tau_m = \sigma$, podemos plantear la ecuación

$$x = \sum_{i=0}^m t_i v_i = \alpha_0 b_{\tau_0} + \dots + \alpha_m b_{\tau_m}.$$

Sustituyendo cada baricentro por su valor, llegamos a las ecuaciones

$$\sum_{i=0}^m t_i v_i = \sum_{i=0}^m \left(\frac{\alpha_i}{i+1} + \dots + \frac{\alpha_m}{m+1} \right) v_i,$$

y reescribiéndolo como sistema,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \frac{\alpha_m}{m+1} = t_0 \\ \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \frac{\alpha_m}{m+1} = t_1 \\ \vdots \\ \frac{\alpha_m}{m+1} = t_m \end{array} \right.$$

Este sistema tiene solución única y esta es $\alpha_i = (t_i - t_{i+1})(i+1) \geq 0$. Sumando las ecuaciones del sistema se desprende también que $\sum_i \alpha_i = \sum_i t_i = 1$ y podemos escribir x como combinación de vértices de K' , de donde $|K'| = |K|$ como conjuntos. En cuanto a la topología, si C es cerrado en $\bar{\sigma}$, toda $C \cap \bar{\tau} = C \cap \bar{\sigma} \cap \bar{\tau}$ es cerrada por ser intersección de cerrados, así que todo cerrado de $|K|$ lo es de $|K'|$. Recíprocamente, todo $\bar{\sigma} \subseteq |K|$ es unión de una cantidad finita de $\bar{\tau} \subseteq |K'|$, y por tanto $C \cap \bar{\sigma} = \bigcup_{\tau} C \cap \bar{\tau}$ es cerrada. \square

Enunciamos ahora un lema que nos servirá a para probar la siguiente proposición:

LEMA A.1. *La identidad $\text{id} : |K| \longrightarrow |K|_m$ es una equivalencia homotópica.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba se puede encontrar en [20, p. 302]. \square

A lo largo de todo el trabajo haremos uso del siguiente criterio para probar que las realizaciones de dos aplicaciones simpliciales son homótopas:

DEFINICIÓN A.7. Diremos que dos aplicaciones continuas $g, f : X \longrightarrow |K|$ ($|K|_m$) de un espacio topológico en la realización de un complejo simplicial son **simplicialmente cercanas** si, para todo $x \in X$, las imágenes $f(x)$ y $g(x)$ pertenecen a la realización de un $\sigma \in K$.

PROPOSICIÓN A.2. *Dos aplicaciones simplicialmente cercanas son siempre homótopas.*

DEMOSTRACIÓN. Hagamos primero el caso métrico. Por ser simplicialmente cercanas, la aplicación

$$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow |K|_m \\ (x, t) &\mapsto tf(x) + (1-t)g(x) \end{aligned}$$

está bien definida. La continuidad es sencilla gracias a la métrica:

$$\begin{aligned} d(H(x, t), H(x_0, t_0)) &= d(tf(x) + (1-t)g(x), t_0f(x_0) + (1-t_0)g(x_0)) = \\ &= d(tf(x) + (1-t)g(x), tf(x_0) + (1-t)g(x_0)) + \\ &= d(tf(x_0) + (1-t)g(x_0), t_0f(x_0) + (1-t_0)g(x_0)), \end{aligned}$$

donde las distancias anteriores se pueden reducir arbitrariamente por la continuidad de f y g . En el caso de estar en la topología final, el Lema A.1 y el caso métrico nos aseguran la homotopía $\text{id} \circ f \simeq \text{id} \circ g$. Si llamamos j a la inversa homotópica de la identidad,

$$f \simeq j \circ \text{id} \circ f \simeq j \circ \text{id} \circ g \simeq g,$$

concluyendo la demostración. \square

DEFINICIÓN A.8. Dadas aplicaciones simpliciales entre complejos $\varphi, \psi : K \longrightarrow L$, diremos que son **contiguas** si para cada $\sigma \in K$ se tiene $\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma) \in L$.

PROPOSICIÓN A.3. *Si dos aplicaciones simpliciales φ y ψ son contiguas, sus aplicaciones asociadas entre las realizaciones son homótopas.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos dos aplicaciones $|\varphi|, |\psi| : |K| \longrightarrow |L|$ continuas tales que dado $x \in |K|$, será $x \in \bar{\sigma}$ para algún $\sigma \in K$. Entonces $|\varphi(x)|$ y $|\psi(x)|$ pertenecen a $\overline{\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)}$ para todo $x \in |K|$, es decir, son simplicialmente cercanas y por tanto homótopas. \square

Bibliografía

- [1] M. Alonso-Morón y A. González Gómez. «Homotopical properties of upper semifinite hyperspaces of compacta». En: *Topology and its Applications* 155.9 (2008), págs. 972-981. ISSN: 0166-8641. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.topol.2007.12.011>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864107004294>.
- [2] J.A. Barmak. *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2011. ISBN: 9783642220036. URL: <https://books.google.es/books?id=KR3zCAAAQBAJ>.
- [3] K. Borsuk. *Theory of Retracts*. Monografie matematyczne v. 77. Państwo-
we Wydawn. Naukowe, 1967. ISBN: 9780800220815. URL: <https://books.google.es/books?id=GIxsAAAAMAAJ>.
- [4] K. Borsuk. *Theory of Shape*. Monografie matematyczne. PWN-Polish Scientific Publishers, 1975. URL: <https://books.google.es/books?id=hrVsAAAAMAAJ>.
- [5] Karol Borsuk. «Concerning homotopy properties of compacta». En: *Fundamenta Mathematicae* 62.3 (1968), págs. 223-254.
- [6] Karol Borsuk. «Concerning the notion of the shape of compacta». En: *Proc. Int. Symp. on Top., Belgrade*. 1969, págs. 98-104.
- [7] Karol Borsuk. «Sur les rétractes». En: *Fundamenta Mathematicae* 17 (1931), págs. 152-170. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117202273>.
- [8] Karol Borsuk. «Über eine Klasse von lokal zusammenhängenden Räumen». En: *Fundamenta Mathematicae* 19.1 (1932), págs. 220-242.
- [9] T Chapman. «On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape». En: *Fundamenta Mathematicae* 76.3 (1972), págs. 181-193.
- [10] T Chapman. «Shapes of finite-dimensional compacta». En: *Fundamenta Mathematicae* 76.3 (1972), págs. 261-276.
- [11] Dan E Christie. «Net homotopy for compacta». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 56 (1944), págs. 275-308.
- [12] Clifford H Dowker. «Homology groups of relations». En: *Annals of mathematics* (1952), págs. 84-95.
- [13] James Dugundji. «Topology». En: *Boston: Allyn and Bacon*, (1966).
- [14] Jerzy Dydak. «The Whitehead and the Smale theorems in shape theory». En: *Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk (Warszawa)* (1978).
- [15] Ralph Fox. «On shape». eng. En: *Fundamenta Mathematicae* 74.1 (1972), págs. 47-71. URL: <http://eudml.org/doc/214415>.
- [16] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. URL: <https://cds.cern.ch/record/478079>.
- [17] Jean-Claude Hausmann et al. «On the Vietoris-Rips complexes and a cohomology theory for metric spaces». En: *Annals of Mathematics Studies* 138 (1995), págs. 175-188.

- [18] S.T. Hu. *Theory of Retracts*. Wayne State University Press, 1965. URL: <https://books.google.es/books?id=47ptzwEACAAJ>.
- [19] Janko Latschev. «Vietoris-Rips complexes of metric spaces near a closed Riemannian manifold». En: *Archiv der Mathematik* 77.6 (2001), págs. 522-528.
- [20] S. Mardešić y J. Segal. *Shape Theory: The Inverse System Approach*. Mathematical Studies. North-Holland Publishing Company, 1982. ISBN: 9780444862860. URL: <https://books.google.es/books?id=4g-oAAAAIAAJ>.
- [21] Sibe Mardešić y Jack Segal. «Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes». En: *Fundamenta Mathematicae* 72.1 (1971), págs. 61-68.
- [22] Sibe Mardešić y Jack Segal. «Movable compacta and ANR-systems». eng. En: *Bull. Acad. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 18 (1970), págs. 649-654.
- [23] Sibe Mardešić y Jack Segal. «Shapes of compacta and ANR-systems». eng. En: *Fundamenta Mathematicae* 72.1 (1971), págs. 41-59. URL: <http://eudml.org/doc/214361>.
- [24] J.P. May. *Finite spaces and larger contexts*. URL: <https://math.uchicago.edu/~may/FINITE/FINITEBOOK/FINITEBOOKCollatedDraft.pdf>.
- [25] Michael C. McCord. «Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces». En: *Duke Mathematical Journal* 33.3 (1966), págs. 465-474. DOI: [10.1215/S0012-7094-66-03352-7](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-66-03352-7). URL: <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-66-03352-7>.
- [26] Diego Mondéjar. «Polyhedral expansions of compacta associated to finite approximations». En: *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 116.3 (2022), pág. 99.
- [27] Diego Mondéjar Ruiz y Manuel A Morón. «Reconstruction of compacta by finite approximations and inverse persistence». En: *Revista Matemática Complutense* 34 (2021), págs. 559-584.
- [28] Kiiiti Morita. «On shapes of topological spaces». eng. En: *Fundamenta Mathematicae* 86.3 (1975), págs. 251-259. URL: <http://eudml.org/doc/214778>.
- [29] Stong R. E. «Finite Topological Spaces». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 123 (1966), págs. 325-340.
- [30] Jose M. R. Sanjurjo. «An intrinsic description of shape». En: *Transactions of the American Mathematical Society* 329.2 (1992), págs. 625-636. ISSN: 0002-9947. DOI: [10.1090/S0002-9947-1992-1028311-X](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1992-1028311-X).
- [31] Jose M. R. Sanjurjo. «Shape morphisms and small multivalued maps». En: *Math. Japonica* 35.4 (1990), págs. 713-717.
- [32] S. Willard. *General Topology*. Addison Wesley series in mathematics/Lynn H.Loomis. Addison-Wesley Publishing Company, 1970. ISBN: 9780201087079. URL: <https://books.google.es/books?id=e8IPAQAAMAAJ>.