TP 547 – 2ª Lista de exercícios – Alessandra Domiciano – 939

1. **Suponha que haja 40 bolas em um chapéu, das quais 10 são vermelhas, 10 são azuis, 10 são amarelas e 10 são roxas. Qual é a probabilidade de se obter duas bolas azuis e duas roxas ao tirar 10 bolas aleatoriamente do chapéu? O que muda no resultado caso a bola seja retirada e não reposta?**

   P_{vm} = P_{az} = P_{am} = P_{ro} = $\frac{10}{40}$ = 0,25 (probabilidade de se retirar a cor correspondente)

   n = 10

   Ao se retirar 10 bolas aleatoriamente do chapéu com reposição considerando duas possibilidades de acerto, é caracterizado um experimento com distribuição multinomial. Assim, tem-se as V. A. que representam o sorteio de bolas:

   X_1 (azul), X_2 (roxa), X_3 (amarela ou vermelha)

   P [X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k] = $\frac{n!}{x_1!x_2!\ldots x_k!} {p_1}^{x_1} {p_2}^{x_2} \ldots {p_k}^{x_k}$

   P [X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 6] = $\frac{10!}{2!2!6!} 0{,}25^2 0{,}25^2 0{,}5^6$

   P [X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 6] = **0,0769 (com reposição)**

   Para a retirada de 10 bolas aleatoriamente do chapéu sem reposição, considera-se o conceito de probabilidade que a define como a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis. Dessa forma, tem-se:

   P = $\frac{\binom{10}{2}\binom{10}{2}\binom{20}{6}}{\binom{40}{10}}$

   P = **0,0926 (sem reposição)**

2. **Faça um programa para estimar a probabilidade de se obter pelo menos um dado com seis ao lançar 5 dados.**

   Esse experimento pode ser tido como uma variável aleatória com distribuição de probabilidade binomial. Assim:

   P_X $(x = 6)$ = $\frac{1}{6}$ (caso de sucesso), P_X $(x \neq 6)$ = $\frac{5}{6}$ (caso de falha)

   n = 5

   $P_X = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

   $P_X(x \geq 1) = 1 - P_X(0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5$

   $P_X(x \geq 1) = \mathbf{0,598}$

3. **Você paga 1 real e pode lançar quatro dados. Se a soma dos olhos nos dados for inferior a 9, recebe de volta 10 reais, caso contrário perde o investimento de 1 real. Você vai, então, a longo prazo, ganhar ou perder dinheiro ao jogar este jogo?**

   M = $6^4 = 1296$ (nº de combinações possíveis para o lançamento de quatro dados)

   Seja X a V. A. que representa as possíveis somas dos 4 valores sorteados:

   X = [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]

   Seja Y a V. A. que representa a frequência de cada soma possível:

   Y = [1, 4, 10, 20, 35, 56, 80, 104, 125, 140, 146, 140, 125, 104, 80, 56, 35, 20, 10, 4, 1]

   Calcula-se a probabilidade de a soma ser menor que 9 dividindo-se o número de casos de sucesso pelo número de casos possíveis. Assim, tem-se:

   $P\ [Y < 9] = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{M} = \frac{1 + 4 + 10 + 20 + 35}{1296}$

   $P\ [Y < 9] = \mathbf{0,054}$ **(vitória)**

   $P\ [Y \geq 9] = 1 - P[Y < 9] = 1 - 0{,}054$

   $P\ [Y \geq 9] = \mathbf{0,946}$ **(derrota)**

   Pode-se observar que a probabilidade de derrota em uma jogada é muito mais alta do que de vitória. Logo, tem-se uma tendência de derrota e, a longo prazo, o jogador irá perder seu dinheiro.

4. **Resolva as seguintes integrais pelo método da integração de monte carlo e pelo método da integração por importância.**

   a. $\boldsymbol{I = \int_0^1 (1 - x^2)^{3/2}\, dx}$

   - Monte Carlo:

     $I = \int_0^1 (1 - x^2)^{3/2}\, dx = E_g\left[(1 - x^2)^{3/2}\right]$

     Resultado pela simulação: ***ex4_a_mc.py***

   - Amostragem por importância:

     Escolhe-se uma função g(x) tal que $\int_0^1 g(x)\ dx = 1$: $g(x) = 2x$. Logo:

     $\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{2x} g(x)\, dx = E_g\left[\frac{(1 - x^2)^{3/2}}{2x}\right]$

     Para a simulação, calcula-se a CDF de g(x): $G(x) = \int_0^x 2x\ dx = x^2$

     Encontra-se sua transformada inversa: $x = \sqrt{u}, X = \sqrt{U}$

Simulação: ***ex4_a_am.py***

b. $\boldsymbol{I = \int_{-2}^{2} e^{x+x^2}\, dx}$

- Monte Carlo:

  $y = \frac{x+2}{4}, x = 4y - 2$

  $dy = \frac{dx}{4}, dx = 4dy$

  $I = \int_{-2}^{2} e^{x+x^2}\, dx = \int_0^1 4e^{16y^2-12y+2}\, dy = E_g\left[4e^{16y^2-12y+2}\right]$

  Simulação: ***ex4_b_mc.py***

- Amostragem por importância:

  Escolhe-se uma função g(y) tal que $\int_0^1 g(y)\ dy = 1$: $g(y) = 2y$. Logo:

  $\int_0^1 \frac{f(y)}{g(y)} g(y)\, dy = \int_0^1 \frac{4e^{16y^2-12y+2}}{2y} g(y)\, dy = E_g\left[\frac{2e^{16y^2-12y+2}}{y}\right]$

  Para a simulação, calcula-se a CDF de g(y): $G(y) = \int_0^y 2y\ dy = y^2$

  Encontra-se sua transformada inversa: $y = \sqrt{u}, Y = \sqrt{U}$

  Simulação: ***ex4_b_am.py***

c. $\boldsymbol{I = \int_0^{\infty} x(1+x^2)^{-2}\, dx}$

- Monte Carlo:

  $y = \frac{1}{x+1}, x = \frac{1}{y} - 1$

  $dy = \frac{-dx}{(x+1)^2}, dx = -\frac{1}{y^2} dy$

  $$I = \int_0^1 \frac{y - y^2}{4y^4 - 8y^3 + 8y^2 - 4y + 1}\, dy = E_g\left[\frac{y - y^2}{4y^4 - 8y^3 + 8y^2 - 4y + 1}\right]$$

  Simulação: ***ex4_c_mc.py***

- Amostragem por importância:

  Escolhe-se uma função g(y) tal que $\int_0^1 g(y)\ dy = 1$: $g(y) = 2y$. Logo:

  $\int_0^1 \frac{f(y)}{g(y)} g(y)\, dy = \int_0^1 \frac{\frac{y-y^2}{4y^4-8y^3+8y^2-4y+1}}{2y} g(y)\, dy = E_g\left[\frac{1-y}{8y^4-16y^3+16y^2-8y+2}\right]$

  Para a simulação, calcula-se a CDF de g(y): $G(y) = \int_0^y 2y\ dy = y^2$

  Encontra-se sua transformada inversa: $y = \sqrt{u}, Y = \sqrt{U}$

  Simulação: ***ex4_c_am.py***