

1. Suponha que haja 40 bolas em um chapéu, das quais 10 são vermelhas, 10 são azuis, 10 são amarelas e 10 são roxas. Qual é a probabilidade de se obter duas bolas azuis e duas roxas ao tirar 10 bolas aleatoriamente do chapéu? O que muda no resultado caso a bola seja retirada e não reposta?

$$P_{vm} = P_{az} = P_{am} = P_{ro} = \frac{10}{40} = 0,25 \text{ (probabilidade de se retirar a cor correspondente)}$$

$$n = 10$$

Ao se retirar 10 bolas aleatoriamente do chapéu com reposição considerando duas possibilidades de acerto, é caracterizado um experimento com distribuição multinomial.

Assim, tem-se as V. A. que representam o sorteio de bolas:

$X_1$  (azul),  $X_2$  (roxa),  $X_3$  (amarela ou vermelha)

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k] = \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

$$P[X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 6] = \frac{10!}{2!2!6!} 0,25^2 0,25^2 0,5^6$$

$$P[X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 6] = \mathbf{0,0769 \text{ (com reposição)}}$$

Para a retirada de 10 bolas aleatoriamente do chapéu sem reposição, considera-se o conceito de probabilidade que a define como a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis. Dessa forma, tem-se:

$$P = \frac{\binom{10}{2} \binom{10}{2} \binom{20}{6}}{\binom{40}{10}}$$

$$P = \mathbf{0,0926 \text{ (sem reposição)}}$$

2. Faça um programa para estimar a probabilidade de se obter pelo menos um dado com seis ao lançar 5 dados.

Esse experimento pode ser tido como uma variável aleatória com distribuição de probabilidade binomial. Assim:

$$P_X(x = 6) = \frac{1}{6} \text{ (caso de sucesso)}, P_X(x \neq 6) = \frac{5}{6} \text{ (caso de falha)}$$

$$n = 5$$

$$P_X = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P_X(x \geq 1) = 1 - P_X(0) = 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

$$P_X(x \geq 1) = \mathbf{0,598}$$

3. Você paga 1 real e pode lançar quatro dados. Se a soma dos olhos nos dados for inferior a 9, recebe de volta 10 reais, caso contrário perde o investimento de 1 real. Você vai, então, a longo prazo, ganhar ou perder dinheiro ao jogar este jogo?

$M = 6^4 = 1296$  (nº de combinações possíveis para o lançamento de quatro dados)

Seja  $X$  a V. A. que representa as possíveis somas dos 4 valores sorteados:

$X = [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]$

Seja  $Y$  a V. A. que representa a frequência de cada soma possível:

$Y = [1, 4, 10, 20, 35, 56, 80, 104, 125, 140, 146, 140, 125, 104, 80, 56, 35, 20, 10, 4, 1]$

Calcula-se a probabilidade de a soma ser menor que 9 dividindo-se o número de casos de sucesso (soma das frequências associada a  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $x_5$ ) pelo número de casos possíveis. Assim, tem-se:

$$P[Y < 9] = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{M} = \frac{1 + 4 + 10 + 20 + 35}{1296}$$

$$P[Y < 9] = \mathbf{0,054 \text{ (vitória)}}$$

$$P[Y \geq 9] = 1 - P[Y < 9] = 1 - 0,054$$

$$P[Y \geq 9] = \mathbf{0,946 \text{ (derrota)}}$$

Pode-se observar que a probabilidade de se ganhar em uma jogada é próxima de zero.

Assumindo que o jogador ganhe na primeira jogada e tenha mais dez chances de jogar, como as jogadas são independentes, ainda assim a probabilidade de vitória em alguma delas é próxima de zero. Logo, a longo prazo, o jogador irá perder seu dinheiro.

4. Resolva as seguintes integrais pelo método da integração de monte carlo e pelo método da integração por importância.

a.  $I = \int_0^1 (1 - x^2)^{3/2} dx$

- Monte Carlo:

$$I = \int_0^1 (1 - x^2)^{3/2} dx = E_g \left[ (1 - x^2)^{3/2} \right]$$

Resultado pela simulação: **ex4\_a\_mc.py**

- Amostragem por importância:

Escolhe-se uma função  $g(x)$  tal que  $\int_0^1 g(x) dx = 1$ :  $g(x) = 2x$ . Logo:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \int_0^1 \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{2x} g(x) dx = E_g \left[ \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{2x} \right]$$

Para a simulação, calcula-se a CDF de  $g(x)$ :  $G(x) = \int_0^x 2x dx = x^2$

Encontra-se sua transformada inversa:  $x = \sqrt{u}$ ,  $X = \sqrt{U}$

Simulação: **ex4\_a\_am.py**

b.  $I = \int_{-2}^2 e^{x+x^2} dx$

- Monte Carlo:

$$y = \frac{x+2}{4}, x = 4y - 2$$

$$dy = \frac{dx}{4}, dx = 4dy$$

$$I = \int_{-2}^2 e^{x+x^2} dx = \int_0^1 4e^{16y^2-12y+2} dy = E_g[4e^{16y^2-12y+2}]$$

Simulação: **ex4\_b\_mc.py**

- Amostragem por importância:

Escolhe-se uma função  $g(y)$  tal que  $\int_0^1 g(y) dy = 1$ :  $g(y) = 2y$ . Logo:

$$\int_0^1 \frac{f(y)}{g(y)} g(y) dy = \int_0^1 \frac{4e^{16y^2-12y+2}}{2y} g(y) dy = E_g \left[ \frac{2e^{16y^2-12y+2}}{y} \right]$$

Para a simulação, calcula-se a CDF de  $g(y)$ :  $G(y) = \int_0^y 2y dy = y^2$

Encontra-se sua transformada inversa:  $y = \sqrt{u}$ ,  $Y = \sqrt{U}$

Simulação: **ex4\_b\_am.py**

c.  $I = \int_0^\infty x(1+x^2)^{-2} dx$

- Monte Carlo:

$$y = \frac{1}{x+1}, x = \frac{1}{y} - 1$$

$$dy = \frac{-dx}{(x+1)^2}, dx = -\frac{1}{y^2} dy$$

$$I = \int_0^1 \frac{y^2 - y}{4y^4 - 8y^3 + 8y^2 - 4y + 1} dy = E_g \left[ \frac{y^2 - y}{4y^4 - 8y^3 + 8y^2 - 4y + 1} \right]$$

Simulação: **ex4\_c\_mc.py**

- Amostragem por importância:

Escolhe-se uma função  $g(y)$  tal que  $\int_0^1 g(y) dy = 1$ :  $g(y) = 2y$ . Logo:

$$\int_0^1 \frac{f(y)}{g(y)} g(y) dy = \int_0^1 \frac{e^{16y^2-12y+2}}{2y} g(y) dy = E_g \left[ \frac{e^{16y^2-12y+2}}{2y} \right]$$

Para a simulação, calcula-se a CDF de  $g(y)$ :  $G(y) = \int_0^y 2y dy = y^2$

Encontra-se sua transformada inversa:  $y = \sqrt{u}$ ,  $Y = \sqrt{U}$

Simulação: **ex4\_c\_am.py**