

# Laboratorio di Fisica 1

Esperienza Guidovia

Alessandra Montalbano

27.05.2021

Universita' di Palermo  
A. A. 2020/2021

# Indice

<b>1</b>	<b>Descrizione e scopo dell'esperimento</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conoscenze teoriche</b>	<b>4</b>
2.0.1	Definizione del modello . . . . .	4
2.0.2	Calcolo degli errori iniziali . . . . .	4
2.0.3	Prima regressione . . . . .	5
2.0.4	Propagazione degli errori di x su y . . . . .	7
2.0.5	Seconda regressione (pesata) . . . . .	8
2.0.6	Calcolo degli errori sui parametri, con formula ricavata . . . . .	10
2.0.7	Calcolo degli errori sui parametri, con metodo euristico . . . . .	10
2.0.8	Grafico dei residui . . . . .	12
2.0.9	Correggere l'errore sulle y, con il sigma post-fit . . . . .	12
2.0.10	Correggere l'errore sulle y, moltiplicando per la radice del chi-quadrato ridotto . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Configurazione leggera</b>	<b>14</b>
3.1	Dati . . . . .	14
3.2	Calcoli e analisi dei dati sperimentali . . . . .	15
3.2.1	Prima regressione . . . . .	15
3.2.2	Seconda regressione (pesata) . . . . .	17
3.2.3	Trovare sigma C tramite metodo euristico . . . . .	17
3.2.4	Risultati . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Configurazione pesante</b>	<b>21</b>
4.1	Dati . . . . .	21
4.2	Calcoli e analisi dei dati sperimentali . . . . .	22
4.2.1	Prima regressione . . . . .	22
4.2.2	Seconda regressione (pesata) . . . . .	24
4.2.3	Trovare sigma C tramite metodo euristico . . . . .	24
4.2.4	Errori pesati con la radice quadrata del chi-quadrato ridotto . . . . .	26
4.2.5	Risultati . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Configurazione pesante pesante</b>	<b>28</b>
5.1	Dati . . . . .	28
5.2	Calcoli e analisi dei dati sperimentali . . . . .	29
5.2.1	Prima regressione . . . . .	29
5.2.2	Seconda regressione (pesata) . . . . .	31
5.2.3	Trovare sigma C tramite metodo euristico . . . . .	31
5.2.4	Errori pesati con la radice quadrata del chi-quadrato ridotto . . . . .	33
5.2.5	Risultati . . . . .	33

<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>35</b>
<b>7</b>	<b>Appendice A - Funzioni per il calcolo della regressione</b>	<b>37</b>
<b>8</b>	<b>Appendice B - Verifica con SciDavis</b>	<b>46</b>

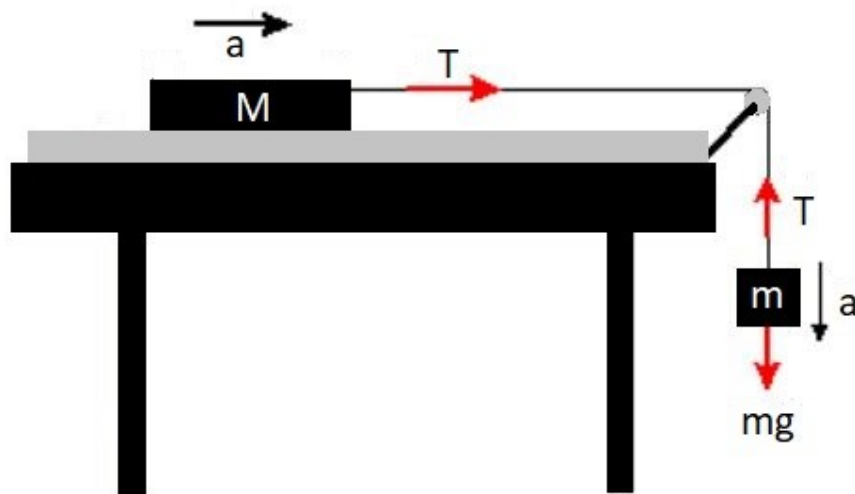
## 1 Descrizione e scopo dell'esperimento

La massa  $M$  è un carrello, in grado di muoversi orizzontalmente su una guidovia a cuscino d'aria. Il pesetto  $m$  è collegato al carrello da un filo di nylon (inestensibile e di massa trascurabile) passante su una carrucola. L'esperienza consiste nello studio del moto rettilineo accelerato della slitta di massa  $M$ .

Lo scopo finale è la misura dell'attrito residuo della guidovia. Trovando l'accelerazione sperimentale a cui è soggetta la slitta, e confrontandola con l'accelerazione teorica in assenza di attrito, calcoleremo la discrepanza tra i due risultati.

Reitereremo l'esperimento per 3 diverse configurazioni:

- **Leggera:** slitta e peso + filo
- **Pesante:** slitta con pesetti e peso + filo
- **Pesante pesante:** slitta con pesetti e 2 pesi + filo



*Figura 1: Analisi delle forze*

Di seguito riportiamo i dati preliminari del sistema in esame:

Dati preliminari		
	Migliore stima	Errore strumentale
Peso + filo (g)	14.3	0.1
2 Pesì + filo (g)	24.3	0.1
slitta (g)	209.3	0.1
slitta con pesetti (g)	309.0	0.1
Posizione partenza (cm)	41.15	0.05

**Tabella 1:** *Tabella dei dati preliminari*

Sia  $T$  la tensione del filo mentre  $m$  si muove verso il basso. Il filo esercita una forza  $T$  su  $m$  diretta verso l'alto e una forza  $T$  su  $M$  diretta verso destra. Queste forze sono mostrate nella Figura 1 sopra. Trascuriamo invece le forze verticali su  $M$  poiché non incidono sul moto della slitta.

Se l'attrito tra guidovia e slitta fosse completamente trascurabile, il moto della slitta sarebbe uniformemente accelerato e le equazioni del moto sono quindi:

$$\begin{cases} mg - T = ma & \text{per } m \\ T = Ma & \text{per } M \end{cases} \quad (1)$$

Se le sommiamo:

$$\begin{aligned} mg &= Ma + ma \\ \Rightarrow mg &= (M + m)a \end{aligned}$$

Se risolviamo per  $a$ , troviamo l'accelerazione teorica:

$$a_T = \frac{m}{M + m}g = \frac{g}{(\frac{m}{M} + 1)} \quad (2)$$

L'accelerazione teorica ha un'incertezza data dalla somma semplice delle derivate parziali. Motiviamo questa scelta poiché crediamo che gli errori nella misura delle due masse non siano del tutto indipendenti e casuali, dato che il processo di misurazione è avvenuto con lo stesso strumento di misura:

$$\delta a_T = \left| \frac{\partial a_T}{\partial M} \right| \cdot \delta M + \left| \frac{\partial a_T}{\partial m} \right| \cdot \delta m = \left| \frac{mg}{(M + m)^2} \right| \cdot \delta M + \left| \frac{Mg}{(M + m)^2} \right| \cdot \delta m \quad (3)$$

Da cui ricaviamo, utilizzando i dati della tabella sopra, e  $g = 9.806 \text{ m/s}^2$ :

- **configurazione leggera** ( $m = 14.3 \pm 0.1 \text{ g}$ ,  $M = 209.3 \pm 0.1 \text{ g}$ ):  
 $a_T = (0.627 \pm 0.004) \text{ m/s}^2$
- **configurazione pesante** ( $m = 14.3 \pm 0.1 \text{ g}$ ,  $M = 309.0 \pm 0.1 \text{ g}$ ):  
 $a_T = (0.434 \pm 0.003) \text{ m/s}^2$
- **configurazione pesante pesante** ( $m = 24.3 \pm 0.1 \text{ g}$ ,  $M = 309.0 \pm 0.1 \text{ g}$ ):  
 $a_T = (0.715 \pm 0.003) \text{ m/s}^2$

Mentre invece l'accelerazione teorica in presenza di attrito la calcoliamo da  $mg - \mu_d Mg = (m + M)a$ , da cui:

$$a_{att} = \frac{mg - \mu_d Mg}{M + m} \quad (4)$$

che è ovviamente minore di  $a_T$ . Da questa formula ricaviamo quindi il coefficiente di attrito:

$$\mu_d = \frac{mg - (M + m)a_s}{Mg} \quad (5)$$

e troviamo l'errore massimo sul coefficiente d'attrito, utilizzando la tecnica delle derivate parziali e la somma semplice, sempre perché non siamo completamente sicuri che siano indipendenti:

$$\delta_{\mu_d} = \left| \frac{\partial \mu_d}{\partial m} \cdot \delta m \right| + \left| \frac{\partial \mu_d}{\partial M} \cdot \delta M \right| + \left| \frac{\partial \mu_d}{\partial a_s} \cdot \delta a_s \right| \quad (6)$$

dove  $a_s$  è l'accelerazione sperimentale che calcoleremo successivamente.

Dopo aver calcolato  $\mu_d$  per tutte e tre le configurazioni, potremo infine calcolarne la media pesata:

$$\mu_{best} = \frac{\delta_{\mu_1} \mu_1 + \delta_{\mu_2} \mu_2 + \delta_{\mu_3} \mu_3}{\delta_{\mu_1} + \delta_{\mu_2} + \delta_{\mu_3}} \quad (7)$$

ed il rispettivo errore:

$$\delta_{\mu_{best}} = \frac{1}{\sqrt{\delta_{\mu_1}^2 + \delta_{\mu_2}^2 + \delta_{\mu_3}^2}} \quad (8)$$

## 2 Conoscenze teoriche

### 2.0.1 Definizione del modello

La regressione è utilizzata per modellare la relazione che c'è tra due o più variabili. In questa analisi dei dati utilizzeremo la regressione polinomiale, che ha equazione del tipo:

$$y = A + Bx + Cx^2 \quad (9)$$

Il presupposto in questo esperimento è che la forza di attrito sia nulla. Se è così, dall'equazione (7) segue che l'accelerazione  $a_{sperimentale} = a_T$ . In questo caso la posizione,  $S$ , che la slitta percorre in un tempo,  $t$ , è data dalla seguente legge oraria, assumendo che  $v_0 = 0$  (cioè che la slitta all'istante  $t = t_0$ ) sia ferma:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2 \quad (10)$$

dove  $S_0$  ci darà una stima della posizione dello starter, che è incognita nel nostro caso, e  $v_0$  è la velocità con cui il carrellino arriva alla fotocellula che rappresenta lo starter e  $a$  sarà l'accelerazione sperimentale.

Assumiamo inoltre che non esistano errori sistematici, che tutti gli errori siano quindi di tipo statistico e di conseguenza che tutte le grandezze abbiano una distribuzione gaussiana.

### 2.0.2 Calcolo degli errori iniziali

Per ogni posizione  $S_i$  abbiamo calcolato la media dei tempi  $(t_{i,j})$  di percorrenza, utilizzando la seguente formula:

$$\bar{t}_i = \sum_{j=1}^N \frac{t_{i,j}}{N} \quad (11)$$

che prendiamo come migliore stima per i tempi, quindi appunto definiamo  $t_{i,best} = \bar{t}_i$  con deviazione standard data da:

$$\sigma_{t_i} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (t_{i,j} - \bar{t}_i)^2} \quad (12)$$

Motiviamo la scelta della deviazione standard del campione per prudenza, abbiamo ritenuto questa fosse la scelta più appropriata per un  $N$  abbastanza piccolo. In teoria avremmo potuto calcolare

l'errore di  $\bar{t}_i$  con la formula della deviazione standard dalla media ma, poiché abbiamo poche misure per ciascun tempo la stima potrebbe non essere necessariamente corretta a causa dell'esiguo numero di misure.

Il nostro errore sui tempi, però, se utilizzassimo la sola deviazione standard, non includerebbe eventuali errori sistematici (poiché la deviazione standard ci dà informazioni solo sulla variabilità dei dati) e questo può essere un problema soprattutto perché nel caso in cui ci fossero errori sistematici, allora si violerebbero le assunzioni del nostro modello di regressione.

Allora per ottenere l'errore  $\sigma_{t_i}$ , dopo aver calcolato la deviazione standard del campione, a questa va aggiunto l'errore strumentale. Essendo l'errore strumentale un errore massimo, dobbiamo confrontare i due errori sulla base della stessa confidenza. Quindi l'errore strumentale va diviso per 3 prima di sommarla alla deviazione standard dei tempi, in modo che entrambi i termini abbiano lo stesso livello di confidenza del 68.3%. Facciamo la somma semplice, anziché la somma in quadratura, perché non siamo completamente sicuri che queste due incertezze siano indipendenti tra loro e casuali, per cui il sigma :

$$\sigma_{x_i} = \sigma_{t_i} + \frac{\delta_{strumentale}}{3} \quad (13)$$

Mentre invece l'errore sulle posizioni  $S_i$  sarà calcolato a partire dall'errore strumentale  $\delta_{s_i} = 0.05cm$ , dato dall'errore di lettura del metro. Questo è un errore massimo, da cui otteniamo un errore  $\sigma_{s_i}$

$$\sigma_{s_i} = \frac{\delta_{s_i}}{3} = 0.017cm = 0.00017m \quad (14)$$

### 2.0.3 Prima regressione

Adesso scriviamo la formula del chi-quadrato, che appunto minimizzeremo per trovare i coefficienti:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^M (y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)^2}{\sigma_{y_i}^2} \quad (15)$$

Dove  $M=16$  è il numero delle posizioni. Per trovare A, B e C dobbiamo differenziare  $\chi^2$  rispetto ad A, B e C poniamo le derivate uguali a 0:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \sum_{i=1}^M 2(-1) \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)}{\sigma_{y_i}^2} = 0 \quad (16)$$



$$\frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \sum_{i=1}^M 2(-x_i) \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)}{\sigma_{y_i}^2} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial C} = \sum_{i=1}^M 2(-x_i^2) \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)}{\sigma_{y_i}^2} = 0 \quad (18)$$

Queste due equazioni possono essere riscritte come equazioni simultanee per A e B e C, dove sostituiamo  $\sum_{i=1}^M$  semplicemente con  $\Sigma$ :

$$MA + B \Sigma x_i + C \Sigma x_i^2 = \Sigma y_i \quad (19)$$

$$A \Sigma x_i + B \Sigma x_i^2 + C \Sigma x_i^3 = \Sigma x_i y_i \quad (20)$$

$$A \Sigma x_i^2 + B \Sigma x_i^3 + C \Sigma x_i^4 = \Sigma x_i^2 y_i \quad (21)$$

da cui calcoliamo poi i coefficienti A, B e C trasformando il sistema di equazioni in forma matriciale.

$$\begin{bmatrix} M & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Risolviamo con il metodo di Sarrus:

$$\Delta = M \cdot \Sigma x_i^2 \cdot \Sigma x_i^4 + \Sigma x_i \cdot \Sigma x_i^3 \cdot \Sigma x_i^2 + \Sigma x_i^2 \cdot \Sigma x_i \cdot \Sigma x_i^3 - (\Sigma x_i^2)^3 - (\Sigma x_i^3)^2 \cdot M - \Sigma x_i^4 \cdot \Sigma (x_i)^2 \quad (22)$$

$$\Delta_1 = \Sigma y_i \cdot \Sigma x_i^2 \cdot \Sigma x_i^4 + \Sigma x_i \cdot \Sigma x_i^3 \cdot \Sigma x_i^2 y_i + \Sigma x_i^2 \cdot \Sigma x_i y_i \cdot \Sigma x_i^3 - \Sigma x_i^2 y_i \cdot (\Sigma x_i^2)^2 - (\Sigma x_i^3)^2 \cdot \Sigma y_i - \Sigma x_i^4 \cdot \Sigma x_i \cdot \Sigma x_i y_i \quad (23)$$

$$\Delta_2 = M \cdot \sum x_i y_i \cdot \sum x_i^4 + \sum y_i \cdot \sum x_i^3 \cdot \sum x_i^2 + \sum x_i^2 \cdot \sum x_i \cdot \sum x_i^2 y_i - (\sum x_i^2)^2 \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i^2 y_i \cdot \sum x_i^3 \cdot M - \sum x_i^4 \cdot \sum x_i \cdot \sum y_i \quad (24)$$

$$\Delta_3 = M \cdot \sum x_i^2 \cdot \sum x_i^2 y_i + \sum x_i \cdot \sum x_i y_i \cdot \sum x_i^2 + \sum y_i \cdot \sum x_i \cdot \sum x_i^3 - (\sum x_i^2)^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i^3 \cdot \sum x_i y_i \cdot M - \sum x_i^2 y_i \cdot \sum (x_i)^2 \quad (25)$$

Abbiamo quindi trovato i primi coefficienti A, B e C:

$$A = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (26)$$

$$B = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (27)$$

$$C = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (28)$$

Adesso calcoliamo il chi-quadrato di questa prima regressione, utilizziamo come  $\sigma_y$  l'errore sulle posizioni  $\sigma_{s_i}$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^M \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)^2}{\sigma_{y_i}^2} \quad (29)$$

Probabilmente ci troveremo nel caso in cui  $\chi^2$  è molto maggiore di M-3 (gradi libertà) e questo sarà dovuto al fatto che abbiamo anche degli errori sui tempi che dovremmo propagare sugli spazi e il fatto che questi errori sui tempi non siano tutti uguali ci porterà a dover fare una regressione pesata.

#### 2.0.4 Propagazione degli errori di x su y

La nostra prima stima dei coefficienti A, B e C, ci consente di propagare l'errore dei tempi sugli spazi, allora a questo punto dovremmo calcolare un  $\sigma_{y_i,eq}$ , cioè l'errore del tempo propagato sullo

spazio, e lo troviamo utilizzando il metodo delle derivate parziali:

$$\sigma_{y_i,eq} = \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=x_i} \sigma_{x_i} = \frac{\partial (A + Bx_i + Cx_i^2)^2}{\partial x}|_{x=x_i} \sigma_{x_i} = (B + 2Cx_i) \sigma_{x_i} \quad (30)$$

Per ottenere l'errore totale sugli spazi  $\sigma_{y_i,TOT}$

$$\sigma_{y_i,TOT} = \sqrt{\sigma_{s_i}^2 + \sigma_{y_i,eq}^2} = \sqrt{\sigma_{s_i}^2 + (B + 2Cx_i)^2 \sigma_{x_i}^2} \quad (31)$$

Questi nuovi errori però non saranno tutti uguali, saranno sempre più grandi all'aumentare del tempo, a questo punto dovremmo calcolare la regressione usando il metodo dei minimi quadrati pesati. Definiamo quindi  $w_i = 1/\sigma_{y_i,TOT}^2$

### 2.0.5 Seconda regressione (pesata)

La nuova formula del chi-quadrato da minimizzare sarà adesso:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^M (y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)^2}{w_i \sigma_{y_i}^2} \quad (32)$$

Dove M= 16 è il numero delle posizioni. Per trovare A, B e C dobbiamo differenziare  $\chi^2$  rispetto ad A, B e C poniamo le derivate uguali a 0:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \sum_{i=1}^M 2(-1) \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)}{w_i \sigma_{y_i}^2} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \sum_{i=1}^M 2(-x_i) \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)}{w_i \sigma_{y_i}^2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial C} = \sum_{i=1}^M 2(-x_i^2) \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)}{w_i \sigma_{y_i}^2} = 0 \quad (35)$$

Queste tre equazioni possono essere riscritte come equazioni simultanee per A e B e C, dove sostituiamo  $\sum_{i=1}^M$  semplicemente con  $\Sigma$ :

$$A \Sigma w_i + B \Sigma w_i \Sigma x_i + C \Sigma w_i \Sigma x_i^2 = \Sigma w_i \Sigma y_i \quad (36)$$

$$A \Sigma w_i \Sigma x_i + B \Sigma w_i \Sigma x_i^2 + C \Sigma w_i \Sigma x_i^3 = \Sigma w_i \Sigma x_i y_i \quad (37)$$

$$A \Sigma w_i \Sigma x_i^2 + B \Sigma w_i \Sigma x_i^3 + C \Sigma w_i \Sigma x_i^4 = \Sigma w_i \Sigma x_i^2 y_i \quad (38)$$

I nuovi A, B e C saranno calcolati a partire dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} \Sigma w_i & \Sigma w_i x_i & \Sigma w_i x_i^2 \\ \Sigma w_i x_i & \Sigma w_i x_i^2 & \Sigma w_i x_i^3 \\ \Sigma w_i x_i^2 & \Sigma w_i x_i^3 & \Sigma w_i x_i^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma w_i y_i \\ \Sigma w_i x_i y_i \\ \Sigma w_i x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \Sigma w_i \cdot \Sigma w_i x_i^2 \cdot \Sigma w_i x_i^4 + \Sigma w_i x_i \cdot \Sigma w_i x_i^3 \cdot \Sigma w_i x_i^2 + \Sigma w_i x_i^2 \cdot \Sigma w_i x_i \cdot \Sigma w_i x_i^3 - (\Sigma w_i x_i^2)^3 - (\Sigma w_i x_i^3)^2 \cdot \Sigma w_i - \Sigma w_i x_i^4 \cdot \Sigma (w_i x_i)^2 \quad (39)$$

$$\Delta_1 = \Sigma w_i y_i \cdot \Sigma w_i x_i^2 \cdot \Sigma w_i x_i^4 + \Sigma w_i x_i \cdot \Sigma w_i x_i^3 \cdot \Sigma w_i x_i^2 y_i + \Sigma w_i x_i^2 \cdot \Sigma w_i x_i y_i \cdot \Sigma w_i x_i^3 - \Sigma w_i x_i^2 y_i \cdot (\Sigma w_i x_i^2)^2 - (\Sigma w_i x_i^3)^2 \cdot \Sigma w_i y_i - \Sigma w_i x_i^4 \cdot \Sigma w_i x_i \cdot \Sigma w_i x_i y_i \quad (40)$$

$$\Delta_2 = \Sigma w_i \cdot \Sigma w_i x_i y_i \cdot \Sigma w_i x_i^4 + \Sigma w_i y_i \cdot \Sigma w_i x_i^3 \cdot \Sigma w_i x_i^2 + \Sigma w_i x_i^2 \cdot \Sigma w_i x_i \cdot \Sigma w_i x_i^2 y_i - (\Sigma w_i x_i^2)^2 \cdot \Sigma w_i x_i y_i - \Sigma w_i x_i^2 y_i \cdot \Sigma w_i x_i^3 \cdot \Sigma w_i - \Sigma w_i x_i^4 \cdot \Sigma w_i x_i \cdot \Sigma w_i y_i \quad (41)$$

$$\Delta_3 = \Sigma w_i \cdot \Sigma w_i x_i^2 \cdot \Sigma w_i x_i^2 y_i + \Sigma w_i x_i \cdot \Sigma w_i x_i y_i \cdot \Sigma w_i x_i^2 + \Sigma w_i y_i \cdot \Sigma w_i x_i \cdot \Sigma w_i x_i^3 - (\Sigma w_i x_i^2)^2 \cdot \Sigma w_i y_i - \Sigma w_i x_i^3 \cdot \Sigma w_i x_i y_i \cdot \Sigma w_i - \Sigma w_i x_i^2 y_i \cdot \Sigma (w_i x_i)^2 \quad (42)$$

e quindi A, B e C sono calcolati rispettivamente come in (26), (27) e (28):

### 2.0.6 Calcolo degli errori sui parametri, con formula ricavata

Dalla matrice dei coefficienti del sistema descritto sopra, facendone l'inversa, ricaviamo anche la matrice varianza-covarianza, da cui possiamo calcolare gli errori sui parametri. Ognuno di questi sarà dato dalla radice quadrata degli elementi sulla diagonale della matrice varianza-covarianza. Otteniamo:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum w_i x_i^2 \cdot \sum w_i x_i^4 - (\sum w_i x_i^3)^2}{\Delta}} \quad (43)$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^4 - (\sum w_i x_i^2)^2}{\Delta}} \quad (44)$$

$$\sigma_C = \sqrt{\frac{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2}{\Delta}} \quad (45)$$

dove  $\Delta$  come in (39).

### 2.0.7 Calcolo degli errori sui parametri, con metodo euristico

Per confermare ulteriormente la correttezza della formula sopra (oltre che con Scidavis, in appendice B) implementeremo anche un metodo euristico per trovare la migliore stima degli errori sul coefficiente C.

Per capire come definire l'intervallo di errore dei parametri con un metodo diverso possiamo fare come segue, solo per il parametro C perché è effettivamente quello che ci interessa nella nostra analisi. Se dovessimo fare una minimizzazione di tutti e tre i parametri, la situazione sarebbe più complicata perché ci ritroveremmo a dover lavorare con quattro dimensioni.

Partiamo da un valore subottimale di C (minore di quello che ci aspettiamo sia il nostro C best), e successivamente lo incrementiamo per un numero di volte (10,000 nel nostro caso) e ricalcoliamo ad ogni iterazione i parametri della regressione A e B, tenendo fissato C, in modo da poter fare un grafico del chi-quadrato in funzione del parametro C.

In questo caso però, poiché fissiamo C, la nostra funzione della regressione sarà:

$$y - Cx^2 = A + Bx \quad (46)$$

La formula del chi-quadrato da minimizzare sarà sempre la (32). Per trovare A e B questa volta dobbiamo differenziare  $\chi^2$  solo rispetto ad A e B e poniamo le derivate uguali a 0, utilizziamo

quindi le equazioni (33) e (34).

Come nelle regressioni precedenti, le 2 equazioni possono essere riscritte come equazioni simultanee per A e B:

$$A \sum w_i + B \sum w_i \sum x_i = \sum w_i \sum y_i - C \sum w_i \sum x_i^2 \quad (47)$$

$$A \sum w_i \sum x_i + B \sum w_i \sum x_i^2 = \sum w_i \sum x_i y_i - C \sum w_i \sum x_i^3 \quad (48)$$

I nuovi A, B e C saranno calcolati a partire dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} \sum w_i & \sum w_i x_i \\ \sum w_i x_i & \sum w_i x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum w_i y_i - C \sum w_i \sum x_i^2 \\ \sum w_i x_i y_i - C \sum w_i \sum x_i^3 \end{bmatrix}$$

da cui, ricaviamo i coefficienti mediante il metodo di Sarrus:

$$A = \frac{(\sum w_i y_i - C \sum w_i \sum x_i^2) \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i y_i - C \sum w_i \sum x_i^3) \cdot \sum w_i x_i}{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2} \quad (49)$$

$$B = \frac{\sum w_i \cdot (\sum w_i x_i y_i - C \sum w_i \sum x_i^3) - \sum w_i x_i \cdot (\sum w_i y_i - C \sum w_i \sum x_i^2)}{\sum w_i \cdot \sum w_i x_i^2 - (\sum w_i x_i)^2} \quad (50)$$

mentre gli errori su A e B saranno ancora calcolati con le formule (43) e (44), rispettivamente.

Mettendo sull'asse delle ordinate i valori del chi-quadrato e sull'asse delle ascisse i valori di C (a partire da un valore minimo e incrementando sempre di un certo "passo"), otteniamo quindi una parabola, al cui valore minimo troviamo il parametro C best.

In particolare, definiamo gli errori sul parametro C utilizzando la variazione del chi-quadrato  $\Delta\chi^2$ . Dato che vogliamo trovare un errore di 1 sigma su C, allora tracciamo una retta all'altezza  $\chi^2 = \chi_o^2 + \Delta\chi^2$ , questa retta intersecherà la nostra parabola in due punti, simmetrici rispetto allo zero e che definiranno il nostro intervallo di confidenza al 68.3% per il valore di C (sfrutteremo questa cosa, anche se ovviamente vale solo nel nostro caso perché abbiamo una parabola e quindi un solo minimo nella nostra funzione).

Questi due punti definiranno l'intervallo di confidenza ad 1 sigma, cioè c'è una probabilità del 68.3% che il  $\chi_o^2$  che osserviamo si trovi all'interno di questo intervallo.

### 2.0.8 Grafico dei residui

Dopo aver analizzato attentamente il grafico dei residui, potremmo pensare a varie ipotesi per giustificare il perché dei valori che avremo ottenuto dal test del chi-quadrato. In un grafico dei residui vediamo cioè quanto i punti discrepano dalla curva data. Mettiamo sull'asse delle ordinate i residui, definiti come:

$$R_i = y_i - (A + Bx_i + Cx_i^2) \quad (51)$$

Sappiamo che nel caso di una previsione perfetta, i residui sarebbero esattamente zero, questo però è molto difficile che accada. Tuttavia, in un buon modello di regressione, ci aspetteremmo che i residui siano sparpagliati attorno allo 0 in modo casuale. Inoltre, possiamo anche utilizzare il grafico dei residui per rilevare dei punti con una grande deviazione dalla funzione di regressione, o per valutare l'ampiezza delle barre di errore.

C'è da chiarire che, quando parliamo dell'errore sui residui in realtà stiamo parlando esattamente dell'errore sulle  $y_i$ . Infatti, a partire dall'equazione (51), essendo le  $y_i$  delle grandezze distribuite secondo una distribuzione gaussiana centrata in  $(A + Bx_i + Cx_i^2)$  e con deviazione standard  $\sigma_{y_i}$ , ne consegue che i residui  $R_i$  saranno distribuiti a loro volta secondo una distribuzione gaussiana (questa era già una assunzione del modello di regressione) ma con media 0 e deviazione standard  $\sigma_{y_i}$ . In pratica, la distribuzione dei residui  $R_i$  è la stessa distribuzione delle  $y_i$ , ma traslata di  $-(A + Bx_i + Cx_i^2)$ .

### 2.0.9 Correggere l'errore sulle y, con il sigma post-fit

Potremmo trovarci nelle condizioni di utilizzare una sigma post-fit, la cui formula è:

$$\sigma_{pf} = \sqrt{\frac{1}{M-3} \sum_{i=1}^M (y_i - (A + Bx_i + Cx_i^2))^2} \quad (52)$$

Utilizzando la  $\sigma_{pf}$  però ci ritroveremmo con degli errori sulle  $y_i$  tutti uguali.

### 2.0.10 Correggere l'errore sulle y, moltiplicando per la radice del chi-quadrato ridotto

C'è inoltre un modo per attribuire alle  $y_i$  un valore corretto, ma mantenendo allo stesso tempo i pesi originali sugli errori. Potremmo quindi moltiplicare tutti gli errori per una quantità  $\sqrt{\tilde{\chi}_0^2}$  così da ridurli (in caso di  $\tilde{\chi}_0^2 < 1$ ) o amplificarli (in caso di  $\tilde{\chi}_0^2 > 1$ ). Cioè dovremmo trovare un valore che ci faccia ottenere un valore di  $\tilde{\chi}_0^2 = 1$ . Se il seguente fosse il valore di  $\tilde{\chi}^2$  ottenuto alla fine

delle iterazioni:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{1}{dof} \cdot \sum_{i=1}^M \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)^2}{\sigma_{y_i, TOT}^2} = \tilde{\chi}_0^2 \quad (53)$$

che è appunto non accettabile o non ideale perché troppo grande o troppo piccolo. Dividiamo entrambi i membri per  $\tilde{\chi}_0^2$  per ottenere un valore  $\tilde{\chi}^2 = 1$ :

$$\frac{1}{dof} \cdot \sum_{i=1}^M \frac{(y_i - A - Bx_i - Cx_i^2)^2}{\tilde{\chi}_0^2 \cdot \sigma_{y_i, TOT}^2} = 1 \quad (54)$$

da cui ricaviamo che gli errori devono essere:

$$\sigma_{y_i, TOT} = \sqrt{\tilde{\chi}_0} \cdot \sigma_{y_i, TOT} \quad (55)$$

In questo caso appunto avremo gli stessi parametri A,B e C, mentre quello che cambierà saranno gli errori sui parametri.



### 3 Configurazione leggera

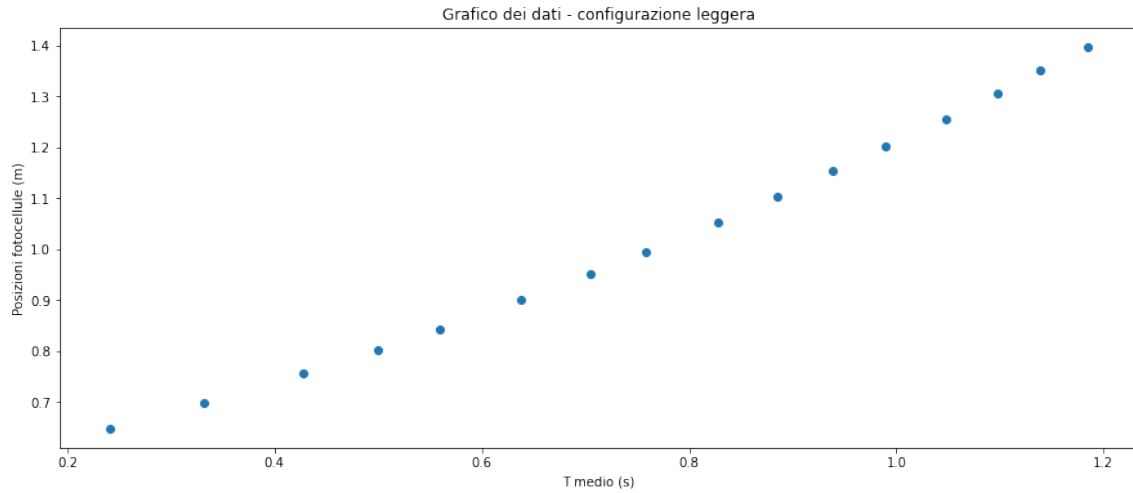
#### 3.1 Dati

Nella configurazione leggera sono state prese  $N=11$  misure per ognuna delle  $M=16$  posizioni delle fotocellule, escluso lo starter.

Posizioni (m)	$\sigma_{S_i}$ (m)	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)	$t_3$ (s)	$t_4$ (s)	$t_5$ (s)	$t_6$ (s)	$t_7$ (s)	$t_8$ (s)	$t_9$ (s)	$t_{10}$ (s)	$t_{11}$ (s)	$\bar{t}$ (s)	$\sigma_{\bar{t}}$ (s)
0.648	0.00017	0.241	0.241	0.241	0.241	0.241	0.240	0.241	0.241	0.241	0.241	0.240	0.241	0.0007
0.698	0.00017	0.332	0.333	0.332	0.332	0.332	0.332	0.333	0.332	0.332	0.333	0.332	0.332	0.0008
0.756	0.00017	0.428	0.428	0.427	0.429	0.427	0.429	0.427	0.428	0.428	0.428	0.428	0.428	0.0010
0.803	0.00017	0.501	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.499	0.500	0.0008
0.843	0.00017	0.559	0.559	0.559	0.559	0.559	0.559	0.560	0.560	0.560	0.559	0.559	0.559	0.0008
0.900	0.00017	0.638	0.638	0.637	0.638	0.638	0.637	0.638	0.638	0.638	0.639	0.637	0.638	0.0009
0.953	0.00017	0.705	0.705	0.704	0.706	0.704	0.706	0.703	0.704	0.705	0.705	0.705	0.705	0.0012
0.996	0.00017	0.760	0.759	0.759	0.759	0.758	0.759	0.758	0.758	0.758	0.759	0.757	0.759	0.0012
1.053	0.00017	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.829	0.828	0.827	0.828	0.828	0.0008
1.104	0.00017	0.886	0.886	0.885	0.885	0.886	0.884	0.886	0.885	0.885	0.887	0.884	0.885	0.0013
1.154	0.00017	0.939	0.939	0.938	0.941	0.938	0.940	0.937	0.938	0.938	0.938	0.939	0.939	0.0015
1.202	0.00017	0.991	0.991	0.990	0.991	0.989	0.991	0.989	0.990	0.989	0.991	0.989	0.990	0.0013
1.255	0.00017	1.048	1.048	1.047	1.047	1.048	1.048	1.048	1.050	1.048	1.047	1.047	1.048	0.0012
1.306	0.00017	1.098	1.098	1.097	1.097	1.098	1.096	1.098	1.097	1.097	1.099	1.096	1.097	0.0013
1.351	0.00017	1.139	1.140	1.139	1.142	1.138	1.140	1.137	1.139	1.139	1.139	1.139	1.139	0.0016
1.399	0.00017	1.186	1.185	1.185	1.186	1.184	1.186	1.184	1.184	1.184	1.186	1.184	1.185	0.0013

**Tabella 2:** Rappresentazione tabellare dei dati raccolti, con rispettivi errori sigma calcolati, configurazione leggera.

Per ogni posizione  $S_i$  abbiamo calcolato la media dei tempi di percorrenza, utilizzando la formula (7), che prendiamo come migliore stima per  $t$ , quindi appunto abbiamo  $t_{best} = \bar{t}$  e con deviazione standard dalla media data da (8). Adesso riportiamo i dati su grafico di  $S$  in funzione di  $\bar{t}$ .



**Figura 2:** Grafico di  $S$  in funzione di  $\bar{t}$ , configurazione leggera. Le barre di errore per  $S$  e  $\bar{t}$  sono incluse.

### 3.2 Calcoli e analisi dei dati sperimentali

Adesso svolgiamo l'analisi in python. Calcoliamo l'accelerazione teorica con i dati dell'esperimento nella configurazione leggera ( $m = 14.3g$ ,  $M = 209.3g$ ,  $g = 9.806m/s^2$ ):

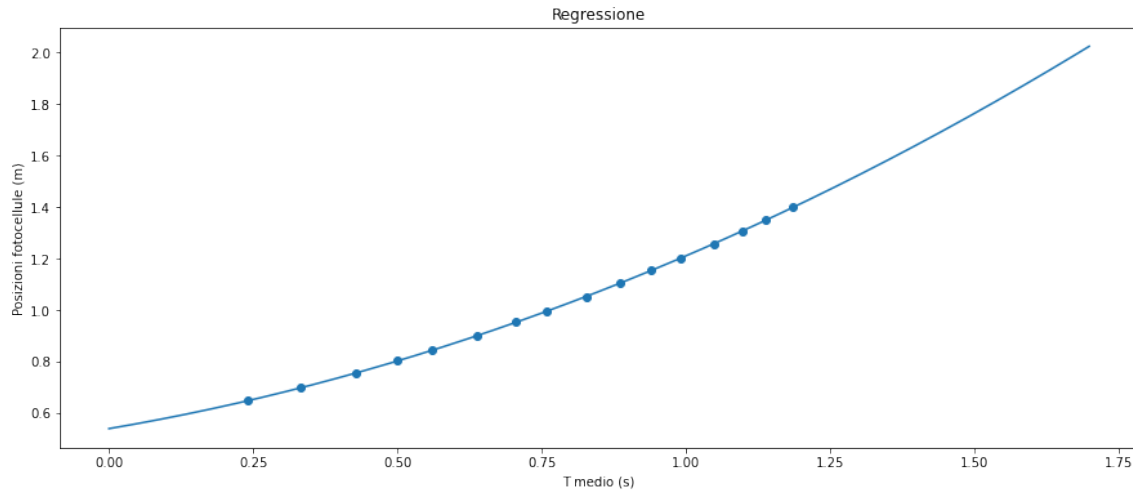
$$\text{Accelerazione teorica} = \frac{m}{M+m}g \quad \text{e} \quad \delta_{\text{accelerazione}} = \left| \frac{mg}{(M+m)^2} \right| \cdot \delta M + \left| \frac{Mg}{(M+m)^2} \right| \cdot \delta m$$

Otteniamo come risultato che l'accelerazione teorica in questa configurazione è  $0.627 \, m/s^2$  con errore massimo  $0.004 \, m/s^2$

$$a_t = (0.627 \pm 0.004) \, m/s^2$$

#### 3.2.1 Prima regressione

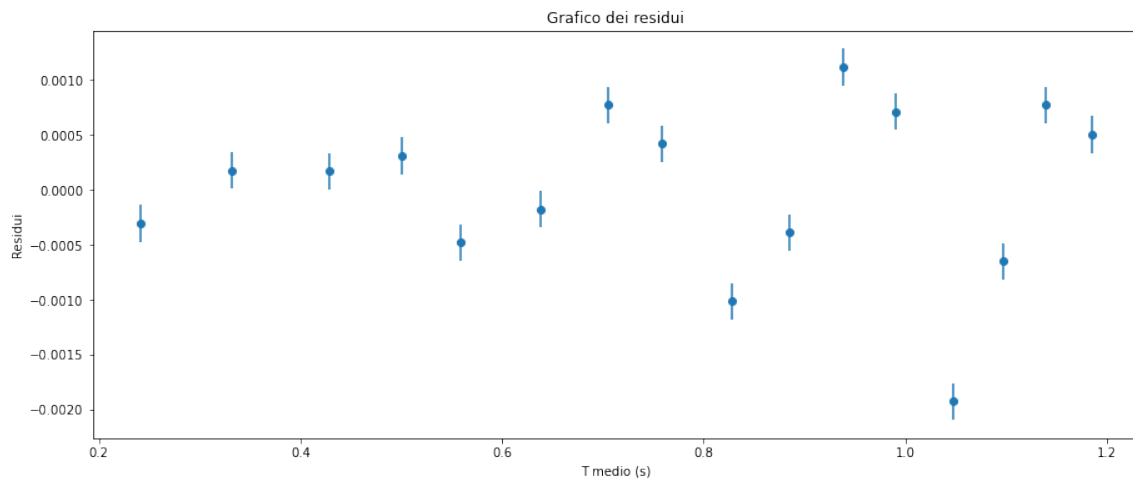
Facciamo adesso una prima regressione che ci serve per calcolare valori iniziali A, B e C. Osserviamo di seguito il grafico del fit e dei residui:



**Figura 3:** Grafico del fit della regressione n. 1, configurazione leggera.

I coefficienti di questa prima regressione svolta con i dati della configurazione leggera sono  $A = 0.539$ ,  $B = 0.380$  e  $C = 0.290$ , con  $\chi^2 = 330.909$  e  $\tilde{\chi}^2 = 25.455$

Come possiamo vedere, sia il chi-quadrato che il chi-quadrato ridotto sono troppo grandi.



**Figura 4:** Grafico dei residui della regressione n. 1, configurazione leggera. Le barre di errore rappresentano l'errore sui residui.

Guardando il grafico dei residui, ci accorgiamo che questi residui non sono distribuiti proprio uniformemente attorno allo zero, come invece dovrebbe essere. Capiamo quindi che questa

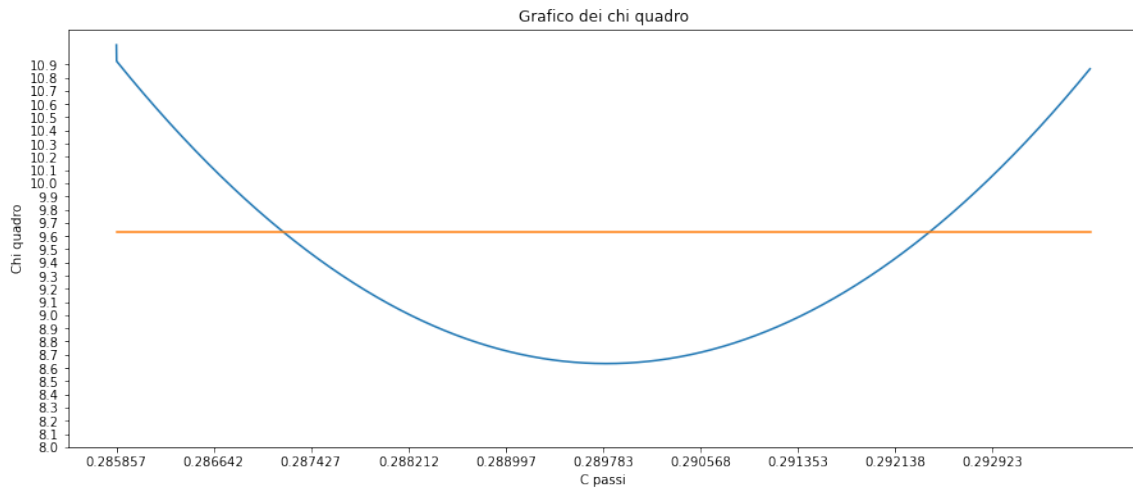
regressione non è adatta ai nostri dati, e passiamo al passo successivo.

### 3.2.2 Seconda regressione (pesata)

Dopo aver fatto la propagazione degli errori di  $x$  su  $y$ , rifacciamo una seconda regressione. Da cui otteniamo semplicemente i valori più corretti per la stima per parametro  $C$ , come spiegato nel paragrafo 2.0.5 per passare immediatamente al passaggio successivo, con varie iterazioni del calcolo dei parametri.

### 3.2.3 Trovare sigma C tramite metodo euristico

Facciamo 10000 iterazioni. La seguente parabola rappresenta il valore del chi-quadrato per ogni regressione calcolata con un diverso parametro  $C$ , come spiegato nel paragrafo 2.0.7

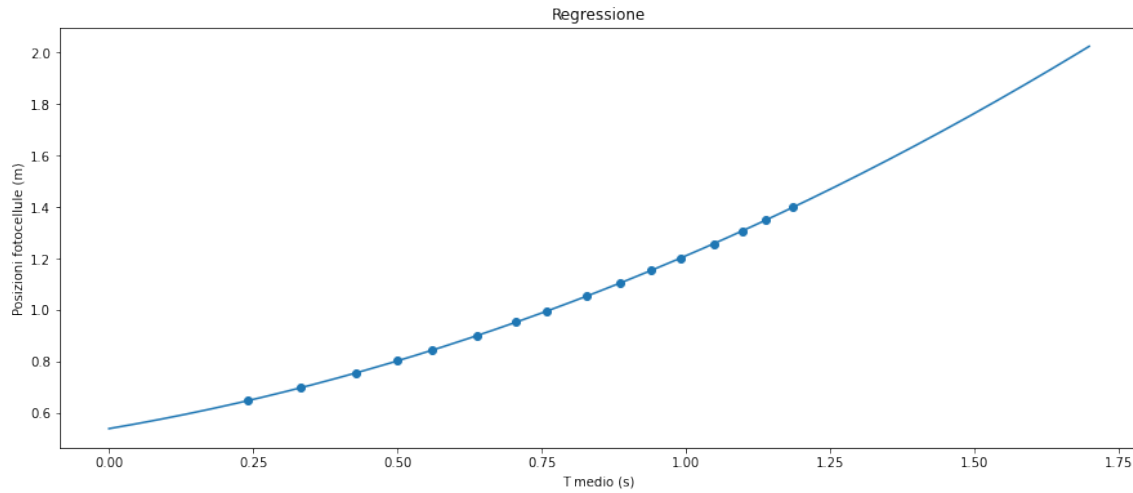


**Figura 5:** Grafico per la ricerca euristica di  $C_{best}$ , configurazione leggera.

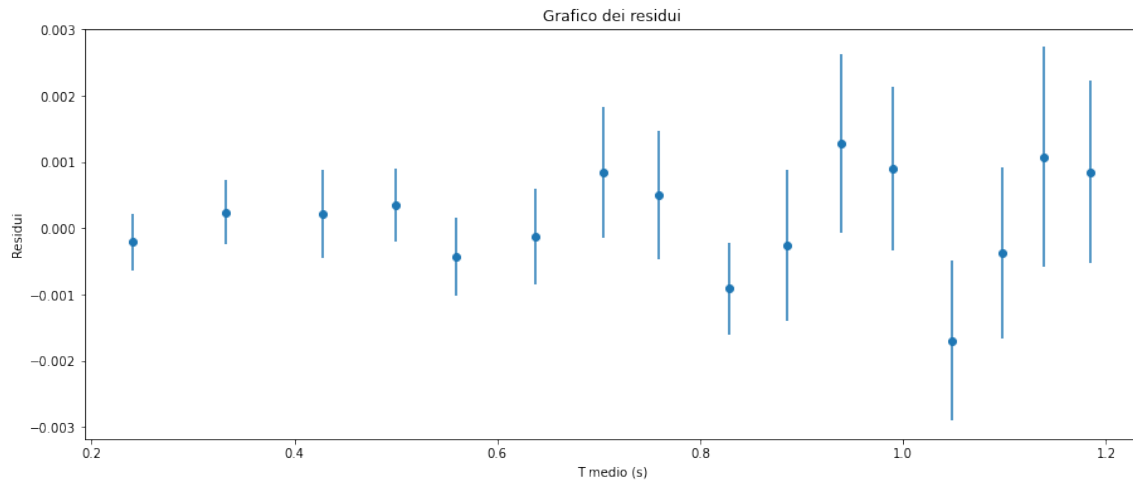
Secondo la nostra analisi, il valore minimo del chi-quadrato si trova all'iterazione n.5033 ed è  $\chi^2 = 8.633$  ( $\tilde{\chi}^2 = 0.664$ ) a cui corrisponde un  $C_{best} = 0.290$ , con un errore calcolato  $\sigma_C = 0.003$  e corrispondenti  $A = 0.539$  con  $\sigma_A = 0.001$  e  $B = 0.381$  con  $\sigma_B = 0.003$

L'intervallo  $[0.2872, 0.292]$  di confidenza ad  $1\sigma$ , che contiene il valore del  $C_{best}$ , ci indica che il sigma trovato con il metodo euristico che abbiamo descritto precedentemente è  $\sigma_C = 0.003$ . I due risultati sono quindi molto simili, ed un volta approssimati alle corrette cifre significative, sono uguali. Tuttavia per i nostri calcoli che saranno effettuati con il codice in python, e quindi, non approssimati, utilizzeremo il valore calcolato con la formula (45).

Osserviamo di seguito il grafico del fit e dei residui:



**Figura 6:** Grafico del fit della regressione con parametro  $C$  best che minimizza il chi quadrato, configurazione leggera.



**Figura 7:** Grafico dei residui della regressione effettuata con  $C$  best, configurazione leggera. Le barre di errore rappresentano l'errore sui residui.

Il grafico dei residui ci suggerisce che il modello sembrerebbe essere corretto, eventuali barre di errore che non passano sullo zero, sono giustificate dal fatto che il l'errore sui residui (ovvero l'errore sulle  $y_i$ ) è un errore sigma, e quindi ci dà circa il 68.3% di confidenza che il valore si trovi all'interno di questo range. I residui aumentano nel tempo, ma questo è abbastanza comune in un modello polinomiale. In sostanza, sono dei buoni residui. In effetti osserviamo che una

piccola differenza tra residui e l'errore totale su  $y$ , e che ciò potrebbe essere causato da una leggera sovrastima degli errori (se riteniamo affidabili i dati). In questa configurazione, però la situazione è comunque abbastanza buona, potremo correggere l'errore sulle  $y$ , moltiplicando per la radice del quiadrato ridotto, ma in questa configurazione non è proprio necessario.

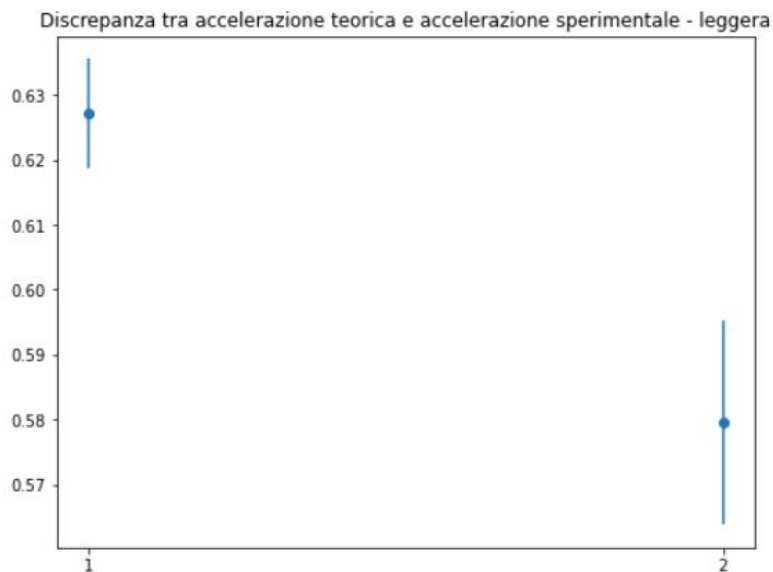
In pratica noi ipotizziamo che i nostri dati sono descritti correttamente dalla funzione  $A + Bx + Cx^2$ , e con il chi-quadrato testiamo quanto probabile è questa nostra ipotesi. Un valore di  $\tilde{\chi}^2 \approx 1$  (cioè il valore atteso della distribuzione  $\tilde{\chi}^2$ ) sarebbe ideale.

La probabilità di ottenere un valore di chi-quadrato ridotto maggiore o uguale a 0.664 in un esperimento con 13 gradi di libertà, cioè la  $P_{dof}(\tilde{\chi}^2 \geq 0.664) \approx 80\%$ , con l'ipotesi nulla che l'adattamento funzionale è corretto (cioè che i coefficienti spiegano con buona approssimazione i dati), che è abbastanza grande da poter ritenere l'ipotesi corretta.

### 3.2.4 Risultati

Confrontiamo i due risultati (sperimentale e teorico), riportando tutti gli errori a un livello di confidenza del 100%

L'accelerazione sperimentale è infine:  $a_s = (0.580 \pm 0.016) \text{ m/s}^2$ . Confrontiamola adesso con l'accelerazione teorica in assenza di attrito, ricavata all'inizio dell'esperienza, che era appunto  $a_t = (0.627 \pm 0.004) \text{ m/s}^2$



**Figura 8:** Discrepanza tra accelerazione teorica e sperimentale, configurazione leggera. Le barre di errore rappresentano l'errore massimo sulla misura.

La discrepanza tra l'accelerazione teorica e sperimentale, è calcolata come:

$$|a_t - a_s| \pm (\delta_{a_t} + \delta_{a_s}) = (0.048 \pm 0.024)m/s^2 \quad (56)$$

Notiamo che la discrepanza è significativa. Dato che appunto stiamo parlando di errori massimi, possiamo dire di avere il 100% che la discrepanza stessa cada entro questo intervallo di confidenza. A causa di questo risultato, immaginiamo che ci sia da calcolare un coefficiente di attrito dinamico del quale non si era tenuto conto all'inizio dell'analisi.

Calcoliamo il coefficiente di attrito con la formula (5) e otteniamo:  $\mu_{leggera} = 0.0052 \pm 0.0011$

## 4 Configurazione pesante

### 4.1 Dati

Nella configurazione pesante sono state prese  $N=11$  misure per ognuna delle  $M=16$  posizioni delle fotocellule, escluso lo starter.

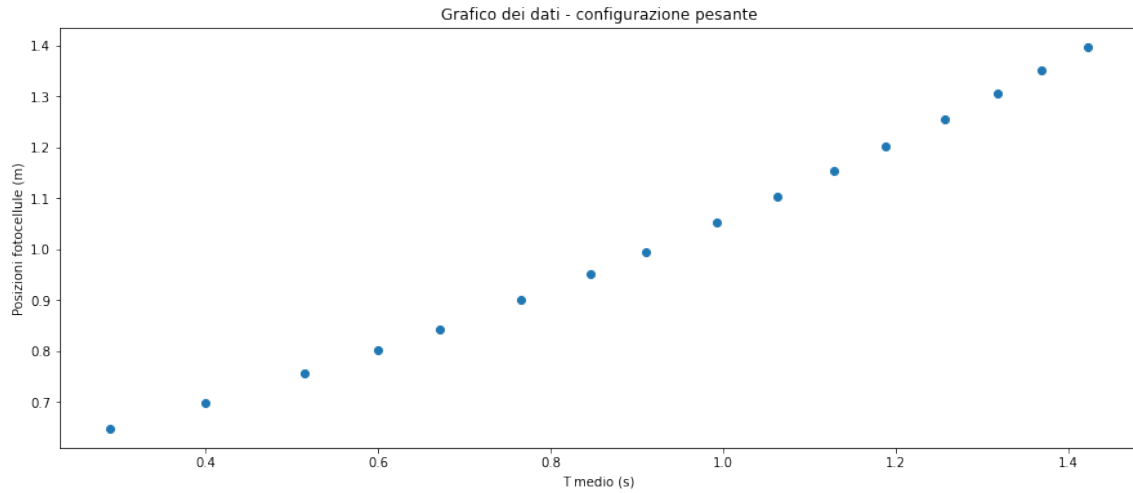
Posizioni (m)	$\sigma_{S_i}$ (m)	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)	$t_3$ (s)	$t_4$ (s)	$t_5$ (s)	$t_6$ (s)	$t_7$ (s)	$t_8$ (s)	$t_9$ (s)	$t_{10}$ (s)	$t_{11}$ (s)	$\bar{t}$ (s)	$\sigma_{\bar{t}}$ (s)
0.648	0.00017	0.289	0.289	0.289	0.288	0.289	0.289	0.289	0.288	0.289	0.290	0.290	0.289	0.0010
0.698	0.00017	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.399	0.0009
0.756	0.00017	0.513	0.512	0.514	0.514	0.514	0.515	0.515	0.514	0.513	0.515	0.515	0.514	0.0013
0.803	0.00017	0.601	0.600	0.601	0.600	0.600	0.600	0.599	0.600	0.601	0.600	0.600	0.600	0.0009
0.843	0.00017	0.671	0.672	0.671	0.670	0.670	0.670	0.671	0.669	0.670	0.673	0.672	0.671	0.0015
0.900	0.00017	0.767	0.767	0.766	0.766	0.766	0.765	0.766	0.765	0.766	0.764	0.765	0.766	0.0012
0.953	0.00017	0.845	0.844	0.846	0.846	0.846	0.848	0.847	0.846	0.845	0.847	0.847	0.846	0.0015
0.996	0.00017	0.911	0.910	0.912	0.911	0.910	0.911	0.909	0.910	0.911	0.910	0.911	0.911	0.0012
1.053	0.00017	0.993	0.994	0.993	0.992	0.991	0.992	0.992	0.991	0.992	0.995	0.994	0.993	0.0016
1.104	0.00017	1.065	1.064	1.063	1.063	1.063	1.062	1.062	1.062	1.063	1.061	1.061	1.063	0.0015
1.154	0.00017	1.127	1.124	1.127	1.127	1.127	1.130	1.128	1.127	1.126	1.128	1.128	1.127	0.0018
1.202	0.00017	1.189	1.188	1.190	1.189	1.187	1.188	1.186	1.188	1.190	1.188	1.188	1.188	0.0015
1.255	0.00017	1.257	1.258	1.257	1.255	1.254	1.256	1.255	1.254	1.256	1.259	1.258	1.256	0.0020
1.306	0.00017	1.320	1.318	1.317	1.317	1.318	1.316	1.317	1.316	1.318	1.315	1.316	1.317	0.0017
1.351	0.00017	1.368	1.364	1.367	1.368	1.368	1.371	1.369	1.367	1.366	1.369	1.368	1.368	0.0021
1.399	0.00017	1.423	1.422	1.423	1.423	1.421	1.422	1.420	1.422	1.424	1.422	1.422	1.422	0.0014

**Tabella 3:** Rappresentazione tabellare dei dati raccolti, con rispettivi errori sigma calcolati, configurazione pesante.

Per ogni posizione  $S_i$  abbiamo calcolato la media dei tempi di percorrenza, utilizzando la formula (7), che prendiamo come migliore stima per  $t$ , quindi appunto abbiamo  $t_{best} = \bar{t}$  e con deviazione standard dalla media data da (8).

Adesso riportiamo i dati su grafico di  $S$  in funzione di  $\bar{t}$ .





**Figura 9:** Grafico di  $S$  in funzione di  $\bar{t}$ , configurazione pesante. Le barre di errore per  $S$  e  $\bar{t}$  sono incluse.

## 4.2 Calcoli e analisi dei dati sperimentali

Adesso svolgiamo l'analisi dei dati in python. Calcoliamo l'accelerazione teorica con i dati dell'esperimento nella configurazione pesante ( $m = 14.3g$ ,  $M = 309g$ ,  $g = 9.806m/s^2$ ):

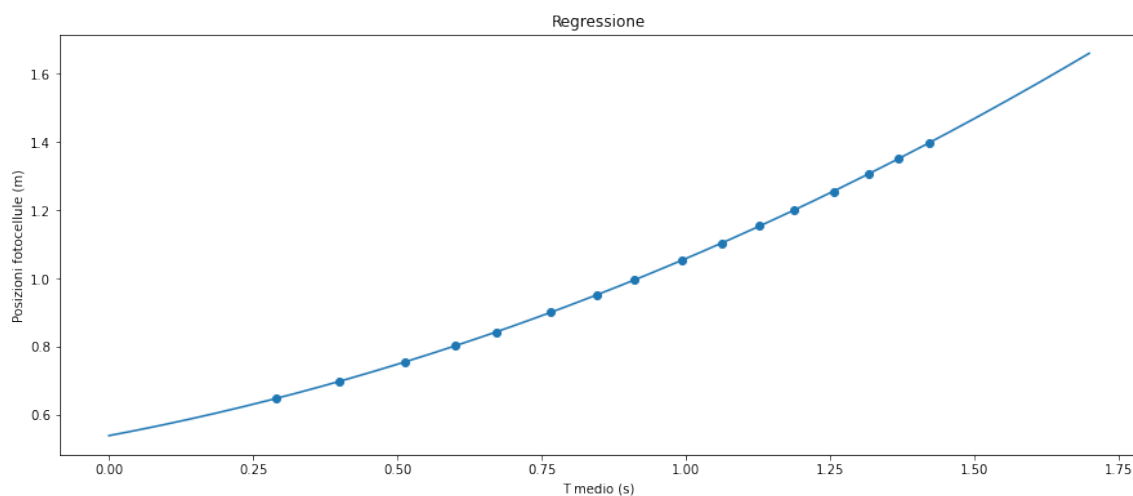
$$\text{Accelerazione teorica} = \frac{m}{M+m}g \quad \text{e} \quad \delta_{\text{accelerazione}} = \left| \frac{mg}{(M+m)^2} \right| \cdot \delta M + \left| \frac{Mg}{(M+m)^2} \right| \cdot \delta m$$

Otteniamo come risultato che l'accelerazione teorica in questa configurazione è  $0.434 \, m/s^2$  con errore massimo  $0.003 \, m/s^2$

$$a_t = (0.434 \pm 0.003) \, m/s^2$$

### 4.2.1 Prima regressione

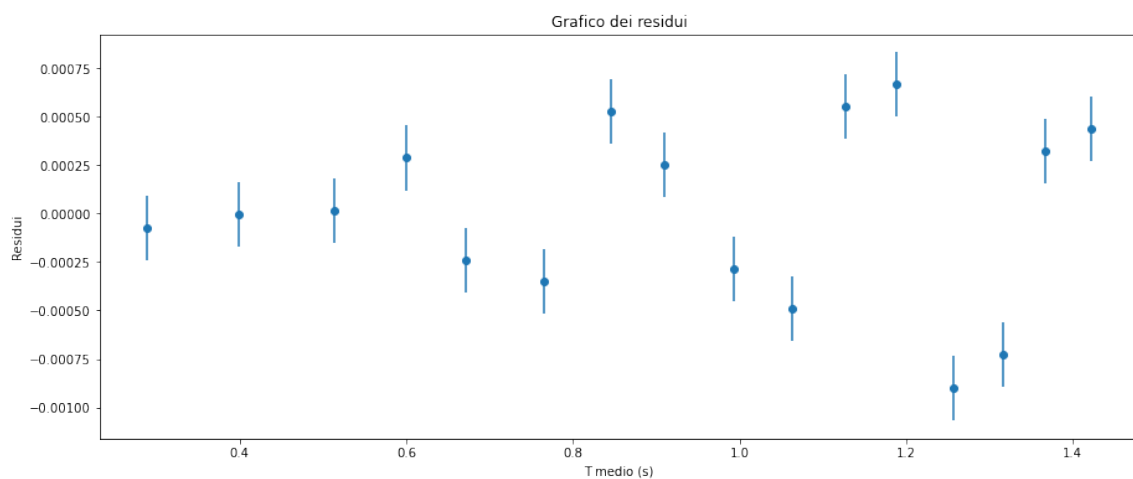
Facciamo adesso una prima regressione che ci serve per calcolare valori iniziali A, B e C. Osserviamo di seguito il grafico del fit e dei residui:



**Figura 10:** Grafico del fit della regressione n. 1, configurazione pesante.

I coefficienti per questa prima regressione con i dati della configurazione pesante sono  $A = 0.539$ ,  $B = 0.318$  e  $C = 0.201$ , con  $\chi^2 = 119.411$  e  $\tilde{\chi}^2 = 9.185$

Come possiamo vedere, sia il chi-quadrato che il chi-quadrato ridotto sono più grandi di come ci aspetteremmo nel caso di un buon modello di regressione.



**Figura 11:** Grafico dei residui della regressione n. 1, configurazione pesante. Le barre di errore rappresentano l'errore sui residui.

Guardando il grafico dei residui, ci accorgiamo che questi residui non sono distribuiti proprio uniformemente attorno allo zero, come invece dovrebbe essere. Capiamo quindi che questa

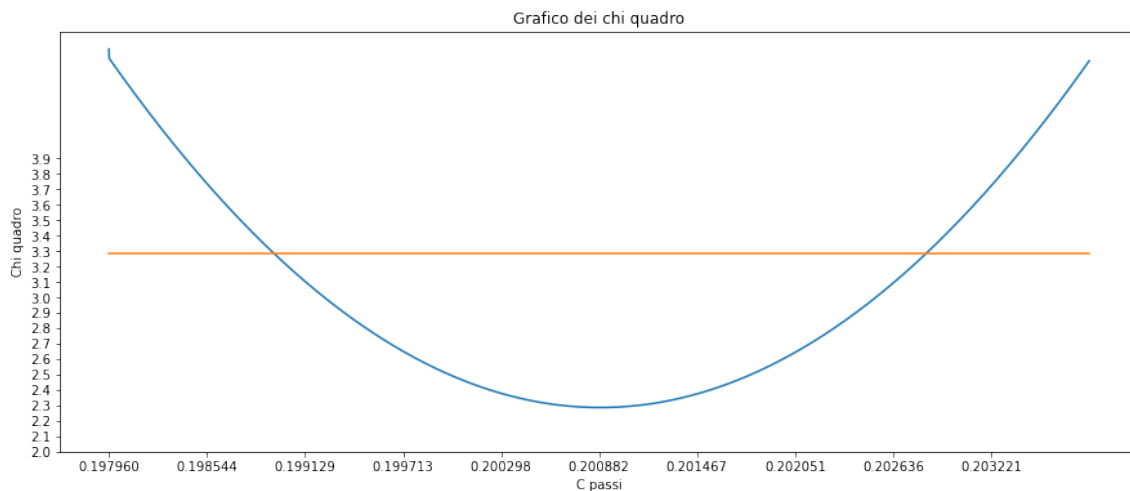
regressione non è adatta ai nostri dati, e passiamo al passo successivo.

#### 4.2.2 Seconda regressione (pesata)

Dopo aver fatto la propagazione degli errori di  $x$  su  $y$ , rifacciamo una seconda regressione. Da cui otteniamo semplicemente i valori più corretti per la stima per parametro  $C$ , come spiegato nel paragrafo 2.0.5 per passare immediatamente al passaggio successivo, con varie iterazioni del calcolo dei parametri.

#### 4.2.3 Trovare sigma C tramite metodo euristico

Facciamo 10000 iterazioni. La seguente parabola rappresenta il valore del chi-quadrato per ogni regressione calcolata con un diverso parametro  $C$ , come spiegato nel paragrafo 2.0.7

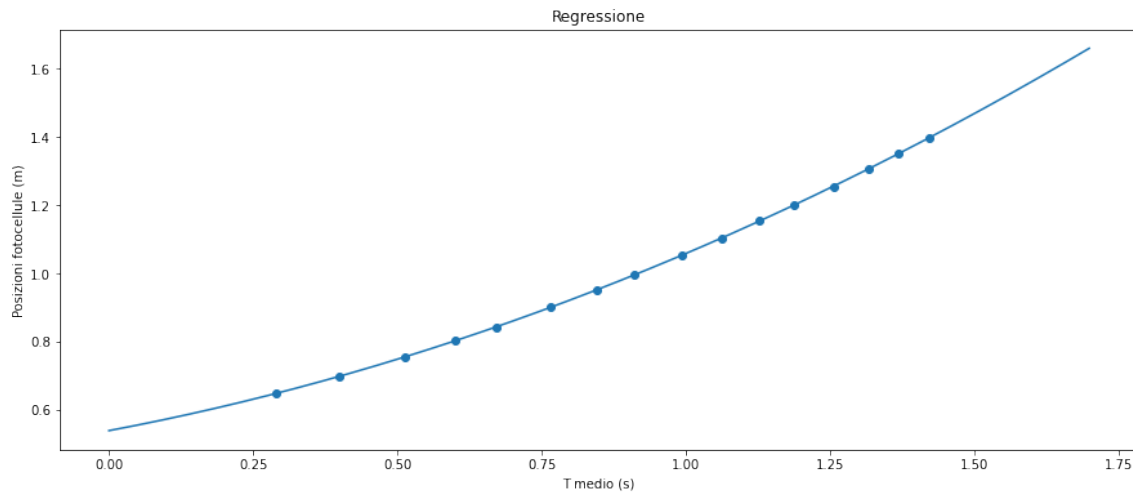


**Figura 12:** Grafico per la ricerca euristica di  $C_{best}$ , configurazione pesante.

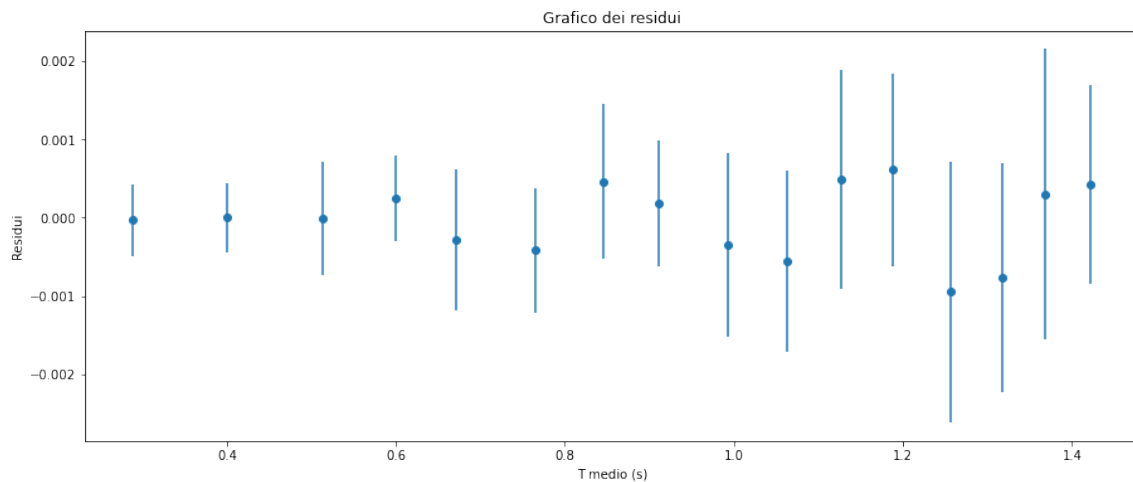
Secondo la nostra analisi, il valore minimo del chi-quadrato si trova all'iterazione n.5010 ed è  $\chi^2 = 2.286$  ( $\tilde{\chi}^2 = 0.18$ ) a cui corrisponde un  $C_{best} = 0.2008$ , con un errore calcolato  $\sigma_C = 0.0019$  e corrispondenti  $A = 0.5387$  con  $\sigma_A = 0.0010$  e  $B = 0.3186$  con  $\sigma_B = 0.0031$

L'intervallo  $[0.1989, 0.2028]$  di confidenza ad  $1\sigma$ , che contiene il valore del  $C_{best}$ , ci indica che il sigma calcolato con il metodo euristico che abbiamo descritto precedentemente è  $\sigma_C = 0.0019$ . I due risultati sono quindi molto simili, ed un volta approssimati alle corrette cifre significative, sono uguali.

Osserviamo di seguito il grafico del fit e dei residui:



**Figura 13:** Grafico del fit della regressione con parametro  $C$  best che minimizza il chi quadrato, configurazione pesante.



**Figura 14:** Grafico dei residui della regressione effettuata con  $C$  best, configurazione pesante. Le barre di errore rappresentano l'errore sui residui.

Il grafico dei residui ci suggerisce che il modello sembrerebbe essere corretto, non siamo al corrente di errori sistematici e questi non sembrano essere visibili. Particolarità abbastanza evidenti in questo caso sono l'aumento della varianza dei residui all'aumentare di  $t$  (abbastanza comune in un modello polinomiale) e residui "a coppie" con lo stesso segno. Tuttavia queste caratteristiche non ci portano a fare delle assunzioni di cui possiamo essere

particolarmente sicuri. Inoltre, eventuali barre che non passano sullo zero sono giustificate dal fatto che il nostro è un errore sigma, e quindi, un errore che ci dà circa il 68.3% di confidenza che il valore si trovi all'interno di questo range. Se assumiamo la veridicità dei dati raccolti, e consideriamo come più affidabile la loro fluttuazione statistica allora giungiamo alla conclusione che la soluzione più sensata sia quella di ridimensionare gli errori totali su  $y$  in modo da riflettere la reale fluttuazione statistica dei nostri dati.

Facciamo inoltre qualche altra considerazione. La probabilità di ottenere un valore di chi-quadrato ridotto maggiore o uguale a 0.18 in un esperimento con 13 gradi di libertà, cioè la  $P_{dof}(\tilde{\chi}^2 \geq 0.18) \approx 99\%$ , con l'ipotesi nulla che l'adattamento funzionale è corretto (cioè che i coefficienti spiegano con buona approssimazione i dati), che è talmente grande da farci venire qualche sospetto. Ma come detto sopra, assumiamo che i dati siano corretti e che semplicemente abbiamo sovrastimato l'errore. Potremmo risolvere questo problema correggendo l'errore sulle  $y_i$ , moltiplicandoli per la radice del chi-quadrato ridotto.

#### 4.2.4 Errori pesati con la radice quadrata del chi-quadrato ridotto

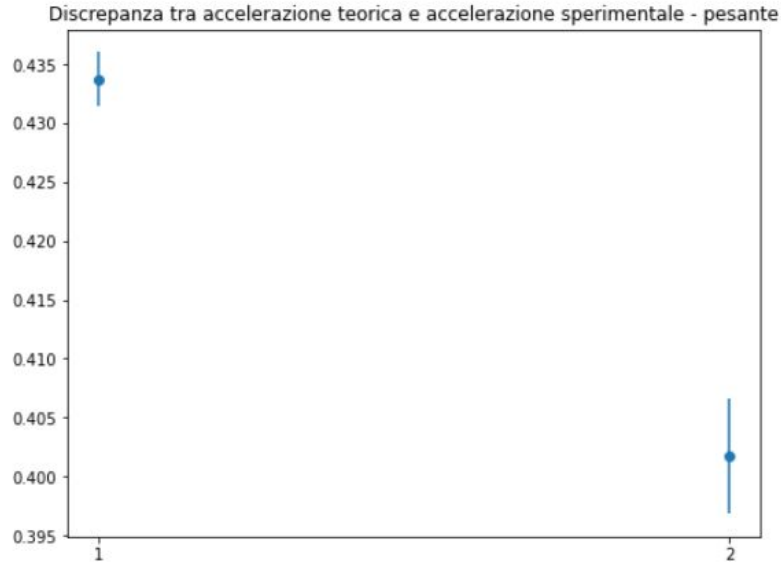
Per ottenere stime migliori dei coefficienti A, B e C possiamo moltiplicare gli errori per una quantità uguale a  $\sqrt{\tilde{\chi}_0^2}$  così da ridurli. Otterremo così un  $\tilde{\chi}_0^2 \approx 1$ .

I coefficienti di quest'ultima regressione sono sempre gli stessi di prima,  $A = 0.5387$ ,  $B = 0.3186$  e  $C = 0.2009$ , con rispettivi errori  $\sigma_A = 0.0004$ ,  $\sigma_B = 0.0013$ ,  $\sigma_{AC} = 0.0008$  e  $\chi^2 \approx 13.003$  e  $\tilde{\chi}^2 \approx 1$ . Come possiamo vedere il chi-quadrato ridotto è migliorato. Infatti adesso, la probabilità di ottenere un valore di chi-quadrato ridotto maggiore o uguale a  $\approx 1$  in un esperimento con 13 gradi di libertà, è  $P_{dof}(\tilde{\chi}^2 \geq 1) \approx 45\%$ .

#### 4.2.5 Risultati

Confrontiamo i due risultati (sperimentale e teorico), riportando tutti gli errori a un livello di confidenza del 100%

L'accelerazione sperimentale è quindi  $a_s = (0.402 \pm 0.005) \text{ m/s}^2$ . Adesso possiamo confrontarla con l'accelerazione teorica in assenza di attrito per la configurazione pesante, ricavata all'inizio dell'esperienza:  $a_t = (0.434 \pm 0.003) \text{ m/s}^2$



**Figura 15:** Discrepanza tra accelerazione teorica e sperimentale, configurazione pesante. Le barre di errore rappresentano l'errore massimo sulla misura.

La discrepanza tra l'accelerazione teorica e sperimentale, è calcolata come:

$$|a_t - a_s| \pm (\delta_{a_t} + \delta_{a_s}) = (0.032 \pm 0.007) m/s^2 \quad (57)$$

Anche in questa configurazione notiamo che la discrepanza è significativa. Dato che appunto stiamo parlando di errori massimi, possiamo dire di avere il 100% che la discrepanza stessa cada entro questo intervallo di confidenza. A causa di questo risultato, immaginiamo che ci sia da calcolare un coefficiente di attrito dinamico del quale non si era tenuto conto all'inizio dell'analisi.

Calcoliamo il coefficiente di attrito con la formula (5) e otteniamo:  $\mu_{pesante} = 0.0034 \pm 0.0003$

## 5 Configurazione pesante pesante

### 5.1 Dati

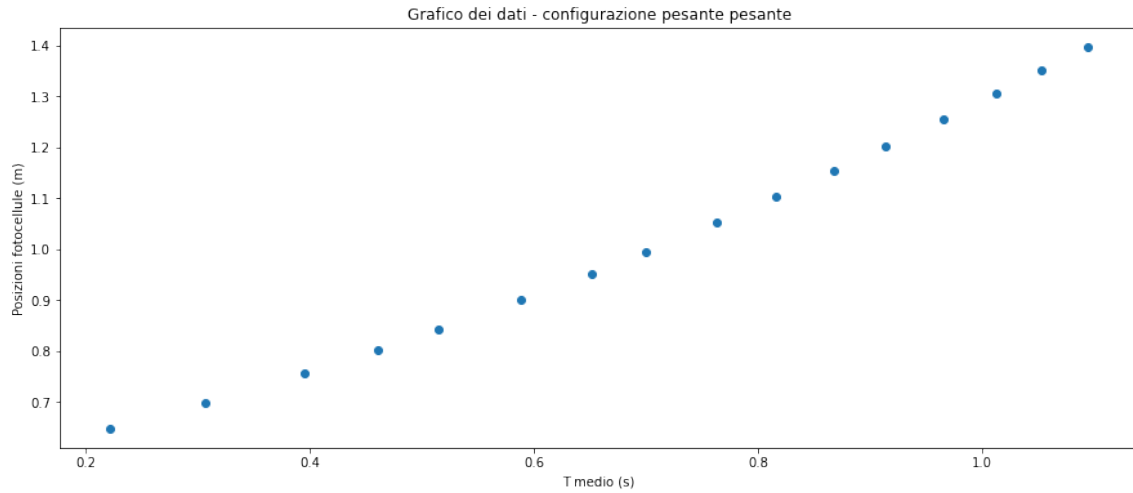
Nella configurazione pesante pesante sono state prese N=11 misure per ognuna delle M=16 posizioni delle fotocellule, escluso lo starter.

Posizioni (m)	$\sigma_{s_i}$ (m)	$t_1$ (s)	$t_2$ (s)	$t_3$ (s)	$t_4$ (s)	$t_5$ (s)	$t_6$ (s)	$t_7$ (s)	$t_8$ (s)	$t_9$ (s)	$t_{10}$ (s)	$t_{11}$ (s)	$\bar{t}$ (s)	$\sigma_{\bar{t}}$ (s)
0.648	0.00017	0.241	0.241	0.241	0.241	0.241	0.240	0.241	0.241	0.241	0.241	0.240	0.241	0.0007
0.698	0.00017	0.332	0.333	0.332	0.332	0.332	0.332	0.333	0.332	0.332	0.333	0.332	0.332	0.0008
0.756	0.00017	0.428	0.428	0.427	0.429	0.427	0.429	0.427	0.428	0.428	0.428	0.428	0.428	0.0010
0.803	0.00017	0.501	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.499	0.500	0.0008
0.843	0.00017	0.559	0.559	0.559	0.559	0.559	0.559	0.560	0.560	0.560	0.559	0.559	0.559	0.0008
0.900	0.00017	0.638	0.638	0.637	0.638	0.638	0.637	0.638	0.638	0.638	0.639	0.637	0.638	0.0009
0.953	0.00017	0.705	0.705	0.704	0.706	0.704	0.706	0.703	0.704	0.705	0.705	0.705	0.705	0.0012
0.996	0.00017	0.760	0.759	0.759	0.759	0.758	0.759	0.758	0.758	0.758	0.759	0.757	0.759	0.0012
1.053	0.00017	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.829	0.828	0.827	0.828	0.828	0.0008
1.104	0.00017	0.886	0.886	0.885	0.885	0.886	0.884	0.886	0.885	0.885	0.887	0.884	0.885	0.0013
1.154	0.00017	0.939	0.939	0.938	0.941	0.938	0.940	0.937	0.938	0.938	0.938	0.939	0.939	0.0015
1.202	0.00017	0.991	0.991	0.990	0.991	0.989	0.991	0.989	0.990	0.989	0.991	0.989	0.990	0.0013
1.255	0.00017	1.048	1.048	1.047	1.047	1.048	1.048	1.048	1.050	1.048	1.047	1.047	1.048	0.0012
1.306	0.00017	1.098	1.098	1.097	1.097	1.098	1.096	1.098	1.097	1.097	1.099	1.096	1.097	0.0013
1.351	0.00017	1.139	1.140	1.139	1.142	1.138	1.140	1.137	1.139	1.139	1.139	1.139	1.139	0.0016
1.399	0.00017	1.186	1.185	1.185	1.186	1.184	1.186	1.184	1.184	1.184	1.186	1.184	1.185	0.0013

**Tabella 4:** Rappresentazione tabellare dei dati raccolti, con rispettivi errori sigma calcolati, configurazione pesante pesante.

Per ogni posizione  $S_i$  abbiamo calcolato la media dei tempi di percorrenza, utilizzando la formula (7), che prendiamo come migliore stima per  $t$ , quindi appunto abbiamo  $t_{best} = \bar{t}$  e con deviazione standard dalla media data da (8).

Adesso riportiamo i dati su grafico di S in funzione di  $\bar{t}$ .



**Figura 16:** Grafico di  $S$  in funzione di  $\bar{t}$ , configurazione pesante pesante. Le barre di errore per  $S$  e  $\bar{t}$  sono incluse.

## 5.2 Calcoli e analisi dei dati sperimentali

Adesso svolgiamo l'analisi in python. Calcoliamo l'accelerazione teorica con i dati dell'esperimento nella configurazione pesante ( $m = 24.3g$ ,  $M = 309g$ ,  $g = 9.806m/s^2$ ):

$$\text{Accelerazione teorica} = \frac{m}{M+m}g \quad \text{e} \quad \delta_{\text{accelerazione}} = \left| \frac{mg}{(M+m)^2} \right| \cdot \delta M + \left| \frac{Mg}{(M+m)^2} \right| \cdot \delta m$$

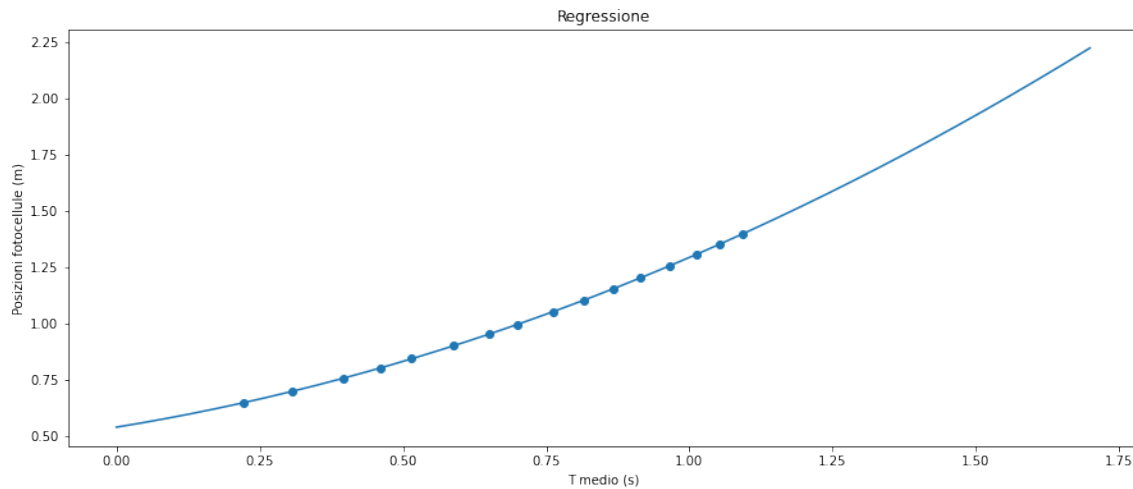
Otteniamo come risultato che l'accelerazione teorica in questa configurazione è  $0.715 \, m/s^2$  con errore massimo  $0.003 \, m/s^2$

$$a_t = (0.715 \pm 0.003) \, m/s^2$$

### 5.2.1 Prima regressione

Facciamo adesso una prima regressione che ci serve per calcolare valori iniziali A, B e C. Osserviamo di seguito il grafico del fit e dei residui:

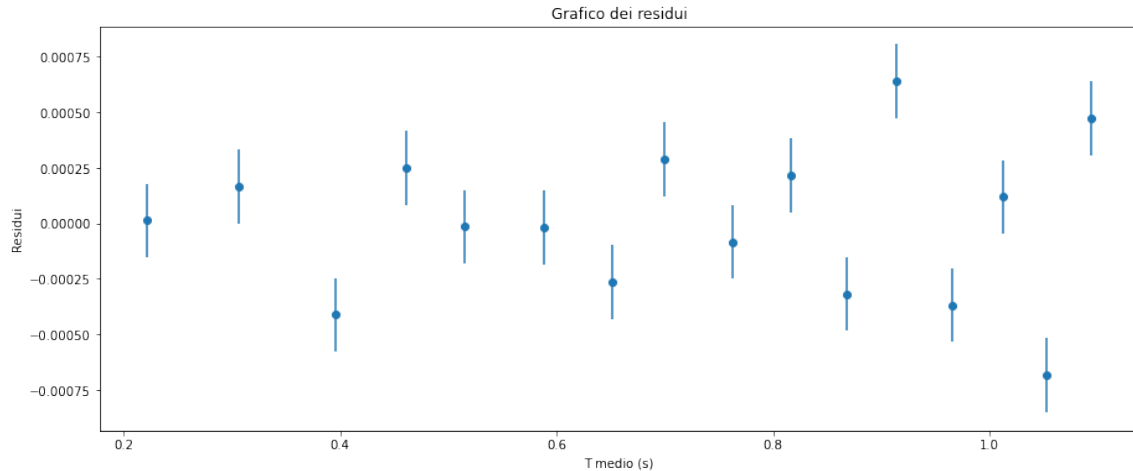




**Figura 17:** Grafico del fit della regressione n. 1, configurazione pesante pesante.

I coefficienti per questa prima regressione con i dati della configurazione pesante pesante sono  $A = 0.539$ ,  $B = 0.414$  e  $C = 0.339$ , con  $\chi^2 = 65.364$  e  $\tilde{\chi}^2 = 5.028$

Come possiamo vedere, sia il chi-quadrato che il chi-quadrato ridotto sono più grandi di come ci aspetteremmo nel caso di un buon modello di regressione.



**Figura 18:** Grafico dei residui della regressione n. 1, configurazione pesante pesante. Le barre di errore rappresentano l'errore sui residui.

Guardando il grafico dei residui, ci accorgiamo che questi residui non sono distribuiti proprio uniformemente attorno allo zero, come invece dovrebbe essere. Capiamo quindi che questa

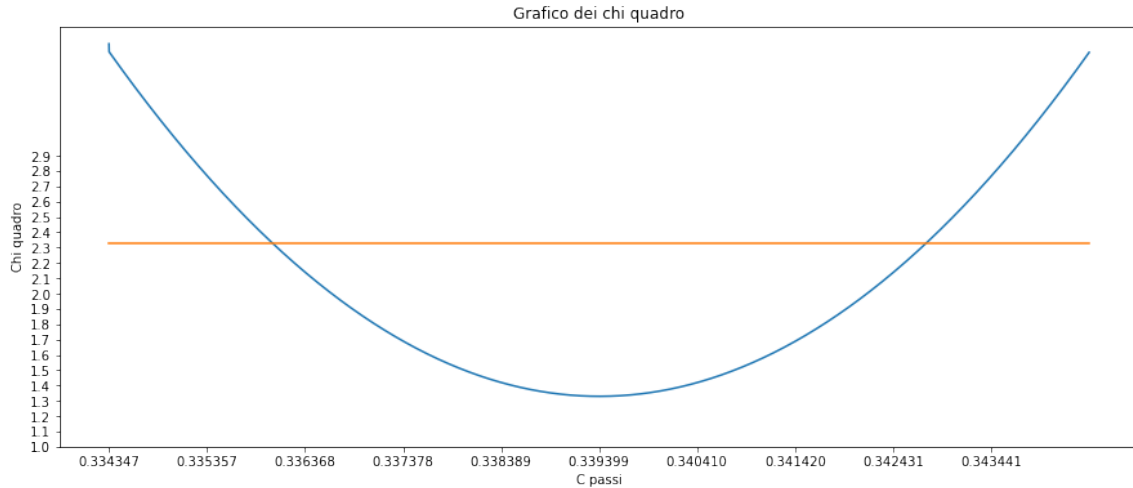
regressione non è adatta ai nostri dati, e passiamo al passo successivo.

### 5.2.2 Seconda regressione (pesata)

Dopo aver fatto la propagazione degli errori di  $x$  su  $y$ , rifacciamo una seconda regressione. Da cui otteniamo semplicemente i valori più corretti per la stima per parametro  $C$ , come spiegato nel paragrafo 2.0.5 per passare immediatamente al passaggio successivo, con varie iterazioni del calcolo dei parametri.

### 5.2.3 Trovare sigma C tramite metodo euristico

Facciamo 10000 iterazioni. La seguente parabola rappresenta il valore del chi-quadrato per ogni regressione calcolata con un diverso parametro  $C$ , come spiegato nel paragrafo 2.0.7

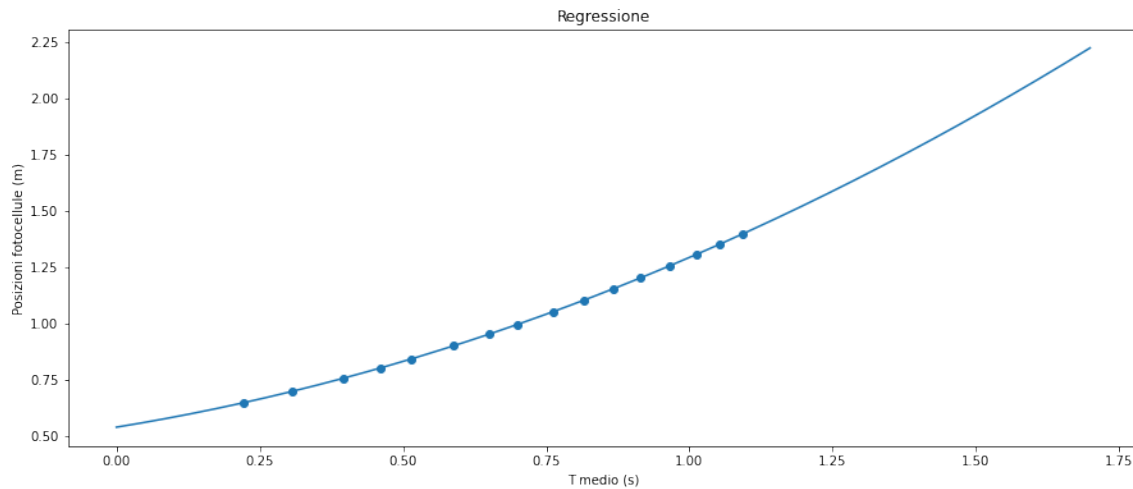


**Figura 19:** Grafico per la ricerca euristica di  $C_{best}$ , configurazione pesante pesante.

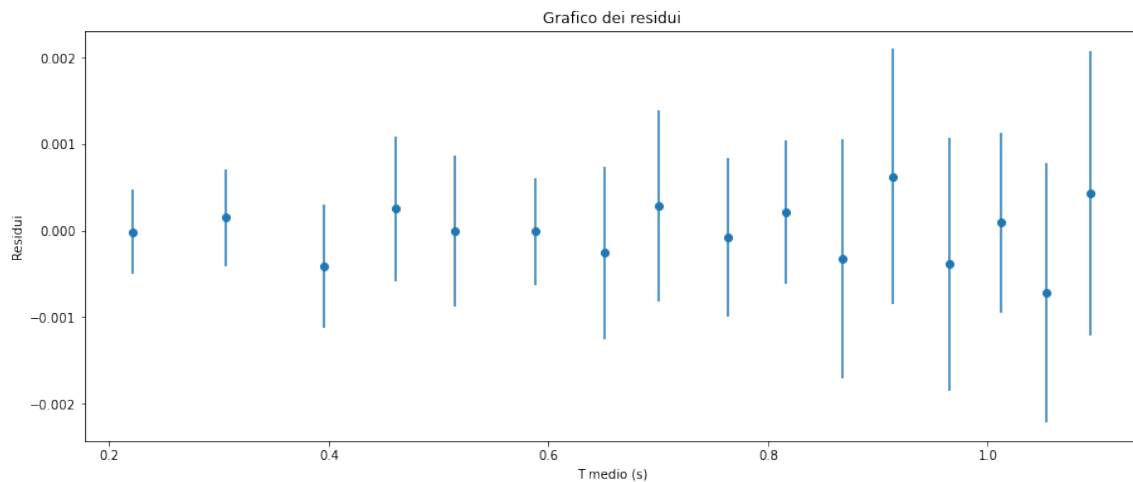
Secondo la nostra analisi, il valore minimo del chi-quadrato si trova all'iterazione n.5002 ed è  $\chi^2 = 1.329$  ( $\tilde{\chi}^2 = 0.102$ ) a cui corrisponde un  $C_{best} = 0.3394$ , con un errore calcolato  $\sigma_C = 0.0034$  e corrispondenti  $A = 0.5390$  con  $\sigma_A = 0.0011$  e  $B = 0.4141$  con  $\sigma_B = 0.0041$

L'intervallo  $[0.3360, 0.3428]$  di confidenza ad  $1\sigma$ , che contiene il valore del  $C_{best}$ , ci indica che il sigma calcolato con il metodo euristico che abbiamo descritto precedentemente è  $\sigma_C = 0.0034$ . I due risultati sono quindi molto simili, ed un volta approssimati alle corrette cifre significative, sono uguali. Tuttavia per i nostri calcoli che saranno effettuati con il codice in python, e quindi, non approssimati, utilizzeremo il valore calcolato con la formula (45).

Osserviamo di seguito il grafico del fit e dei residui:



**Figura 20:** Grafico del fit della regressione con parametro  $C$  best che minimizza il chi quadrato, configurazione pesante pesante.



**Figura 21:** Grafico dei residui per la regressione con parametro  $C$  best che minimizza il chi quadrato, configurazione pesante pesante. Le barre di errore rappresentano l'errore sui residui.

Il grafico dei residui ci suggerisce che il modello sembrerebbe essere corretto, non siamo al corrente di errori sistematici e questi non sembrano essere visibili. L'unica particolarità abbastanza evidente in questo caso è l'aumento della varianza dei residui all'aumentare di  $t$ , ma questo dovrebbe essere abbastanza comune in un modello polinomiale.

Inoltre, eventuali barre che non passano sullo zero sono giustificate dal fatto che il nostro è un errore sigma, e quindi, un errore che ci dà circa il 68.3% di confidenza che il valore si trovi

all'interno di questo range. Se quindi assumiamo la veridicità dei dati raccolti, e consideriamo affidabile la loro fluttuazione statistica allora giungiamo alla conclusione che la soluzione più sensata sia quella di ridimensionare gli errori totali su  $y$  in modo da riflettere la reale fluttuazione statistica dei nostri dati.

Facciamo ancora qualche altra considerazione. La probabilità di ottenere un valore di chi-quadrato ridotto maggiore o uguale a 0.102 in un esperimento con 13 gradi di libertà, cioè la  $P_{dof}(\tilde{\chi}^2 \geq 0.102) \approx 100\%$ , con l'ipotesi nulla che l'adattamento funzionale è corretto (cioè che i coefficienti spiegano con buona approssimazione i dati), che è talmente grande da farci venire qualche sospetto. Ma come detto sopra, assumiamo che i dati siano corretti e che semplicemente abbiamo sovrastimato l'errore. Risolviamo questo problema come segue.

#### 5.2.4 Errori pesati con la radice quadrata del chi-quadrato ridotto

Per ottenere stime migliori dei coefficienti A, B e C possiamo moltiplicare gli errori per una quantità uguale a  $\sqrt{\tilde{\chi}_0^2}$  così da ridurli. Otterremo così un  $\tilde{\chi}_0^2 \approx 1$ .

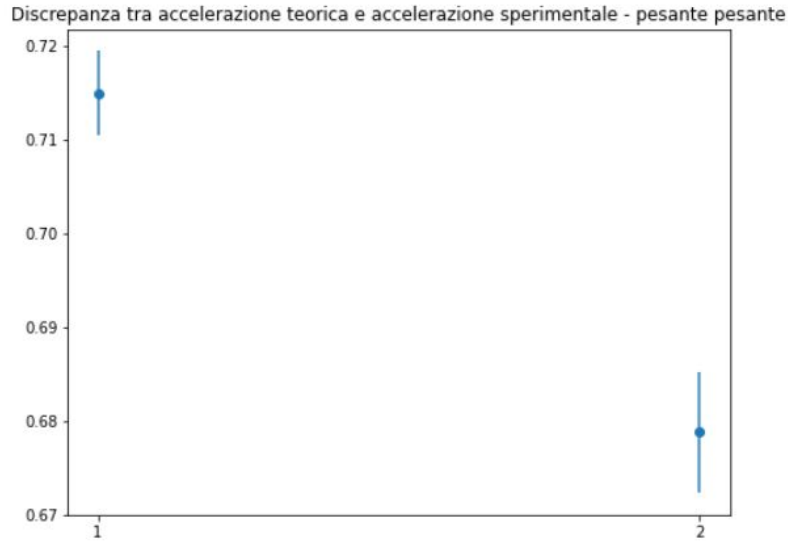
I coefficienti di quest'ultima regressione sono sempre gli stessi di prima,  $A=0.5390$ ,  $B=0.4141$ ,  $C=0.3394$ , con errori  $\sigma_A=0.000,3$ ,  $\sigma_B=0.0013$ ,  $\sigma_C=0.0011$  e  $\chi^2=13$  e  $\tilde{\chi}^2 \approx 1$

Come possiamo vedere il chi-quadrato ridotto è migliorato. Infatti adesso, la probabilità di ottenere un valore di chi-quadrato ridotto maggiore o uguale a  $\approx 1$  in un esperimento con 13 gradi di libertà, è  $P_{dof}(\tilde{\chi}^2 \geq 1) \approx 45\%$ .

#### 5.2.5 Risultati

Confrontiamo i due risultati (sperimentale e teorico), riportando tutti gli errori a un livello di confidenza del 100%

L'accelerazione sperimentale è infine:  $a_s = (0.679 \pm 0.006) \text{ m/s}^2$ . Confrontiamola adesso con l'accelerazione teorica in assenza di attrito, ricavata all'inizio dell'esperienza, che era appunto  $a_t = (0.715 \pm 0.003) \text{ m/s}^2$



**Figura 22:** Discrepanza tra accelerazione teorica e sperimentale, configurazione pesante pesante. Le barre di errore rappresentano l'errore massimo sulla misura.

La discrepanza tra l'accelerazione teorica e sperimentale, è calcolata come:

$$|a_t - a_s| \pm (\delta_{a_t} + \delta_{a_s}) = (0.036 \pm 0.008) m/s^2 \quad (58)$$

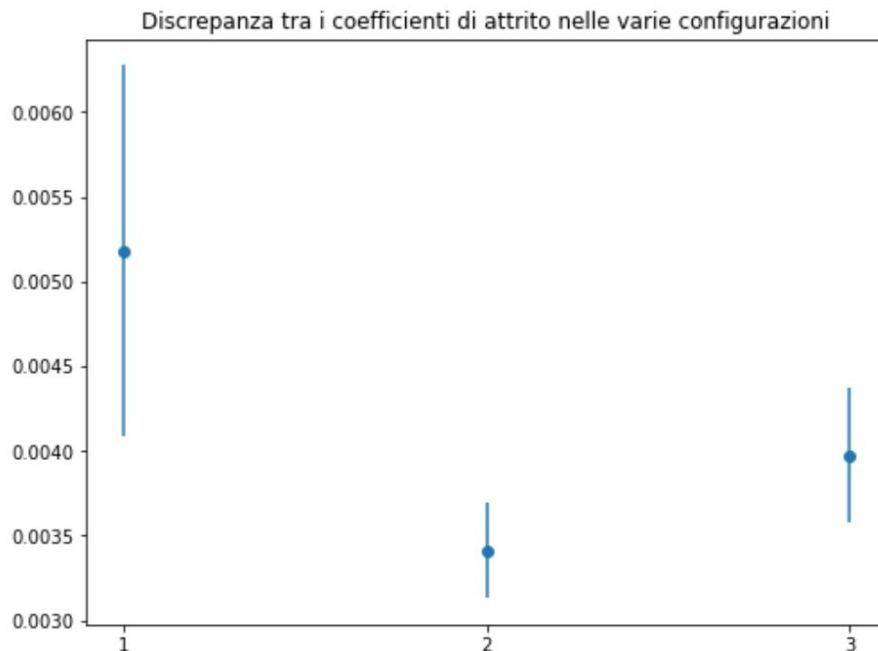
Notiamo che la discrepanza è significativa. Dato che appunto stiamo parlando di errori massimi, possiamo dire di avere il 100% che la discrepanza stessa cada entro questo intervallo di confidenza. A causa di questo risultato, immaginiamo che ci sia da calcolare un coefficiente di attrito dinamico del quale non si era tenuto conto all'inizio dell'analisi.

Calcoliamo il coefficiente di attrito con la formula (5) e otteniamo:  $\mu = 0.0040 \pm 0.0004$

## 6 Conclusioni

La misura dell'attrito residuo che abbiamo ottenuto è affetta da un errore relativo di circa 21 % per la configurazione leggera, 8 % per la configurazione pesante e 10 % per la configurazione pesante pesante. La stima finale di  $\mu_d$  non è particolarmente accurata perché le tre stime di  $\mu$  ottenute per le tre diverse configurazioni non tutte e tre consistenti.

Confrontiamo infatti i tre coefficienti di attrito (in figura sono rappresentate le configurazioni leggera, pesante e pesante pesante, rispettivamente), e le loro rispettive barre d'errore.



**Figura 23:** Discrepanza tra i coefficienti di attrito, rispettivamente  $\mu_{leggera}$ ,  $\mu_{pesante}$  e  $\mu_{pesantepesante}$ . Le barre di errore rappresentano l'errore massimo sulla misura.

Notiamo che nonostante la stima del coefficiente di attrito della configurazione leggera e quella della configurazione pesante sono discrepanti, abbiamo invece che la stima del coefficiente attrito per la configurazione pesante pesante è compatibile con entrambe le restanti configurazioni.

Dobbiamo considerare, inoltre, che la barra di errore del coefficiente di attrito per la configurazione leggera è molto più grande di quella delle altre due configurazioni. Ricordiamo infatti che gli errori sulle  $y_i$  totali per le altre due configurazioni (pesante e pesante pesante) sono stati corretti moltiplicandoli per la radice quadrata del chi-quadrato ridotto, dopo aver notato che in entrambi i casi, il risultato di questo essendo minore di 1, potrebbe essere dovuto al fatto che gli errori sulle  $y_i$  potrebbero essere stati sovrastimati. Questa procedura non è stata però eseguita anche per la

configurazione leggera, poiché il chi-quadrato era ancora vicino ad 1, e quindi non lo abbiamo ritenuto necessario.

Infine, possiamo pensare che la  $\mu_d$  meno accurata possa essere quella della configurazione leggera, magari a causa dell'strumentazione e del processo di misura (le misure del moto di un carrellino più leggero sono maggiormente propense a fluttuazioni statistiche). O potrebbe addirittura essere stata affetta da errori sistematici, conseguenze per esempio dell'instabilità della slitta sulla guidovia, o una maggior potenza dell'aria compressa. Questo andrebbe a violare alcune delle nostre ipotesi iniziali e quindi causerebbe problemi nella nostra analisi. Tuttavia per poter fare tali affermazioni con sicurezza, avremmo bisogno di più misure (almeno un'altra).

Assumendo che tutte e tre le misure siano governate dalla distribuzione di Gauss possiamo calcolare la media pesata, cioè la migliore stima per  $\mu_d$  ed il rispettivo errore come descritto in (7) e (8):

$$\mu_{best} = 0.0037 \pm 0.0002$$

Un risultato che riteniamo accettabile alla luce delle ipotesi fatte, ma che non possiamo affermare con sicurezza, anche a causa delle poche misure che sono state effettuate.

## 7 Appendice A - Funzioni per il calcolo della regressione

Il seguente codice è stato scritto in linguaggio Python. Questo in particolare è il codice per la configurazione pensante, tutte le funzioni sono realizzate "from scratch", cioè non abbiamo utilizzato librerie statistiche. Di seguito riportiamo il codice utilizzato per l'analisi dei dati della configurazione pesante. L'analisi delle altre configurazioni, è stata effettuata con lo stesso codice, ma con dati diversi.

```
# Importiamo le librerie necessarie

import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Calcoliamo l'accelerazione teorica con i dati dell'esperimento

m=14.3
M=309
g=9.806

acc_teorica = (m/(M+m))*g;
delta_acc = (m*g)/(M+m)**2 *0.1 + (M*g)/(M+m)**2*0.1;

print("L'accelerazione teorica in questa configurazione      %f m/s
      ^2 con errore massimo %f m/s^2"% (acc_teorica,delta_acc))

# Adesso guardiamo i dati, che apriamo direttamente da formato
# csv e su cui lavoreremo usando la libreria pandas. Le
# posizioni sono in metri e i tempi in secondi

df = pd.read_csv('pesante.csv')
pd.set_option('display.max_columns', None)
df.head()

# Adesso ricaviamo dai dati i valori di x e y che utilizzeremo
# per la regressione, con i rispettivi errori sigma
```



```

y = df['Posizioni'].values.reshape(-1, 1) # posizioni
y_err = (df['delta'].values)/3 # errori sigma sulle posizioni

tempi=df.drop(['Posizioni','delta'], axis=1).values # tabella dei
        tempi da utilizzare per il calcolo delle x

x = tempi.mean(axis=1).reshape(-1, 1) #tmedio
x_err = np.array(tempi.std(axis=1,ddof = 1) + 0.001/3, dtype=np.
        float64) #errori sigma del tmedio

fig = plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.xlabel('T medio (s)')
plt.ylabel('Posizioni fotocellule (m)')
plt.scatter(x, y)
plt.title('Grafico dei dati - configurazione pesante')
plt.errorbar(x,y,xerr=x_err,yerr=y_err,linestyle="None")
plt.show()

# ## Funzioni varie

#d il minimo e la posizione di questo all'interno di un'array
def val_minimo(x):
    minimo = x[0];
    for i in range(1,len(x)):
        if x[i] < minimo:
            minimo = x[i];
            pos = i;
    return minimo, pos;

def find_value(x,N,pos):
    pos_1 = 0
    valore_1 = 0
    for i in range(1,len(x)):
        if (x[i] - (N+1))*2 <0.0000015:
            valore_1 = x[i]
            pos_1 = i;

```

```

        break;

    pos_2 = 2*(pos - pos_1) + pos_1;
    valore_2 = x[pos_2]
    return pos_1, pos_2;

def regressione(x,y, weights = np.ones(len(x)), grafico = True, C
= None):

    sumx1 = sumy1 = sumxy = sumx2 = sumx3 = sumx4 = sumx2y =
        delta = delta1 = delta2 = delta3 = delta4 = 0;
    M = 0;

    for i in range(len(x)):
        M += weights[i];
        sumx1 += weights[i]*x[i];
        sumy1 += weights[i]*y[i];
        sumxy += weights[i]*x[i]*y[i];
        sumx2 += weights[i]*x[i]**2;
        sumx3 += weights[i]*x[i]**3;
        sumx4 += weights[i]*x[i]**4;
        sumx2y += weights[i]*x[i]**2*y[i];
    if (C == None):
        delta = M* sumx2* sumx4 + sumx1* sumx3 *sumx2 + sumx2*
            sumx1*sumx3 - (sumx2**3) - M*sumx3**2 - sumx4*(sumx1
                **2);
        delta1 = sumy1* sumx2* sumx4 + sumx1* sumx3 *sumx2y +
            sumx2* sumxy*sumx3 - sumx2y*(sumx2**2) - (sumx3**2)*
            sumy1 - sumx4*sumx1*sumxy;
        delta2 = M* sumxy* sumx4 + sumy1* sumx3 *sumx2 + sumx2*
            sumx1*sumx2y - (sumx2**2)*sumxy - sumx2y*sumx3*M -
            sumx4*sumy1*sumx1;
        delta3 = M* sumx2* sumx2y + sumx1* sumxy *sumx2 + sumy1*
            sumx1*sumx3 - (sumx2**2)*sumy1 - sumx3*sumxy*M -
            sumx2y*(sumx1**2);

        A = delta1/delta;
        B = delta2/delta;
        C = delta3/delta;

```

```

        #print(delta , delta1 , delta2 , delta3)

    else :
        delta=(M*sumx2)-(sumx1*sumx1)
        A = (sumx2*(sumy1-C*sumx2)-(sumxy-C*sumx3)*sumx1)/delta ;
        B = (M*(sumxy-C*sumx3)-(sumx1*(sumy1-C*sumx2)))/delta ;

    sigma_A = np.sqrt((((sumx2*sumx4) - (sumx3)**2)/(M* sumx2*
        sumx4 + sumx1* sumx3 *sumx2 + sumx2* sumx1*sumx3 - (sumx2
        **3) - M*sumx3**2 - sumx4*(sumx1**2)))));
    sigma_B = np.sqrt(((M*sumx4) - (sumx2)**2)/(M* sumx2* sumx4 +
        sumx1* sumx3 *sumx2 + sumx2* sumx1*sumx3 - (sumx2**3) - M
        *sumx3**2 - sumx4*(sumx1**2)))));
    sigma_C = np.sqrt(((M*sumx2) - (sumx1)**2)/(M* sumx2* sumx4 +
        sumx1* sumx3 *sumx2 + sumx2* sumx1*sumx3 - (sumx2**3) - M
        *sumx3**2 - sumx4*(sumx1**2)))));

    #grafico della regressione

    if grafico == True:

        X_fit = np.arange(0,1.7,0.001).reshape(-1, 1)
        Y_fit = np.zeros(len(X_fit))
        for i in range(len(X_fit)):
            Y_fit[i] = A + B*X_fit[i] + C*X_fit[i]**2

        fig = plt.figure(figsize=(15, 6))
        plt.scatter(x, y)
        plt.plot(X_fit, Y_fit)
        plt.xlabel('T medio (s)')
        plt.ylabel('Posizioni fotocellule (m)')
        plt.title('Regressione')
        plt.show()

    return A,B, C,sigma_A, sigma_B, sigma_C;

def chi-quadrato(x,y, y_err,A,B,C):

```

```

chisquare = 0;
for i in range(16):
    chisquare += (y[i]-A -B*x[i]-C*x[i]**2)**2/y_err[i]**2

return chisquare;

def residui(x,y, y_err ,A,B,C, grafico = True):

    residui_tot = np.zeros(16, dtype = np.float64);
    for i in range(16):
        residui_tot[i] = y[i] - (A + B*x[i]+C*x[i]**2)

    if grafico == True:
        fig = plt.figure(figsize = (15, 6))

        plt.scatter(x,residui_tot)
        plt.errorbar(x,residui_tot ,y_err , linestyle = "None")

        plt.xlabel('T medio (s) ')
        plt.ylabel('Residui ')
        plt.title('Grafico dei residui ')
        plt.show()

    return residui_tot;

def errori(B,C, x_err , y_err):
    pesi = np.zeros(16, dtype = np.float64)
    y_err_tot = np.zeros(16, dtype = np.float64)
    for i in range(16):
        y_err_tot[i] = np.sqrt(y_err[i]**2+((B+2*C*x[i])**2)*
            x_err[i]**2);
        pesi[i] = 1/(y_err_tot[i]**2)
    return y_err_tot , pesi;

def regressione_iterativa_c(N,x,y,B,C_min, C_max,y_finali ,passo ,
    y_err ,x_err):

```

```

chi_quadrato_opt = np.zeros(N, dtype = np.float64);
C_passi = np.arange(C_min,C_max,passo , dtype = np.float64)
lista_A = np.zeros(N, dtype = np.float64)
lista_B = np.zeros(N, dtype = np.float64)
lista_sigma_A = np.zeros(N, dtype = np.float64)
lista_sigma_B = np.zeros(N, dtype = np.float64)
lista_sigma_C = np.zeros(N, dtype = np.float64)
B_old = B;
for count in range(N):
    y_err_tot , pesi = errori(B_old,C_passi[count],x_err,y_err
    )
    A_new,B_new,C,sigma_A , sigma_B , sigma_C = regressione(x,y
    ,pesi ,grafico = False ,C = C_passi[count]);
    residui_new = residui(x,y, y_err_tot ,A_new,B_new,C_passi[
    count],grafico = False);

    chisquare_new = chi-quadrato(x,y,y_err_tot , A_new,B_new ,
    C_passi[count]);
    chi_quadrato_opt[count] = chisquare_new;
    lista_A[count] = A_new;
    lista_B[count] = B_new;

    lista_sigma_A[count] = sigma_A;
    lista_sigma_B[count] = sigma_B;
    lista_sigma_C[count] = sigma_C;
    #print('I coefficienti della %d iterazione sono, A: %.10f
    , B: %.10f C: %.10f, con chi-quadrato %.10f e chi-
    quadrato ridotto %.10f' %(count, lista_A[count],
    lista_B[count],C_passi[count], chisquare_new ,
    chisquare_new/13));
    #print(residui_new)
    B_old = B_new;

minimo,pos = val_minimo(chi_quadrato_opt);

#Grafico del chi-quadrato
fig = plt.figure(figsize = (15, 6))
x_retta = (C_min,C_max)
y_retta = (minimo + 1,minimo + 1)

```

```

plt.plot(C_passi, chi_quadrato_opt)
plt.plot(x_retta, y_retta)

plt.xlabel('C passi')
plt.ylabel('chi-quadrato')
plt.title('Grafico dei chi-quadrato')

plt.xticks(np.arange(C_min, C_max, step = passo*1000))
plt.yticks(np.arange(int(chi_quadrato_opt.min()), int(
    chi_quadrato_opt.max()), step = 0.1))
plt.show()

pos_1, pos_2 = find_value(chi_quadrato_opt, minimo, pos)
sigma_v3=(C_passi[pos_2]- C_passi[pos_1])/2

A_new, B_new, C, sigma_A, sigma_B, sigma_C = regressione(x, y,
    pesi, grafico = True, C = C_passi[pos]);
print("il valore minimo del chi-quadrato si trova all'iter. %
    d ed %.10f a cui corrisponde un C best %.10f, sigma C (
    calcolato) %.10f e corrispondenti A %.10f con sigma A %.10
    f e B %.10f con sigma B %.10f"% (pos, minimo, C_passi[pos],
    sigma_C, lista_A[pos], lista_sigma_A[pos], lista_B[pos],
    lista_sigma_B[pos]))

print("il valore minimo di C sar %.10f %.10f, il sigma C (
    heuristic) invece %.10f" % (C_passi[pos_1], C_passi[pos_2
    ], sigma_v3))

y_err_tot, pesi = errori(lista_B[pos], C_passi[pos], x_err,
    y_err)
residui_new = residui(x, y, y_err_tot, lista_A[pos], lista_B[pos
    ], C_passi[pos], grafico = True)

return lista_A[pos], lista_B[pos], C_passi[pos], lista_sigma_A
    [pos], lista_sigma_B[pos], sigma_C, y_finali,
    chi_quadrato_opt[pos], sigma_v3;

# ## Regressioni

```

```
# ### 1 regressione , ci serve per calcolare valori iniziali A B e
C
```

```
A,B,C, sigma_A, sigma_B, sigma_C = regressione(x,y)
```

```
chisquare = chi-quadrato(x,y, y_err ,A,B,C)
residui_tot = residui(x,y, y_err ,A,B,C)
y_err_tot , pesi = errori(B,C,x_err ,y_err)
print('I primi coefficienti sono, A: %.10f, B: %.10f C: %.10f,
      con chi-quadrato %.10f e chi-quadrato ridotto %.10f' %(A,B,C,
      chisquare , chisquare/13))
```

```
# ### 2 regressione , ci serve per calcolare C_min e C_max
```

```
A,B,C, sigma_A, sigma_B, sigma_C = regressione(x,y,weights = pesi
      ,grafico = False)
y_err_tot , pesi = errori(B,C,x_err ,y_err)
```

```
N = 10000
```

```
C_min = C - 1.5*sigma_C; #valore di C_min trovato precedentemente
passo = (3*sigma_C)/N
C_max = C + 1.5*sigma_C-0.0000001;
```

```
A,B,C_best , sigma_A ,sigma_B , sigma_C_best , y_finali ,chiq ,
      sigma_v3 = regressione_iterativa_c(N,x,y,B,C_min,C_max,
      y_err_tot , passo ,y_err ,x_err);
```

```
y_err_fin = np.zeros(16);
pesi_fin = np.zeros(16);
for i in range(16):
    y_err_fin[i] = y_err_tot[i]*np.sqrt(chiq/13)
    pesi_fin[i] = 1/y_err_fin[i]**2
```

```

A_rid,B_rid,C_rid, sigma_A_rid, sigma_B_rid, sigma_C_rid=
    regressione(x,y, pesi_fin);

residui_fin=residui(x,y, y_err_fin ,A,B,C)
#print(" residui:", residui_fin)
#print("errore totale su y:", y_err_fin)

chisquare_fin=chi-quadrato(x,y, y_err_fin ,A,B,C)
print('I coefficienti della iterazione sono, A: %f, B: %f C: %f,
    con errori sigma A: %f sigma B %f sigma C %f e chi-quadrato %f
    e chi-quadrato ridotto %f' %(A_rid,B_rid,C_rid,sigma_A_rid,
    sigma_B_rid, sigma_C_rid, chisquare_fin, chisquare_fin/13))

```



## 8 Appendice B - Verifica con SciDavis

```
Polynomial fit of dataset: Table1_2, using function: a0+a1*x+a2*x^2
Y standard errors: Associated dataset (Table1_3)
From x = 0,240818181818182 to x = 1,18490909090909
a0 = 0,539104442090452 +/- 0,000959866466845893
a1 = 0,381197112054593 +/- 0,00340791788789044
a2 = 0,289784425393719 +/- 0,00261660259968401
```

```
Chi^2 = 8,63290079616243
R^2 = 0,999992492875317
```

*Figura 24: Risultati configurazione leggera.*

```
[10/05/2021 18:04      Plot: "Graph5"]
Polynomial fit of dataset: Table2_2, using function: a0+a1*x+a2*x^2
Y standard errors: Associated dataset (Table2_3)
From x = 0,289 to x = 1,42218181818182
a0 = 0,538686282955458 +/- 0,00102289490475634
a1 = 0,318580559168381 +/- 0,00306063034029555
a2 = 0,200882535282 +/- 0,00194879326991716
```

```
Chi^2 = 2,28608298404176
R^2 = 0,999997746151049
```

*Figura 25: Risultati configurazione pesante.*

```
Polynomial fit of dataset: Table3_2, using function: a0+a1*x+a2*x^2
Y standard errors: Associated dataset (Table3_3)
From x = 0,221727272727273 to x = 1,09381818181818
a0 = 0,538999131078338 +/- 0,00107110111730665
a1 = 0,414146903944896 +/- 0,00409318806871702
a2 = 0,339399374809084 +/- 0,00336836673802726
```

```
Chi^2 = 1,3292079749426
R^2 = 0,999998701974484
```

*Figura 26: Risultati configurazione pesante pesante.*