Appunti di algebra e matematica discreta

Alessandro Massarenti

Febbraio 2022,
Anno 2021/2022

Contents

Chapter 1

Introduzione

In generale non è consigliato acquistare nessun libro, però in esso sono contenuti molti esercizi e può quindi essere comodo.

1.1 Argomenti di Algebra

Questi argomenti prenderanno circa $\frac{2}{3}$ del corso.

1.1.1 Congruenze e sistemi di Congruenze

Esempio:

1.1.2 Matrici, operazioni sulle matrici, soluzioni di sistemi lineari

Valore 1 e si ci sarà nel primo parziale, argomento di algebra.

Si utilizzeranno le matrici per risolvere cose interessanti,

Le matrici sono tabelle rettangolari, a volte se ne usano di particolari a forma di quadrato.

Sulle matrici si impareranno le 3 operazioni, dove la terza è molto complessa e conta come 2, inoltre si impareranno altre 3 operazioni per passare da una matrice ad un'altra.

In totale avremo 7 operazioni.

Le matrici ci serviranno a capire se un sistema anche enorme e che richiederebbe un lunghissimo calcolo ha soluzioni.

1.1.3 Spazi vettoriali

Valore 2

Si utilizzeranno somme di matrici, chiamate anche sovrapposizioni, le quali sono una generalizzazione di prodotto per numeri

A fine corso questo argomento verrà applicato a modelli fisici.

1.1.4 Diagonalizzazioni

Valore 1 argomento di algebra

Posso diagonalizzare se posso scrivere prodotto di 3 quadrati, dove la matrice centrale è una matrice diagonale

1.2 Argomenti di Matematica discreta

Questi argomenti prenderanno circa $\frac{1}{3}$ del corso

1.2.1 Grafi

Valore 2

I grafi hanno notazione (V,E) dove V è il numero di vertici, ed E il numero di archi[1].

esempio di grafo può essere dei villaggi su delle montagne, dove ogni arco rappresenta una strada che collega un villaggio, ed ogni villaggio è un vertice.

In questo esempio ci accorgiamo che un villaggio è isolato e un villaggio ha molti collegamenti.

1.2.2 Metodi di conteggio

Vale1 e sicuramente sarà presente al secondo pariale. Questo argomento è molto dettagliato nel libro

Un'esempio sarà calcolare le diverse sequenze binarie (sequenze di *zeri* ed *uni*)

Con 8 cifre dove abbiamo 6 uni e 2 zeri inizio a contare.

Ho 8 posizioni quindi prima sistemo gli zeri(Perchè sono meno)

E mi accorgo che il primo 0 potrò metterlo in 8 posizioni ed il secondo in 7. Il numero di sequene sarà quindi uguale a $8 \cdot 7$

Però allo stesso tempo lo 0_1 posso scambiarlo di posizione con lo 0_2

Avrò quindi che il mio numero di sequenze sarà uguale a $\frac{8 \cdot 7}{2}$

1.2.3 Relazioni di ricorrenza

Vale 1 e anche questo è molto dettagliato sul libro.

[1] V = vertex(Vertici), E = edges(archi)

Se devo calcolare una formula che riguarda n oggetti è una procedura che collega il saper calcolare per n-1 oggetti con il saper calcolare per n oggetti.

Ad esempio, se voglio calcolare il prodotto di n numeri naturali, ovvero il fattoriale, so che conoscendo il caso n-1 posso riutilizzarlo per calcolare il caso n.

Sarà però molto importante saper definire anche un caso base.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... = n!$$

$$a_n \begin{cases} \cdot a_n - 1 \\ a_0 = 1 \quad \text{condizione base} \end{cases}$$

Ci accorgiamo quindi che:

$$a_1 = 1 \cdot a_0 = 1 \cdot 1 = 1$$
$$a_2 = 2 \cdot a_n$$

Chapter 2

Ripasso sui numeri

2.1 Insiemi di numeri

Numeri naturali $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ ovvero *se stesso + 1* è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.

Possiamo fare la somma che ha come neutro 0

Ci accorggiamo subito che mangano gli opposti, dobbiamo però ampliare l'insieme ad un insieme li contenga.

Numeri interi $\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ si descrivono tramite la lettera $\mathbb{Z}$

Con questi numeri posso moltiplicare ma non posso dividere, se divido due interi non è detto ottenga un intero.

Per la moltiplicazione l'elemento neutro è l'1.

Non ci sono però gli inversi, avremo quindi bisogno di espandere l'insieme.

Numeri razionali Questo insieme è l'insieme di tutte le possibili frazioni, possiamo definirli in notazione matematica come:

$$\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

Questo insieme però ha problemi di misura, useremo quindi degli altri numeri per evitare ogni problema

I numeri reali Per rappresentare i numeri reali si utilizza un sistema formato da una retta alla quale si fissa un sistema di coordinate ascisse. Ovvero fisso origine(che indicherò con 0), verso(Che solitamente va da sinistra verso destra), e unità di misura.

Per noi i numeri reali saranno tutti quei numeri che corrispondono a dei punti di una retta cha abbia queste coordinate.

Un esempio: Se ho un quadrato di lato 1 la diagonale, calcolata grazie al teorema di pitagora risulta essere $\sqrt{2}$. Questo risultato è un numero irrazionale.

Un altro esempio interessante ed utile è π, anche lui un numero razionale che risulta molto utile nel calcolo di circonferenze e formule afferenti.

NB I numeri reali riempiono completamente la retta.

Recap In questo momento la situazione degli insiemi è la seguente: $\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R}$

2.2 Problemi di soluzioni delle equazioni

In algebra abbiamo un problema di soluzione delle equazioni.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ &= (x-1)(x+1) \end{aligned}$$

NB sarà molto importante saper fattorizzare bene.

Ci è molto utile capire che x avrà tutte le soluzioni di $(x-1)$ e di $(x+1)$ ovvero due soluzioni.

altri esempi,

$$x + 2x + 1 = 0 \Rightarrow \text{Due soluzioni coincidenti}$$

$x^2 + 1 = 0$ il risultato sarà sempre un risultato maggiore di 0 ma nessuna soluzione nei reali. So quindi con certezza che ci sono due soluzioni coincidenti ma non so ancora quali sono[1].

2.3 I numeri complessi

Per risolvere le equazioni descritte sopra amplio l'insieme in cui stiamo lavorando, ovvero quello dei numeri reali, e utilizzo i numeri complessi. Questi numeri si rappresentano con la lettera $\mathbb{C}$

Con i numeri complessi si introduce un nuovo numero, più precisamente una nuova unità. Questa si chiama unità immaginaria e si definisce con il simbolo i

$$\exists\, i \mid i^2 = -1$$

i ora è soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$. Più precisamente le soluzioni sono $i, -i$

Un numero complesso è un numero del tipo $z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}$[2]

È importante descrivere che a è parte reale di z e b è parte immaginaria di z.

Un esempio: $2 - \sqrt{3}i$ in questa equazione 2 è parte reale, la parte immaginaria è un numero meno $\sqrt{3}$

[1] Vedremo più avanti

[2] Questa è la forma algebrica di z

NB Tutti i numeri reali sono una forma particolare di numeri complessi.

$$\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$

2.3.1 Somma e prodotto in $\mathbb{C}$

$$z = 2 + 3iw = 4 - i$$

$$\begin{aligned} w + z &= 4 - i + 2 + 3i \\ &= 4 + 2 + i(-1 + 3) \\ &= 6 + 2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w \cdot z &= (4 - i)(2 + 3i) \\ &= 8 + 12i - 2i - i \cdot 3i \\ &= 8 + 12i - 2i - 3i^2 \\ &= 8 + 12i - 2i - 3 \cdot -1 \\ &= 8 + 12i - 2i + 3 \\ &= 11 + 10i \end{aligned}$$

Prendiamo ora due assi con sistema di riferimento cartesiano e origine nell'incrocio di essi. In questo modo sto creando un sistema monometrico ortogonale, detto anche **Piano di Gauss**.

esempio: rappresentazione del numero complesso $z = 2 - 3i$

2.3.2 I coniugati

Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ il coniugato di z è $\overline{z} = a - ib$ ovvero nella rappresentazione sul piano, l'ascisssa è la stessa ma l'ordinata è opposta. Possiamo semplificare la descrizione come un ribaltamento rispetto all'asse reale.

Rispetto ai coniugati abbiamo 4 ovviem ma interessanti proprietà.

1. $\overline{z_1 +_z 2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$