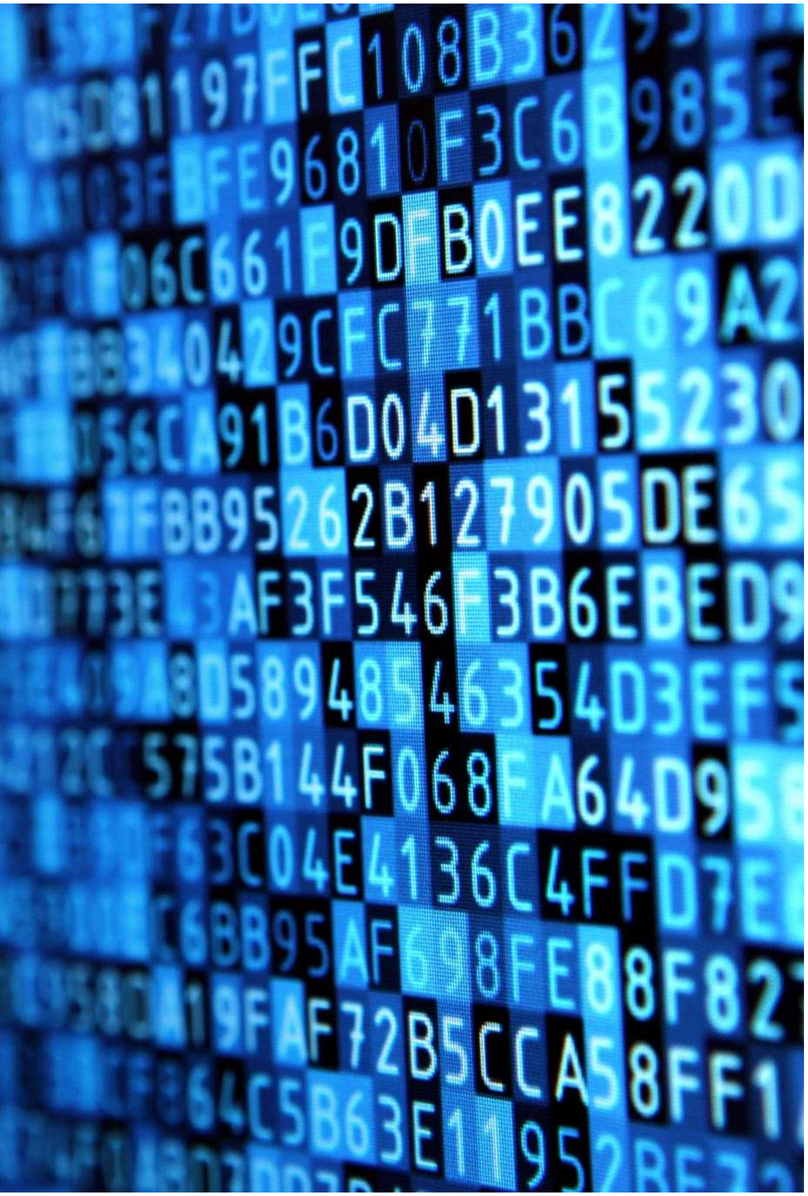


Curso:
EL271 Codificación de Fuente y de Canal
Unidad 2: CODIFICACIÓN DE BLOQUE
Semana 5, Sesión 5

CARLOS VALDEZ VELÁSQUEZ-LÓPEZ, DR. ING

2023-02

Logro de la sesión

Al finalizar la sesión, el alumno explica los conceptos de código de bloque lineal y sistemático, generación de códigos de bloque, código de Hamming, y decodificación mediante la técnica del síndrome

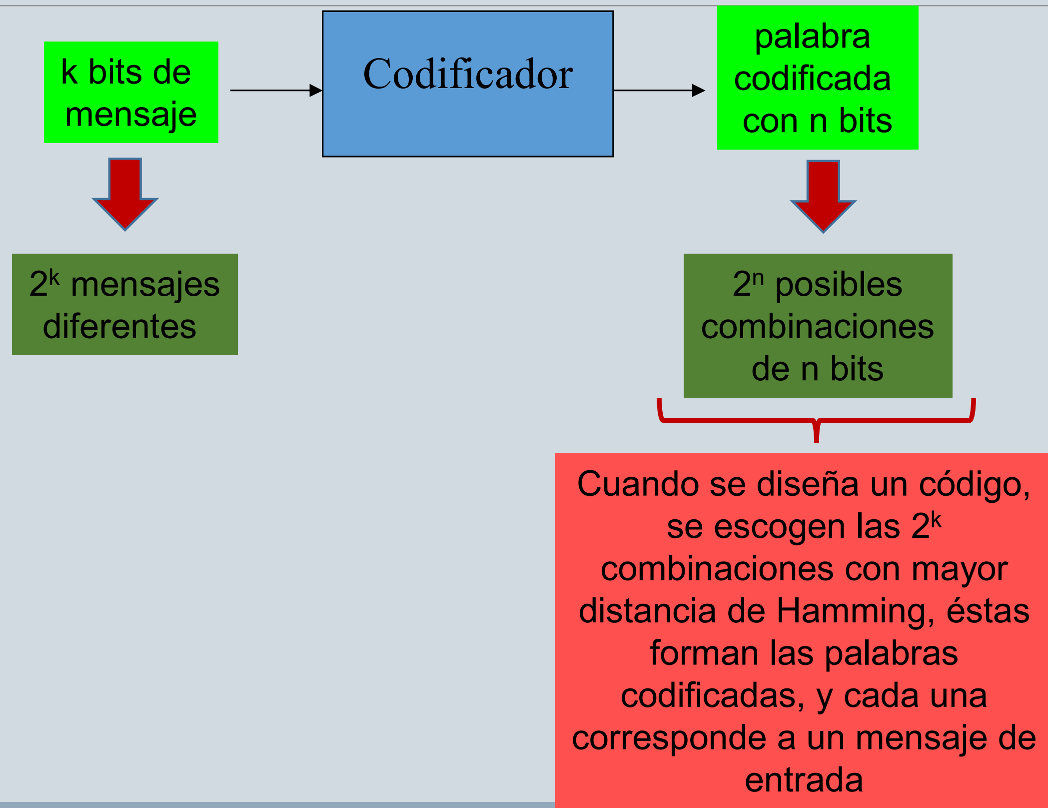
Contenido

1) Definición de código de bloque lineal y sistemático
2) Generación de la codificación de bloque
3) Código de Hamming
4) Decodificación mediante la técnica del síndrome.

1) Definición de código de bloque lineal y sistemático

- Un **código de bloque** consiste de vectores de n bits, cada vector contiene $k < n$ bits de mensaje
- Hay $\mathbf{2^k}$ **mensajes diferentes** de k bits y $\mathbf{2^n}$ **posibles vectores** de n bits
- La estrategia consiste en seleccionar 2^k vectores de n bits, de modo que **la distancia mínima $\boldsymbol{d_{min}}$ sea la máxima** posible
- Los códigos tienen cierta estructura que facilita los procesos de codificación y decodificación

Códigos de bloque



Código de bloque lineal

- Representación vectorial del mensaje M y de la palabra codificada X:

$$M = (m_1 m_2 \cdots m_k) \qquad X = (x_1 x_2 \cdots x_n)$$

- Los elementos de ambos son dígitos binarios

- El código es **lineal** si:
  - se incluye el vector de código "**todos ceros**"
  - si la suma de dos vectores de código produce otro vector de código
- La suma de dos vectores X y Z se define como:

$$X \oplus Z = (x_1 \oplus z_1 \quad x_2 \oplus z_2 \cdots x_n \oplus z_n)$$

- En la suma se emplean las reglas del módulo 2 (XOR)

Código de bloque lineal

- La distancia de Hamming entre X y Z:

$$d(X,Z) = w(X \oplus Z)$$

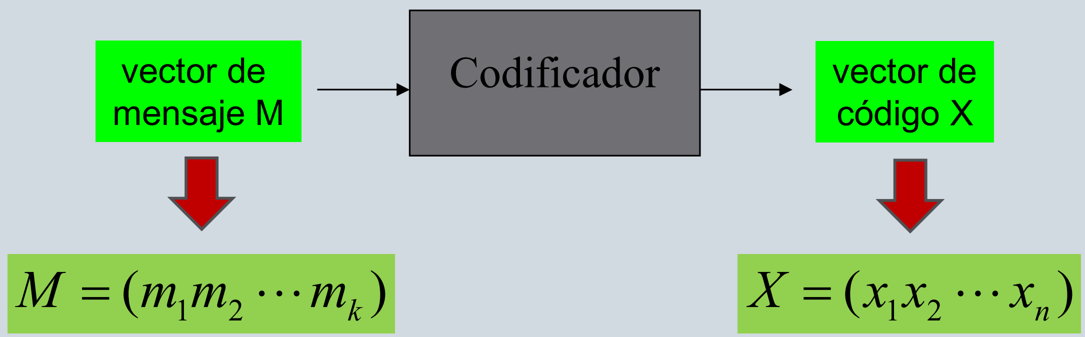
$$x_1 \oplus z_1 = 1, \text{ si } x_1 \neq z_1$$

- Donde $w(X)$ es el peso del vector $X.$ La distancia entre X y Z es el peso de otro vector de código. Si $Z = (00 \dots 0)$, luego $X \oplus Z = X,$ y por lo tanto:

$$d_{\min} = \left[w(X)\right]_{\min}, \quad X \neq (00\ldots0)$$

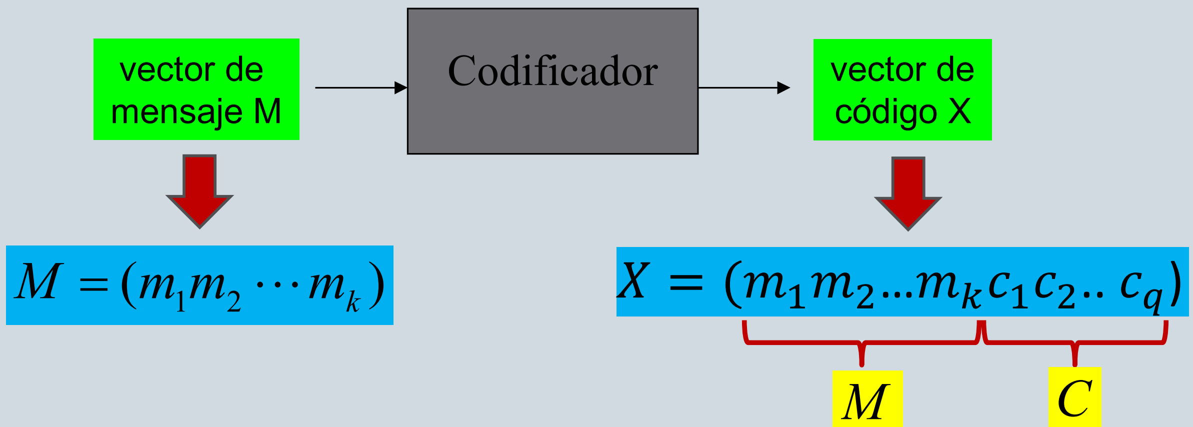
- Entonces la $\boldsymbol{d_{min}}$ es igual al menor peso de un vector de código

Códigos de bloque



Código de bloque sistemático

- Un código de bloque lineal sistemático tiene vectores X con los primeros k bits idénticos al mensaje M
- Los $(n-k)$ restantes bits son denominados de chequeo, y forman el vector C



2) Generación de la codificación de bloque

Vector de código X :

$$X = (m_1 m_2 \cdots m_k c_1 c_2 \cdots c_q)$$
$$q = n - k$$
$$X = (M|C)$$

M es el vector de mensaje de k bits y C es el vector de chequeo de q bits. X se genera:

$$X = MG$$
$$G = \left[I_k | P\right], \quad C = MP$$

I_k es la submatriz identidad de tamaño $k \times k$, y P es la submatriz $k \times q$:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1q} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kq} \end{bmatrix}$$

La matriz generadora G y matriz H de chequeo de paridad

La matriz generadora G:

$$X = MG$$

$$G = \left[I_k \middle| P \right], \;\; C = MP$$

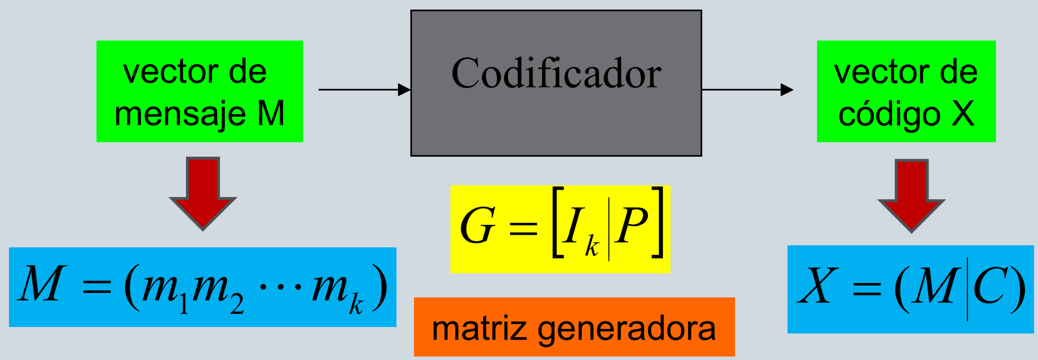
La matriz H:

$$H = \left[-P^T | I_q \right]$$

Ejemplo: código de Hamming (7,4)

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Generación de la codificación de bloque



Generación de la codificación de bloque

- I_k es la submatriz identidad de tamaño $k \times k$, y P es la submatriz $k \times q$:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1q} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kq} \end{bmatrix}$$

- Los elementos de C se obtienen:

$$c_j = m_1 p_{1j} \oplus m_2 p_{2j} \oplus \cdots \oplus m_k p_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, q$$

3) Código de Hamming

- Son códigos lineales sistemáticos *(n,k),* con $q \geq 3$ y:

$$n = 2^q - 1, \quad k = n - q$$

- La razón del código es:

$$R_c = \frac{k}{n} = 1 - \frac{q}{2^q - 1} \approx 1, \quad q \rangle\rangle 1$$

- Independientemente de *q:*

$$d_{\min} = 3$$

- Con lo cual pueden detectarse errores dobles y corregirse errores simples

3) Código de Hamming

- Para construir un **código de Hamming** sistemático, las *k* filas de la submatriz *P* se llenan con todos las palabras de *q* bits con dos o más 1s, en cualquier orden. Por ejemplo, si q=3, n=7, k=4. Luego:

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Dada una palabra de código M=(m_1 m_2 m_3 m_4), los bits de chequeo resultan:

$$c_1 = m_1 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus 0$$
$$c_2 = 0 \oplus m_2 \oplus m_3 \oplus m_4$$
$$c_3 = m_1 \oplus m_2 \oplus 0 \oplus m_4$$

En forma equivalente

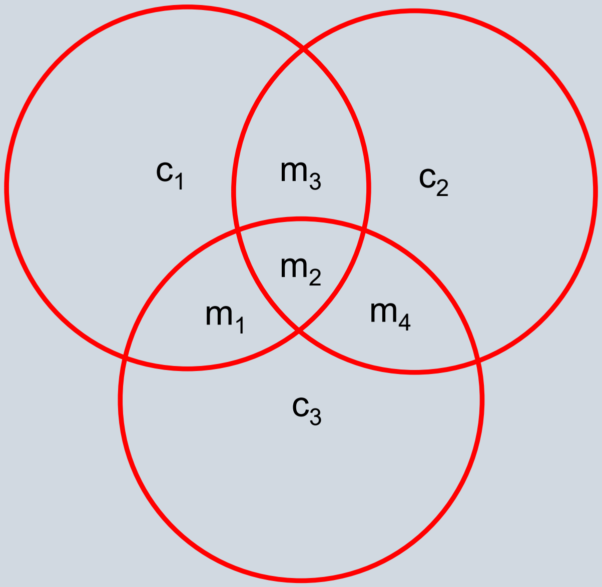
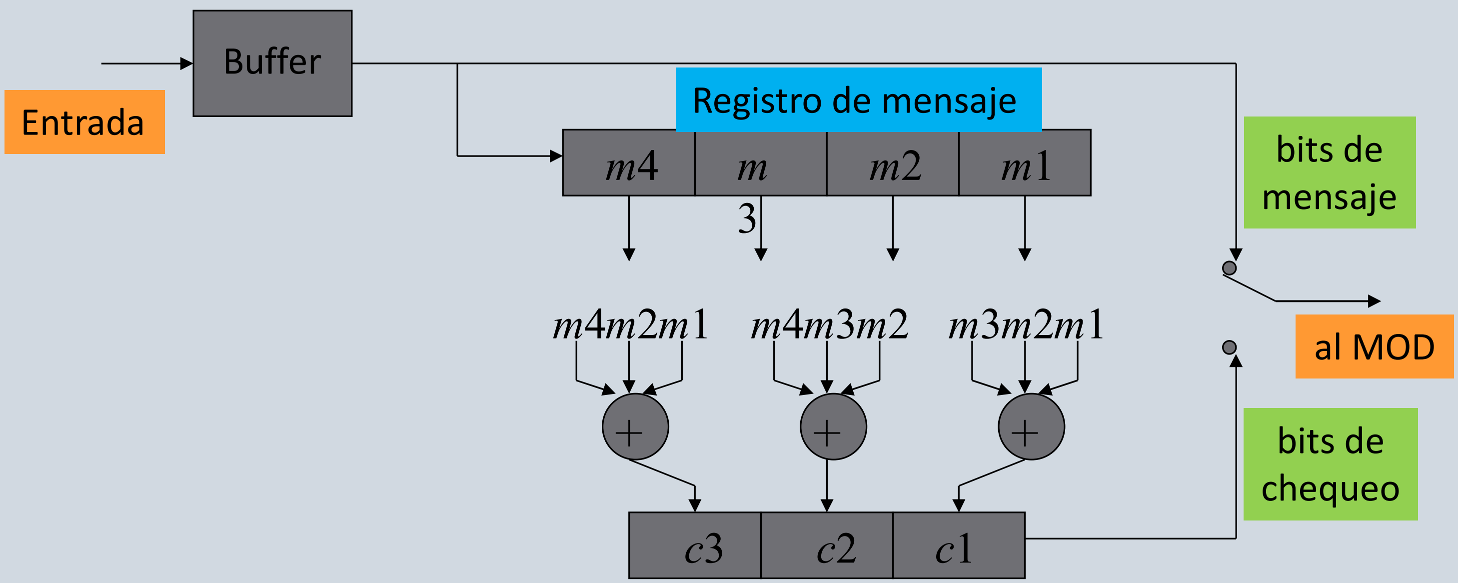


Diagrama de bloques del codificador Hamming (7,4)



- La decodificación se hace mediante el método del **síndrome**

Palabras del código de Hamming (7,4) (d_{min}=3)

M	C	w(x)	M	C	w(x)
0000	000	0	1000	101	3
0001	011	3	1001	110	4
0010	110	3	1010	011	4
0011	101	4	1011	000	3
0100	111	4	1100	010	3
0101	100	3	1101	001	4
0110	001	3	1110	100	4
0111	010	4	1111	111	7

- Si se producen 1 o 2 errores, **siempre** es posible detectarlos
- Si se producen 3 o más **no**, ya que **pueden convertirse en palabras válidas**

Ejercicios

1) Aplique los conceptos de código lineal y sistemático, matriz generadora G, vectores X y C, al código de repetición (3,1)
2) Aplique los conceptos de código lineal y sistemático, matriz generadora G, vectores X y C, al código de chequeo de paridad (3,2)