Curso:
EL271 Codificación de Fuente y de Canal
Unidad 2: CODIFICACIÓN CONVOLUCIONAL
Semana 7, Sesión 7

CARLOS VALDEZ VELÁSQUEZ-LÓPEZ, DR. ING

2023-02

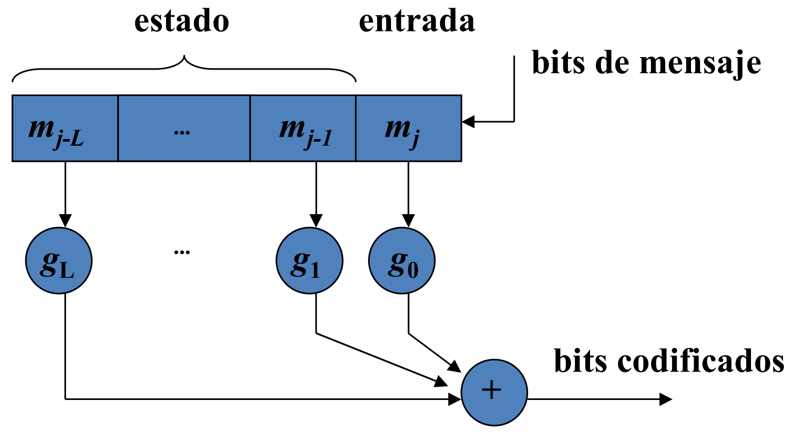
Logro de la sesión

Al finalizar la sesión, el alumno explica el mecanismo de codificación convolucional y el de decodificación mediante el algoritmo de Viterbi, además de la función de transferencia y la probabilidad de error de bit

Contenido

1) Codificación convolucional

- Tienen una estructura que se extiende sobre la secuencia de bits transmitidos, en lugar de limitarse a palabras de código en bloques
- Está formado por un registro de desplazamiento de *L*+1 etapas:



- La salida del codificador está dada por:

$$x_j = m_{j-l} g_l \oplus \cdots \oplus m_{j-1} g_1 \oplus m_j g_0$$

$$x_j = \sum_{i=0}^{L} m_{j-i} g_i \ \ (\text{mod-}2)$$

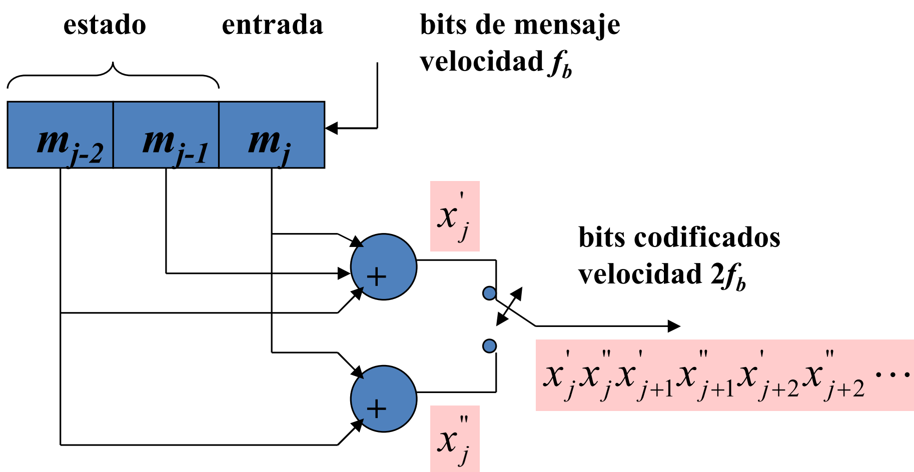
- La denominación **"convolucional"** se debe a la forma de la expresión, **similar a la integral de convolución**:

$$x(t) = \int m(t-\lambda) g(\lambda) d\lambda$$

- x_j depende del bit de entrada m_j y del estado del registro, definido por los L bits de mensaje previos. Un bit de mensaje influye en L+1 bits codificados sucesivos.

- A fin de permitir el control de errores, la salida del codificador debe tener una velocidad mayor que la de entrada f_b. Ello se consigue con más sumadores en módulo 2, alternando sus salidas correspondientes.

- Ejemplo de codificador convolucional con n=2, k=1, L=2



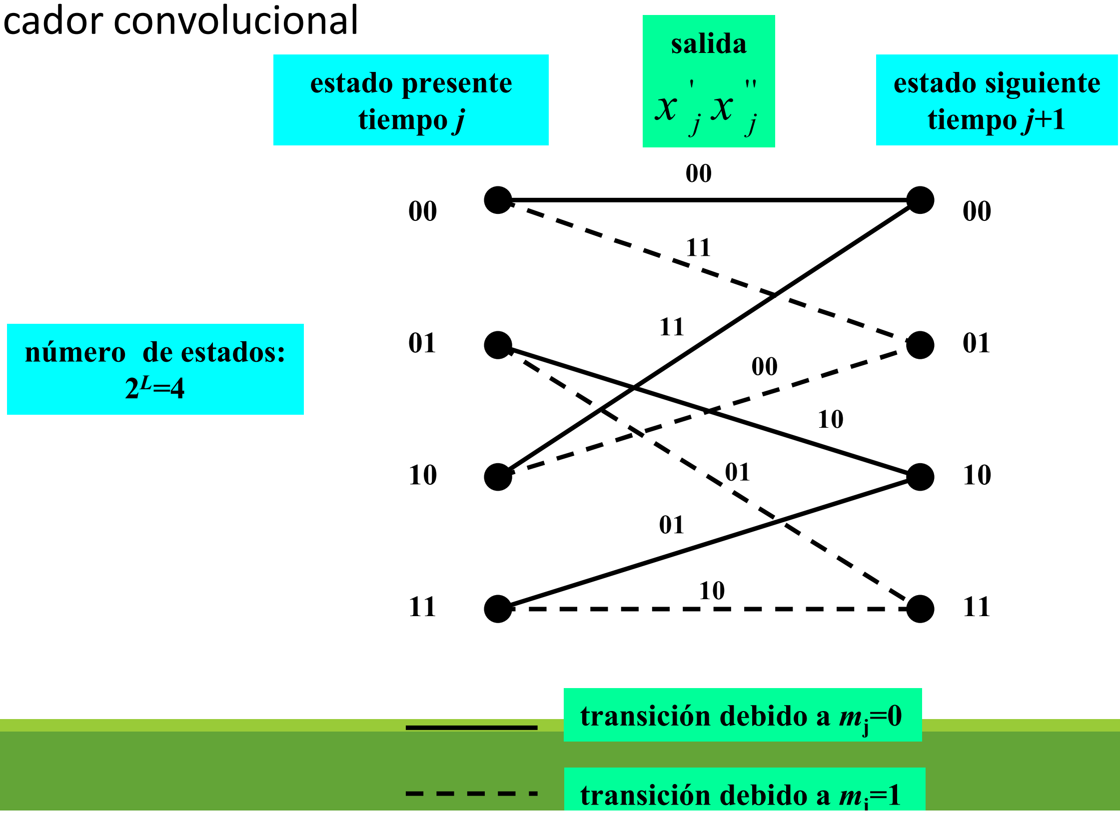
$$x'_j = m_{j-2} \oplus m_{j-1} \oplus m_j$$

$$x''_j = m_{j-2} \oplus m_j$$

- La razón del código es R_c=1/2, tal como en el código de bloque (n,k) con razón R_c=k/n=*1/2.* A diferencia del código bloque, los bits de entrada no han sido agrupados en bloques de k bits. Además, 1 bit de entrada influye en n(L+1)=6 bits de salida consecutivos. n(L+1) es la ***longitud de influencia*** del código.

El diagrama trellis

- El diagrama trellis es una representación de las posibles transiciones entre estados de un codificador convolucional



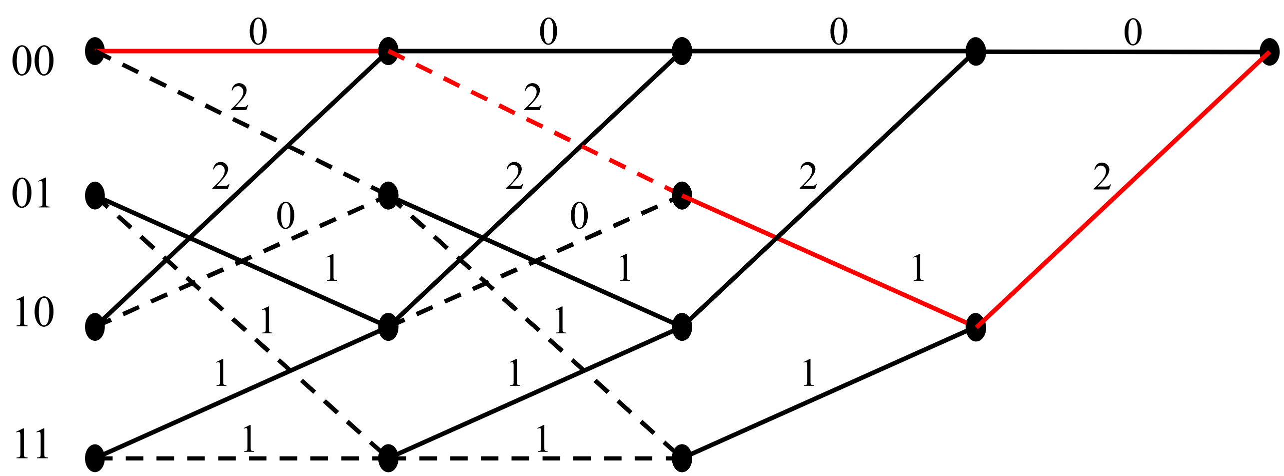
Distancia libre d_f

- La potencia de un **código de bloque** depende de d_{min}
- En **códigos convolucionales** no se forman palabras codificadas, y por lo tanto consideramos el peso **$w(X)$ de una secuencia X completa**, generada por una secuencia de entrada
- La **distancia libre** se define como:

$$d_f = \left[w(X)\right]_{\min} \quad X \neq 000\cdots$$

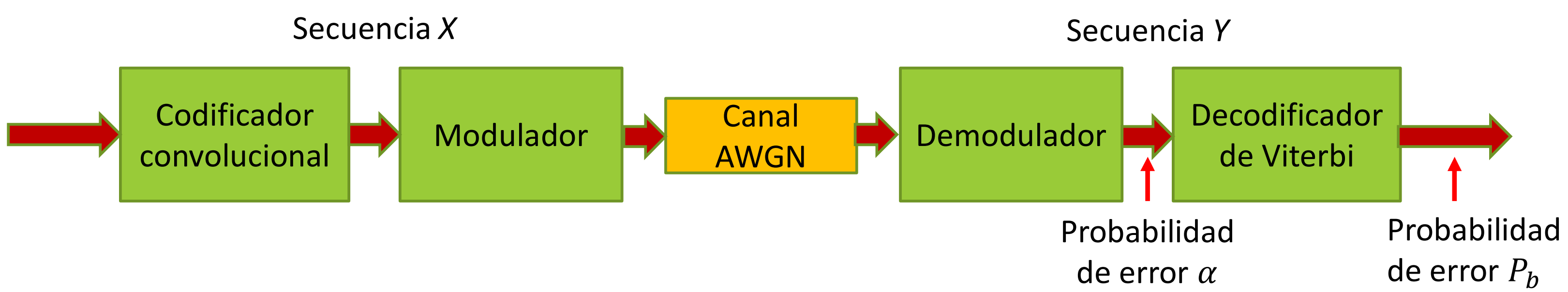
- d_f es una medida de la potencia de control de errores del código

Ejemplo

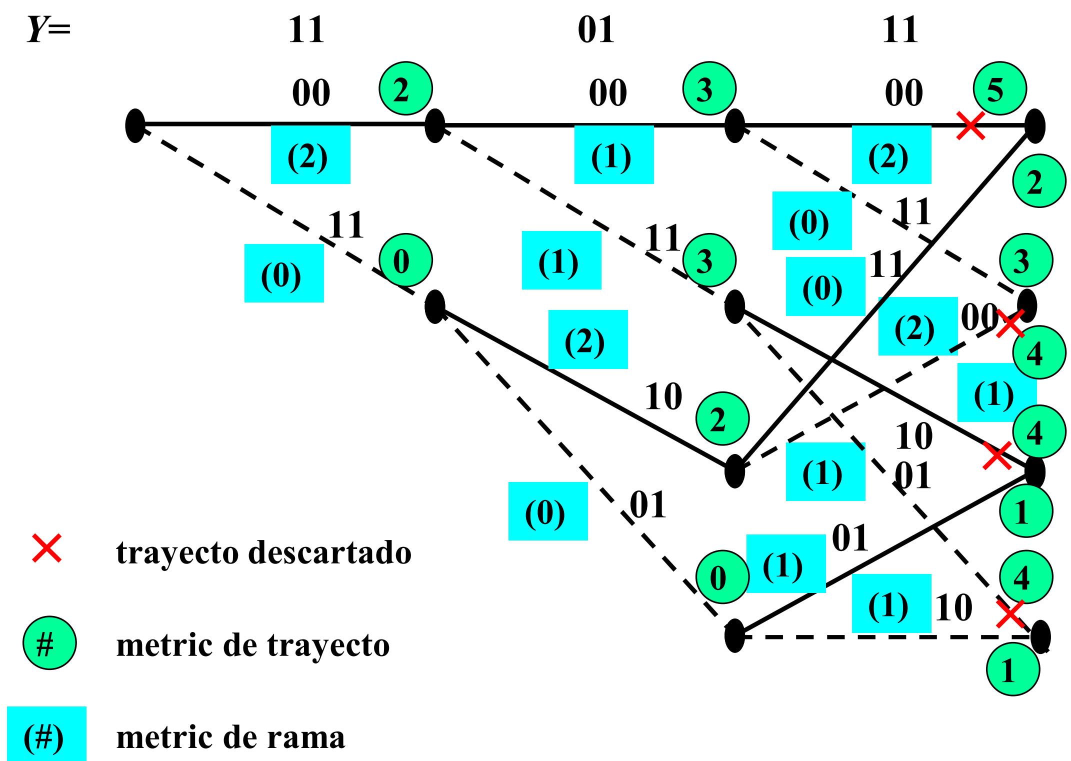


$$d_f = 5$$

2) Decodificación mediante el algoritmo de Viterbi

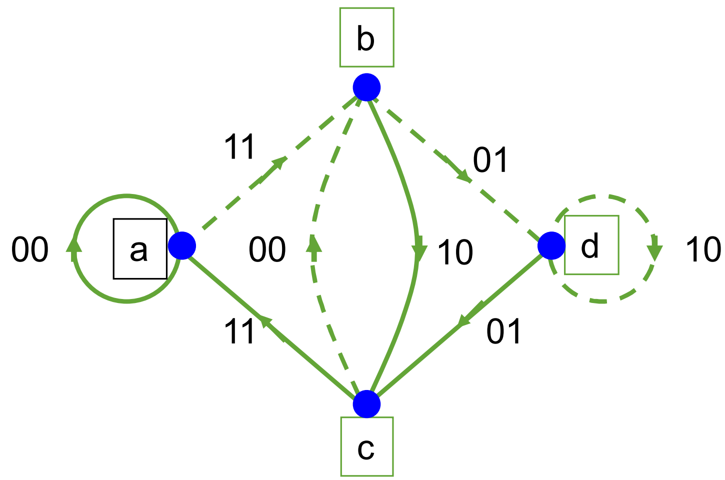


El algoritmo de Viterbi



3) Función de Transferencia y Probabilidad de Error de Bit P_b

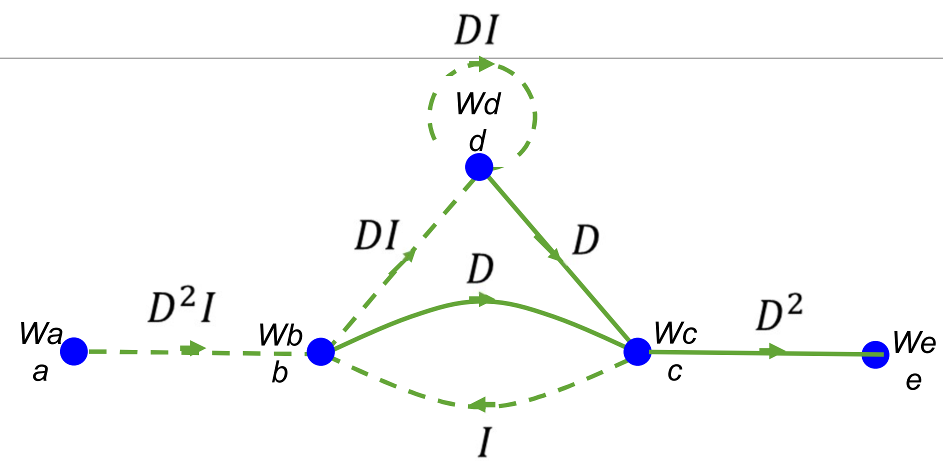
Diagrama de Estados



Estados
a:00
b:01
c:10
d:11

- Utilizando el diagrama, es posible encontrar las ecuaciones de estado, y con ello calcular la Función de Transferencia T(D,I)

Diagrama de Estados Modificado



Estados
a:00
b:01
c:10
d:11

$$W_b = D^2 I W_a + I W_c$$
$$W_c = D W_d + D W_b$$
$$W_d = D I W_b + D I W_d$$
$$W_e = D^2 W_c$$
$$T(D, I) \triangleq \frac{W_e}{W_a}$$

Función de Transferencia *T(D,I)*

$$T(D,I) = \frac{D^5 I}{(1-2DI)}$$

$$= D^5 I + 2D^6 I^2 + 4D^7 I^3 + \cdots$$

$$= \textstyle\sum_{d=5}^{\infty} 2^{d-5} D^d I^{d-4}$$

- Generalización de $T(D,I)$:

$$T(D,I) = \sum_{d=d_f}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A(d,i) D^d I^i$$

- Donde $A(d,i)$ denota el número de trayectos diferentes de entrada-salida a lo largo del diagrama de estados modificado, con distancia d e i bits de mensaje

Probabilidad de error P_b

- Para valores de α muy pequeños:

$$P_b \leq \frac{1}{k}\frac{\partial T(D,I)}{\partial I}\bigg|_{D=2\sqrt{\alpha(1-\alpha)},I=1}$$

$$P_b \approx \frac{M(d_f)2^{d_f}\ \alpha^{d_f/2}}{k}\ \ ,\ \sqrt{\alpha} \ll 1$$

$$M(d_f) = \sum_{i=1}^{\infty} iA(d,i)$$

- $M(d_f)$ es igual al número total de bits de mensaje diferentes de cero en todos los trayectos de peso mínimo d_f, en el diagrama de estados modificado
- No existen formula explícitas de diseño de un código convolucional, por lo que se realizan búsquedas mediante computadora y simulaciones

4) Ejercicios