Curso:
EL271 Codificación de Fuente y de Canal
Unidad 1: TEORÍA DE LA INFORMACIÓN Y CODIFICACIÓN
Semana 1, Sesión 1

CARLOS VALDEZ VELÁSQUEZ-LÓPEZ, DR. ING

2023-02

Contenido

1) Introducción al curso, generalidades
2) Diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones digitales, el canal AWGN
3) Antecedentes de la teoría de la información, ejemplos de procesamiento y transmisión de la información
4) Medición de la información y codificación de fuente
5) Entropía y velocidad de la información
6) Fuente binaria y fuente M-aria
7) Conclusiones

1) Introducción al curso, generalidades

- Curso electivo de la mención de Telecomunicaciones
- Requisito: 140 créditos
- Logro: Al finalizar el curso, el estudiante analiza y compara con sentido crítico los esquemas más utilizados de codificación de fuente y de canal
- Contenido:

Unidad	Tema
1	TEORÍA DE LA INFORMACIÓN Y CODIFICACIÓN DE FUENTE
2	CÓDIGOS DE BLOQUE Y CÓDIGOS CONVOLUCIONALES
3	TRELLIS CODED MODULATION (TCM)
4	CÓDIGOS TURBO Y CÓDIGOS LDPC

Evaluación

FÓRMULA
7.5% (TA1) + 7.5% (LB1) + 7.5% (TA2) + 7.5% (LB2) + 7.5% (PA1) + 10% (TP) + 7.5% (TA3) + 7.5% (LAB3) + 7.5% (TA4) + 7.5% (LB4) + 7.5% (PA2) + 15% (TF)

Tipo de Nota	Peso (%)
TA - TAREA	7.5
LB – PRÁCTICA LABORATORIO	7.5
TA - TAREA	7.5
LB – PRÁCTICA LABORATORIO	7.5
PA - PARTICIPACIÓN	7.5
TP – TRABAJO PARCIAL	10
TA - TAREA	7.5
LB – PRÁCTICA LABORATORIO	7.5
TA - TAREA	7.5
LB – PRÁCTICA LABORATORIO	7.5
PA - PARTICIPACIÓN	7.5
TF – TRABAJO FINAL	15

Evaluación

TA (4)	LAB (4)	PA (2)	TP, TF
• Se evalúa mediante preguntas de teoría, aplicaciones y resolución de problemas que se dejan como tareas	• Se evalúa mediante trabajos de simulación de MATLAB, Python, C, etc., sobre codificación de fuente y canal	• Se evalúa mediante cuestionarios o preguntas dirigidas a todos los alumnos, sobre los temas tratados en la sesión de clases	• Se evalúa mediante un proyecto en el que se integran las unidades hasta la mitad del curso (trabajo parcial TP), y de todo el curso (trabajo final TF)

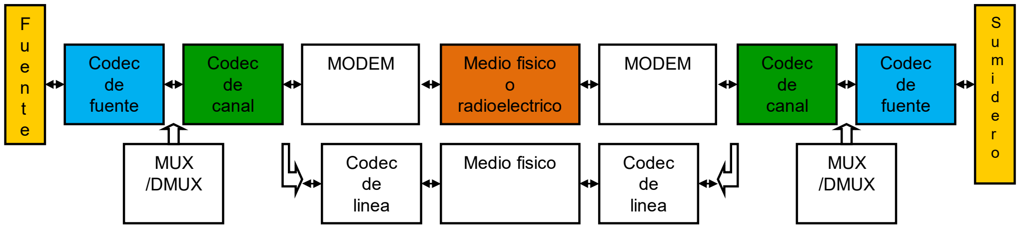
Cronograma

TIPO DE PRUEBA	DESCRIPCIÓN NOTA	NÚM. DE PRUEBA	FECHA	OBSERVACIÓN	RECUPERABLE
TA	TAREA	1	SEMANA 3	UNIDAD 1 GRUPAL	NO
LB	PRÁCTICA LABORATORIO	1	SEMANA 4	UNIDAD 1 GRUPAL	NO
TA	TAREA	2	SEMANA 6	UNIDAD 2 GRUPAL	NO
LB	PRÁCTICA LABORATORIO	2	SEMANA 7	UNIDAD 2 GRUPAL	NO
PA	PARTICIPACIÓN	1	SEMANA 7	UNIDADES 1 Y 2 INDIVIDUAL	NO
TP	TRABAJO PARCIAL 1	1	SEMANA 8	UNIDADES 1 Y 2 INDIVIDUAL	SÍ
TA	TAREA	3	SEMANA 10	UNIDAD 3 GRUPAL	NO
LB	PRÁCTICA LABORATORIO	3	SEMANA 11	UNIDAD 3 GRUPAL	NO
TA	TAREA	4	SEMANA 13	UNIDAD 4 GRUPAL	NO
LB	PRÁCTICA LABORATORIO	4	SEMANA 14	UNIDAD 4 GRUPAL	NO
PA	PARTICIPACIÓN	1	SEMANA 14	UNIDADES 3 Y 4 INDIVIDUAL	NO
TF	TRABAJO FINAL 1	1	SEMANA 16	TODAS LAS UNIDADES INDIVIDUAL	SÍ

Logro de la sesión

Al finalizar la sesión, el alumno explica los conceptos más importantes sobre la información, la entropía, la codificación de fuente y la velocidad de la información

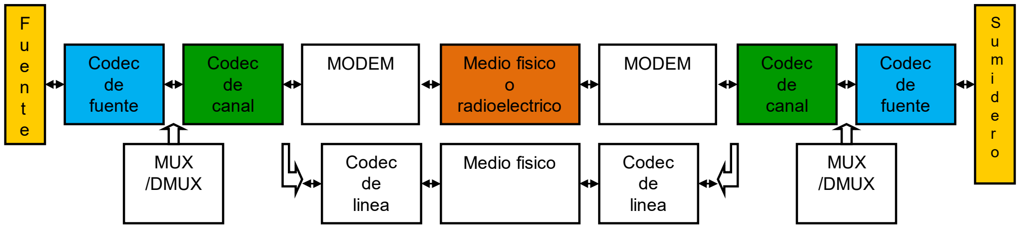
2) Diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones digitales



La fuente y el sumidero

El diagrama de bloques mostrado contiene en sus extremos la fuente y sumidero. Ejemplos tales como la voz, audio, video, texto, imagen, etc., constituyen casos de fuentes analógicas, mientras que un terminal de datos, una computadora, etc., representan casos típicos de fuentes digitales.

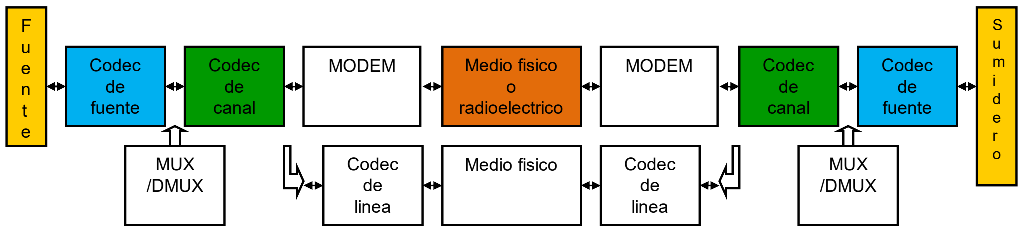
2) Diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones digitales



El codec de fuente (codificador/decodificador)

Cumple con la función de representar de un modo eficiente la información generada, aprovechando sus propiedades inherentes. Así tenemos, en el caso de voz, codificadores PCM, ADPCM, vocoders tales como LPC, etc. Para audio, los codigos WAV y MP3. En video, los algoritmos MPEG-2 y MPEG-4. Igualmente en caso de textos, estamos acostumbrados a comprimir archivos a través del esquema ZIP.

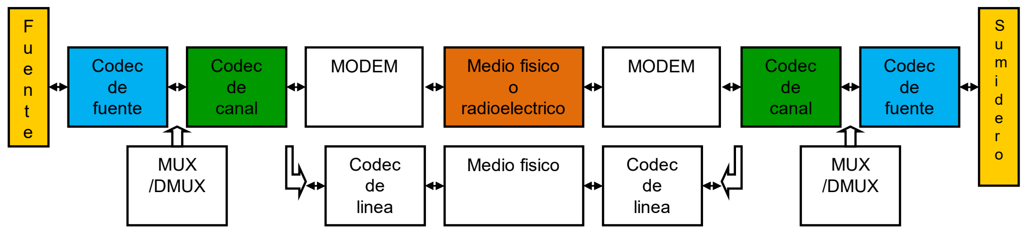
2) Diagrama de bloques de un sistema de comunicaciones digitales



El codec de canal

Esta etapa protege la información contra las diversas perturbaciones introducidas en el canal de comunicación. Para ello se cuenta con diversos tipos de códigos, tales como: codificación de bloque, convolucional, códigos Turbo, códigos LDPC, esquemas combinados de codificación y modulación TCM.

2) Diagrama de bloques de un sistema digital de comunicaciones

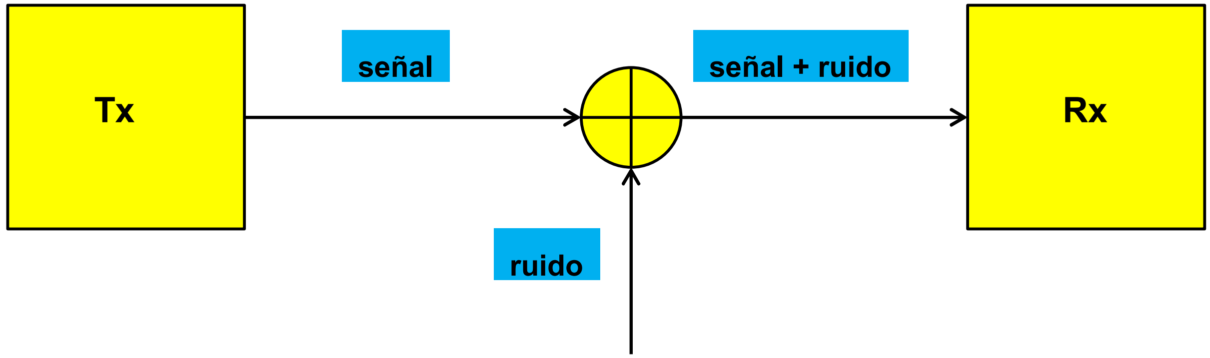


El canal de comunicación

Depende del tipo de aplicación. Por ejemplo, se tiene el canal telefónico, el canal de TV por cable, la línea dedicada para acceso a Internet mediante fibra óptica, etc. Asimismo se tiene el canal radioeléctrico para las comunicaciones móviles celulares, vía satélite, microondas terrestre, las comunicaciones espaciales, entre otros. Es así que el canal puede modelarse de diferente manera con una determinada exactitud. El modelo teórico mas simple es el canal Gaussiano (AWGN, Additive White Gaussian Noise), para comunicaciones vía radio se adiciona los posibles desvanecimientos debido a la propagación multitrayecto.

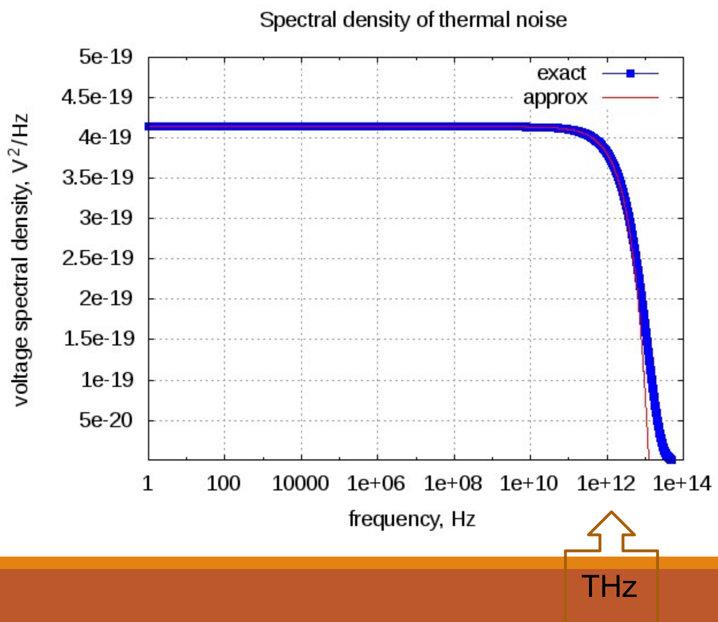
2) El canal AWGN

Aditivo: el ruido se suma a la señal transmitida



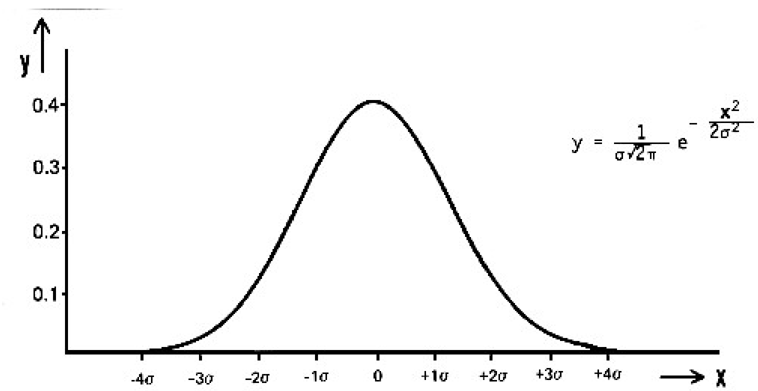
2) El canal AWGN

Blanco: el ruido tiene Densidad Espectral de Potencia plana **en el rango de frecuencias de interés práctico** en comunicaciones (orden de GHz), alrededor de los THz decae



2) El canal AWGN

Gaussiano: la función de densidad de probabilidad (fdp) del ruido es Gaussiana



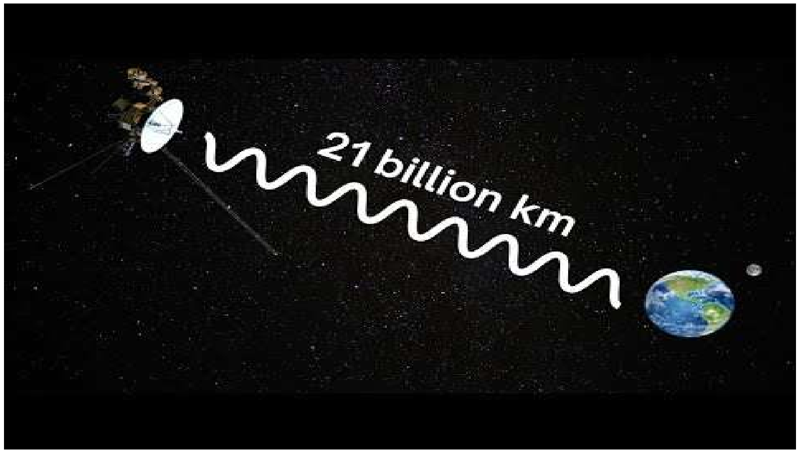
Consecuencia: el ruido de amplitud pequeña ocurre más frecuentemente que el ruido de amplitud grande (por ello el uso del código Gray es útil)

3) Antecedentes de la teoría de la información, ejemplos de procesamiento y transmisión de la información

- En 1948, Claude E. Shannon, publicó su famoso trabajo seminal: "A Mathematical Theory of Communications", en The Bell System Technical Journal, Volume 27, Issue 3, July 1948, p. 379-423
- La Teoría de la Información, en el campo de las telecomunicaciones, tiene aplicaciones muy importantes en la codificación de fuente y la codificación de canal, y gracias a ella podemos contar con accesos a Internet cada vez más veloces y prácticamente libres de errores
- Además, también se aplica en otros campos: lingüística, ciencias de la comunicación, biología, evolución de la vida, evolución del universo, física, etc.
- Claude E. Shannon es considerado "El Padre de la Era de Información", y realizó aportes muy importantes en campos tales como: criptografía, inteligencia artificial, mercado de valores, lingüística, etc.
- Por la trascendencia de su trabajo y su legado, Claude E. Shannon es considerado como un científico del nivel de Isaac Newton y de Albert Einstein

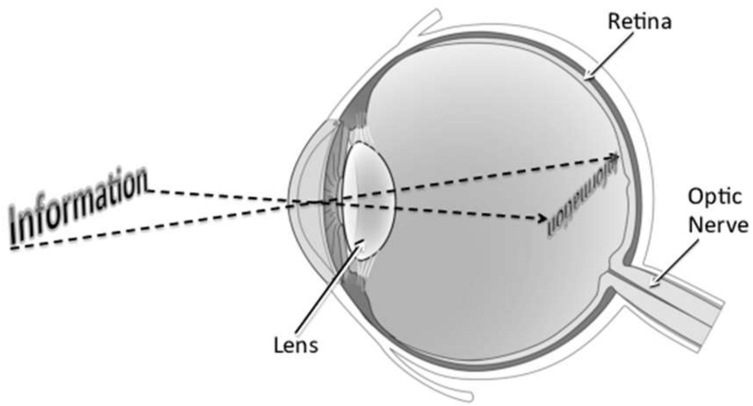
Claude E. Shannon (1916-2001)

Ejemplos de procesamiento y transmisión de la información



Ejemplos de procesamiento y transmisión de la información

Ejemplos de procesamiento y transmisión de la información



https://www.researchgate.net/publication/315844307_Principles_of_Neural_Information_Theory_Computational_Neuroscience_and_Metabolic_Efficiency

4) Medición de la información y codificación de fuente

- ✓La teoría de las comunicaciones se trató originalmente en términos de señales afectadas por el ruido e interferencias
- ✓Si bien ello es considerado una valiosa herramienta de análisis, no sirvió para tratar el proceso fundamental de las comunicaciones en lo referente a la transferencia de información
- ✓Claude E. Shannon revolucionó las comunicaciones con su famoso artículo "A Mathematical Theory of Communications" (1948), con un enfoque fundamental y diferente

✓Shannon planteó el problema: "dada una fuente que genera mensajes, ¿cómo deben representarse éstos para una transmisión confiable sobre un canal de comunicación que tiene limitaciones físicas inherentes?"

✓Para responder a dicha pregunta, Shannon se concentró en la información del mensaje en lugar de la señal de mensaje, lo cual ha devenido en la disciplina conocida como Teoría de la Información

The Bell System Technical Journal

Vol. XXVII *July, 1948* *No. 3*

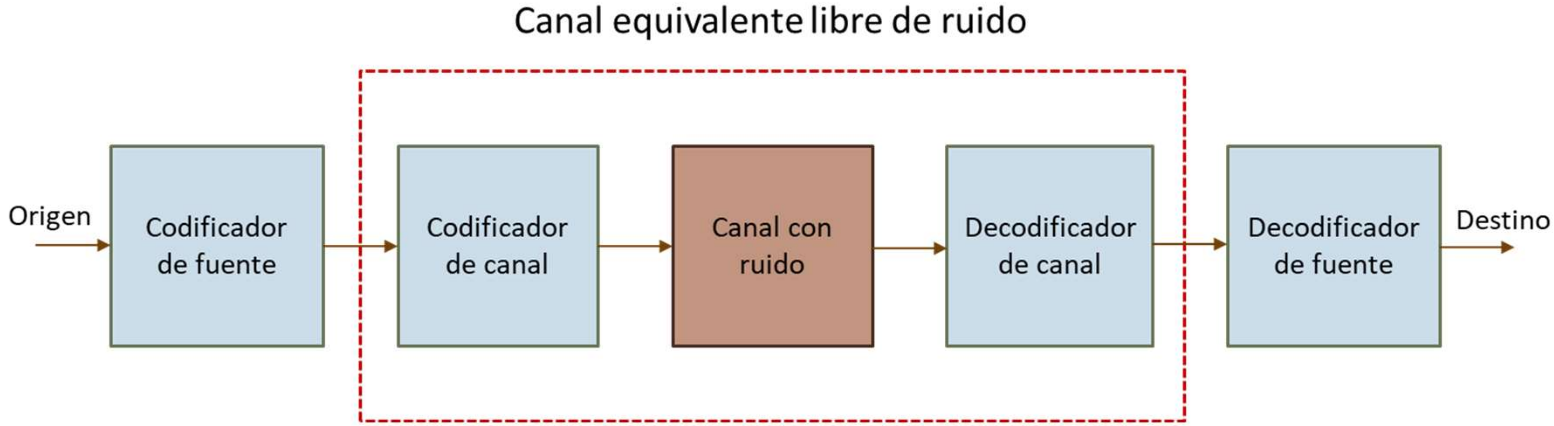
A Mathematical Theory of Communication

By C. E. SHANNON

INTRODUCTION

THE recent development of various methods of modulation such as PCM and PPM which exchange bandwidth for signal-to-noise ratio has intensified the interest in a general theory of communication. A basis for such a theory is contained in the important papers of Nyquist[1] and Hartley[2] on this subject. In the present paper we will extend the theory to include a number of new factors, in particular the effect of noise in the channel, and the savings possible due to the statistical structure of the original message and due to the nature of the final destination of the information.

Sistema de comunicación con codificación de fuente y de canal



- La codificación óptima adapta la fuente y el canal para una máxima transferencia confiable de información
- La codificación implica 2 procesos: 1) codificación de canal para el control de errores, que en el caso óptimo produce un canal equivalente libre de ruido (con una capacidad para transmitir información); y, 2) codificación de fuente, que adapta la fuente al canal equivalente libre de ruido, siempre que la velocidad de transmisión de la fuente no supere a la capacidad del canal

- Lo crucial en teoría de la información es la medida de la información
- En el presente contexto información es un término técnico que no tiene relación con “conocimiento” o “significado”
- La información es un producto de la fuente a ser transferida a un destinatario
- El sentido de información está asociado a la utilidad o lo novedoso del mensaje, teniendo en cuenta que dicha información transferida desde la fuente no estaba disponible previamente en el lugar de destino
- De haber estado disponible, la transferencia de información hubiera sido nula

Tengamos en cuenta que

- Así como se generan mensajes a partir de una fuente en el contexto de las telecomunicaciones, de manera similar se pueden encontrar muchas situaciones en donde se generan mensajes asociados con cierta probabilidad de ocurrencia
- En dichas situaciones podemos también aplicar los conceptos de la Teoría de la Información de Shannon
- Veamos algunos ejemplos a continuación

Ejemplo 1: información del tiempo en un plan de viaje

- Habrá sol
- Habrá tormentas de lluvia dispersas
- Habrá un tornado

- Los mensajes están listados con probabilidades de ocurrencia de mayor a menor
- El mensaje menos probable contiene la mayor cantidad de información
- A mayor incertidumbre del mensaje, mayor es la cantidad de información

Medición de la información

- Si x_i denota un mensaje arbitrario y $P(x_i) = P_i$ es la probabilidad de que dicho mensaje sea seleccionado para su transmisión, entonces la cantidad de información asociada a x_i debe estar en función de P_i

Shannon definió la función logarítmica:

$$I_i \triangleq -\log_b P_i = \log_b \frac{1}{P_i}$$

En donde b es la base logarítmica, e I_i es la auto-información del mensaje x_i

- I_i depende únicamente de P_i, independientemente del contenido del mensaje o de posibles interpretaciones

Medición de la información

- En consecuencia:

$$I_i \geq 0, \text{ para } 0 \leq P_i \leq 1$$
$$I_i \to 0, \text{ para } P_i \to 1$$
$$I_i > I_j, \text{ para } P_i < P_j$$

- Por lo tanto I_i es una cantidad positiva, con las siguientes propiedades:

$$I_i = 0, \text{ si } P_i = 1 \;\; \text{(no hay incertidumbre)}$$
$$I_i > I_j, \text{ si } P_i < P_j$$

- Además, si la fuente produce 2 mensajes sucesivos e independientes x_i y x_j, con probabilidad conjunta $P(x_i x_j) = P_i P_j$

Medición de la información

- Entonces:

$$I_{ij} = \log_b \frac{1}{P_{ij}} = \log_b \frac{1}{P_i} + \log_b \frac{1}{P_j}$$
$$I_{ij} = I_i + I_j$$

- De modo que la cantidad de información total es igual a la suma de las contribuciones de cada mensaje individual

- La medición de la información de Shannon $\log_b {}^{1}/_{P_i}$ es una función que satisface las propiedades antes indicadas

Unidades

La cantidad de información es adimensional, sin embargo, se le asigna la unidad:

- ✓ bit, si b=2
- ✓ nat, si b=e
- ✓ Decit, si b=10

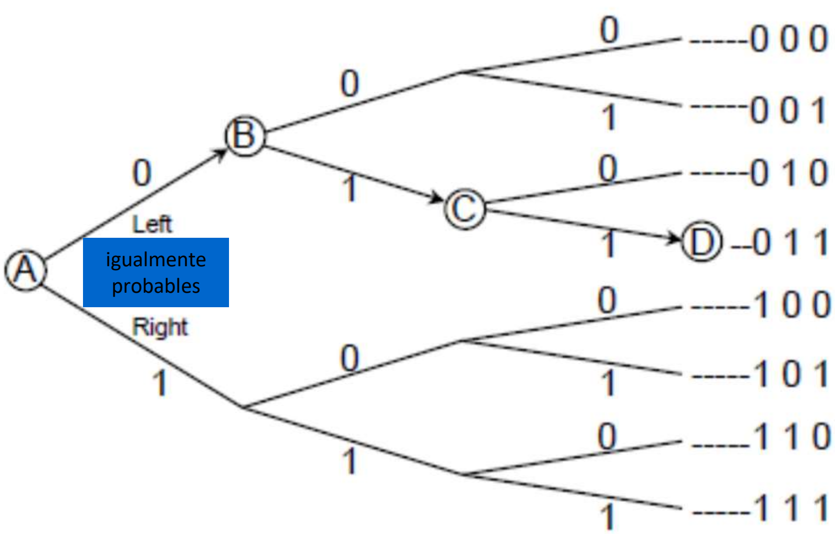
No debe confundirse bit (de cantidad de información) con bit (de dígito binario, atribuido a J.W. Tukey, el cual se denominará binit)

Ejemplo: los binits 0 y 1 tienen probabilidades ¼ y ¾, respectivamente. Luego:

- ✓ El binit 0 transporta log2 4 = 2 bits de información
- ✓ El binit 1 transporta log2 4/3 = 0,42 bits de información

Ejemplo 2: información para llegar desde A hasta D

- Estando en el punto A, se asume que no hay información previa sobre qué camino escoger, izquierda o derecha



- ✓ Si se proporciona la información de ir por el lado izquierdo (representado por el dígito binario 0), se recibe 1 bit de información
- ✓ Estando en B, si se da la información de ir por el lado derecho (representado por el dígito binario 1), se recibe también 1 bit de información
- ✓ Con los 2 bits de información recibidos hasta el momento, se podía haber llegado a 4 bifurcaciones diferentes
- ✓ Estando en C, si nuevamente se da la información de ir por el lado derecho (representado por el dígito binario 1), se recibe 1 bit de información adicional y se llega a D
- ✓ Con 3 bits de información recibidos, se llega al punto D deseado
- ✓ Con 3 bits de información se puede llegar a 8 destinos alternativos

Ejercicio 1: Suponga que en un cierto curso se obtuvieron el mismo número de notas A, B, C, D y F. Cuando el profesor le indica que su nota no es F, ¿Cuánta información en bits le ha proporcionado? ¿Cuánta información adicional necesita para determinar cuál es su nota?

Nota	P_i	I_i	$(1-P_i)$
A	1/5	2,32	4/5
B	1/5	2,32	4/5
C	1/5	2,32	4/5
D	1/5	2,32	4/5
F	1/5	2,32	4/5

- La información recibida al conocer que la nota no es F, corresponde a:

$$\log_2 \frac{1}{(1-P_i)} = \log_2 \frac{1}{(4/5)} = 0{,}322 \text{ bits}$$

- Supongamos que la información adicional que se requiere se debe calcular según la forma cómo el profesor señale detalles sobre la nota

- Es decir, si la siguiente información que me brinda el profesor es que mi nota no es la D, entonces:

Nota	P_i	I_i	$(1-P_i)$
A	1/4	2	3/4
B	1/4	2	3/4
C	1/4	2	3/4
D	1/4	2	3/4

- La información recibida de que la nota no es la D será:

$$\log_2 \frac{1}{(3/4)} = 0{,}415 \text{ bits}$$

- Siguiendo la misma forma de dar información, la siguiente vez me indicará que no es la C:

Nota	P_i	I_i	$(1-P_i)$
A	1/3	1,584	2/3
B	1/3	1,584	2/3
C	1/3	1,584	2/3

Entonces:

$$\log_2 \frac{1}{(2/3)} = 0{,}585 \text{ bits}$$

- De la misma manera, si mi nota no es la B:

Nota	P_i	I_i	$(1 - P_i)$
A	1/2	1	1/2
B	1/2	1	1/2

- La información recibida de que la nota no es la B (y por lo tanto mi nota es la A) será:

$$\log_2 \frac{1}{(1/2)} = 1 \text{ bits}$$

- La información total recibida es:

$$0{,}322 + 0{,}415 + 0{,}585 + 1 = 2{,}322 \text{ bits}$$

- La información adicional es:

$$0{,}415 + 0{,}585 + 1 = 2 \text{ bits}$$

- Ahora, supongamos que la siguiente información que me brinda el profesor es que mi nota es la D, entonces:

Nota	P_i	I_i	$(1 - P_i)$
A	1/4	2	3/4
B	1/4	2	3/4
C	1/4	2	3/4
D	1/4	2	3/4

- La información recibida de que la nota es la D será:
  - $\log_2 \frac{1}{(1/4)} = 2 \text{ bits}$
- La información total es:
  - $0{,}322 + 2 = 2{,}322 \text{ bits}$
- Observamos que la información total es la misma que en el primer caso, así como la información adicional de 2 bits

- Por otro lado, supongamos que la siguiente información que me brinda el profesor es que mi nota no es la D, entonces:

Nota	P_i	I_i	$(1-P_i)$
A	1/4	2	3/4
B	1/4	2	3/4
C	1/4	2	3/4
D	1/4	2	3/4

- La información recibida de que la nota no es la D será:
  - $\log_2 \frac{1}{(3/4)} = 0{,}415 \text{ bits}$
- Seguidamente, el profesor me indica que mi nota es la C:

Nota	P_i	I_i	$(1-P_i)$
A	1/3	1,584	2/3
B	1/3	1,584	2/3
C	1/3	1,584	2/3

- La información recibida de que la nota es la C será:

$$\log_2 \frac{1}{(1/3)} = 1{,}585 \text{ bits}$$

- La información total es: $0{,}322 + 0{,}415 + 1{,}585 = 2{,}322 \text{ bits}$
- La información adicional es nuevamente: $0{,}415 + 1{,}585 = 2 \text{ bits}$

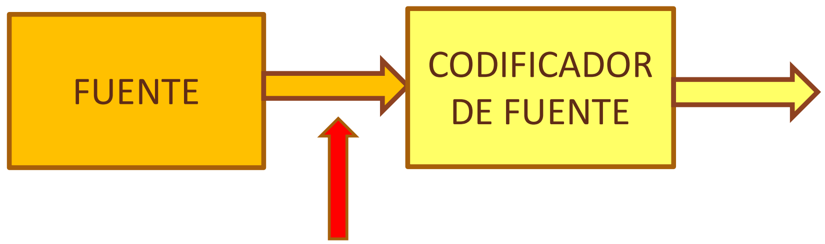
5) Entropía y velocidad de la información

- Sea una fuente de información que emite una secuencia de símbolos seleccionados de un alfabeto de M símbolos diferentes, y sea X el conjunto de símbolos $x_1, x_2, \ldots, x_M$
- Cada símbolo x_i ocurre con una probabilidad P_i y contiene la auto-información I_i. Se cumple:

$$\sum_{i=1}^{M} P_i = 1$$

- Se asume que la fuente es estacionaria, es decir que las probabilidades no varían con el tiempo
- Los símbolos sucesivos son independientes y emanan de la fuente a una velocidad promedio igual a r símbolos por segundo
- Estas propiedades definen el modelo de una fuente discreta sin memoria (Discrete Memoryless Source, DMS)

Fuente discreta sin memoria (Discrete Memoryless Source, DMS)



$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_M\}$

$x_i \rightarrow P_i \rightarrow I_i \;\; \forall i, i = 1, \ldots, M$

r símbolos/seg

5) Entropía y velocidad de la información

- La cantidad de información producida por la fuente durante un intervalo de tiempo de símbolo arbitrario es una variable aleatoria discreta, que toma los posibles valores $I_1, I_2, \dots, I_M$
- La información esperada por símbolo está dada por el promedio estadístico (en bits/símbolo):

$$H(X) \triangleq \sum_{i=1}^{M} P_i I_i = \sum_{i=1}^{M} P_i \log \frac{1}{P_i}$$

denominada también entropía (término tomado por Shannon de la Mecánica Estadística)

5) Entropía y velocidad de la información

- Cuando la fuente transmite una secuencia de n símbolos ($n \gg 1$), el total de información transferida es aproximadamente $nH(X)$bits
- Si la fuente genera r símbolos por segundo, el tiempo que toma la secuencia anterior es n/r segundos
- Por lo tanto, la velocidad de la información promedio en bits/segundo es:

$$\frac{nH(X)}{n/r} = rH(X)$$

- Se define la velocidad de la información R en bits/segundo:

$$R \triangleq rH(X)$$

- Shannon afirmó que la información de cualquier DMS puede ser codificada en dígitos binarios y transmitida a la velocidad f_b binits/segundo

$$f_b \geq R$$

5) Entropía y velocidad de la información

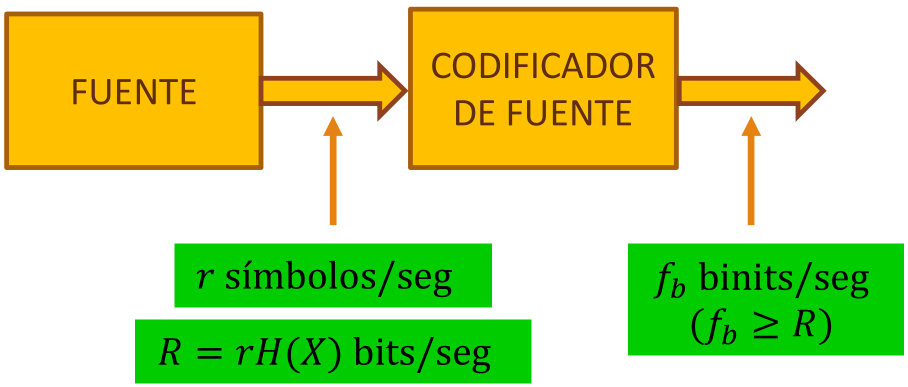
- El valor de $H(X)$ cae dentro de los siguientes límites:

$$0 \leq H(X) \leq \log M$$

- El límite inferior se obtiene cuando uno de los símbolos tiene $P_j = 1$, mientras que $P_i = 0$, para $i \neq j$, de modo que la fuente emite siempre el mismo símbolo (no hay incertidumbre)

- El límite superior ocurre cuando se tiene máxima incertidumbre, es decir, cuando todos los símbolos son igualmente probables $P_i = 1/M, \forall i$

Resumiendo



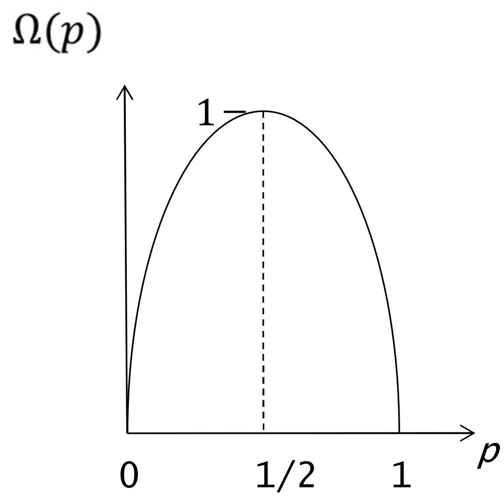
FUENTE
CODIFICADOR DE FUENTE
r símbolos/seg
$R = rH(X)$ bits/seg
f_b binits/seg
$(f_b \geq R)$

6) Fuente binaria (M=2) y fuente M-aria

Caso binario: 2 mensajes (M=2)

- 2 mensajes (M=2), con probabilidades: $P_1 = p, \quad P_2 = 1 - p$
- Su entropía: $H(X) = \Omega(p) \triangleq p \log \frac{1}{p} + (1-p) \log \frac{1}{(1-p)}$
- Se muestra $\Omega(p)$, en donde el máximo valor ocurre para $p = (1-p) = 1/2$, en donde $H(X) = 1 \text{ bit/símbolo}$:

$H(X) = \Omega(p)$ decrece monotónicamente hasta cero cuando $p \rightarrow 1$o cuando $(1-p) \rightarrow 1$



6) Fuente binaria (M=2) y fuente M-aria

Caso M-ario

Lectura opcional

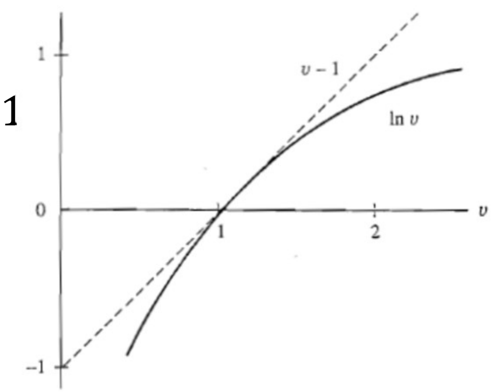
- Demostremos que se cumplen los valores extremos en $0 \leq H(X) \leq \log M$
- La demostración del límite inferior para el caso M-ario es sencilla si notamos que $v \log 1/v \rightarrow 0$ cuando $v \rightarrow 0$
- La demostración del límite superior $H(X) \leq M$ es simple también: se define un conjunto de probabilidades $Q_1, Q_2, \ldots, Q_M$ y reemplazamos $\log(1/P_i)$ por $\log(Q_i \,/\, P_i)$ tal que:

$$\sum_i P_i \log \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_i P_i \ln \frac{Q_i}{P_i} \quad \left(\log_2 v = \frac{\ln v}{\ln 2}\right)$$

en donde la sumatoria va de 1 a M. Considerando la desigualdad: $\ln v \leq v - 1$

y además con:

$$v = \frac{P_i}{Q_i}$$



6) Fuente binaria (M=2) y fuente M-aria

Caso M-ario

Lectura opcional

- Luego:

$$\sum_i P_i \ln \frac{Q_i}{P_i} \leq \sum_i P_i \left(\frac{Q_i}{P_i} - 1\right) = \left(\sum_i Q_i - \sum_i P_i\right) = \left(\sum_i Q_i - 1\right) = 0$$

$$\therefore \sum_i P_i \log \frac{Q_i}{P_i} = \frac{1}{\ln 2} \sum_i P_i \ln \frac{Q_i}{P_i} \leq 0$$

en donde $\sum_i Q_i = 1$

- Finalmente, haciendo $Q_i = 1/M$ resulta:

$$\sum_i P_i \log \frac{1}{P_i M} = \sum_i P_i \log \frac{1}{P_i} - \sum_i P_i \log M$$
$$= H(X) - \log M \leq 0$$

- De donde: $H(X) \leq \log M$
- La igualdad se cumple solamente cuando $P_i = 1/M$, tal que $v = Q_i/P_i = 1/MP_i = 1$, para todo i

Ejemplo

- Suponga que una fuente emite símbolos a la velocidad $r = 2000$ símbolos/segundo, seleccionados de un alfabeto de tamaño $M = 4$, con distribución de probabilidades y auto-información tal como se indica en la tabla:

x_i	P_i	I_i
A	1/2	1
B	1/4	2
C	1/8	3
D	1/8	3

- La entropía de la fuente resulta:

$$H(X) = (1/2) \cdot 1 + (1/4) \cdot 2 + (1/8) \cdot 3 + (1/8) \cdot 3 = 1{,}75 \text{ bits/símbolo}$$

La velocidad de la información resulta:

$$R = 2000 \times 1{,}75 = 3500 \text{ bits/segundo}$$

Conclusiones