Curso:
EL271 Codificación de Fuente y de Canal
Unidad 2: CODIFICACIÓN DE BLOQUE
Semana 6, Sesión 6

CARLOS VALDEZ VELÁSQUEZ-LÓPEZ, DR. ING

2023-02

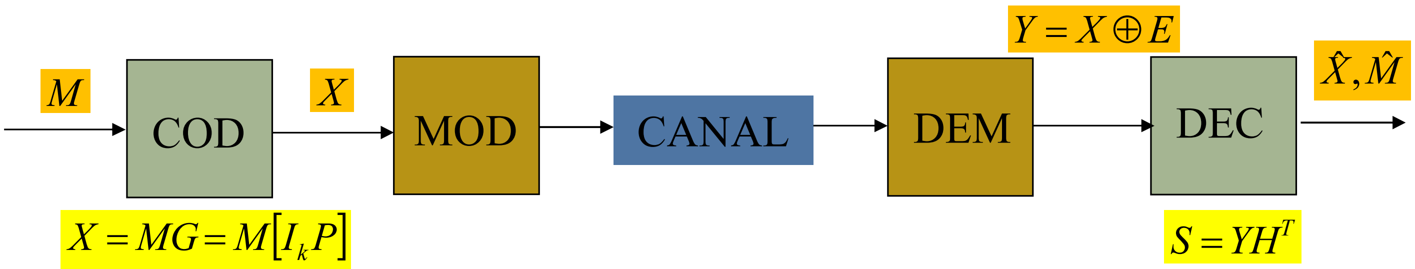
Logro de la sesión

Al finalizar la sesión, el alumno explica la decodificación mediante la técnica del síndrome y la probabilidad de error en codificación de bloque

Contenido

1) Decodificación mediante la técnica del síndrome
2) Probabilidad de error en codificación de bloque
3) Ejercicios

1) Decodificación mediante la técnica del síndrome



- El decodificador recibe el vector Y de parte del demodulador, el cual en general, contiene errores $Y \neq X$
- En el cálculo del vector síndrome S intervienen Y y H^T (no el vector de error verdadero E)
- Según el resultado de S, se obtiene el mejor estimado de E: $\hat{E}$ (de la tabla de comparación S vs. $\hat{E}$)
- Luego, dado que $Y = X \oplus E, \quad Y \oplus E = X \oplus E \oplus E = X$
- Entonces, puede obtenerse el estimado de X: $Y \oplus \hat{E} = \hat{X}$
- De donde puede extraerse el estimado de M: $\hat{M}$

1) Decodificación mediante la técnica del síndrome

- Sea Y el vector recibido cuando se transmitió el vector X. Cualquier error de transmisión da lugar a que $Y \neq X$. El decodificador detecta o corrige errores en Y mediante el conocimiento de los vectores de código.
- Una forma directa de detección es por comparación de Y con los vectores de código. Requiere almacenar los 2^k vectores de código y realizar el mismo número de comparaciones.
- Una forma más práctica involucra la información de chequeo de paridad de la sub-matriz P. Sea H la matriz $q \times n$ de chequeo de paridad tal que:

$$H^T = \begin{bmatrix} P \\ I_q \end{bmatrix}$$

1) Decodificación mediante la técnica del síndrome

- H^T es la matriz transpuesta de H y Iq es la matriz identidad de tamaño $q \times q$
- La matriz H^T tiene la siguiente importante propiedad:

$$XH^T = (000....0)$$

- Lo cual se cumple siempre que X pertenezca al conjunto de los vectores de código. Si Y no es un vector de código, YH^T contiene al menos un elemento diferente a 0. Se define el vector S (q elementos) como el síndrome, tal que:

$$S = YH^T$$

- Si todos los elementos de S son iguales a cero, $Y=X$ o Y se ha convertido en un vector de código, siendo los errores indetectables.
- Este esquema puede servir para detección de errores solamente, pero también es posible la corrección de errores utilizando el síndrome S.

1) Decodificación mediante la técnica del síndrome

- Se define el vector *E* (n elementos) cuyos elementos no nulos indican la posición de los errores en *Y*. Por ejemplo:

$$X = (10110), \quad Y = (10011), \quad E = (00101)$$

- En general:

$$Y = X \oplus E, \quad X = Y \oplus E, \quad S = (X \oplus E)H^T$$
$$S = XH^T \oplus EH^T = EH^T$$

- Sin embargo, no es posible encontrar una solución única de *E*.
- Del ejemplo anterior, código de Hamming (7,4):

$$[100] = [e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 e_7] \begin{bmatrix} 101 \\ 111 \\ 110 \\ 011 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} = [e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus e_5, e_2 \oplus e_3 \oplus e_4 \oplus e_6, e_1 \oplus e_2 \oplus e_4 \oplus e_7]$$

1) Decodificación mediante la técnica del síndrome

Hay **2^q posibles síndromes** producidos por los **2^n posibles vectores de error** incluyendo el vector de error nulo

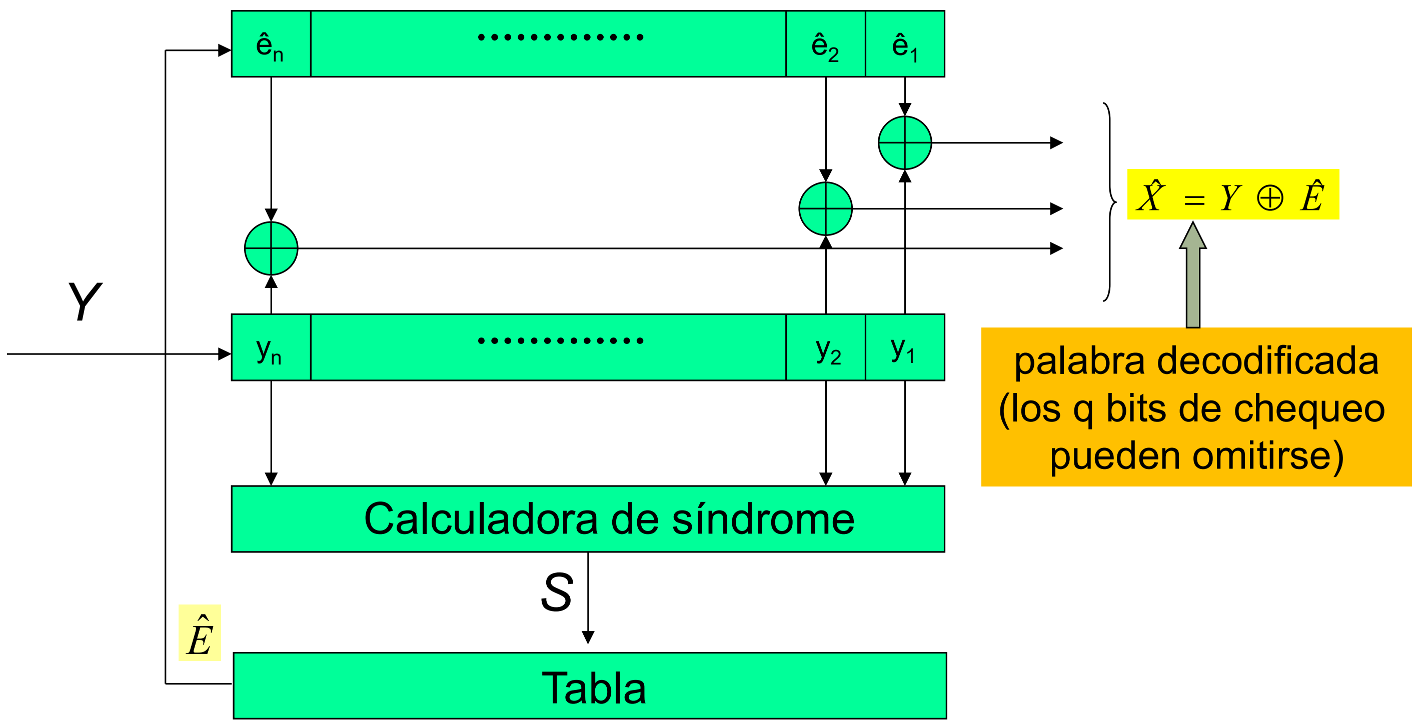
Sólo **es posible corregir 2^q-1** patrones de error con uno o más errores (**de los 2^n-1 posibles**), el resto de patrones de error no pueden corregirse

El **decodificador** debe diseñarse de modo que pueda **corregir los 2^q-1 patrones de error más probables**, es decir con menor número de errores

Tal estrategia de decodificación se conoce como de **máxima certidumbre** (**maximum likelihood**), siendo óptima en el sentido que minimiza la probabilidad de error

Es **equivalente a escoger el vector de código con menor distancia de Hamming** respecto al vector recibido

Decodificador de tabla de comparación (table look-up)



Síndromes del código de Hamming (7,4)

S	Ê
000	0000000
101	1000000
111	0100000
110	0010000
011	0001000
100	0000100
010	0000010
001	0000001

- Sin embargo, en el caso de 2 errores, por ejemplo:

$$E = (1000010)$$

- El decodificador calcula:

$$S = YH^T = EH^T = (111)$$

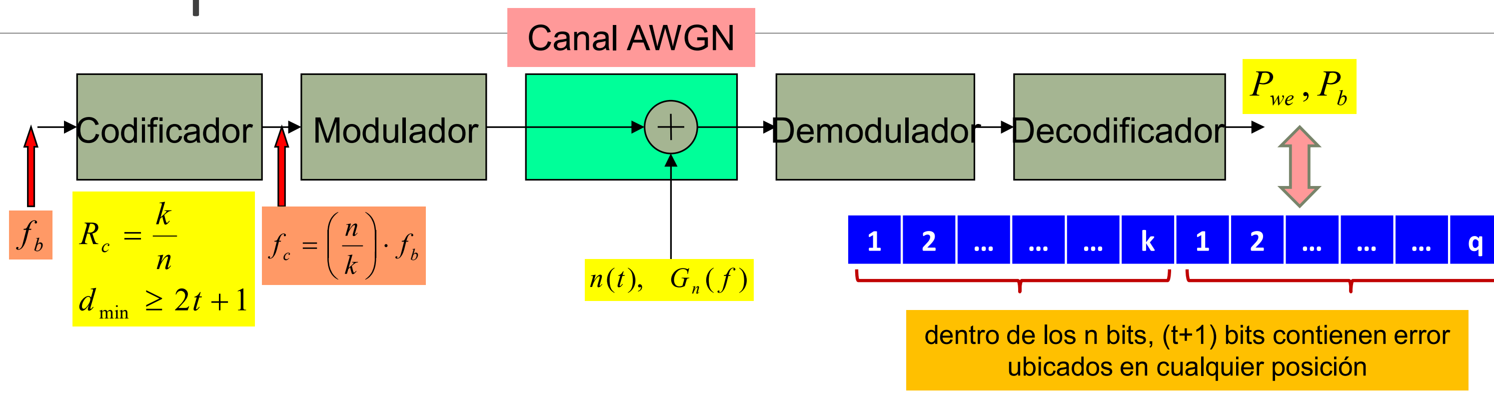
- De acuerdo a la tabla anterior:

$$\hat{E} = (0100000)$$

- Con lo cual se tendrán finalmente 3 errores: los 2 de transmisión, y el error introducido por el decodificador al sumar *Y* y $\hat{E}$

- Cuando los **errores múltiples** son frecuentes, **se requiere un código más potente**, por ejemplo, el **código de Hamming extendido**

2) Probabilidad de error en codificación de bloque



- Del total de *(t+1)* bits errados en una palabra erradano corregida, una parte son bits de mensaje y otra bits de redundancia
- ¿Cómo se distribuyen (nos interesa la parte de mensaje)?

$$\underbrace{\frac{k}{n}(t+1)}_{\text{bits de mensaje errados}} + \underbrace{\frac{q}{n}(t+1)}_{\text{bits redundantes errados}} = \underbrace{t+1}_{\text{total de bits errados}}$$

- En una palabra no corregida hay $\frac{k}{n}(t+1)$ bits de mensaje errados

2) Probabilidad de error en codificación de bloque

- Se desea obtener la probabilidad de error $P_{b,}$ en la salida del demodulador, dada por.

$$P_b = \frac{\text{Número de bits errados}}{\text{Número de bits transmitidos}}$$

- Número de bits errados:

a) Primero calculamos cuántas palabras erradas no corregidas se producen cuando se transmiten N (N>>1) bloques de k bit

b) Si la probabilidad de ocurrencia de la palabra errada no corregida es P_{we} y se transmitieron N bloques, entonces se produjeron NP_{we} palabras no corregidas

c) Si cada palabra no corregida tiene $\frac{k}{n}(t+1)$ bits de mensaje errados, entonces el número total de bits errados es:

$$\frac{k}{n}(t+1)\,NP_{we}$$

2) Probabilidad de error en codificación de bloque

- El número de bits transmitidos es Nk, entonces:

$$P_b = \frac{\text{Número de bits errados}}{\text{Número de bits transmitidos}} = \frac{\left(\frac{k}{n}\right)(t+1)NP_{we}}{Nk} = \frac{(t+1)}{n}P_{we}$$

- En cuanto a P_{we}:

$$P_{we} = \sum_{i=t+1}^{n} P(i,n) \approx P(t+1,n) = \binom{n}{t+1}\alpha^{t+1}(1-\alpha)^{n-t-1} \approx \binom{n}{t+1}\alpha^{t+1}$$

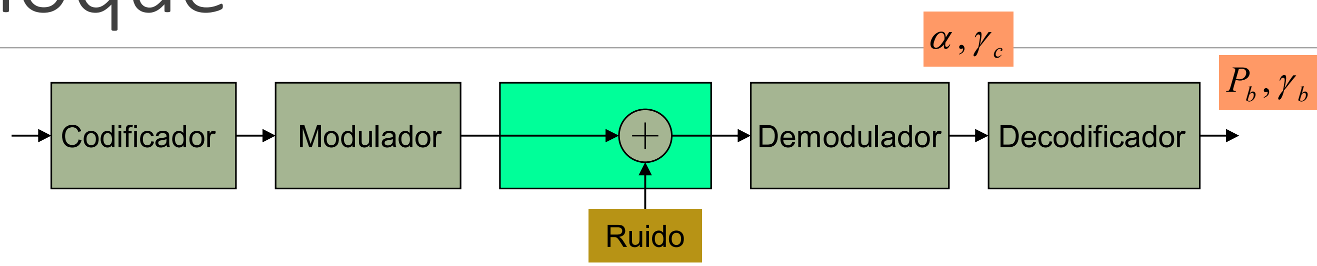
- Reemplazando:

$$P_b = \frac{(t+1)}{n}P_{we} \approx \frac{(t+1)}{n}\binom{n}{t+1}\alpha^{t+1} = \frac{(t+1)}{n}\cdot\frac{n(n-1)!}{(t+1)t!(n-t-1)!}\cdot\alpha^{t+1}$$

$$P_b \approx \binom{n-1}{t}\alpha^{t+1}$$

- En cuanto a α, es la probabilidad de error de bit (individual) a la salida del demodulador, por lo que su expresión depende del modulador empleado

2) Probabilidad de error en codificación de bloque



- Por ejemplo, si el modulador es PSK binario:

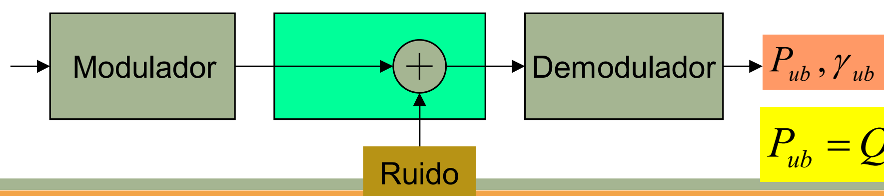
$$\alpha = Q\left(\sqrt{2\gamma_c}\right) = Q\left(\sqrt{2R_c\gamma_b}\right), \qquad \gamma_c = \frac{E_c}{\eta} = \left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{E_b}{\eta} = R_c\gamma_b$$

$$P_b \approx \left[Q\left(\sqrt{2R_c\gamma_b}\right)\right]^{t+1}, \qquad P_{ub} = Q\left(\sqrt{2\gamma_{ub}}\right)$$

γ_c: relación señal a ruido en la salida del demodulador, del sistema codificado

γ_b: relación señal a ruido en la salida del decodificador

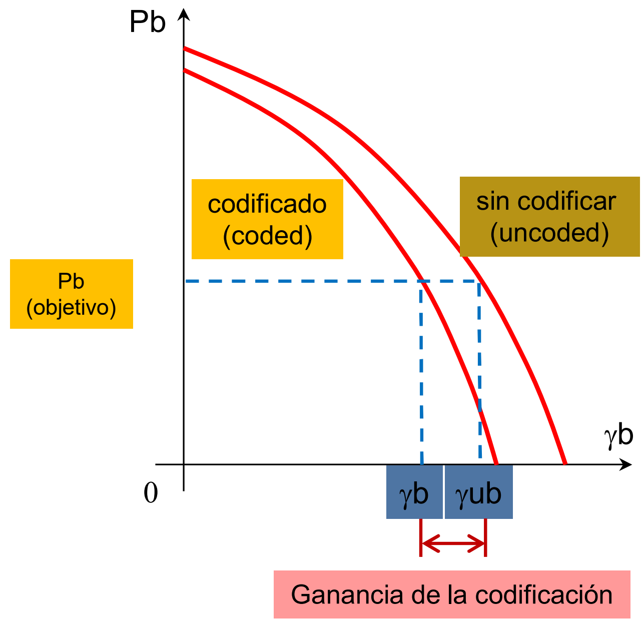
- En el caso del sistema sin codificar:



$$P_{ub} = Q\left(\sqrt{2\gamma_{ub}}\right)$$

γ_{ub}: relación señal a ruido en la salida del demodulador, del sistema no codificado

Comparación entre el sistema codificado y el no codificado



$$Ganancia\,(dB) = 10\log_{10}\left(\frac{\gamma_{ub}}{\gamma_b}\right)$$

Función Q

Table 1: Values of $Q(x)$ for $0 \leq x \leq 9$

x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$	x	$Q(x)$
0.00	0.5	2.30	0.010724	4.55	2.6823×10^{-6}	6.80	5.231×10^{-12}
0.05	0.48006	2.35	0.0093867	4.60	2.1125×10^{-6}	6.85	3.6925×10^{-12}
0.10	0.46017	2.40	0.0081975	4.65	1.6597×10^{-6}	6.90	2.6001×10^{-12}
0.15	0.44038	2.45	0.0071428	4.70	1.3008×10^{-6}	6.95	1.8264×10^{-12}
0.20	0.42074	2.50	0.0062097	4.75	1.0171×10^{-6}	7.00	1.2798×10^{-12}
0.25	0.40129	2.55	0.0053861	4.80	7.9333×10^{-7}	7.05	8.9459×10^{-13}
0.30	0.38209	2.60	0.0046612	4.85	6.1731×10^{-7}	7.10	6.2378×10^{-13}
0.35	0.36317	2.65	0.0040246	4.90	4.7918×10^{-7}	7.15	4.3389×10^{-13}
0.40	0.34458	2.70	0.003467	4.95	3.7107×10^{-7}	7.20	3.0106×10^{-13}
0.45	0.32636	2.75	0.0029798	5.00	2.8665×10^{-7}	7.25	2.0839×10^{-13}
0.50	0.30854	2.80	0.0025551	5.05	2.2091×10^{-7}	7.30	1.4388×10^{-13}
0.55	0.29116	2.85	0.002186	5.10	1.6983×10^{-7}	7.35	9.9103×10^{-14}
0.60	0.27425	2.90	0.0018658	5.15	1.3024×10^{-7}	7.40	6.8092×10^{-14}
0.65	0.25785	2.95	0.0015889	5.20	9.9644×10^{-8}	7.45	4.667×10^{-14}
0.70	0.24196	3.00	0.0013499	5.25	7.605×10^{-8}	7.50	3.1909×10^{-14}
0.75	0.22663	3.05	0.0011442	5.30	5.7901×10^{-8}	7.55	2.1763×10^{-14}
0.80	0.21186	3.10	0.0009676	5.35	4.3977×10^{-8}	7.60	1.4807×10^{-14}
0.85	0.19766	3.15	0.00081635	5.40	3.332×10^{-8}	7.65	1.0049×10^{-14}
0.90	0.18406	3.20	0.00068714	5.45	2.5185×10^{-8}	7.70	6.8033×10^{-15}
0.95	0.17106	3.25	0.00057703	5.50	1.899×10^{-8}	7.75	4.5946×10^{-15}
1.00	0.15866	3.30	0.00048342	5.55	1.4283×10^{-8}	7.80	3.0954×10^{-15}
1.05	0.14686	3.35	0.00040406	5.60	1.0718×10^{-8}	7.85	2.0802×10^{-15}
1.10	0.13567	3.40	0.00033693	5.65	8.0224×10^{-9}	7.90	1.3945×10^{-15}
1.15	0.12507	3.45	0.00028029	5.70	5.9904×10^{-9}	7.95	9.3256×10^{-16}
1.20	0.11507	3.50	0.00023263	5.75	4.4622×10^{-9}	8.00	6.221×10^{-16}
1.25	0.10565	3.55	0.00019262	5.80	3.3157×10^{-9}	8.05	4.1397×10^{-16}
1.30	0.0968	3.60	0.00015911	5.85	2.4579×10^{-9}	8.10	2.748×10^{-16}
1.35	0.088508	3.65	0.00013112	5.90	1.8175×10^{-9}	8.15	1.8196×10^{-16}
1.40	0.080757	3.70	0.0001078	5.95	1.3407×10^{-9}	8.20	1.2019×10^{-16}
1.45	0.073529	3.75	8.8417×10^{-5}	6.00	9.8659×10^{-10}	8.25	7.9197×10^{-17}
1.50	0.066807	3.80	7.2348×10^{-5}	6.05	7.2423×10^{-10}	8.30	5.2056×10^{-17}
1.55	0.060571	3.85	5.9059×10^{-5}	6.10	5.3034×10^{-10}	8.35	3.4131×10^{-17}
1.60	0.054799	3.90	4.8096×10^{-5}	6.15	3.8741×10^{-10}	8.40	2.2324×10^{-17}
1.65	0.049471	3.95	3.9076×10^{-5}	6.20	2.8232×10^{-10}	8.45	1.4565×10^{-17}
1.70	0.044565	4.00	3.1671×10^{-5}	6.25	2.0523×10^{-10}	8.50	9.4795×10^{-18}
1.75	0.040059	4.05	2.5609×10^{-5}	6.30	1.4882×10^{-10}	8.55	6.1544×10^{-18}
1.80	0.03593	4.10	2.0658×10^{-5}	6.35	1.0766×10^{-10}	8.60	3.9858×10^{-18}
1.85	0.032157	4.15	1.6624×10^{-5}	6.40	7.7688×10^{-11}	8.65	2.575×10^{-18}
1.90	0.028717	4.20	1.3346×10^{-5}	6.45	5.5925×10^{-11}	8.70	1.6594×10^{-18}
1.95	0.025588	4.25	1.0689×10^{-5}	6.50	4.016×10^{-11}	8.75	1.0668×10^{-18}
2.00	0.02275	4.30	8.5399×10^{-6}	6.55	2.8769×10^{-11}	8.80	6.8408×10^{-19}
2.05	0.020182	4.35	6.8069×10^{-6}	6.60	2.0558×10^{-11}	8.85	4.376×10^{-19}
2.10	0.017864	4.40	5.4125×10^{-6}	6.65	1.4655×10^{-11}	8.90	2.7923×10^{-19}
2.15	0.015778	4.45	4.2935×10^{-6}	6.70	1.0421×10^{-11}	8.95	1.7774×10^{-19}
2.20	0.013903	4.50	3.3977×10^{-6}	6.75	7.3923×10^{-12}	9.00	1.1286×10^{-19}
2.25	0.012224						

Ejercicios

1) Calcule P_b del codificador de Hamming (7,4) si γ_c = 12 dB, si se emplea un modulador ASK binario
2) Obtenga P_{ub} si γ_{ub} = 12 dB, si se emplea un modulador ASK binario
3) Calcule la ganancia de codificación