2^0 Exercício Programa de PMR 3401
Data de entrega: A ser divulgada.

Método de Diferenças Finitas (MDF)

Ventos laterais fortes podem arrancar telhados de construções casas, silos, tendas ou hangares como da figura 1. Diversos exemplos de colapso estrutural causados por vento podem ser encontrados em video:
https://www.youtube.com/watch?v=bcnR4Y2uDDs
https://www.youtube.com/watch?v=EXYt8nXcL3s

Figura 1: Fotografia de um Hangar.

O tema deste exercício programa é uma análise do esforço gerado pelo vento no telhado de uma construção. Partindo de um modelo bidimensional da construção, conforme ilustrado na figura 2 onde é definido o domínio do problema, pede-se a simulação do escoamento de ar em volta da estrutura. Considerando que o escoamento seja irrotacional, invíscido, em regime permanente, de ar como fluido compressível e desconsiderando efeitos gravitacionais, obtém-se a equação de escoamento potencial compressível [1]:

$$(1 - M_x^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x} + (1 - M_y^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 y} - 2M_x M_y \frac{\partial^2\Phi}{\partial y \partial x} = 0 \qquad (1)$$

onde:

$$M_x = \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad e \qquad M_y = \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial y} \qquad (2)$$

são as componentes do número de Mach e c a velocidade do som local e

$$\nabla\Phi = \mathbf{u} = \mathrm{u}\vec{\imath} + \mathrm{v}\vec{\jmath} \qquad (3)$$

é o gradiente do potencial de velocidade Φ. Para escoamentos subsonicos com número de Mach desprezível ($M_x \to 0\ e\ M_y \to 0$), temos uma simplificação que resulta na eq. (4):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 y} = 0 \qquad (4)$$

A imposição das condiçoes de contorno é mais simples utilizando a função de corrente ψ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\mathrm{v} \qquad e \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u \tag{5}$$

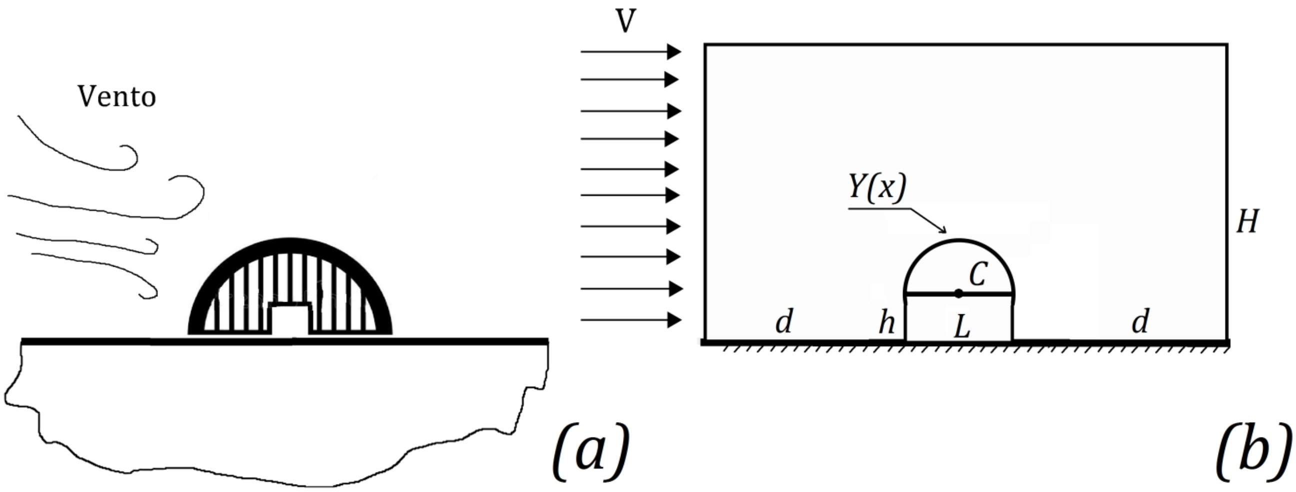

Figura 2: (a) Ilustração da situação real e (b) Domínio do problema.

Portanto, **ao invés de resolver** (4), pode-se resolver a equação :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = 0 \tag{6}$$

utilizando o método das diferenças finitas (MDF) com as condições de contorno apresentadas na figura 3, onde V é a velocidade do vento. A partir do campo de velocidade **u** pode-se obter a pressão utilizando a equação de Bernouli:

$$\frac{\left(\sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2}\right)^2}{2} + \frac{\gamma_{\mathrm{ar}}}{\gamma_{\mathrm{ar}} - 1}\frac{p(x,y)}{\rho} = \mathrm{cte} \tag{7}$$

Considerando pressão atmosférica dentro do hangar, temos que a variação de pressão no domínio é:

$$p(x,y) - \mathrm{p_{atm}} = \rho\frac{\gamma_{\mathrm{ar}} - 1}{\gamma_{\mathrm{ar}}}\left(\frac{(0)^2}{2} - \frac{\left(\sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2}\right)^2}{2}\right) \tag{8}$$

Após determinar o campo de velocidade pode-se calcular a distribuição de temperaturas utilizando a expressão:

$$k\nabla^2 T - \rho c_p \boldsymbol{u}.\nabla \mathrm{T} = 0 \tag{9}$$

O fluxo de calor $\vec{\mathbf{Q}}$ *(x, y)* (em W/m^2) que flui através das superfícies do prédio é dado por:

$$\left.\vec{\mathbf{Q}}\right|_{prédio} = -k\frac{\partial T}{\partial n}\vec{n} = -\left(k\nabla T.\vec{n}\right)\vec{n}; \tag{10}$$

onde $\vec{n}$ é o versor normal a parede ou telhado do prédio **direcionado para fora**. Assim a quantidade de calor total (unidade *W*) trocada pela área *A* do prédio com o ar é:

$$q = \int_A \vec{\mathbf{Q}}.\vec{\mathbf{n}}dA = -\int_A k\frac{\partial T}{\partial n}dA = -\int_A k\nabla T.\vec{n}dA \tag{11}$$

Considere:

- Velocidade do vento: V=100km/h.
- Dimensões e posição da estrutura: h=3m, d=5h, L=2h e H=8h.

Propriedades do ar: $\rho = 1{,}25\ kg/m^3$, $\gamma_{ar} = 1{,}4$, $k_{ar} = 0{,}026\ W/(m.K)$ e $c_{p_{ar}} = 1002\ J/(kg.K)$.

- Comprimento da estrutura: 60 metros.
- Temperaturas: $T_{dentro} = 40°C$ e $T_{fora} = 20°C$

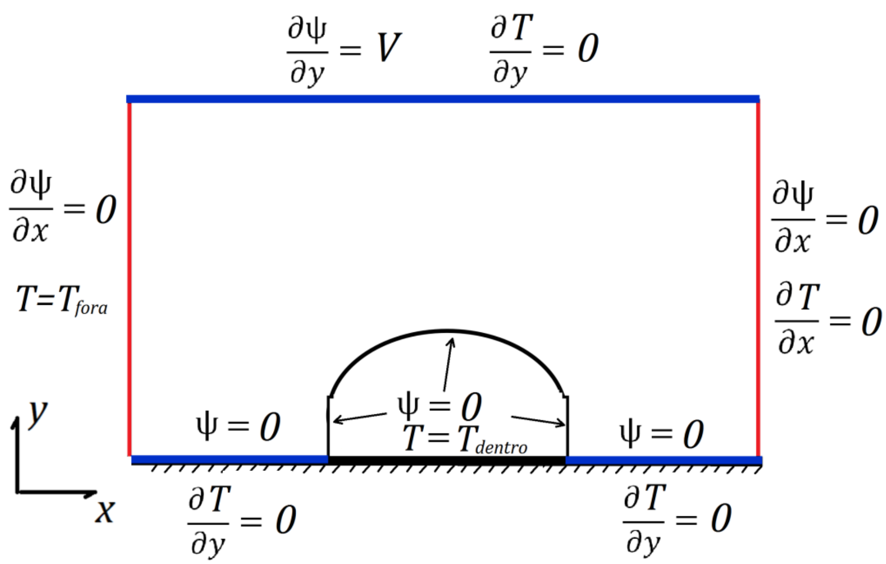

Figura 3: Malha e condições de contorno.

Com uma malha quadrada adequada, ou seja $\Delta x = \Delta y$, implemente o método de "sobrerrelaxação" para a solução do sistema linear de equações resultante da aplicação do MDF (utilize λ=1,85 e e tolerância de convergência de 0,01). Verifique a influência da discretização (Δx) sobre a solução (explique como chegou no valor de Δx utilizado). Utilize diferenças finitas para contornos irregulares para os nós mais próximos do contorno do telhado.

PARTE I: Considerando um telhado com topo circular de raio L/2 , pede-se:

a) Plotar a função de corrente ψ do escoamento;

b) Plotar os vetores de velocidade absoluta do escoamento;

c) Plotar a variação de pressão $(p(x,y) - p_{atm})$ no domínio;

d) Plotar a variação de pressão $(p(x,y) - p_{atm})$ ao longo do telhado, explicitando seu valor mínimo;

e) Calcular a força vertical resultante que atua no telhado.

PARTE II: Com os resultados da parte I, calcule:

a) A distribuição de temperatura no ar (em °C).

b) A taxa de calor retirada do prédio.

A solução da eq. (9) pelo MDF se torna instável com uso de diferenças finitas centrais para esses valores de constantes de propriedades do ar. Isto ocorre devido a dominância do termo convectivo $\rho c_p \boldsymbol{u}.\nabla$T na equação. Uma maneira de resolver este problema é utilizar diferenças finitas para trás. Onde para trás, no caso, depende da direção do fluxo de ar, isto é:

- Se u>0 deve ser utilizado: $\partial_x T = (T_{ij} - T_{i-1j})/\Delta x \;\; + O(\Delta x)$
- Se u<0 deve ser utilizado: $\partial_x T = (T_{i+1j} - T_{ij})/\Delta x \;\; + O(\Delta x)$
- Se v>0 deve ser utilizado: $\partial_y T = (T_{ij} - T_{i-1j})/\Delta y \;\; + O(\Delta y)$
- Se v<0 deve ser utilizado: $\partial_y T = (T_{i+1j} - T_{ij})/\Delta y \;\; + O(\Delta y)$

Neste item use sobre-relaxação de 1,15 e e tolerância de convergência de 0,01 com $\Delta y = \Delta x = h/8$.

Sugestão de implementação: Crie um grid cartesiano e atribua $\psi = 0$ e $T = T_{dentro}$ se $y \leq Y(x)$ onde a altura do telhado é dada por $Y(x) = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(x - d - \frac{L}{2}\right)^2} + h$ para $d \leq \; x \leq d + L$.

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Os trabalhos podem ser feitos em grupos de no máximo dois alunos ou individualmente.
Os resultados devem ser apresentados da seguinte forma:

a) Inicialmente apresente todos os equacionamentos analíticos e numéricos do problema a serem implementados no SCILAB (ou MATLAB).

b) NÃO será aceita a utilização de comandos prontos do SCILAB (ou MATLAB) para a solução da equação de derivadas parciais acima.

c) Todos os resultados do tipo *f(x,y)* devem ser plotados usando funções do SCILAB (ou MATLAB) como *mesh*, *contour*, *quiver, surf*, etc. NÃO será aceita a simples apresentação de tabelas ou a listagem dos valores da função nos nós da malha. Para todas as figuras, coloque título, legendas e unidades nos gráficos. Os gráficos devem ser legíveis e de fácil leitura.

d) NÃO use os comandos de **manipulação simbólica** do SCILAB (ou MATLAB).

e) Entregue as listagens dos arquivos *.sci (ou *.m), os quais devem estar decentemente comentados.

f) Entregue o relatório impresso quando as atividades presenciais da USP retornarem à normalidade. NÃO será aceita a entrega do relatório em disquete ou por e-mail. O relatório deve ser organizado em seções, os resultados devem ser discutidos e apresentados na sequência descrita neste EP, e no final do relatório deve incluir uma conclusão.

g) Qualquer discussão ou comparação deve ser acompanhada de gráficos e/ou outras indicações que o levou às conclusões.

h) O prazo final para entrega do relatório será informado depois, assim que a CG nos passar uma posição de como e quando serão feitas as avaliações com nota.

REFERENCIAS

[1] Anderson, John David. *Modern compressible flow: with historical perspective*. Vol. 12. New York: McGraw-Hill, 1990.