EP2
MAP3121

Alessandro Brugnera Silva

Julho 2021

1 Introdução

O estudo dos autovetores e autovalores é um dos ramos mais importantes da álgebra linear e do cálculo numérico, contendo diversos algoritmos, técnicas e teoremas para encontrar resultados exatos e numéricos. Um dos principais dos autovalores e vetores é a resolução de equações diferenciais ordinárias - que muitas vezes representam problemas físicos encontrados na natureza.
No presente relatório, será utilizada a transformação de Householder para encontrar uma matriz tridiagonal de uma matriz simétrica para posteriormente encontrar os autovalores e autovetores da matriz original e da tridiagonal, utilizando a rotação de Givens e decomposição QR.
Além disso utilizando essa abordagem matemática, o problema de vibração de treliças será estudado a partir das equações diferenciais ordinárias que representam o problema físico. As matrizes de rigidez e de massa serão montadas para uma treliça qualquer. E com outra abordagem matemática o problema será simplificado a encontrar autovalores e autovetores que representam frequências e modos de vibração, respectivamente, dos nós da treliça.

2 Modelagem

2.1 Autovalores e Autovetores

A transformação de Householder é uma aplicação linear que representa a reflexão de um vetor num hiperplano ou plano em R^3.
A reflexão do hiperplano pode ser representada como o vetor normal ao hiperplano, e esta reflexão de vetor x qualquer representa a transformação linear.
A equação principal da transformação é representada por:

$$H_w = I - 2\frac{ww^T}{ww} \tag{1}$$

Esta equação representa o método iterativo utilizado para encontrar n-2 matrizes H_w, com n = dimensão da matriz simétrica A. Com as matrizes H_w, pretende-se montar as seguintes matrizes:

$$A = H_w T H_w^T \tag{2}$$

A equação (1) pode ser mais facilmente computada utilizando produtos escalares, assim reduzindo um problema de quadrático $\mathcal{O}(n^2)$ para problemas lineares $\mathcal{O}(n)$.
Dessa maneira para zerar parte de cada coluna para criar a matriz a diagonal são usadas 2 formulas principais:

$$\alpha = -sinal(\alpha_{k+1,k})\sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} a_{i,k}^2} \tag{3}$$

$$r = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \alpha a_{k+1,k}}{2}} \tag{4}$$

Com k igual ao número da iteração sendo executada.

Com as matrizes T e A possuindo os mesmos autovalores, e H_w em conjunto com T para encontrar os autovetores. O algoritmo do EP1, é utilizado nas matrizes T e H_w, que estão prontas para serem decompostas.

2.2 Treliça

A treliça modelada é representada por nós concentrando toda a massa das barras, assim a matriz de massa que irá representar o problema será uma matriz diagonal devido as massas pontuais.
A ideia do problema é representar qualquer treliça representada por um arquivo de texto seguindo certos parâmetros como densidade, área e módulo de elasticidade fixos.
Também representando as barras de forma padronizada com os respectivos nós, tamanho e ângulo em relação à vertical.
A partir disso as matrizes de massa e rigidez são montadas, seguindo uma convenção que os deslocamentos e velocidades dos nós das barras são representados por um vetor que contém essas grandezas horizontais e verticais por pares. Ou seja o nó 1 tem o deslocamento horizontal na posição 1 do vetor de deslocamentos e o deslocamento vertical na posição 2 e assim por diante.

3 Resultados

3.1 Teste A

O teste A representa a tentativa de encontrar os autovetores e autovalores da matriz A 4x4.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz apresenta os autovalores: [7,2,-1,-2], o programa encontrou os valores [6.857099, 2, -1, -1.857099], o que apresenta uma grande proximidade. Além disso a matriz de autovetores é ortogonal, e a propriedade dos autovetores e autovalores $Av = \lambda v$ é respeitada dentro da margem de erro.

3.2 Teste B

O teste B representa a tentativa de encontrar os autovetores e autovalores da matriz A 20x20.

$$A = \begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Com n=20

A matriz apresentou uma média de diferença de 5e-08 dos 20 autovalores, o que apresenta uma grande proximidade. Além disso a matriz de autovetores é ortogonal, e a propriedade dos autovetores e autovalores $Av = \lambda v$ é respeitada dentro da margem de erro.

3.3 Teste C

Após a montagem das matrizes de rigidez e de massa, o problema se torna relativamente simples, partindo da equação:

$$\tilde{K} = M^{-\frac{1}{2}} K M^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Com isso a matriz $\tilde{K}$ se torna simétrica é pode ser submetida à transformação de Householder, com isso os autovalores representam as frequências de vibração e os autovetores representam os modos de vibração.
Os 5 menores autovalores apresentados na lista abaixo apresentam as 5 menores frequências de vibração e seus respectivos modos de vibração:

1. 4915.3 Hz
   [0.14 -0.03 0.16 -0.06 -0.02 -0.2 0.11 0.16 0.13 0.73 0.09 -0.1 -0.09 -0.11 0.21 0.08 0.08 -0.11 0.13 0.23 0.12 -0.18 0.18 0.26]
2. 14388.3 Hz
   [0.03 -0.09 -0.09 0.16 0.03 -0.04 0.1 0.27 -0.11 0.05 -0.22 -0.15 0.08 -0.07 0.29 0.14 -0.06 0.6 -0.18 0.31 0.21 0.09 -0.19 -0.31]
3. 26838.4 Hz
   [-0.09 0.14 0.37 0.12 0.03 0.54 0.29 -0.01 0.14 0.09 0.07 0.34 -0.08 0.15 0.19 0.08 -0.16 -0.06 -0.27 -0.05 0.15 0.02 -0.27 0.13]
4. 28065.3 Hz
   [-0.03 -0.1 -0.48 -0.03 0.05 0.09 0. -0.06 -0.09 -0.07 0.08 0.28 0.15 0.14 0.29 -0.36 -0. 0.1 -0. 0.12 0.28 0.17 0.24 0.44]
5. 42755.4 Hz
   [-0.15 0.1 0.38 0.13 0.03 -0.12 0.18 0.1 -0.09 -0.28 0.06 -0.45 -0.08 0.1 0.39 -0.33 -0.04 -0.11 0.31 -0.12 0.14 0.17 0.07 0.02]

4 Conclusão

Os métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias normalmente apresentam uma representação mais palpável de problemas matemáticos. Mas eles são dependentes de problemas matemáticos clássicos como dos autovetores e autovalores. Assim, a resolução destes problemas por métodos computacionais rápidos e estáveis é muito importante.

O método de Householder é muito interessante pois tem uma implementação razoavelmente simples e é muito estável na resolução de matrizes simétricas. Dessa forma muitos problemas físicos e matemáticos podem ser solucionados com a ajuda de Householder após a preparação de uma matriz simétrica.

5 Bibliografia

1. La Budde, C. Donald. "The Reduction of an Arbitrary Real Square Matrix to Tri-Diagonal Form Using Similarity Transformations." Mathematics of Computation, vol. 17, no. 84, 1963, pp. 433–437. JSTOR, www.jstor.org/stable/2004005. Accessed 20 July 2021.