EP2
MAP3121

Alessandro Brugnera Silva

Junho 2022

1 Introdução

Integrais são comuns em muitas áreas das ciências e das engenharias. Representam relações matemáticas de fenômenos reais, podendo ser relações temporais, dimensionais ou fenômenos multidimensionais.
Em muitas dessas áreas, é necessário resolução de integrais de funções não triviais, as quais muitas vezes requerem grande esforço computacional para resolução exata. Diversos métodos de integração numéricas realizam aproximações suficientemente precisas utilizando baixo custo computacional.
Para realizar integrais de forma mais eficiente, diversos métodos estão disponíveis e estão sendo estudados como Runge Kutta, Quadratura de Tanh-Sinh e a Quadratura Gaussiana [2]. No presente artigo será avaliada a utilização da quadratura gaussiana para o cálculo de integrais duplas de formas iteradas com limites variáveis (regiões em R^2 não retangulares).

2 Método

2.1 Quadratura Gaussiana

$$\int_a^b f(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) + E_n(f), \tag{1}$$

Na quadratura gaussiana busca-se encontrar os pesos (w_i) e nós (x_i) que minimizam ou até zeram o erro $E_n(f)$ para funções aproximadas por polinômios [1]. É possível encontrar valores exatos para polinômios de até certo grau utilizando-se o devido número de nós e pesos.

2.2 Regiões

$$\int_{-1}^{1} f(x)w(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) + E_n(f), \tag{2}$$

Os parâmetros para quadratura gaussiana de diversos pontos são aproximações para polinômios de grau 2n-1 usando n avaliações da função [3]. Porém estes parâmetros são calculados para intervalos de -1 a 1, o que tem de ser reajustado utilizando-se propriedades matemáticas da integral:

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(u)du \tag{3}$$

$$u = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2} \tag{4}$$

Utilizando polinômios de Lagrange [4], pode-se provar a propriedade dos polinômios de grau 2n-1 que podem ser perfeitamente aproximados com n nós.

2.2.1 Polinômios de quinto grau

A fórmula exata para polinômios de quinto grau pode ser obtida resolvendo-se a seguinte equação:

$$\int_{-1}^{1} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5\,\mathrm{d}x = 2a_0 + 2\frac{a_2}{3} + 2\frac{a_4}{5}$$

Chegando a:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5\,\mathrm{d}x &= w_1(a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4 + a_5x_1^5)\\ &+ w_2(a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + a_4x_2^4 + a_5x_2^5) + w_3(a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 + a_4x_3^4 + a_5x_3^5)\end{aligned}$$

Resultando em:

$$I = \int_{-1}^{1} f\,\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

2.3 Integrais Duplas

$$\int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dydx = \int_a^b \int_{-1}^1 f(u)dudx \tag{5}$$

Partindo da equação acima pode-se utilizar a Quadratura Gaussiana para resolver qualquer problema de integral dupla mesmo com a integral interna apresentando limites dependentes da variável externa. Para estipular o valor da variável da integral interna é utilizado o nó da variável externa. Desta forma a integral interna se torna uma função $F(x_i)$, como se mostra abaixo:

$$I = \sum_{i=1}^{n} w_i F(x_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_i, y_{ij}) \tag{6}$$

3 Resultados

3.1 Cálculo de Volume

Para os problemas desta seção, apresenta-se apenas erros de arrendodamento por que mesmo com n=6, as integrais que são representadas por polinômios de 3^o grau calculados com exatidão.

3.1.1 Cubo de Aresta 1

Para calcular este volume resolve-se a seguinte integral:

$$\int_0^1 \int_0^1 1\, dydx \tag{7}$$

Com os seguintes resultados:

n	6	8	10	Exato
Valor	1.0	1.0	1.0	1.0

3.1.2 Volume Tetraedro

Para calcular o volume do tetraedro com pontos: (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) resolve-se a seguinte integral:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} 1 - x - y \, dydx \tag{8}$$

Com os seguintes resultados:

n	6	8	10	Exato
Valor	1.0	1.0	1.0	1.0

3.2 Ordem de Cálculo

Propõe-se calcular a integral abaixo, integrando primeiro em x e depois integrando primeiro em y

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} 1 \, dydx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y}} 1 \, dxdy \tag{9}$$

Com os seguintes resultados:

n	6	8	10	Exato
Valor	0.666666666666666	0.666666666666667	0.666666666666667	2/3
Valor	0.6670464379156135	0.6668355801001765	0.6667560429365089	2/3

3.3 Superfícies

3.3.1 Volume abaixo de superfície

Volume abaixo da superfície $z = e^{\frac{y}{x}}$, delimitado por $0.1 < x < 0.5$ e $x^3 < y < x^2$.

$$\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^3} e^{\frac{y}{x}} \, dydx \tag{10}$$

Com os seguintes resultados:

n	6	8	10
Valor	3.75816503289671	3.7582492624394384	3.7582496332093873

3.3.2 Área de superfície

Área da superfície $z = e^{\frac{y}{x}}$, delimitado por $0.1 < x < 0.5$ e $x^3 < y < x^2$.

$$\int_{0.1}^{0.5} \int_{x^3}^{x^3} \sqrt{-(y\frac{e^{\frac{y}{x}}}{x^2})^2 + \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} + 1}\, dydx \tag{11}$$

Com os seguintes resultados:

n	6	8	10
Valor	0.0502920670016378	0.0502920674866776	0.05029206749196066

3.4 Sólidos de Revolução

3.4.1 Calota Esférica

Volume da calota esférico com h=1/4 e r=1.

$$\int_{0.75}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} 2\, dxdy \tag{12}$$

Com os seguintes resultados:

n	6	8	10	Exato
Valor	0.1799870791119152	0.17998707911191525	0.17998707911191525	0.17998707911191522

3.4.2 Sólido de Revolução genérico

Volume do sólido de revolução no eixo y delimitado pela região $0 < x < e^{-y^2}$ e $-1 < y < 1$

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{e^{-y^2}} 2\, dxdy \tag{13}$$

Com os seguintes resultados:

n	6	8	10
Valor	3.75816503289671	3.7582492624394384	3.7582496332093873

4 Conclusão

A resolução de integrais é essencial para qualquer software que utiliza modelagens matemáticas. Assim utilizar métodos eficientes e confiáveis é essencial. A quadratura gaussiana se mostrou eficiente para resolução de integrais duplas de forma iterada.
As simplificações apresentam resultados coerentes com os exemplos testados, com exceção do segundo método na seção 3.2, as quais apresentaram erros na casa de 10^{-4}. Aumentando-se o número de nós esse erro pode ser diminuído.
Em geral, nos problemas testados, o número de nós utilizado não influenciou o resultado final principalmente entre 8 e 10, com diferenças inferiores a 10^{-10}, em alguns casos houve uma pequena diferença entre 6 e 8.
A Quadratura Gaussiana se mostrou eficiente para resoluções de integrais duplas iteradas, reduzindo-se consideravelmente o custo computacional e apresentando resultados instantâneos nos problemas testados.

References

[1] Golub, Gene H., and John H. Welsch. "Calculation of Gauss quadrature rules." Mathematics of computation 23.106 (1969): 221-230.

[2] Hairer, Ernst, et al. "Geometric numerical integration." Oberwolfach Reports 3.1 (2006): 805-882.

[3] I. Bogaert, Iteration-free computation of Gauss–Legendre quadrature nodes and weights, SIAM J. Sci. Comput., 36 (2014), C1008–C1026.

[4] Stoer, Josef; Bulirsch, Roland (2002), Introduction to Numerical Analysis (3rd ed.), Springer, ISBN 978-0-387-95452-3