

EP2

MAP3122

Alessandro Brugnera Silva

Março 2021

1 Introdução

O estudo das equações diferenciais nos últimos séculos foi alvo de curiosidade por muitos matemáticos. Ora como sendo o foco a modelagem de algum sistema ora a sua análise puramente matemática. É muito difícil falar de equações diferenciais sem associá-las a um problema. Afinal, elas foram criadas para representar situações reais. Assim, os mais variados modelos se fundamentam em equações diferenciais.

A importância das equações diferenciais está no fato de que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como por exemplo o decaimento de substâncias radioativas, o comportamento de sistemas de massas e molas e o comportamento de circuitos elétricos. Agregado às equações ordinárias, modelos matemáticos aliados a modelos computacionais têm contribuído para o combate de doenças causadas pelo vírus HIV, por exemplo. Ou seja, a partir da análise de modelos presentes, onde os mais variados são fundamentados em equações diferenciais, pode-se descobrir ou prever como se comportarão no futuro.

2 Modelagem

A modelagem buscou comparar diferentes métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias e parâmetros de integração como passos de integração e variáveis da modelagem do problema em si. Os métodos de resolução foram:

1. Método de Euler Explícito
2. Método de Euler Implícito com refinamento utilizando método de Newton
3. Método de Runge-Kutta de 4^a ordem

Além disso a integração foi comparada com a função original para avaliar o erro da integração.

3 Resultados

3.1 Testes

3.1.1 Teste Runge-Kutta 4

O método de Runge-Kutta foi implementado para resolução de uma EDO $\in R^4$. Utilizando um domínio no tempo de 0 a 2. A integração foi feita com um número diferente de subintervalos 20, 40, 80, 160, 320. Resultando na seguinte relação entre os erros máximos de cada integração:

n_i/n_{i+1}	R
20-40	0.04171
40-80	0.5688
80-160	0.82080
160-320	0.94020
320-640	0.93368

Table 1: Relação entre o erro máximo de cada integração em relação a outra integração com outros subdomínios

Com o aumento do número de subdivisões do domínio, o erro da modelagem aumenta, com isso o sistema apresenta instabilidade com o aumento de passos. Abaixo o erro em função do tempo é apresentado:

comparação de resolução exata e utilizando método de Euler implícito, $n=500$

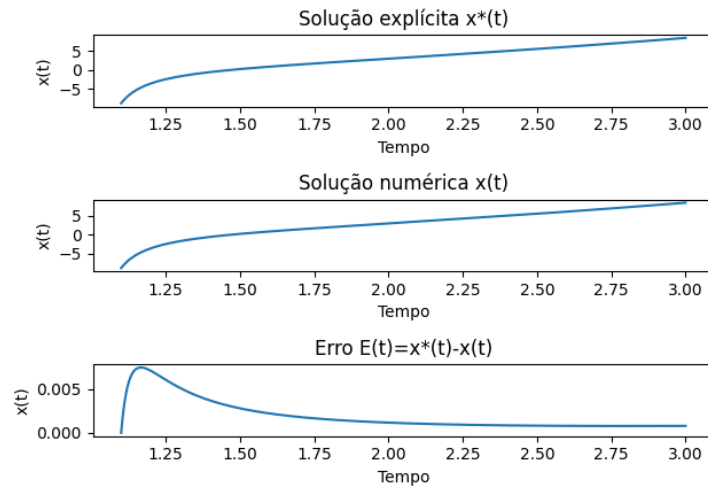


Figure 1: Comparação do erro de aproximação com diferentes divisões de domínio

3.1.2 Teste Euler implícito

Para a implementação do método de Euler implícito da equação $x'(t, x) = 2t + (x - t^2)^2$ e a comparação com a equação original $x^*(t) = t^2 + \frac{1}{1-t}$. Foi necessário a derivação implícita de $f(t, x) = x'(t, x)$ em x , com $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - t^2)$. A partir desta derivada o método de newton pôde ser aplicado a cada passo de Euler, com isso encontrando um valor de x mais próximo do real a cada passo (foram necessários de 2 a 4 passos de newton a cada iteração de Euler). A partir disso foi plotado a comparação da função gerada a partir de Euler, da função original e do erro $E(t) = |x^*(t) - x(t)|$:

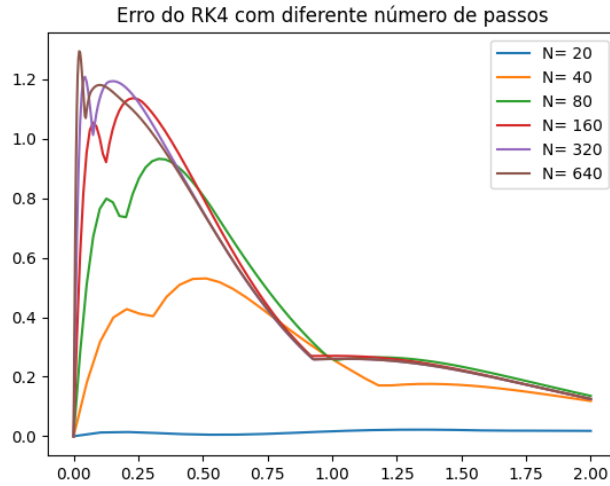


Figure 2: Comparação da integração de Euler implícito com refino de Newton e da função original

3.2 Modelo presa-predador

O modelo clássico presa=predador, conhecido como modelo de Lotka-Volterra, foi testado utilizando diferentes métodos de integração com parâmetro de modelagem da presa e do predador fixo. Com isso foi possível comparar os métodos de integração em si. Foram comparadas 2 populações, uma presa e um predador. Com as seguintes equações e parâmetros:

$$x'(t) = \lambda x(t) - \alpha x(t)y(t) \quad (1)$$

$$y'(t) = \beta x(t)y(t) - \gamma y(t) \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{2}{3}, \alpha = \frac{4}{3}, \beta = 1, \gamma = 1, x(0) = 1.5, y(0) = 1.5$$

3.2.1 Euler Explícito

A primeira modelagem foi feita dividindo o domínio $t=[0,10]$ em 5000 passos utilizando o método de Euler explícito, resultando nas seguintes populações ao longo do tempo e no seguinte retrato de fase:

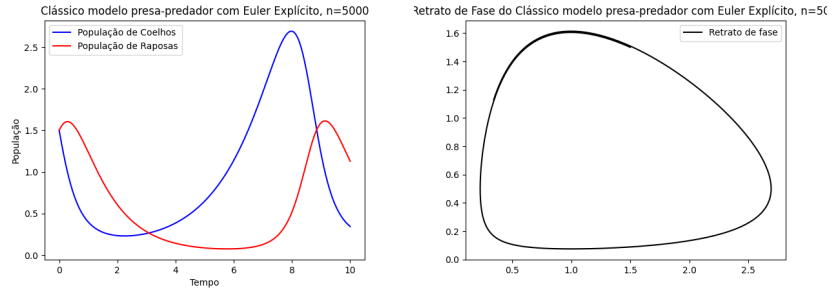


Figure 3: Integração do modelo presa-predador utilizando Euler explícito, com $n=5000$

3.2.2 Euler Implícito

A segunda modelagem foi feita dividindo o domínio $t=[0,10]$ em 500 e 5000 passos utilizando o método de Euler implícito, resultando nas seguintes populações ao longo do tempo e no seguinte retrato de fase:

E possível perceber que 500 passos são poucos para aproximação precisa, com isso o retrato de fase acaba não atingindo a estabilidade proposta.

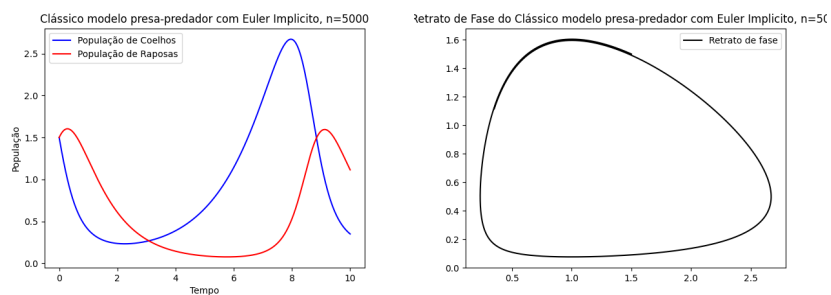


Figure 4: Integração do modelo presa-predador utilizando Euler implícito, com $n=5000$

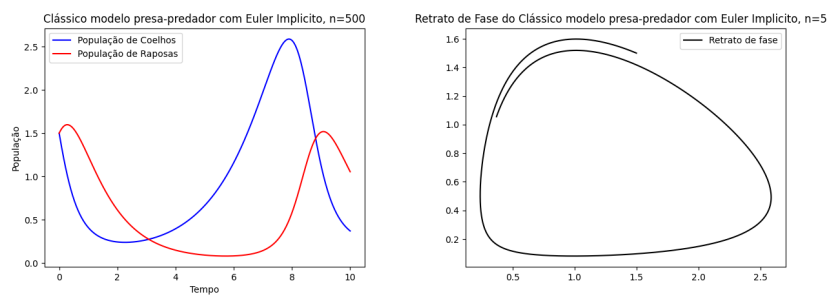


Figure 5: Integração do modelo presa-predador utilizando Euler implícito, com $n=500$

3.2.3 Comparação de Métodos de Euler

Foi feita uma comparação entre o método de Euler implícito e explícito, calculando a diferença dos valores $x(t)$ e $y(t)$, para diferentes valores de $n = 250, 500, 1000, 2000, 4000$ e foram plotadas as respectivas diferenças:

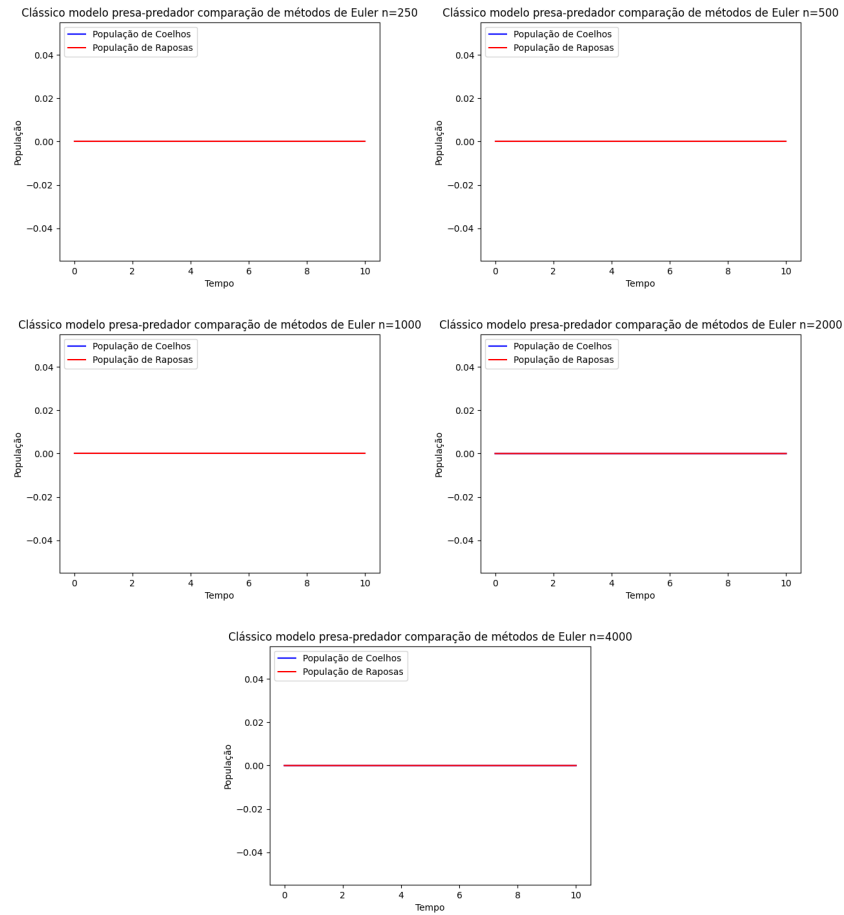


Figure 6: Comparação dos métodos de Euler para diferentes valores de N

3.2.4 Runge-Kutta 4

A terceira modelagem foi feita dividindo o domínio $t=[0,10]$ em 500 passos utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, resultando nas seguintes populações ao longo do tempo e no seguinte retrato de fase:

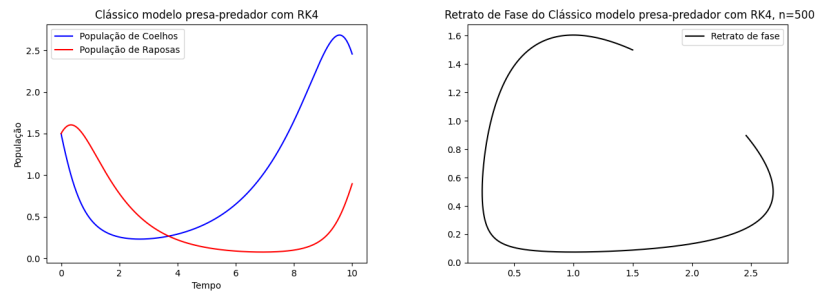


Figure 7: Integração do modelo presa-predador utilizando RK4, com $n=500$

4 Modelo 2 presas 1 predador

Partindo da modelagem anterior do modelo presa predador, foi adicionada uma nova prova resultando em 3 equações Com presas (x,y) e predador (z), estimados pelas equações e parâmetros: O valor de α foi alterado para avaliar a influência da população de presa x sobre o crescimento da população de predador z.

$$x'(t) = x(t)(B_1 - A_{1,1}x(t) - A_{1,2}y(t) - A_{1,3}z(t)) \quad (3)$$

$$y'(t) = y(t)(B_2 - A_{2,1}x(t) - A_{2,2}y(t) - A_{2,3}z(t)) \quad (4)$$

$$z'(t) = z(t)(B_3 - A_{3,1}x(t) - A_{3,2}y(t) - A_{3,3}z(t)) \quad (5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0.001 & 0.001 & 0.015 \\ 0.0015 & 0.001 & 0.001 \\ -\alpha & -0.0005 & 0 \end{bmatrix}$$

4.1 Comparação de valores de α

O sistema foi modelado utilizando os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem e de Euler explícito. Com isso diferentes valores de α , com diferentes tempos de teste geraram estabilidades diferentes para a população: Os valores iniciais foram:

$$x(0)=500, y(0)=500, z(0)=10$$

α	T_f	Estabilidade
0.001	100	Estável
0.002	100	Estável
0.0033	500	Periódico
0.0036	500	Periódico
0.005	2000	Instável
0.0055	2000	Instável

Table 2: Estabilidade das populações com diferentes relações entre populações x e z com diferentes tempos de integração

Além disso foram gerados a comparação das populações ao longo de tempo e do retrato de fase tridimensional, para $\alpha = 0.0055$, o sistema é instável e o gráfico ao longo do tempo não é real.

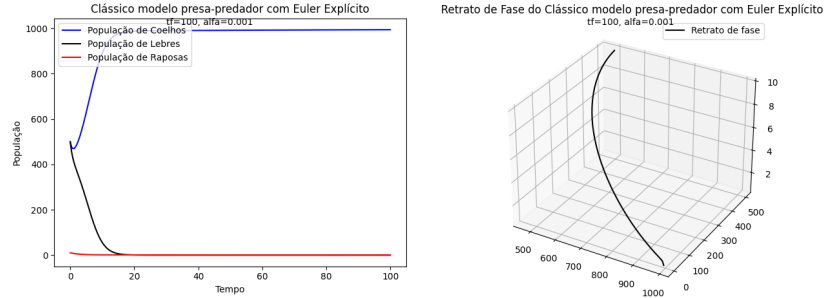


Figure 8: Integração do modelo presa-predador utilizando Euler Explícito, $\alpha = 0.001$ e $T_f=100$

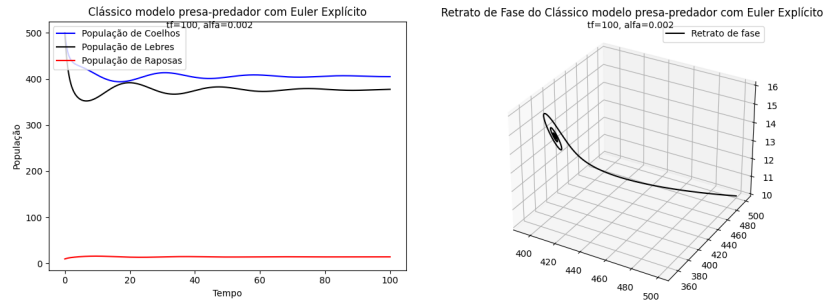


Figure 9: Integração do modelo presa-predador utilizando Euler Explícito, $\alpha = 0.002$ e $T_f=100$

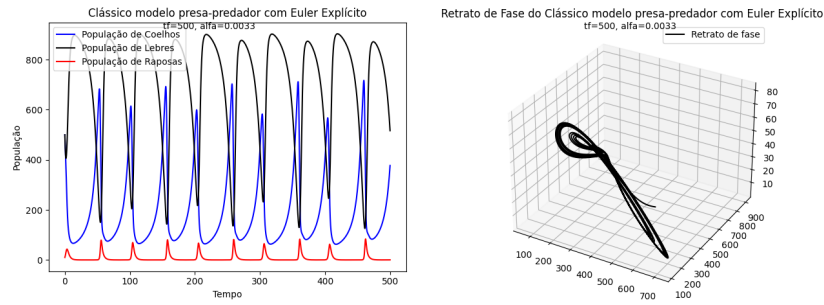


Figure 10: Integração do modelo presa-predador utilizando Euler Explícito, $\alpha = 0.0033$ e $T_f=500$

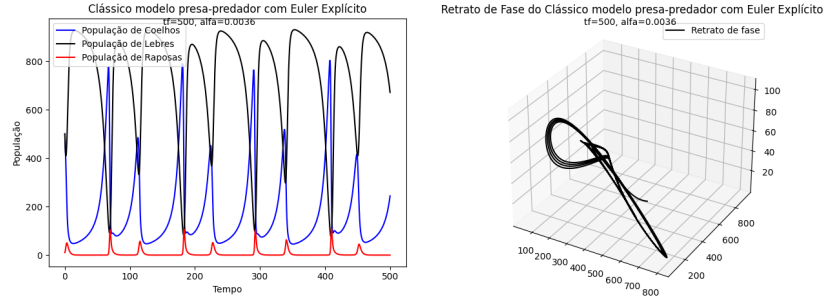


Figure 11: Integração do modelo presa-predador utilizando Euler Explícito, $\alpha = 0.0036$ e $T_f=500$

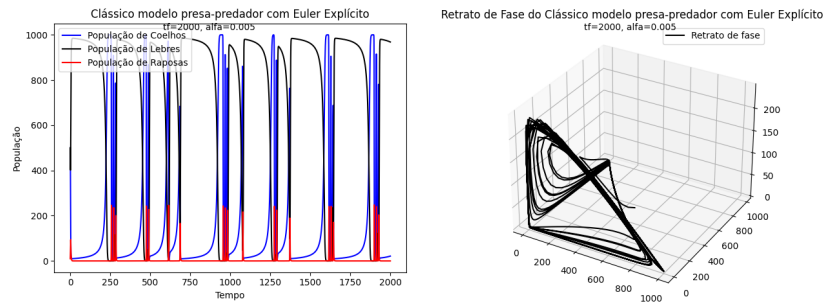


Figure 12: Integração do modelo presa-predador utilizando Euler Explícito, $\alpha = 0.005$ e $T_f=2000$

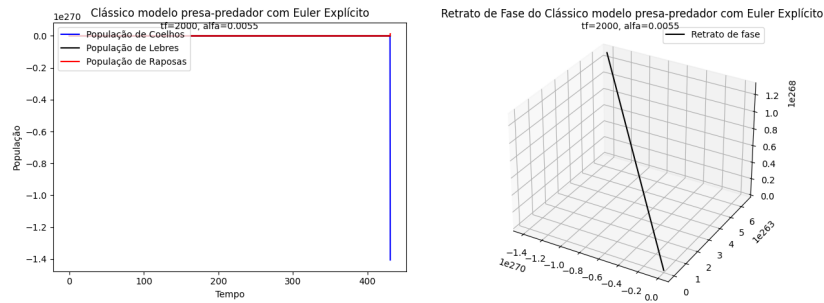


Figure 13: Integração do modelo presa-predador utilizando Euler Explícito, $\alpha = 0.0055$ e $T_f=2000$

5 Conclusão

Os métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias são essenciais para o desenvolvimento da tecnologia. Hoje em dia com a popularização dos CADs, CAMs, e CAEs, o estudo e a otimização dos métodos se tornam essenciais para melhorar a eficiência e preço dos softwares. Mesmo com o aumento do poder computacional dos computadores, ainda se torna necessário a avaliação dos melhores métodos para cada modelagem. Com isso alguns métodos como o Euler explícito, necessita de menos poder computacional que o Runge-Kutta 4, isso sem contar a discretização do domínio. Além de diversos usos para simulação de problemas físicos, os métodos de resoluções de equações diferenciais ordinárias podem ser usados para simulações matemáticas como estimativas de populações. Uma destas simulações é a simulação clássica presa-predador, a qual pode apresentar resultados satisfatórios utilizando os Métodos de Euler e de Runge-Kutta.

6 Bibliografia

1. FERREIRA, ELISA MEDEIROS R. C. Uma introdução ao estudo das Equações Diferenciais Parciais usando o modelo de Euler-Bernoulli para a vibração transversal de uma barra flexível:2016.