ESCOLA POLITÉCNICA DA USP
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA E DE SISTEMAS MECÂNICOS

Mecânica Computacional

PMR3401

Exercício Programa 1: Métodos de Runge-Kutta

06/04/20

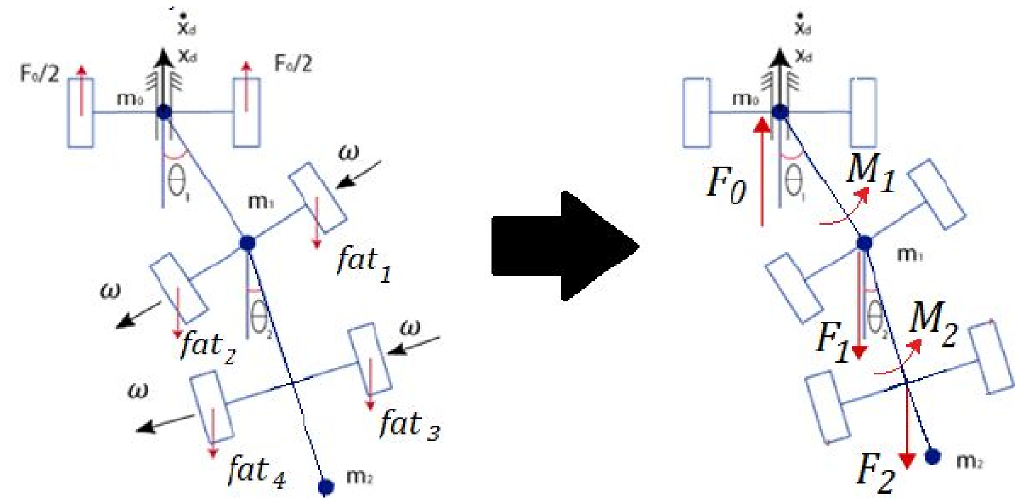
Alessandro Brugnera Silva – 10334040

Vitor Luiz Lima Carazzi – 9834010

Introdução

Com o intuito de se analisar os efeitos da distribuição de peso na capotagem de um sistema carro+reboque, utilizaremos os métodos numéricos de Euler e de Runge-Kutta para simular os movimento do sistema no MatLab, dessa forma também analisaremos a eficiência desses métodos.

Modelagem do sistema



Equação 1 ($\ddot{\theta}_1$):

$$A_0\ddot{\theta}_1 = A_1\dot{\theta}_1^2 + A_2\dot{\theta}_2^2 + A_3\dot{\theta}_1 + A_4\dot{\theta}_2 + A_5$$

onde:

$$A_0 = L_1^2.L_2.R.[m_2.cos(2\theta_1 - 2\theta_2) - 2m_1 - m_2]$$
$$A_1 = L_1^2.L_2.R.m_2.sin(2\theta_1 - 2\theta_2)$$
$$A_2 = 2L_1.L_2^2.R.m_2.sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$A_3 = -2L_2.\mu I_z.Vel$$
$$A_4 = -2L_1.\mu I_z.Vel.cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$A_5 = -RL_1\left[\mathrm{L}_{2_{\mathrm{eixo}}}F_2 sin(\theta_1 - 2\theta_2) + 2sin(\theta_1)\left(F_1L_2 + \frac{\mathrm{L}_{2_{\mathrm{eixo}}}F_2}{2}\right)\right]$$

Equação 2 ($\ddot{\theta}_2$):

$$B_0\ddot{\theta}_2 = B_1\ddot{\theta}_1 + B_2\dot{\theta}_1^2 + B_3\dot{\theta}_2 + B_4$$

onde:

$$B_0 = L_2^2.R.m_2$$
$$B_1 = -L_1.L_2.R.m_2.cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$B_2 = L_1.L_2.R.m_2.sin(\theta_1 - \theta_2)$$
$$B_3 = -\mu I_z.Vel$$
$$B_4 = \mathrm{L}_{2_{\mathrm{eixo}}}\,sin(\theta_2).R\,.F_2$$

sendo:

$$\mathrm{L}_1 = 2\ \ m; \qquad \mathrm{L}_2 = 2{,}5\ \ m; \qquad \mathrm{L}_{2_{\mathrm{eixo}}} = 1{,}8\ \ m;$$
$$\mathrm{m}_1 = 450\ \ kg; \qquad \mathrm{m}_2 = 650\ \ kg;$$
$$\mathrm{F}_1 = -0{,}5 \cdot \mathrm{m}_1 \cdot \mathrm{g}\ \ N; \qquad \mathrm{F}_2 = -0{,}5 \cdot \mathrm{m}_2 \cdot \mathrm{g}\ \ N$$
$$\mu I_z = 2{,}7\ \ kg.m^2; \quad R = 0{,}3\ \ m; \quad \mathrm{g} = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}; \quad \dot{x_d} = Vel\text{=80km/h.}$$

Análise de eficiência dos métodos

Para o estudo da eficiência dos métodos numéricos, simulou-se o comportamento do sistema com 3 passos(h) diferentes, sendo eles:

- h=0,1
- h=0,01
- h=0,001

A seguir estão apresentados os equacionamentos numéricos utilizados e os resultados das simulações, com o comportamento dos ângulos θ_1 e θ_2 junto com suas velocidades e acelerações angulares.

Equacionamentos

a)Euler:

$$\ddot{\theta}_1(t+h) = A_1(X_1(t), X_2(t), V_1(t), V_2(t))$$
$$\ddot{\theta}_2(t+h) = A_1(X_1(t), X_2(t), V_1(t), V_2(t), A_1(t))$$

$$\dot{\theta}_1(t+h) = \dot{\theta}_1(t) + h * \ddot{\theta}_1(t)$$
$$\dot{\theta}_2(t+h) = \dot{\theta}_2(t) + h * \ddot{\theta}_2(t)$$

$$\theta_1(t+h) = \theta_1(t) + h * \dot{\theta}_1(t)$$
$$\theta_2(t+h) = \theta_2(t) + h * \dot{\theta}_2(t)$$

b)RK2:

$$k_{1,\dot{\theta}_1} = V_1(t)$$
$$k_{1,\dot{\theta}_2} = V_2(t)$$
$$k_{1,\ddot{\theta}_1} = A_1(t)$$
$$k_{1,\ddot{\theta}_2} = A_2(t)$$

$$k_{2,\ddot{\theta}_1} = A_1(X_1(t) + h * k_{1,\ddot{\theta}_1}, X_2(t) + h * k_{1,\ddot{\theta}_2}, k_{1,\dot{\theta}_1}, k_{1,\dot{\theta}_2})$$
$$k_{2,\ddot{\theta}_2} = A_2(X_1(t) + h * k_{1,\ddot{\theta}_1}, X_2(t) + h * k_{1,\ddot{\theta}_2}, k_{1,\dot{\theta}_1}, k_{1,\dot{\theta}_2}, k_{2,\ddot{\theta}_1})$$

$$\theta_1(t+h) = \theta(t) + \tfrac{h}{2}(k_{1,\dot{\theta}_1} + k_{2,\dot{\theta}_1})$$
$$\theta_2(t+h) = \theta(t) + \tfrac{h}{2}(k_{1,\dot{\theta}_1} + k_{2,\dot{\theta}_1})$$

c)RK4:

$$k_{1,\dot{\theta}_1} = V_1(t)$$
$$k_{1,\dot{\theta}_2} = V_2(t)$$
$$k_{1,\ddot{\theta}_1} = A_1(t)$$
$$k_{1,\ddot{\theta}_2} = A_2(t)$$

$$k_{2,\dot{\theta}_1} = V_1(t) + \tfrac{h}{2} * k_{1,\ddot{\theta}_1}$$
$$k_{2,\dot{\theta}_2} = V_2(t) + \tfrac{h}{2} * k_{1,\ddot{\theta}_2}$$
$$k_{2,\ddot{\theta}_1} = A_1(X_1(t) + \tfrac{h}{2} * k_{1,\ddot{\theta}_1}, X_2(t) + \tfrac{h}{2} * k_{1,\ddot{\theta}_2}, k_{1,\dot{\theta}_1}, k_{1,\dot{\theta}_2})$$
$$k_{2,\ddot{\theta}_2} = A_2(X_1(t) + \tfrac{h}{2} * k_{1,\ddot{\theta}_1}, X_2(t) + \tfrac{h}{2} * k_{1,\ddot{\theta}_2}, k_{1,\dot{\theta}_1}, k_{1,\dot{\theta}_2}, k_{2,\ddot{\theta}_1})$$

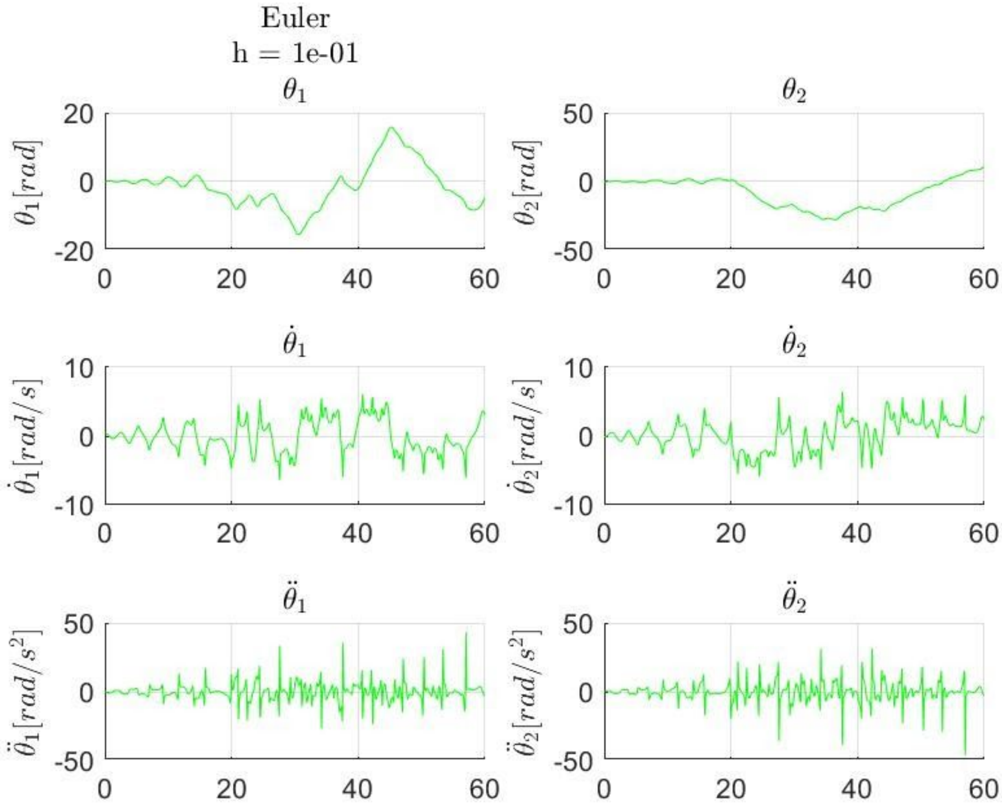
$$k_{3,\dot{\theta}_1} = V_1(t) + h * k_{2,\ddot{\theta}_1}$$
$$k_{3,\dot{\theta}_2} = V_2(t) + h * k_{2,\ddot{\theta}_2}$$
$$k_{3,\ddot{\theta}_1} = A_1(X_1(t) + \tfrac{h}{2} * k_{2,\ddot{\theta}_1}, X_2(t) + \tfrac{h}{2} * k_{2,\ddot{\theta}_2}, k_{2,\dot{\theta}_1}, k_{2,\dot{\theta}_2})$$
$$k_{3,\ddot{\theta}_2} = A_2(X_1(t) + \tfrac{h}{2} * k_{2,\ddot{\theta}_1}, X_2(t) + \tfrac{h}{2} * k_{2,\ddot{\theta}_2}, k_{2,\dot{\theta}_1}, k_{2,\dot{\theta}_2}, k_{3,\ddot{\theta}_1})$$

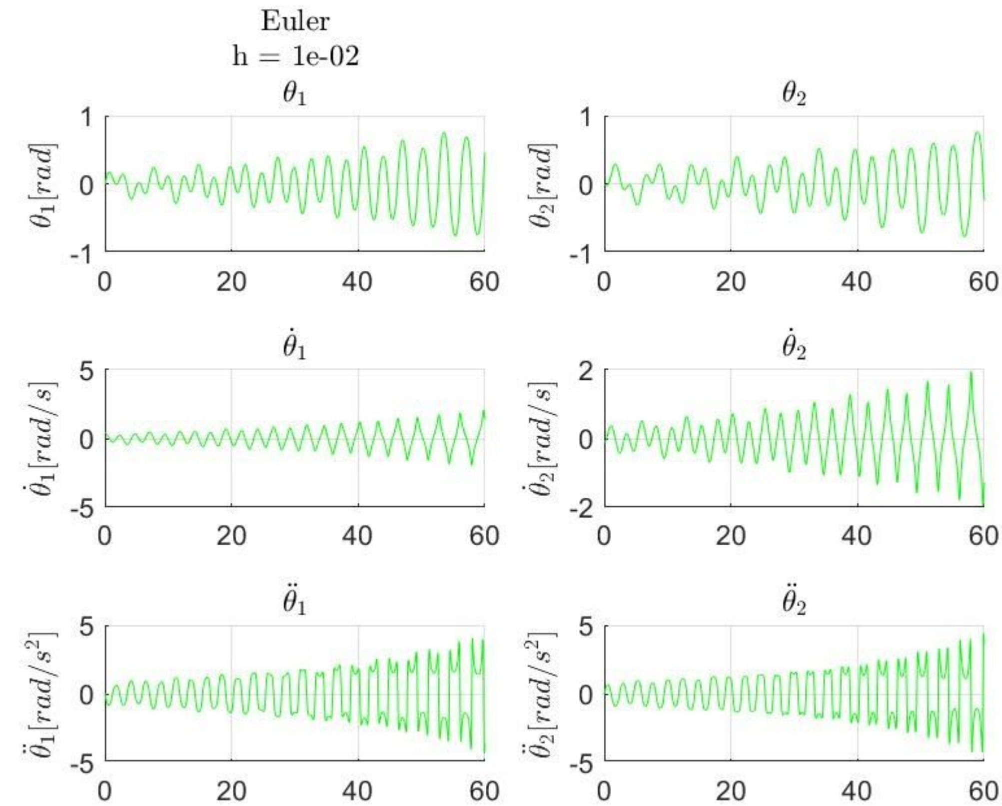
$$k_{4,\dot{\theta}_1} = V_1(t) + h * k_{3,\ddot{\theta}_1}$$
$$k_{4,\dot{\theta}_2} = V_2(t) + h * k_{3,\ddot{\theta}_2}$$
$$k_{4,\ddot{\theta}_1} = A_1(X_1(t) + h * k_{3,\ddot{\theta}_1}, X_2(t) + h * k_{3,\ddot{\theta}_2}, k_{3,\dot{\theta}_1}, k_{3,\dot{\theta}_2})$$
$$k_{4,\ddot{\theta}_2} = A_2(X_1(t) + h * k_{3,\ddot{\theta}_1}, X_2(t) + h * k_{3,\ddot{\theta}_2}, k_{3,\dot{\theta}_1}, k_{3,\dot{\theta}_2}, k_{4,\ddot{\theta}_1})$$

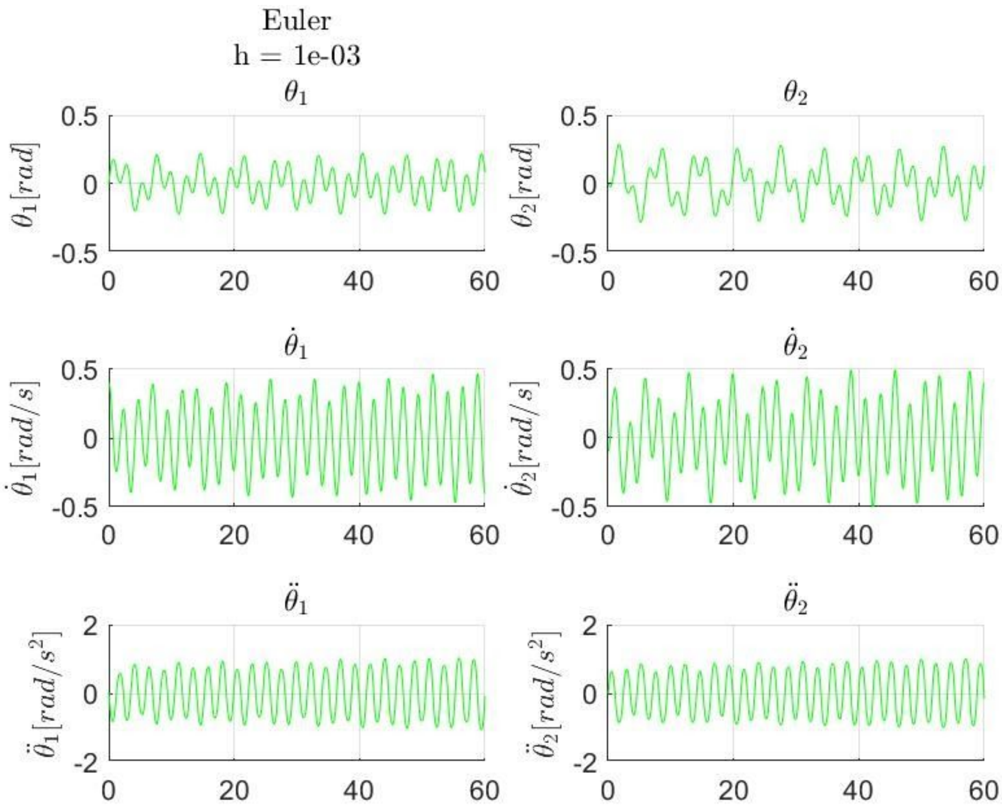
$$\theta_1(t+h) = \theta(t) + \tfrac{h}{6}(k_{1,\dot{\theta}_1} + 2k_{2,\dot{\theta}_1} + 2k_{3,\dot{\theta}_1} + k_{4,\dot{\theta}_1})$$
$$\theta_2(t+h) = \theta(t) + \tfrac{h}{6}(k_{1,\dot{\theta}_1} + 2k_{2,\dot{\theta}_1} + 2k_{3,\dot{\theta}_1} + k_{4,\dot{\theta}_1})$$

Resultados

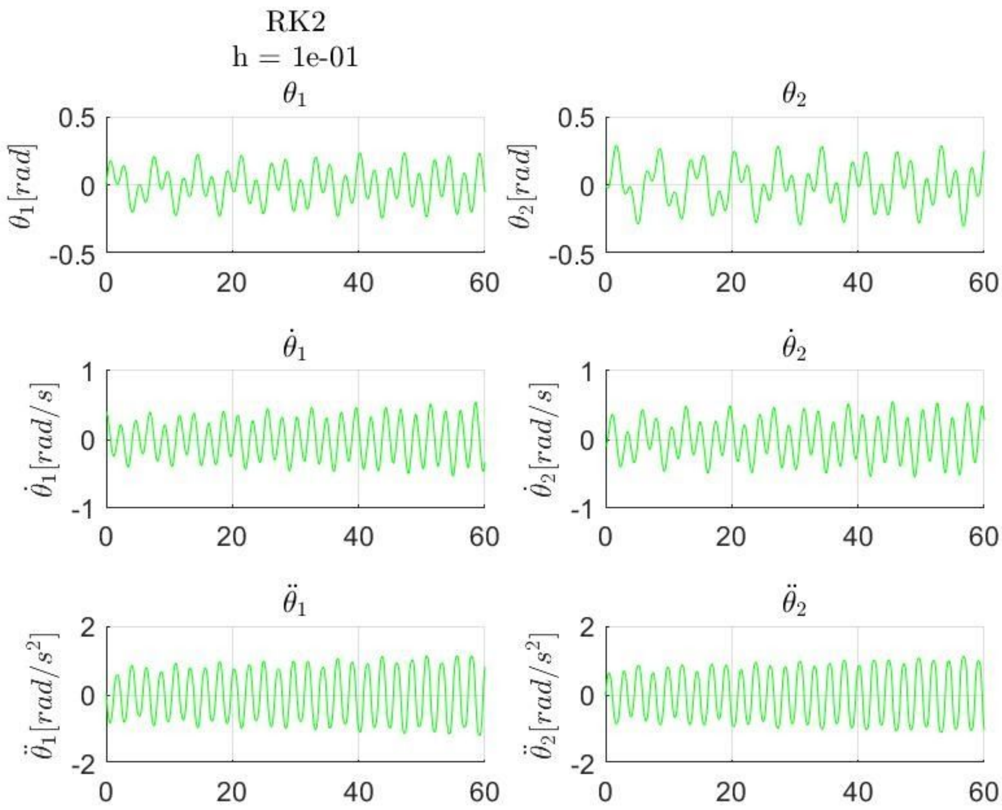
1)a) Método de Euler

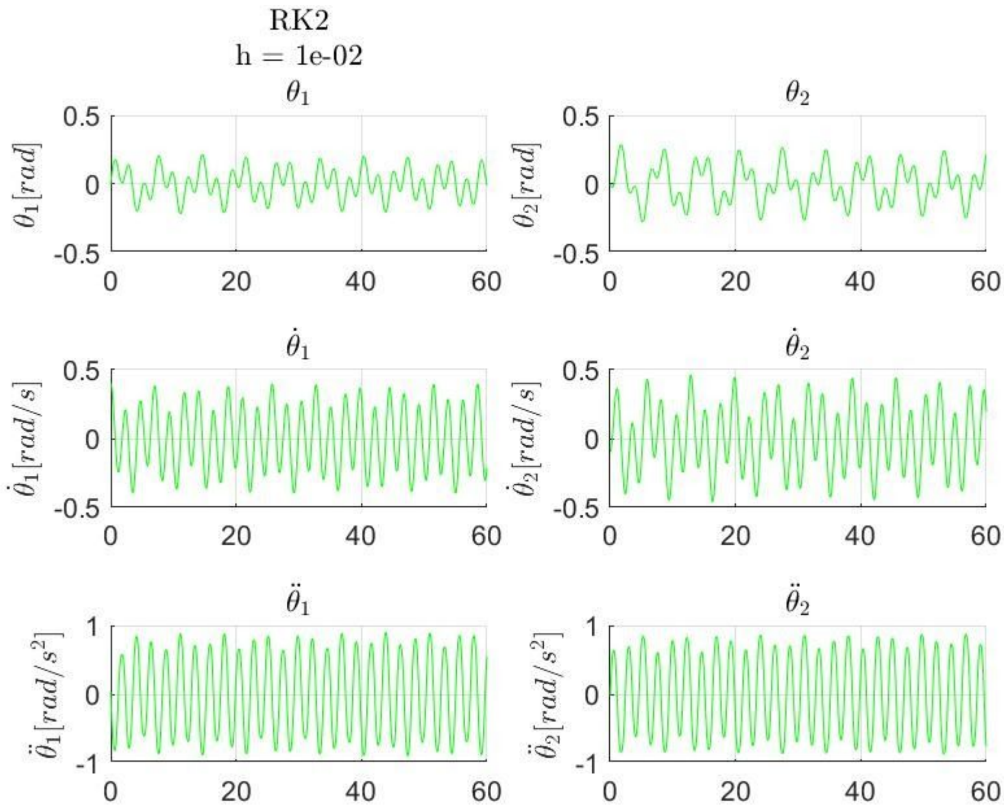


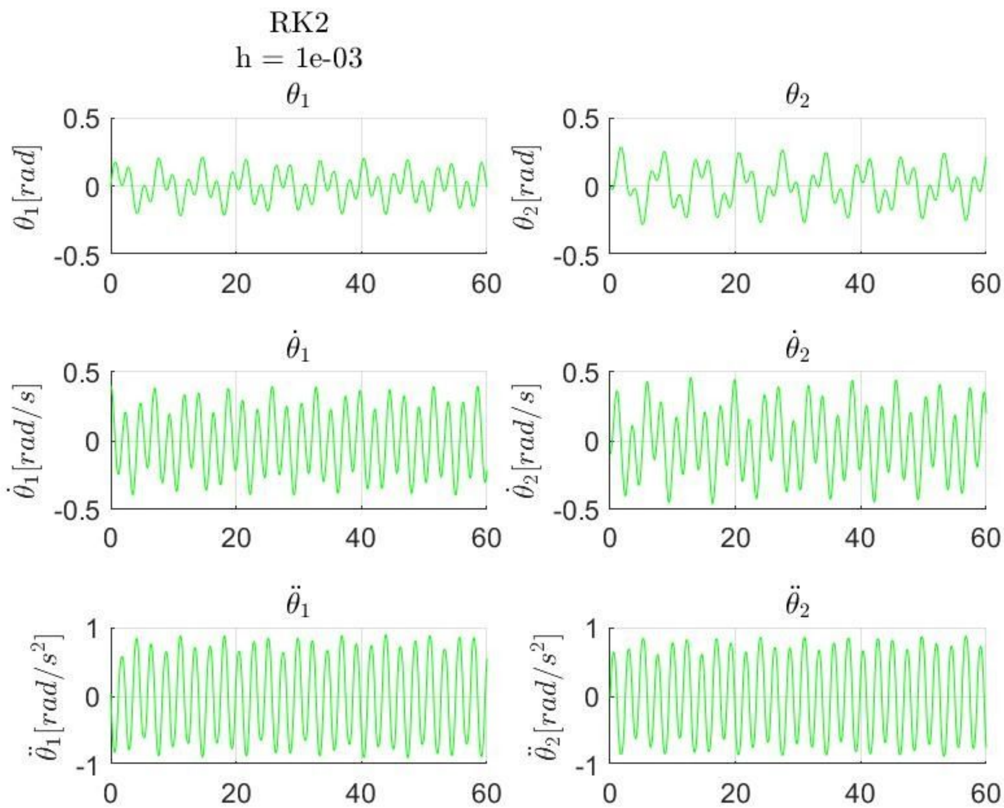




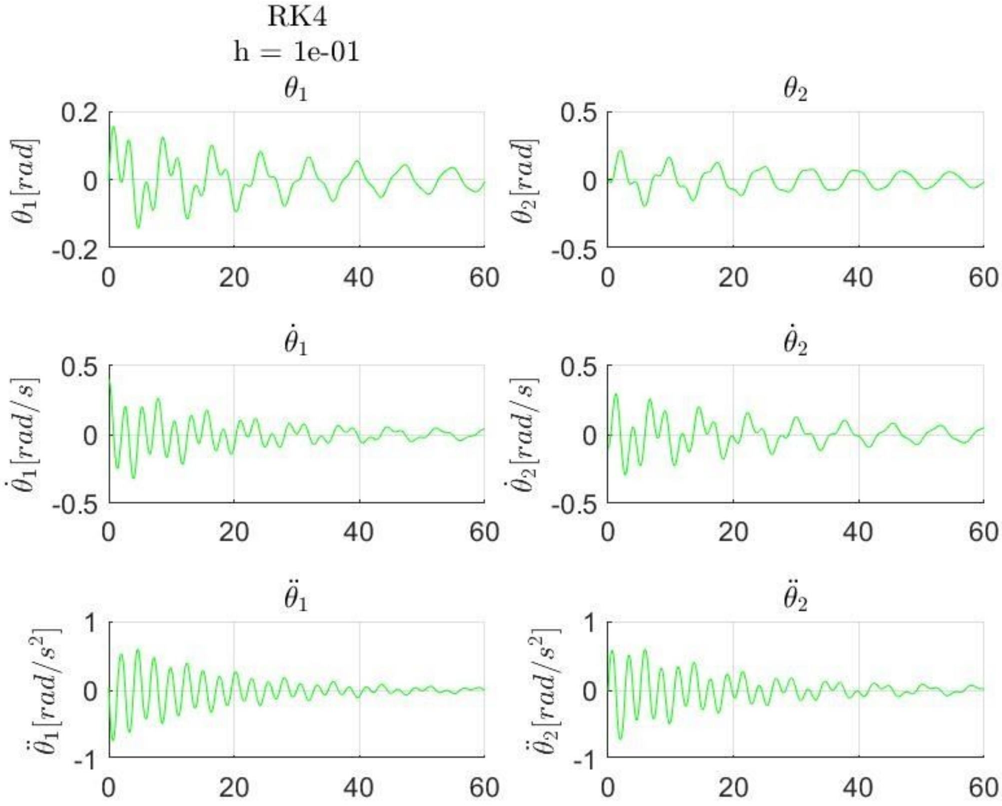
1)b) Método de Runge-Kutta de 2ª ordem

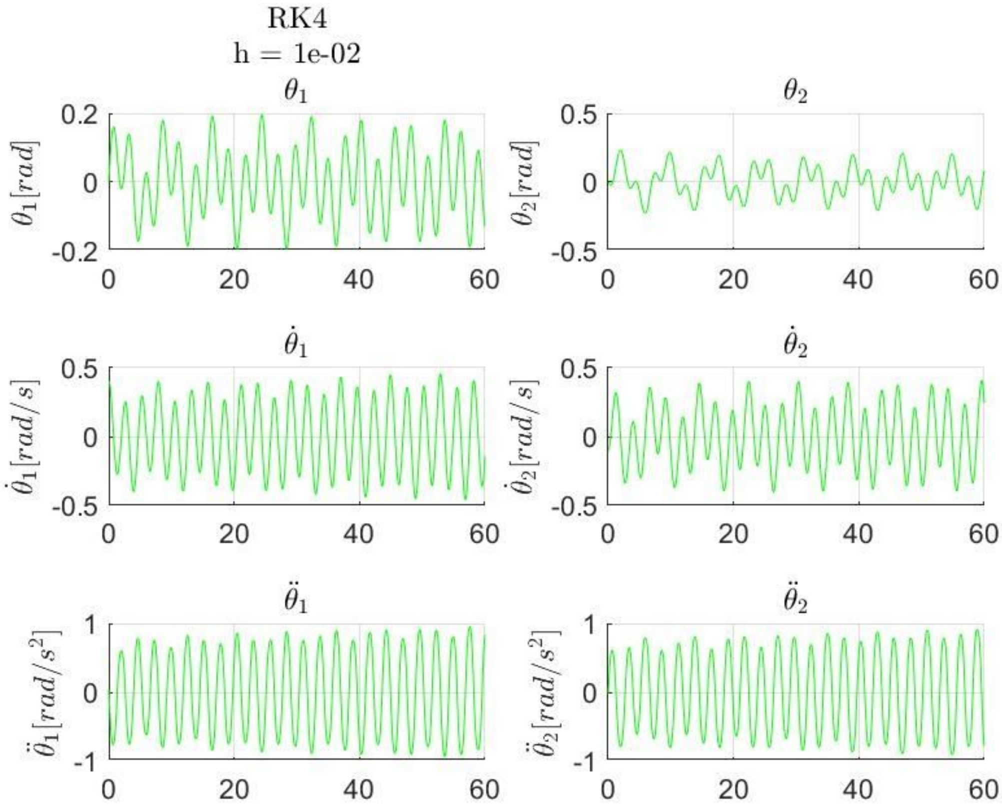


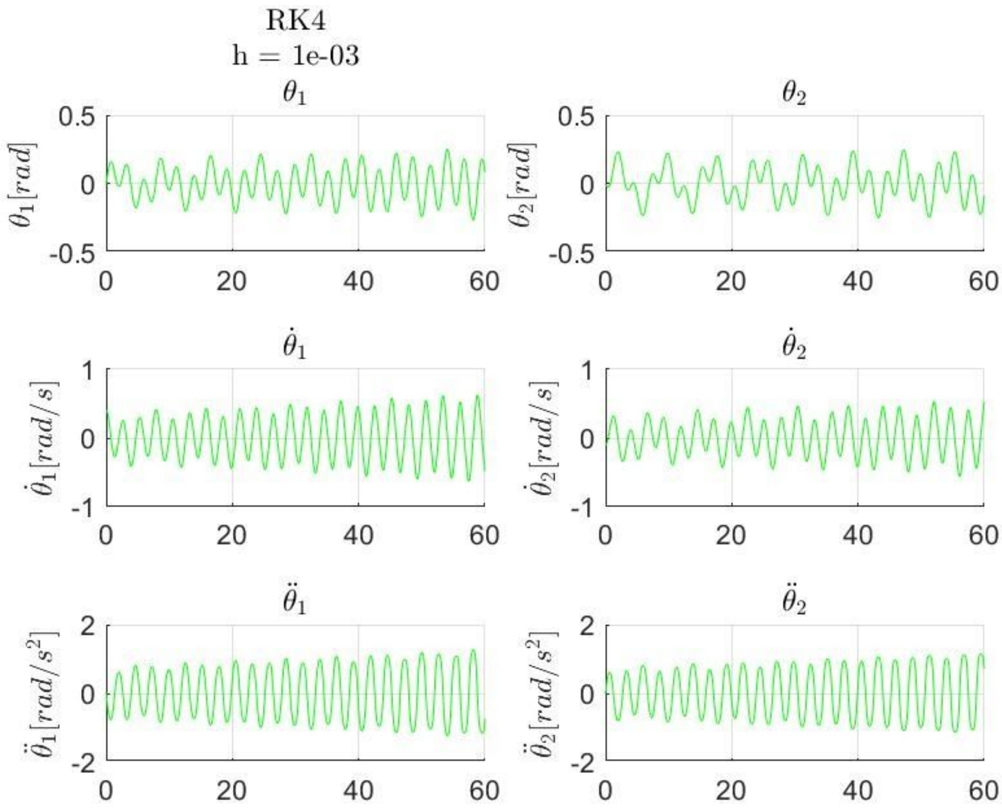

RK2
h = 1e-02
θ_1
θ_2
$\dot{\theta}_1$
$\dot{\theta}_2$
$\ddot{\theta}_1$
$\ddot{\theta}_2$
$\theta_1 [rad]$
$\theta_2 [rad]$
$\dot{\theta}_1 [rad/s]$
$\dot{\theta}_2 [rad/s]$
$\ddot{\theta}_1 [rad/s^2]$
$\ddot{\theta}_2 [rad/s^2]$


RK2
h = 1e-03
θ_1
θ_2
$\dot{\theta}_1$
$\dot{\theta}_2$
$\ddot{\theta}_1$
$\ddot{\theta}_2$
$\theta_1 [rad]$
$\theta_2 [rad]$
$\dot{\theta}_1 [rad/s]$
$\dot{\theta}_2 [rad/s]$
$\ddot{\theta}_1 [rad/s^2]$
$\ddot{\theta}_2 [rad/s^2]$

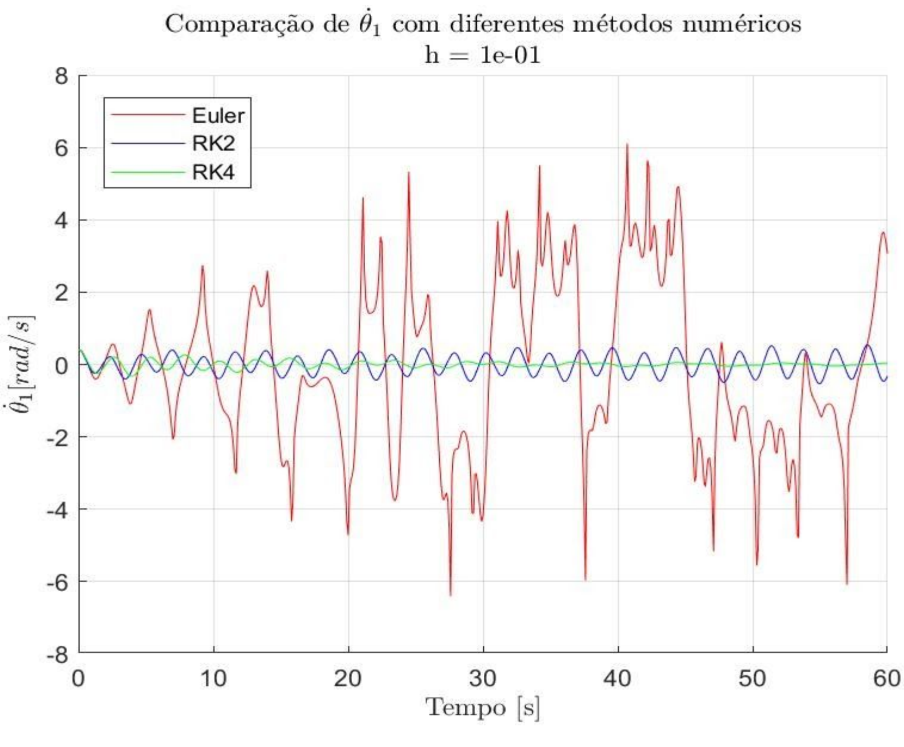
1)c) Método de Runge-Kutta de 4ª ordem







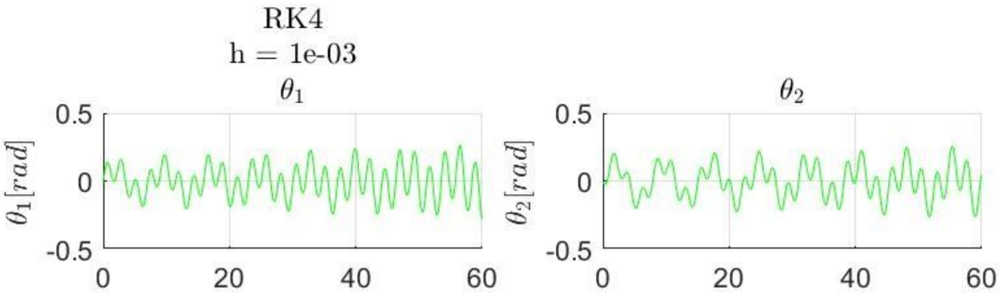
1)Conclusão: dessa forma observa-se que quanto menor o passo h, mais preciso será a simulação, os gráficos de h=1e-03 (h=0,001) são mais precisos. Além disso o método de Runge-Kutta de 4ª ordem demonstrou mais precisão que os demais métodos, como pode se observar no gráfico da velocidade angular de θ1 com h=0,1 abaixo:



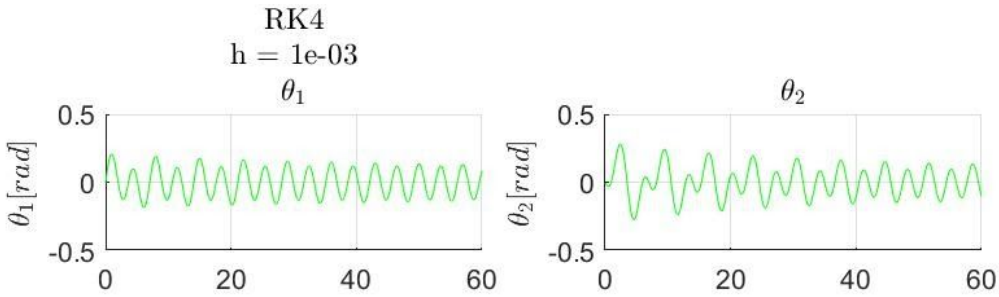
Análise do movimento do sistema carro+reboque

Para a análise do movimento do sistema utilizou-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, identificado como mais preciso no item anterior, e com o passo h=0,001. A análise foi feita sobre o comportamento dos ângulos θ_1 e θ_2, caso algum dos ângulos passe do valor de 90° considera-se que o veiculo capota. Atenção às escalas.

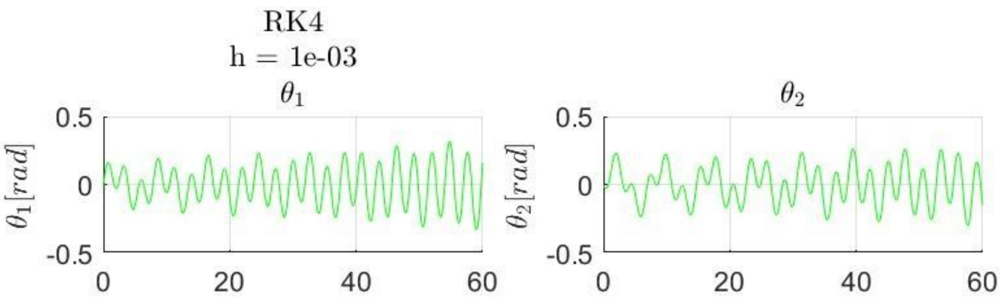
2)a) m_2 = 1000 kg



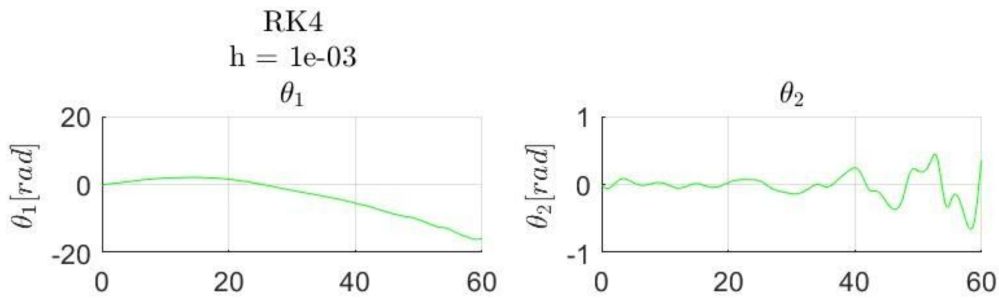
2)b) m_2 = 200 kg



2)c) x_d = *Vel* = 120 km/h



2)d) Tração traseira: F_1 = 0,5 . m_1 . gN



2)Conclusão: a única situação onde o veículo capota é a **2)d)** onde o ângulo θ_1 se aproxima do valor de 20 radianos, indicando claramente uma capotagem. Isso demonstra que, teoricamente, as variações testadas da massa m_2 e da velocidade $x_d$ponto não resultam em um acidente para a modelagem utilizada. Isso vai contra o que é demonstrado na prática pelos vídeos que foram disponibilizados no enunciado do exercício.

Conclusão Final

Ao final do exercício, obtêm-se 4 principais conclusões, são elas:

1. Para os métodos numéricos avaliados, quanto menor for o passo usado, mais precisa será a simulação.
2. O método de Runge-Kutta de 4ª ordem é mais preciso que os demais métodos usados, Runge-Kutta de 2ª ordem e Euler.
3. As variações de velocidade($x_d$ponto) e de massa m_2 não afetam o sistema, isso pode acontecer devido às simplificações feitas no modelo.
4. O veículo capota com a adição uma tração traseira F_1 = 0,5 . m_1 . gN.