

EP3

MAP3121

Alessandro Brugnera Silva

Julho 2022

1 Introdução

Problemas de Valor Limite para Equações Diferenciais Ordinárias são comuns em diversos ramos da Engenharia. Eles aparecem, na Engenharia civil, no cálculo de deflexão de vigas; na mecânica dos fluídos no cálculo de funções corrente; na engenharia elétrica, no cálculo de campos eletromagnéticos; e também, na engenharia mecânica, no cálculo de distribuição de Temperatura.

Nestas áreas, é necessário a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias com condições de contorno específicas, as quais muitas vezes requerem grande esforço computacional para a resolução exata, e envolvem simplificações e modelagens complexas, além de utilizarem métodos de integração numérica [1].

O Método dos Elementos Finitos apresenta-se como uma ferramenta confiável e robusta para resolução destes problemas, apresentando estimação de erro, modelagem razoavelmente simples e gasto computacional razoável [2].

2 Método

2.1 Método dos Elementos Finitos

O MEF subdivide o domínio de um problema em partes menores, denominadas elementos finitos. Como mostrado abaixo:

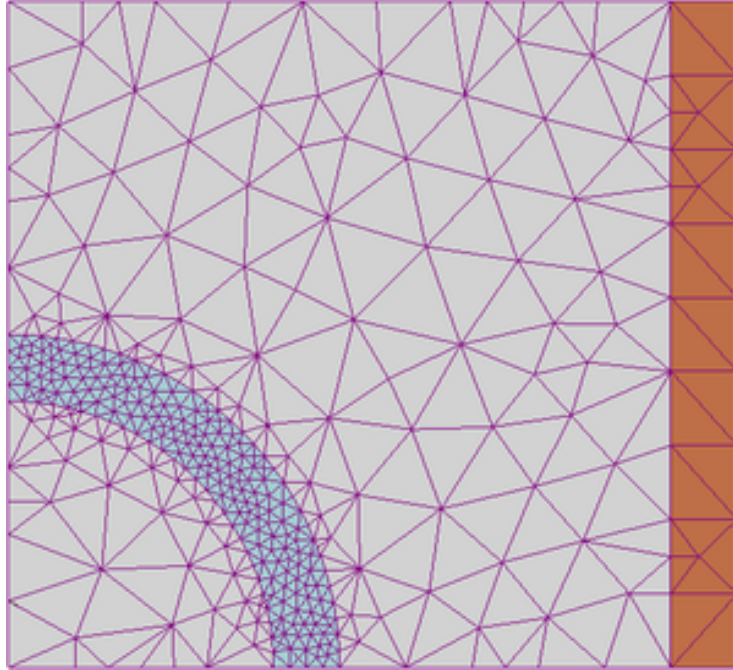


Figure 1: Malha bidimensional exemplificando o FEM.

Fonte: en.wikipedia.org/wiki/Finite_element_method, acesso em: 06/07/2022

A malha pode ser dividida de forma regular ou irregular, a depender da dimensão do problema e das bordas do domínio. Além disso o tamanho dos elementos pode ser diminuído para aumento de precisão de cálculo, porém limitado a um tamanho mínimo para não gerar instabilidades de aproximação. A subdivisão de um domínio inteiro em partes mais simples tem várias vantagens [3]:

- Representação precisa de geometria complexa
- Inclusão de propriedades diferentes dos materiais
- Fácil representação da solução total
- Captura de efeitos locais.

2.2 Equação do Calor

Em matemática e física, a equação de calor é uma equação diferencial parcial conhecida. A teoria da equação de calor foi desenvolvida pela primeira vez por Joseph Fourier em 1822 com o objetivo de modelar como uma quantidade como o calor se difunde através de uma determinada região [4]. A equação generalizada para n dimensões é apresentada abaixo:

$$\rho C \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial k(x)T(x, t)}{\partial x} + Q(x) \quad (1)$$

- $T(t, x)$ é a temperatura do chip na posição x e instante de tempo t
- ρ e C a densidade do material do chip
- k é o parâmetro de condutividade térmica do material
- Q é a soma das fontes de calor

Na modelagem abaixo o problema será avaliado no estado estacionário, então o termo dependente do tempo é zerado, e a equação pode ser reescrita como:

$$-\frac{\partial k(x)T(x, t)}{\partial x} = Q(x) \quad (2)$$

Assim como explicado no livro de Burden / Faires [1] no capítulo 11, a equação 2 se apresenta no formato apropriado para utilização do método de Ritz-Railegh em uma dimensão:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = f(x) \quad (3)$$

No caso:

- $p(x)$ representa $k(x)$
- y representa T
- $q(x)$ é 0
- $f(x)$ é $Q(x)$, as fontes de calor

No livro, na seção 11.5, o método é explicado em mais detalhes. Além do algoritmo de resolução também ser apresentado.

3 Resultados

3.1 Variação do tamanho da malha

Nesta seção, o problema mais simples possível foi modelado para avaliar o erro entre a modelagem e a simulação exata. As condições do problema são:

- $k(x) = 1$
- $L = 1$
- $Q(x) = f(x) = 12x(1 - x)$

Este problema apresenta solução exata com $T(x) = x^2(1 - x)^2$. Variando o tamanho da malha (parâmetro n), encontram-se os seguintes resultados:

n	7	15	31	63	127
MSE	6.939E-18	1.388E-17	1.804E-16	5.690E-16	4.025E-16
Erro Máximo	4.327E-18	6.453E-18	1.082E-16	3.666E-16	2.753E-16

Table 1: MSE representa erro quadrático médio

Com n a partir de 63, a função exata e a simulação numérica já apresentam resultados consideravelmente iguais, a função exata foi discretizada em 128 pontos, como evidenciado abaixo:

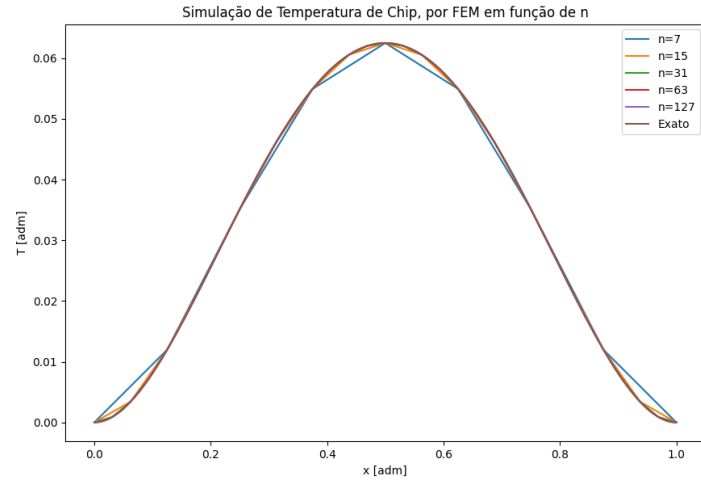


Figure 2: Comparação da distribuição de Temperatura com diferentes N

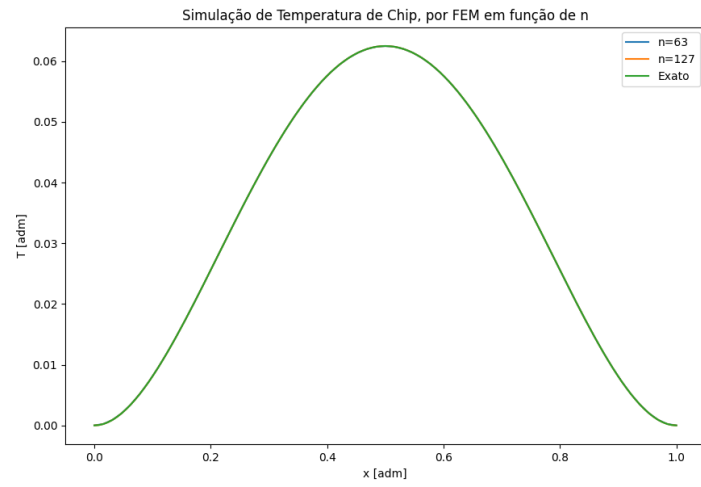


Figure 3: Comparação da distribuição de Temperatura exata e com malha com grande discretização.

3.2 Fonte de Calor Gaussiana e Resfriamento Constante

Nesta seção foi adicionada uma fonte de calor modelada por uma gaussiana, dessa maneira o centro do chip apresenta maior geração de calor.

$$Q_+(x) = Q_+^0 e^{-\frac{(x-L/2)^2}{\sigma}} \quad (4)$$

Essa gaussiana apresenta 2 parâmetros variáveis Q_+^0 e σ , os quais representam o calor multiplicador de calor ou o máximo no meio do chip, e a dispersão do calor ao longo do chip, ou seja, quanto menor sigma mais concentrada é a geração de calor. As figuras abaixo apresentam a geração de calor com a variação destes parâmetros, enquanto há uma remoção de calor constante ao longo do chip de 10 unidades. Em alguns dos casos a remoção de calor é superior a geração, o que leva uma "temperatura negativa" (na simulação as unidades são adimensionais).

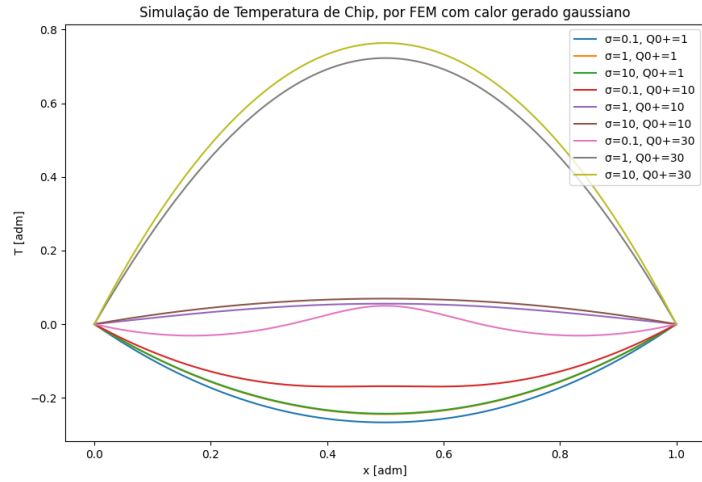


Figure 4: Comparação da distribuição de Temperatura com geração de calor variável.

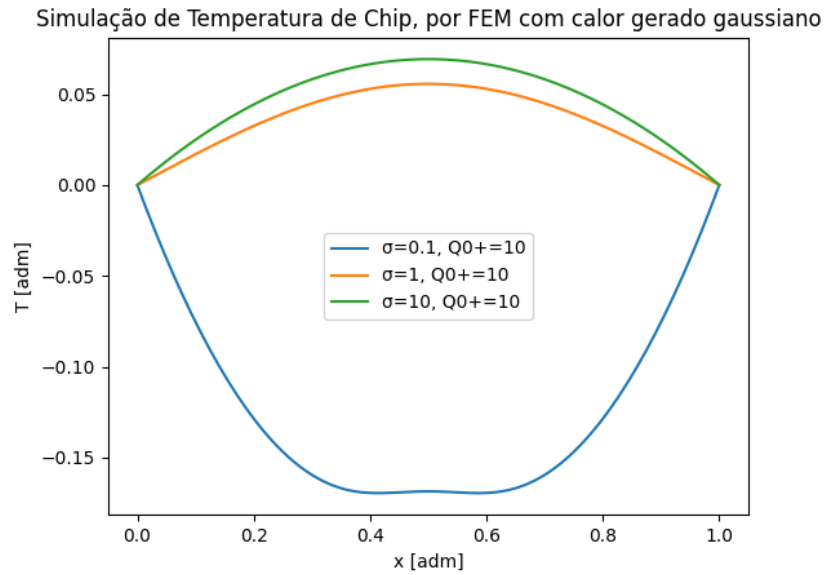


Figure 5: Comparação da distribuição de Temperatura com diferentes parâmetros sigma.

3.3 Fonte de Calor Gaussiana e Resfriamento Gaussiano

Nesta seção foi adicionada uma fonte de calor negativa modelada por duas gaussianas, dessa maneira as extremidades do chip apresentam maior remoção de calor.

$$Q_-(x) = Q_-^0 (e^{-\frac{(x)^2}{\theta}} + e^{-\frac{(x-L/2)^2}{\theta}}) \quad (5)$$

Nesta modelagem adiciona-se 2 novos parâmetros variáveis Q_-^0 e θ , que funcionam da mesma maneira que os parâmetros da modelagem da geração de calor da seção anterior. Em alguns dos casos a remoção de calor é superior a geração o que geraria uma "temperatura negativa" (na simulação as unidades são adimensionais).

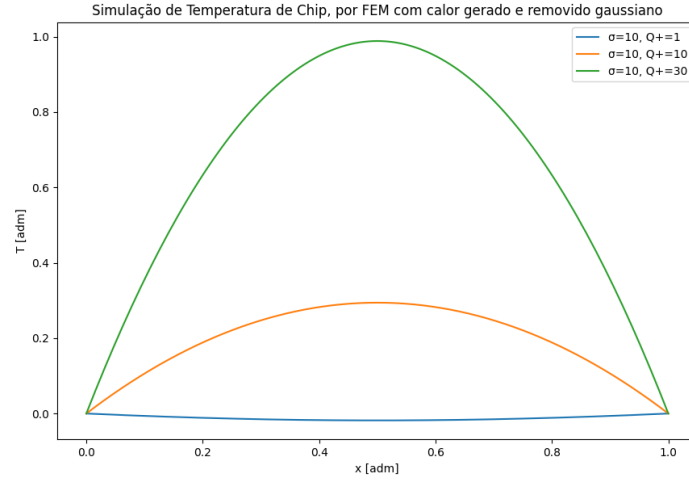


Figure 6: Comparação da distribuição de Temperatura com geração de calor variável. $Q_-^0 = 1, \theta = 1$

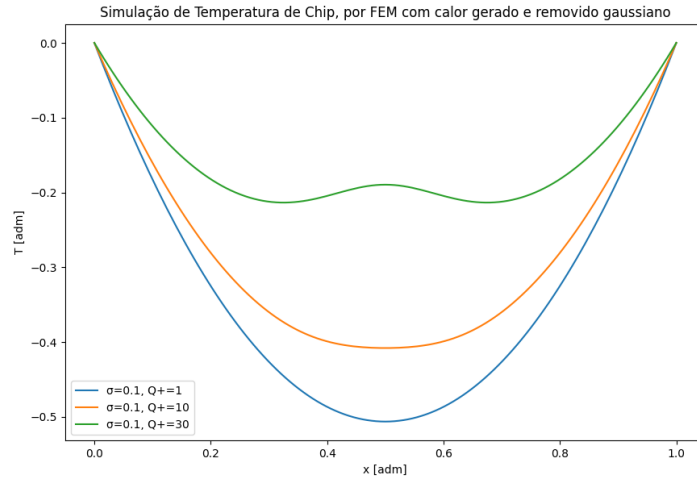


Figure 7: Comparação da distribuição de Temperatura com geração de calor variável. $Q_-^0 = 8, \theta = 2$

3.4 Materiais variáveis

Nesta seção foi adicionada uma variação do parâmetro k ao longo do chip, o que modela materiais ou seções diferentes ao longo do chip.

$$k(x) = \begin{cases} k_s, & \text{se } x \in (L/2 - d, L/2 + d), \\ k_a, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Figure 8: Com $k_s = 3.6$ $k_a = 60$

Essa modelagem apresenta o parâmetro d variável o que muda o tamanho do bloco de silício central do chip. Além disso os parâmetros de geração foram mantidos da seção anterior com: $Q_-^0 = 8Q_+^0 = 100\sigma = 10\theta = 2$

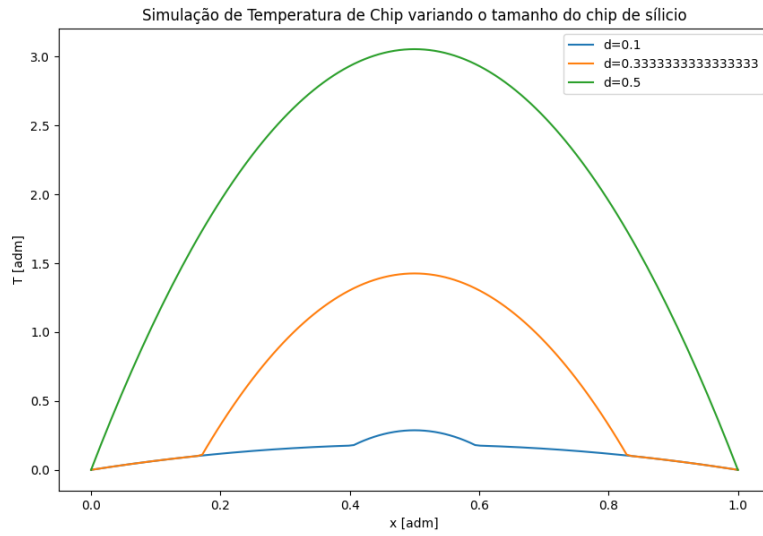


Figure 9: Comparação da distribuição de Temperatura com variação do tamanho da espessura de silício no centro do chip.

4 Conclusão

A resolução de Problemas de Valor Limite para Equações Diferenciais Ordinárias é essencial para qualquer software de simulação física ou matemática. Assim utilizar métodos eficientes e confiáveis é essencial. O Método dos elementos finitos aliado a quadratura gaussiana (para resolução de integrais) se mostrou eficiente para modelagens de fenômenos de transporte de calor .

As simplificações apresentam resultados coerentes com os exemplos testados, com exceção do segundo método na seção 3.1, as quais apresentaram erros na casa de 10^{-16} .

Nas outras seções, foi possível observar como a variação de parâmetros físicos do sistema influencia na distribuição de temperatura, o que facilita na hora do projeto de chips com simulações confiáveis, gerando economia de gastos.

References

- [1] Burden, Richard L., J. Douglas Faires, and Annette M. Burden. Numerical analysis. Cengage learning, 2015.
- [2] Pentenrieder, Bastian. "Finite element solutions of heat conduction problems in complicated 3D geometries using the multigrid method." Fakultät für Informatik, TU München, Munich, Germany 8 (2005).
- [3] Reddy, J. N. (2006). An Introduction to the Finite Element Method (Third ed.). McGraw-Hill. ISBN 9780071267618.
- [4] Cannon, John Rozier (1984), The one-dimensional heat equation, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 23, Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, ISBN 0-201-13522-1