

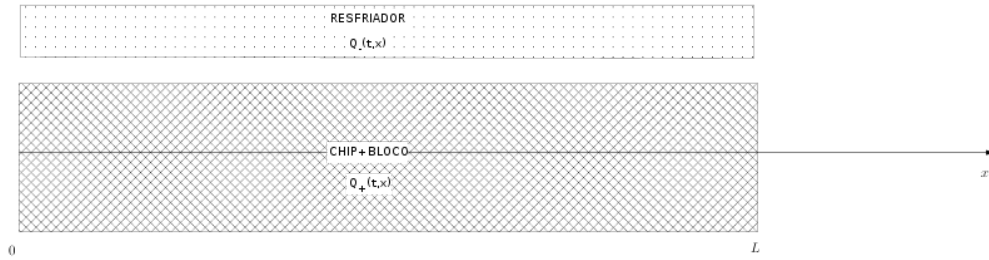
# Modelagem de um Sistema de Resfriamento de Chips

Tarefa 3 - MAP3121 - Data de entrega: 10/07/2022

## 1 Equação do calor

Queremos modelar o comportamento da difusão térmica que ocorre em um processador ou chip de computador de tamanho  $L \times L$  e altura  $h$  ao usarmos um resfriador (“cooler” ou placa fria) colado na parte superior do bloco do chip (conforme Figura 1). Vamos considerar o caso unidimensional analisando apenas a seção transversal do chip para cada  $x$ , de 0 a  $L$ . Assumiremos que a espessura do chip ( $h$ ) é suficientemente fina para que a variação de temperatura na vertical seja desprezível. Assumiremos também que a troca de calor no topo do chip com o resfriador é perfeita e que não há troca de calor na parte inferior do chip com o ambiente (a base é termicamente isolada), portanto a análise a ser feita leva em conta apenas as variações de temperatura na direção  $x$ .

Figura 1: Resfriador colado na parte superior do bloco do chip



A distribuição de calor no interior do conjunto chip+bloco pode ser modelada pela equação do calor, obtida a partir da lei de Fourier e da propriedade de conservação de energia, sendo matematicamente escrita neste caso unidimensional como

$$\rho C \frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial T(t, x)}{\partial x} \right) + Q(t, x), \quad (1)$$

onde

- $T(t, x)$  é a temperatura do chip na posição  $x$  e instante de tempo  $t$ ,
- $\rho$  é a densidade do material do chip (exemplo: o silício tem densidade  $\rho = 2300 \text{ kg/m}^3$ ),
- $C$  é o calor específico do material (exemplo: o calor específico do silício é  $C = 750 \text{ J/Kg/K}$ ),
- $k$  é o parâmetro de condutividade térmica do material (exemplo: o silício tem condutividade de  $k = 3,6 \text{ W/(mK)}$ ).
- $Q$  é uma fonte de calor. É a soma do calor gerado pelo chip ( $Q_+$ ) com o calor retirado do sistema pelo resfriador ( $Q_-$ ), tal que  $Q = Q_+ - Q_-$ .

O calor gerado pelo chip ( $Q_+$ ) pode ser obtido em função de sua potência ( $P$ ), tal que  $Q_+ = P/V$ , onde  $V$  é o volume do chip. Por exemplo, podemos ter um chip com potência  $P = 30 \text{ W}$ , e dimensões  $L = 20 \text{ mm}$  e  $h = 2 \text{ mm}$ .

Para resolvermos essa equação precisamos do estado inicial de distribuição de temperatura do chip  $T(0, x)$  e também saber o que ocorre nas fronteiras  $x = 0$  e  $x = L$  do chip. Adotaremos como modelo simplificado que a temperatura nos extremos será exatamente a temperatura do ambiente externo (exemplo:  $20^\circ \text{C}$ ).

## 2 Estado estacionário

Considerando um processador que trabalhe em regime constante, supondo que trabalhe gerando sempre a mesma quantidade de calor e que o resfriador sempre consiga extrair a mesma quantidade de calor, a distribuição de temperatura no chip tenderá a um estado de equilíbrio.

Neste caso,

$$\frac{\partial T(t, x)}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

e obtemos que

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial T(x)}{\partial x} \right) = Q(x), \quad (3)$$

Se a quantidade de calor gerada e retirada do sistema for conhecida, assim como a temperatura nos extremos ( $x = 0$  e  $x = L$ ), podemos obter soluções de equilíbrio resolvendo numericamente esta equação. Neste trabalho vamos fazer uso do método de elementos finitos.

## 3 Método de Elementos Finitos

Apresentamos aqui uma breve introdução ao método de elementos finitos para solução da equação:

$$L(u(x)) := (-k(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0 \quad (4)$$

onde  $k(x) > 0$ ,  $q(x) \geq 0$ ,  $k(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $q(x), f(x) \in C[0, 1]$ . Uma solução clássica desta equação é uma função

$$u(x) \in V_0 = \{v \in C^2[0, 1] : v(0) = v(1) = 0\}$$

satisfazendo (4). Por outro lado se  $u(x) \in V_0$  é solução de (4) e  $v(x) \in V_0$  temos que:

$$\int_0^1 L(u(x))v(x) \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx \quad .$$

Integrando por partes o primeiro termo de  $L(u(x))$  e usando que  $u$  e  $v$  se anulam nos extremos do intervalo, obtemos:

$$\int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx \quad , \forall v \in V_0 \quad . \quad (5)$$

Por outro lado, se  $u(x) \in V_0$  satisfaz (5), então  $u(x)$  é solução de (4), ou seja as formulações (4) e (5) são equivalentes para  $u(x) \in V_0$ . Agora, ao passo que na equação (4) uma solução necessariamente tem que ser duas vezes continuamente diferenciável, a equação (5) pode ser formulada para funções mais gerais. Podemos escolher  $u(x)$  e  $v(x)$  no espaço  $U_0$  das funções contínuas, continuamente diferenciáveis por partes (com derivadas limitadas) e que se anulam nos extremos de  $[0, 1]$ . O problema de determinar  $u \in U_0$  tal que

$$\int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] \, dx = \int_0^1 f(x)v(x) \, dx \quad , \forall v \in U_0 \quad (6)$$

é a chamada versão fraca da equação (4) (onde a função  $f$  também pode ser admitida como sendo contínua por partes e limitada). Vamos observar que

$$\langle u, v \rangle_L = \int_0^1 [k(x)u'(x)v'(x) + q(x)u(x)v(x)] \, dx$$

define um produto interno no espaço  $U_0$ . As seguintes propriedades  $\langle u, v \rangle_L = \langle v, u \rangle_L$ ,  $\langle \alpha u, v \rangle_L = \alpha \langle u, v \rangle_L$ ,  $\langle u_1 + u_2, v \rangle_L = \langle u_1, v \rangle_L + \langle u_2, v \rangle_L$  e  $\langle u, u \rangle_L \geq 0$  são de verificação imediata. Para concluir que  $\langle u, u \rangle_L = 0$  implica que  $u = 0$  no caso em que  $q(x) = 0$ , observe que necessariamente  $u'(x) = 0$  em  $[0, 1]$  e portanto  $u$  deve ser constante. Como vale 0 nos extremos do intervalo,  $u$  é a função nula.

Vamos agora introduzir o método de Ritz-Raleigh para a aproximação da solução do problema (6) (veja também a seção 11.5 do livro texto do Burden / Faires). A aproximação será determinada por um método de mínimos quadrados em um subespaço de dimensão finita  $U_n$  de  $U_0$ , através da projeção ortogonal da solução  $u(x)$  de (6) em  $U_n$ . O problema é que desconhecemos  $u(x)$  (que é quem gostaríamos

de determinar ...). Como projetá-la em  $U_n$  ? Isto se torna viável ao substituirmos o produto interno usual  $\langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x) dx$  pelo produto interno  $\langle u, v \rangle_L$  oriundo do problema (6). Neste caso a projeção ortogonal  $\bar{u}_n$  de  $u(x)$  (solução de (6)) em  $U_n$  é tal que  $\langle u - \bar{u}_n, v_n \rangle_L = 0 \forall v_n \in U_n$ , ou seja,  $\langle \bar{u}_n, v_n \rangle_L = \langle u, v_n \rangle_L$ . Usando o fato de que  $u$  é solução de (6) e que  $U_n \subset U_0$  temos que para todo  $v_n \in U_n$ ,  $\langle u, v_n \rangle_L = \langle f, v_n \rangle$ . Assim, podemos obter a projeção ortogonal de  $u$  em  $U_n$  obtendo a função  $\bar{u}_n$  tal que:

$$\langle \bar{u}_n, v_n \rangle_L = \langle f, v_n \rangle, \forall v_n \in U_n. \quad (7)$$

A função  $\bar{u}_n$  minimiza o valor de  $\|u - v_n\|_L = \langle u - v_n, u - v_n \rangle_L^{1/2}$ , para  $v_n \in U_n$  (ou seja,  $\bar{u}_n$  é a melhor aproximação da solução  $u$  no espaço  $U_n$ , que determinaremos mesmo desconhecendo u!). Para obter a solução de (7), precisamos de uma base  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  de  $U_n$ . Escolhida a base, basta resolver as equações  $\langle \bar{u}_n, \phi_i \rangle_L = \langle f, \phi_i \rangle, i = 1, \dots, n$ . Escrevendo  $\bar{u}_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$ , chegamos ao sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle_L & \langle \phi_2, \phi_1 \rangle_L & \dots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle_L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \phi_1, \phi_n \rangle_L & \langle \phi_2, \phi_n \rangle_L & \dots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_1 \rangle \\ \dots \\ \langle f, \phi_n \rangle \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 3.1 Escolha do espaço $U_n$ e sua base: Elementos Finitos

Iremos escolher  $U_n$  como o espaço de Splines Lineares  $S_{2,n}^0[0, 1]$  com nós uniformemente espaçados em  $[0, 1]$ . Tomando  $h = 1/(n + 1)$  e  $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n + 1$  teremos:

$$S_{2,n}^0[0, 1] = \{s(x) \in C[0, 1] : s(0) = s(1) = 0 \text{ e } s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1\},$$

ou seja, cada spline em  $S_{2,n}^0[0, 1]$  é uma função contínua em  $[0, 1]$ , se anulando nos extremos e coincidindo com uma reta entre cada dois nós. Cada spline em  $S_{2,n}^0[0, 1]$  fica unicamente determinado através de seus valores nos nós  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . (Verifique que  $S_{2,n}^0[0, 1]$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$ .) Uma base para este espaço de Splines é dada pelas funções "chapéu"  $\phi_i(x)$  que valem 0 fora de  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ ,  $\phi_i(x) = (x - x_{i-1})/h$  em  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $\phi_i(x) = (x_{i+1} - x)/h$  em  $[x_i, x_{i+1}]$ . O intervalo  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  é chamado o suporte da função  $\phi_i$ , fora dele a função se anula. No método de elementos finitos procura-se utilizar bases cujos elementos tenham suportes "pequenos". Note que a intersecção entre os interiores dos suportes de  $\phi_i$  e  $\phi_j$  será não vazia apenas se  $|i - j| \leq 1$ . Decorre que,  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_L = 0$  se  $|i - j| > 1$ . Isto faz com que a matriz do sistema linear (8) seja **tridiagonal**. Além disso temos que:

$$\langle f, \phi_i \rangle = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\phi_i(x) dx.$$

Observe ainda que  $\phi_i'(x)$  é nula fora de  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ , vale  $1/h$  em  $(x_{i-1}, x_i)$  e  $-1/h$  em  $(x_i, x_{i+1})$ . No caso em que  $k(x) = 1$  e  $q(x) = 0$  (veja (4)) a matriz do sistema (8) é tridiagonal com valores  $2/h$  na diagonal principal e  $-1/h$  nas diagonais vizinhas a esta.

### 3.2 Montagem da matriz e solução do sistema

Para montar o sistema (8) e resolvê-lo você deverá utilizar as rotinas que desenvolveu nas **tarefas computacionais 1 e 2** do curso. A montagem da matriz requer a avaliação dos produtos internos  $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_L$ , para  $|i - j| \leq 1$  e  $\langle f, \phi_i \rangle$ . Para tanto você deve aproximar os valores das integrais correspondentes pela fórmula de Gauss de dois pontos, em cada subintervalo de nós consecutivos  $[x_{i-1}, x_i]$  onde o integrando não se anula<sup>1</sup>. Uma vez montado o sistema tridiagonal, este deve ser resolvido pelo algoritmo LU para matrizes tridiagonais desenvolvido na Tarefa 1.

### 3.3 Solução do método de elementos finitos

Uma vez resolvido o sistema (8) obtemos a função  $\bar{u}_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x)$  solução de (6), que melhor aproxima a solução  $u(x)$  de (5) (e portanto de (4) caso  $u(x) \in C^2[0, 1]$ ). Refinando-se o problema (ou seja, aumentando o valor de  $n$  e consequentemente reduzindo  $h$ ) melhora-se a aproximação. Se a solução  $u(x)$  for suficientemente diferenciável teremos que  $\|\bar{u}_n(x) - u(x)\| = O(h^2)$ .

<sup>1</sup>Algumas integrais necessitam intervalos da forma  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Elas devem ser separadas em integrais nos intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $[x_i, x_{i+1}]$  e a fórmula de Gauss deve ser usada em cada um deles.

### 3.4 Condições de fronteira não homogêneas

O que fazer se na equação (4) as condições de fronteira forem  $u(0) = a$  e  $u(1) = b$ ? Pode-se reduzir este problema ao caso homogêneo resolvendo-se a equação

$$L(v(x)) = f(x) + (b-a)k'(x) - q(x)(a + (b-a)x) = \tilde{f}(x), \quad v(0) = v(1) = 0.$$

Mostre que neste caso  $u(x) = v(x) + a + (b-a)x$  é a solução da equação (4) com condições de fronteira  $u(0) = a$  e  $u(1) = b$ .

### 3.5 Intervalo $[0, L]$

Quando o intervalo para a equação diferencial for  $[0, L]$ , usamos splines lineares neste intervalo com nós igualmente espaçados tomando-se  $h = L/(n+1)$  e  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n+1$ . As expressões para a base formada por funções "chapéu" bem como a adaptação para condições de contorno não homogêneas ficam como exercício.

## 4 Orientações para a execução da tarefa

### 4.1 Observações gerais

- O objetivo desse projeto é analítico e exploratório. Você deve usar o roteiro abaixo apenas como guia, mas recomendamos tentar explorar além do sugerido e discutir as análises no relatório.
- Tente buscar valores reais de parâmetros além dos aqui fornecidos, e discuta no relatório a influência de cada parâmetro no relatório com exemplos reais ou simulados.
- O projeto pode ser feito em duplas (a mesma dupla das Tarefas 1 e 2).
- Apenas um aluno deve entregar o projeto, destacando no relatório e código o nome de ambos os alunos.
- A entrega deve constar de relatório (em pdf), contendo a análise do problema estudado e resultados, e do programa fonte do código usado para as simulações computacionais (em c ou python). O relatório e o programa podem ser entregues em um arquivo compactado único.

### 4.2 Validação

No primeiro passo do projeto você deve implementar o método de elementos finitos (veja Seção 3) para resolver a equação (4) com  $q(x) \equiv 0$ , no intervalo  $[0, L]$  e condições de contorno  $u(0) = a$ ,  $u(L) = b$ . Teste o programa com o exemplo no intervalo  $[0, 1]$  onde  $k(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ ,  $f(x) = 12x(1-x) - 2$ , com condições de contorno homogêneas. Neste caso, a solução exata é  $u(x) = x^2(1-x)^2$ . Verifique que a convergência do método é de segunda ordem<sup>2</sup> calculando as aproximações com  $n = 7, 15, 31$  e  $63$ , avaliando em cada caso  $\|\bar{u}_n - u\| = \max_{i=1, \dots, n} |\bar{u}_n(x_i) - u(x_i)|$ . Descreva esta análise no relatório.

### 4.3 Equilíbrio com forçantes de calor

Vamos considerar que o chip seja formado apenas de silício ( $k(x) = k = 3,6W/(mK)$ ), considerando que há produção de calor pelo chip e que exista resfriamento. Vamos assumir que o chip esquenta mais em sua parte central que nas bordas, o que pode ser modelado por uma Gaussiana da seguinte forma,

$$Q_+(x) = Q_+^0 e^{-(x-L/2)^2/\sigma^2} \quad (9)$$

com  $Q_+^0$  uma constante indicando o máximo de calor gerado no centro do chip e  $\sigma$  controlando a variação de geração de calor em torno do ponto central do chip. Se  $\sigma$  for muito pequeno, podemos ter um calor gerado praticamente somente no centro do chip.

Quanto ao resfriamento, podemos modelar de forma análoga, ou, por exemplo, assumir que o resfriamento se dá de forma uniforme ( $Q_-(x) = Q_-^0$  constante), ou ainda que o resfriamento seja mais intenso próximo dos extremos, usando

$$Q_-(x) = Q_-^0 \left( e^{-(x)^2/\theta^2} + e^{-(x-L)^2/\theta^2} \right). \quad (10)$$

---

<sup>2</sup>O erro tende a zero proporcionalmente a  $h^2$ .

Use o seu código de elementos finitos para simular algumas situações de equilíbrio variando parâmetros do modelo conforme considere adequado à aplicação real. Comece pelo caso mais simples, com calor gerado e retirado constantes, e vá acrescentando complexidade. Relate o que observou no relatório.

#### 4.4 Equilíbrio com variação de material

Suponha agora que no bloco do processador tenhamos o chip, formado de silício, envolto por outro material. Isso faz com que  $k$  dependa de  $x$ , por exemplo como

$$k(x) = \begin{cases} k_s, & \text{se } x \in (L/2 - d, L/2 + d), \\ k_a, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (11)$$

sendo  $k_s$  a condutividade térmica do silício e  $k_a$  a do material que envolve o chip e forma o bloco.

Usando o seu código de elementos finitos você pode verificar, por exemplo, o que acontece se o material que envolve o chip for alumínio ( $k_a = 60W/mK$ ), ou outros materiais. Inclua essa análise no relatório.