::: FORMULARIO :::

::: Premessa :::

- Input: $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ e $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ (coordinate dei punti).
- $n+1$ punti che definiscono n intervalli.

::: Interpolazione polinomiale :::

- Polinomio interpolante di grado n:

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} c_i \left[\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right]$$

  Es. se $n = 2$ (3 punti), $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)$.
- I parametri $\{c_0, c_1, \dots, c_n\}$ si cacolano (in tempo quadratico e spazio lineare) con lo schema di calcolo a piramide.

::: Spline quadratica :::

- Per $x \in [x_k, x_{k+1}]$, ho la parabola:

$$f_k(x) := y_k + z_k(x - x_k) + \frac{z_{k+1} - z_k}{2(x_{k+1} - x_k)}(x - x_k)^2$$

  per ogni $k = 0, ..., n-1$ (complessivamente n parabole).
- I parametri $z_0, \dots, z_n$ (intepretazione $z_k := f'(x_k)$) si ricavano con ricorsione di ordine uno (complessità lineare).
- Il valore iniziale di z_0 è assegnato, per gli altri:

$$z_{k+1} = -z_k + 2\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

::: Spline cubica (naturale) :::

- Per $x \in [x_k, x_{k+1}]$, ho la cubica:

$$f_k(x) = \frac{z_{k+1}(x - x_k)^3 + z_k(x_{k+1} - x)^3}{6h_k} + \left(\frac{y_{k+1}}{h_k} - \frac{h_k}{6} z_{k+1} \right)(x - x_k) + \left(\frac{y_k}{h_k} - \frac{h_k}{6} z_k \right)(x_{k+1} - x),$$

  per ogni $k = 0, ..., n-1$, dove $h_k := (x_{k+1} - x_k)$ reppresenta l'ampiezza dell'intervallo su cui è definita la cubica.
- I parametri $z_0, \dots, z_n$ (intepretazione $z_k = f''(x_k)$) si ricavano mediante risoluzione di un sistema lineare di $n-1$ equazioni nelle $n-1$ incognite $z_1, \dots, z_{n-1}$, mentre $z_0 = z_n = 0$ per la condizione di naturalità. Le $n-1$ equazioni del sistema sono:

$$h_{k-1}z_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)z_k + h_k z_{k+1} = 6\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} \right),$$

  con $k = 1, \dots, n-1$. Per poi se $h_k = 1$ per ogni k (ovvero le x dei punti sono equidistanti ed a distanza uno), le equazioni si riscrivono come:

$$z_{k-1} + 4z_k + z_{k+1} = 6(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

::: Interpolazione Trigonometrica :::

- Premessa: in questa formula, ho n punti (e non $n+1$ come nelle altre) di coordinate $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n-1}$ ed assumo n dispari.
- La funzione interpolante è:
$$f(x) := C + \sum_{j=1}^{m} \left[a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)\right],$$
e dipende da n parametri (quindi $m = \frac{n-1}{2}$).
- Se i punti di appoggio dividono l'intervallo $[0, 2\pi]$ in n parti uguali, allora valgono le seguenti formule:
$$a_j = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[y_i \cos(jx_i)\right], \quad \forall j = 0, 1, \dots, m$$
$$b_j = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[y_i \sin(jx_i)\right], \quad \forall j = 1, \dots, m,$$
e $C = \frac{a_0}{2}$, con a_0 che si ricava dalla formula dei coseni (che da' semplicemente $a_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i$, ovvero C è il valore medio delle y).

::: Regressione lineare :::

- Dati n punti $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$ trovo retta rappresentativa di equazione $y = mx + q$
- $m = \frac{\sum_i x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_i x_i^2 - n\overline{x}^2}$ e $q = \overline{y} - m\overline{x}$ con $\overline{x} = \frac{\sum_i x_i}{n}$ e $\overline{y} = \frac{\sum_i y_i}{n}$

::: Integrazione numerica :::

- Approssimo l'integrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ dividendo l'intervallo $[a, b]$ in n parti mediante gli $n+1$ punti $x_0, x_1, \dots, x_n$ con $x_0 = a$ e $x_n = b$.
- Somma aree trapezi $A_{tr} = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$