Algoritmi Numerici (Parte I)

[Lezione 3] Numeri razionali

Alessandro Antonucci
alessandro.antonucci@supsi.ch

https://colab.research.google.com/drive/1Vz6HUgSJLjvMZCDgFlO8nrMYXECa310t

I Numeri Razionali e la Divisione

- Moltiplicazione è addizione iterata (col segno per interi)
- Divisione operazione inversa alla moltiplicazione
- L'insieme degli interi non è chiuso rispetto alla divisione

  $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mathrm{DIVISIONE}(a, b) \in \mathbb{Z}$ solo se $|a|$ multiplo di $|b|$
- Soluzione? Allargare l'insieme definendo a/b
- L'insieme allargato $\mathbb{Q}$ si chiama dei numeri razionali
- I razionali si esprimono com rapporti di numeri interi

  (primi fra loro, a/b e $(ka)/(kb)$ sono lo stesso numero)

Quanti sono i numeri razionali?

- Infiniti, ma in corrispondenza uno a uno con i naturali
- Ogni intero è razionale ($\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$) Es. 135 = 135/1
- Elementi $\mathbb{Q}$ su matrice con infinite righe e colonne

  $a/b \in \mathbb{Q}$ con $b > 0$ su elemento di riga a e colonna b

...	...	...	...	...	...	...	...	
...	-3/3	-2/3	-1/3	0/3	1/3	2/3	3/3	...
...	-3/2	-2/2	-1/2	0/2	1/2	2/2	3/2	...
...	-3/1	-2/1	-1/1	0/1	1/1	2/1	3/1	...

Algoritmo di ricopertura (a spirale)
produce corrispondenza con i naturali

Rappresentazione razionali in base 10

Se a/b (non necessariamente ai minimi termini) tale che

$$b = 10^k$$

il numero ha una rappresentazione decimale (finita)

Es. $134.75 = \frac{13475}{100}$

Somma potenze positive (sx del punto) e negative (dx)

$134.75 = 134 + .75$

$134 = 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

$0.75 = 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$

Due Osservazioni

1. La stessa cosa si può fare con basi diverse da 10
2. I numeri si possono leggere con l'algoritmo di Horner (adattato al caso di potenze negative)

Horner per i numeri "frazionari"

Chiamiamo (solo in questo corso) frazionari
i numeri razionali positivi compresi fra 0 e 1

- Horner per i naturali scorre da sx verso dx
- moltiplica per la base
- somma la cifra successiva (a dx)

- Horner per i frazionari scorre da dx verso sx
- divide per la base
- somma la cifra successiva (a sx)

$$.011_2 = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = .375_{10}$$

$1/2 + 1 = 3/2$
$(3/2)/2 + 0 = 3/4$
$(3/4)/2 + 0 = 3/8 = .375$

Horner inverso per numeri frazionari

- La funzione `mod` è il resto della divisione intera
- Per frazionari serve il "resto" della moltiplicazione intera
- Funzione `int` che da' parte intera di un numero
  int(x·b) è una cifra compresa fra 0 e b-1!

int(0.375·2)=int(0.75)=0

int((0.75-0)·2)=int(1.5)=1

int((1.5-1)·2)=int(1)=1

int((1-1)·2)=int(0)=0

int((0-0)·2)=int(0)=0

0.01100_2

Approssimazione di un numero frazionario

Approssimare con n cifre un numero frazionario in base b?

- Troncamento: trascrivo solo le prime n cifre
- Arrotondamento: scelgo il numero con n cifre più vicino

Approssimare 0.177_{10} con un numero di due cifre?

0.17 (troncamento), 0.18 (arrotondamento)

Approssimare 0.101_2 con un numero di due cifre?

0.10_2 (troncamento), 0.11_2 (arrotondamento)

Troncamento? Banale.
Arrotondamento? Guarda solo cifra $n+1$-esima!
Base 10? cifra$_{n+1} \geq 5$ eccesso, cifra$_{n+1} < 5$ difetto
Base 2? cifra$_{n+1} = 1$ eccesso, cifra$_{n+1} = 0$ difetto

Esercizi

Conversioni:

- $.5371_8 = \ldots_{10} = .685791015625_{10}$
- $.686_{10} = \ldots_8 =$

  $.5\overline{371666213207126010142233513615237574733105503453004061115645706517676355442641}$

  $\overline{6254020304467227432477}_8$
- $.52_{10} = \ldots_2 = .\overline{10000101000111101011}_2$
- $.1A0F_{16} = \ldots_2 = .0001101000001111_2$
- $.517_8 = \ldots_{16} = .101001111_2 = .A78_{16}$
- $\pi \simeq \ldots_3 = 10.01020_3$ (5 cifre dopo virgola arrotodate)
- $10.0102_3 = \ldots_{10}$