Algoritmi Numerici (Parte III) [Lezione 2] Metodo di Eliminazione di Gauss

Alessandro Antonucci alessandro.antonucci@supsi.ch

Algoritmo di Sostituzione

Sistema triangolare si risolve per sostituzione (dal basso verso l'alto)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 2 + x_2 - 2x_3 = 2 - 3 - 6 = -7 \\ x_2 = -x_3 = -3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$
$$x_3 = 3$$
complessità $O(N^2)$

Problema Generale

Dato un sistema qualunque (= non triangolare)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- IDEA: trasformare sistema in triangolare equivalente
- Equivalente = stesse soluzioni
- Trasformazioni equivalenti = cambiano aspetto sistema non le soluzioni

Due Trasformazioni Equivalenti

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$
 "Box"
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Swap row 1 ⇔ row 2

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

• 3.0 × row 2

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1-x_2+2x_3=2 & \boxed{1 & -1 & 2 & 2} \\ 6x_1-3x_2-3x_3=0 & \boxed{6 & -3 & -3 & 0} \\ x_1+x_2+x_3=3 & \boxed{1 & 1 & 1 & 3} \end{array} \right.$$

Trasformazioni Equivalenti

IF
$$a = b$$

THEN
$$a + 2 = b + 2$$

IF
$$a = b e c = d$$

THEN
$$a + c = b + d$$

REGOLE

- Riga per costante
- Riga meno (più) altra riga
- Swap righe
- Posso sommare ad un'equazione un'altra equazione senza che la soluzione del sistema cambi
- Gauss = trasformazioni equivalenti per rendere triangolare un sistema qualunque

Gauss (2×2)

- Rendere il sistema triangolare?
 Annichilire (rendere nullo) l'elemento dalla seconda riga prima colonna
- Sottraggo alla seconda riga la prima moltiplicata per k
- Con $k = \frac{2}{5}$ l'elemento in riga2-col1 si annichila

5	2	-3
2	1	6

5	2	-3
0	$1-\frac{4}{5}$	$6 + \frac{6}{5}$

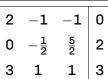
5	2	-3
0	<u>1</u>	<u>36</u> 5

Gauss (3×3)

- Annichilisco i (due)
 elementi non diagonali
 della prima colonna
- Seconda riga meno prima moltiplicata per $k=rac{1}{2}$

• Terza riga meno prima moltiplicata per $k = \frac{3}{2}$

2	-1	-1	0
1	-1	2	2
3	1	1	3



2	-1	-1	0
0	$-\frac{1}{2}$	<u>5</u>	2
0	<u>5</u>	<u>5</u>	3

 Sistema non ancora triangolare, ma ultime due righe sono sistema 2×2, agisco ricorsivamente!

Gauss in Python

```
def gauss(box):
for k in range(len(box) -1):
  pivot = box[k][k]
  for i in range(k+1,len(box)):
    coeff = box[i][k]/pivot
    for i in range(k, len(box[0])):
      box[i][i] = coeff*box[k][i]
return box
```

Tre cicli for nidificati, complessità $O(n^3)$

Scelta del Pivot

- Se pivot = 0, coeff non può essere calcolato
- Se pivot è piccolo, coeff è grande
- L'equazione del pivot viene moltiplicata per coeff, coeff grande introduce imprecisione nella rappresentazione
- Swap di riga e colonna permettono di cambiare il pivot
- Swap pivot A_{kk} con elemento più grande in valore assoluto A_{i*j*}

$$(i^*, j^*) = \underset{\substack{i=k,...,n\\j=k,...,n}}{\operatorname{max}} |A_{ij}|$$