Algoritmi Numerici (Parte II)

[Lezione 1] Algoritmo di bisezione e regula falsi

Alessandro Antonucci

alessandro.antonucci@supsi.ch

https://colab.research.google.com/drive/1l5_Nsbk2LIETfD3IDm74w6W1OHhrjRcB

Bracketing

- Data una funzione f (continua)
- Se sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$,

  la funzione cambia segno,

  ovvero $f(a) \cdot f(b) < 0$
- Allora la funzione ha uno zero

  in questo intervallo,

  ovvero $\exists\, x^* \in [a, b]$ tale che $f(x^*) = 0$

La bisezione

- Dopo aver localizzato x^* sull'intervallo $[a, b]$
- Prendo il punto medio $c := \frac{a+b}{2}$
- La funzione cambia segno su $[a, c]$ oppure su $[c, b]$
- Nel primo caso $x^* \in [a, c]$,

  nel secondo $x^* \in [c, b]$

In entrambi i casi, il nuovo intervallo è la metà del vecchio

La bisezione (pseudo codice)

```
if f(a)*f(b)<0:
  for k in range(n):
    c = (a+b)/2;
    if f(a)*f(c) < 0:
      b = c
    else
      a = c
```

L'algoritmo viene iterato

n (numero fissato) volte

oppure

fino a quando

$|b - a|$ diventa piccolo

Promemoria

- Dato l'intervallo $[a, b]$:
  - la sua ampiezza è $b - a$
  - il suo punto medio $\frac{a+b}{2}$
- Es. l'intervallo $[4, 10]$ ha ampiezza 6 e punto medio $x = 7$
- Se $x^* \in [a, b]$, la stima puntuale è il punto medio $c := \frac{a+b}{2}$
- L'errore peggiore è $\epsilon_{worst} = \frac{b-a}{2}$
- Ogni altra stima produrrebbe un errore superiore

Analisi precisione

- Intervallo iniziale $[a^0, b^0]$, stima puntuale $c^0 := \frac{a^0+b^0}{2}$
- $x^* \in [a^0, b^0]$ e $\epsilon^0 := |x^* - c^0| < \frac{b^0-a^0}{2}$
- Analogamente, $\epsilon^k < \frac{b^0-a^0}{2^{k+1}}$

Con la bisezione posso quindi prevedere
quante iterazioni servono per rendere l'errore minore
di un valore prefissato

Osservazione

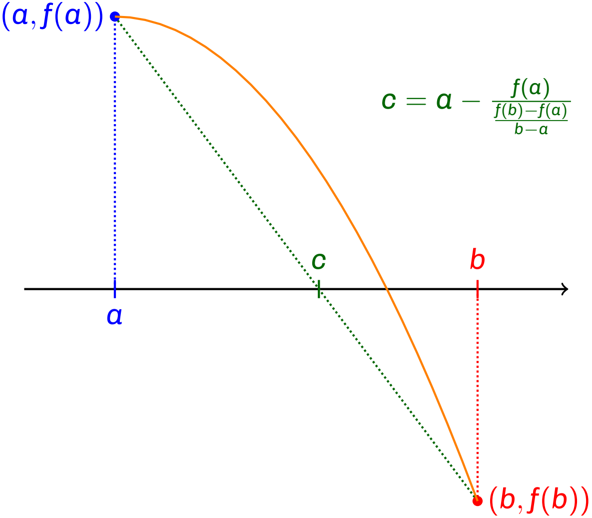
- L'algoritmo di bisezione si basa sulla scelta di un punto c interno all'intevallo $[a, b]$
- Scegliere il punto medio ha il vantaggio/svantaggio di rendere il nuovo intervallo la metà di quello vecchio
- Ogni altra scelta di $c \in [a, b]$ permette comunque di procedere
- In particolare, nella scelta di c può essere utile considerare il valore (e non solo il segno) della funzione in $f(a)$ e $f(b)$

Regula Falsi

- Variante dell'algoritmo di bisezione
- c è il punto d'incontro con l'asse x della retta che passa per i punti di coordinate $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

$$c := a - \frac{f(a)}{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Regula falsi



Regula Falsi (ii)

- Tipicamente, dopo un certo numero di iterazioni, la regula falsi sposta sempre l'estremo destro (o sempre quello sinistro) dell'intervallo
- Se sull'intervallo la funzione è sempre concava (o convessa), la retta che congiunge i due punti estremi è sempre a sx (o sempre a dx) dello zero della funzione
- In pratica, l'ampiezza dell'intervallo non tende a zero, ma il punto $\boldsymbol{c}$ tende a $\boldsymbol{x}^*$

Ibrido Regula Falsi + Bisezione

- Dato $[a, b]$ (su cui f cambia segno)
- $[a, b] = \textbf{\textit{RegFals}}(a, b)$ (una volta RF)
- WHILE$(\dots)\{[a, b] = \textbf{\textit{Bisez}}(a, b)\}$

  (itero bisez finché non si muove l'estremo fisso della RF)
- Ricomincio con RF

Supera problema estremo fisso della RF