Algoritmi Numerici (Parte II)

[Lezione 3] Convergenza

Alessandro Antonucci
alessandro.antonucci@supsi.ch

https://colab.research.google.com/drive/1RrlLMSom2M0E3iQk-XbDm66pDxtGAVtR

Convergenza

Una successione di valori $x_0, x_1, x_2, \ldots$ converge verso un valore x^* se la distanza/errore $\epsilon_k := | x_k - x |$ tende sempre più ad avvicinarsi a zero con il crescere di k

$$\lim_{k \to +\infty} \epsilon_k = 0$$

Un algoritmo iterativo per la ricerca degli zeri di una funzione genera una successione di valori $x_0, x_1, x_2, \ldots$, tale che, nei casi in cui converge, tende verso il valore x^* di uno zero

Ordine di convergenza

Un algoritmo iterativo ha ordine di convergenza p se esistono due numeri $C \geq 0$ e $p \geq 0$ tali che

$$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = C,$$

ovvero $|x_{k+1} - x^*| < C|x_k - x^*|^p$

Se $p = 1$ si dice che l'ordine di convergenza è lineare superlineare con $1 < p < 2$, quadratico con $p = 2$

Convergenza dei vari algoritmi

- L'algoritmo della bisezione e le sue varianti convergono linearmente ($p = 1$)
- L'algoritmo della secante converge superlinearmente ($p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1.618$)
- L'algoritmo della tangente converge quadraticamente ($p = 2$)

Convergenza su punti a tangenza orizzontale

- Se $f'(x^*) = 0$ (zero con tangente orizzontale), l'algoritmo della tangente "rallenta" e la convergenza è lineare e non quadratica
- Es. con $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x$ allora $x^* = 0$ e $f'(x^*) = 0$.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1	1	2
1	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
2	$\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$		

Ogni iterazione dimezza l'errore, convergenza lineare!

la stessa cosa succede con l'algoritmo della secante