Algoritmi Numerici (Parte III)

[Lezione 2] Metodo di Eliminazione di Gauss

Alessandro Antonucci
alessandro.antonucci@supsi.ch

Algoritmo di Sostituzione

Sistema triangolare si risolve per sostituzione (dal basso verso l'alto)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad\; - x_2 - x_3 = 0 \\ \quad\quad\quad\;\; x_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = & 2 + x_2 - 2x_3 = 2 - 3 - 6 = -7 \\ x_2 = & -x_3 = -3 \\ x_3 = & 3 \end{cases}$$

complessità $O(N^2)$

Problema Generale

Dato un sistema qualunque (= non triangolare)

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- IDEA: trasformare sistema in triangolare equivalente
- Equivalente = stesse soluzioni
- Trasformazioni equivalenti = cambiano aspetto sistema non le soluzioni

Due Trasformazioni Equivalenti

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

"Box" $\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right|$

- Swap row 1 $\iff$ row 2

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

- $3.0 \times$ row 2

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right|$$

Trasformazioni Equivalenti

IF $a = b$

THEN $a + 2 = b + 2$

IF $a = b$ e $c = d$

THEN $a + c = b + d$

REGOLE

- Riga per costante
- Riga meno (più) altra riga
- Swap righe

- Posso sommare ad un'equazione un'altra equazione senza che la soluzione del sistema cambi
- Gauss = trasformazioni equivalenti per rendere triangolare un sistema qualunque

Gauss (2×2)

- Rendere il sistema triangolare? *Annichilire* (rendere nullo) l'elemento dalla seconda riga prima colonna
- Sottraggo alla seconda riga la prima moltiplicata per k
- Con $k = \frac{2}{5}$ l'elemento in riga2-col1 si annichila

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & -3 \\ 0 & 1 - \frac{4}{5} & 6 + \frac{6}{5} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{36}{5} \end{array}\right]$$

Gauss (3×3)

- Annichilisco i (due) elementi non diagonali della prima colonna

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- Seconda riga meno prima moltiplicata per $k = \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- Terza riga meno prima moltiplicata per $k = \frac{3}{2}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 3 \end{array}\right]$$

  - Sistema non ancora triangolare, ma ultime due righe sono sistema 2×2, agisco ricorsivamente!

Gauss in Python

```
def gauss(box):
  for k in range(len(box)-1):
    pivot = box[k][k]
    for i in range(k+1,len(box)):
      coeff = box[i][k]/pivot
      for j in range(k,len(box[0])):
        box[i][j] -= coeff*box[k][j]
  return box
```

Tre cicli for nidificati, complessità $O(n^3)$

Scelta del Pivot

- Se `pivot` $= 0$, `coeff` non può essere calcolato
- Se `pivot` è piccolo, `coeff` è grande
- L'equazione del `pivot` viene moltiplicata per `coeff`, `coeff` grande introduce imprecisione nella rappresentazione
- Swap di riga e colonna permettono di cambiare il pivot
- Swap pivot A_{kk} con elemento più grande in valore assoluto $A_{i^*j^*}$

$$(i^*, j^*) = \arg \max_{\substack{i=k,\dots,n \\ j=k,\dots,n}} |A_{ij}|$$