Algoritmi Numerici (Parte III)

[Lezione 4 e 5] Metodi Approssimati

Alessandro Antonucci
alessandro.antonucci@supsi.ch

Esempio scalare

- Equazione Lineare $5 \cdot x = 7$
- Decomposizione per differenza $5 = 8 - 3$
- riscrivo $8 \cdot x = 3 \cdot x + 7$
- Divido per il coefficiente $x = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{7}{8}$
- Ricorsione $x_{j+1} = \frac{3}{8} \cdot x_j + \frac{7}{8}$

k	x_k
0	0
1	0,875
2	1,203125
3	1,32617188
4	1,37231445
5	1,38961792
6	1,39610672
7	1,39854002
8	1,39945251

Esempio scalare

- Equazione Lineare $5 \cdot x = 7$
- Decomposizione per differenza $5 = 8 - 3$
- riscrivo $8 \cdot x = 3 \cdot x + 7$
- Divido per il coefficiente $x = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{7}{8}$
- Ricorsione $x_{j+1} = \frac{3}{8} \cdot x_j + \frac{7}{8}$

k	x_k
0	0
1	0,875
2	1,203125
3	1,32617188
4	1,37231445
5	1,38961792
6	1,39610672
7	1,39854002
8	1,39945251

Esempio scalare

- Equazione Lineare $5 \cdot x = 7$
- Decomposizione per differenza $5 = 8 - 3$
- riscrivo $8 \cdot x = 3 \cdot x + 7$
- Divido per il coefficiente $x = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{7}{8}$
- Ricorsione $x_{j+1} = \frac{3}{8} \cdot x_j + \frac{7}{8}$

k	x_k
0	0
1	0,875
2	1,203125
3	1,32617188
4	1,37231445
5	1,38961792
6	1,39610672
7	1,39854002
8	1,39945251

Esempio scalare

- Equazione Lineare $5 \cdot x = 7$
- Decomposizione per differenza $5 = 8 - 3$
- riscrivo $8 \cdot x = 3 \cdot x + 7$
- Divido per il coefficiente $x = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{7}{8}$
- Ricorsione $x_{j+1} = \frac{3}{8} \cdot x_j + \frac{7}{8}$

k	x_k
0	0
1	0,875
2	1,203125
3	1,32617188
4	1,37231445
5	1,38961792
6	1,39610672
7	1,39854002
8	1,39945251

Esempio scalare

- Equazione Lineare $5 \cdot x = 7$
- Decomposizione per differenza $5 = 8 - 3$
- riscrivo $8 \cdot x = 3 \cdot x + 7$
- Divido per il coefficiente $x = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{7}{8}$
- Ricorsione $x_{j+1} = \frac{3}{8} \cdot x_j + \frac{7}{8}$

k	x_k
0	0
1	0,875
2	1,203125
3	1,32617188
4	1,37231445
5	1,38961792
6	1,39610672
7	1,39854002
8	1,39945251

Esempio scalare

- Equazione Lineare $5 \cdot x = 7$
- Decomposizione per differenza $5 = 8 - 3$
- riscrivo $8 \cdot x = 3 \cdot x + 7$
- Divido per il coefficiente $x = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{7}{8}$
- Ricorsione $x_{j+1} = \frac{3}{8} \cdot x_j + \frac{7}{8}$

k	x_k
0	0
1	0,875
2	1,203125
3	1,32617188
4	1,37231445
5	1,38961792
6	1,39610672
7	1,39854002
8	1,39945251

Metodi Iterativi (Approssimati)

- Sistema lineare $\hat{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$
- Scompongo matrice coefficienti per differenza

$$\hat{A} = \hat{M} - \hat{N}$$

- Il sistema diventa $\hat{M} \cdot \vec{x} = \hat{N} \cdot \vec{x} + \vec{b}$
- Assumo $\hat{M}$ sia facilmente invertibile, $\hat{M}^{-1}$ nota
- Il sistema diventa $\vec{x} = \hat{M}^{-1} \cdot \hat{N} \cdot \vec{x} + \hat{M}^{-1} \cdot \vec{b}$
- Questa relazione può essere vista ricorsivamente:

$$\vec{x}_{n+1} = \hat{P} \cdot \vec{x}_n + \vec{q}$$

con $\hat{P} := \hat{M}^{-1} \cdot \hat{N}$, $\vec{q} := \hat{M}^{-1} \cdot \vec{b}$

Il metodo di Jacobi

- $\hat{M}$ facile da invertire? Prendiamo $\hat{M}$ diagonale!
- Matrici diagonali sono banalmente invertibili
  - L'inversa di una matrice diagonale è diagonale e sulla diagonale ci sono i reciproci
- Jacobi? $\hat{M}$ diagonale e sulla diagonale elementi di
- L'algoritmo di Jacobi ha complessità quadratica
- Prodotto $\hat{P} := \hat{M}^{-1} \cdot \hat{N}$ veloce perché $\hat{M}^{-1}$ è diagonale
  - il prodotto di una matrice diagonale per una matrice qualunque si ottiene moltiplicando le righe della seconda per gli elementi corrispondenti della diagonale della prima

Il metodo di Gauss-Seidel

- Dato un sistema lineare $\hat{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$
- Scompongo la matrice dei coefficienti per differenza

$$\hat{A} = \hat{M} - \hat{N}$$

- Il sistema diventa quindi $\hat{M} \cdot \vec{x} = \hat{N} \cdot \vec{x} + \vec{b}$
- Questa relazione può essere vista ricorsivamente

$$\hat{M} \cdot \vec{x}_{n+1} = \hat{N} \cdot \vec{x}_n + \vec{b}$$

- Dato $\vec{x}_n$ posso calcolare il secondo membro (ovvero i termini noti di un sistema)
- Se $\hat{M}$ è triangolare il sistema si risolve per sostituzione (complessità quadratica)

Un esempio dimostrativo

- Risolvere il sistema $\hat{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ con:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  usando:
  - due iterazioni dell'algoritmo di Jacobi
  - due iterazioni di Gauss-Seidel

- In entrambi i casi usare l'inizializzazione:

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Un esempio dimostrativo (Jacobi)

- $\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \hat{M} - \hat{N} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\hat{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- $\hat{P} := \hat{M}^{-1} \cdot \hat{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$
- $\vec{q} := \hat{M}^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- $\vec{x}_1 = \hat{P}\vec{x}_0 + \vec{q} = \vec{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ $(\,\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix})$
- $\vec{x}_2 = \hat{P}\vec{x}_1 + \vec{q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Un esempio dimostrativo (Gauss-Seidel)

- $\hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \hat{M} - \hat{N} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\hat{M} \cdot \vec{x_1} = \hat{N} \cdot \vec{x_0} + \vec{b} = \vec{b}$ *($\vec{x}_0$ è il vettore nullo)*

  $$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- $\hat{M} \cdot \vec{x_2} = \hat{N} \cdot \vec{x_1} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$

  $$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{7}{36} \\ -\frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

Rilassamento Gauss-Seidel

- Data la soluzione di Gauss-Seidel $\vec{x}_1^{\mathrm{GS}}$
- Posso combinarla con la soluzione precedente $\vec{x}_0$ per favorire la convergenza
- L'algoritmo diventa quindi
    - $\vec{x}_1^{\mathrm{GS}}$ tale che $M\vec{x}_1^{\mathrm{GS}} = N\vec{x}_0 + \vec{b}$
    - $\vec{x}_1 = \omega\vec{x}_1^{\mathrm{GS}} + (1 - \omega)\vec{x}_0$